UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

ARIEL DINIZ SANDES

EVOLUÇÃO E CRÍTICA DO MODELO DE UTILIDADE DESCONTADA

PORTO ALEGRE
2013

ARIEL DINIZ SANDES

EVOLUÇÃO E CRÍTICA DO MODELO DE UTILIDADE DESCONTADA

Trabalho de conclusão submetido ao curso de Graduação em economia, como quesito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo

PORTO ALEGRE

2013

ARIEL DINIZ SANDES

EVOLUÇÃO E CRÍTICA DO MODELO DE UTILIDADE DESCONTADA

Trabalho de conclusão submetido ao curso de Graduação em economia, como quesito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo

Aprovado em: Porto Alegre, ___ de _____ de 2013

_____

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo – Orientador
UFRGS

_____

Prof Dr. Julio César de Oliveira
UFRGS

_____

Prof. Dr. Sergio Marley Modesto Monteiro
UFRGS

AGRADECIMENTOS

Tendo terminado minha graduação, com prazer expresso meu agradecimento a todos aqueles que me permitiram concluí-la. A maioria das ações que levaram a este fim não será conhecida por mim ou até mesmo por quem as praticou. Agradeço, sem conhecê-los, a todos os pequenos atos de cortesia e gentileza que recebi.

Especialmente, agradeço aos professores que tive e, em particular, a meu orientador, Jorge Araújo, pelo alargamento de perspectiva que possibilitou e por suas sugestões de leitura.

Agradeço aos colegas e amigos que me acompanharam e aos colegas de trabalho, que, durante todo o período da graduação, estimularam minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço o apoio de minha família, essencial para completar esta tarefa.

Pour le simple envol d'un papillon
tout le ciel est nécessaire.

(Paul Claudel)

RESUMO

A racionalidade dos agentes econômicos é uma suposição fundamental dos modelos de alocação intertemporal. Apesar de sua formulação ter se tornado canônica, o próprio Samuelson não estava confiante nela. Neste trabalho traçamos o desenvolvimento do Modelo de Utilidade Descontada até sua axiomatização, observando que frequentemente a técnica matemática se impôs ao pensamento propriamente econômico. A partir da flexibilização dos postulados de estacionariedade e independência temporal, indicamos linhas de pesquisa que surgem questionando a formulação canônica, atentando para a emergência do Desconto Hiperbólico, mas pesando também a crítica feita a tal por Rubinstein. Por último, a partir do arcabouço de modelos de crescimento ótimo, mostramos que o desconto intertemporal implica uma escolha ética muitas vezes deixada de lado em favor de soluções matemáticas.

Palavras-chave: Desconto Intertemporal, Utilidade Descontada, Desconto Hiperbólico, Modelos de Crescimento, História do Pensamento Econômico.

Classificação JEL: B00, D01, D03, D91,

ABSTRACT

Rationality of economic agents is a fundamental postulate in intertemporal allocation models. Despite his formulation having become canonical, Samuelson himself was not confident of it. The present monograph presents the development of the Discount Utility Model until its axiomatization, noting that mathematical technique frequently trumped economic thought proper. By relaxing postulates of stationarity and time independence, we indicate that lines of research emerge which challenge the canonical formulation, taking specific notice of Hyperbolic Discounting, but also weighing its critique by Rubinstein. Lastly, within the framework of optimal growth models, we show that time discounting implies an ethical choice often overlooked in favour of mathematical solutions.

Keywords: Time Discounting, Discounted Utility, Hyperbolic Discounting, Growth Models, History of Economic Thought.

JEL Classification: B00, D01, D03, D91,

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Cruzamento de Curvas de Utilidade: Reversão de Preferências.....33
FIGURA 2: Uma Função de Utilidade Hipotética.....36
FIGURA 3: Fatores de Desconto para Diferentes Valores de α.....39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Payoffs do Procrastinador Antes de Dormir.....34

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....11
2. DESENVOLVIMENTO DO MODELO PADRÃO DE UTILIDADE DESCONTADA.....14
2.1 Von Böhm-Bawerk e Irving Fisher.....14
2.2 Ramsey e Samuelson.....16
2.3 Koopmans.....23
3. DESENVOLVIMENTOS FORA DO MODELO PADRÃO.....29
3.1 Ulisses e as Sereias.....29
3.2 Economia Comportamental.....32
3.3 Economia Mainstream.....37
3.4 A Crítica de Rubinstein.....43
4. CONSIDERAÇÕES ÉTICAS IMPLICADAS PELO DESCONTO INTERTEMPORAL.....45
4.1 O Modelo de Crescimento Ótimo de Phelps.....45
4.2 Considerações Éticas.....47
5. CONCLUSÃO.....53
6. REFERÊNCIAS.....55

1. INTRODUÇÃO

A racionalidade dos agentes é uma das pedras de toque da ciência econômica. Quando Adam Smith escreveu que devíamos ao interesse próprio dos açougueiros, cervejeiros e padeiros o nosso jantar e não a sua benevolência, caracterizando a ação da mão invisível e se tornando a figura preeminente da moderna economia, a racionalidade econômica deu um passo lento, mas firme, em direção a assumir um papel importante dentro do paradigma econômico atual.

Smith não tinha em mente os agentes com *rational expectations* como foram entendidos recentemente, mas esta proposição, possivelmente a mais importante[1] em toda a história econômica, deu impulso a uma série de estudos que se cristalizaram em torno de um agente econômico que se pergunta como alocar recursos escassos da melhor forma possível. George Stigler famosamente considerou esta segunda parte a mais importante, mas qualificou a primeira como de universalidade Newtoniana (STIGLER, 1976), deixando-nos com duas declarações de imensa relevância. Parafraseando Hilel, o Velho: “[...] este é todo o ensinamento, o resto é comentário. Vai e estuda.”[2]

Neste trabalho, no capítulo 2, será apresentada a evolução do modelo de escolha intertemporal dos agentes desde von Böhm-Bawerk, que começou a investigar seu funcionamento, até sua formalização por Tjalling Koopmans. Esta formulação era eminentemente racional, mas seus formuladores expressaram algumas reservas em relação a elas. Objetivar-se-á resgatá-las, bem com os motivos da adoção de tal formulação e de sua popularização. Por último, serão explicitados os postulados empregados por ela, para estudar suas violações.

A racionalidade foi atacada de diversos ângulos, isto é, estes postulados foram contestados. Uma destas frentes de combate foi a capacidade de os agentes econômicos seguirem planos de consumo definidos sobre um horizonte de tempo longo. Muitos autores sentiram que era improvável que uma pessoa pudesse

---

[1] <http://www.economist.com/node/3555259>

[2] Talmud Bavel, Shabat, 31a. No original: זו היא כל התורה כולה, ואידך - פירושה הוא, זיל גמור.

planejar seu consumo a cada instante por toda sua vida e se comprometer com este plano.

Uma solução trivial é permitir que a função de utilidade do agente mude ao longo do tempo, o que o levaria a reavaliar seus planos, mas não tornaria a mudança de curso irracional. Irracional seria o inverso: permanecer em uma trajetória Pareto-inferior na ausência de alguma restrição (STROTZ, 1956).

Diversas soluções *ad hoc* foram propostas para situações em que os agentes pareciam não respeitar as trajetórias às quais se comprometeram inicialmente. Um caso flagrante destes é a tendência possivelmente universal das pessoas de procrastinar. O efeito *mañana*, como o chamou o mesmo Robert Strotz, é facilmente reconhecível. Incontáveis dietas e regimes de exercícios que começariam semana que vem foram indefinidamente postergados até serem completamente abandonados. Os estudantes estão plenamente conscientes de que uma noite em claro não é o método mais produtivo de aprendizagem, mas seguem praticando-o.

São examinadas, no capítulo 3, algumas contribuições agrupadas genericamente como da Economia Comportamental ou do *Mainstream* neste sentido, por organização. Uma destas modificações propostas foi a alteração da taxa de desconto, de diversas formas, embora o desconto hiperbólico tenha ganhado notoriedade (RUBINSTEIN, 2003). A ideia, que será explorada em maior detalhe adiante, é aceitar que os procrastinadores são incapazes de maximizar sua utilidade e focar-se em alterar a taxa de desconto do modelo de consumo intertemporal de maneira que comporte estes agentes com força de vontade imperfeita (a maioria de nós).

Descontar o futuro hiperbolicamente significa avaliar utilidades entre dois períodos não apenas pela distância (temporal) entre os dois períodos em questão, mas também entre estes dois períodos e a origem (hoje). Neste caso, é possível que decisões inconsistentes sejam tomadas. Aqui se propõe um exemplo fácil de visualizar para ajudar na compreensão. Suponha-se que há um feriado amanhã. O governo, quase como o de Portugal, anuncia que ele será postergado para o ano

que vem, para infelicidade geral da nação. Se, entretanto, o governo português anunciasse a transferência do feriado em questão do ano de 2035 para 2036 (Portugual os cancelou), é provável que a reação geral fosse perto de indiferente. A inconsistência surge de sabermos que em 2035 os portugueses ficariam infelizes com a troca, mostrando a variação da taxa de desconto com a passagem do tempo ou, mais precisamente, a reversão de preferências.

Por último, é importante notar que dentro de todas estes modelos de desconto intertemporal está contida uma questão ética. Pensando, por exemplo, em desconto entre gerações: por que valorizaríamos o bem estar de nossos filhos e netos menos do que o nosso? Esta questão é importante num contexto de modelos ótimos de crescimento, com os quais o propósito deste trabalho é ilustrar as implicações éticas dos modelos de desconto intertemporal. Este será o objeto do capítulo 4.

A conclusão resume e organiza os comentários feitos ao longo do trabalho.

2. DESENVOLVIMENTO DO MODELO PADRÃO DE UTILIDADE DESCONTADA

Neste capítulo, busca-se apresentar como o Modelo de Utilidade Descontada se tornou padrão, desde as análises iniciais de von Böhm-Bawerk até a formalização deste por Tjalling Koopmans. As fontes principais serão os próprios trabalhos dos autores contemplados, com os seguintes objetivos: primeiramente, expor os motivos de sua popularização e resgatar as reservas expressadas por seus proponentes; também, apresentar os modelos e, especialmente, seus postulados para fundamentar a discussão sobre modelos que violam esses postulados, no capítulo 3 e a discussão ética, no capítulo 4.

A matemática será exibida na medida em que ilustrar algum argumento ou facilitar comparações, sem, em geral, preocupação com a demonstração de cada passo. O capítulo se divide em três seções de acordo com a natureza dos trabalhos discutidos, com a primeira tratando de von Böhm-Bawerk e Fisher, a segunda de Ramsey e Samuelson e a última de Koopmans.

2.1 Von Böhm-Bawerk e Irving Fisher

Desde a publicação de A Riqueza das Nações, há quase 250 anos atrás, uma infinidade de refinamentos foi adicionada à teoria econômica. Com a revolução marginalista e a ideia de utilidade eventualmente vindo a fazer parte do paradigma *mainstream* encontrado, por exemplo, no Foundations of Economic Analysis de Samuelson (1944).

Um desenvolvimento importante foi a adição da alocação intertemporal de recursos. Com isto, alguma suposição precisava ser feita em relação a como os agentes econômicos avaliam o passado, o presente e o futuro. John Rae, Jevons e Senior trataram do tema, mas é Eugen von Böhm-Bawerk (1889) quem começa a investigar o funcionamento desta avaliação, dentro de sua investigação maior sobre a natureza do juro. Ele considerava que valorizar o futuro menos que o presente era uma irracionalidade, quase uma falha de caráter. Mesmo assim, von Böhm-Bawerk

aceitou que os agentes assim agiam, “subestimando sistematicamente nossas necessidades futuras” (1988 (1889), p.279)

> “Enquanto este primeiro motivo se reduz a um erro de *avaliação*, há um *segundo* que, em meu entender, se baseia em uma *falha da vontade.* Com efeito, acredito ocorrer com frequência que alguém, colocado ante a escolha entre um prazer ou sofrimento presente ou um futuro, se decide pela alegria menor presente, embora saiba perfeitamente [...] que sua opção, no conjunto, não é vantajosa para seu bem-estar.” (VON BÖHM-BAWERK, 1988 (1889), p.280)

Von Böhm-Bawerk repetidamente invoca a importância dos trabalhos dos psicólogos para a investigação sobre a natureza da impaciência. Ele mesmo sugere três diferentes causas, embora uma causa seja técnica, ligada a diferentes produtividades de processos produtivos de variadas durações, e venha a ser contestada duramente por Fisher (1930). Como um caso excepcional, mas atestando a gama de possibilidades contemplada pela autor, é mencionado o caso em que a impaciência por um bem pode ser negativa, embora este caso possa ser levemente degenerado: a impaciência negativa ocorre quando a provisão relativa do bem no futuro é menor e portanto sua utilidade marginal é maior.

O autor não imaginava, fica evidente, sujeitos perfeitamente racionais. Seus agentes decidiam o futuro com base em sua capacidade muito “incerta e ilusória” (VON BÖHM-BAWERK, 1988 (1889), p.271) de imaginar o futuro. Além disso, essa imaginação exige um esforço mental que é ensinado pela civilização.

Encontramos em The Theory of Interest (FISHER, 1930) o próximo passo. Fisher formula um modelo simples em que o problema do agente é alocar seu consumo entre dois períodos sujeito a uma restrição orçamentária. Cada período é representado em um dos eixos das abscissas ou ordenadas. O agente emprestará sempre que a taxa de juros da economia for superior a seu grau de impaciência e tomará emprestado quando for menor, escolhendo o ponto onde a curva de indiferença de utilidade tangencia a restrição orçamentária. Nesta construção, a derivada da curva de indiferença pode ser interpretada como sendo a taxa de

preferência intertemporal. No modelo não-monetário de Fisher esta será também a taxa de juro de equilíbrio.

Irving Fisher diferenciava claramente taxa de juro de taxa de impaciência, elencando diversas causas positivas e negativas da impaciência e criticava explicitamente aqueles que consideravam que a impaciência fosse o único fator influenciando a formação da taxa de juros do mercado.

Seu trabalho, apesar da simplicidade do uso do diagrama de indiferença, propôs uma formalização muito prática das ideias marginalistas que já constavam do trabalho de von Böhm-Bawerk, o que contribuiu para sua permanência.

2.2. Samuelson e Ramsey

O matemático Frank P. Ramsey publicou, em 1928, um trabalho intitulado A Mathematical Theory of Saving, considerado o "*locus classicus",* como o título sugere, da teoria matemática da poupança (CHAKRAVARTY, 1962). Apesar de o trabalho ser anterior ao livro de Fisher em dois anos, ele apresenta uma ideia muito mais afim com as que tomarão corpo dentro do campo das trajetórias ótimas de consumo ao longo do tempo.

O ponto de partida de Ramsey é o quanto deve uma nação poupar. Para resolver esta questão ele cria um modelo *open-ended* de alocação intergeracional da riqueza da nação. Textualmente, Ramsey esclarece suas suposições simplificadoras:

> "É necessário fazer diversas suposições simplificadoras: devemos supor que nossa comunidade perdura para sempre sem mudança em seus números nem em sua capacidade para desfrutar [de sua riqueza] ou em sua aversão ao trabalho; que prazeres e sacrifícios em diferentes tempos podem ser calculados independentemente e somados; e que não são introduzidas novas invenções ou melhorias de organização a não ser aquelas que podem ser consideradas como condicionadas apenas pela acumulação de riqueza." (RAMSEY, 1928, p.543, tradução nossa)

Para facilitar a comparação com trabalhos futuros, é interessante verter as suposições de Ramsey para a linguagem técnica adota na economia. Ramsey expressa claramente, embora no estilo mais discursivo de sua época, que supõe, respectivamente: um horizonte de tempo infinito, uma população constante, uma função de utilidade constante, independência temporal, aditividade e uma tecnologia constante. Ramsey também supõe uma função desutilidade do trabalho, embora esta prática não seja continuada nos trabalhos examinados.

A primeira nota explicativa do autor esclarece o sentido do que tratamos por tecnologia constante dizendo que "elas [as novas invenções e melhorias de organização] devem ser do tipo que não ocorreriam sem um certo grau de acumulação, mas que poderiam ser previstas dado este grau" (RAMSEY, 1928, p.543, tradução nossa), o que pode ser lido como: certos avanços tecnológicos estão já subsumidos e se *confundem* com a própria acumulação de capital. As equações de Ramsey expressam a função de produção como função do trabalho e do capital, apenas. Adotando, na medida do possível, a notação tornada famosa por Robert Solow (1956), para efeitos de padronização interna deste trabalho, obtemos:

$$f(l,k) = c + s, \qquad s = \frac{dk}{dt}$$

Onde l denota trabalho, k capital, c consumo, s poupança e t o tempo.

Em seguida, o autor esclarece outras suposições que, entretanto, fogem ao escopo deste trabalho.

Um passo central na construção de Ramsey é o artifício de postular de uma utilidade máxima (finita) arbitrária, o *Bliss Point*[3], o que pode ser feito livremente, uma vez que transformações monotônicas são livres sobre as funções de utilidade ordinais. Ramsey, entretanto, não precisaria se preocupar com este tipo de raciocínio - não são feitas suposições sobre a forma da função de utilidade, como a

[3] Ponto de satisfação máxima

conhecida suposição de teoria de escolha do consumidor de convexidade das curvas de indiferença. O postulado do *Bliss Point*, contudo, tem efeito similar ao gerado por uma função de utilidade quase-côncava, quando usado em conjunto com a suposição de que a Utilidade da riqueza é sempre crescente.

> "Há, então, duas possibilidades lógicas: ou o nível de prazer aumentará em direção ao infinito ou ele se aproximará assintoticamente de um certo limite finito. O primeiro destes nós descartaremos baseados em que causas econômicas apenas nunca poderiam nos dar mais que um certo nível de prazer finito (chamado acima de o máximo nível concebível)." (RAMSEY, 1928, p.545, tradução nossa)

É importante esclarecer que há uma distinção entre a máxima Utilidade concebível e a atingível. *Bliss* refere-se à máxima Utilidade atingível. Ramsey explica o motivo desta técnica claramente: "Apenas desta maneira é possível tornar o montante pelo qual a utilidade fica aquém de *bliss* somado sobre o tempo uma quantidade finita." (RAMSEY, 1928, p.545, tradução nossa). A questão, matematicamente colocada, se resume a fazer uma integral convergir (CHAKRAVARTY, 1962). Esta preocupação se firmará em trabalhos subsequentes. Por ora, notamos que a motivação é de *técnica matemática.*

Como o que se está medindo é uma distância até a máxima utilidade e não a utilidade em si, o que se deseja é minimizar a seguinte integral:

$$\int_0^\infty (B - \big(U(k) + V(l)\big)dt$$

Onde B denota o Bliss Point, U a função utilidade e V a função desutilidade.

Ou, efetuando uma troca de variável de dt por dk:

$$\int_{k_0}^\infty \frac{(B - (U(k) + V(l))dk}{dk/dt}$$

Usando a primeira equação, obtemos:

$$\int_{k_0}^{\infty} \frac{(B - (U(k) + V(l))dk}{f(k,l) - c}$$

A solução destas equações aponta que “a taxa de poupança multiplicada pela utilidade marginal do consumo deve sempre ser igual a *Bliss* menos a utilidade atual.” (RAMSEY, 1928, p.547, tradução nossa).

Voltamos nossa atenção ao início da discussão de Ramsey. O trabalho é o primeiro de que temos notícia a enunciar com todas as letras que

> “A um ponto se deveria talvez dar ênfase mais particular; é assumido que nós não descontamos benefícios mais distantes em comparação com outros mais próximos, uma prática que é eticamente indefensável e surge meramente da fraqueza da imaginação; iremos, contudo, na Seção II incluir tal desconto em algumas de nossas investigações." (RAMSEY, 1928, p.543, tradução nossa)

A referência à fraqueza da imaginação encontra eco nos escritos de von Böhm-Bawerk acima referidos, mas a única referência expressa feita por Ramsey, entretanto, é a Keynes[4].

Em sua seção II ele propõe-se a tratar da situação com desconto intertemporal de utilidades. Será necessário, antes disto, ressaltar um ponto anterior, assumido durante a solução das equações que descrevem a trajetória de acumulação de capital, bastante similar ao de Fisher, mas expandido, com o uso do limite, para tempo contínuo. Basicamente: a utilidade marginal do consumo presente deve igualar a utilidade marginal de postergá-lo e consumi-lo no futuro, com juros.

$$\frac{dU(c(t))}{dc} = \left(1 + \frac{df}{dk}.\Delta t\right)\frac{dU(c(t))}{dc}(t + \Delta t)$$

[4] Do qual era amigo e colega em Cambridge e o qual o introduziu à economia. Ramsey se preocupara anteriormente com matemática e lógica, inclusive ajudando a traduzir para o inglês o trabalho de Wittgenstein Tractatus Logico-Philosophicus, com C.K. Ogden, publicado em 1922.

Tomando o limite e denotando $\frac{dU(c(t))}{dc}$ por $u(c(t))$:

$$\frac{du(c(t))}{dt} = -\frac{df}{dk}.u(c(t))$$

O que mostra que a utilidade marginal do consumo decai proporcionalmente à taxa de juros. Convém explicitar que, neste caso, a taxa de crescimento da economia é igual à produtividade marginal do capital e à taxa de juros. Fisher havia usado a taxa de juros composta; podemos ver a taxa de Ramsey como a de juros instantâneos. Em ambos, o desconto exponencial emerge por construção. Para simplificar as contas, Ramsey utiliza retornos independentes e constantes para capital e trabalho de tal forma que:

$$\frac{df}{dk} = r$$

Com r a taxa de juros e introduz ρ como medida de desconto de utilidades futuras nesta equação, que se torna:

$$\frac{du(c(t))}{dt} = -(r-\rho).u(c(t))$$

Cuja solução é:

$$u\big(c(t)\big) = Ae^{-(r-\rho)t}, \qquad A\ uma\ constante$$

Para justificar a constância, Ramsey usa textualmente o contrafactual, argumentando que seria inconsistente haver uma taxa cambiante de desconto. Na última seção, Ramsey apresenta um modelo em que, no equilíbrio de longo prazo a sociedade se divide em duas classes, com os providentes desfrutando do *bliss point* e os pródigos no nível de subsistência, mas não faz nenhum comentário em relação às implicações éticas de seu resultado. Talvez Ramsey tenha querido ilustrar sua

opinião de que o desconto intertemporal é eticamente indefensável apresentando um *argumentum ad absurdum.*

Dada a técnica de Ramsey de postular o *Bliss Point*, chegamos, ao final, ao problema de maximizar a seguinte integral para encontrar a melhor trajetória:

$$\int_{b}^{y} w^{\frac{r}{r-\rho}}(y)dy$$

Aonde $w(y)$ é uma utilidade modificada que contempla a utilidade do consumo e a desutilidade do trabalho.

Pouco após, em 1937, Paul Samuelson publica um curtíssimo artigo, do qual começamos por destacar a última colocação, a nota de rodapé de sua última página. De acordo com Samuelson,

> "O professor Leontief me apontou que este método pode ser comparado com o método usual de derivar curvas de demanda e oferta a partir do conhecimento das variações destas funções através do tempo. Aqui é assumido que nós sabemos as variações da função de utilidade através do tempo (taxa de desconto temporal). Isto, junto com nossas condições de lado e condições de maximização, nos permite voltar de nosso gasto observado da renda em função do tempo para a função de utilidade em si." (SAMUELSON, 1937, p.161, tradução nossa)

O que deixa claro que a taxa de desconto temporal exponencial será tomada como dada, com o propósito de intuir algo sobre a forma da função de utilidade.

O trabalho de Samuelson busca propor um modelo mais generalizado de escolha intertemporal e argumentar que é necessária uma medida de utilidade, ademais de uma ordenação de utilidades, para possibilitar este modelo - "uma medida particular de utilidade, ao invés de meramente um índice de utilidade." (SAMUELSON, 1937, p.160, tradução nossa).

Seu cunho é mais formal que o de Ramsey e ele opta por explicitar certas suposições tomadas como dadas anteriormente. O artigo emprega quatro suposições iniciais, sendo a primeira a de que a utilidade é, de fato, mensurável. Em seguida:

> "2.Durante qualquer período específico, o indivíduo se comporta como se maximizasse a soma de todas as utilidades futuras, sendo elas reduzidas a magnitudes comparáveis por um apropriado desconto temporal. Isto é da natureza de um axioma ou definição, não estando sujeito a prova em qualquer sentido empírico, já que todo e qualquer tipo de comportamento observável pode decorrer de tal suposição.[...]
>
> 3. O indivíduo desconta utilidades futuras em alguma forma simples que é conhecida por nós. Esta terceira suposição, ao contrário das outras duas, é da natureza de uma hipótese, sujeita a refutação pelos fatos observados [...]. A arbitrariedade destas suposições é novamente reforçada matematicamente:" (SAMUELSON, 1937, p. 156, tradução nossa)

$$V(c,t) = U(c)e^{-\rho t}, \qquad \rho = \ln(1+p)$$

Samuelson deixa muito clara a arbitrariedade da forma de desconto sendo suposta. A taxa de desconto discreta $\frac{1}{1+\rho}$ e contínua $e^{-\rho t}$ estava sendo usada extensivamente (KOOPMANS, 1960), o que pode ser reputado a sua simplicidade, elegância e também sua familiaridade com os juros compostos observados no dia-a-dia das finanças (FREDERICK, LOEWENSTEIN, O'DONOGHUE, 2002), mas ressalta-se que o que se convencionou chamar de Modelo de Utilidade Descontada se assenta sobre esta base arbitrária, o que está consoante com o método dedutivo usado nos trabalhos até o momento. [5]

O problema do agente agora aparece na forma canônica:

[5] A Teoria da Utilidade não pôde, até agora, ser demonstrada ou falseada à maneira de Popper, o que coloca algumas dificuldades.

$$\max \int_0^T U(c)e^{-\rho t}\, dt$$

Samuelson expressou diversas vezes em seis páginas suas reservas sobre o modelo, inclusive encerrando o artigo desaprovando qualquer ligação com qualquer conceito de bem-estar.

O resultado, apesar disso, foi que “a simplicidade e elegância desta formulação eram irresistíveis e o Modelo de Utilidade Descontada foi rapidamente adotado como *framework* para analisar escolhas intertemporais.” (FREDERICK, LOEWENSTEIN, O'DONOGHUE, 2002, p.356, tradução nossa). Muito disso se deve a sua forma ser muito mais fácil de expandir para mais que dois períodos do que o diagrama de Fisher. Além disso, é *visualizável* que a forma de Samuelson é mais elegante que a de Ramsey, embora seja *ainda* mais simples (excluindo mais um conceito: a desutilidade do trabalho).

Com o modelo bem assentado, embora não validado empiricamente, permaneceu a noção de que um único parâmetro (descartando todas as considerações psicológicas no sentido de Fisher e de von Böhm-Bawerk), a taxa de desconto, poderia condensar toda a informação sobre os motivos subjacentes à escolha intertemporal (FREDERICK, LOEWENSTEIN, O'DONOGHUE, 2002), apesar das reservas de Samuelson e dos trabalhos de Fisher e de von Böhm-Bawerk, que salientavam diversos motivos.

2.3 Koopmans

Após um hiato, observamos em Stationary Ordinal Utility and Impatience, escrito pelo economista matemático Tjalling Koopmans em 1960, a axiomatização do modelo de Utilidade Descontada. É interessante notar que referências tanto a von Böhm-Bawerk quanto a Fisher aparecem já na primeira página do artigo. A diferença importante é que a preferência intertemporal não é postulada arbitrariamente, como em Samuelson, nem explicada psicologicamente, como em von Böhm-Bawerk; Koopmans pretende mostrar que a aceitação de alguns “postulados simples [...] logicamente implicam impaciência” (p. 287), ao menos em alguns casos. Durante

este hiato, não houve, que saibamos, nenhuma tentativa de testar empiricamente o modelo. O autor tampouco tentou fazê-lo. Conforme nota Chakravarty (1962): “Koopmans deriva a preferência temporal como uma *consequência* ao invés de uma hipótese *empiricamente testável*” (p.186, tradução nossa, grifo no original). Beed e Kane (1991) observam que uma crítica frequente à matematização da ciência econômica é a que ela produziu poucas hipóteses empiricamente testáveis.

Um bom exemplo da diferença entre o formato axiomático de Koopmans e os trabalhos de Ramsey e Samuelson, mais próximos do campo da análise matemática à la física, é a seguinte passagem:

> “se há em todas as circunstâncias uma preferência por postergar satisfação – ou mesmo neutralidade quanto ao tempo, então não há espaço suficiente no conjunto de números reais para acomodar e classificar numericamente todos os diferentes níveis de satisfação que podem ocorrer em relação a programas de consumo para um futuro infinito.” (KOOPMANS, 1960, p.288, tradução nossa)

Cujo sentido pode ser interpretado analogamente ao problema, nos trabalhos precedentes, de a integral da utilidade instantânea em um horizonte de tempo infinito não convergir na ausência de uma taxa de desconto (Samuelson) ou de um máximo arbitrário (Ramsey), o que o próprio Koopmans (1967b) chamou de paradoxo do *indefinitely postponed splurge*[6]: se a utilidade é sempre crescente e os agentes podem aumentar seu capital futuro postergando consumo (acumulando juros sobre este capital), então eles sempre podem postergar o consumo para o período posterior, quando este será maior e, portanto, a utilidade também. A soma diverge. Este tempo, contundo, nunca chega e a utilidade não é fruída.

Os postulados de Koopmans são, em ordem:

i) Continuidade da função utilidade;

[6] Em português: gastança indefinidamente postergada. Ramsey (1928) tratou do problema em uma situação com taxa de preferência menor que a taxa de juros, na qual o mesmo problema ocorre. A postulação de concavidade da função utilidade ou de um máximo arbitrário resolvem o problema, pois implicam $U'(c)>0$, mas também $U''(c)<0$

ii) Sensitividade da função utilidade [a mudanças no consumo];

iii) Estacionariedade da função utilidade;

iv) Ausência de complementaridade intertemporal;

v) Existência do melhor e do pior programa

Koopmans está tentando provar a existência de impaciência, pelo menos para alguns casos, “inteiramente em termos da função de utilidade” (KOOPMANS, 1960, p.287). Ademais, as utilidades de Koopmans são ordinais, o que diminui a quantidade de postulados necessários[7]. O trabalho mantém, portanto, a limitação de que as funções utilidade são passíveis apenas de transformações monotônicas crescentes. Assim como em von Böhm-Bawerk, há uma utilidade presente e uma utilidade prospectiva. Koopmans descreve impaciência como a preferência por avançar um programa de consumo no tempo. Assim, definindo $V(u, U)$ como a função que agrega a utilidade presente u e a utilidade prospectiva U para todo o horizonte de tempo, impaciência fica definida como:

$$V\big(u_1, V(u_2, U_3)\big) \left\{\gtreqless\right\} V\big(u_2, V(u_1, U_3)\big) \; se \; u_1 \left\{\gtreqless\right\} u_2$$

O que diz, basicamente, que desfrutar de uma utilidade maior antes de uma menor é preferível à opção oposta. Voltamo-nos agora aos postulados de Koopmans.

Continuidade[8] é suposta por motivos de técnica matemática. É necessária para uma série de passos das provas.[9] Sensitividade a mudanças no programa de consumo exclui resultados triviais como o de uma função de utilidade de valor constante, mas também uma função específica que se preocupa apenas com “o maior nível de consumo que é repetido ou aproximado infinitamente frequentemente, sem preocupação pelo tamanho da espera [...]” (KOOPMANS, 1960, p.291-292,

[7] Samuelson (1937) trabalhara com a Utilidade Cardinal, mas precisou postular a taxa de desconto, enquanto Koopmans a demonstra como decorrência de suas suposições iniciais.
[8] Koopmans, Diamond e Williamson (1964) reforça este postulado, corrigindo um erro apontado.
[9] Koopmans postula uma exigência de continuidade mais forte que a normal. Em suas palavras: “requeremos que a função de utilidade não seja infinitamente mais sensível a mudanças nas quantidades de um programa do que a mudanças nas quantidades de outro programa *equivalente”* (p.291, tradução nossa). Tamanho detalhe matemático foge a nosso escopo.

tradução nossa).[10] Passamos direto ao postulado quinto, da existência de um melhor e um pior programa, que tem, por um lado, motivações matemáticas[11], mas vale notar que um melhor programa guarda semelhança com o *Bliss Point* de Ramsey. Um melhor programa tem a melhor utilidade em todos os períodos, de tal forma que pode ser visto como a repetição de *Bliss* indefinidamente, mas definida em termos de utilidade e não de consumo.

Como o futuro demonstrou, os pontos de discussão serão os postulados 3 e 4, também chamados de agregação por períodos e de independência do tempo no calendário. Dedicamos a esses maior atenção. O terceiro postulado afirma que a cesta consumida em um período não tem nenhum efeito sobre as preferências em relação às cestas futuras. Koopmans estava ciente do irrealismo da suposição, mas afirmou que formas mais fracas do mesmo postulado poderiam gerar os mesmos resultados, embora não tenha dado indicações de como isto poderia ser investigado. Esta é uma suposição muito simplificadora, pois um agente poderia se preocupar em, por exemplo, ter um consumo sempre crescente - sua função de utilidade dependeria, então, não do consumo instantâneo, mas de sua primeira derivada. Outros momentos também podem ser considerados. Aversão ao risco[12] implicaria uma preferência por um padrão mais constante de utilidades sobre outro mais variável se ambos tiverem a mesma utilidade descontada (FREDERICK, LOEWENSTEIN, O'DONOGHUE, 2002). De todo modo, para tratar destas questões, suposições precisariam ser feitas acerca de como os períodos se complementam, e objetivo explícito de Koopmans é trabalhar com a situação mais simples possível, para isolar os efeitos do tempo na preferência (KOOPMANS, 1960, p. 292)

O quarto postulado "expressa a ideia de que a passagem do tempo não tem efeito sobre as preferências" (KOOPMANS, 1960, p.294, tradução nossa). Koopmans não fez nenhum comentário sobre a plausibilidade da afirmação, apesar de fazer referência a Strotz (1956), ao qual aludiremos adiante. Na linguagem do autor:

---

[10] A função em questão é: $U(\ _1x) \equiv \lim_{\tau\to\infty} sup_{t\geq\tau}\, x_t$, onde $_1x$ é um programa começando em t=1.
[11] "Para evitar uma complicação matemática" (p.295, tradução nossa).
[12] Esta seria uma suposição adicional que não é feita por Koopmans.

$$U_2(\,_2x) \geq U_2(\,_2x'), se\ e\ somente\ se\ \ U(\,_2x) \geq U(\,_2x')$$

O subscrito U_2 denota a utilidade prospectiva a partir do segundo período, enquanto U denota a utilidade imediata. Assim, $x \succsim x'$ em um (mesmo) período no futuro se e somente se $x \succsim x'$ no presente.

Após ter definido impaciência e demonstrado que ela decorre destas suposições, Koopmans dá um passo adiante criando uma versão mais forte do postulado de agregação por períodos; chamemo-lo iii'. Esta versão forte do terceiro postulado permite que se encontre alguma transformação monotônica para a qual é possível escrever:

$$U(\,_1x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + U_3\big(\,_3x\big)$$

E isto, em conjunto com o postulado de estacionariedade, permite apenas uma forma de utilidade agregada: aquela em que ela é a soma descontada de todas as utilidades futuras, descontadas por um fator constante:

$$U(\,_1x) = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} u(x_t), \quad \rho > 0$$

O que nada mais é do que a versão da forma encontrada em Samuelson (1937) e tornada canônica. O artigo inicialmente coloca que esta suposição adicional deve parecer um pequeno passo, mas logo abaixo fica explicito que tal passo tem consequências drásticas.

> "Dado que a forma [esta logo acima] é destruída por quaisquer transformações que não sejam lineares crescentes, se pode olhar para o postulado iii' [...] como uma base (em conjunto com os outros postulados) para definir uma função de utilidade cardinal. Enquanto isto em si não é questionável, a taxa de desconto constante parece rígida demais para

> descrever aspectos importantes da escolha sobre o tempo." (KOOPMANS, 1960, p.308, tradução nossa)

Com isto, fica estabelecido formalmente o modelo de utilidade descontada[13], a despeito das reservas dos três autores supracitados. Mais uma objeção poderia ser feita, embora não apareça nestes três autores e seja mais uma objeção à Teoria da Utilidade do que ao Modelo de Utilidade Descontada. De todo modo, convém estar a par desta para as discussões seguintes, especialmente no capitulo 4.

Pois, a taxa de preferência intertemporal não precisa ser a mesma para todas as cestas de consumo, amplamente definidas (FREDERICK, LOEWENSTEIN, O'DONOGHUE, 2002). Pode haver uma preferência ρ para que cheguem logo as férias, ao passo que a preferência por acelerar a chegada do aniversário pode ser ρ'. Com a aplicação da função de utilidade sobre as cestas de consumo, esta dificuldade é evitada[14], pois a suposição é que se discute a preferência por avançar *níveis de utilidade* e não cestas de consumo. Ramsey, Samuelson e Koopmans, ao aceitarem o instrumento da função utilidade, aceitam também isso.

Neste capítulo, vimos que às diversas reservas que os autores expressaram não foi dada muita atenção, que a sugestão de Samuelson de que aspectos do modelo seriam empiricamente testáveis não foi apenas ignorada, mas que a questão foi resolvida derivando sua hipótese de postulados anteriores e que o modelo se popularizou provavelmente por sua simplicidade, elegância e familiaridade com a experiência.

Além disso, apresentamos os postulados do Modelo de Utilidade Descontada, que servirão para a discussão no capítulo 3, que trata de suas violações, e o básico da matemática empregada nos modelos, tangenciando alguns pontos sobre o motivo do uso de determinadas técnicas, o que será discutido efetivamente no capítulo 4.

---

[13] Utilidade Cardinal inclusa, dependendo da aceitação do postulado iii', o que é tácito em Samuelson (1937), a partir do qual o modelo já encontrara aceitação.

[14] A rigor, é possível haver uma Teoria da Utilidade em que as utilidades não são reduzidas a uma base comparável, recolocando a questão, mas não é o caso para estes autores.

3: DESENVOLVIMENTOS FORA DO MODELO PADRÃO

Este capítulo trata de exemplificar o desenvolvimento posterior do debate sobre escolhas do consumidor e alocação ótima, seguindo a linha de violações dos Postulados que Koopmans (1960) enumerou. Com o intuito de ser ilustrativo e apelar à intuição e a experiência, apresenta-se os experimentos discutidos com alguma extensão. O capítulo é dividido em quatro seções. A primeira introduz o tema com a discussão do artigo seminal de Robert Strotz (1956), a segunda trata da contribuição de trabalhos agrupados (com elasticidade) sob o rótulo de Economia Comportamental, a terceira de autores ditos *mainstream* e a quarta apresenta, a título de *caveat*, a crítica feita por Rubinstein, aos experimentos apresentados.

3.1 Ulisses e as Sereias[15]

Em 1956, ainda antes da publicação do artigo de Koopmans de 1960 e, apesar de ter sido citado por Koopmans e de a nota de rodapé que o autor dedica a Samuelson não ser reconhecimento suficiente de que alguns dos temas abordados já prefiguravam no artigo de 1937, o trabalho de 1956 de Robert Strotz: Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization é de uma estirpe diferente. Especialmente por seus comentários finais, podemos intuir que Strotz vê um mundo um pouco diferente do padrão nos modelos neoclássicos de economia matemática, tendo alguma semelhança com o que Leonard (1995) identifica na influência austríaca sobre a Teoria dos Jogos (através da cooperação Morgenstern-von Neumann), o que, por sua vez, integra, para ele, uma mudança maior na ciência: o abandono da metáfora mecanicista. O racional desta conexão está em que, para Leonard, Morgenstern trouxe para a Teoria dos Jogos a ideia de indivíduos com diferentes visões de mundo e diferentes equilíbrios sociais possíveis. É esta ideia que podemos vincular ao artigo de Strotz.

A pergunta que Strotz se coloca é se um agente, ao ter escolhido um programa de consumo, conseguirá ater-se a ele no futuro. Sua resposta é que

[15] Strotz usa o herói de Homero para ilustrar que o postulado de estacionariedade depende de uma capacidade “heroica” de autocontrole ou, então, do uso de algum mecanismo de pré-comprometimento.

geralmente isto não ocorrerá, ou seja, que as decisões dos agentes serão inconsistentes com seus planos (p. 165). As decisões sobre como maximizar a integral proposta por Samuelson são tomadas no primeiro instante de tempo e devem valer para todo o horizonte.

O procedimento, então, é investigar em que condições há consistência e em quais não há. Para isto, ao invés de postular um fator de desconto, ele é deixado variar livremente e se tornará uma função do intervalo de tempo entre os períodos e do período no qual o planejamento é feito, denotando o fator de desconto por $\lambda(t-\tau)$, e surgirá após a solução das equações. No modelo de Strotz não há crescimento econômico ou taxa de juros à qual pode ser aplicado o capital remanescente entre períodos, então a questão é como distribuir um capital fixo $K(0)$ sobre um período de tempo. O problema do agente é[16]:

$$\max \int_0^T \lambda(t-\tau)u(C(t),t)dt$$

Que é basicamente a soma das utilidades futuras descontadas. Sujeito a:

$$\int_\tau^T C(t)dt = K(\tau), aonde:$$

$$K(t) = K(0) - \int_t^\tau C(t)dt$$

Quebrando a análise em dois períodos. Se o agente reavalia seus planos em intervalos discretos, ele terá que planejar o resto do tempo restrito pelo que já consumiu de seu capital. Este plano pode ou não ser consistente com o programa inicial, dependendo da função de desconto do agente.

[16] A notação de Strotz é mais pesada, trabalhando com funcionais, que dão maior generalidade a sua discussão. Optamos por manter funções de finitas variáveis por simplicidade e para permitir comparações mais diretas com os outros trabalhos.

Seja um programa de consumo $C^*(t)$. Para que o plano seja consistente, esse programa deve maximizar tanto

$$\int_0^{\tau} \lambda(t-0)u(C(t),t)dt + \int_{\tau}^{T} \lambda(t-0)u(C(t),t)dt,$$

Sujeito a:

$$\int_0^{\tau} C(t)dt + \int_{\tau}^{T} C(t)dt = K(0)$$

Quanto:

$$\int_{\tau}^{T} \lambda(t-\tau)u(C(t),t)dt$$

Sujeito a:

$$\int_{\tau}^{T} C(t)dt = K(0) - \int_0^{\tau} C^*(t)dt$$

Ou seja, se um programa que pode ser mudado $(C(t))$ continua um que já está dado no passado $(C^*(t))$, isto é, este programa é consistente, então a possibilidade de alterá-lo no meio do caminho é inócua. Esta possibilidade é inócua se as duas equações têm a mesma solução.

A solução destas equações[17] é dada por:

$$\frac{\dot{\lambda}(t-0)}{\lambda(t-0)} = -\frac{\dot{u_c}(t)}{u_c(t)} \; e \; \frac{\dot{\lambda}(t-\tau)}{\lambda(t-\tau)} = -\frac{\dot{u_c}(t)}{u_c(t)}, aonde \; \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Para que se possa igualar os lados esquerdos das duas equações, a taxa proporcional de variação[18] deve ser uma constante. O que deixa apenas a

[17] A solução passa pela equação diferencial de Euler, mas é omitida aqui.

possibilidade de que a *função* de desconto seja $\lambda(t) = k^t, k$ uma constante. Strotz chama isto de *caso harmônico*, o qual requer uma forma muito especial de função de desconto. Embora este seja intuitivo, ele precisará ser justificado, ao invés de assumido. (STROTZ, 1956, p.172).

Este caso harmônico - novamente relacionando com a visão que Leonard atribui ao estruturalismo e comparando com o Teoria Positiva do Capital, de von Böhm-Bawerk (o qual é citado) - só ocorrerá através de um contrato social bem regulado, com os pais ensinando às crianças, que nascem com preferências muito menos que exponenciais, a descontar racionalmente o futuro e outros tipos de forças agindo em favor da racionalidade, o que, pela extensão que o autor dedica a exemplos em contrário, nos permite inferir que ele não crê que ocorra, ao menos não perfeitamente. Em seguida, afirma:

> "Creio que deveria ser dada atenção especial a uma função de desconto [...] que difere da logaritmicamente linear apenas na medida em que "sobre-avalia" as satisfações mais próximas em relação às mais distantes. Tal função sugere que indivíduos [...] que ingenuamente resolvem agora que eles "vão fazer" no futuro comumente agendam o início da austeridade para uma data futura." (p. 177, tradução nossa)

Esta inconsistência temporal viola, por óbvio, o postulado número iii de Koopmans, o que abre espaço para a discussão de outras funções além daquelas até aqui referidas. O autor inaugura, assim, os estudos sobre a procrastinação[19]. Sob essa forma de desconto, não escolhemos a melhor trajetória, mas apenas uma estratégia second-best. Para tal é que existem as estratégias de pré-comprometimento, mas elas nem sempre são possíveis. A função à qual se refere Strotz em seu trabalho tem proximidade do que virá a ser a função de desconto quase-hiperbólico, presente, por exemplo, em Akerlof (1991) e Laibson (1996).

3.2 Economia Comportamental

---

[18] A taxa de variação logarítmica
[19] Strotz usa "*efeito mañana"*

Aos poucos, a miopia de que Strotz falava começou a aparecer nos estudos de psicólogos como George Ainslie e Richard Herrnstein. Inicialmente trabalhando com animais, cientistas encontraram evidências de que escolhas não eram sempre temporalmente consistentes. Uma recompensa maior e mais distante era inicialmente preferida, mas uma reversão de preferência ocorria em certo ponto e os agentes passavam a preferir a recompensa menor e mais próxima, o que lhes permitia observar cruzamentos em curvas de indiferença para cada recompensa, violando o postulado 3 de estacionariedade. O seguinte gráfico apresentado por Ainslie (1975) exemplifica o conceito. A situação com estacionariedade está à esquerda e a com relaxamento à direita. Nesta segunda situação as curvas são mais côncavas. Os trabalhos empíricos do autor, como Ainslie e Herrnstein (1981), encontram curvas do segundo formato, trabalhando com pombos.

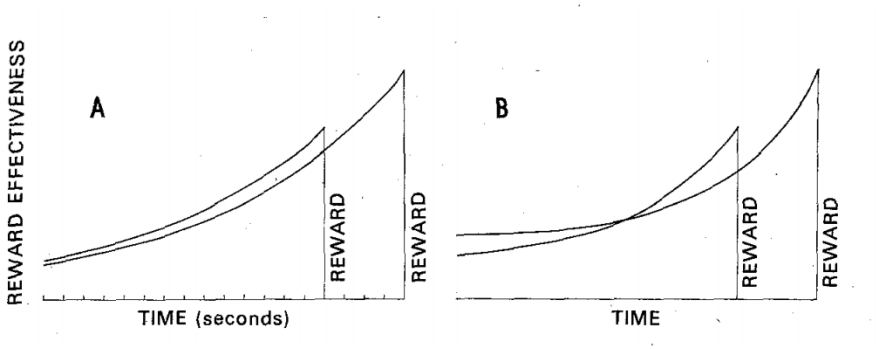

Figura 1: Cruzamento de Curvas de Utilidade: Reversão de Preferências

Fonte: Ainslie, (1975, p.471)

Richard Thaler (1981) propôs um exemplo simples e intuitivo: um agente prefere uma maçã hoje a duas maçãs amanhã, então ele preferirá uma maçã daqui a um ano a duas maçãs daqui a um ano e um dia. A estacionariedade demanda que esta relação se mantenha, mas a prática é bastante diferente. Ainslie (1975), examinando diversos estudos no campo da psicologia, sugeriu o desconto hiperbólico como uma descrição mais aproximada do desconto intertemporal. Sua sugestão foi a hipérbole mais simples, qual seja:

$$\rho = \frac{1}{t}$$

Trabalhos subsequentes, como o de Ainslie (1991): Derivation of Rational Economic Behavior from Hyperbolic Discount Curves, utilizaram o arcabouço de teoria dos jogos, modelando um dilema dos prisioneiros entre um seu estado motivacional presente e seu estado futuro. Neste caso, se o agente conseguir enxergar sua decisão como parte de uma série maior de decisões para a qual é importante que mantenha um curso racional, ele fará a avaliação racional, mas se ele examinar a decisão uma única vez ele estará mais propenso ao desconto hiperbólico - à procrastinação.

Tomemos o exemplo de Ainslie. À noite, uma pessoa pode ficar acordada até tarde e sentir-se cansada no trabalho no dia seguinte ou dormir cedo e sentir-se bem. A situação ideal para o procrastinador é dormir tarde hoje, mas dormir cedo no futuro. A pior situação é dormir cedo hoje e tarde no futuro. Sempre dormir cedo e sempre ficar acordada são situações intermediárias, mas sempre dormir cedo é preferível. Os incentivos se assemelham aos de um dilema dos prisioneiros, a pessoa valorizará mais a opção de dormir cedo hoje e no futuro se acreditar que conseguirá manter este curso de ação.

Tabela 1: Payoffs do Procrastinador Antes de Dormir

		Futuro
Hoje	Ficar Acordado	Dormir
Ficar Acordado	78	120
Dormir	63	105[20]

Fonte: Ainslie, (1991, p. 337) modificado pelo autor

Economistas comportamentais também ofereceram contribuições importantes para o campo. Escrevem Mullainathan e Thaler (2000), em retrospecto:

> "A ciência econômica tradicionalmente conceitua um mundo povoado por maximizadores calculadores, inemocionais que foram

[20] Estão mantidos os valores originais usados por Ainslie, sem entrar no detalhe de sua dedução. A fórmula usada por Ainslie supõe um ganho de utilidade de 60 unidades durante duas horas durante a noite, a partir da meia noite e uma perda de utilidade por hora igual durante o trabalho, entre 7:00 e 5:00, com a seguinte equação: $V = \sum_{i=t\to t'} 60/(1+i)$

> chamados Homo Economicus. Em certo sentido, a economia neo-clássica se definiu explicitamente como "anti-comportamental". De fato, virtualmente todo o comportamento estudado por psicólogos cognitivos e sociais foi ignorado ou descartado no framework econômico padrão. Este agente econômico não-comportamental tem sido defendido em numerosas bases: alguns alegaram que o modelo estava "certo"; a maioria dos outros simplesmente argumentou que o modelo padrão era mais fácil de formalizar e praticamente mais relevante. A economia comportamental floresceu com a percepção de que nenhum desses pontos de vista estava correto. Evidências empíricas e experimentais se avolumaram contra as fortes previsões da racionalidade irrestrita." (MULLAINTHAN, THALER, 2000, p.2, tradução nossa)

O já referido Thaler em Some Empirical Evidence on Dynamic inconsistency (1981) traz um experimento recorrente, também pela facilidade de ser replicado. Ao pedir que voluntários dissessem o quanto estavam dispostos a esperar por diferentes recompensas ou a pagar para acelerá-las, ele foi capaz de capaz de capturar suas taxas de desconto implícitas. Estas exibiram variação em relação tanto ao tamanho da recompensa quanto ao tempo e também quanto ao “sinal”: se uma recompensa era negativa ou positiva. Seus resultados são notáveis pela dimensão da variação das taxas de desconto observadas. Thaler encontrou, por exemplo, que para postergar uma recompensa de $ 15 por 3 meses, a resposta mediana dos respondentes implicava uma taxa de desconto contínua composta anualizada de 277% enquanto que para 1 ano esta era de apenas[21] 139% e para 3 anos de 63%. Para um valor de $ 3.000, as respostas medianas foram, respectivamente, 62%, 29% e 23%.

No trabalho seguinte, Anomalies: Intertemporal Choice, escrito por Loewenstein e Thaler (1992), são exploradas mais duas anomalias, quais sejam: os agentes aparentam tomar decisões diferentes dependendo de seu referencial e podem ser encontrados até mesmo casos em que um agente queira atrasar uma recompensa positiva. Os autores usam, em sua investigação, um beijo da atriz de

[21] Embora as taxas de desconto sejam muito altas, o autor comenta que outros estudos, como Hausman (1979), estudando a compra de aparelhos de ar-condicionado também encontraram taxas de desconto bastante altas.

cinema favorita e comentam que as pessoas podem derivar utilidade da espera pelo beijo, assim como desutilidade da antecipação de uma recompensa negativa.

A abordagem de Kahneman e Tversky, em The Framing of Decisions and the Psychology of Choice (1981), é também a de propor perguntas hipotéticas a voluntários, como Thaler havia feito. Os trabalhos desta escola enfocam mais a importância do *decision frame* - em que marco estão enquadradas as decisões, bem como o referencial considerado pelo agente (conversamente: sua perspectiva). Uma pessoa pode considerar um ganho e uma perda em relação a toda sua riqueza ou em relação a um referencial específico para aquela transação, por exemplo: zero. Contudo, os autores estão mais preocupados com anomalias na teoria da utilidade esperada, as quais são atacadas com sua *Prospect Theory*, que exibe efeito de escala e de sinal (concavidade sobre as recompensas positivas e convexidade sobre as negativas, ilustrada abaixo), com a implicação de que as pessoas são avessas ao risco para ganhos e propensas ao risco para perda.

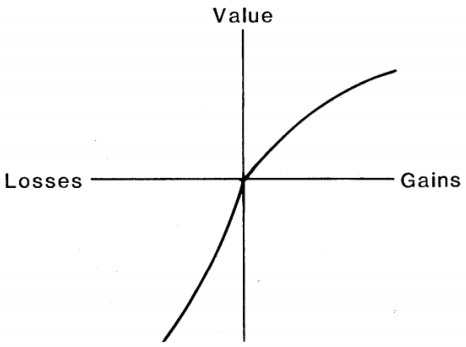

Figura 2: Uma função de utilidade hipotética
Fonte: Kahneman, Tversky (1981, p.454)

Na discussão do caso de inconsistência dinâmica trazido por Strotz, o trabalho ressalta que também aqui a *metáfora* da perspectiva oferece uma explicação, mas que neste caso o agente precisa estar consciente de que há um conflito e fazer um esforço para explorar perspectivas alternativas, o que é usado para sustentar que reversões de preferências não são necessariamente irracionais. Os trabalhos de Gary Becker seguirão esta abordagem.

3.3 Economia Mainstream

Gary Becker e Casey Mulligan, em um artigo de 1997, The Endogenous Determination of Time Preference, resgatam a ideia de von Böhm-Bawerk de que as pessoas envidam esforços para fazer o futuro “parecer menos remoto”. O ponto de interesse que foi desenvolvido pelos autores pode muito bem ser resumido em uma frase:

> "Embora admitamos que os seres humanos têm debilidades, nossa quarta observação sobre a preferência temporal é que as pessoas estão frequentemente conscientes de suas fraquezas e podem despender recursos para superá-las." (BECKER, MULLIGAN, 1997, p.5, tradução nossa)

Esta concepção avança sobre trabalhos anteriores de Becker, famoso pelo uso da utilidade *forward-looking*.

Em A Theory of Rational Addiction (Becker, Murphy, 1988), se viola o postulado 4 de Koopmans, de que a utilidade é independente em cada período e de que pode ser assim agregada. Os autores propõem que um bem viciante não respeita esta regra, aumentando a utilidade futura do seu consumo - há complementaridade intertemporal. Becker e Murphy reconhecem o desvio em relação modelo padrão e afirmam trabalhar com um conceito fraco de racionalidade - os consumidores não estão contentes em estarem viciados, mas estariam ainda mais infelizes se não pudessem atender a seu vício.

Em Irrational Behavior and Economic Theory (Becker, 1962), se traz uma segmentação entre racionalidade ao nível do mercado e do agente econômico. Como na física, a trajetória bem definida de um corpo convive com o movimento errático de seus átomos. O ponto sendo feito é de que a previsão da teoria econômica de racionalidade ao nível do mercado é compatível com diversas suposições ao nível do agente, como agentes impulsivos ou inerciais. Se apresenta também o argumento evolutivo de que os agentes, sendo forçados a aceitar a realidade, deverão agir como se fossem racionais ou eles não sobreviveriam.

Voltando ao trabalho sobre a determinação endógena da preferência intertemporal, o mesmo ferramental de capital humano presente na teoria do vício racional é aplicado, com o desconto intertemporal sendo endogenamente determinado pela capacidade dos agentes de imaginar o futuro, o que, por sua vez, depende de seus investimentos em imaginação. O montante deste investimento, de forma semelhante a von Böhm-Bawerk e Strotz, tem um componente social, através da influência da família e da escola, por exemplo.

Becker e Mulligan fazem questão de respeitar o postulado 3 de Koopmans, da estacionariedade, pois aceitam que as mudanças de preferências estão de acordo com seu conceito fraco de racionalidade.

No sentido deste conceito, os autores consideram racional a aposta em uma loteria, pois seu modelo prevê também que resultados menos satisfatórios serão mais fortemente descontados, especialmente se forem pouco prováveis. Por fim, mais um passo é dado sobre o trabalho de 1988. Como o vício aumenta a utilidade marginal presente versus a futura, ele também diminui o retorno marginal de investimentos em “imaginação” (pela complementaridade entre a utilidade futura e o capital imaginação), o que desencoraja este *esforço* de imaginar o futuro, levando a uma situação de reforço do vício.

Desta forma, os trabalhos imensamente bem sucedidos inspirados em Gary Becker, como apontado em Economic Imperialism (Lazear, 2000), permitem, ao se alterar a função de decisão dos agentes, manter a racionalidade, embora em um conceito enfraquecido, ao mesmo tempo em que se lida com novas situações sendo apontadas pela psicologia.

Loewenstein e Prelec, em Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and Interpretation (1992), Trazem uma derivação formal da hipérbole generalizada como a seguinte função de desconto:

$$\rho(t) = (1 + \alpha t)^{-\beta/\alpha}, \qquad \alpha, \beta > 0,$$

Isso é feito a partir do postulado de que uma utilidade maior é compensada por uma posposição que é uma função linear do tempo até a utilidade menor anterior, de tal forma que:

$$u(x) = u(y)\rho(s)\ implica\ que\ u(x)\rho(t) = u(y)\rho(kt + s)$$[22]

Onde k é uma constante que depende de x e y, que são dois níveis diferentes de consumo, e $u(y) > u(x)$ e ρ é a função de desconto. Após tediosas manipulações algébricas que não acrescentam à discussão e podem ser suprimidas, chega-se ao resultado que a função $\rho(t)$ deve ser exponencial ou hiperbólica, chegando, finalmente ao resultado mencionado. O coeficiente α determina o quanto a função se distancia da taxa constante de desconto. No caso limite em que $\alpha \rightarrow 0$, tomando o limite, vê-se que:[23]

$$\rho(t) = e^{-\beta t}$$

E, portanto, a função volta a ser a canônica taxa exponencial de desconto. Se α for muito grande, o presente é avaliado com peso 1 e todos os pontos no futuro têm um peso equivalente a β.[24]

Reproduzimos aqui o gráfico apresentado pelos autores para facilitar a comparação entre as diversas curvas comentadas. A mais convexa é a exponencial, a em formato próximo ao da letra L se refere ao caso de α grande e nos outros casos $\alpha = 0{,}5$ e $\alpha = 0{,}2$ temos uma função hiperbólica mais familiar. Todos os β foram ajustados para que as curvas se cruzem em $\rho(1) = 0{,}3$.

[22] E não $u(x)\rho(t) = u(y)\rho(t + s)$

[23] Pelo mesmo raciocínio de $e = \lim_{n\rightarrow\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

[24] Ver, abaixo, o trabalho de George Akerlof (1991) e o conceito de Saliência

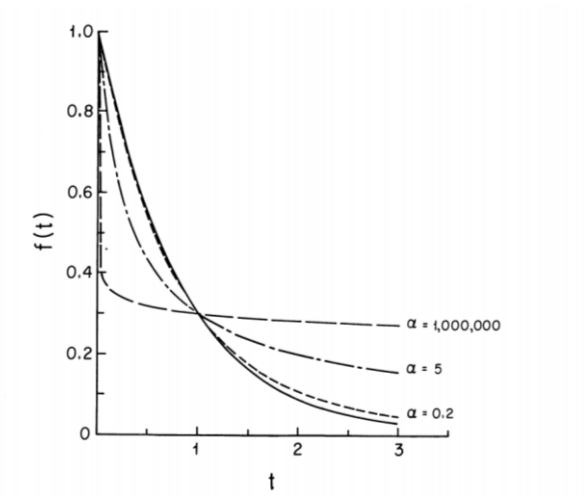

Figura 3: Fatores de Desconto para Diferentes Valores de α

Fonte: Loewenstein, Prelec (1992, p.581)

Além disso, os autores ressaltam o mecanismo de arbitragem como fazendo que o mercado financeiro passe de preferências assoladas por efeitos de escala e sinal para taxas de juros exponenciais. As preferências hiperbólicas, entretanto, são mais difíceis de serem arbitradas e são consistentes com os achados do recém-laureado Fama (1984) de que os yields tendem a baixar a partir de certo ponto na estrutura a termo.

Paralelamente, em 1991, George Akerlof publica um artigo chamado Procrastination and Obedience, propondo-se a tratar o problema de forma bastante diferente daquela proposta por Gary Becker anteriormente.

De maneira que pode ser chamada de moralista e desviando da teoria da preferência revelada, Akerlof defende que as pessoas podem tomar decisões que não estão de acordo com sua “verdadeira utilidade”. Ao contrário de Becker, que propõe que mesmo decisões aparentemente contrárias aos interesses do agente são racionais, Akerlof trabalha com a possibilidade de inconsistência dinâmica. Da psicologia, ele traz o conceito de Saliência, o qual postula que decisões, informações, utilidade, etc. hoje são mais vivazes em nossa mente e, portanto, nos afetam mais. O exemplo vem de um artigo da psicologia em que vemos uma pessoa decidindo que carro comprar. Ela lê uma revista especializada e decide que o melhor para si é um Volvo. Logo após, comenta com um conhecido que tenciona comprar

um Volvo, o qual retorque que seu cunhado teve um Volvo e que teve uma péssima experiência com ele. A experiência do cunhado do amigo é apenas mais um dado a ser somado à amostra da revista, mas a evidência empírica comentada pelo autor sustenta que poucos de nós não seriam influenciados fortemente por ela, tanto por sua proximidade no espaço (a relação ‘‘pessoal’’), quanto no tempo (prestes a comprar o carro).

O resultado do modelo é que se começar uma tarefa hoje tiver um custo pequeno, mas não negligenciável, e o benefício de se começar hoje também for pequeno, poderá ser “racional” postergar a tarefa até o último tempo em que for factível fazê-la (ou para sempre, na ausência de um prazo e dependendo da calibragem). Pressupostos importantes do modelo são que os intervalos entre os tempos entre cada decisão são curtos (e, implicitamente, discretos) e que os valores tanto dos benefícios e dos custos de hoje (a saliência) são baixos. Interessantemente, a perda agregada de utilidade entre o início da procrastinação e seu fim é grande.

Segue-se uma série de exemplos até chegarmos ao experimento de Stanley Milgram[25] em que se administravam choques para respondentes de perguntas erradas, o qual o autor usa para aplicar seu modelo também ao caso da Obediência. O argumento é de que as preferências não são nem fixas (Bentham) nem cambiantes, embora racionais e forward looking (Becker), mas que elas de fato mudam com as situações de maneira que não conseguimos prever, relacionando aqui o conceito de dissonância cognitiva, que é o que causaria decisões inconsistentes. No caso da obediência, a Saliência está no custo de se contrariar o experimento ou deixar o grupo hoje, ao invés de amanhã. Amanhã, entretanto, a Saliência segue presente e ficamos mais acostumados a obedecer, o que causa uma escalada no problema e faz com que as cobaias aceitem administrar choques cada vez mais danosos aos respondentes das perguntas.

[25] ver Milgram, Stanley. Obedience to Authority: An Experimental View. New York: Harper and Row, 1975

Autores posteriores demonstraram que a matematização do modelo de desconto com saliência de Akerlof $(1, \delta, \delta, \delta \ldots)$[26] é formalmente equivalente à de um modelo de desconto hiperbólico (FREDERICK, LOEWENSTEIN, O'DONOGHUE, 2002).

Após as incursões de George Akerlof e Gary Becker, a questão da inconsistência dinâmica ganhou terreno na economia mainstream. Trabalhos importantes foram desenvolvidos por David Laibson, entre outros, discutindo as implicações do desconto hiperbólico para as políticas públicas. Em Hyperbolic Discount Functions, Undersaving, and Savings Policy (1996), Laibson busca mensurar algumas previsões da teoria do desconto hiperbólico.

No modelo de Laibson, os agentes são modelados como diversos *eus* em um jogo com muitos períodos, todos em conflito entre si, sem a possibilidade de pré-comprometimento e descontando o futuro quase-hiperbolicamente, na forma $(1, \beta\delta, \beta\delta^2, \beta\delta^3, \ldots)$. Com as preferências dinamicamente inconsistentes, a trajetória ótima de consumo não respeita a equação de Euler, cuja intuição é de que a utilidade marginal hoje deve igualar a utilidade marginal futura multiplicada pela taxa de juros.[27]

Uma contribuição importante é dada no sentido da testabilidade do modelo ao se estabelecer uma equivalência entre o modelo exponencial com uma taxa de desconto e o hiperbólico com outra. A econometria não poderia diferenciar um modelo do outro. Ela poderia, usando dados do mundo hiperbólico, estimar um modelo exponencial com baixa taxa de preferência intertemporal. A elasticidade de substituição intertemporal, que é tida como igual ao inverso do coeficiente de aversão relativa ao risco na economia com desconto exponencial, entretanto, é, na verdade, menor que este valor, o que está previsto pelo modelo.

---

[26] Este é o limite da hipérbole generalizada $(1 + \alpha t)^{-\delta/\alpha}$ à medida que $\alpha \to \infty$. Ver, acima, LOEWENSTEIN, PRELEC (1992)

[27] A mesma intuição empregada por Ramsey, no capítulo 2.

Por último, são discutidas implicações de política pública e a questão de porque as pessoas poupam menos do que planejam. De acordo com as referências do autor, dez pontos percentuais a menos. Para tratar o problema, Laibson usa seu modelo para analisar o bem-estar dos múltiplos eus envolvidos no jogo de maximização intertemporal e encontra que todos estariam dispostos a sacrificar 90% da renda de um ano para implementar uma política de subsídio à poupança, o que ele usa para propor que o governo realmente faça isto, taxando o consumo para subsidiar a poupança. Em dado momento, Laibson sugere que os benefícios fiscais das contas de aposentadoria americanas, apesar de efetivamente zerarem as rendas do capital, são insuficientes.

3.4 A Crítica de Rubinstein

Com todos estes trabalhos e a grande quantidade de resultados violando suposições canônicas do modelo de utilidade descontada exponencial, o desconto hiperbólico se tornou uma moda (RUBINSTEIN, 2003).

> “Os experimentos citados acima são deveras persuasivos. A forma funcional de desconto hiperbólico é apenas marginalmente diferente da função de utilidade padrão e parece oferecer uma "explicação" da evidência. O paradigma econômico de maximizar uma forma funcional é "seguro" e somos tentados a declarar o estabelecimento de uma nova disciplina "psicologia e economia". (RUBINSTEIN, 2003, p.1209, tradução nossa)

Neste mesmo trabalho, intitulado “Economics and Psychology? The Case of Hyperbolic Discounting”, ao mesmo tempo em que rejeita o modelo exponencial, Ariel Rubinstein apresenta testes com os quais rejeita o modelo hiperbólico. Os testes visam a testar a ideia do autor de que as pessoas fazem escolhas por um processo que “visa a simplificar a escolha aplicando relações de similaridade” (p. 1210, tradução nossa). Por exemplo, a escolha entre receber as maçãs de Thaler (1981) é feita em etapas. No primeiro caso, há a possibilidade de uma hoje e duas amanhã. Hoje é muito diferente de amanhã, então é possível escolher uma recompensa menor em tempo menor. Entretanto, 365 e 366 dias são muito similares, então a escolha é entre maçãs - duas são preferíveis a uma.

Este processo permite abarcar os resultados do desconto hiperbólico e também explicar situações em que ele falha. O exemplo do autor se refere ao conserto de um aparelho de som. Na primeira situação, o novo chegará em 60 dias e naquele momento serão pagos $ 960. Pergunta-se se a pessoa estaria disposta a aceitar $2 para que o aparelho novo chegue em 61 dias. Na segunda situação, ele chegará amanhã e serão devidos $ 1080. Pergunta-se se a pessoa está disposta a atrasar em 60 dias e pagar, no dia 61, 960.

Pelo modelo de desconto hiperbólico, quem não está disposto a aceitar $2 por um atraso de um dia em 60 dias não deve estar disposto a aceitar $2 para atrasar um dia em qualquer tempo inferior a 60 dias (porque deveria demandar mais que $2). Por transitividade, eles não deveriam aceitar um atraso de 60 dias por $120 (como o valor de reserva para um atraso de um dia em todos os 60 dias é maior que $2, a soma destes deve ser maior que $120). Apesar disto, os resultados não confirmam as previsões do modelo hiperbólico: quase um quarto dos que rejeitaram a primeira opção aceitaram a segunda.

As proposições de Rubinstein, como já notado pelo autor (RUBINSTEIN, 1988), podem acarretar violações do princípio de transitividade, o que seria uma mudança ainda maior nos pressupostos da economia. Rubinstein apresenta uma variação do Paradoxo de Allais com as seguintes loterias:

$$L_1 = (4000, 0{,}8) \qquad L_2 = (3000, 1)$$

$$L_3 = (4000, 0{,}2) \qquad L_4 = (3000, 0{,}25)$$

Onde o primeiro número é o valor monetário do prêmio e o segundo a probabilidade de recebê-lo. No caso alternativo, o prêmio é zero. Kahneman e Tversky (1979) testaram quais loterias eram preferidas e encontraram que $L_2 > L_1$ e $L_3 > L_4$. Isto viola o axioma da independência, pois $L_3 = 0{,}25L_1 + 0{,}75.0$ e $L_4 = 0{,}25L_2 + 0{,}75.0$. Uma mera multiplicação por $0{,}25$ e adição de uma loteria $L_0 = (0, 1)$ não deveria causar esta reversão de preferências.

As evidências de seu modelo não são tão fortes quanto às de outros economistas comportamentais, como Tversky e Kahneman, cujos resultados para a aversão relativa ao risco estavam em torno de 80% das pessoas revertendo preferências ou as do modelo hiperbólico encontrados em Thaler, mas atentam para a ascensão veloz do modelo de desconto hiperbólico na economia e para a necessidade de um escrutínio cuidadoso.

Este capítulo buscou mostrar que diversas linhas de pesquisa são possíveis ao se relaxar alguns dos postulados de Koopmans, especialmente o terceiro e o quarto. As investigações dos autores estiveram mais ligadas à experiência empírica, ao contrário dos discutidos no capítulo 2. Por último, atentamos para que este desenvolvimento rápido não veio sem seus próprios problemas internos, gerando a necessidade de uma avaliação crítica das diversas teorias propostas.

4: CONSIDERAÇÕES ÉTICAS IMPLICADAS PELO DESCONTO INTERTEMPORAL

Este capítulo trata da discussão ética em torno do uso do Modelo de Utilidade Descontada, como apresentado no capítulo 2, dentro dos modelos de trajetória de acumulação de capital das décadas de 50 e 60, mostrando que muitos das reservas dos autores apontadas anteriormente continuaram a ser ignoradas, mesmo em uma questão eminentemente política[28]. Assim como anteriormente discutido, motivações de tratabilidade matemática seguiram condicionando discussões de caráter eminentemente ético.

O capítulo está organizado em duas seções. A primeira apresenta brevemente um modelo de crescimento ótimo típico da época e a segunda faz a discussão tomando-o como base.

4.1 O Modelo de Crescimento Ótimo de Phelps

A motivação inicial de Ramsey em seu trabalho de 1928 era a de encontrar uma taxa ótima de poupança, o que veio a se tornar a regra de ouro da acumulação. A regra é derivada na seção inicial de seu artigo, no qual não há desconto intertemporal. Ramsey é muito explícito em sua oposição ao desconto entre gerações, entretanto seu modelo não é aplicável na prática porque o *Bliss Point* é arbitrário e uma informação crucial para a construção da política a ser de fato implementada fica faltando.

Sem o artifício do *Bliss Point* e sem a taxa de desconto intertemporal, como visto no capítulo 2, a integral da soma das utilidades instantâneas ao longo do tempo não converge (em um horizonte de tempo infinito) e se torna impossível escolher *um* caminho ótimo.

[28] E ainda mais à época. Muitos autores fazem questão de expressar o problema apontando sua aplicação tanto em uma economia de mercado quanto em uma economia centralmente planejada.

Como já observado por Frederick, Loewenstein e O'Donoghue (2002), o modelo de utilidade descontada estava sendo usado livremente na literatura após Samuelson e, como aponta Koopmans (1967b), os trabalhos sobre caminho ótimo de crescimento dos anos 60 poderiam ter sido escritos à sequência de Ramsey não fosse a Grande Depressão dos anos 30.[29] Chakravarty (1962), apresenta A Mathematical Theory of Savings como o "*locus classicus"* (p. 179) do problema.

Em dois artigos curtos, Phelps (1961) e Tinbergen (1956)[30] respondem à pergunta de Ramsey sem recurso à intuição da equação de Euler, como Ramsey, pois ambos buscam encontrar uma taxa constante de proporção da renda poupada que maximiza a utilidade. No estilo bem-humorado do artigo de Phelps: "Esqueçamos otimalidade grandiosa. Os solovianos[31] são um povo simples. Requeiramos que a fração do produto acumulada seja fixa por todo o tempo." (PHELPS, 1961, p. 639, tradução nossa). Pouco comentário é feito justificando a escolha de uma função de utilidade com as tradicionais propriedades de concavidade e uma taxa de desconto intertemporal exponencial. Tinbergen, de fato, ressalta o problema da não-convergência da integral em um ambiente sem desconto.

Phelps não usa a ideia da maximização de uma utilidade descontada e seu mecanismo não precisa lidar com a questão ética ao propor um resultado que é um ótimo dominante facilmente reconhecível pelos agentes:

> "[...] deve existir uma trajetória factível de consumo uniformemente maior. Esta trajetória dominante oferece mais consumo em cada ponto em sua história do que qualquer outra trajetória de crescimento natural. Todas as gerações em tal história naturalmente preferirão essa trajetória" (p. 640, tradução nossa)

---

[29] E possivelmente, a Segunda Guerra Mundial, que canalizou muitos economistas para problemas de Programação e Teoria dos Jogos. Ver, por exemplo, Leonard (1992)

[30] Muitos economistas se debruçaram sobre o assunto, entretanto utilizamos estes para efeito ilustrativo. As propriedades do modelo de crescimento em si não são nosso foco.

[31] O artigo de Phelps intitula-se: The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen, que emprega uma narrativa onde o Rei de Solovia conclama seus súditos a discutir a taxa ótima de poupança.

Tal mecanismo é possível porque os agentes de Phelps (as gerações) decidem sobre uma taxa de poupança válida para toda a trajetória, bem como uma taxa de consumo. De certa forma, eles decidem sobre a trajetória inteira e apenas uma vez, ao invés de fazer escolhas instantâneas[32]. Em sua equação, as taxas de consumo ($c = 1 - s$) e poupança (s) não dependem do tempo (apenas seus níveis dependem) e o problema é encontrar o valor do parâmetro s. Por último, g denota a taxa natural de crescimento:

$$C_t = (1 - s)f(s)e^{gt}$$

O modelo de Phelps é dificilmente aplicável, justamente por haver pouca liberdade para a economia. Além de podermos escrever tudo em termos de uma taxa de poupança, há a necessidade de uma taxa natural de crescimento, há suposições sobre o progresso tecnológico, sobre o crescimento populacional e sobre a forma da função de produção[33]. Por outro lado, não é necessário invocar a Teoria da Utilidade.

4.2 Considerações Éticas

A regra de ouro de Phelps é também um ótimo nos modelos em que se precisa maximizar uma integral descontada de utilidades instantâneas futuras se a taxa de desconto intertemporal é zero (Koopmans, 1967b) e o trabalho de Tinbergen já cinco anos antes mostra que tais modelos podem incluir essa ferramenta. Isto pareceria um feliz achado para Ramsey e von Böhm-Bawerk - a melhor trajetória é aquela em que as pessoas se comportam da maneira correta, isto é, não subestimam o futuro.

Se, entretanto, o futuro é descontado por uma taxa positiva, como tem sido suposto no modelo de Utilidade Descontada, o nível máximo de riqueza que a economia pode atingir é menor, pois há uma menor disposição a poupar.

---

[32] Em não sendo assim, diversas coisas poderiam decorrer. Ver, por exemplo, o trabalho de Robert Strotz, no capítulo 3.

[33] A função de produção é do tipo Cobb-Douglas

A questão do desconto pode fazer muito sentido quando pensamos em decisões sobre a alocação de recursos ao longo de um período específico, uma decisão sobre descansar hoje e trabalhar amanhã e vice-versa, por exemplo. À medida que o prazo de planejamento se estende, consequências mais drásticas emergem. A uma taxa de desconto de 2,5% ao ano, por exemplo, a utilidade cai à metade em aproximadamente 27 anos. Se transpusermos isto para o campo da política pública, fica implicado que o agente se importa em apenas 50% com a próxima geração.

Um corpo político pode decidir, entretanto, ser extremamente altruísta e optar por se sacrificar em benefício das gerações futuras, adotando uma taxa de desconto negativa. Neste caso, voltamos ao paradoxo de Koopmans do *indefinitely postponed splurge.* Esta política não pode ser mantida para sempre. Desta última observação ressaltamos o seguinte comentário:

> "A moral de nossa estória é que princípios éticos, na questão em discussão, precisam de um filtro matemático para determinar se em determinada circunstância são passíveis de implementação. Apenas princípios que passarem tal teste apresentam problemas de ética e de política." (KOOPMANS, 1967b, p.9, tradução nossa)

Além disso, algumas complicações se somam. Mesmo supondo que alguma decisão possa ser tomada sobre como levar em conta a próxima geração, há que se debater o crescimento populacional (o qual é assumido por Phelps). Uma geração mais populosa merece maior consideração? Adicionando, como Koopmans (1977) demonstra, um crescimento populacional constante exponencial exógeno à função utilidade temos:

$$max \int_0^\infty e^{-\rho t} L_0 e^{\gamma t} U(c_t) dt$$

Onde L_0 é o tamanho inicial da população e γ é a taxa de seu crescimento. A taxa de desconto deve ser, agora, no mínimo superior a esta última para que a integral possa convergir e não mais apenas positiva. Caso contrário, voltamos ao

paradoxo do *indefinitely postponed splurge* ou, no caso de horizonte de tempo finito, todo o consumo deixado para o último momento.

Koopmans havia proposto, anteriormente, o tratamento da questão com o uso de utilidades (ou estoques de capital) *per capita*, o que permite retornar ao modelo de Phelps. Diz o autor:

> "Assumamos [...] que o modelo presente é suficientemente representativo [...]. Então conseguimos evitar descriminar contra gerações futuras com base na distância do tempo em que vivem. Entretanto, esta escapada por um triz pela virtude foi possível apenas por fazer comparações de bem-estar em uma base *per capita.* Se, no entanto, quisermos pesar bem-estar *per capita* por tamanho da população, então somos a forçados a [...] descontar positivamente" (KOOPMANS, 1965, p.254, tradução nossa)

Estas duas formulações alternativas mostram que ordenando as preferências de diversas maneiras formula-se o mesmo problema de diferentes maneiras, mas com considerações éticas distintas. Mas fica evidente que é necessário formular o problema de maneira que uma ordenação de preferências seja possível (CHAKRAVARTY, 1962).

A importância do mecanismo para impor uma ordenação de preferências é reafirmada ao vermos que von Weizsäcker (1965) propõe um outro critério, que faz comparações para horizontes infinitos com um critério que foi chamado, posteriormente, de *overtaking criterion*.[34] A intuição por trás dele é que se existe algum T^* finito para o qual

$$\int_0^T e^{-\rho t} U(c_t) dt > \int_0^T e^{-\rho t} U(c_t^*) dt \ \forall \, T \geq T^*$$

Então c_t é superior a c_t^*. A partir de T^*, a parte esquerda desigualdade está permanentemente acima da direita, ultrapassando-a. Quando a taxa de desconto ρ é positiva, o uso do *overtaking criterion* é equivalente à maximização de uma utilidade

[34] Em português: critério da ultrapassagem

na forma canônica do modelo de Samuelson (KOOPMANS, 1967a). A vantagem do método de von Weizsäcker é a de oferecer uma ordenação parcial que permite comparar trajetórias alternativas quando observamos a divergência de uma integral do tipo:

$$\int_0^\infty U\big(c(t)\big)dt$$

Uma crítica mais contundente é oferecida ainda antes, pelo mesmo Chakravarty (1962). Ainda na introdução de seu The Existence of an Optimum Savings Program, escreve:

> "A argumentação deste artigo é que as tentativas na literatura até o momento ou não prestam suficiente atenção na introdução desta ordem e, portanto, falham completamente em formular adequadamente o problema ou que o fazem de maneira arbitrária, o que garante tratabilidade matemática, mas pouco mais do que isso" (CHAKRAVARTY, 1962, p.179, tradução nossa)

O artigo apresenta inclusive um exemplo de uma situação em que o método usado por Ramsey (1928) não garante convergência da integral e, portanto, existência de uma solução. Ramsey admite a possibilidade de que o *Bliss Point* seja aproximado assintoticamente. Neste caso, Chakravarty insere a função de utilidade hiperbólica na integral de Ramsey (sem desconto intertemporal), a qual é descrita por:

$$U(c) = U_0\left(\frac{1 - C_0}{C}\right), \quad U_0 = Bliss$$

E, portanto, usando a segunda equação de Ramsey, o problema é:

$$min \int_0^\infty \frac{U_0 C_0}{C_{(t)}} dt$$

Desta forma, é fácil ver que a integral não converge para um programa constante de consumo. Ela também não converge para um programa em que o consumo cresce linearmente com o tempo. O ponto do autor é que:

> "se não houver um nível finito de consumo correspondente ao ponto de satisfação máxima[35], as restrições usuais na função de utilidade e de produção não excluem a possibilidade de que uma solução significativa pode não existir. É possível que restrições empíricas nas funções de produção são tais que os casos de crescimento linear e logarítmico são sempre excluídos na prática, mas então o problema é empírico e não puramente lógico [...]" (CHAKRAVARTY, 1962, p.185, tradução nossa)

Dado que a função de Utilidade é tida como um dado prévio da equação, algumas situações ficam sem solução. Chakravarty concluiu, ainda passando pelo trabalho de Koopmans sobre a derivação axiomática da impaciência que as tentativas da literatura precedente sofreram ou de problemas de não convergir (logo não impor uma ordenação de preferências) e de, portanto, não ter significado ou de imporem uma ordenação de maneira "completamente arbitrária" p. (186). Ainda, "em um sentido, tais ordenações de preferências arbitrárias são operacionalmente sem sentido enquanto não temos nenhum método de refutá-las." (CHAKRAVARTY, 1962, p.186-187, tradução nossa). Esta segunda conclusão guarda semelhança com todas as ressalvas que os formuladores iniciais do Modelo de Utilidade Descontada expressaram e que fincaram raiz nos trabalhos econômicos subsequentes, mas é mais forte, condicionando sua razoabilidade à possibilidade alguma validação empírica, o que pode ou não ser viável.

Este capítulo mostrou que os modelos de crescimento típicos discutidos nas décadas de 50 e 60, inspirados em Ramsey, sofreram de problemas semelhantes aos do próprio Modelo de Utilidade Descontada. Seus autores não discutiram difíceis questões éticas, especialmente aquela em torno de como alocar recursos entre gerações, em benefício de garantir a existência de soluções para suas equações. Com consequência, acabaram adotando a posição implícita no Modelo de Utilidade

[35] O autor se refere, em seu exemplo, à situação em que há apenas a aproximação indefinida de Bliss.

Descontada. Posteriormente, quando atenção foi dada a tal ponto, viu-se que as motivações éticas eram limitadas por restrições lógicas ou técnicas e que o crescimento populacional era um dos problemas mais prementes. Por último, ressaltou-se que a ausência de validação empírica para o Modelo de Utilidade Descontada é um problema ainda mais forte, por os trabalhos terem aqui uma conotação normativa.

5: CONCLUSÃO

Neste trabalho, traçou-se a evolução do Modelo Padrão de Utilidade Descontada desde von Böhm-Bawerk até sua axiomatização por Koopmans. Com isto, foi possível apontar que a elegância e a técnica matemática foram fatores importantes neste desenvolvimento. Muito embora seus autores tenham expressado reservas quanto a este rumo, ele terminou por prevalecer.

Apresentou-se, também, os postulados sobre os quais se assenta o modelo, indicando que novas linhas de pesquisa surgem ao se flexibilizar, especialmente, os postulados referentes a estacionariedade e independência intertemporal. Essas contribuições têm vindo tanto da Economia Mainstream quanto de outros campos, como a Economia Comportamental, com as quais exemplificamos este movimento. Dada a visibilidade do assunto no momento, o trabalho debruçou-se com maior afinco sobre a possibilidade do Desconto Hiperbólico.

Muitas destas contribuições têm sido soluções *ad hoc* e nem todas são consistentes entre si, ponto para o qual atentou-se com supedâneo na crítica feita por Rubinstein (2003). De toda forma, cabe notar que estes trabalhos reestabeleceram a conexão da investigação econômica sobre a alocação intertemporal com os testes empíricos, que estava ausente na axiomatização do modelo, sendo apenas sugerida por Samuelson (1937). Tal desenvolvimento pode iluminar novos caminhos para a pesquisa, mas é interessante notar que ele se conecta também com o viés tomado por von Böhm-Bawerk e Fisher, que examinaram esta questão em maior detalhe e pluralidade.

Por último, atentou-se para problemas de ordem ética que estão implícitos nas formulações de Utilidade Intertemporal, apoiando-nos em modelos de crescimento ótimo das décadas de 50 e 60. Viu-se que também aqui opções matemáticas dos economistas acabaram necessitando objetos matemáticos cujas consequências últimas não foram amplamente exploradas, ao menos inicialmente. O ponto fulcral desta discussão é a necessidade do Desconto Intertemporal (positivo) para a convergência dos modelos de crescimento, o que implica impaciência da

geração atual e contrasta com objetivos políticos de altruísmo para com as gerações futuras. Tal problema pode ser evitado usando artifícios como o capital *per capita*, mas a crítica mais forte de Chakravarty mostra que a formulação padrão é tão pouco restritiva que muitas vezes uma solução significativa pode não existir.

Como último comentário e opinião pessoal, pode-se dizer, com uma inspiração que tangencia von Neumann (1947), que é positivo que o afã dedutivo da escola formalista seja moderado, de tempos em tempos, por novas ideias experimentais, mesmo que elas careçam do rigor e da consistência da anterior.

6: REFERÊNCIAS

AINSLE, George. Specious Reward: A Behavioral Theory of Impulsiveness and Impulse Control. **Psychological Bulletin**. vol. 82, n. 4, pgs. 463-496, 1975

AINSLE, George. Derivation of 'Rational' Economic Behavior from Hyperbolic Discount Curves. **The American Economic Review**. vol. 81, n.2 pgs. 334-340, 1991

AINSLE, George; HERRNSTEIN, Richard J. Preference Reversal and Delayed Reinforcement. **Animal Learning & Behavior**. vol. 9, n. 4, pgs. 476-482, 1981

AKERLOF, George A. Procrastination and Obedience. **American Economic Review.** vol. 81, n. 2, pgs. 1-19, 1991

BECKER, Gary. Irrational Behavior and Economic Theory. **The Journal of Political Economy**. vol. 70, n. 1, pgs. 1-13, 1962

BECKER, Gary. The Economic way of Looking at Behavior. **The Journal of Political Economy.** vol. 101, n.3, pgs. 385-409, 1993

BECKER, Gary; MULLIGAN, Casey B. The Endogenous Determination of Time Preference. **The Quarterly Journal of Economics.** vol. 112, n. 3, pgs. 729-758, 1997

BECKER, Gary; MURPHY, Kevin. A Theory of Rational Addiction. **Journal of Political Economy**. vol. 96, n. 4, pgs. 675-701, 1988

BEED, Clive; KANE, Owen. What is the Critique of the Mathematization of Economics? **Kyklos.** vol. 4, n. 4, pgs. 581-612, 1991

von BÖHM-BAWERK, Eugen. **Teoria Positiva do Capital, Volume 1**. São Paulo: Nova Cultural, 1988

CHAKRAVARTY, Sukhamoy. The Existence of an Optimum Savings Program. **Econometrica.** vol. 30, n. 1, pgs. 178-187, 1962

ECONOMIST, T. **Profit and the Public Good**. 20 jan. 2005. Disponível em <http:// http://www.economist.com/node/3555259> Acesso em 10/11/2013

FAMA, Eugen. Term Premiums in Bond Returns. **Journal of Financial Economics.** vol. 13, n. 14, pgs. 529-546, 1984

FISHER, Irving. **A teoria do juro: determinada pela impaciência por gastar renda e pela oportunidade de investi-la**. São Paulo: Abril Cultural, 1984

FREDERICK, Shane; LOEWENSTEIN, George; O'DONOGHUE, Ted. Time Discounting and Time Preference: A Critical Review. **Journal of Economic Literature.** vol. 40, n.2, pgs. 351-401, 2002

KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. **Econometrica**. vol 47, n.2, pgs 263-292, 1979

KOOPMANS, Tjalling C. Stationary Ordinal utility and Impatience. **Econometrica.** vol. 28, pgs. 287-309, 1960

KOOPMANS, Tjalling C.; Diamond, Peter. A.; WILLIAMSON, Richard E. Stationary Utility and Time Perspective. **Econometrica.** vol. 32, n.1, pgs. 82-100, 1964

KOOPMANS, Tjalling C. On the Concept of Optimal Economic Growth. **Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia**. vol. 28, pgs. 225-287, 1965

KOOPMANS, Tjalling C. Objectives, Constraints, and Outcomes in Optimal Economic Growth Models. **Econometrica.** vol 35, n. 1, pgs. 1-15, 1967

KOOPMANS, Tjalling C. Intertemporal Distribution and 'Optimal' Aggregate Economic Growth, in W. Fellner, et al., **Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher,** New York, John Wiley, pgs. 95-126, 1967

KOOPMANS, Tjalling C. Concepts of Optimality and Their Uses. **American Economic Association.** vol. 67, n. 3, pgs. 261-274, 1977

LAIBSON, David. **Hyperbolic Discount Functions, Undersavings and Savings Policy**. NBER working paper. Cambridge, n. 5635, jun 1996. Disponível em: <http://www.nber.org/papers/w5635.pdf> Acesso em 16/10/2013.

LAZEAR, Edward P. Economic Imperialism. **The Quarterly Journal of Economics.** vol. 115, n. 1, pgs. 99-146, 2000

LEONARD, Robert J. Creating a Context for Game Theory. **History of Political Economy.** vol. 24, pgs. 29-76, 1992

LEONARD, Robert J. From Parlor Games to Social Sciences: Von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory 1928-1944. **Journal of Economic Literature**. vol. 33, n. 2, pgs. 730-761, 1995

LOEWENSTEIN, George; PRELEC, Drazen. Anomalies in intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation. **The Quarterly Journal of Economics.** vol. 107, n. 2, pgs. 573-597, 1992

LOEWENSTEIN, George; THALER, Richard H. Anomalies: Intertemporal Choice. **Journal of Economic Perspectives.** vol. 3, n. 4, pgs. 181-193, 1989

MULLAINATHAN, Sendhil; THALER Richard H. 2000. **Behavioral Economics**. NBER working paper. Cambridge, n. 7948, out 2000. Disponível em: <http://www.aiinfinance.com/Mullainathan.pdf> Acesso em 16/10/2013.

von NEUMANN, John. The Mathematician. **Works of the Mind.** vol. 1, n. 1. pgs. 180-196. Chicago: University of Chicago Press, 1947

PHELPS, Edmund. The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen. **American Economic Association.** vol. 51, n. 4, pgs. 638-643, 1961.

RAMSEY, Frank. A Mathematical Theory of Saving. **The Economic Journal.** vol. 38, n.152, pgs. 543-559, 1928

RUBINSTEIN, Ariel. Similarity and decision-making under risk (is there a utility theory resolution to the Allais paradox?). **Journal of Economic Theory.** vol. 46, n.1, pgs. 145-153, 1988

RUBINSTEIN, Ariel. Economics and Psychology? The case of Hyperbolic Discounting. **International Economic Review.** vol. 44, n. 4, pgs. 1206-127, 2003

SAMUELSON, Paul. A Note on Measurement of Utility. **Review of Economic Studies**. vol. 4, pp. 155-61, 1937

SAMUELSON, Paul. **Foundations of Economic Analysis.** Cambridge: Harvard University Press, 1947

SMITH, Adam. **An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations**. Chicago: Encyclopaedia Britannica, c1952

SOLOW, Robert M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. **The Quarterly Journal of Economics.** vol. 70, n. 1, pgs 65-94, 1956

STIGLER, George. The Successes and Failures of Professor Smith. **Journal of Political Economy**. vol. 84, n. 6, pgs. 1199-1213, 1976

STROTZ, Robert H. Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization. **Review of Economic Studies**. vol. 23, n. 3, pgs. 165-80, 1956

THALER, Richard H. Some Empirical Evidence on Dynamic Inconsistency. **Economic Letters** vol. 8, pgs. 201-207, 1981

TINBERGEN, Jan. The Optimum Rate of Saving. **The Economic Journal.** vol.66, n. 264, pgs. 603-609, 1956

TVERSKY, Amos; KAHNEMAN, Daniel. The Framing of Decisions and the Psychology of Choice. **Science,** new series, vol. 211, n. 4481, pgs. 453-458, 1981

von WEIZSÄCKER, Carl C. Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon. **The Review of Economic Studies.** vol. 32, n. 2, pgs. 85-104, 1965