

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PLANEJAMENTO OTIMIZADO DE TRAJETÓRIA PARA UM ROBÔ CILÍNDRICO
ACIONADO PNEUMATICAMENTE

por

Leonardo Missiaggia

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, fevereiro de 2014

PLANEJAMENTO OTIMIZADO DE TRAJETÓRIA PARA UM ROBÔ CILÍNDRICO
ACIONADO PNEUMATICAMENTE

por

Leonardo Missiaggia
Tecnólogo em Automação Industrial

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Processos de Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Eduardo André Perondi

Aprovada por:

Prof. Dr. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara – DEMEC / UFRGS

Prof. Dr. Flavio José Lorini – PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Renato Ventura Bayan Henriques – PPGEE / UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 28, fevereiro de 2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por me dar saúde e força para seguir em frente nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais e irmãos, pelo carinho, apoio e por me incentivar na busca dos meus objetivos.

À minha namorada, pelo companheirismo, compreensão e pelo apoio na fase final do trabalho.

Ao Prof. Dr. Eduardo André Perondi, agradeço pela amizade e pelo competente trabalho de orientação.

Ao Prof. Dan Simon, por ter auxiliado na compreensão de temas importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas de mestrado Marcos G. Q. Rijo, Anselmo Cukla e Carlos A. C. Sarmanho Júnior pela amizade, convívio e pelo auxílio ao longo do curso.

Ao Prof. Dr. Mauro André Barbosa Cunha por me inspirar o gosto pela pesquisa, por motivar na busca por qualificação e pela recomendação para o meu ingresso no mestrado.

Aos colegas do LAMECC, pelo convívio, amizade e suporte nas diversas fases do trabalho.

Aos colegas do Câmpus Camaquã do IFSul, em especial às professoras Ana Maria Geller e Lydia T. Mulling e aos professores Ricardo Prediger e Guilherme K. Schirmer.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço ao Instituto Federal Sul-rio-grandense pelo constante apoio e incentivo na busca de qualificação.

RESUMO

Este trabalho consiste na elaboração de uma estratégia para a geração de trajetórias otimizadas para um robô cilíndrico de cinco graus de liberdade acionado pneumaticamente. Como resultado da aplicação do método desenvolvido obtêm-se as trajetórias no espaço das juntas que resultam no movimento adequado do efetuador do robô, de acordo com algum critério de otimização. Para a obtenção das trajetórias das juntas do robô a partir de uma dada trajetória desejada para o efetuador, resolveu-se o problema de cinemática inversa por meio de uma abordagem algébrica. Para a geração de trajetórias entre os pontos no espaço de trabalho do robô propõe-se a utilização de um algoritmo de aproximação de pontos através de *splines* compostas por polinômios de sétimo grau. Essa escolha garante a continuidade da função de posição, bem como de suas três primeiras derivadas, sendo essa uma condição necessária para a implantação de importantes leis e estratégias de controle (como, por exemplo, a estratégia em cascata, utilizada com sucesso no controle de sistemas servopneumáticos). O método proposto para a geração de *splines* possibilita, através do ajuste de parâmetros em função da exigência de cada aplicação, a obtenção de curvas no espaço das juntas com valores otimizados de *jerk*, aceleração ou velocidade. Para aplicação na geração de trajetórias para o robô, a interpolação dos pontos é realizada no espaço dos atuadores a fim de fornecer ao controlador as curvas de referência para posição, velocidade, aceleração e *jerk*. Para a demonstração da aplicação do método no seguimento de trajetórias, são utilizadas como referência curvas tridimensionais cujos valores numéricos são comparados com os resultados fornecidos a partir da metodologia proposta. Assim, uma vez calculadas as trajetórias em cada uma das juntas através da cinemática inversa, utiliza-se as transformações homogêneas da cinemática direta do robô, obtidas a partir do método de Denavit-Hartenberg, para obter a trajetória do efetuador e verificar a funcionalidade do modelo resultante.

Palavras-chave: planejamento de trajetória; cinemática inversa; manipulador robótico pneumático.

ABSTRACT

This work consists of developing a strategy to generate optimized trajectories for a cylindrical robot with five degrees of freedom which is actuated pneumatically. As a result of the application of the developed method, trajectories in joint space are obtained and result in the proper motion of the robot's end-effector according to a given optimizing criteria. In order to obtain the trajectories of the robot's joints from a given desired trajectory for the end-effector, the problem of inverse kinematics was solved by an algebraic approach. To generate trajectories between points in the robot's workspace it was proposed the use of an algorithm for approximation of points through *splines* composed by seventh degrees polynomials. This choice ensures the continuity of the position function as well as its first three derivatives. It is a necessary condition for the implementation of important laws and control strategies (for example, the cascade strategy which is successfully used in servo-pneumatic control systems). The proposed method to generate *splines* allows, through the adjustment of parameters taking into account the requirements of each application, the obtainment of curves in the joint space with optimized values of jerk, acceleration and speed. In order to apply the method in the generation of trajectories for the robot, the interpolation of the points is performed in the space of the actuators with the purpose of providing the controller reference curves for position, speed, acceleration and jerk. To demonstrate the application of the method in trajectory tracking, three-dimensional curves are used and their numerical values are compared with the results provided by the proposed methodology. Therefore, once the calculated trajectory in each joint through inverse kinematics is obtained, homogeneous transformations of the direct kinematics of the robot, obtained by Denavit-Hartenberg's method, are employed to find out the trajectory of the end-effector and verify the functionality of the resulting model.

Keywords: trajectory planning; inverse kinematics; pneumatic robotic manipulator.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Descrição do Problema.....	2
1.2	Objetivo Geral	3
1.3	Objetivos Específicos	3
1.4	Organização do trabalho.....	4
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1	Robôs manipuladores industriais.....	5
2.2	Planejamento de Trajetórias	7
2.2.1	Planejamento de Trajetórias de Robôs Manipuladores	10
2.2.2	Trajetórias de mínimo <i>jerk</i>	12
2.3	Interpolação	13
2.3.1	Interpolação Polinomial	14
2.3.1.1	Resolução do sistema linear	15
2.3.1.2	Forma de Newton	16
2.3.1.3	Forma de Lagrange.....	22
2.3.2	Interpolação por <i>Splines</i>	22
2.3.2.1	<i>Splines</i> de Primeira Ordem.....	25
2.3.2.2	<i>Splines</i> Cúbicas.....	26
3	O ROBÔ PNEUMÁTICO	29
3.1	Configuração geométrica do manipulador	29
3.2	O Espaço de Trabalho do Manipulador.....	30
3.3	O Espaço das Juntas e o Espaço dos Atuadores.....	31
3.4	Análise Cinemática do Manipulador	33
3.4.1	Cinemática Direta.....	33
3.4.2	Cinemática Inversa	36
3.4.3	Verificação da Cinemática Inversa.....	38
4	CRIAÇÃO DE TRAJETÓRIAS A PARTIR DE <i>SPLINES</i>.....	44
4.1	Criação de <i>Splines</i> de Ordem Qualquer	44
4.2	Trajetórias Formadas por <i>Splines</i> de Oitava Ordem	47
4.2.1	Cálculo das Derivadas Parciais para o Primeiro Nó.....	49
4.2.2	Cálculo das Derivadas Parciais para os Nós Intermediários da Trajetória.....	53
4.2.3	Cálculo das Derivadas Parciais para o Nó Final da Trajetória.....	58
4.2.4	Solução do Conjunto de Equações de Otimização	62
4.3	Descrição do Processo de Geração de Trajetórias.....	67
5	RESULTADOS.....	70
5.1	Trajetória Formada por Pontos Dispostos Linearmente.....	70
5.2	Exemplo de Trajetória Helicoidal	79
6	CONCLUSÕES	86
6.1	Trabalhos Futuros.....	87

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88
APÊNDICE A	90
APÊNDICE B.....	91

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	O robô cilíndrico pneumático de cinco graus de liberdade acionado pneumáticamente	2
Figura 2.1	Estrutura de um punho esférico, destacando os movimentos de guinada, arfagem e rolagem (adaptado de Spong e Vidyasagar, 1989).	6
Figura 2.2	Robô de 6 GDL com efetuador apresentando um eixo de simetria (adaptado de Craig, 2005)	7
Figura 2.3	Trajetória multidimensional de um robô industrial definida no espaço de trabalho [Biagiotti e Melchiorri, 2008]	9
Figura 2.4	(a) Interpolação e (b) aproximação de um conjunto de pontos [Biagiotti e Melchiorri, 2008]	10
Figura 2.5	Polinômios de grau n interpolando $n+1$ pontos: (a) polinômio de primeiro grau, (b) polinômio de segundo grau e (c) polinômio de terceiro grau.	14
Figura 2.6	Interpolação linear	17
Figura 2.7	Interpolação de três pontos por um polinômio de segundo grau	19
Figura 2.8	Interpolação de quatro pontos por meio de um polinômio de terceiro grau	21
Figura 2.9	Interpolações polinomiais e por <i>splines</i> (adaptado de Chapra e Canale, 2001)	23
Figura 2.10	Aproximação de $f(x)$ por uma função linear por partes (adaptada de Ruggiero e Lopes, 1996)	24
Figura 2.11	Função quadrática por partes (adaptada de Ruggiero e Lopes, 1996)	24
Figura 2.12	<i>Spline</i> de primeira ordem (adaptado de Chapra e Canale, 2001)	26
Figura 2.13	<i>Spline</i> cúbica (adaptado de Chapra e Canale, 2001)	28
Figura 3.1	Configuração das juntas do robô (adaptado de Rijo, 2013)	29
Figura 3.2	O robô pneumático e o espaço de trabalho cilíndrico	30
Figura 3.3	Espaço de trabalho do robô: (a) vista superior e (b) vista lateral	31
Figura 3.4	Espaços para a representação da posição de um robô industrial	32
Figura 3.5	Representação simplificada da cadeia cinemática do robô (adaptada de Rijo, 2013)	33
Figura 3.6	Representação simplificada da cadeia cinemática destacando as posições do punho e do efetuador	36
Figura 3.7	Trajetória retilínea	39

Figura 3.8	Trajétórias das juntas sem a variação de θ_4 para o seguimento da trajetória retilínea	40
Figura 3.9	Trajétórias das juntas com variação de θ_4 para o seguimento da trajetória retilínea	40
Figura 3.10	Caminho do efetuador para trajetória retilínea obtido a partir das variáveis de junta e das equações da cinemática direta.....	41
Figura 3.11	Trajétória helicoidal	41
Figura 3.12	Trajétória das juntas com θ_4 constante para o seguimento da trajetória helicoidal.....	42
Figura 3.13	Trajétórias das juntas com variação de θ_4 para o seguimento da trajetória helicoidal.....	42
Figura 3.14	Caminho do efetuador para trajetória helicoidal obtido a partir das variáveis de junta e das equações da cinemática direta.....	43
Figura 4.1	Processo de geração de trajetória para o efetuador	69
Figura 5.1	Pontos-chave utilizados para a obtenção da trajetória	71
Figura 5.2	Curvas de posição, velocidade, aceleração e <i>jerk</i> para o atuador 1	74
Figura 5.3	Curvas de posição, velocidade, aceleração e <i>jerk</i> para o atuador 2	75
Figura 5.4	Curvas de posição, velocidade, aceleração e <i>jerk</i> para o atuador 3	75
Figura 5.5	Curvas de posição, velocidade, aceleração e <i>jerk</i> para o atuador 4	76
Figura 5.6	Variáveis de juntas para a trajetória proposta	76
Figura 5.7	Trajétória do efetuador ao longo dos nós.....	77
Figura 5.8	Trajétória do efetuador ao longo dos nós com alteração da escala de y e z	78
Figura 5.9	(a) Trajetória do efetuador vista no plano xy (b) Trajetória do efetuador vista no plano xz	78
Figura 5.10	Curva helicoidal tridimensional destacando os nós da trajetória.....	80
Figura 5.11	Trajétória helicoidal obtida a partir de 21 pontos-chave	82
Figura 5.12	Posição do atuador 1 e suas três primeiras derivadas para execução da trajetória helicoidal.....	83
Figura 5.13	Posição do atuador 2 e suas três primeiras derivadas para execução da trajetória helicoidal.....	83
Figura 5.14	Posição do atuador 3 e suas três primeiras derivadas para execução da trajetória helicoidal.....	84

Figura 5.15	Posição do atuador 4 e suas três primeiras derivadas para execução da trajetória helicoidal.....	84
Figura 5.16	Variáveis das juntas para a execução da trajetória helicoidal.....	85
Figura B.1	Redução do desvio entre os nós para uma trajetória retilínea por meio da adição de pontos-chave à trajetória	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Valores dos pontos para a função $f(x)$	15
Tabela 2.2	Diferenças divididas para polinômios de grau n	21
Tabela 3.1	Valores limites das juntas do manipulador pneumático	30
Tabela 3.2	Fatores das relações de transmissão das juntas.....	32
Tabela 3.3	Parâmetros de Denavit-Hartenberg do robô pneumático.....	34
Tabela 5.1	Coordenadas dos pontos e orientação do efetuador.....	71
Tabela 5.2	Valores de desvio máximo nos nós e <i>jerk</i> para $h=0,5$ s.....	72
Tabela 5.3	Valores de desvio máximo nos nós e <i>jerk</i> para $h=0,75$ s.....	72
Tabela 5.4	Valores de desvio máximo nos nós e <i>jerk</i> para $h=1$ s.....	72
Tabela 5.5	Valores de desvio máximo nos nós e <i>jerk</i> para uma <i>spline</i> com $h=0,75$ s e $p=10^6$	73
Tabela 5.6	Valores de desvio máximo nos nós e <i>jerk</i> para trajetória helicoidal com $h=0,75$ s.....	81
Tabela 5.7	Valores de desvio máximo nos nós e <i>jerk</i> para uma trajetória helicoidal com $h=0,75$ s e $p=6\times 10^4$	81
Tabela A.1	Pontos-chave para a trajetória helicoidal	90

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

B	Sistema de coordenadas associado à base do robô
DH	Denavit-Hartenberg
GDL	Grau(s) de Liberdade
IFR	International Federation of Robotics
ISO	International Organization for Standardization
IWO	<i>Invasive Weed Optimization</i>
LAMECC	Laboratório de Mecatrônica e Controle
P	Junta Prismática
R	Junta Rotacional
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
VPF	<i>Virtual Potential Fields</i>
W	Sistema de coordenadas associado ao pulso do robô

LISTA DE SÍMBOLOS

a_i	Coeficiente de um polinômio
α_i	Parâmetro de controle da magnitude relativa de cada derivada da função <i>spline</i>
b_i	Coeficiente da interpolação através das diferenças divididas de Newton
C	Matriz de dimensão $3(N+I) \times (N+I)$
C_i	Elementos da matriz C
d	Variável da junta prismática [m]
D	Matriz de dimensão $3(N+I) \times 3(N+I)$
D_2	Blocos da diagonal inferior de D
\tilde{D}_3	Bloco inicial da diagonal principal de D
D_3	Blocos intermediários da diagonal principal de D
\widetilde{D}_3	Bloco final da diagonal principal de D
D_4	Blocos da diagonal superior de D
d_x	Coordenada x da origem do sistema de coordenadas do efetuador em relação à base [m]
d_y	Coordenada y da origem do sistema de coordenadas do efetuador em relação à base [m]
d_z	Coordenada z da origem do sistema de coordenadas do efetuador em relação à base [m]
E	Matriz de dimensão $(N+I) \times 3(N+I)$
E_2	Blocos da diagonal inferior de E
\tilde{E}_3	Bloco inicial da diagonal principal de E
E_3	Blocos intermediários da diagonal principal de E
\widetilde{E}_3	Bloco final da diagonal principal de E
E_4	Blocos da diagonal superior de E
F	Vetor com $(N+I)$ elementos f_i
f_i	Pontos originais especificados para a geração da trajetória
$f_n()$	Função de interpolação de grau n
$f()$	Função
$g()$	Função

h	Espaçamento entre os pontos da função
J	Função de custo
L	Matriz de dimensão $(N+1) \times (N+1)$
L_l	Elementos utilizados na construção da matriz L
L_i	Variável utilizada para o cálculo de interpolações pelo método de Lagrange
M	Ordem da trajetória
N	Número de segmentos polinomiais que compõem uma trajetória
N	Matriz de fatores constantes [rad/m]
P	Matriz diagonal de dimensão $(N+1) \times (N+1)$
\tilde{p}	Trajétória do efetuador
p_i	Ponto-chave ou nós da função
p_i	Parâmetros de controle do ajuste da <i>spline</i> aos nós
q	Vetor de variáveis generalizadas das juntas [rad]
r_{ij}	Termos da matriz de transformação T_0^5
R	Número de derivadas contínuas da função <i>spline</i>
$S_p(x)$	<i>Spline</i> de grau p
T	Tempo [s]
T	Comprimento normalizado dos segmentos da função
T_i^j	Transformações homogêneas do j ésimo para o i ésimo elo do robô
u	Lei de movimento para o seguimento do caminho geométrico de uma trajetória
w_x	Coordenada x da origem do sistema de coordenadas do punho em relação à base [m]
w_y	Coordenada y da origem do sistema de coordenadas do punho em relação à base [m]
w_z	Coordenada z da origem do sistema de coordenadas do punho em relação à base [m]
x	Valor do eixo coordenado x [m]
x_i	Valor do eixo coordenado x no ponto i [m]
y	Vetor de variáveis dos atuadores [m]
Y	Vetor de valores da função <i>spline</i> nos pontos y_i
y_i	Valor de posição da trajetória polinomial por <i>spline</i> no ponto i [m]
y_i'	Valor da primeira derivada da trajetória no ponto i [m/s]

y_i''	Valor da segunda derivada da trajetória no ponto i [m/s ²]
y_i'''	Valor da terceira derivada da trajetória no ponto i [m/s ³]
$y^{(r)}$	Vetor de valores das r primeiras derivadas da função
Δd_3	Valor de distância fixo associado à variável da junta 3 [m]
θ	Variável da junta rotacional [rad]
λ	Vetor de <i>offset</i> [m]

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas industriais automatizados que utilizam robôs manipuladores para a execução de tarefas são cada vez mais comuns em indústrias de diferentes ramos de atuação. Devido ao aumento do ritmo de produção, exigências de qualidade e flexibilidade, além de fatores trabalhistas como restrições à jornada de trabalho e atividades insalubres, os robôs vêm se popularizando em ritmo crescente. Dados recentes da IFR (*International Federation of Robotics*) indicam que mais de 120 mil unidades são colocadas em atividade anualmente na indústria mundial.

Tradicionalmente, os robôs manipuladores industriais possuem acionamento realizado por meio de atuadores elétricos, devido, principalmente à facilidade de controle e à consequente precisão conferida ao processo. Em contrapartida, evoluções tecnológicas e dos estudos de controle moderno têm permitido a aplicação de servoposicionadores pneumáticos no acionamento de robôs, o que pode ser vantajoso em diversos casos, pois atuadores pneumáticos, em função de suas características, conferem ao robô uma boa relação peso/potência e a possibilidade de operação em ambientes classificados. Técnicas de controle não linear têm sido aplicadas com sucesso no controle de servoposicionadores pneumáticos [Perondi, 2002; Sobczyk, 2009], conferindo boa precisão e, assim, ampliando a gama de possibilidades da utilização destes no acionamento de robôs.

Diversos estudos têm sido propostos a fim de gerar trajetórias de robôs industriais em função de diferentes aplicações e exigências. Por exemplo, o controle de servoposicionadores pneumáticos através da estratégia em cascata [Perondi, 2002] tem como uma das exigências a continuidade da trajetória e de suas derivadas até a terceira ordem. Além disso, sabe-se que a continuidade da derivada da aceleração, bem como valores baixos para ela, proporcionam trajetórias com características que são desejáveis para aplicações robóticas, pois reduzem a variação brusca de esforços nos atuadores, evitando desgaste prematuro das juntas e vibrações excessivas no manipulador. Assim, no âmbito do presente trabalho propõe-se o desenvolvimento de uma estratégia para a geração de trajetórias com a continuidade da função de posição e de suas três primeiras derivadas para um manipulador robótico cilíndrico acionado pneumáticamente. Propõe-se ainda uma estratégia que permita a otimização da trajetória através da minimização dos valores da terceira derivada da função de posição.

1.1 Descrição do Problema

Trajetórias formadas a partir de polinômios de sétimo grau foram empregadas por Cunha, 2001, para testar o desempenho do controle em cascata de um atuador hidráulico. Também, Perondi, 2002, realizou o controle em cascata de um servoposicionador pneumático utilizando como referência para a posição trajetórias similares. Assim como realizado por Cunha, 2001 e Perondi, 2002, o robô em desenvolvimento no LAMECC/UFRGS, tomado como base para a execução do presente trabalho, possui o controle e a trajetória de cada atuador elaborada de maneira independente. O manipulador, mostrado na Figura 1.1, trata-se de um robô cilíndrico de cinco graus de liberdade acionado pneumaticamente.



Figura 1.1 - O robô cilíndrico pneumático de cinco graus de liberdade acionado pneumaticamente

Diversos estudos foram desenvolvidos a fim de definir a geometria e viabilizar a construção do robô, dentre os quais pode-se citar os realizados por Frasson, 2007; Allgayer, 2011; e Rijo, 2013. Atualmente estão sendo realizados desenvolvimentos sobre a arquitetura do hardware de controle, estudos acerca do controle de atuadores pneumáticos rotacionais,

além de estudos sobre o controle dos graus de liberdade translacionais do robô utilizando técnicas de controle não linear e redes neurais.

As trajetórias utilizadas nos estudos de controle não envolvem a posição do efetuador de forma explícita, sendo elaboradas de forma individualizada para cada atuador. Entretanto, a programação de um robô industrial para execução de uma determinada tarefa é realizada, geralmente, a partir da informação dos pontos no espaço de trabalho que o robô deve seguir, ou com base no tipo de movimento que ele deve executar, além das informações da orientação do efetuador e dos parâmetros que devem ser respeitados durante o processo. A trajetória de cada atuador, portanto, não é manipulada diretamente pelo programador, sendo resultado do processamento de um algoritmo de geração de trajetórias executado a partir das restrições impostas pelo programador ou usuário. Assim, o desenvolvimento do presente trabalho visa a proporcionar ao robô as trajetórias a serem seguidas pelos atuadores em função de determinados pontos em seu espaço de trabalho, especificados em função da tarefa executada. Essas trajetórias devem apresentar características compatíveis com as limitações dos controladores que apresentam os melhores resultados no controle de servoposicionadores pneumáticos.

1.2 Objetivo Geral

Desenvolver um método que, a partir de uma trajetória desejada para o manipulador, determine para cada grau de liberdade uma trajetória no espaço de juntas que seja contínua até a sua terceira derivada e que, através da otimização das curvas de posição, velocidade, aceleração ou *jerk*, não superando os limites de desempenho dos atuadores.

1.3 Objetivos Específicos

- Validar, através de simulações, o equacionamento da cinemática direta do manipulador obtido por Rijo, 2013;
- Obter o equacionamento da cinemática inversa do manipulador;
- Gerar trajetórias para os atuadores em função de determinados pontos-chave especificados a partir do volume de trabalho do manipulador;
- Propor um método de otimização para a obtenção de trajetórias com mínimo *jerk*;
- Estruturar um processo de geração de trajetórias para o manipulador pneumático;

- Realizar testes de aplicação.

1.4 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado como segue: no Capítulo 2 é apresentado o embasamento teórico necessário para facilitar o entendimento dos capítulos seguintes. No Capítulo 3 são apresentadas as características construtivas do robô acionado pneumaticamente em desenvolvimento no LAMECC/UFRGS que têm influência direta no desenvolvimento deste trabalho, sendo apresentado ainda o equacionamento das cinemáticas direta e inversa do robô. A seguir, no Capítulo 4 são apresentados os procedimentos para obtenção de *splines* de ordem qualquer e, em seguida, é apresentado o equacionamento para a obtenção de *splines* formadas a partir de polinômios de sétimo grau e que apresentam a continuidade da função e de suas derivadas até terceira ordem. Ainda, neste capítulo, é realizada a descrição da metodologia proposta para a geração das trajetórias do robô utilizando as *splines* polinomiais. Os resultados obtidos da aplicação do processo de geração de trajetória para dois estudos de caso são apresentados e discutidos no Capítulo 5 e, por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e as propostas de trabalhos futuros que complementam o presente trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada uma revisão sobre os desenvolvimentos atuais na área de planejamento de trajetória de robôs manipuladores e um breve estudo contemplando o embasamento teórico considerado necessário para o entendimento adequado dos capítulos seguintes, fornecendo uma visão geral sobre robôs manipuladores industriais, trajetórias de robôs industriais e os tipos de interpolação empregados na obtenção dessas trajetórias.

2.1 Robôs manipuladores industriais

Segundo a norma ISO 8373, um robô industrial pode ser definido como um dispositivo mecânico controlado automaticamente, reprogramável, multiuso, manipulador, programável em três ou mais eixos e com base fixa ou móvel, utilizado em aplicações de automação industrial. Quanto à sua estrutura mecânica, um robô industrial é constituído de corpos rígidos, chamados de elos, conectados por juntas que conferem movimento relativo entre os elos adjacentes [Cupido et al, 1996]. As juntas são geralmente do tipo prismática (P), capazes de proporcionar deslocamento linear (d) ou translação entre dois elos adjacentes, ou do tipo rotacional (R), as quais permitem deslocamento angular (θ) entre os elos.

Para cada junta do robô haverá, portanto, uma variável de posição independente associada, sendo necessário o conhecimento de todas as variáveis das juntas para obter-se a localização completa dos elos do robô e, por consequência, a posição do seu efetuador (garra ou ferramenta). O número de juntas que o robô possui define o número de graus de liberdade (GDL) do robô [Spong e Vidyasagar, 1989]. Craig, 2005, define o número de GDL de um robô como o número de variáveis de posição independentes que devem ser especificadas a fim de determinar a posição de todos os elos do robô.

Segundo Spong e Vidyasagar, 1989, a maioria dos robôs manipuladores industriais possuem 6 GDL, ou menos, e podem ser classificados por diferentes critérios, como, por exemplo, por sua geometria, por seu arranjo cinemático, pelo tipo de aplicação para o qual foram projetados, dentre outros. A classificação cinemática dos robôs manipuladores se dá normalmente com base no braço, composto pelas três primeiras juntas, sendo o punho descrito separadamente. A maioria dos robôs manipuladores enquadram-se em um dos seguintes tipos de geometria: articulado (RRR), esférico (RRP), SCARA (RRP), cilíndrico (RPP) ou cartesiano (PPP).

O punho do robô é conectado à extremidade do braço, fazendo a união entre o braço do robô e o efetuator. Os punhos, geralmente, são compostos por três juntas rotacionais com seus eixos se interseccionando em um mesmo ponto. Esse arranjo é chamado de punho esférico e sua estrutura pode ser representada simbolicamente conforme a Figura 2.1.

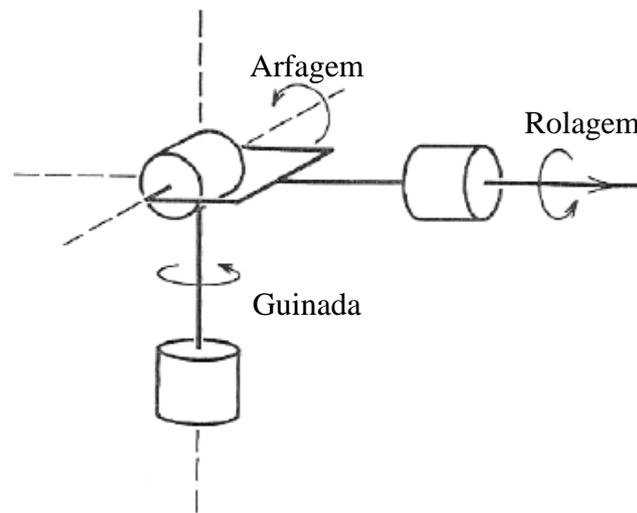


Figura 2.1 – Estrutura de um punho esférico, destacando os movimentos de guinada, arfagem e rolagem (adaptado de Spong e Vidyasagar, 1989).

O número de graus de liberdade de um robô depende diretamente do número de graus de liberdade do punho que ele possui [Spong e Vidyasagar, 1989]. É comum a utilização de punhos com um, dois ou três graus de liberdade, dependendo da aplicação para a qual o robô é utilizado.

Apesar de robôs de 6 GDL serem muito comuns em aplicações industriais, existem muitas tarefas executadas por eles que não necessitam da utilização dos seis eixos. A situação mais comum ocorre quando o efetuator possui um eixo de simetria [Craig, 2005]. A Figura 2.2 mostra um exemplo onde o efetuator do robô é uma ferramenta para polimento que gira em torno do seu próprio eixo. Por essa característica, a orientação dos demais eixos da ferramenta (efetuator) não são relevantes e pode-se dizer que um robô de 6 GDL é redundante para essa tarefa, sendo capaz de posicionar a ferramenta de infinitas formas. Duas delas estão representadas na Figura 2.2.

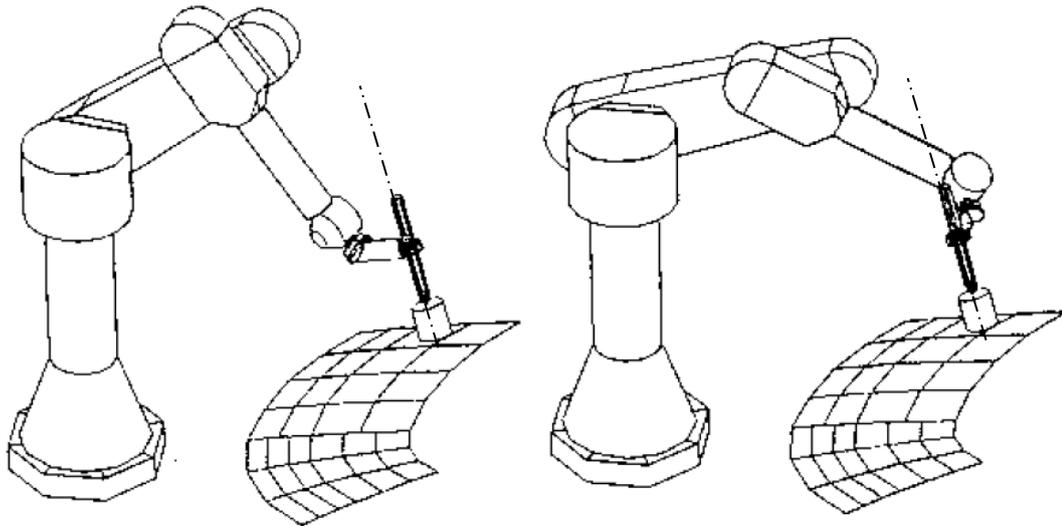


Figura 2.2 – Robô de 6 GDL com efetuador apresentando um eixo de simetria (adaptado de Craig, 2005)

Diversas aplicações utilizam geralmente efetadores com pelo menos um eixo de simetria, dentre elas citam-se, por exemplo, os processos de solda a arco elétrico, solda ponto, colagem e polimento [Craig, 2005].

No caso apresentado na Figura 2.2, poderia ser empregado um robô de 5 GDL para execução da mesma tarefa. Haveria, portanto, nesse caso, um número finito de soluções para o posicionamento da ferramenta.

Peças que apresentam eixo de simetria reduzem o número de graus de liberdade exigido para o robô. Por exemplo, em diversos casos, peças cilíndricas podem ser posicionadas ou inseridas em furos independente da orientação da garra em relação ao eixo da peça. Por essas razões, robôs com 5 GDL, como o considerado neste trabalho, possuem grande aplicação na indústria.

2.2 Planejamento de Trajetórias

Os conceitos apresentados nessa seção, referentes ao planejamento de trajetória, são descritos em linhas gerais de acordo com os conceitos utilizados por Biagiotti e Melchiorri, 2008. Segundo esses autores, o problema do planejamento de trajetória consiste basicamente em determinar a relação existente entre dois domínios distintos: o tempo e o espaço. Assim, uma trajetória pode ser expressa como uma equação parametrizada em função do tempo, a qual fornece a posição desejada de um dado GDL para cada instante de tempo.

Um robô industrial é composto por diversos atuadores que podem ser acionados e controlados individualmente e requer a coordenação dos diferentes eixos de movimento com o propósito de obter a trajetória multidimensional desejada no espaço operacional do manipulador. Assim, a descrição completa de uma trajetória pode ser obtida especificando-se:

- o caminho geométrico $p=p(u)$ a ser seguido, incluindo a orientação ao longo da curva, e
- a forma como esse caminho geométrico deve ser seguido, que representa a lei de movimento $u=u(t)$.

A curva a ser seguida pelo efetuador deve ser projetada com base nas restrições impostas pela tarefa, como, por exemplo, a interpolação de um determinado conjunto de pontos, enquanto a lei de movimento é determinada por outros fatores, como a imposição de condições máximas de velocidades, acelerações e torques que os atuadores podem fornecer. Com a determinação do caminho geométrico e da lei de movimento, a trajetória do efetuador $\tilde{p}(t)$ pode ser obtida por completo, como apresentado na Equação (2.1):

$$\tilde{p}(t)=p(u(t)) \quad (2.1)$$

A Figura 2.3 ilustra graficamente uma trajetória para um robô industrial. Uma vez determinado o movimento desejado, a cinemática inversa do robô é utilizada para obter a trajetória correspondente no espaço dos atuadores, onde o movimento é gerado e controlado.

As trajetórias multidimensionais como a mostrada na Figura 2.3 podem ser classificadas, quanto ao movimento desejado, em dois tipos: ponto-a-ponto ou multiponto. Trajetórias do tipo ponto-a-ponto são aquelas onde o movimento desejado para o efetuador é definido somente em função dos pontos inicial e final da trajetória. Assim, um movimento complexo é obtido juntando-se várias trajetórias ponto-a-ponto que são otimizadas individualmente, considerando para cada uma delas, dentre outras, as condições iniciais e finais de velocidade, aceleração e *jerk* e as restrições em seus valores máximos.

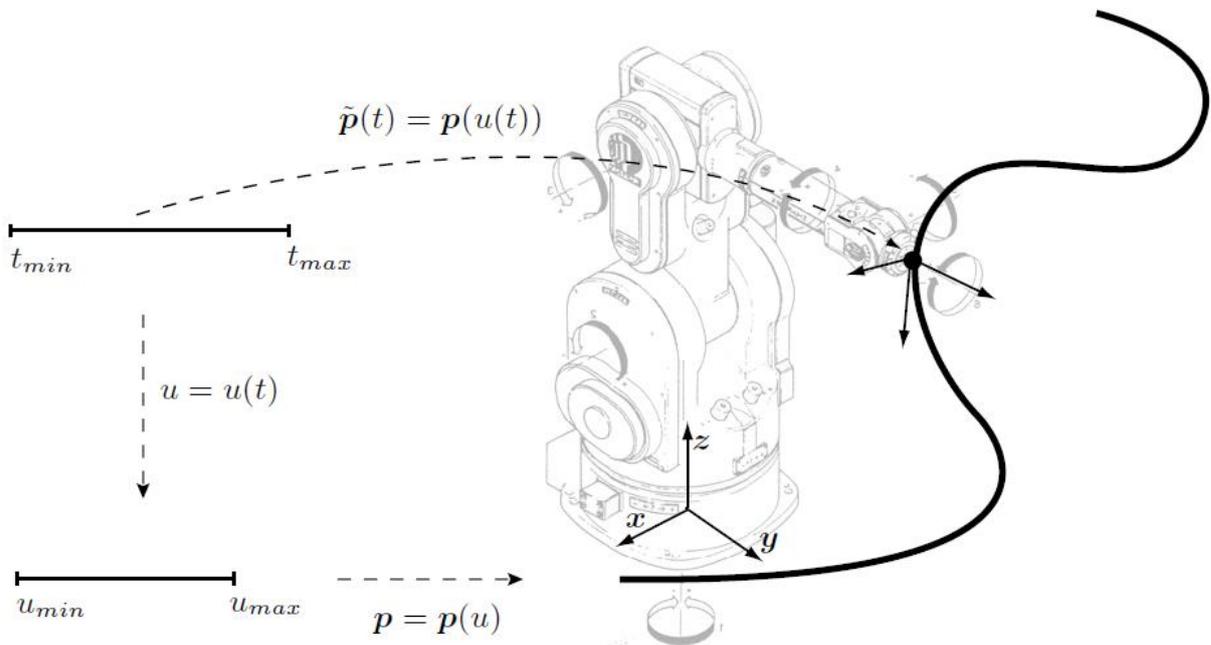


Figura 2.3 – Trajetória multidimensional de um robô industrial definida no espaço de trabalho
[Biagiotti e Melchiorri, 2008]

Em contrapartida, nas trajetórias do tipo multiponto, a partir da definição dos pontos ou nós intermediários, é possível definir movimentos arbitrários e complexos. A trajetória é definida a partir da solução de um problema de otimização global, que depende das condições aplicadas à trajetória e a cada um dos nós. Além disso, é possível adotar diferentes critérios para a definição do perfil de movimento nos pontos ao longo da trajetória, os quais não são necessariamente cruzados por ela.

O ajuste da curva aos pontos pode se dar de duas formas:

- Interpolação: a curva cruza os pontos definidos para determinados instantes de tempo.
- Aproximação: ocorre quando a curva não passa exatamente através dos pontos pré-definidos, apresentando um afastamento controlável que deve estar dentro de uma tolerância especificada.

A Figura 2.4 mostra para um mesmo conjunto de pontos um exemplo de interpolação (a) e um exemplo de aproximação (b).

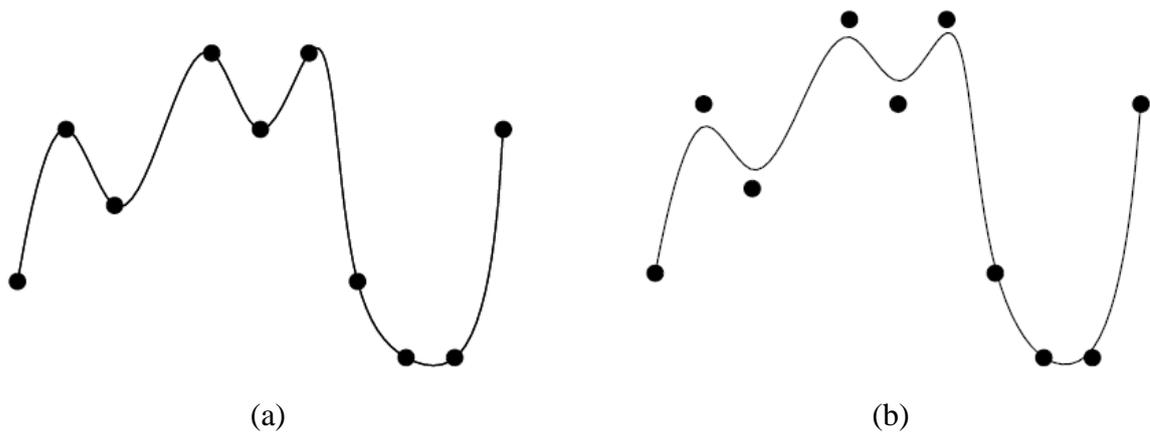


Figura 2.4 (a) Interpolação e (b) aproximação de um conjunto de pontos [Biagiotti e Melchiorri, 2008]

O ajuste por aproximação é bastante utilizado, especialmente no caso de trajetórias multidimensionais, quando se requer uma limitação dos valores de posição, velocidade, aceleração ou *jerk* ao longo da curva, à custa de uma possível diminuição na precisão.

Definida a trajetória, outros fatores podem ser considerados para a sua implementação, como o tempo de discretização, a saturação dos atuadores, as vibrações induzidas na carga, dentre outros.

2.2.1 Planejamento de Trajetórias de Robôs Manipuladores

Existem na literatura diversas técnicas e métodos propostos para resolver o problema do planejamento de trajetória de robôs manipuladores. Na década de 80 foram realizados diversos estudos utilizando-se principalmente de interpolações polinomiais para a obtenção de trajetórias de robôs. Dentre os diversos estudos sobre o tema realizados à época, destaca-se o realizado por Lin et al., 1984, que a partir de pontos selecionados no espaço de trabalho do robô, utilizaram *splines* formadas por polinômios de terceiro grau para obter a trajetória a ser seguida pelo efetuador. Ainda, considerando a necessidade de alta produtividade para o equipamento, ou seja, alta velocidade de operação, os autores aplicaram um algoritmo para ajuste da curva a fim de minimizar o tempo da trajetória entre os pontos, obtendo trajetórias otimizadas do manipulador observando restrições físicas de velocidade, aceleração e *jerk*.

Frequentemente, *splines* formadas por polinômios de terceiro grau são encontradas na literatura aplicadas à geração trajetórias de robôs devido a características de estabilidade, suavidade e continuidade das suas duas primeiras derivadas. Apesar disso, segundo Guan et.

al, 2005, *splines* cúbicas, ou polinômios de grau equivalente, apresentam desvantagens para satisfazer elevados desempenhos dinâmicos, como, por exemplo, atender de forma simultânea restrições de velocidade e aceleração nos pontos inicial e final da trajetória. Baseados nisso, como uma opção às *splines* cúbicas, Guan et al., 2005, propuseram um método para o planejamento de trajetória de robôs manipuladores utilizando interpolações combinando polinômios de terceiro e quarto graus. Para tanto, utilizaram polinômios de quarto grau para o primeiro e para o último segmento da trajetória, sendo os demais segmentos interpolados por polinômios de terceiro grau. Utilizando ainda de uma função de otimização, obtiveram trajetórias com desempenho superior quando comparado às trajetórias obtidas a partir de *splines* cúbicas por Lin et al., 1983.

Diversos estudos recentes vêm propondo técnicas de planejamento de trajetória projetadas para o desvio de obstáculos que estejam localizados no espaço de trabalho do manipulador. Com essa intenção Tian e Collings, 2004, utilizaram algoritmos genéticos para gerar uma trajetória ótima no espaço de trabalho de um robô considerando a existência de obstáculos. Com base nos pontos inicial e final determinados para a trajetória do efetuador, um algoritmo genético foi aplicado a fim de determinar um conjunto de pontos que evitem a colisão do efetuador com o obstáculo. Uma vez determinados os pontos, os mesmos foram interpolados por *splines* formadas por polinômios de terceiro grau.

Uma nova abordagem para o planejamento de trajetórias de robôs manipuladores foi proposta por Jaryani, 2007, utilizando o conceito de campo potencial virtual (VPF – *Virtual Potential Fields*). No método proposto, cada um dos obstáculos localizados no espaço de trabalho é envolto por um VPF, que influencia na localização dos pontos de passagem da trajetória. Uma trajetória otimizada é gerada utilizando um algoritmo que determina a força dos campos potenciais para minimizar o valor da função objetivo proposta. A trajetória gerada leva em conta somente obstáculos estáticos, sendo calculada por completo antes de sua execução (*off-line*). Os pontos obtidos do espaço de trabalho para a trajetória são transpostos para o espaço das juntas e interpolados por *splines* cúbicas.

Sengupta et al., 2011, propuseram um método para geração de trajetórias que minimizam o consumo de energia a partir de técnica de otimização por infestação de ervas daninhas (IWO - *Invasive Weed Optimization*). Essa otimização é utilizada para gerar o conjunto de possíveis pontos de passagem para a trajetória em função de limitações impostas por obstáculos existentes no espaço de trabalho do robô. Diferentemente do que foi proposto por Jaryani, 2007, o caminho a ser percorrido pelo efetuador do robô é calculado de forma

dinâmica, ou seja, à medida que o robô executa o movimento os pontos seguintes da trajetória são determinados escolhendo o percurso mais adequado na região em função dos obstáculos no espaço de trabalho. Os pontos resultantes do processo e escolhidos para a trajetória são conectados por meio de polinômios de terceiro grau.

No caso de muitos processos industriais executados por robôs, porém, o caminho que a ferramenta deve percorrer é previamente conhecido, como, por exemplo, em processos de soldagem ou corte. Com a intenção de proporcionar grande produtividade, nesse tipo de processo, geralmente, a intenção é mover o efetuador o mais rápido possível, respeitando as restrições da tarefa. Com base nisso, Müller et al., 2012, desenvolveram um novo método para a obtenção de trajetórias suaves e com tempo ótimo para robôs manipuladores. Para tanto, consideraram o problema do planejamento de trajetória como um problema de otimização dinâmica, onde as restrições são dadas pelo caminho a ser seguido pelo efetuador, pelas limitações de velocidade das juntas e pelo torque dos atuadores. A partir dessas restrições são delimitadas regiões de soluções admissíveis nos planos das variáveis restritas e, a partir dessas regiões, utilizando uma função de otimização, determina-se uma trajetória para o efetuador que atenda aos critérios de suavidade e tempo ótimo.

2.2.2 Trajetórias de mínimo *jerk*

O termo *jerk* refere-se à derivada da aceleração em relação ao tempo, ou a terceira derivada da posição em relação ao tempo, e pode ser associado com rápidas variações de forças nos atuadores do robô [Freeman, 2012]. Trajetórias projetadas com valores baixos de *jerk* são desejáveis para diversas aplicações robóticas, pois proporcionam às juntas movimento similar ao das articulações humanas, apresentando movimentação suave, diminuindo o desgaste e as vibrações do robô [Piazzi e Visioli, 2000].

Além disso, de uma maneira geral, valores elevados de *jerk* afetam a eficiência dos algoritmos de controle, podendo saturar a ação de controle com relação à capacidade dos atuadores. Assim, diversos autores propuseram métodos de planejamento de trajetórias com valores mínimos de *jerk*. Kyriakopoulos e Saridids, 1988, minimizaram o valor do *jerk* ao longo de uma trajetória cartesiana arbitrária considerando restrições de velocidade e aceleração e obtiveram trajetórias com tempo variável para cada caso.

Piazzi e Visioli, 2000, propuseram a criação de trajetórias com valor mínimo de *jerk* a partir de *splines* de terceira ordem, considerando o tempo de execução fixo, e compararam

suas trajetórias com as elaboradas por Simon e Isik, 1993, a partir de *splines* trigonométricas com derivadas contínuas até a terceira ordem. Para trajetórias com os mesmos valores de posição dos nós, os resultados obtidos por Piazzzi e Visioli, 2000, demonstraram superioridade em relação às trajetórias obtidas por Simon e Isik, 1993, no que diz respeito ao desempenho avaliado pelo valor do *jerk* e pelas taxas de variações máximas de torque nos atuadores.

Gasparetto e Zanotto, 2007, elaboraram trajetórias a partir da minimização de uma função de custo composta pelo tempo de execução e pela integral do *jerk*. Diferentemente de várias outras técnicas de planejamento de trajetória, neste método o tempo não é conhecido inicialmente, sendo o mesmo resultante do processo de geração de trajetória. Os autores comparam seus resultados com os obtidos por Simon e Isik, 1993, e demonstram que a aplicação do seu método resulta em valores menores de aceleração e *jerk* das juntas de um mesmo robô executando uma trajetória elaborada a partir dos mesmos pontos-chave.

No presente trabalho propõe-se a aplicação do método descrito por Simon, 2004, que possibilita a obtenção de *splines* a partir de polinômios de sétimo grau com minimização do *jerk*. O método em questão, em função da continuidade das suas derivadas de até terceira ordem, resulta em trajetórias adequadas à aplicação da estratégia de controle em cascata, a qual tem sido aplicada com sucesso em atuadores pneumáticos [Perondi, 2002; Sobczyk, 2009]. Na Seção 4.3 será descrita de forma detalhada a metodologia utilizada para a obtenção dessas trajetórias.

2.3 Interpolação

A interpolação de uma função $f(x)$, segundo Ruggiero e Lopes, 1996, consiste em aproximá-la por uma outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe pré-definida de funções e que satisfaça algumas propriedades. A função $f(x)$ é então substituída pela função $g(x)$. Essa substituição pode ser útil em várias situações, como, por exemplo quando:

- são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função para um ponto diferente; e
- a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis, ou até mesmo impossíveis, de serem realizadas.

Assim, considerando $n+1$ pontos distintos, chamados de nós da interpolação, dados pelos valores de x como sendo x_0, x_1, \dots, x_n , e os valores de $f(x)$ nesses pontos sendo

$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, a interpolação pode ser definida como a obtenção de uma determinada função $f(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x_0)=f(x_0) \\ g(x_1)=f(x_1) \\ g(x_2)=f(x_2) \\ \vdots \\ g(x_n)=f(x_n) \end{cases} \quad (2.1)$$

2.3.1 Interpolação Polinomial

A interpolação polinomial é o método mais comumente utilizado para estimar valores intermediários entre pontos de dados e consiste em determinar um polinômio único de grau n que passe por $n+1$ pontos pré-estabelecidos [Chapra e Canale, 2001]. Um polinômio qualquer de grau n pode ser definido através da Equação (2.2):

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n \quad (2.2)$$

Considerando, portanto, que se tenha um conjunto de $n+1$ pontos dados, o polinômio resultante da Equação (2.2) pode ser utilizado para determinar os valores da função nos n intervalos existentes entre os nós da interpolação. A Figura 2.5 apresenta exemplos de polinômios de grau n aplicados à interpolação de $n+1$ pontos.

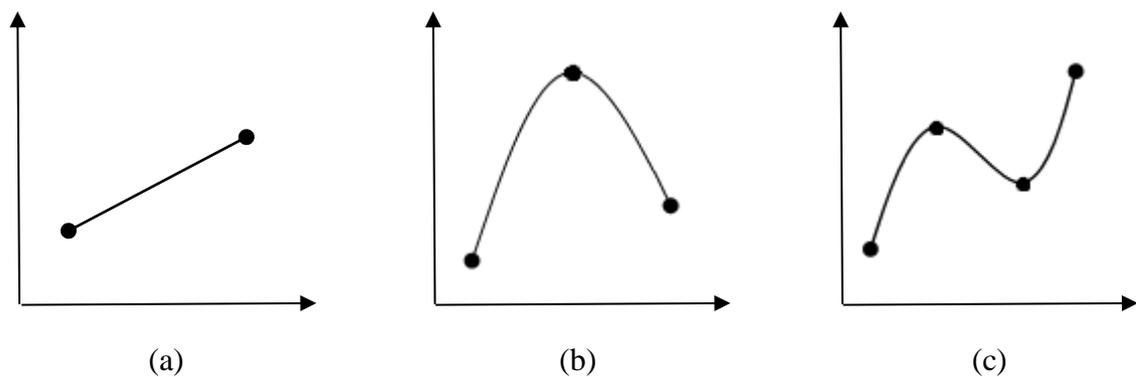


Figura 2.5 – Polinômios de grau n interpolando $n+1$ pontos: (a) polinômio de primeiro grau, (b) polinômio de segundo grau e (c) polinômio de terceiro grau.

Como já comentado, o polinômio resultante da interpolação é único, porém, existem diferentes formas de obtê-lo. A seguir serão apresentadas três formas de obtenção dos polinômios de interpolação: através da resolução de um sistema linear, pela forma de Lagrange e pelo método de Newton.

2.3.1.1 Resolução do sistema linear

Consiste em construir um sistema linear a partir dos $n+1$ pontos pré-estabelecidos a fim de determinar os coeficientes do polinômio de grau n que interpole os pontos dados. A fim de exemplificar esse processo de obtenção do polinômio, serão considerados os pontos p_0 , p_1 e p_2 apresentados na Tabela 2.1 associado à necessidade de se obter uma função $g(x)$ de grau $n \leq 2$.

Tabela 2.1 – Valores dos pontos para a função $f(x)$

	p_0	p_1	p_2
x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

Tem-se, portanto, que:

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (2.3)$$

Considerando as equações (2.1) e (2.3), pode-se determinar que:

$$a_0 - a_1 + a_2 = 4 \quad (2.4)$$

$$a_0 = 1 \quad (2.5)$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \quad (2.6)$$

e, resolvendo o sistema linear formado pelas equações de (2.4) até (2.6) podem ser obtidos os valores para os coeficientes do polinômio, sendo $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{-7}{3}$ e $a_2 = \frac{2}{3}$.

Portanto, o polinômio de segundo grau que interpola $f(x)$ em $x_0=-1$, $x_1=0$ e $x_2=2$ pode ser escrito como:

$$g(x)=1-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}x^2 \quad (2.7)$$

Apesar de, nesse caso, a solução do sistema linear ter sido simples para a obtenção de $g(x)$, isso não ocorre para qualquer problema de interpolação, havendo muitos casos em que a utilização dessa forma de solução não consiste na mais adequada, pois pode, para problemas com maior número de variáveis, implicar na necessidade de solução de um sistema numericamente mal condicionado, resultando em soluções que não poderiam ser aplicadas [Ruggiero e Lopes, 1996].

2.3.1.2 Forma de Newton

Segundo Chapra e Canale, 2001, a interpolação através do operador das diferenças divididas de Newton é uma das formas mais usuais de interpolação. O operador de diferenças divididas pode ser utilizado, de uma forma geral, para interpolar $n+1$ pontos por um polinômio de grau n . Inicialmente, serão considerados os casos para interpolação através de polinômios de primeira e de segunda ordem, frequentemente chamados também de interpolação linear e quadrática, respectivamente.

Um dos métodos mais simples de interpolar dois pontos é conectá-los através de uma linha reta. Essa técnica é chamada de interpolação linear. A Figura 2.6 mostra dois pontos de uma função $f(x)$ interpolados através de uma linha reta.

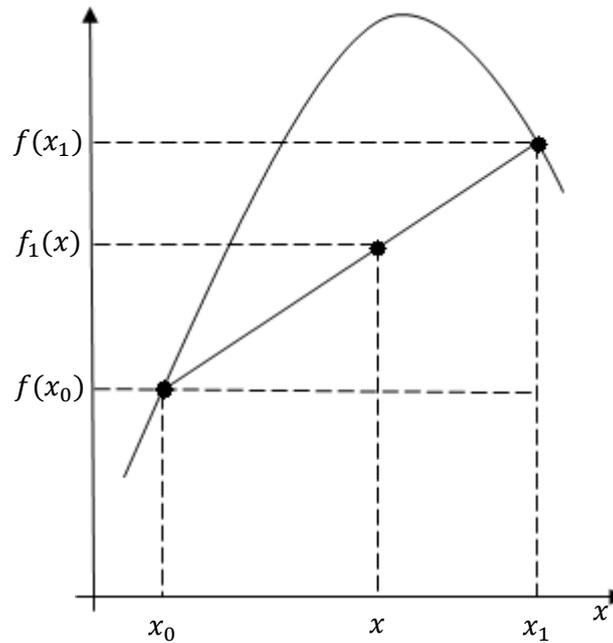


Figura 2.6 - Interpolação linear

Através da Figura 2.6, por semelhança de triângulos retângulos, verifica-se que:

$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.8)$$

Rearranjando os termos da Equação (2.8) tem-se que:

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) é a fórmula geral para a interpolação linear, onde a notação $f_1(x)$ é utilizada para indicar que a função se trata de uma interpolação polinomial de primeiro grau. Cabe ressaltar que o termo $[f(x_1) - f(x_0)] / [x_1 - x_0]$ da Equação (2.9), além de indicar a inclinação da reta que conecta os dois pontos, é uma diferença finita dividida que representa uma aproximação da primeira derivada da função $f(x)$. De uma forma geral, quanto menor é o intervalo entre os pontos interpolados, melhor será a aproximação de uma função qualquer por uma linha reta [Chapra e Canale, 2001].

Para o caso onde se tem três pontos, pode-se utilizar um polinômio de segunda ordem, ou uma parábola, para realizar a interpolação. Assim, para esse caso pode ser utilizada a Equação (2.10):

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (2.10)$$

Apesar de a Equação (2.10) parecer diferente da equação geral para um polinômio apresentada na Equação (2.2), as duas são equivalentes. Para verificar isso considere a multiplicação dos termos da Equação (2.10):

$$f_2(x) = b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0x_1 - b_2x_0x - b_2x_1x \quad (2.11)$$

reescrevendo a Equação (2.11) tem-se:

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (2.12)$$

onde:

$$a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1 \quad (2.13)$$

$$a_1 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1 \quad (2.14)$$

$$a_2 = b_2 \quad (2.15)$$

Assim, as equações (2.10) e (2.12) são formas alternativas de se escrever equações e equivalentes para um polinômio de segundo grau que conecta três pontos. Para a determinação dos coeficientes da Equação (2.11) pode-se utilizar do procedimento a seguir. Inicialmente, para a determinação de b_0 , considera-se que $x = x_0$, assim tem-se que:

$$b_0 = f(x_0) \quad (2.16)$$

Substituindo a Equação (2.16) na Equação (2.11) e fazendo com que $x = x_1$, pode-se determinar b_1 por:

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.17)$$

Por fim, substituindo as equações (2.16) e (2.17) na Equação (2.11) e fazendo com que $x = x_2$, pode-se escrever que:

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} \quad (2.18)$$

Da análise da Equação (2.10) nota-se que, como no caso da interpolação linear, b_1 ainda representa a inclinação da linha que interliga os pontos x_0 e x_1 . Assim, os dois primeiros termos da equação são equivalentes à interpolação linear demonstrada através da Equação (2.9), e o terceiro termo introduz a curvatura de segunda ordem à equação. Na Figura 2.7 observa-se a interpolação de três pontos p_0 , p_1 e p_2 , originários da função $f(x)$, por um polinômio de segundo grau $f_2(x)$.

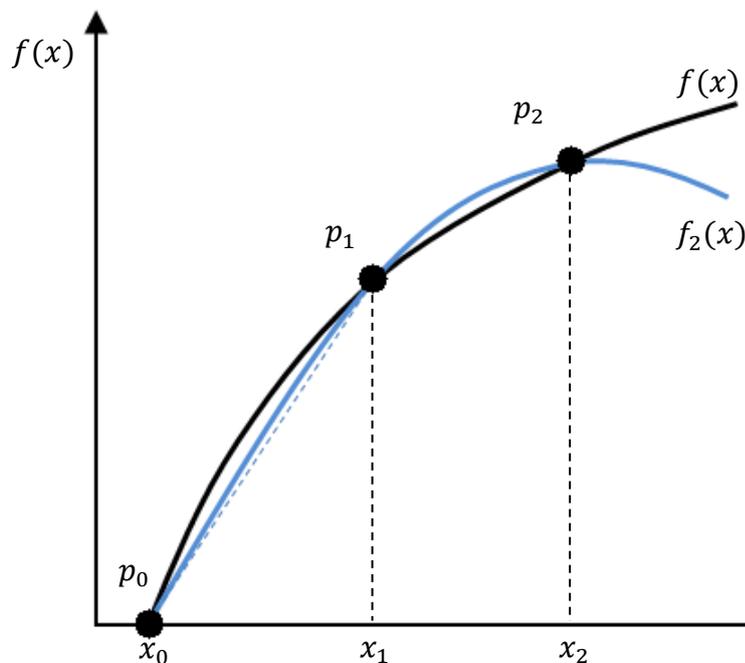


Figura 2.7 – Interpolação de três pontos por um polinômio de segundo grau

A análise realizada para a interpolação por polinômios de primeiro e de segundo graus pode ser generalizada para interpolar $n+1$ pontos utilizando um polinômio de grau n . Na Equação (2.19) observa-se a forma de Newton para o polinômio $f_n(x)$ que interpola $n+1$ pontos [Ruggiero e Lopes, 1996; Chapra e Canale, 2001]:

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (2.19)$$

De forma similar ao que foi realizado anteriormente para as interpolações linear e quadrática, os $n+1$ pontos dados podem ser utilizados para obter os valores de b_0, b_1, \dots, b_n .

Pode-se, então, utilizar as coordenadas $[x_i, f(x_i)]$ ($i=0, 1, \dots, n$) dos $n+1$ pontos e as equações que seguem a fim de se obter os coeficientes do polinômio:

$$b_0 = f(x_0) \quad (2.20)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] \quad (2.21)$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] \quad (2.22)$$

$$\vdots$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] \quad (2.23)$$

onde as funções indicadas com colchetes são diferenças finitas divididas. A diferença dividida de primeira ordem é representada genericamente por:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (2.24)$$

A diferença dividida de segunda ordem, que representa a diferença entre as duas primeiras diferenças divididas é expressa de maneira geral por:

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \quad (2.25)$$

Da mesma forma, a diferença dividida de ordem n pode ser obtida como:

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0} \quad (2.26)$$

Nota-se que as equações (2.24) a (2.26) são recursivas, ou seja, as diferenças divididas de ordens mais elevadas são obtidas fazendo-se as diferenças entre as diferenças divididas de ordens mais baixas. Considerando então, uma função $f(x)$ e desde que sejam conhecidos os valores que essa função assume nos pontos x_0, x_1, \dots, x_n , pode-se construir a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Diferenças divididas para polinômios de grau n

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem n
x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$	\vdots
x_1	$f(x_1)$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$	$f[x_4, x_3, x_2]$	\vdots	$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$
x_3	$f(x_3)$	$f[x_4, x_3]$	\vdots	\vdots	\ddots
x_4	$f(x_4)$	\vdots	$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$	$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}]$	
\vdots	\vdots				
x_n	$f(x_n)$				

Fonte: adaptada de Ruggiero e Lopes, 1996.

Para calcular os coeficientes expressos nas equações de (2.20) até (2.23) pode-se utilizar das equações (2.24) a (2.26). Uma vez calculados, esses coeficientes podem então ser substituídos na Equação (2.19) resultando na Equação (2.27) a qual expressa a forma de Newton para o polinômio interpolador por diferenças divididas:

$$f_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_1, x_0] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \dots + (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] \quad (2.27)$$

A Figura 2.8 ilustra a interpolação de quatro pontos p_0 , p_1 , p_2 e p_3 , originários da função $f(x)$, por um polinômio $f_3(x)$ de terceiro grau que pode ser obtido pela forma das diferenças divididas de Newton.

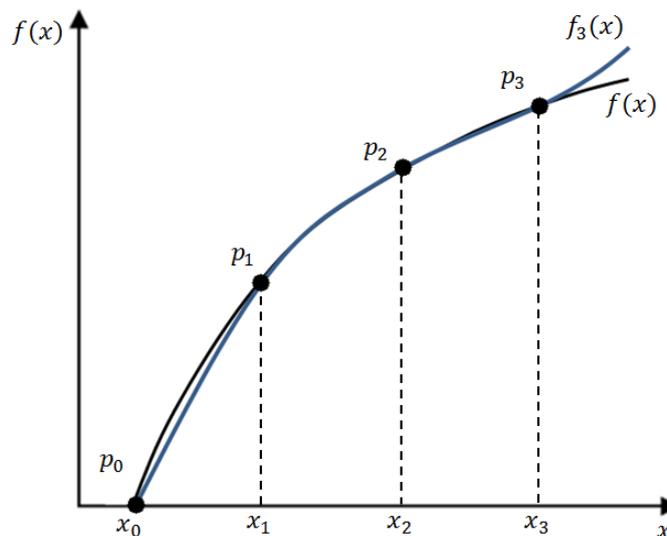


Figura 2.8 - Interpolação de quatro pontos por meio de um polinômio de terceiro grau

2.3.1.3 Forma de Lagrange

A interpolação polinomial da forma de Lagrange pode ser vista como uma reformulação da forma de Newton que evita o cálculo das diferenças divididas [Chapra e Canale, 2001]. Ela pode ser representada de forma concisa por:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad (2.28)$$

onde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (2.29)$$

sendo que \prod indica o produto da parcela que está à sua direita. Por exemplo, no caso de uma interpolação linear, onde $n=1$, utilizando a Equação (2.28) tem-se que:

$$f_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \quad (2.30)$$

Para o caso onde $n=2$, ou seja, onde se deseja realizar a interpolação através de um polinômio de segundo grau, a aplicação da Equação (2.28) resulta em:

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \quad (2.31)$$

Da mesma forma, um polinômio de grau n pode ser obtido pela forma de Lagrange a partir da aplicação da Equação (2.28).

2.3.2 Interpolação por *Splines*

Como visto nas seções anteriores, um único polinômio de grau n pode ser utilizado para realizar a interpolação de $n+1$ pontos, ou seja, um polinômio de sétimo grau, por exemplo, pode ser empregado na interpolação de um conjunto de oito pontos. Apesar disso, há casos em que esse tipo de interpolação pode produzir resultados indesejados em função do erro de arredondamento e do *overshoot* [Chapra e Canale, 2001]. Uma solução alternativa é

utilizar o conceito de *spline*, ou seja, interpolar $f(x)$ em grupos de poucos pontos, obtendo-se um polinômio de grau mais baixo, e impor condições para que a função de aproximação seja contínua e tenha derivadas contínuas até uma determinada ordem [Ruggiero e Lopes, 1996]. A Figura 2.9 ilustra uma função degrau $f(x)$ aproximada através da interpolação polinomial e da interpolação por *spline*. As Figuras 2.9 (a) até (c) são referentes a interpolações polinomiais cujo grau do polinômio cresce com o aumento da quantidade de pontos de $f(x)$ a serem interpolados e a Figura 2.9 (d) é representada uma interpolação por *spline* de terceiro grau.

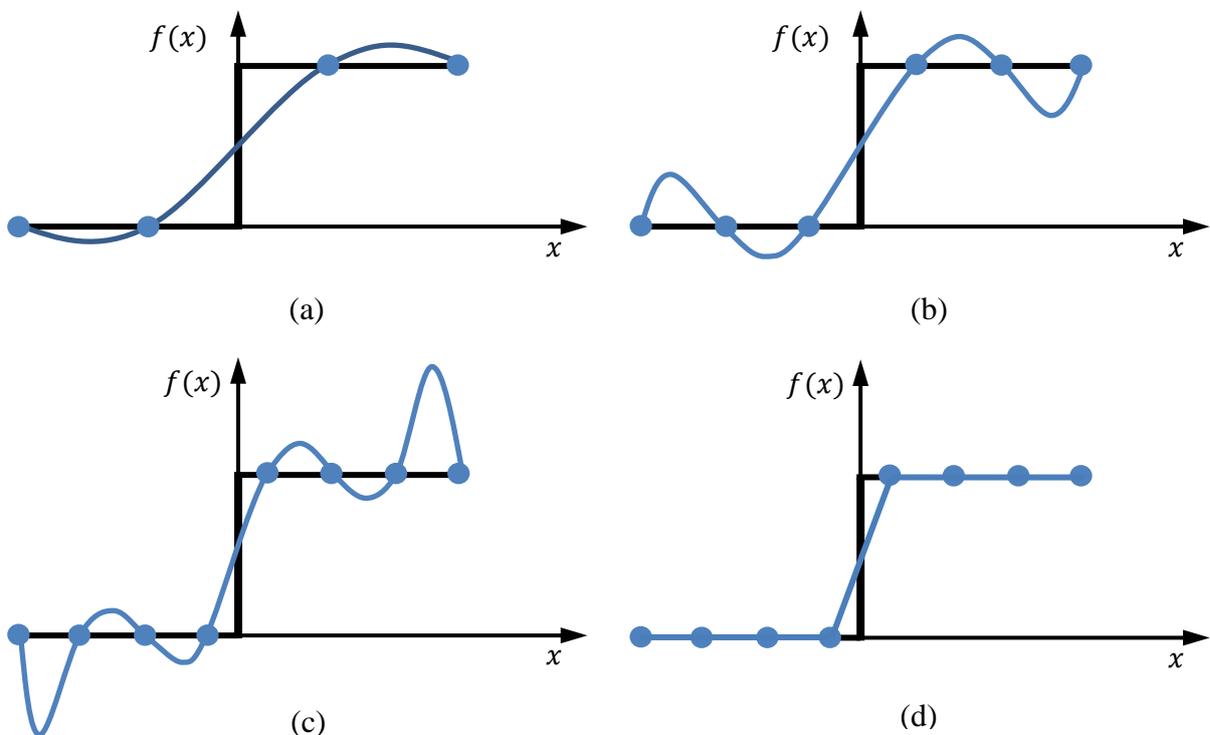


Figura 2.9 – Interpolações polinomiais e por *splines* (adaptado de Chapra e Canale, 2001)

Verifica-se na Figura 2.9 que variações abruptas na função a ser interpolada ocasionam grandes oscilações nas interpolações polinomiais, e à medida que o grau do polinômio interpolador aumenta as oscilações também crescem. No caso da interpolação por *spline* cúbica, ilustrada na Figura 2.9 (d) as oscilações são minimizadas e limitadas a curvas de terceiro grau com transições suaves nos nós. No caso da função apresentada na Figura 2.9, portanto, tem-se que o resultado obtido com a interpolação por *spline* é mais satisfatório do que os resultantes das interpolações polinomiais.

Nas *splines*, para cada intervalo da interpolação entre os nós é definido um polinômio de grau p que realiza a aproximação da função. Não se pode, porém, considerar uma *spline* como uma simples função definida por partes. A Figura 2.10 mostra uma função $f(x)$ sendo aproximada por uma função linear por partes representada por $S_1(x)$.

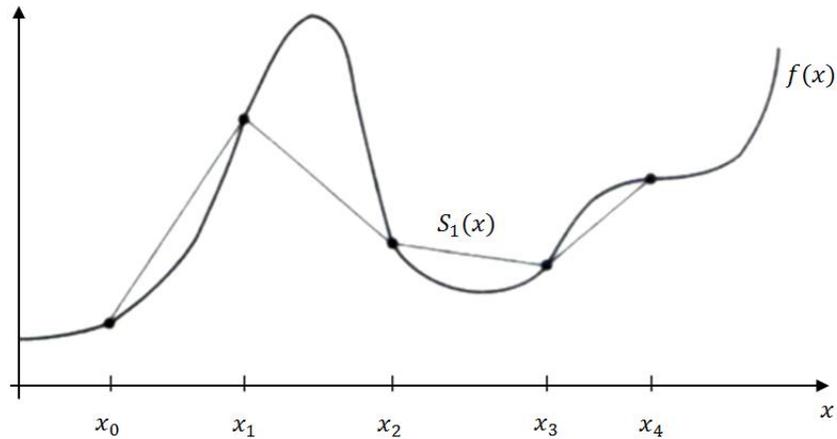


Figura 2.10 - Aproximação de $f(x)$ por uma função linear por partes (adaptada de Ruggiero e Lopes, 1996)

Observa-se que, no caso apresentado na Figura 2.10, a função $S_1(x)$ é contínua, porém sua derivada não possui continuidade em todo o intervalo de x_0 até x_4 , pois $S_1'(x)$ não existe para $x=x_i, 1 \leq i \leq 3$. Pode-se também, por exemplo, a cada três pontos (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) passar um polinômio de segundo grau, conforme se observa na Figura 2.11. Porém, para esse caso também só há garantia de continuidade da função que aproxima $f(x)$.

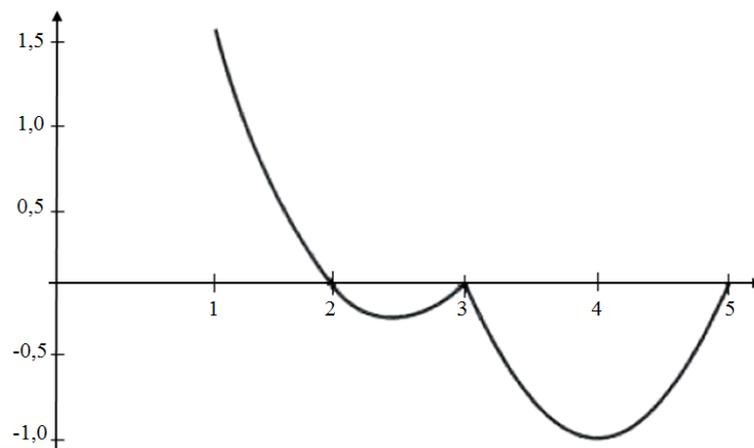


Figura 2.11 - Função quadrática por partes (adaptada de Ruggiero e Lopes, 1996)

Em uma função *spline*, a função $f(x)$ é aproximada por um polinômio de grau p que satisfaz determinadas condições em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Portanto, considerando que os valores de $f(x)$ sejam conhecidos para os pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, uma função $S_p(x)$ é denominada *spline* de grau p com nós em x_i ($i=0, 1, \dots, n$) se satisfaz às seguintes condições [Ruggiero e Lopes, 1996]:

- em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, n-1$, $S_p(x)$ é um polinômio de grau p .
- $S_p(x)$ é contínua e possui derivada contínua até ordem $(p-1)$ no intervalo de x_0 até x_n .
- $S_p(x_i) = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$.

O termo *spline* originou-se de uma régua elástica de mesmo nome que é utilizada para realizar desenhos com curvas, pois pode ser moldada de forma a passar por um determinado conjunto de pontos [Chapra e Canale, 2001].

2.3.2.1 Splines de Primeira Ordem

A *spline* mais simples que há é a de primeiro grau, na qual, a partir de um conjunto de pontos, pode ser definido um conjunto de funções lineares. Para uma *spline* dessa natureza, as equações (2.32) até (2.34) podem ser obtidas para determinar o valor da função em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, sendo $i=0, 1, \dots, n-1$.

$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0), \quad (x_0 \leq x \leq x_1) \quad (2.32)$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1), \quad (x_1 \leq x \leq x_2) \quad (2.33)$$

⋮

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}), \quad (x_{n-1} \leq x \leq x_n) \quad (2.34)$$

onde, m_i é o coeficiente angular da reta que une os nós que formam o intervalo, sendo expresso por:

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.35)$$

Por meio das equações (2.32) até (2.35), o valor da função resultante da interpolação pode ser obtido para qualquer ponto entre x_0 e x_n , sendo que para isso, deve-se,

primeiramente, verificar o intervalo onde o ponto está inserido e então utilizar a equação que define a equação nesse intervalo. A Figura 2.12 ilustra a interpolação de quatro pontos por meio de uma *spline* de primeiro grau.

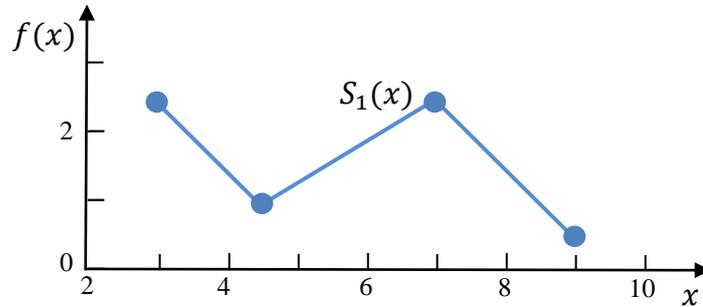


Figura 2.12 - *Spline* de primeira ordem (adaptado de Chapra e Canale, 2001)

Através da Figura 2.12 é possível perceber que a uma *spline* linear, de maneira geral, não interpola os pontos de forma suave, apresentando uma mudança abrupta na inclinação da função nos nós. O fato de as funções *splines* de grau baixo apresentarem descontinuidade em suas derivadas faz com que em aplicações práticas sejam mais utilizadas funções de graus mais elevados.

2.3.2.2 *Splines* Cúbicas

As *splines* de terceiro grau, ou *splines* cúbicas, são encontradas com grande frequência em aplicações de engenharia e conferem um bom equilíbrio entre simplicidade e suavidade [Chapra e Canale, 2001; Simon, 2004]. Para sua obtenção são utilizados polinômios de terceiro grau, como o apresentado na Equação (2.36), para cada intervalo entre os nós:

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (2.36)$$

Assim, para $n+1$ pontos a serem interpolados, existem n intervalos e, por consequência, $4n$ incógnitas para serem obtidas. As condições impostas para a *spline* são:

- os valores das funções devem ser iguais nos nós internos ($2n-2$ condições);
- as funções do primeiro e do último segmento devem passar, respectivamente, pelos pontos inicial e final (2 condições);
- as primeiras derivadas nos nós internos devem ser iguais ($n-1$ condições);

- d) as derivadas segundas nos nós internos devem ser iguais ($n-1$ condições); e
 e) a segunda derivada no nó inicial e no final devem ser nulas (2 condições).

A última condição, aplicada aos nós extremos da função, caracteriza a chamada *spline* natural. Caso necessário, pode-se fazer com que a segunda derivada tenha valor diferente de zero nas extremidades da função. Nesse caso, esses determinados valores devem ser utilizados como as duas condições finais. Chapra e Canale, 2001, apresentam ainda um meio alternativo para a obtenção das *splines* cúbicas que requer a solução de apenas $n-1$ equações. Dessa abordagem resulta a Equação (2.37), a qual deve ser resolvida para cada intervalo:

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i-x_{i-1})}(x_i-x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i-x_{i-1})}(x-x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})}{6} \right] (x_i-x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i-x_{i-1})}{6} \right] (x-x_{i-1}) \quad (2.37)$$

As duas únicas incógnitas da Equação (2.37) são as derivadas segundas no início e no final de cada segmento. Os valores dessas derivadas podem ser obtidos a partir da resolução da Equação (2.38):

$$(x_i-x_{i-1})f_i''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1}-x_{i-1})f_i''(x_i) + (x_{i+1}-x_i)f_i''(x_{i+1}) = \frac{6}{(x_{i+1}-x_i)} [f(x_{i+1})-f(x_i)] + \frac{6}{(x_i-x_{i-1})} [f(x_{i-1})-f(x_i)] \quad (2.38)$$

Escrevendo a Equação (2.38) para todos os nós internos, o resultado será $n-1$ equações distintas e um total de $n-1$ incógnitas, as quais podem, portanto, ser determinadas a partir da solução do sistema de equações. A Figura 2.13 mostra um exemplo de *spline* cúbica aplicada para interpolar quatro pontos e sua comparação com uma interpolação dos mesmos pontos realizada através do método polinomial.

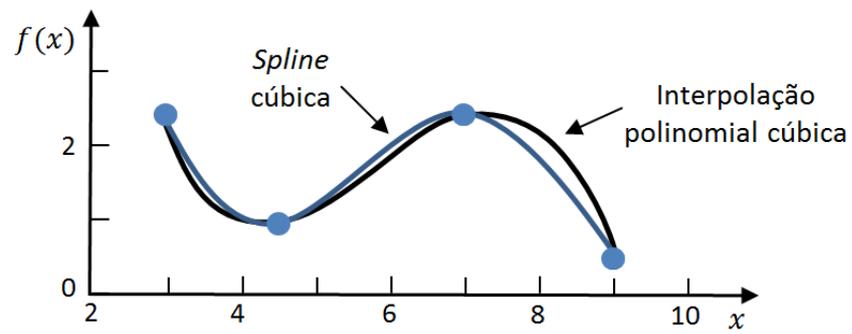


Figura 2.13 – *Spline* cúbica (adaptado de Chapra e Canale, 2001)

Apesar do fato de ambas interpolações serem realizadas a partir de polinômios de terceiro grau elas apresentam resultados distintos, pois a *spline* natural é construída com a restrição de que os valores da segunda derivada nos pontos extremos da função sejam nulos, o que não ocorre no caso da interpolação polinomial cúbica.

3 O ROBÔ PNEUMÁTICO

Conforme já comentado, o método empregado neste trabalho para a geração de trajetórias, apesar de ser aplicável para diferentes configurações de robôs industriais, será desenvolvido considerando as características do robô em desenvolvimento no LAMECC/UFRGS. Assim serão detalhadas neste capítulo as características específicas do robô que influenciam diretamente no desenvolvimento do presente trabalho.

3.1 Configuração geométrica do manipulador

As juntas do robô de 5 GDL com acionamento pneumático em estudo são configuradas como RPP:RR. Assim, de acordo com essa configuração, o braço do manipulador é composto por uma junta rotacional {R} em sua base, enquanto que a segunda e a terceira juntas são prismáticas ortogonais {P}. O punho, por sua vez, possui duas juntas rotacionais que conferem os movimentos de arfagem e rolagem ao efetuador. As variáveis de juntas são representadas neste trabalho por θ_i , para juntas rotacionais, e d_i para juntas prismáticas. Na Figura 3.1 é apresentado um esquema geral do sistema, ilustrando a disposição de suas juntas.

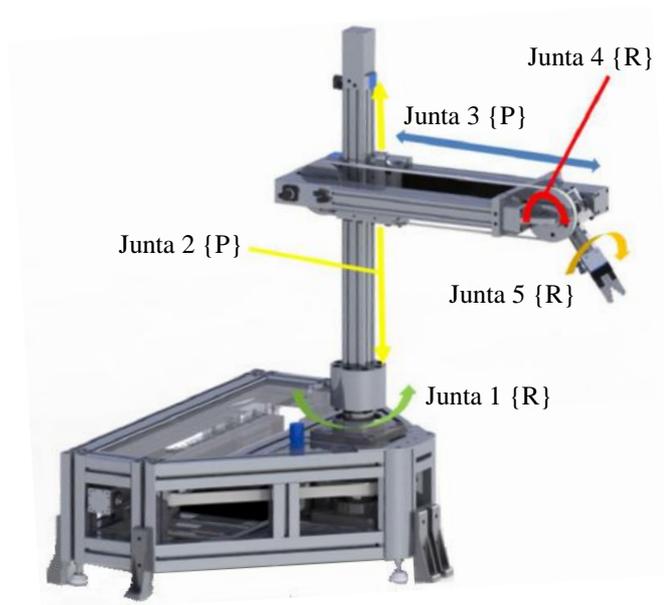


Figura 3.1 – Configuração das juntas do robô (adaptado de Rijo, 2013)

3.2 O Espaço de Trabalho do Manipulador

O espaço de trabalho de um robô é o volume do espaço que o efetuador do robô pode alcançar [Craig, 2005]. Assim, o espaço de trabalho do manipulador depende diretamente da geometria do manipulador e das capacidades mecânicas de deslocamento de suas juntas [Spong e Vidyasagar, 1989], e, com base no modelo geométrico do manipulador pneumático são identificados os valores limites de deslocamentos das suas juntas, os quais estão apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Valores limites das juntas do manipulador pneumático

Junta	Valores limites	
	Mínimo	Máximo
1	-2,454281 rad (-140,62°)	2,454281 rad (140,62°)
2	0	0,45 m
3	0	0,3 m
4	-1,963495 rad (-112,5°)	1,963495 rad (112,5°)
5	-2,35619 rad (-135°)	2,35619 rad (135°)

A partir dos valores limites para a movimentação das juntas delimita-se o volume de trabalho do manipulador. A Figura 3.2 mostra o robô e a representação tridimensional do seu espaço de trabalho.

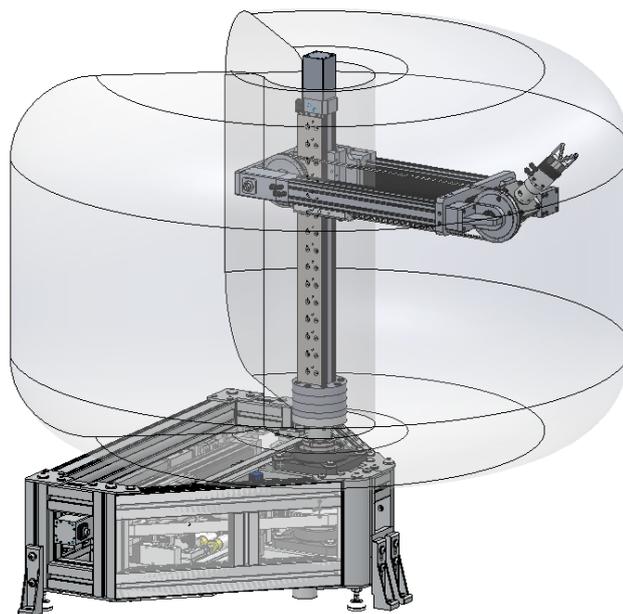


Figura 3.2 - O robô pneumático e o espaço de trabalho cilíndrico

A Figura 3.3 ilustra as dimensões básicas do espaço de trabalho, o qual está representado de forma bidimensional.

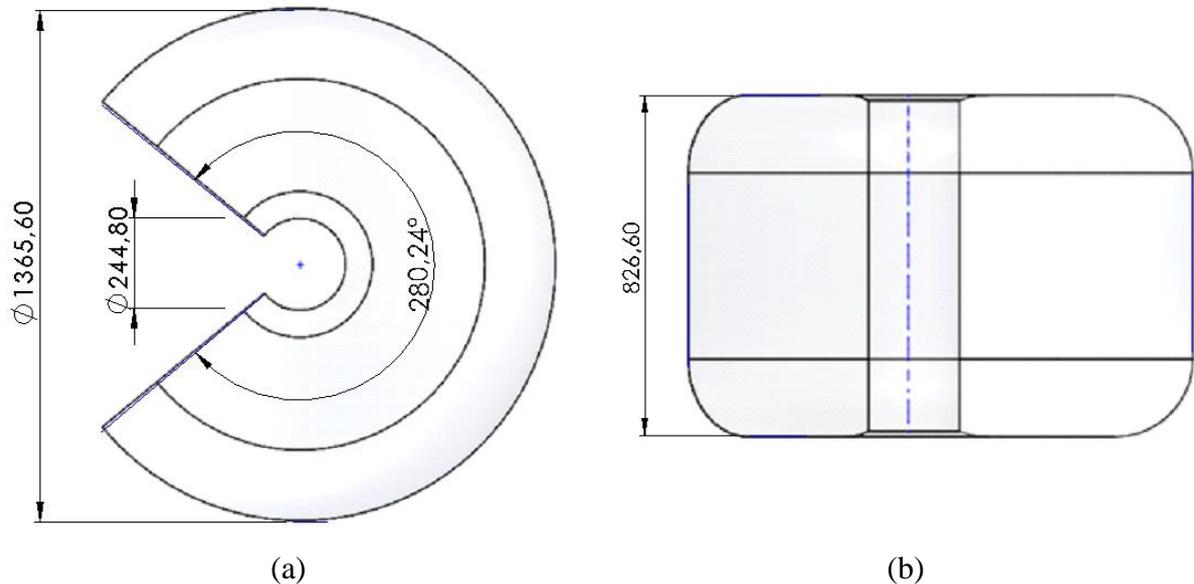


Figura 3.3 – Espaço de trabalho do robô: (a) vista superior e (b) vista lateral

3.3 O Espaço das Juntas e o Espaço dos Atuadores

As posições dos elos de um manipulador de n graus de liberdade podem ser determinadas através de um conjunto com o mesmo número de variáveis de juntas. O vetor $n \times 1$ formado por essas variáveis é chamado de vetor de juntas e o espaço formado a partir de todos os vetores de juntas é denominado espaço de juntas [Craig, 2005]. Frequentemente, (como é o caso do manipulador pneumático), os sensores que medem as variáveis de posição estão localizados nos atuadores, sendo necessário conhecer a relação existente entre a posição das juntas com os atuadores que as movimentam. A partir das variáveis de posição dos atuadores e dos vetores formados por elas, pode-se determinar o espaço dos atuadores, onde efetivamente ocorrerá o controle. Além destes dois espaços, é possível representar a posição e a orientação dos elos de um manipulador em coordenadas referentes a um sistema cartesiano com origem na base do robô. A Figura 3.4 mostra os três espaços através dos quais pode ser representada a posição e a orientação de um manipulador.

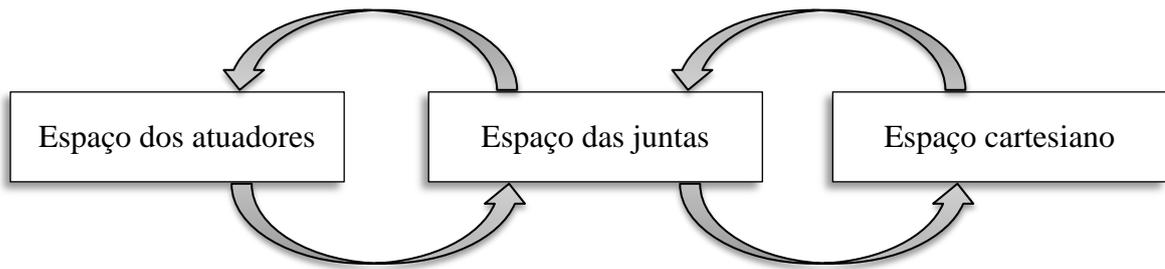


Figura 3.4 - Espaços para a representação da posição de um robô industrial

As setas entre os espaços representam as relações de transformação entre eles. Conhecer essas relações é essencial, por exemplo, para obter a trajetória dos atuadores em função de uma dada curva de trajetória no espaço cartesiano. Normalmente, as variáveis das juntas não se equivalem às dos atuadores e, no caso do robô pneumático, por existirem sistemas de transmissão mecânica, as variáveis das juntas da base, de arfagem e de rolagem do punho devem ser transformadas do espaço das juntas para o espaço dos atuadores. A relação de transmissão do movimento por meio do elemento acionador foi determinada por Allgayer, 2011:

$$\mathbf{q} = \mathbf{N}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\lambda}) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{q} é o vetor de variáveis generalizadas das juntas, \mathbf{y} é o vetor de variáveis dos atuadores, as quais expressam a posição do pistão do atuador, \mathbf{N} é a matriz de fatores constantes que dependem do tipo de transmissão e $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor de *offset*.

Para o robô pneumático, o valor de \mathbf{N} para as juntas 1 e 4 (Figura 3.1) foi obtido a partir do modelo geométrico utilizando as dimensões das polias e, no caso do atuador rotacional (junta 5), a partir do ângulo máximo prescrito para ele. Já, para os valores de $\boldsymbol{\lambda}$, considera-se que os êmbolos dos atuadores pneumáticos estão centrados em relação ao seu curso. No caso da junta 5, o deslocamento foi medido através do comprimento do arco descrito pelo movimento do êmbolo do atuador rotativo, o qual foi obtido através do seu modelo sólido geométrico, resultando no valor de 0,078932 m. Na Tabela 3.2, são apresentados os valores de N_i e λ_i para as juntas citadas.

Tabela 3.2- Fatores das relações de transmissão das juntas

Juntas	N_i [rad/m]	λ_i [m]
Base	10,9079	0,25
Arfagem do efetuador	17,453	0,1125
Rolagem do efetuador	59,71	0,039466

Nas demais juntas, a transmissão de movimento ocorre de forma direta, ou seja, $N=1$ e $\lambda=0$, não necessitando, portanto, da utilização da Equação (3.1) para a transformação entre o espaço de juntas e o dos atuadores.

3.4 Análise Cinemática do Manipulador

Nesta seção são apresentados os desenvolvimentos relativos à obtenção das equações que descrevem tanto a cinemática direta quanto a inversa do robô manipulador em estudo. O equacionamento da cinemática direta é realizada com base nos procedimentos clássicos do método de Denavit-Hartenberg (DH), enquanto que o equacionamento da cinemática inversa é obtido a partir dos resultados da cinemática direta utilizando uma solução algébrica.

3.4.1 Cinemática Direta

O manipulador pneumático em estudo está apresentado esquematicamente na Figura 3.5 através de uma representação simplificada da estrutura da cadeia cinemática, a qual foi obtida por Rijo, 2013, seguindo-se o algoritmo sistemático de Denavit-Hartenberg (DH).

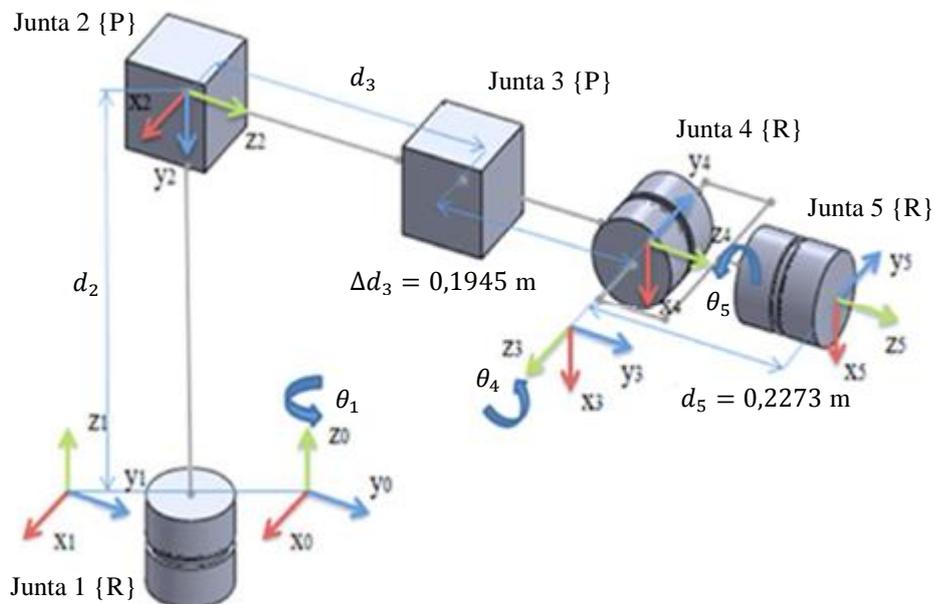


Figura 3.5 - Representação simplificada da cadeia cinemática do robô (adaptada de Rijo, 2013)

Através dessa representação simplificada da cadeia cinemática do robô, são obtidos analiticamente os parâmetros de DH, conforme apresentado na Tabela 3.3 [Rijo, 2013]:

Tabela 3.3 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg do robô pneumático

Elos	α_i (rad)	a_i (m)	θ_i (rad)	d_i (m)
1	0	0	θ_1	0
2	$-\pi/2$	0	0	d_2
3	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$d_3+\Delta d_3$
4	$-\pi/2$	0	θ_4	0
5	0	0	θ_5	d_5

Fonte: adaptada de Rijo, 2013.

A partir dos parâmetros apresentados na Tabela 3.3 podem ser determinadas as matrizes de transformação homogênea para o robô pneumático, as quais resultam:

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen } \theta_1 & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3+\Delta d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\text{sen } \theta_4 & 0 \\ \text{sen } \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$T_4^5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\text{sen } \theta_5 & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde $T_i^j, j=1, \dots, 5; i=0, \dots, 4$, representam as transformações homogêneas entre o i -ésimo e o j -ésimo elo, as quais relacionam a posição e a orientação de um determinado elo com respeito aos seus elos anteriores na cadeia cinemática. Portanto, a partir do produto das matrizes expressas nas equações (3.2) a (3.6), pode-se obter a matriz de transformação que determina a rotação e a posição do sistema de coordenadas do efetuador em relação à origem do sistema de coordenadas da base. Essa matriz pode ser descrita como:

$$T_0^5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde d_x, d_y e d_z são as coordenadas que determinam a posição da origem do sistema de coordenadas localizado no efetuador do robô (Figura 3.6) e os termos r_{ij} estão discriminados nas equações (3.8) até (3.16).

$$r_{11} = -\cos \theta_1 \text{sen } \theta_5 - \cos \theta_5 \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_4 \quad (3.8)$$

$$r_{12} = \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_4 \text{sen } \theta_5 - \cos \theta_1 \cos \theta_5 \quad (3.9)$$

$$r_{13} = -\cos \theta_4 \text{sen } \theta_1 \quad (3.10)$$

$$r_{21} = \cos \theta_1 \cos \theta_5 \text{sen } \theta_4 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_5 \quad (3.11)$$

$$r_{22} = -\cos \theta_5 \text{sen } \theta_1 - \cos \theta_1 \text{sen } \theta_4 \text{sen } \theta_5 \quad (3.12)$$

$$r_{23} = \cos \theta_1 \cos \theta_4 \quad (3.13)$$

$$r_{31} = -\cos \theta_4 \cos \theta_5 \quad (3.14)$$

$$r_{32} = \cos \theta_4 \text{sen } \theta_5 \quad (3.15)$$

$$r_{33} = \text{sen } \theta_4 \quad (3.16)$$

Na Figura 3.6 podem ser visualizadas as coordenadas que definem a posição do punho $\{W\}$ e do efetuador.

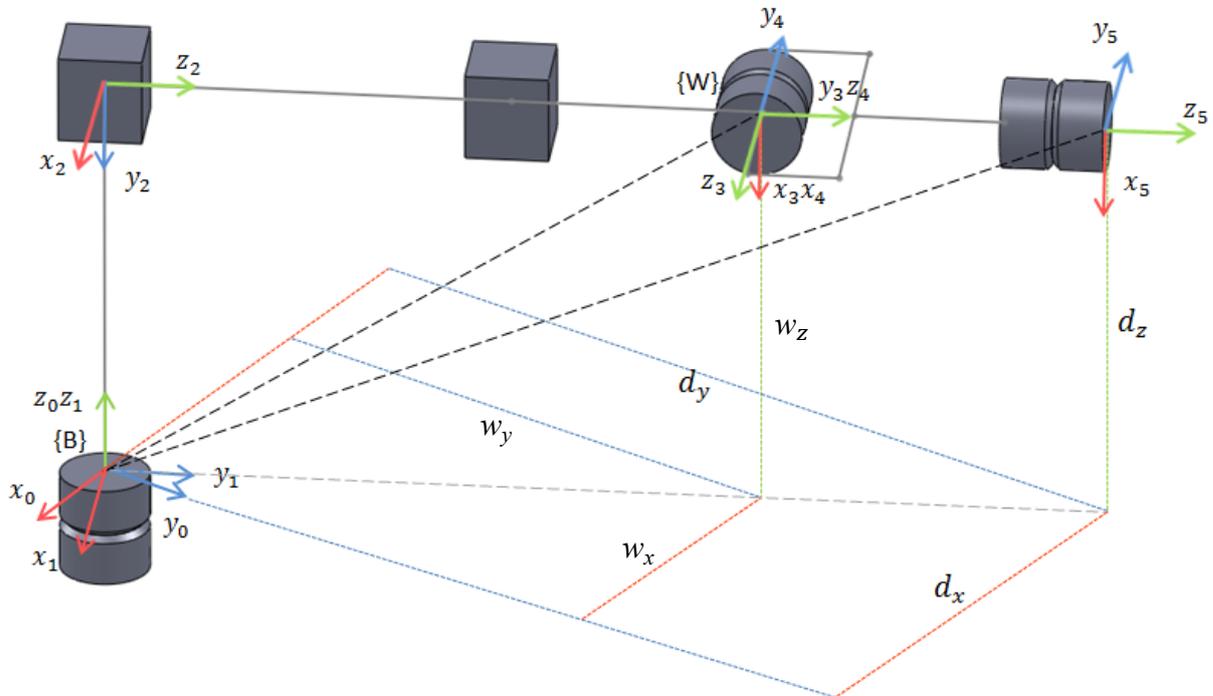


Figura 3.6 – Representação simplificada da cadeia cinemática destacando as posições do punho e do efetuador

3.4.2 Cinemática Inversa

A solução da cinemática inversa de um manipulador consiste em determinar as variáveis das juntas do robô em termos da posição e orientação do efetuador. Segundo Craig, 2005, o problema a ser solucionado pode ser dividido em duas partes. Inicialmente deve-se expressar o vetor de coordenadas associadas à origem do punho com relação à base em função da posição e da orientação do efetuador e, posteriormente, através da aplicação de transformações homogêneas, determinar as equações que relacionam a origem do sistema de coordenadas do punho com a origem do sistema associado à base do robô. Finalmente, igualando as duas expressões obtém-se um sistema de equações cuja solução consiste nos valores das coordenadas de junta associadas à posição e rotação do efetuador.

A partir da Equação (3.7) e da representação apresentada na Figura 3.6 é possível descrever a posição da origem do sistema de coordenadas do punho $\{W\}$ com relação ao da base $\{B\}$ relacionada com a posição da origem do efetuador [Spong e Vidyasagar, 1989] como:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x - d_5 r_{13} \\ d_y - d_5 r_{23} \\ d_z - d_5 r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde, w_x , w_y e w_z são as coordenadas da origem do sistema de coordenadas do punho do robô {W} (Figura 3.6). Substituindo r_{13} , r_{23} e r_{33} na Equação (3.17), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x - d_5 (-\text{sen } \theta_1 \cos \theta_4) \\ d_y - d_5 (\cos \theta_1 \cos \theta_4) \\ d_z - d_5 \text{sen } \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

A transformação da junta 3 (associada ao punho) para a junta 0 (associada à base) resulta:

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & -(d_3 + \Delta d_3) \text{sen } \theta_1 \\ 0 & \cos \theta_1 & \text{sen } \theta_1 & (d_3 + \Delta d_3) \cos \theta_1 \\ -1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

As três primeiras linhas da quarta coluna da matriz expressa na Equação (3.19) relacionam a posição da origem do pulso {W} com relação à origem da base {B}. Assim, igualando as expressões que representam as coordenadas da origem do pulso, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -(d_3 + \Delta d_3) \text{sen } \theta_1 \\ (d_3 + \Delta d_3) \cos \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x - d_5 (-\text{sen } \theta_1 \cos \theta_4) \\ d_y - d_5 (\cos \theta_1 \cos \theta_4) \\ d_z - d_5 \text{sen } \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Igualando-se cada termo dos dois vetores, são obtidas as seguintes equações, as quais relacionam as variáveis de junta θ_1 , d_2 e d_3 com a posição e a orientação da origem do efetuador:

$$\theta_1 = \text{arc sen } \frac{d_x}{-d_3 - \Delta d_3 - d_5 \cos \theta_4} \quad (3.21)$$

$$d_2 = d_z - d_5 \text{sen } \theta_4 \quad (3.22)$$

$$d_3 = \frac{d_y}{\cos \theta_1} - \Delta d_3 - d_5 \cos \theta_4 \quad (3.23)$$

Para casos em que $d_y \geq 0$, pode-se assumir que $\cos \theta_1 = \frac{d_y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Assim, tem-se que:

$$d_3 = \sqrt{dx^2 + dy^2} - \Delta d_3 - d_5 \cos \theta_4 \quad (3.24)$$

Substituindo d_3 na Equação (3.21) obtém-se a seguinte expressão para θ_1 em função apenas de d_x e d_y :

$$\theta_1 = -\text{arc sen} \frac{d_x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad (3.25)$$

que pode ser verificada através da Figura 3.6.

Por possuir a estrutura do pulso composta por 2 GDL (juntas 4 e 5), a orientação do efetuador do robô é dada diretamente pelos ângulos θ_4 e θ_5 assim, para a geração de trajetórias realizadas nas seções seguintes considera-se θ_4 e θ_5 como dados de entrada que são conhecidos, definindo a orientação do sistema de coordenadas associado ao efetuador (Figura 3.6). A transformação da extremidade do manipulador (junta 5) para a origem do punho pode ser obtida das equações da cinemática direta através de:

$$T_3^5 = (T_0^3)^{-1} T_0^5$$

$$T_3^5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \cos \theta_5 & -\cos \theta_4 \sin \theta_5 & -\sin \theta_4 & -d_5 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 \cos \theta_5 & -\sin \theta_4 \sin \theta_5 & \cos \theta_4 & d_5 \cos \theta_4 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

3.4.3 Verificação da Cinemática Inversa

A fim de verificar a aplicabilidade das equações que descrevem a cinemática inversa do manipulador, foram realizados estudos numéricos utilizando o *software* Matlab®. Para tanto, foram propostas duas trajetórias no espaço de trabalho do manipulador. Assim, fazendo

o efetuador movimentar-se ao longo dessas curvas, foi possível obter as respectivas trajetórias individuais de cada uma das juntas do robô.

Inicialmente, foi proposta uma trajetória retilínea paralela aos planos xy e xz , entre os pontos $p_1=(0,5; 0,45; 0,25)$ e $p_2=(-0,5; 0,45; 0,25)$, conforme apresentado na Figura 3.7.

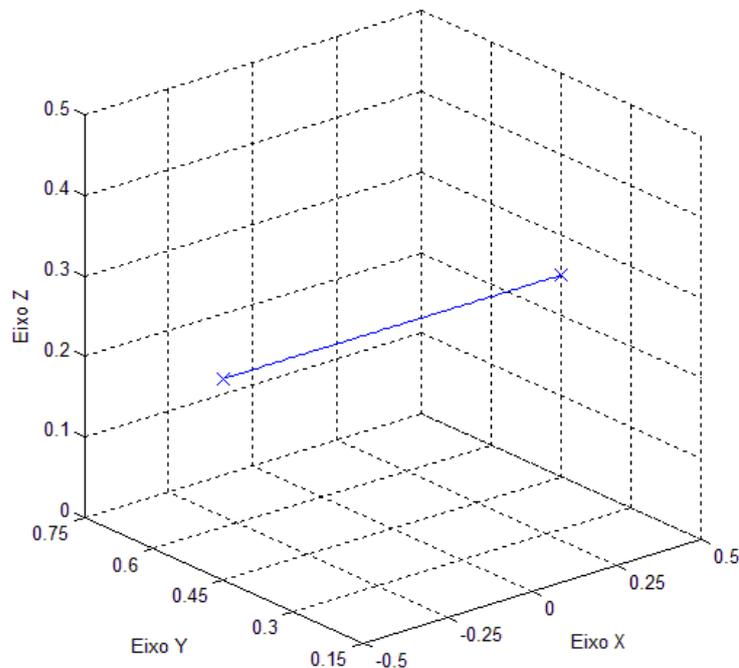


Figura 3.7 - Trajetória retilínea

Através das equações da cinemática inversa foram obtidas as sucessivas posições das juntas do robô ao longo do tempo à medida que o mesmo realiza o seguimento da trajetória proposta para o efetuador.

Para este movimento foram analisadas duas situações. Na primeira, o robô executa a trajetória retilínea prevista mantendo o efetuador na posição horizontal ($\theta_4 = 0$). Neste caso, a junta 2 permanece com o valor de d_2 inalterado ao longo do movimento, conforme observa-se na Figura 3.8.

No segundo caso, ao mesmo tempo em que o efetuador se desloca ao longo da trajetória retilínea, sua inclinação se altera, com θ_4 variando entre $-\frac{\pi}{6}$ até $\frac{\pi}{6}$ radianos. Assim, para compensar a translação associada a esse movimento angular, a posição da junta 2 também deve variar, conforme apresentado na Figura 3.9.

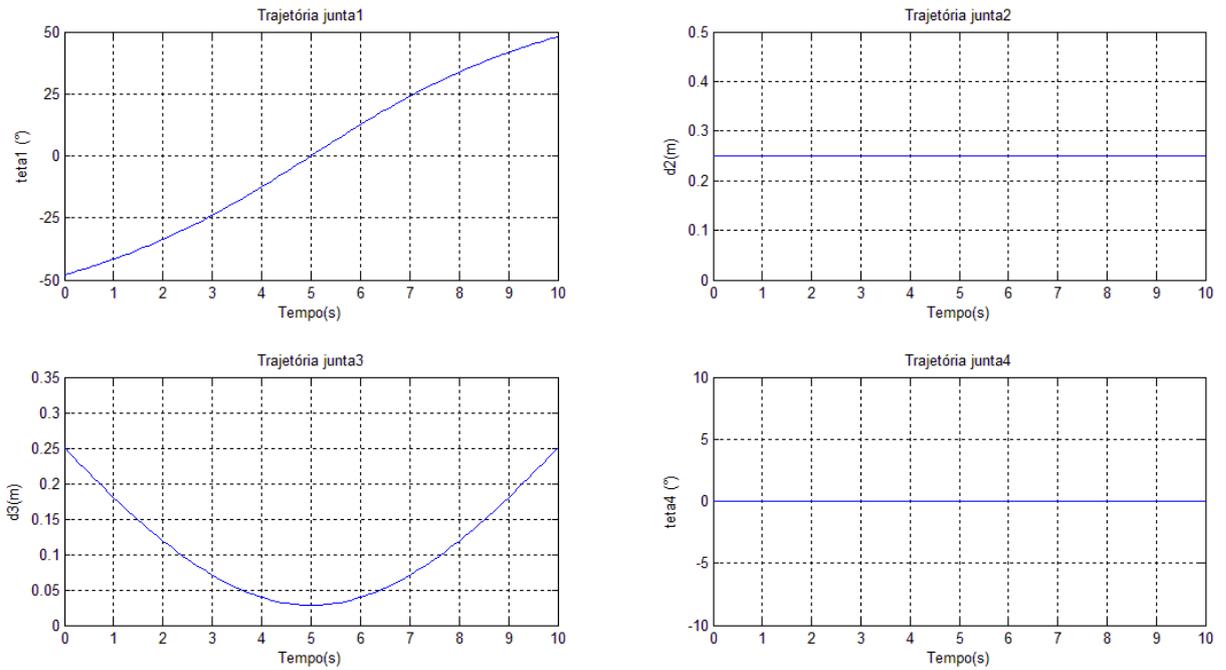


Figura 3.8 - Trajetórias das juntas sem a variação de θ_4 para o seguimento da trajetória retilínea

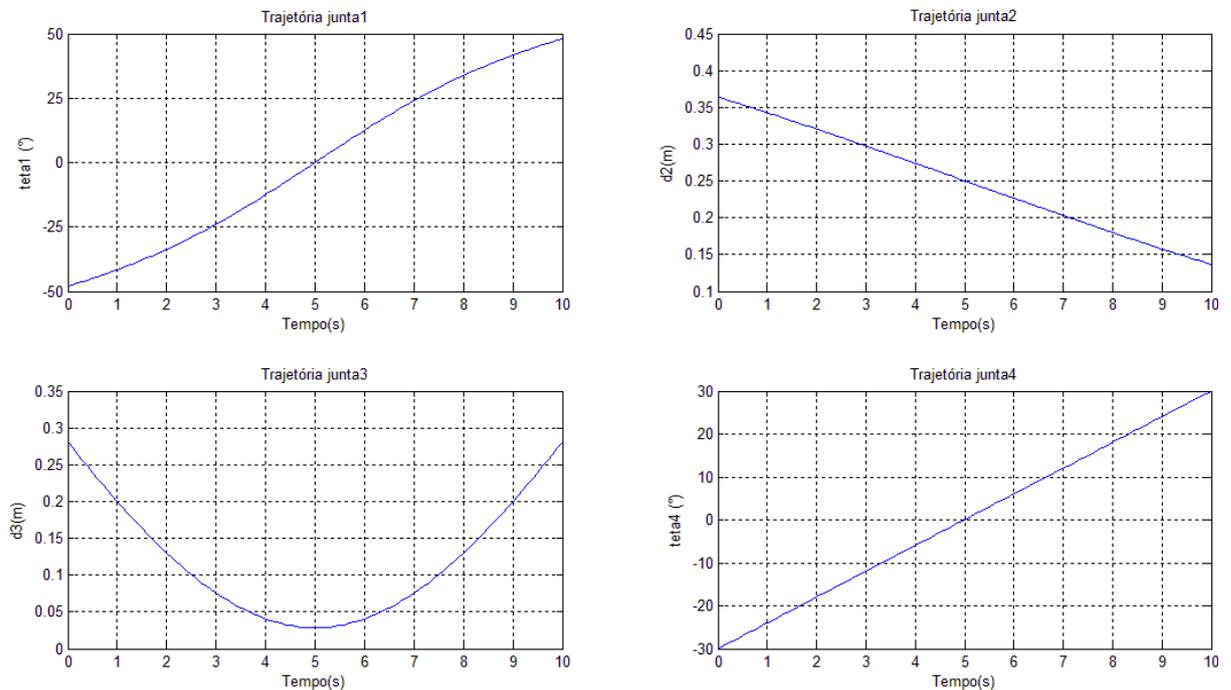


Figura 3.9 - Trajetórias das juntas com variação de θ_4 para o seguimento da trajetória retilínea

A partir das trajetórias das juntas do robô, pode-se utilizar das equações da cinemática direta a fim de obter o caminho tridimensional executado pelo efetuador no espaço de trabalho do robô. Para as trajetórias das juntas apresentadas nas figuras 3.8 e 3.9, utilizando as

equações da cinemática, direta pode-se obter o caminho seguido pelo efetuador, o qual é mostrado na Figura 3.10 e corresponde à trajetória retilínea mostrada na Figura 3.7.

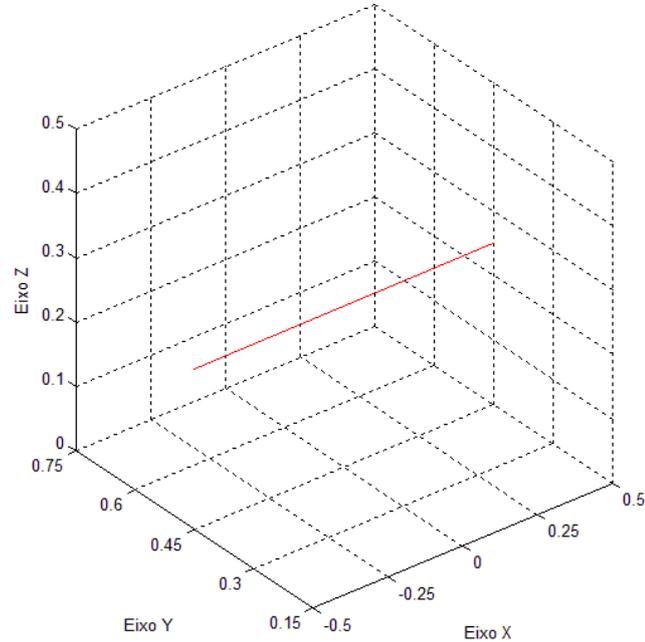


Figura 3.10 - Caminho do efetuador para trajetória retilínea obtido a partir das variáveis de junta e das equações da cinemática direta

A fim de avaliar o equacionamento da cinemática inversa para o seguimento de curvas mais complexas, foi realizada a simulação para a trajetória helicoidal apresentada na Figura 3.11.

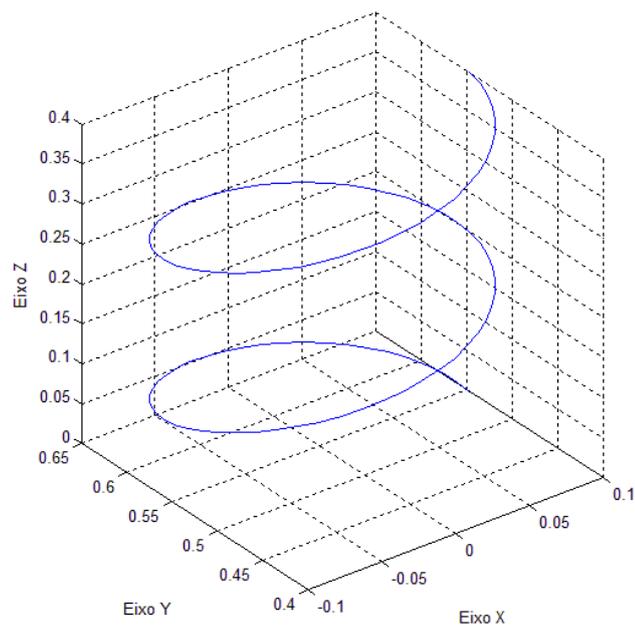


Figura 3.11 - Trajetória helicoidal

Da mesma forma que para a trajetória retilínea, primeiramente fez-se o efetuador seguir a trajetória sem a variação de θ_4 (Figura 3.12), e após fez-se θ_4 variar de $-\frac{\pi}{3}$ até $\frac{\pi}{3}$ (Figura 3.13).

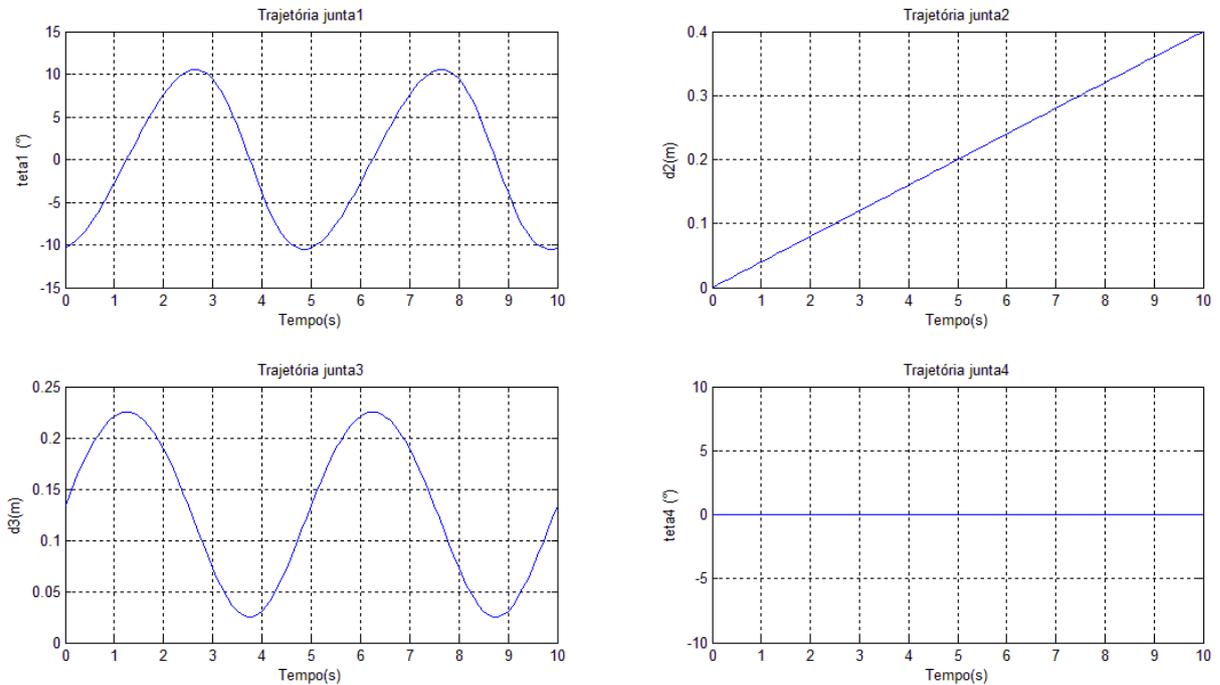


Figura 3.12 - Trajetória das juntas com θ_4 constante para o seguimento da trajetória helicoidal

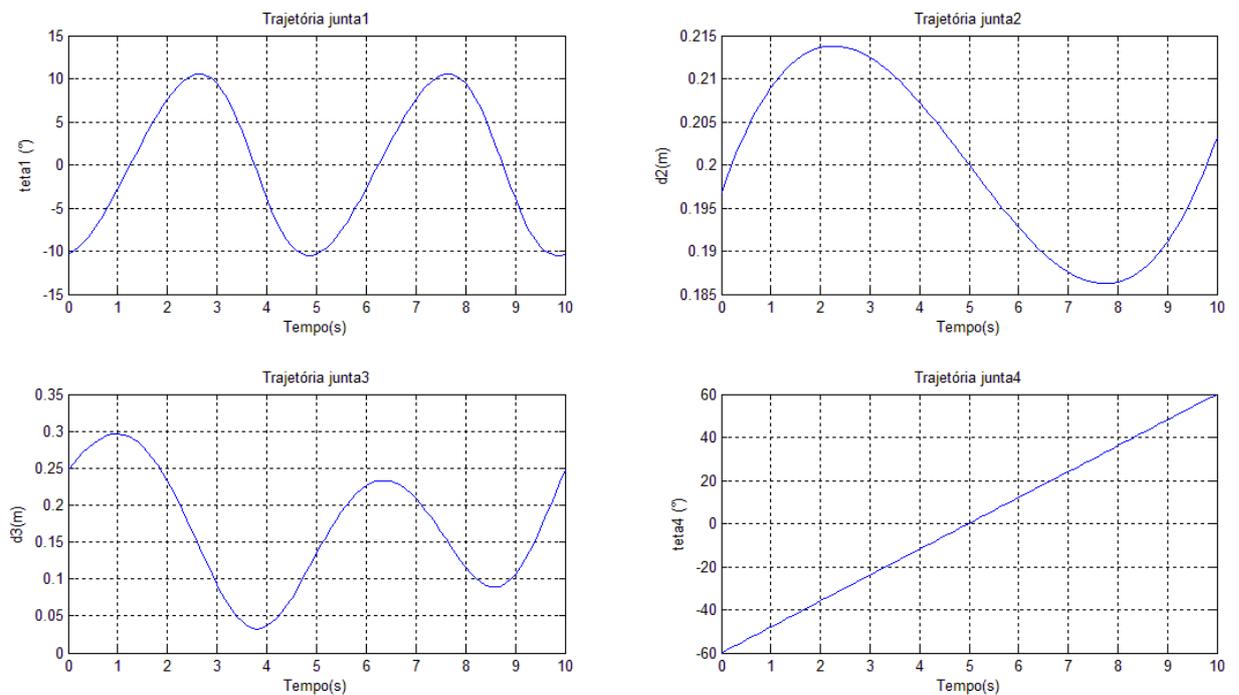


Figura 3.13 - Trajetórias das juntas com variação de θ_4 para o seguimento da trajetória helicoidal

Utilizando as equações da cinemática direta para as variáveis de junta apresentadas nas figuras 3.12 e 3.13 foi obtido o caminho executado pelo efetuador mostrado na Figura 3.14, o qual corresponde à curva mostrada na Figura 3.11.

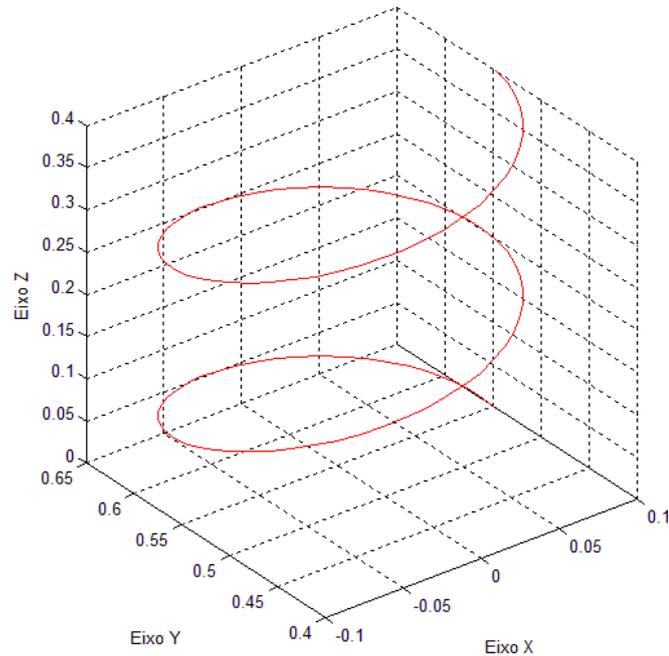


Figura 3.14 - Caminho do efetuador para trajetória helicoidal obtido a partir das variáveis de junta e das equações da cinemática direta

Os valores de θ_5 não foram apresentados pelo fato de que a variação no ângulo da junta 5 não influencia nas demais juntas, mantendo-se, portanto, constante nos casos avaliados.

4 CRIAÇÃO DE TRAJETÓRIAS A PARTIR DE *SPLINES*

No presente trabalho, para a geração de trajetórias formadas por um determinado número de pontos ou nós a serem percorridas pelo efetuador são utilizadas funções *splines* determinadas de acordo com a metodologia proposta por Simon, 2004. Inicialmente serão apresentados os procedimentos para obtenção de *splines* de ordem qualquer. Em seguida será apresentado o equacionamento para a obtenção de *splines* de sétimo grau e, por fim, será realizada a descrição da implantação computacional da metodologia de geração das trajetórias do robô utilizando *splines*.

4.1 Criação de *Splines* de Ordem Qualquer

Para obter uma trajetória a partir de funções *spline* de ordem qualquer assume-se, inicialmente, que os nós que a compõem são igualmente espaçados, tal que $t_i=i$ ($i = 0, \dots, N$), onde N é o número de segmentos polinomiais que compõem a trajetória e M é um número inteiro e positivo. Define-se uma *spline* de grau $M-1$ como uma função $y(t)$ que satisfaz o critério composto pelas equações (4.1) a (4.3).

$$y(t)=y_i(t), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (i=1, \dots, N) \quad (4.1)$$

$$y_i(t)=x_i(t-t_{i-1}) \quad (4.2)$$

$$x_i(t)=\sum_{k=0}^{M-1} a_{ik}t^k, \quad t \in [0, T] \quad (4.3)$$

onde T é o comprimento normalizado de cada segmento da função. A *spline* $y(t)$ consiste na união de N segmentos contínuos $y_i(t)$ ($i=1, \dots, N$). Cada $x_i(t)$ consiste de um segmento normalizado da *spline* de $t=0$ até $t=T$. Esses segmentos normalizados são então deslocados no tempo para formar os segmentos de $y_i(t)$, os quais são unidos para formar a função *spline* $y(t)$ de comprimento NT . Os parâmetros a_{ik} ($k=0, \dots, M-1$) são os coeficientes do i ésimo segmento da *spline*. A função resultante $y(t)$ bem como suas derivadas $y'(t)$, ..., $y^{(R)}(t)$ são contínuas entre t_0 e t_N , desde que

$$R = \frac{M}{2} - 1 \quad (4.4)$$

onde R é o número de derivadas de $y(t)$ possíveis de serem efetuadas continuamente.

É importante destacar que o número de coeficientes a_{ik} que devem ser determinados para definir um polinômio de grau $M-1$ é igual a M (por esse motivo, assim como Schoenberg, 1964, Simon, 2004, define M como a ordem de uma função polinomial de grau $M-1$).

Simon, 2004, propõe ainda uma função que permite o ajuste das características da *spline* resultante condicionada às especificidades da aplicação e da parametrização realizada. Para tanto, após definidos os critérios que atendem aos requisitos específicos para a aplicação, determina-se, dentre todas as funções contínuas que satisfazem o critério formado pelas equações (4.1) a (4.3), a que minimiza o valor da função J , expressa pela Equação (4.5):

$$J = \sum_{i=0}^N p_i (y_i - f_i)^2 + \int_{t_0}^{t_N} \{ \alpha_1 [y'(t)]^2 + \dots + \alpha_R [y^{(R)}(t)]^2 \} dt \quad (4.5)$$

Na Equação (4.5), $y_i \equiv y(t_i)$ e f_i é o valor da função resultante da interpolação. Os valores p_i permitem controlar o ajuste da curva em cada um dos nós, enquanto que os parâmetros α_i possibilitam o controle da magnitude relativa de cada uma das derivadas da função. Na prática, os parâmetros de controle p_i são geralmente constantes para todo o intervalo de dados, sendo também os espaçamentos entre os pontos da função considerados fixos, de forma que $t_i - t_{i-1} = h$.

No algoritmo proposto, é requerida a continuidade da função $y(t)$ e de suas R primeiras derivadas em todos os nós da função, com exceção do primeiro e do último ponto. Assim, consideram-se as restrições $y_i \equiv y(t_i)$, $y'_i \equiv y'(t_i)$, ..., $y_i^{(R)} \equiv y^{(R)}(t_i)$, obtendo-se, então, M equações de restrição a partir do critério especificado pelas equações (4.1) a (4.3):

$$y_{i-1}^{(r)} = x_i^{(r)}(0) \quad (r=0, \dots, R) \quad (4.6)$$

$$y_i^{(r)} = x_i^{(r)}(T) \quad (r=0, \dots, R) \quad (4.7)$$

Estas M equações podem ser representadas na forma matricial, conforme segue:

$$\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y'_{i-1} \\ y'_i \\ \vdots \\ y_{i-1}^{(R)} \\ y_i^{(R)} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{i,M-2} \\ a_{i,M-1} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, N) \quad (4.8)$$

onde A é uma matriz $M \times M$ que define a relação dos coeficientes do i -ésimo segmento com os valores da função e das suas derivadas nos pontos inicial e final de cada segmento da *spline*.

Cada segmento normalizado possui M coeficientes. Considerando que hajam N segmentos de polinômios na função *spline*, tem-se MN variáveis independentes a serem determinadas. A otimização da função custo é vista como uma otimização em relação a estes MN coeficientes, sujeitos às restrições de continuidade de $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{(R)}(t)$ nos nós; e, desde que os coeficientes sejam funções de y_i , y'_i , ..., $y_i^{(R)}$ ($i=1, \dots, N$) o problema pode ser reformulado como uma otimização sem restrições referente a estes $(R+1)(N+1)$ parâmetros. Portanto, a minimização da função custo pode ser resolvida por

$$\frac{\partial J}{\partial y_i^{(r)}} = 0, \quad (i=1, \dots, N), \quad (r=0, 1, \dots, R) \quad (4.9)$$

o que resulta em $(R+1)(N+1)$ equações para serem resolvidas para um mesmo número de parâmetros independentes.

Pode-se verificar que a integral na equação de custo pode ser reescrita na forma de uma soma de equações integrais menores. Além disso, fazendo com que o espaçamento entre os nós seja representado por um período fixo h , quando a *spline* $y(t)$ é modificada de seu comprimento normalizado NT para o comprimento Nh , a derivada r é multiplicada por um fator $(T/h)^r$. Assim, a função custo pode ser reescrita da seguinte forma:

$$J = \sum_{i=0}^N p_i (y_i - f_i)^2 + \sum_{k=1}^N J_k \quad (4.10)$$

ou

$$J = \sum_{i=0}^N p_i (y_i - f_i)^2 + \sum_{k=1}^N \int_0^T \left\{ \left(\frac{T}{h} \right) \alpha_1 [y_k'(t)]^2 + \dots + \left(\frac{T}{h} \right)^{2R-1} \alpha_R [y_k^{(R)}(t)]^2 \right\} dt \quad (4.11)$$

Assumindo ainda que $y_k(t)$ consiste de uma função de $y_i^{(r)}$ somente para $k=i$ e $k=i+1$, pode-se, através da combinação das equações (4.5), (4.9) e (4.10), obter o critério de minimização formado pelas equações (4.12) a (4.14):

$$2p_0 (y_0 - f_0) \delta_r + \frac{\partial J_1}{\partial y_0^{(r)}} = 0, \quad (r=0, 1, \dots, R) \quad (4.12)$$

$$2p_i (y_i - f_i) \delta_r + \frac{\partial (J_i + J_{i+1})}{\partial y_i^{(r)}} = 0, \quad (r=0, 1, \dots, R), \quad (i=1, \dots, N-1) \quad (4.13)$$

$$2p_N (y_N - f_N) \delta_r + \frac{\partial J_N}{\partial y_N^{(r)}} = 0, \quad (r=0, 1, \dots, R) \quad (4.14)$$

onde $\delta_r = 1$ se $r=0$ e $\delta_r = 0$ se $r \neq 0$. A resolução das equações (4.12) a (4.14) resulta em $(R+1)(N+1)$ equações para serem resolvidas e um total de $(R+1)(N+1)$ valores de $y_i, y_i', \dots, y_i^{(R)}$ para serem determinados.

Uma vez calculados os valores para $y_i, y_i', \dots, y_i^{(R)}$, estes podem ser usados na Equação (4.8) para a determinação dos coeficientes ótimos para a *spline* segundo os critérios definidos através da ponderação dos coeficientes p_i e α_1 .

4.2 Trajetórias Formadas por *Splines* de Oitava Ordem

A *spline* de oitava ordem criada através do método proposto por Simon, 2004, garante a continuidade da função $y(t)$ e de suas três primeiras derivadas nos $(N-1)$ nós intermediários, isto é, em todos os nós, exceto nos pontos inicial e final. A continuidade da função e suas derivadas proporcionada pela *spline* utilizada é essencial para o planejamento de trajetórias de robôs, pois assim pode fornecer trajetórias fisicamente factíveis e suaves. Além disso, a possibilidade de controlar o ajuste da proximidade da curva aos nós e o controle da magnitude das derivadas permitem ao usuário adequar a trajetória de acordo com a necessidade da aplicação.

Neste trabalho, os pontos especificados para a formação da trajetória de cada um dos atuadores são interpolados por funções polinomiais de sétimo grau. No caso específico da *spline* de sétimo grau, tem-se que $M=8$, assim, de acordo com a Equação (4.4), tem-se a garantia de que as derivadas de até terceira ordem serão contínuas ($R=3$). Considerando ainda que $T=1$ seja o comprimento normalizado dos segmentos, é possível determinar as oito restrições através das equações (4.1) a (4.3), resultando em:

$$y_{i-1} = x_i(0) = a_{i0} \quad (4.15)$$

$$y_i = x_i(1) = \sum_{k=0}^7 a_{ik} \quad (4.16)$$

$$y'_{i-1} = x'_i(0) = a_{i1} \quad (4.17)$$

$$y'_i = x'_i(1) = \sum_{k=1}^7 k a_{ik} \quad (4.18)$$

$$y''_{i-1} = x''_i(0) = 2a_{i2} \quad (4.19)$$

$$y''_i = x''_i(1) = \sum_{k=2}^7 k(k-1)a_{ik} \quad (4.20)$$

$$y'''_{i-1} = x'''_i(0) = 6a_{i3} \quad (4.21)$$

$$y'''_i = x'''_i(1) = \sum_{k=3}^7 k(k-1)(k-2)a_{ik} \quad (4.22)$$

Essas equações podem ser colocadas na forma matricial, resultando em

$$\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y'_{i-1} \\ y'_i \\ y''_{i-1} \\ y''_i \\ y'''_{i-1} \\ y'''_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 & 60 & 120 & 210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \\ a_{i6} \\ a_{i7} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$(i=1, \dots, N)$$

Com o auxílio de um software matemático de manipulação simbólica pode-se resolver as equações (4.12) a (4.14) a fim de se obter os critérios de minimização para uma *spline* de sétimo grau. São apresentados a seguir todos os cálculos necessários para a obtenção explícita deste conjunto de equações.

4.2.1 Cálculo das Derivadas Parciais para o Primeiro Nó

Da Equação (4.12), tem-se:

$$\frac{\partial J_1}{\partial y_0^{(r)}} = 0, \quad (r=0, 1, 2 \text{ e } 3) \quad (4.24)$$

A manipulação simbólica das derivadas parciais da integral de 0 a T do quadrado da primeira derivada resulta em:

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0} = \frac{1400}{429}y_{i-1} - \frac{1400}{429}y_i + \frac{271}{429}y_{i-1}' + \frac{23}{429}y_{i-1}'' + \frac{5}{2574}y_{i-1}''' + \frac{271}{429}y_i' - \frac{23}{429}y_i'' + \frac{5}{2574}y_i''' \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0'} = \frac{271}{429}y_{i-1} - \frac{271}{429}y_i + \frac{600}{1001}y_{i-1}' + \frac{123}{2002}y_{i-1}'' + \frac{25}{9009}y_{i-1}''' + \frac{97}{3003}y_i' + \frac{47}{6006}y_i'' - \frac{5}{6006}y_i''' \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0''} &= \frac{23}{429}y_{i-1} - \frac{23}{429}y_i + \frac{123}{2002}y_{i-1}' + \frac{73}{90090}y_{i-1}'' + \frac{37}{9009}y_{i-1}''' - \frac{47}{6006}y_i' + \frac{5}{2574}y_i'' \\ &\quad - \frac{73}{360360}y_i''' \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0'''} &= \frac{5}{2574}y_{i-1} - \frac{5}{2574}y_i + \frac{25}{9009}y_{i-1}' + \frac{37}{90090}y_{i-1}'' + \frac{1}{45045}y_{i-1}''' - \frac{5}{6006}y_i' + \frac{73}{360360}y_i'' \\ &\quad - \frac{1}{72072}y_i''' \end{aligned} \quad (4.28)$$

Reescrevendo as equações (4.25) a (4.28) na forma matricial, para $r=1, 2$ e 3 , tem-se:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0'} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0'''} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{271}{429} & \frac{-271}{429} & 0 \\ \frac{23}{429} & \frac{-23}{429} & 0 \\ \frac{5}{2574} & \frac{-5}{2574} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{600}{1001} & \frac{123}{2002} & \frac{25}{9009} \\ \frac{123}{2002} & \frac{73}{9009} & \frac{37}{90090} \\ \frac{25}{9009} & \frac{37}{90090} & \frac{1}{45045} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{97}{3003} & \frac{47}{6006} & \frac{-5}{6006} \\ \frac{-47}{6006} & \frac{7}{2574} & \frac{360360}{360360} \\ \frac{5}{6006} & \frac{73}{360360} & \frac{-1}{72072} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0'} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0'''} \end{bmatrix} = \tilde{D}_{11} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{D}_{31} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \tilde{D}_{41} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

e, para $r=0$, resulta:

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0} = \begin{bmatrix} \frac{1400}{29} & \frac{-1400}{29} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{271}{429} & \frac{23}{429} & \frac{5}{2574} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{271}{429} & \frac{-23}{429} & \frac{5}{2574} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0')^2}{\partial y_0} = \tilde{E}_{11} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{E}_{31} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \tilde{E}_{41} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Considerando ainda o ponto inicial da *spline*, a derivada parcial da integral de 0 a T do quadrado da segunda derivada resulta em

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0'')^2}{\partial y_0} = \frac{560}{11} y_{i-1} - \frac{560}{11} y_i + \frac{280}{11} y_{i-1}' + \frac{80}{33} y_{i-1}'' + \frac{1}{11} y_{i-1}''' + \frac{280}{11} y_i' - \frac{80}{33} y_i'' + \frac{1}{11} y_i''' \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0'')^2}{\partial y_0'} = \frac{280}{11} y_{i-1} - \frac{280}{11} y_i + \frac{1200}{77} y_{i-1}' + \frac{379}{231} y_{i-1}'' + \frac{16}{231} y_{i-1}''' + \frac{760}{77} y_i' - \frac{181}{231} y_i'' + \frac{5}{231} y_i''' \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0'')^2}{\partial y_0''} = \frac{80}{33}y_{i-1}' - \frac{80}{33}y_i' + \frac{379}{231}y_{i-1}'' + \frac{100}{231}y_{i-1}''' + \frac{2}{99}y_{i-1}'''' + \frac{181}{231}y_i' - \frac{1}{231}y_i'' - \frac{5}{1386}y_i''' \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'''} = \frac{1}{11}y_{i-1}' - \frac{1}{11}y_i' + \frac{16}{231}y_{i-1}'' + \frac{2}{99}y_{i-1}''' + \frac{4}{3465}y_{i-1}'''' + \frac{5}{231}y_i' + \frac{5}{1386}y_i'' - \frac{1}{2310}y_i''' \quad (4.36)$$

Escrevendo as equações (4.33) a (4.36) na forma matricial, para $r=1, 2$ e 3 , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_0'')^2}{\partial y_0''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0'''')^2}{\partial y_0''''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-280}{11} & \frac{-280}{11} & 0 \\ \frac{80}{33} & \frac{-80}{33} & 0 \\ \frac{1}{11} & \frac{-1}{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_i' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1200}{77} & \frac{379}{231} & \frac{16}{231} \\ \frac{379}{231} & \frac{100}{231} & \frac{2}{99} \\ \frac{16}{231} & \frac{2}{99} & \frac{4}{3465} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \\ y_{i-1}'''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{760}{77} & \frac{-181}{231} & \frac{5}{231} \\ \frac{181}{231} & \frac{-1}{231} & \frac{-5}{1386} \\ \frac{5}{231} & \frac{5}{1386} & \frac{-1}{2310} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_0'')^2}{\partial y_0''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0'''')^2}{\partial y_0''''} \end{bmatrix} = \tilde{D}_{12} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_i' \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{D}_{32} \begin{bmatrix} y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \\ y_{i-1}'''' \end{bmatrix} + \tilde{D}_{42} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

e, com $r=0$:

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0'')^2}{\partial y_0''} = \begin{bmatrix} \frac{560}{11} & \frac{-560}{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_i' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{280}{11} & \frac{80}{33} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \\ y_{i-1}'''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{280}{11} & \frac{-80}{33} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'''} = \tilde{E}_{12} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_i' \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{E}_{32} \begin{bmatrix} y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \\ y_{i-1}'''' \end{bmatrix} + \tilde{E}_{42} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Para o ponto inicial da *spline* tem-se, por fim, que a derivada parcial da integral de 0 a T do quadrado da terceira derivada resulta em

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0} = 2240y_{i-1} - 2240y_i + 1120y'_{i-1} + 200y''_{i-1} + \frac{20}{30}y'''_{i-1} + 1120y'_i - 200y''_i + \frac{20}{30}y'''_i \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'} = 1120y_{i-1} - 1120y_i + \frac{4160}{7}y'_{i-1} + \frac{820}{7}y''_{i-1} + \frac{88}{21}y'''_{i-1} + \frac{3680}{7}y'_i - \frac{580}{7}y''_i + \frac{52}{21}y'''_i \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0''} = 200y_{i-1} - 200y_i + \frac{820}{7}y'_{i-1} + \frac{200}{7}y''_{i-1} + \frac{23}{21}y'''_{i-1} + \frac{580}{7}y'_i - \frac{80}{7}y''_i + \frac{52}{21}y'''_i \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'''} = \frac{20}{3}y_{i-1} - \frac{20}{3}y_i + \frac{88}{21}y'_{i-1} + \frac{23}{21}y''_{i-1} + \frac{8}{63}y'''_{i-1} + \frac{52}{21}y'_i - \frac{5}{21}y''_i - \frac{1}{63}y'''_i \quad (4.44)$$

Reescrevendo as equações de (4.41) a (4.44) no formato matricial, com $r=1, 2$ e 3 , tem-se que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1120 & -1120 & 0 \\ 200 & -200 & 0 \\ \frac{20}{3} & -\frac{20}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4160}{7} & \frac{820}{7} & \frac{88}{21} \\ \frac{820}{7} & \frac{200}{7} & \frac{23}{21} \\ \frac{88}{21} & \frac{23}{21} & \frac{8}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3680}{7} & -\frac{580}{7} & \frac{52}{21} \\ \frac{580}{7} & -\frac{80}{7} & \frac{5}{21} \\ \frac{52}{21} & -\frac{5}{21} & -\frac{1}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0'''} \end{bmatrix} = \tilde{D}_{13} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{D}_{33} \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} + \tilde{D}_{43} \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

e, finalmente, para $r=0$:

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0} = [2240 \quad -2240 \quad 0] \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} + [1120 \quad 200 \quad \frac{20}{3}] \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + [1120 \quad -200 \quad \frac{20}{3}] \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_0''')^2}{\partial y_0} = \tilde{E}_{13} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{E}_{33} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \tilde{E}_{43} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

4.2.2 Cálculo das Derivadas Parciais para os Nós Intermediários da Trajetória

Da Equação (4.13), tem-se:

$$\frac{\partial (J_i + J_{i+1})}{\partial y_i^{(r)}} = 0, \quad (r=0, 1, 2 \text{ e } 3) \quad (4.49)$$

A manipulação simbólica da derivada parcial da soma das integrais de 0 a T do quadrado das primeiras derivadas da Equação (4.49) resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\int_0^T (y_i')^2 + \int_0^T (y_{i+1}')^2]}{\partial y_i} &= -\frac{1400}{429} y_{i-1} + \frac{2800}{429} y_i - \frac{1400}{429} y_{i+1} - \frac{271}{429} y_{i-1}' - \frac{23}{429} y_{i-1}'' - \frac{5}{2574} y_{i-1}''' \\ &+ \frac{46}{429} y_i'' + \frac{271}{429} y_{i+1}' - \frac{23}{429} y_{i+1}'' + \frac{5}{2574} y_{i+1}''' \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\int_0^T (y_i')^2 + \int_0^T (y_{i+1}')^2]}{\partial y_i'} &= \frac{271}{429} y_{i-1} - \frac{271}{429} y_{i+1} + \frac{97}{3003} y_{i-1}' - \frac{47}{6006} y_{i-1}'' - \frac{5}{6006} y_{i-1}''' + \frac{1200}{1001} y_i' \\ &+ \frac{50}{9009} y_i''' + \frac{97}{3003} y_{i+1}' + \frac{47}{6006} y_{i+1}'' - \frac{5}{6006} y_{i+1}''' \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\int_0^T (y_i'')^2 + \int_0^T (y_{i+1}'')^2]}{\partial y_i''} &= -\frac{23}{429} y_{i-1} + \frac{46}{429} y_i - \frac{23}{429} y_{i+1} + \frac{47}{6006} y_{i-1}' + \frac{7}{2574} y_{i-1}'' + \frac{73}{360360} y_{i-1}''' \\ &+ \frac{146}{9009} y_i'' - \frac{47}{6006} y_{i+1}' + \frac{7}{2574} y_{i+1}'' - \frac{73}{360360} y_{i+1}''' \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i'''} &= \frac{5}{2574} y_{i-1} - \frac{5}{2574} y_{i+1} - \frac{5}{6006} y'_{i-1} - \frac{73}{360360} y''_{i-1} - \frac{1}{72072} y'''_{i-1} \\ &+ \frac{50}{9009} y'_i + \frac{2}{45045} y_i - \frac{5}{6006} y'_{i+1} + \frac{73}{360360} y''_{i+1} - \frac{1}{72072} y'''_{i+1} \end{aligned} \quad (4.53)$$

As equações de (4.50) a (4.53), para $r=1, 2$ e 3 , podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i'} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i''} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i'''} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{271}{429} & 0 & -\frac{271}{429} \\ -\frac{23}{429} & \frac{46}{429} & -\frac{23}{429} \\ \frac{5}{2574} & 0 & -\frac{5}{2574} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{97}{6006} & -\frac{47}{6006} & -\frac{5}{6006} \\ \frac{3003}{6006} & \frac{7}{2574} & \frac{73}{360360} \\ -\frac{5}{6006} & -\frac{73}{360360} & -\frac{1}{72072} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1200}{1001} & 0 & \frac{500}{9009} \\ 0 & \frac{146}{9009} & 0 \\ \frac{50}{9009} & 0 & \frac{2}{45045} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{97}{6006} & \frac{47}{6006} & -\frac{5}{6006} \\ -\frac{47}{6006} & \frac{7}{2574} & -\frac{73}{360360} \\ -\frac{5}{6006} & \frac{73}{360360} & -\frac{1}{72072} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{i+1} \\ y''_{i+1} \\ y'''_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i'} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i''} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i'''} \end{bmatrix} = D_{11} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + D_{21} \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} + D_{31} \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} + D_{41} \begin{bmatrix} y'_{i+1} \\ y''_{i+1} \\ y'''_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

e, no caso de $r=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i} &= \begin{bmatrix} -\frac{1400}{429} & \frac{2800}{429} & -\frac{1400}{429} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{271}{429} & -\frac{23}{429} & -\frac{5}{2574} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{46}{429} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{271}{429} & -\frac{23}{429} & \frac{5}{2574} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{i+1} \\ y''_{i+1} \\ y'''_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i} = E_{11} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + E_{21} \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} + E_{31} \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} + E_{41} \begin{bmatrix} y'_{i+1} \\ y''_{i+1} \\ y'''_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Ainda, para um nó intermediário qualquer da *spline*, resolvendo a derivada parcial da soma das integrais de 0 a T do quadrado das segundas derivadas, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\int_0^T (y''_i)^2 + \int_0^T (y''_{i+1})^2 \right]}{\partial y_i} = & -\frac{560}{11}y_{i-1} + \frac{1120}{11}y_i - \frac{560}{11}y_{i+1} - \frac{280}{11}y'_{i-1} - \frac{80}{33}y''_{i-1} - \frac{1}{11}y'''_{i-1} + \frac{160}{33}y''_i \\ & + \frac{280}{11}y'_{i+1} - \frac{80}{33}y''_{i+1} + \frac{1}{11}y'''_{i+1} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\int_0^T (y'_i)^2 + \int_0^T (y'_{i+1})^2 \right]}{\partial y'_i} = & \frac{280}{11}y_{i-1} - \frac{280}{11}y_{i+1} + \frac{760}{77}y'_{i-1} + \frac{181}{231}y''_{i-1} + \frac{5}{231}y'''_{i-1} + \frac{2400}{77}y'_i \\ & + \frac{32}{230}y'''_i + \frac{760}{77}y'_{i+1} - \frac{181}{231}y''_{i+1} + \frac{5}{231}y'''_{i+1} \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\int_0^T (y''_i)^2 + \int_0^T (y''_{i+1})^2 \right]}{\partial y''_i} = & -\frac{80}{33}y_{i-1} + \frac{160}{33}y_i - \frac{80}{33}y_{i+1} - \frac{181}{231}y'_{i-1} - \frac{1}{231}y''_{i-1} + \frac{5}{1386}y'''_{i-1} + \frac{200}{231}y''_i \\ & + \frac{181}{231}y'_{i+1} - \frac{1}{231}y''_{i+1} - \frac{5}{1386}y'''_{i+1} \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\int_0^T (y'''_i)^2 + \int_0^T (y'''_{i+1})^2 \right]}{\partial y'''_i} = & \frac{1}{11}y_{i-1} - \frac{1}{11}y_{i+1} + \frac{5}{231}y'_{i-1} - \frac{5}{1386}y''_{i-1} - \frac{1}{2310}y'''_{i-1} + \frac{32}{231}y'_i + \frac{8}{3465}y''_i \\ & + \frac{5}{231}y'_{i+1} + \frac{5}{1386}y''_{i+1} - \frac{1}{2310}y'''_{i+1} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Assim, para $r=1, 2$ e 3 , pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i'')^2 + \int_0^T (y_{i+1}'')^2 \right]}{\partial y_i'} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i'')^2 + \int_0^T (y_{i+1}'')^2 \right]}{\partial y_i''} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i'')^2 + \int_0^T (y_{i+1}'')^2 \right]}{\partial y_i'''} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{280}{11} & 0 & \frac{-280}{11} \\ -80 & \frac{160}{33} & \frac{-80}{33} \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{-1}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{760}{77} & \frac{181}{231} & \frac{5}{231} \\ -181 & \frac{-1}{231} & \frac{5}{1386} \\ \frac{5}{231} & \frac{-5}{1386} & \frac{-1}{2310} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{2400}{77} & 0 & \frac{32}{231} \\ 0 & \frac{200}{231} & 0 \\ \frac{32}{231} & 0 & \frac{8}{3465} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{760}{77} & \frac{-181}{231} & \frac{5}{231} \\ \frac{181}{231} & \frac{-1}{231} & \frac{-5}{1386} \\ \frac{5}{231} & \frac{5}{1386} & \frac{-1}{2310} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i+1}' \\ y_{i+1}'' \\ y_{i+1}''' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i'')^2 + \int_0^T (y_{i+1}'')^2 \right]}{\partial y_i'} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i'')^2 + \int_0^T (y_{i+1}'')^2 \right]}{\partial y_i''} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i'')^2 + \int_0^T (y_{i+1}'')^2 \right]}{\partial y_i'''} \end{bmatrix} &= D_{12} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + D_{22} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + D_{32} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} + D_{42} \begin{bmatrix} y_{i+1}' \\ y_{i+1}'' \\ y_{i+1}''' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.63)$$

e, para $r=0$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i'')^2 + \int_0^T (y_{i+1}'')^2 \right]}{\partial y_i'} &= \begin{bmatrix} -560 & 1120 & -560 \\ 11 & 11 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -280 & -80 & -1 \\ 11 & 33 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{160}{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 280 & -80 & 1 \\ 11 & 33 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i+1}' \\ y_{i+1}'' \\ y_{i+1}''' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial \left[\int_0^T (y_i'')^2 + \int_0^T (y_{i+1}'')^2 \right]}{\partial y_i''} = E_{12} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + E_{22} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + E_{32} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} + E_{42} \begin{bmatrix} y_{i+1}' \\ y_{i+1}'' \\ y_{i+1}''' \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Finalmente, resolvendo a derivada parcial da soma das integrais de 0 a T do quadrado das terceiras derivadas tem-se

$$\frac{\partial \left[\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}''')^2 \right]}{\partial y_i} = -2240y_{i-1} + 4480y_i - 2240y_{i+1} - 1120y_{i-1}' - 200y_{i-1}'' - \frac{20}{3}y_{i-1}''' + 400y_i'' + 1120y_{i+1}' - 200y_{i+1}'' + \frac{20}{3}y_{i+1}''' \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial \left[\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}''')^2 \right]}{\partial y_i'} = 1120y_{i-1} - 1120y_{i+1} + \frac{3670}{7}y_{i-1}' + \frac{580}{7}y_{i-1}'' + \frac{52}{21}y_{i-1}''' + \frac{8320}{7}y_i' + \frac{176}{21}y_i'' + \frac{3680}{7}y_{i+1}' - \frac{580}{7}y_{i+1}'' + \frac{52}{21}y_{i+1}''' \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial \left[\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}''')^2 \right]}{\partial y_i''} = -200y_{i-1} + 400y_i - 200y_{i+1} - \frac{580}{7}y_{i-1}' - \frac{80}{7}y_{i-1}'' - \frac{5}{21}y_{i-1}''' + \frac{400}{7}y_i'' + \frac{580}{7}y_{i+1}' - \frac{80}{7}y_{i+1}'' + \frac{5}{21}y_{i+1}''' \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial \left[\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}''')^2 \right]}{\partial y_i'''} = \frac{20}{3}y_{i-1} - \frac{20}{3}y_{i+1} + \frac{52}{21}y_{i-1}' + \frac{5}{21}y_{i-1}'' - \frac{1}{63}y_{i-1}''' + \frac{176}{21}y_i' + \frac{16}{63}y_i'' + \frac{52}{21}y_{i+1}' - \frac{5}{21}y_{i+1}'' - \frac{1}{63}y_{i+1}''' \quad (4.69)$$

Assim, para $r = 1, 2$ e 3 , as equações de (4.66) a (4.69) resultam em:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}''')^2 \right]}{\partial y_i'} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}''')^2 \right]}{\partial y_i''} \\ \frac{\partial \left[\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}''')^2 \right]}{\partial y_i'''} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1120 & 0 & -1120 \\ -200 & 400 & -200 \\ \frac{20}{3} & 0 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3680}{7} & \frac{580}{7} & \frac{52}{21} \\ -\frac{580}{7} & -\frac{80}{7} & -\frac{5}{21} \\ \frac{52}{21} & \frac{5}{21} & -\frac{1}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{8320}{7} & 0 & \frac{176}{21} \\ 0 & \frac{400}{7} & 0 \\ \frac{176}{21} & 0 & \frac{16}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3680}{7} & -\frac{580}{7} & \frac{52}{21} \\ \frac{580}{7} & -\frac{80}{7} & \frac{5}{21} \\ \frac{52}{21} & -\frac{5}{21} & -\frac{1}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i+1}' \\ y_{i+1}'' \\ y_{i+1}''' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial [\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}')^2]}{\partial y_i'} \\ \frac{\partial [\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}')^2]}{\partial y_i''} \\ \frac{\partial [\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}')^2]}{\partial y_i'''} \end{bmatrix} = D_{13} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_i' \\ y_{i+1}' \end{bmatrix} + D_{23} \begin{bmatrix} y_{i-1}'' \\ y_i'' \\ y_{i+1}'' \end{bmatrix} + D_{33} \begin{bmatrix} y_{i-1}''' \\ y_i''' \\ y_{i+1}''' \end{bmatrix} + D_{43} \begin{bmatrix} y_{i+1}' \\ y_{i+1}'' \\ y_{i+1}''' \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

e, considerando $r=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}')^2]}{\partial y_i} &= [-2240 \quad 4480 \quad -2240] \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_i' \\ y_{i+1}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1120 & -200 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}'' \\ y_i'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} \\ &+ [0 \quad 400 \quad 0] \begin{bmatrix} y_i'' \\ y_i''' \\ y_i'''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1120 & -200 & \frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i+1}' \\ y_{i+1}'' \\ y_{i+1}''' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial [\int_0^T (y_i''')^2 + \int_0^T (y_{i+1}')^2]}{\partial y_i} = E_{13} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_i' \\ y_{i+1}' \end{bmatrix} + E_{23} \begin{bmatrix} y_{i-1}'' \\ y_i'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + E_{33} \begin{bmatrix} y_{i-1}''' \\ y_i''' \\ y_i'''' \end{bmatrix} + E_{43} \begin{bmatrix} y_{i+1}' \\ y_{i+1}'' \\ y_{i+1}''' \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

4.2.3 Cálculo das Derivadas Parciais para o Nó Final da Trajetória

Para o nó final de uma *spline*, a partir da Equação (4.14), resolvendo a parcela expressa em (4.74) obtém-se:

$$\frac{\partial J_N}{\partial y_N^{(r)}} = 0, \quad (r=0, 1, 2 \text{ e } 3) \quad (4.74)$$

Verifica-se através de manipulação simbólica que a derivada parcial da integral de 0 a T do quadrado da primeira derivada tem como resultado:

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N')^2}{\partial y_N} = -\frac{1400}{429} y_{i-1}' + \frac{1400}{429} y_i' - \frac{271}{429} y_{i-1}'' - \frac{23}{429} y_{i-1}''' - \frac{5}{2574} y_{i-1}'''' - \frac{271}{429} y_i'' + \frac{23}{429} y_i''' + \frac{5}{2574} y_i'''' \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y'_N)^2}{\partial y'_N} = \frac{271}{429}y_{i-1} - \frac{271}{429}y_i + \frac{97}{3003}y'_{i-1} - \frac{47}{6006}y''_{i-1} - \frac{5}{6006}y'''_{i-1} + \frac{600}{1001}y'_i - \frac{123}{2002}y''_i + \frac{25}{9009}y'''_i \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y''_N)^2}{\partial y''_N} = -\frac{23}{429}y_{i-1} + \frac{23}{429}y_i + \frac{47}{6006}y'_{i-1} + \frac{7}{2574}y''_{i-1} + \frac{73}{360360}y'''_{i-1} - \frac{123}{2002}y'_i + \frac{73}{9009}y''_i - \frac{37}{90090}y'''_i \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y'''_N)^2}{\partial y'''_N} = \frac{5}{2574}y_{i-1} - \frac{5}{2574}y_i - \frac{5}{6006}y'_{i-1} - \frac{7}{360360}y''_{i-1} - \frac{1}{72072}y'''_{i-1} + \frac{25}{9009}y'_i - \frac{37}{90090}y''_i + \frac{1}{45045}y'''_i \quad (4.78)$$

Portanto, reescrevendo as equações de (4.75) a (4.78) na forma matricial, com $r=1, 2$ e 3 tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y'_N)^2}{\partial y'_N} \\ \frac{\partial \int_0^T (y''_N)^2}{\partial y''_N} \\ \frac{\partial \int_0^T (y'''_N)^2}{\partial y'''_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{271}{429} & -\frac{271}{429} \\ 0 & -\frac{23}{429} & \frac{23}{429} \\ 0 & \frac{5}{2574} & -\frac{5}{2574} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{97}{3003} & -\frac{47}{6006} & -\frac{5}{6006} \\ \frac{47}{6006} & \frac{7}{2574} & \frac{73}{360360} \\ -\frac{5}{6006} & -\frac{73}{360360} & -\frac{1}{72072} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{600}{1001} & -\frac{123}{2002} & \frac{25}{9009} \\ -\frac{123}{2002} & \frac{73}{9009} & -\frac{37}{90090} \\ \frac{25}{9009} & -\frac{37}{90090} & \frac{1}{45045} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y'_N)^2}{\partial y'_N} \\ \frac{\partial \int_0^T (y''_N)^2}{\partial y''_N} \\ \frac{\partial \int_0^T (y'''_N)^2}{\partial y'''_N} \end{bmatrix} = \widetilde{D}_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \widetilde{D}_{21} \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} + \widetilde{D}_{31} \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

e, para $r=0$:

$$\frac{\partial \int_0^T (y'_N)^2}{\partial y'_N} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1400}{429} & \frac{1400}{429} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{271}{429} & -\frac{23}{429} & -\frac{5}{2574} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{271}{429} & \frac{23}{429} & -\frac{5}{2574} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N')^2}{\partial y_N} = \widetilde{E}_{1l} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \widetilde{E}_{2l} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \widetilde{E}_{3l} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Já, a derivada parcial da integral de 0 a T do quadrado da segunda derivada resulta nas equações (4.83) até (4.86):

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N} = -\frac{560}{11}y_{i-1} + \frac{560}{11}y_i - \frac{280}{11}y_{i-1}' - \frac{80}{33}y_{i-1}'' - \frac{1}{11}y_{i-1}''' - \frac{280}{11}y_i' + \frac{80}{33}y_i'' - \frac{1}{11}y_i''' \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N'} = \frac{280}{11}y_{i-1}' - \frac{280}{11}y_i' + \frac{760}{77}y_{i-1}'' + \frac{181}{231}y_{i-1}'' + \frac{5}{231}y_{i-1}''' + \frac{1200}{77}y_i'' - \frac{379}{231}y_i'' + \frac{16}{231}y_i''' \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N''} = -\frac{80}{33}y_{i-1}'' + \frac{80}{33}y_i'' - \frac{181}{231}y_{i-1}''' - \frac{1}{231}y_{i-1}''' + \frac{5}{1386}y_{i-1}''' - \frac{379}{231}y_i''' + \frac{100}{231}y_i''' - \frac{2}{99}y_i''' \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N'''} = \frac{1}{11}y_{i-1}''' - \frac{1}{11}y_i''' + \frac{5}{231}y_{i-1}'' - \frac{5}{1386}y_{i-1}'' - \frac{1}{2310}y_{i-1}'' + \frac{16}{231}y_i'' - \frac{2}{99}y_i'' + \frac{4}{3465}y_i'' \quad (4.86)$$

as quais, representadas no formato matricial quando $r=1, 2$ e 3 , resultam em:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N'} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{280}{11} & \frac{-280}{11} \\ \frac{-80}{33} & \frac{80}{33} \\ \frac{1}{11} & \frac{-1}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{760}{77} & \frac{181}{231} & \frac{5}{231} \\ \frac{-181}{231} & \frac{-1}{231} & \frac{5}{1386} \\ \frac{5}{231} & \frac{-5}{1386} & \frac{-1}{2310} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1200}{77} & \frac{-379}{231} & \frac{16}{231} \\ \frac{-379}{231} & \frac{100}{231} & \frac{-2}{99} \\ \frac{16}{231} & \frac{-2}{99} & \frac{4}{3465} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N'} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N'''} \end{bmatrix} = \widetilde{D}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \widetilde{D}_{22} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \widetilde{D}_{32} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

e, no caso de $r=0$:

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N} = \begin{bmatrix} 0 & -560 & 560 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -280 & -80 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -280 & 80 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N'')^2}{\partial y_N} = \widetilde{E}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \widetilde{E}_{22} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \widetilde{E}_{32} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Considerando ainda o ponto final de uma *spline*, a derivada parcial da integral de 0 a T do quadrado da terceira derivada pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N} = -2240y_{i-1} + 2240y_i - 1120y_{i-1}' - 200y_{i-1}'' - \frac{20}{30}y_{i-1}''' - 1120y_i' + 200y_i'' - \frac{20}{30}y_i''' \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N'} = 1120y_{i-1} - 1120y_i + \frac{3680}{7}y_{i-1}' + \frac{580}{7}y_{i-1}'' + \frac{52}{21}y_{i-1}''' + \frac{4160}{7}y_i' - \frac{820}{7}y_i'' + \frac{88}{21}y_i''' \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N''} = -200y_{i-1} + 200y_i - \frac{580}{7}y_{i-1}' - \frac{80}{7}y_{i-1}'' - \frac{5}{21}y_{i-1}''' - \frac{820}{7}y_i' + \frac{200}{7}y_i'' - \frac{23}{21}y_i''' \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N'''} = \frac{20}{3}y_{i-1}' - \frac{20}{3}y_i' + \frac{52}{21}y_{i-1}'' + \frac{5}{21}y_{i-1}''' - \frac{1}{63}y_{i-1}'''' + \frac{88}{21}y_i' - \frac{23}{21}y_i'' + \frac{8}{63}y_i''' \quad (4.94)$$

Quando $r=1, 2$ e 3 , pode-se representar as equações de (4.91) a (4.94) como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N'} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1120 & -1120 \\ 0 & -200 & 200 \\ 0 & \frac{20}{3} & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3680}{7} & \frac{580}{7} & \frac{52}{21} \\ -\frac{580}{7} & -\frac{80}{7} & -\frac{5}{21} \\ \frac{52}{21} & \frac{5}{21} & -\frac{1}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4160}{7} & -\frac{820}{7} & \frac{88}{21} \\ -\frac{820}{7} & \frac{200}{7} & -\frac{23}{21} \\ \frac{88}{21} & -\frac{23}{21} & \frac{8}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N'} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N''} \\ \frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N'''} \end{bmatrix} = \widetilde{D}_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \widetilde{D}_{23} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \widetilde{D}_{33} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

e, no caso de $r=0$, como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N} &= \begin{bmatrix} 0 & -2240 & 2240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1120 & -200 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -1120 & 200 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial \int_0^T (y_N''')^2}{\partial y_N} = \widetilde{E}_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} + \widetilde{E}_{23} \begin{bmatrix} y_{i-1}' \\ y_{i-1}'' \\ y_{i-1}''' \end{bmatrix} + \widetilde{E}_{33} \begin{bmatrix} y_i' \\ y_i'' \\ y_i''' \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

4.2.4 Solução do Conjunto de Equações de Otimização

Para uma *spline* de oitava ordem, combinando as $3(N+1)$ equações resultantes de (4.29), (4.37), (4.45), (4.54), (4.62), (4.70), (4.79), (4.87) e (4.95), para $r=1, 2$ e 3 , se obtém a equação matricial

$$DY^{(r)} + CY = 0 \quad (4.99)$$

onde $Y^{(r)}$, Y , C e D são definidos a seguir.

O vetor onde $Y^{(r)}$ apresenta dimensão $3(N+1) \times 1$ e pode ser representado através de

$$Y^{(r)} = [Y_0^{(r)T} \quad \dots \quad Y_N^{(r)T}]^T = [y_0' \quad y_0'' \quad y_0''' \quad \dots \quad y_N' \quad y_N'' \quad y_N''']^T \quad (4.100)$$

enquanto que, Y é um vetor de dimensão $(N+1) \times 1$ expresso por:

$$Y = [y_0 \quad \dots \quad y_N]^T \quad (4.101)$$

A matriz D possui dimensão $3(N+1) \times 3(N+1)$ e três diagonais centrais composta por blocos de dimensão 3×3 . Os $(N+1)$ blocos da diagonal principal são dados por:

$$\tilde{D}_3, D_3, \dots, D_3, \tilde{D}_3 \quad (4.102)$$

sendo as matrizes de (4.102) expressas por:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_3 &= \frac{\alpha_1}{h} \tilde{D}_{31} + \frac{\alpha_2}{h^3} \tilde{D}_{32} + \frac{\alpha_3}{h^5} \tilde{D}_{33} \\ \tilde{D}_3 &= \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} \frac{600}{1001} & \frac{123}{2002} & \frac{25}{9009} \\ \frac{123}{2002} & \frac{73}{9009} & \frac{37}{90090} \\ \frac{25}{9009} & \frac{37}{90090} & \frac{1}{45045} \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} \frac{1200}{77} & \frac{379}{231} & \frac{16}{231} \\ \frac{379}{231} & \frac{100}{231} & \frac{2}{99} \\ \frac{16}{231} & \frac{2}{99} & \frac{4}{3465} \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} \frac{4160}{7} & \frac{820}{7} & \frac{88}{21} \\ \frac{820}{7} & \frac{200}{7} & \frac{23}{21} \\ \frac{88}{21} & \frac{23}{21} & \frac{8}{63} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \frac{\alpha_1}{h} D_{31} + \frac{\alpha_2}{h^3} D_{32} + \frac{\alpha_3}{h^5} D_{33} \\ D_3 &= \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} \frac{1200}{1001} & 0 & \frac{500}{9009} \\ 0 & \frac{146}{9009} & 0 \\ \frac{50}{9009} & 0 & \frac{2}{45045} \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} \frac{2400}{77} & 0 & \frac{32}{231} \\ 0 & \frac{200}{231} & 0 \\ \frac{32}{231} & 0 & \frac{8}{3465} \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} \frac{8320}{7} & 0 & \frac{176}{21} \\ 0 & \frac{400}{7} & 0 \\ \frac{176}{21} & 0 & \frac{16}{63} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\widetilde{D}_3 = \frac{\alpha_1}{h} \widetilde{D}_{31} + \frac{\alpha_2}{h^3} \widetilde{D}_{32} + \frac{\alpha_3}{h^5} \widetilde{D}_{33}$$

$$\widetilde{D}_3 = \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} 600 & -123 & 25 \\ 1001 & 2002 & 9009 \\ -123 & 73 & -37 \\ 2002 & 9009 & 90090 \\ 25 & -37 & 1 \\ 9009 & 90090 & 45045 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} 1200 & -379 & 16 \\ 77 & 231 & 231 \\ -379 & 100 & -2 \\ 231 & 231 & 99 \\ 16 & -2 & 4 \\ 231 & 99 & 3465 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} 4160 & -820 & 88 \\ 7 & 7 & 21 \\ -820 & 200 & -23 \\ 7 & 7 & 21 \\ 88 & -23 & 8 \\ 21 & 21 & 63 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

A diagonal superior de D é dada por $(N-1)$ blocos D_4 , sendo

$$D_4 = \frac{\alpha_1}{h} \widetilde{D}_{41} + \frac{\alpha_2}{h^3} \widetilde{D}_{42} + \frac{\alpha_3}{h^5} \widetilde{D}_{43} = \frac{\alpha_1}{h} D_{41} + \frac{\alpha_2}{h^3} D_{42} + \frac{\alpha_3}{h^5} D_{43}$$

$$D_4 = \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} 97 & 47 & -5 \\ 3003 & 6006 & 6006 \\ -47 & 7 & -73 \\ 6006 & 2574 & 360360 \\ -5 & 73 & -1 \\ 6006 & 360360 & 72072 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} 760 & -181 & 5 \\ 77 & 231 & 231 \\ 181 & -1 & -5 \\ 231 & 231 & 1386 \\ 5 & 5 & -1 \\ 231 & 1386 & 2310 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} 3680 & -580 & 52 \\ 7 & 7 & 21 \\ 580 & -80 & 5 \\ 7 & 7 & 21 \\ 52 & -5 & -1 \\ 21 & 21 & 63 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Os $(N-1)$ blocos da diagonal inferior D_2 são dados por

$$D_2 = \frac{\alpha_1}{h} D_{21} + \frac{\alpha_2}{h^3} D_{22} + \frac{\alpha_3}{h^5} D_{23} = \frac{\alpha_1}{h} \widetilde{D}_{21} + \frac{\alpha_2}{h^3} \widetilde{D}_{22} + \frac{\alpha_3}{h^5} \widetilde{D}_{23}$$

$$D_2 = \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} 97 & -47 & -5 \\ 3003 & 6006 & 6006 \\ 47 & 7 & 73 \\ 6006 & 2574 & 360360 \\ -5 & -73 & -1 \\ 6006 & 360360 & 72072 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} 760 & 181 & 5 \\ 77 & 231 & 231 \\ -181 & -1 & 5 \\ 231 & 231 & 1386 \\ 5 & -5 & -1 \\ 231 & 1386 & 2310 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} 3680 & 580 & 52 \\ 7 & 7 & 21 \\ -580 & -80 & -5 \\ 7 & 7 & 21 \\ 52 & 5 & -1 \\ 21 & 21 & 63 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Finalmente, a matriz C possui dimensão $3(N+1) \times (N+1)$ e é similar a uma matriz diagonal

$$C = \text{diag}(C_1, \dots, C_{N+1}) \quad (4.108)$$

Para a constituição da matriz C , considera-se que cada elemento C_i é uma matriz 3×3 . O elemento superior esquerdo de C_i deve ser alocado na primeira linha e na primeira coluna de C . O elemento superior esquerdo dos termos C_i devem ser alocados na linha $(3i-2)$ e na coluna $(i-1)$ para $(i=2, \dots, N)$. Por fim, o elemento superior esquerdo de C_{N+1} deve estar colocado na linha $(3N+1)$ e na coluna $(N-1)$. Os elementos da matriz C são calculados como sendo:

$$C_1 = \frac{\alpha_1}{h} \tilde{D}_{11} + \frac{\alpha_2}{h^3} \tilde{D}_{12} + \frac{\alpha_3}{h^5} \tilde{D}_{13}$$

$$C_1 = \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} \frac{271}{429} & \frac{-271}{429} & 0 \\ \frac{23}{429} & \frac{-23}{429} & 0 \\ \frac{5}{2574} & \frac{-5}{2574} & 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} \frac{280}{11} & \frac{-280}{11} & 0 \\ \frac{80}{33} & \frac{-80}{33} & 0 \\ \frac{1}{11} & \frac{-1}{11} & 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} 1120 & -1120 & 0 \\ 200 & -200 & 0 \\ \frac{20}{3} & \frac{-20}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

$$C_i = \frac{\alpha_1}{h} D_{11} + \frac{\alpha_2}{h^3} D_{12} + \frac{\alpha_3}{h^5} D_{13}, \quad (i=2, \dots, N)$$

$$C_i = \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} \frac{271}{429} & 0 & \frac{-271}{429} \\ \frac{-23}{429} & \frac{46}{429} & \frac{-23}{429} \\ \frac{5}{2574} & 0 & \frac{-5}{2574} \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} \frac{280}{11} & 0 & \frac{-280}{11} \\ \frac{-80}{33} & \frac{160}{33} & \frac{-80}{33} \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{-1}{11} \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} 1120 & 0 & -1120 \\ -200 & 400 & -200 \\ \frac{20}{3} & 0 & \frac{-20}{3} \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

$$C_{N+1} = \frac{\alpha_1}{h} \tilde{D}_{11} + \frac{\alpha_2}{h^3} \tilde{D}_{12} + \frac{\alpha_3}{h^5} \tilde{D}_{13}$$

$$C_{N+1} = \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} 0 & \frac{271}{429} & \frac{-271}{429} \\ 0 & \frac{-23}{429} & \frac{23}{429} \\ 0 & \frac{5}{2574} & \frac{-5}{2574} \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} 0 & \frac{280}{11} & \frac{-280}{11} \\ 0 & \frac{-80}{33} & \frac{80}{33} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{-1}{11} \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} 0 & 1120 & -1120 \\ 0 & -200 & 200 \\ 0 & \frac{20}{3} & \frac{-20}{3} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Calculando (4.9) com $r=0$, se obtém, conforme já demonstrado, $(N+1)$ equações resultantes de (4.31), (4.39), (4.47), (4.56), (4.64), (4.72), (4.81), (4.89) e (4.97), as quais podem ser combinadas a fim de se obter a seguinte equação matricial

$$EY^{(r)} + LY + PY - PF = 0 \quad (4.112)$$

Onde F é um vetor com $(N+1)$ elementos, expresso por:

$$F = [f_0 \quad \dots \quad f_N]^T \quad (4.113)$$

sendo f_i os pontos originais especificados para a geração da trajetória.

As matrizes E , L e P são mostradas a seguir. A matriz E , de dimensão $(N+1) \times 3(N+1)$, apresenta formato de três diagonais centrais, sendo composta por blocos de dimensão $l \times 3$. A diagonal principal, formada por $(N+1)$ blocos, é dada por

$$\widetilde{E}_3, E_3, \dots, E_3, \widetilde{E}_3 \quad (4.114)$$

onde cada um dos blocos é calculado como

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_3 &= \frac{\alpha_1}{h} \widetilde{E}_{3_1} + \frac{\alpha_2}{h^3} \widetilde{E}_{3_2} + \frac{\alpha_3}{h^5} \widetilde{E}_{3_3} \\ \widetilde{E}_3 &= \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} 271 & 23 & 5 \\ 429 & 429 & 2574 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} 280 & 80 & 1 \\ 11 & 33 & 11 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} 1120 & 200 & 20 \\ 3 & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{\alpha_1}{h} E_{3_1} + \frac{\alpha_2}{h^3} E_{3_2} + \frac{\alpha_3}{h^5} E_{3_3} \\ E_3 &= \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 46 & 0 \\ 429 & & \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} 0 & 160 & 0 \\ 33 & & \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} 0 & 400 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_3 &= \frac{\alpha_1}{h} \widetilde{E}_{3_1} + \frac{\alpha_2}{h^3} \widetilde{E}_{3_2} + \frac{\alpha_3}{h^5} \widetilde{E}_{3_3} \\ \widetilde{E}_3 &= \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} -271 & 23 & -5 \\ 429 & 429 & 2574 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} -280 & 80 & -1 \\ 11 & 33 & 11 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} -1120 & 200 & -20 \\ 3 & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.117)$$

A diagonal superior de E é formada por $(N-1)$ blocos E_4 , tal que

$$\begin{aligned} E_4 &= \frac{\alpha_1}{h} \widetilde{E}_{4_1} + \frac{\alpha_2}{h^3} \widetilde{E}_{4_2} + \frac{\alpha_3}{h^5} \widetilde{E}_{4_3} = \frac{\alpha_1}{h} E_{4_1} + \frac{\alpha_2}{h^3} E_{4_2} + \frac{\alpha_3}{h^5} E_{4_3} \\ E_4 &= \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} 271 & -23 & 5 \\ 429 & 429 & 2574 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} 280 & -80 & 1 \\ 11 & 33 & 11 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} 1120 & -200 & 20 \\ 3 & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.118)$$

E, completando a matriz E , os blocos pertencentes à diagonal inferior são calculados através de:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\alpha_1}{h} E_{2_1} + \frac{\alpha_2}{h^3} E_{2_2} + \frac{\alpha_3}{h^5} E_{2_3} = \frac{\alpha_1}{h} \widetilde{E}_{2_1} + \frac{\alpha_2}{h^3} \widetilde{E}_{2_2} + \frac{\alpha_3}{h^5} \widetilde{E}_{2_3} \\ E_2 &= \frac{\alpha_1}{h} \begin{bmatrix} -271 & -23 & -5 \\ 429 & 429 & 2574 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2}{h^3} \begin{bmatrix} -280 & -80 & -1 \\ 11 & 33 & 11 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_3}{h^5} \begin{bmatrix} -1120 & -200 & -20 \\ 3 & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.119)$$

A matriz L , por sua vez, é uma matriz quadrada com três diagonais centrais que possui $(N+1)$ linhas e colunas. A diagonal principal de L é dada por

$$L_1, 2L_1, \dots, 2L_1, L_1 \quad (4.120)$$

sendo,

$$L_1 = \frac{\alpha_1}{h} \frac{1400}{429} + \frac{\alpha_2}{h^3} \frac{560}{11} + \frac{\alpha_3}{h^5} 2240 \quad (4.121)$$

As diagonais superior e inferior da matriz L são formadas cada uma por $(N-1)$ elementos iguais a $-L_1$.

E, finalmente, a matriz P (Equação (4.112)) é uma matriz diagonal de dimensão $(N+1) \times (N+1)$. Sua diagonal principal é da forma

$$2p_0, \dots, 2p_N \quad (4.122)$$

Combinando as equações (4.99) e (4.112) obtém-se

$$Y^{(r)} = -D^{-1} C(L+P-ED^{-1}C)^{-1} PF \quad (4.123)$$

Através da solução da Equação (4.123) são obtidos os valores ótimos de y_i, y_i', y_i'' e y_i''' ($i=0, \dots, N$) para a *spline*. Uma vez obtidos esses valores, os mesmos devem ser substituídos na Equação (4.23), obtendo-se, dessa forma, os coeficientes ótimos para a *spline* que descreve a trajetória ótima para o atuador em função da parametrização realizada pelo usuário.

4.3 Descrição do Processo de Geração de Trajetórias

A metodologia descrita aqui está aplicada ao robô pneumático de 5 GDL, porém como será visto ao longo de sua descrição, ela consiste de um conjunto de procedimentos genéricos que podem, com poucas modificações, ser aplicados a manipuladores com diferentes configurações.

Para a aplicação da metodologia é inicialmente necessária a introdução de cada um dos pontos-chave ou nós que compõem o caminho tridimensional a ser percorrido e, para tal, são necessárias as informações das coordenadas de cada ponto em relação aos eixos x, y e z além

da orientação do efetuador em cada um dos pontos, dada pelos valores de θ_4 e θ_5 , resultando, para cada nó, um vetor do tipo:

$$p_i = (x, y, z, \theta_4, \theta_5) \quad (4.124)$$

A rotina computacional implementada no Matlab® permite a geração da trajetória otimizada para cada atuador em função dos parâmetros de controle fornecidos pelo programador como, por exemplo, o intervalo de tempo dos segmentos entre dois nós subsequentes (h) e o ajuste da curva aos pontos-chave (p). Essa parametrização consiste no estágio inicial do processo de geração da trajetória, o qual é composto, ainda, por outras etapas que podem ser visualizadas na Figura 4.1.

A partir da informação dos pontos-chave para a trajetória, expressos da forma vista na Equação (4.124), ocorre a etapa de validação dos pontos, na qual é realizada uma verificação de consistência cinemática, visando garantir que os pontos informados estejam incluídos no espaço de trabalho do robô e que cada um deles possa ser atingido com a orientação especificada para o efetuador.

Após a etapa de validação dos pontos ocorre o cálculo da cinemática inversa (apresentada na Seção 3.4.2). Assim, são realizados os cálculos da cinemática inversa para cada ponto-chave, fazendo com que sejam determinadas as posições necessárias para cada junta a fim de atingir a posição e a orientação desejadas para o efetuador.

Em seguida, é realizada a transformação dos valores dos nós, passando-os do espaço das juntas para o espaço dos atuadores. Essa etapa é necessária, uma vez que tanto o controle como a interpolação dos pontos são realizados no espaço dos atuadores. Realizada essa transformação, tem-se, portanto, um conjunto de nós para cada um dos atuadores, os quais são interpolados através das *splines* de sétimo grau descritas na Seção 4.2.

Na Figura 4.1 está apresentado um diagrama com a descrição do sequenciamento das etapas necessárias para a geração de trajetórias segundo a metodologia proposta.

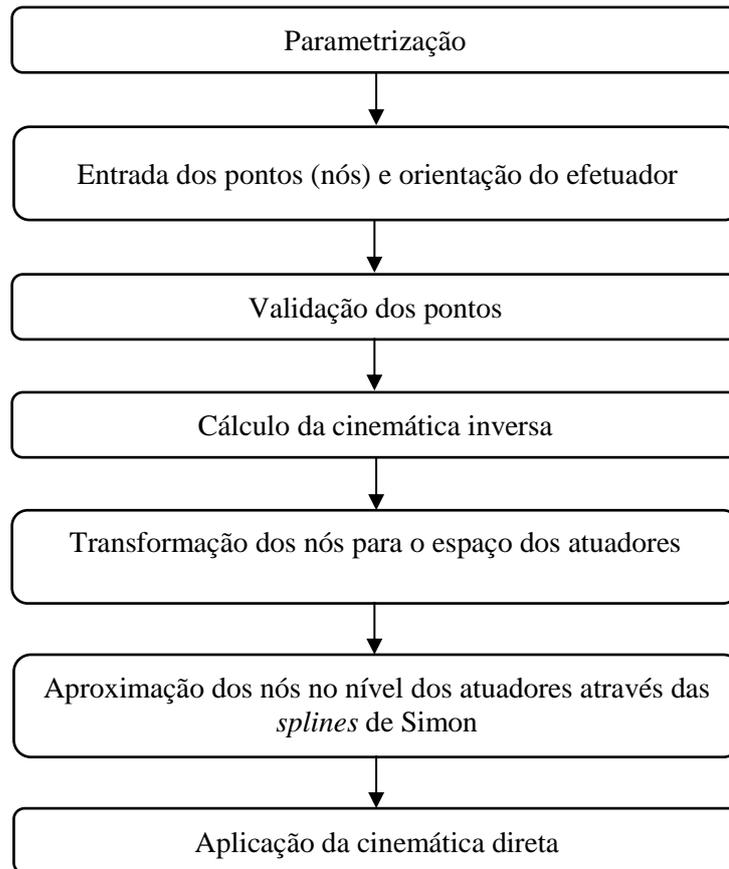


Figura 4.1 - Processo de geração de trajetória para o efetuador

Do processo de interpolação resultam, para cada um dos cinco atuadores, quatro vetores que relacionam, respectivamente, os valores de posição do atuador (distância ou ângulo), velocidade, aceleração e *jerk* com a variável de tempo. O intervalo de tempo no qual o efetuador do robô percorrerá o caminho completo para a trajetória desejada será expresso em função do valor do parâmetro h e do número de pontos-chave definidos pelo programador para o cálculo da trajetória, sendo o tempo total dado por Nh , onde N é o número de segmentos existentes entre os nós.

A etapa final do processo descrito na Figura 4.1 não é necessária para a realização do controle do manipulador, porém, apesar disso, é uma importante ferramenta para avaliar as trajetórias obtidas antes de submetê-las à execução pelo robô. Assim, de posse dos vetores que determinam a trajetória de cada atuador, é reproduzida a trajetória tridimensional que será realizada pelo efetuador. Para tanto, os valores dos atuadores são transpostos primeiramente para o espaço das juntas, e, então, é calculada a trajetória a ser executada pelo manipulador através da cinemática direta do robô [Rijo, 2013] reproduzida na Seção 3.4.1.

5 RESULTADOS

A fim de exemplificar o processo de geração de trajetórias e demonstrar os resultados obtidos com a metodologia desenvolvida, neste capítulo são apresentados dois estudos de caso em que o efetuador do robô deve percorrer um caminho formado a partir de um determinado número de pontos localizados em seu volume de trabalho. As curvas selecionadas são similares às utilizadas na Seção 3.4.3 para demonstração da aplicação dos modelos cinemáticos. Assim, é inicialmente utilizada uma trajetória formada a partir de pontos dispostos ao longo de uma linha reta e, em seguida, uma trajetória de maior complexidade, a qual deverá aproximar uma quantidade maior de pontos dispostos ao longo de uma curva tridimensional em formato helicoidal.

A obtenção de trajetórias através dos pontos-chave pode ser realizada de duas formas: a) gerando as *splines* para aproximar os pontos diretamente no espaço de trabalho, ou b) através da transposição dos pontos-chave para as posições dos atuadores e em seguida gerando as trajetórias através das *splines* no espaço dos atuadores. Em função da necessidade de garantia de continuidade e minimização do *jerk* proporcionada diretamente pelas *splines* de Simon, 2004, optou-se, no presente trabalho, pela geração das trajetórias no espaço dos atuadores. Com isso, tem-se a garantia de que cada atuador irá seguir uma trajetória contínua até sua terceira derivada e otimizada quanto ao *jerk*.

5.1 Trajetória Formada por Pontos Dispostos Linearmente

Para a elaboração deste estudo de caso, é considerada a necessidade de o efetuador do robô percorrer um caminho formado por sete pontos dispostos em uma linha reta no espaço de trabalho tridimensional.

As coordenadas dos pontos-chave utilizados para a criação da trajetória estão apresentados na Tabela 5.1, evidenciando-se que os pontos estão dispostos em uma linha paralela aos planos xy e xz .

A Figura 5.1 apresenta o gráfico no espaço referente a estes pontos dispostos em linha reta.

Tabela 5.1 – Coordenadas dos pontos e orientação do efetuador

Ponto	x (m)	y (m)	z (m)	θ_4 (rad)	θ_5 (rad)
p_0	0,5	0,45	0,25	0	0
p_1	1/3	0,45	0,25	$-\pi/12$	0
p_2	1/6	0,45	0,25	$-\pi/6$	0
p_3	0	0,45	0,25	$-\pi/4$	0
p_4	-1/6	0,45	0,25	$-\pi/6$	0
p_5	-1/3	0,45	0,25	$-\pi/12$	0
p_6	-0,5	0,45	0,25	0	0

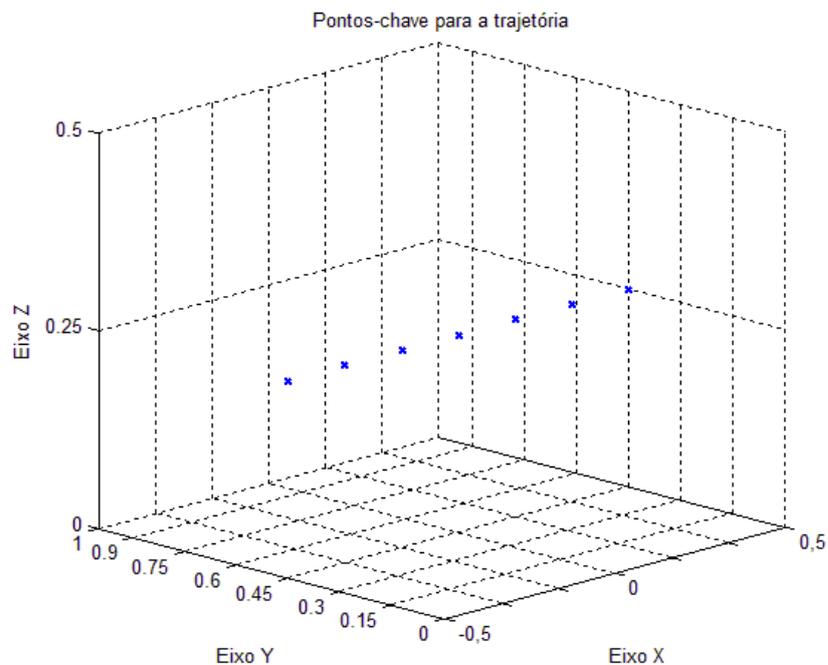


Figura 5.1 – Pontos-chave utilizados para a obtenção da trajetória

A escolha desse conjunto de pontos (de p_0 até p_6) para a criação de uma trajetória foi motivada pelo fato de que este conjunto de nós, além de estar disposto de maneira simples e de fácil visualização, proporciona uma variação de grande amplitude nas variáveis de juntas, especialmente na primeira e terceira juntas, conforme será visto no decorrer desta seção.

Através dos pontos p_0 até p_6 especificados na Tabela 5.1, são propostas diferentes trajetórias a fim de verificar a influência dos parâmetros p e h para uma *spline* criada visando à minimização do *jerk*. Para uma *spline* formada por segmentos com o valor de $h=0,5$ s e com

a variação de valor do parâmetro p , são inicialmente obtidas, para comparação, três trajetórias distintas. A Tabela 5.2 mostra os valores máximos dos desvios de trajetória nos pontos-chave medidos no espaço dos atuadores, além do valor do *jerk* da trajetória. Os valores para o atuador 5 não são apresentados nas tabelas 5.2 a 5.4, pois, como não há variação de θ_5 , os valores de desvio e *jerk* relacionados ao atuador são nulos.

Tabela 5.2 - Valores de desvio máximo nos nós e *jerk* para $h=0,5$ s

Valor de p	10^7		10^5		10^3	
	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>	desvio máximo (m)	<i>Jerk</i>	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>
Atuador1	$7,90870 \cdot 10^{-8}$	$3,747 \cdot 10^{-3}$	$7,77810 \cdot 10^{-6}$	$3,714 \cdot 10^{-3}$	$3,42500 \cdot 10^{-4}$	$2,847 \cdot 10^{-3}$
Atuador2	$7,20670 \cdot 10^{-6}$	1,817	$6,72240 \cdot 10^{-4}$	1,602	$1,13570 \cdot 10^{-2}$	$1,838 \cdot 10^{-1}$
Atuador3	$7,21880 \cdot 10^{-6}$	1,734	$6,71990 \cdot 10^{-4}$	1,506	$1,00490 \cdot 10^{-2}$	$7,720 \cdot 10^{-2}$
Atuador4	$2,55980 \cdot 10^{-6}$	$2,262 \cdot 10^{-1}$	$2,38690 \cdot 10^{-4}$	$1,988 \cdot 10^{-1}$	$3,94550 \cdot 10^{-3}$	$2,011 \cdot 10^{-2}$

Considerando o valor de $h=0,75$ s e fazendo variar o valor de p , tem-se como resultados dos cálculos as trajetórias com os valores de *jerk* e desvio máximo nos pontos-chave apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Valores de desvio máximo nos nós e *jerk* para $h=0,75$ s

Valor de p	10^7		10^5		10^3	
	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>
Atuador1	$1,04160 \cdot 10^{-8}$	$4,934 \cdot 10^{-4}$	$1,03930 \cdot 10^{-6}$	$4,928 \cdot 10^{-4}$	$8,59000 \cdot 10^{-5}$	$4,499 \cdot 10^{-4}$
Atuador2	$9,49630 \cdot 10^{-7}$	$2,396 \cdot 10^{-1}$	$9,40660 \cdot 10^{-5}$	$2,355 \cdot 10^{-1}$	$4,97650 \cdot 10^{-3}$	$8,284 \cdot 10^{-2}$
Atuador3	$9,51250 \cdot 10^{-7}$	$2,286 \cdot 10^{-1}$	$9,42010 \cdot 10^{-5}$	$2,243 \cdot 10^{-1}$	$4,86100 \cdot 10^{-3}$	$6,401 \cdot 10^{-2}$
Atuador4	$3,37310 \cdot 10^{-7}$	$2,983 \cdot 10^{-2}$	$3,34110 \cdot 10^{-5}$	$2,930 \cdot 10^{-2}$	$1,75940 \cdot 10^{-3}$	$9,889 \cdot 10^{-3}$

Ainda, fazendo com que cada segmento das trajetórias tenha o valor de $h=1$ s e com que o valor de p varie, pode-se obter três *splines* distintas com os respectivos valores de *jerk* e de desvio máximo nos nós de cada atuador mostrados na Tabela 5.4:

Tabela 5.4 - Valores de desvio máximo nos nós e *jerk* para $h=1$ s

Valor de p	10^7		10^5		10^3	
	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>
Atuador1	$2,47190 \cdot 10^{-9}$	$1,171 \cdot 10^{-4}$	$2,47060 \cdot 10^{-7}$	$1,171 \cdot 10^{-4}$	$2,34870 \cdot 10^{-5}$	$1,140 \cdot 10^{-4}$
Atuador2	$2,25370 \cdot 10^{-7}$	$5,686 \cdot 10^{-2}$	$2,24860 \cdot 10^{-5}$	$5,663 \cdot 10^{-2}$	$1,83930 \cdot 10^{-3}$	$3,961 \cdot 10^{-2}$
Atuador3	$2,25750 \cdot 10^{-7}$	$5,426 \cdot 10^{-2}$	$2,25230 \cdot 10^{-5}$	$5,401 \cdot 10^{-2}$	$1,83070 \cdot 10^{-3}$	$3,604 \cdot 10^{-2}$
Atuador4	$8,00510 \cdot 10^{-8}$	$7,079 \cdot 10^{-3}$	$7,98690 \cdot 10^{-6}$	$7,049 \cdot 10^{-3}$	$6,52540 \cdot 10^{-4}$	$4,882 \cdot 10^{-3}$

Verifica-se, assim, através das tabelas 5.2 a 5.4 que, para *splines* com um mesmo valor de h , quanto maior é o valor do parâmetro p , menor é o desvio de trajetória nos pontos-chave dos atuadores, e, conseqüentemente, menor é o desvio que o efetuador apresenta em cada nó p_i que compõe a trajetória. Contudo, verifica-se também que, para essas mesmas *splines*, a elevação do valor de p provoca também um aumento no valor do *jerk* para a função em questão. A relação entre os valores de p e h a serem adotados deve então ser vista como um compromisso entre a capacidade da *spline* em se aproximar dos valores especificados para os nós e a suavidade da função resultante em cada um dos atuadores (avaliada através do valor do *jerk* máximo).

Da análise dos dados expostos nas tabelas 5.2 a 5.4, pode-se concluir ainda que, à medida em que se aumenta o valor de h , para *splines* com o mesmo valor de p , tanto o erro do seguimento de trajetória medido nos pontos-chave dos atuadores quanto o valor do *jerk* medido nos atuadores diminuem. Portanto, para obter uma trajetória que apresente um resultado satisfatório deve-se, inicialmente, tornar o valor de h o mais elevado possível considerando o limite de tempo permitido para a execução da trajetória. Em seguida, considerando o valor de h para os segmentos, deve-se escolher o valor de p que proporcione a relação desejada entre o desvio máximo admitido e o valor do *jerk* da trajetória.

Por exemplo, considerando que uma trajetória de mínimo *jerk*, formada pelos pontos de p_0 até p_6 (Tabela 5.1), deve ser realizada em 4,5 segundos e apresentar um desvio máximo nos pontos-chave dos atuadores da ordem de 10 μm , pode-se escolher uma *spline* com os parâmetros $h=0,75$ segundos e $p=10^6$. Isto pode ser definido através dos valores apresentados na Tabela 5.5, onde verifica-se para esses parâmetros os valores para o *jerk* e para o desvio máximo nos pontos-chave para cada atuador.

Tabela 5.5 - Valores de desvio máximo nos nós e *jerk* para uma *spline* com $h=0,75$ s e $p=10^6$

Valor de p	10^6	
	erro máximo (m)	<i>jerk</i>
Atuador1	$1,04140 \cdot 10^{-7}$	$4,934 \cdot 10^{-4}$
Atuador2	$9,48800 \cdot 10^{-6}$	$2,392 \cdot 10^{-1}$
Atuador3	$9,50400 \cdot 10^{-6}$	$2,282 \cdot 10^{-1}$
Atuador4	$3,37020 \cdot 10^{-6}$	$2,978 \cdot 10^{-2}$

Nota-se que a *spline* resultante atende aos critérios especificados, apresentando máximo desvio de trajetória, nos pontos-chave do atuador 3, com valor de 9,504 μm . Na

Figura 5.2 está apresentada a posição para o primeiro atuador em função do tempo, bem como os valores das suas três primeiras derivadas utilizando $h=0,75$ segundos e $p=10^6$.

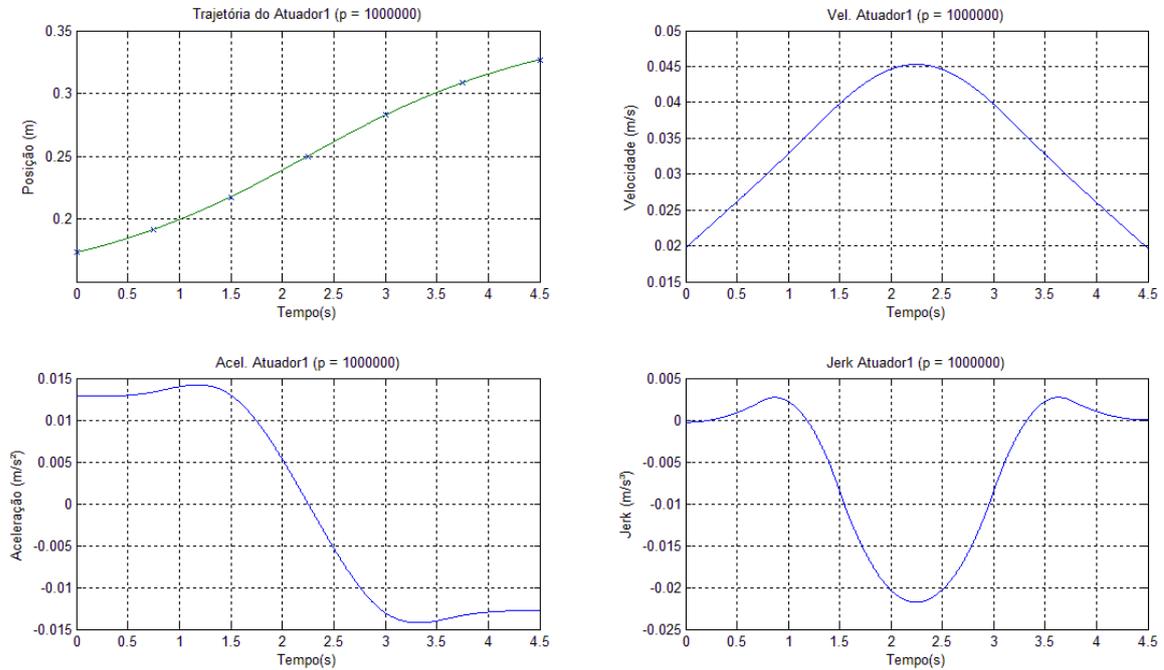


Figura 5.2 – Curvas de posição, velocidade, aceleração e *jerk* para o atuador 1

Nas figuras 5.3 a 5.5 estão apresentadas as curvas para o segundo, terceiro e quarto atuadores. Como já comentado, o quinto atuador, que proporciona o movimento de rolagem do efetuador, não está sendo contemplado nas análises por possuir valores nulos de posição e suas derivadas para a trajetória em questão.

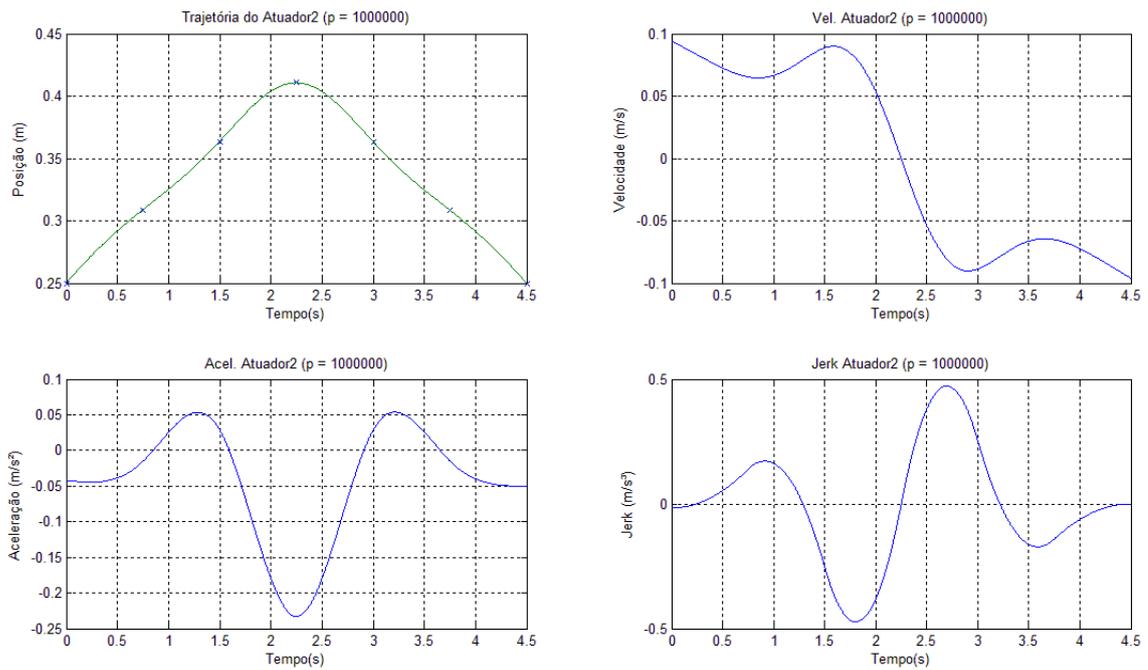


Figura 5.3 - Curvas de posição, velocidade, aceleração e *jerk* para o atuador 2

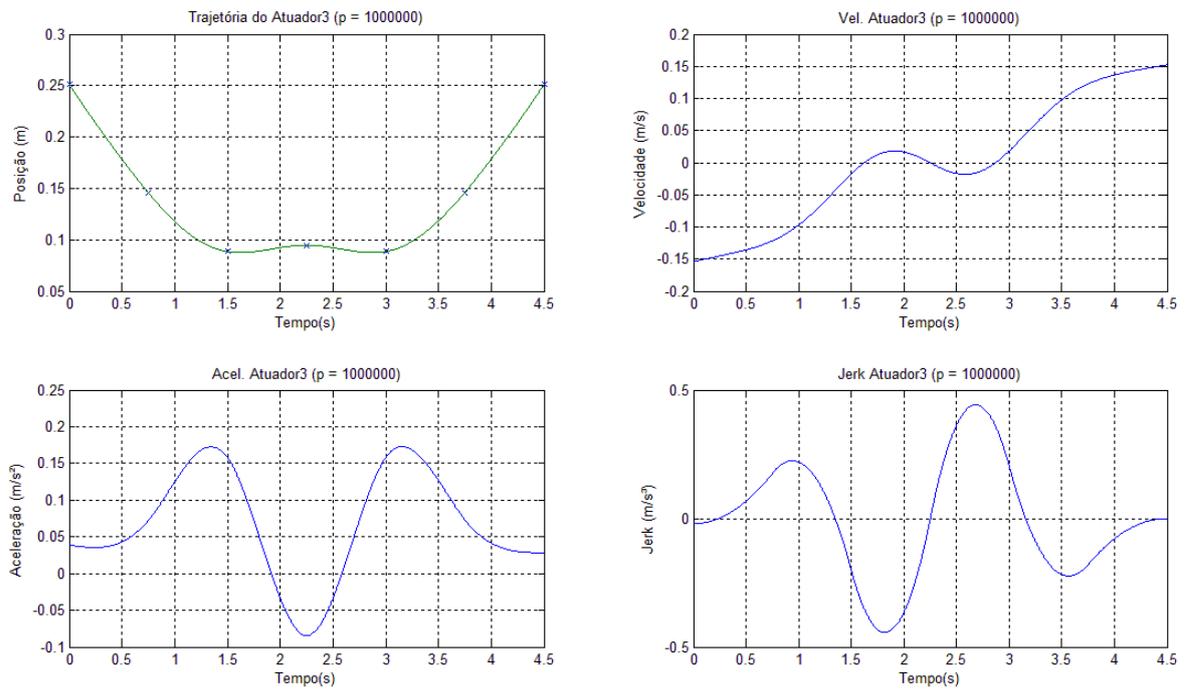


Figura 5.4 - Curvas de posição, velocidade, aceleração e *jerk* para o atuador 3

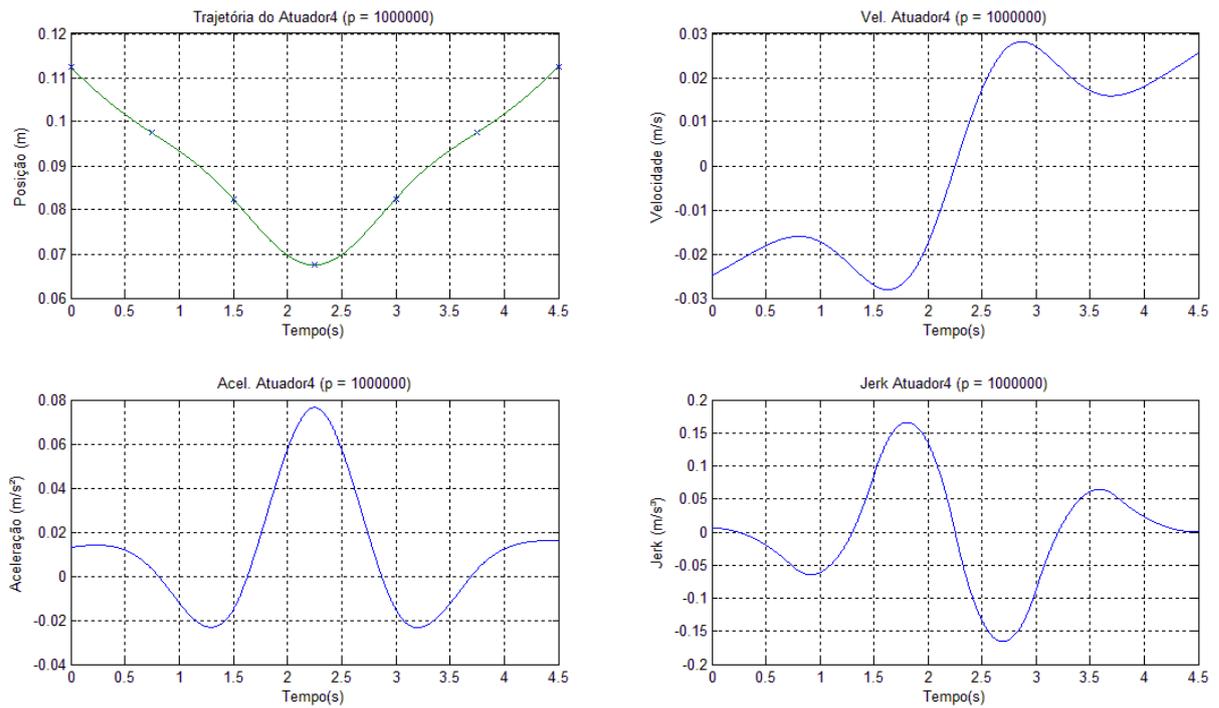


Figura 5.5 - Curvas de posição, velocidade, aceleração e *jerk* para o atuador 4

Com os dados de posição, velocidade, aceleração e *jerk* de cada um dos atuadores ao longo do tempo e utilizando a relação apresentada na Equação (3.1) podem ser determinadas as trajetórias de cada uma das juntas do robô. A Figura 5.6 mostra as variáveis das juntas quando do seguimento da trajetória em estudo.

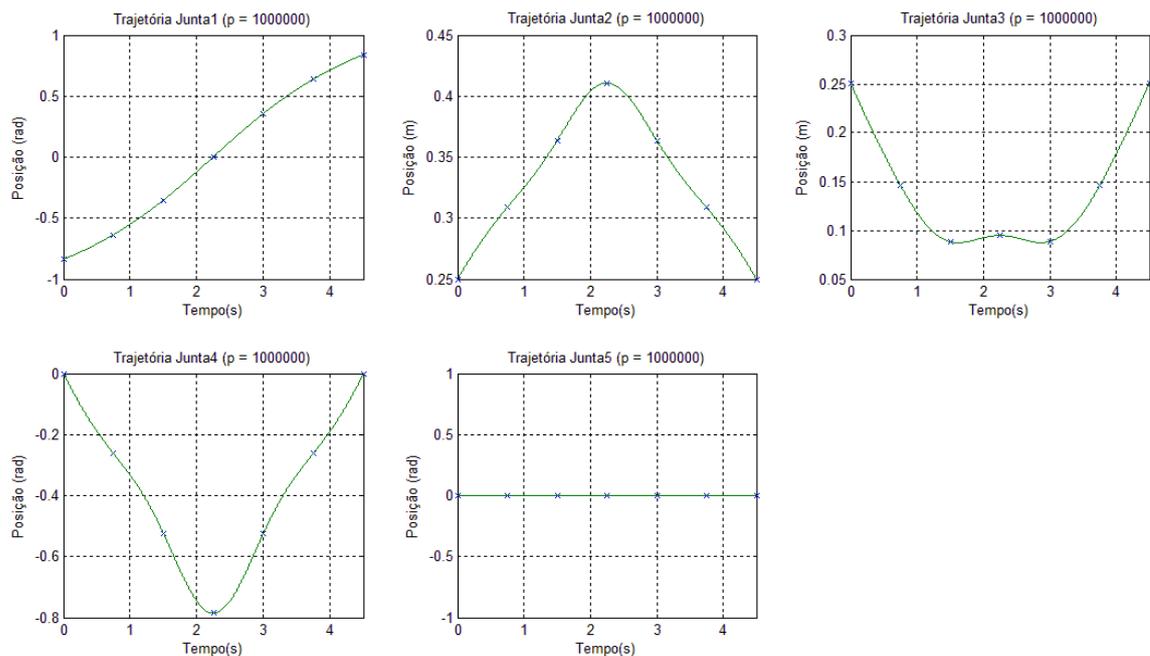


Figura 5.6 - Variáveis de juntas para a trajetória proposta

Conhecendo a trajetória das variáveis das juntas ao longo do tempo pode-se determinar a trajetória que o efetuador do manipulador irá executar no espaço de trabalho do robô. A Figura 5.7 exibe o gráfico tridimensional do caminho que o efetuador percorrerá ao longo dos pontos-chave inicialmente determinados para a elaboração da trajetória.

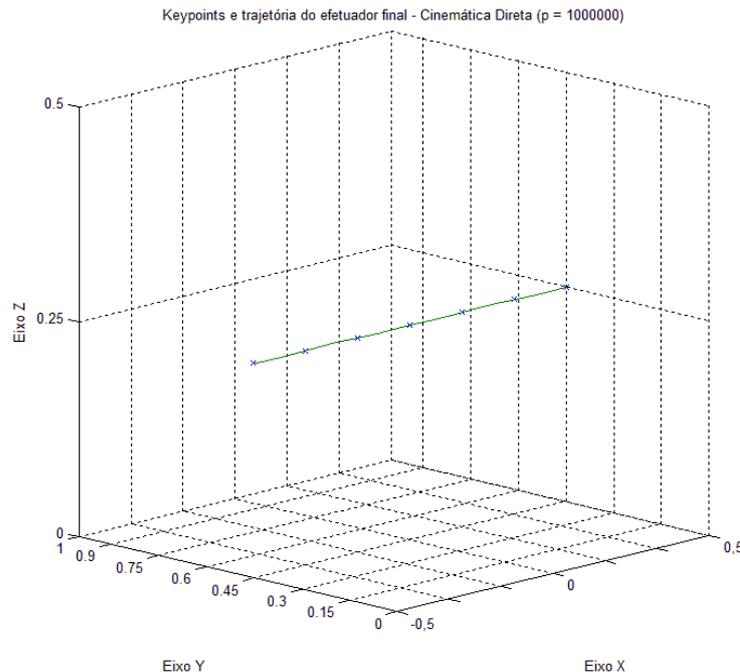


Figura 5.7 - Trajetória do efetuador ao longo dos nós

A Figura 5.8 apresenta a mesma trajetória da Figura 5.7, porém representada com a mudança de escala dos valores dos eixos y e z . Nela nota-se que, apesar de os pontos escolhidos para a formação da trajetória estarem distribuídos ao longo de uma linha reta, não se tem como resultado uma trajetória retilínea para o efetuador e sim uma trajetória que percorre os pontos-chave com um desvio máximo, no espaço dos atuadores, dentro de uma faixa de valores admitidos (Tabela 5.5). Essa característica deve-se ao fato de que a aproximação dos pontos-chave no espaço dos atuadores se dá com a intenção de minimizar o valor do *jerk*, além de atender às demais características especificadas de desvio máximo e tempo de execução já discutidas sobre a aplicação em questão.

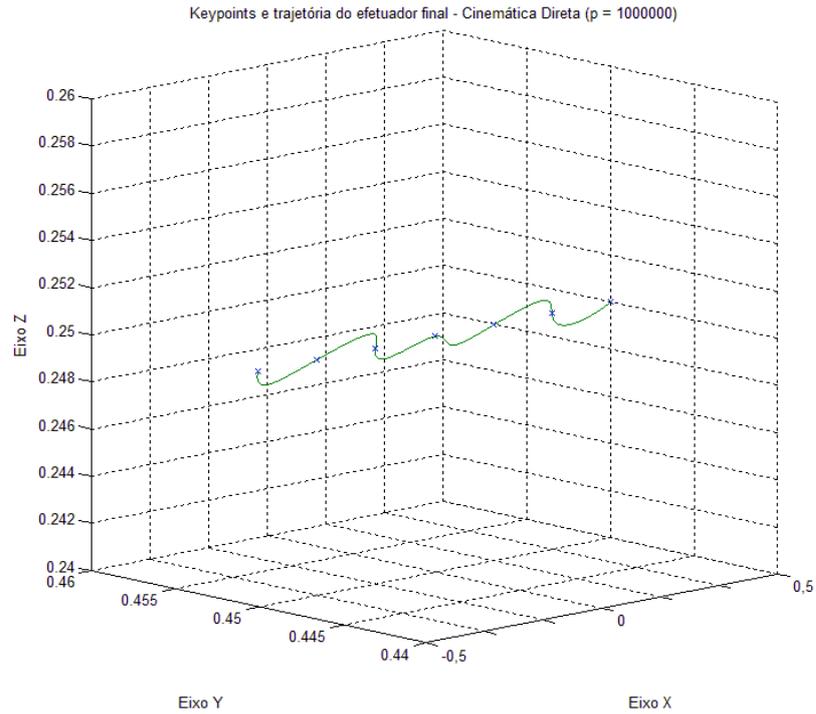


Figura 5.8 - Trajetória do efetuador ao longo dos nós com alteração da escala de y e z

Apesar de não ser critério direto para avaliação da trajetória obtida, pode-se tornar interessante analisar, nesse caso, o quão a trajetória resultante entre os nós se distancia de uma linha reta que os une. Para tanto, são expostas na Figura 5.9 representações bidimensionais que evidenciam que os valores desses desvios, no caso analisado, são menores do que 1,5 mm.

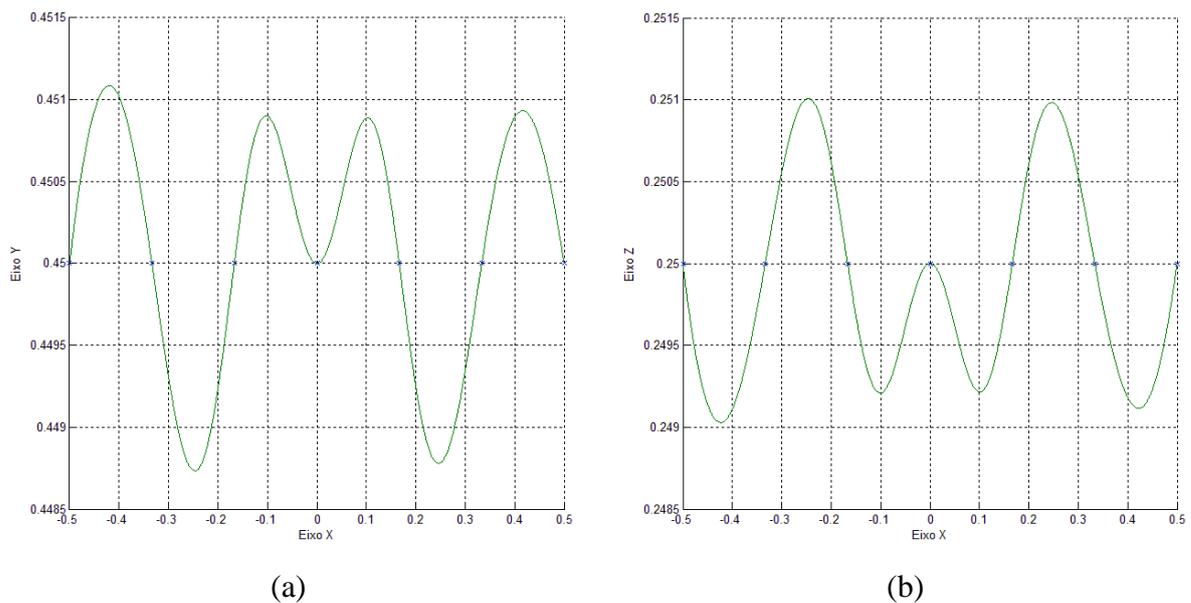


Figura 5.9 (a) Trajetória do efetuador vista no plano xy (b) Trajetória do efetuador vista no plano xz

Os valores mais expressivos dos desvios ocorrem nos segmentos entre os nós (pontos-chave), sendo que nestes os desvios obedecem aos requisitos propostos para o estudo de caso (menores do que 10 μm). A fim de reduzir o valor do desvio nos segmentos entre os nós pode-se fazer a adição de mais nós à trajetória. Por exemplo, introduzindo mais um nó no meio de cada segmento existente, o desvio máximo apresentado cai para aproximadamente 0,9 mm, como pode ser observado na Figura B.1.

5.2 Exemplo de Trajetória Helicoidal

O processo de geração de trajetória foi aplicado também para casos de trajetórias mais complexas do que o apresentado na seção anterior. Aqui será apresentado um estudo de caso e os resultados obtidos para a aproximação de 21 nós originários de uma curva tridimensional no formato helicoidal, a qual pode ser representada na forma paramétrica pela Equação (5.2).

$$p = \begin{bmatrix} 0,1 \cos(10\pi u) \\ 0,6468 \operatorname{sen}(10\pi u) \\ u \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

sendo $u \in [0, 0,4]$.

Os pontos de p_0 até p_{20} , que compõem o conjunto de nós da trajetória foram especificados no formato apresentado na Equação (4.124), sendo suas coordenadas x , y e z obtidas a partir da Equação (5.1) com variação de u em 21 valores igualmente espaçados de 0 até 0,4. Para a definição completa dos nós foi especificada ainda a inclinação do efetuador por meio da variação de θ_4 em intervalos iguais de $-\pi/3$ até $\pi/3$ e mantendo $\theta_5=0$. As coordenadas e a inclinação do efetuador para cada um dos pontos estão apresentadas na Tabela A.1. A Figura 5.10 apresenta a curva tridimensional obtida a partir da Equação (5.1) e o conjunto de nós definidos para a geração da trajetória helicoidal.

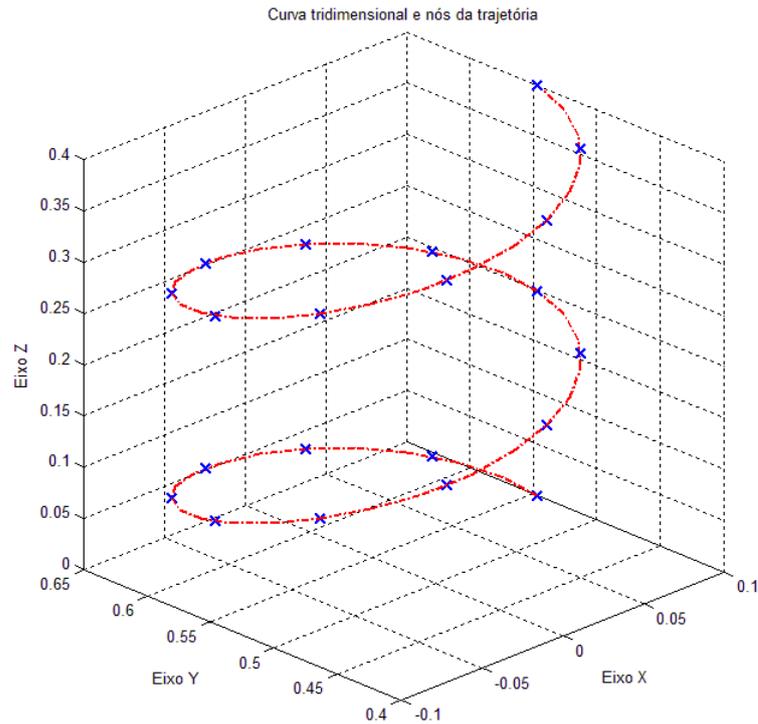


Figura 5.10 – Curva helicoidal tridimensional destacando os nós da trajetória

Considerou-se ainda, como restrições para a definição da trajetória, a necessidade da curva ser percorrida em um tempo de 15 segundos e apresentar valor de desvio máximo nos nós de $10\ \mu\text{m}$, o mesmo que foi considerado para a trajetória retilínea.

Para a obtenção da trajetória é necessário inserir os parâmetros de controle do processo (Figura 4.1), os quais são obtidos a partir das restrições dadas pela aplicação. Considerando o tempo de execução e o número de segmentos entre os nós ($N=20$) é possível determinar o valor para o parâmetro h , que resulta em $h=15/20=0,75\ \text{s}$.

Uma vez determinado o valor do parâmetro h , podem ser realizadas simulações variando-se o valor de p a fim de encontrar a trajetória que satisfaça as condições inicialmente especificadas. A Tabela 5.6 apresenta os valores máximos para o *jerk* e para o desvio nos pontos-chave dos atuadores para três diferentes trajetórias construídas com h fixo e três valores distintos para o parâmetro p .

Tabela 5.6 - Valores de desvio máximo nos nós e *jerk* para trajetória helicoidal com $h=0,75$ s

Valor de p	10^6		10^5		10^4	
	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>	desvio máximo (m)	<i>jerk</i>
Atuador1	$1,19700 \cdot 10^{-7}$	$1,16660 \cdot 10^{-3}$	$1,19080 \cdot 10^{-6}$	$1,16590 \cdot 10^{-3}$	$1,13460 \cdot 10^{-5}$	$1,15890 \cdot 10^{-3}$
Atuador2	$2,51830 \cdot 10^{-9}$	$3,95510 \cdot 10^{-6}$	$2,50980 \cdot 10^{-8}$	$3,95470 \cdot 10^{-6}$	$2,43160 \cdot 10^{-7}$	$3,95090 \cdot 10^{-6}$
Atuador3	$5,80910 \cdot 10^{-7}$	$2,72590 \cdot 10^{-2}$	$5,79420 \cdot 10^{-6}$	$2,72440 \cdot 10^{-2}$	$5,65520 \cdot 10^{-5}$	$2,71040 \cdot 10^{-2}$
Atuador4	$3,69150 \cdot 10^{-15}$	$2,76090 \cdot 10^{-19}$	$3,64990 \cdot 10^{-14}$	$2,76160 \cdot 10^{-19}$	$3,59930 \cdot 10^{-13}$	$2,76220 \cdot 10^{-19}$

Os dados apresentados na Tabela 5.6 permitem verificar que a trajetória elaborada com $p=10^5$ atende as restrições propostas para o processo, pois, além de fornecer um tempo total de 15 segundos, apresenta um desvio máximo da ordem de 5,794 μm nos nós do atuador 3, ou seja, abaixo dos 10 μm imposto como limite máximo para o desvio.

Caso ainda se deseje diminuir os valores do *jerk*, pode-se reduzir o valor de p , desde que a trajetória resultante apresente um desvio máximo abaixo do valor limite. Assim, com a utilização de $p=6 \times 10^4$, por exemplo, é possível reduzir os valores do *jerk* mantendo ainda o valor do desvio dentro da faixa aceitável, conforme os resultados apresentados na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 - Valores de desvio máximo nos nós e *jerk* para uma trajetória helicoidal com $h=0,75$ s e $p=6 \times 10^4$

Valor de p	6×10^4	
	erro máximo (m)	<i>jerk</i>
Atuador1	$1,87860 \cdot 10^{-6}$	$1,14910 \cdot 10^{-3}$
Atuador2	$4,17270 \cdot 10^{-8}$	$3,95440 \cdot 10^{-6}$
Atuador3	$9,66350 \cdot 10^{-6}$	$2,66950 \cdot 10^{-2}$
Atuador4	$6,07850 \cdot 10^{-14}$	$2,76180 \cdot 10^{-19}$

Como apresentado na Tabela 5.7, o desvio máximo para a trajetória obtida ocorre nos nós do atuador 3 sendo de aproximadamente 9,663 μm . A Figura 5.11 mostra a curva tridimensional resultante que é percorrida pelo efetuador do robô.

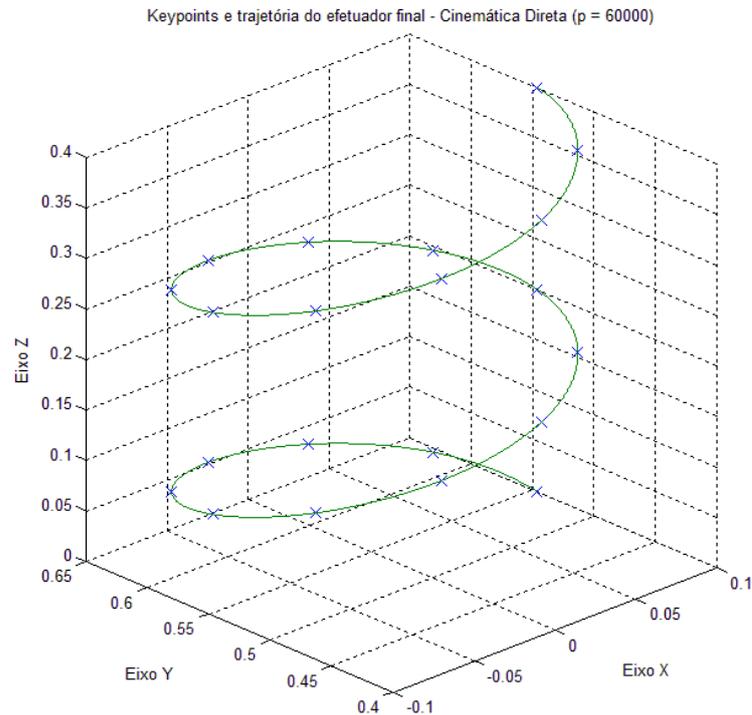


Figura 5.11 –Trajetória helicoidal obtida a partir de 21 pontos-chave

Nas figuras 5.12 a 5.15 estão apresentadas as curvas de posição, velocidade, aceleração e *jerk* de cada atuador em função do tempo para que seja executada a trajetória helicoidal. Como no caso da Seção 5.1, os dados referentes ao atuador 5 não são apresentados pois, no caso em estudo, não há movimento de rolagem do punho.

Na Figura 5.16 são apresentadas trajetórias das juntas do robô referentes ao seguimento da trajetória helicoidal mostrada na Figura 5.11. Como comentado anteriormente, as posições das juntas são obtidas por meio da aproximação realizada no espaço dos atuadores e da aplicação da Equação (3.1).

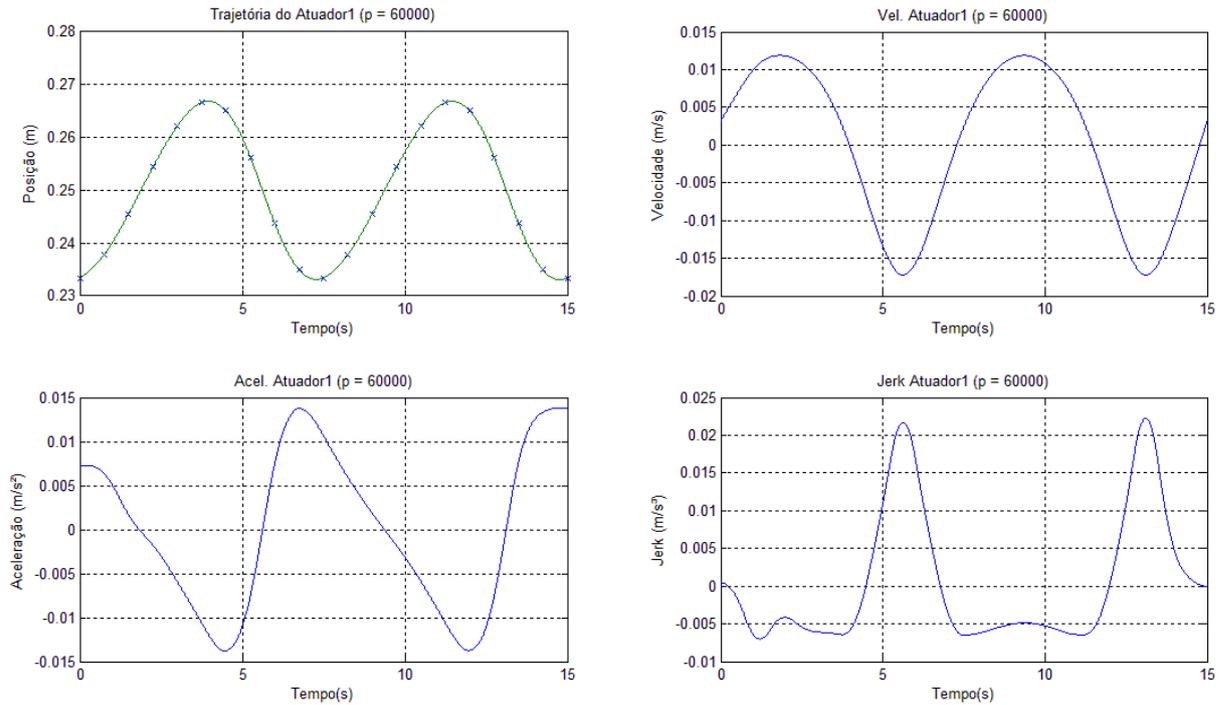


Figura 5.12 - Posição do atuador 1 e suas três primeiras derivadas para execução da trajetória helicoidal

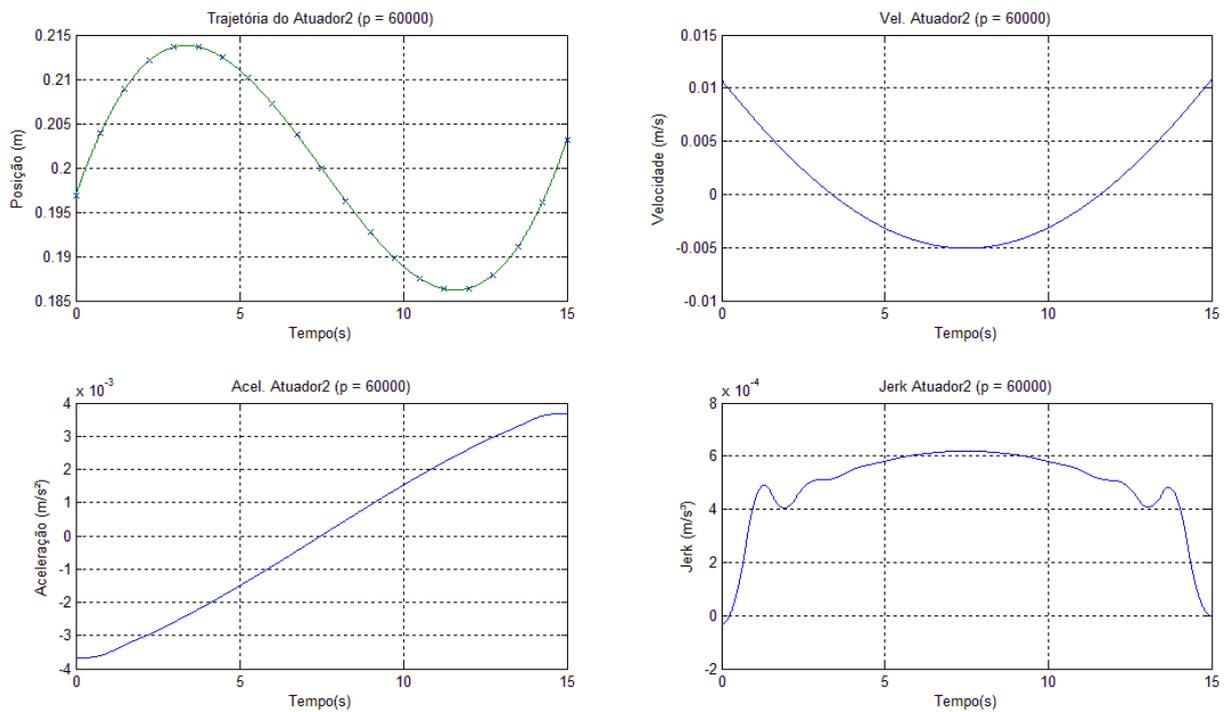


Figura 5.13 - Posição do atuador 2 e suas três primeiras derivadas para execução da trajetória helicoidal

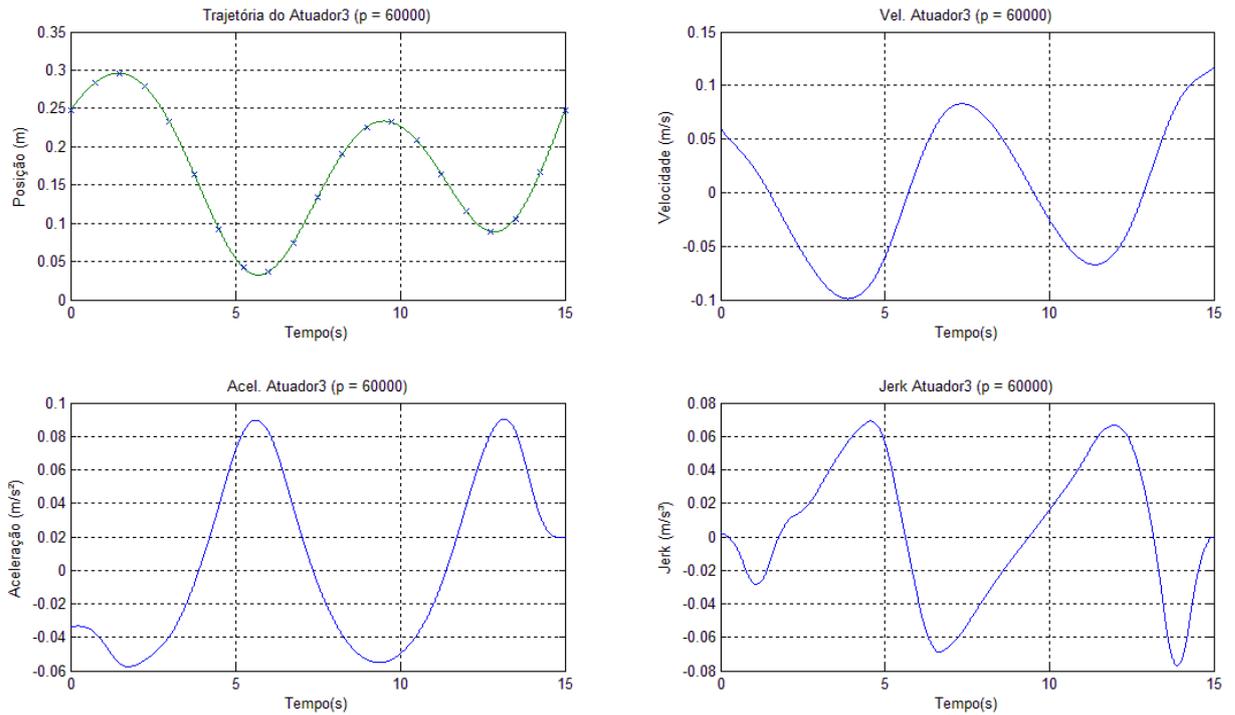


Figura 5.14 - Posição do atuador 3 e suas três primeiras derivadas para execução da trajetória helicoidal

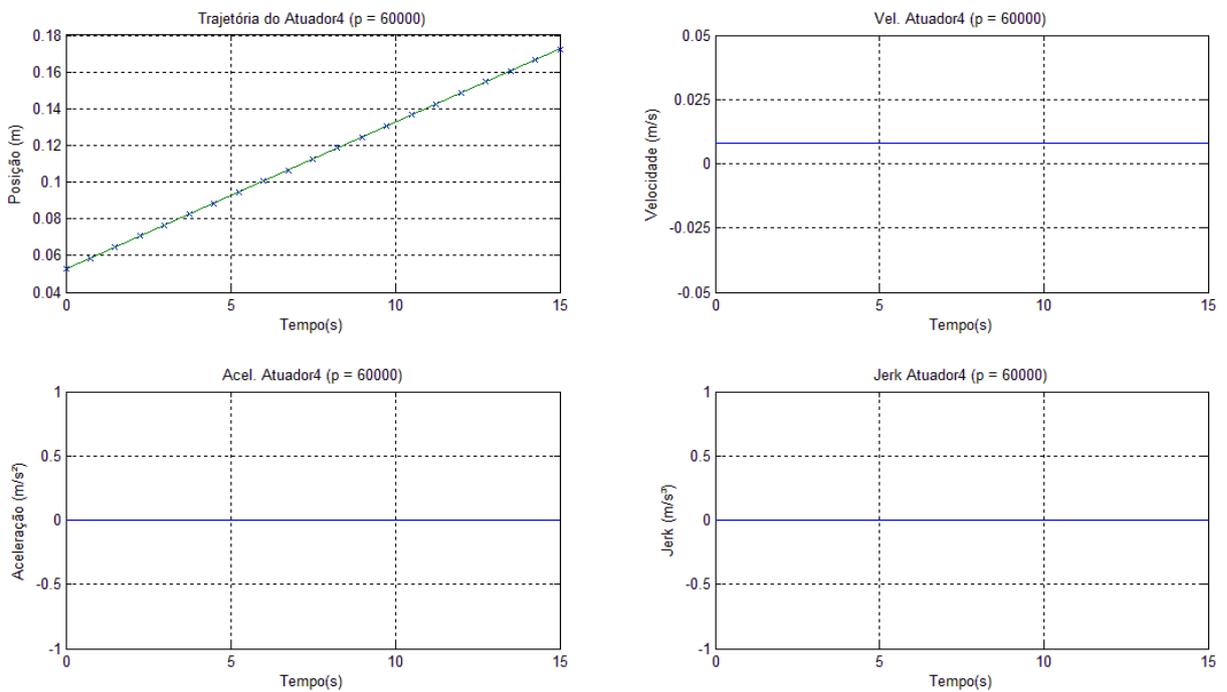


Figura 5.15 - Posição do atuador 4 e suas três primeiras derivadas para execução da trajetória helicoidal

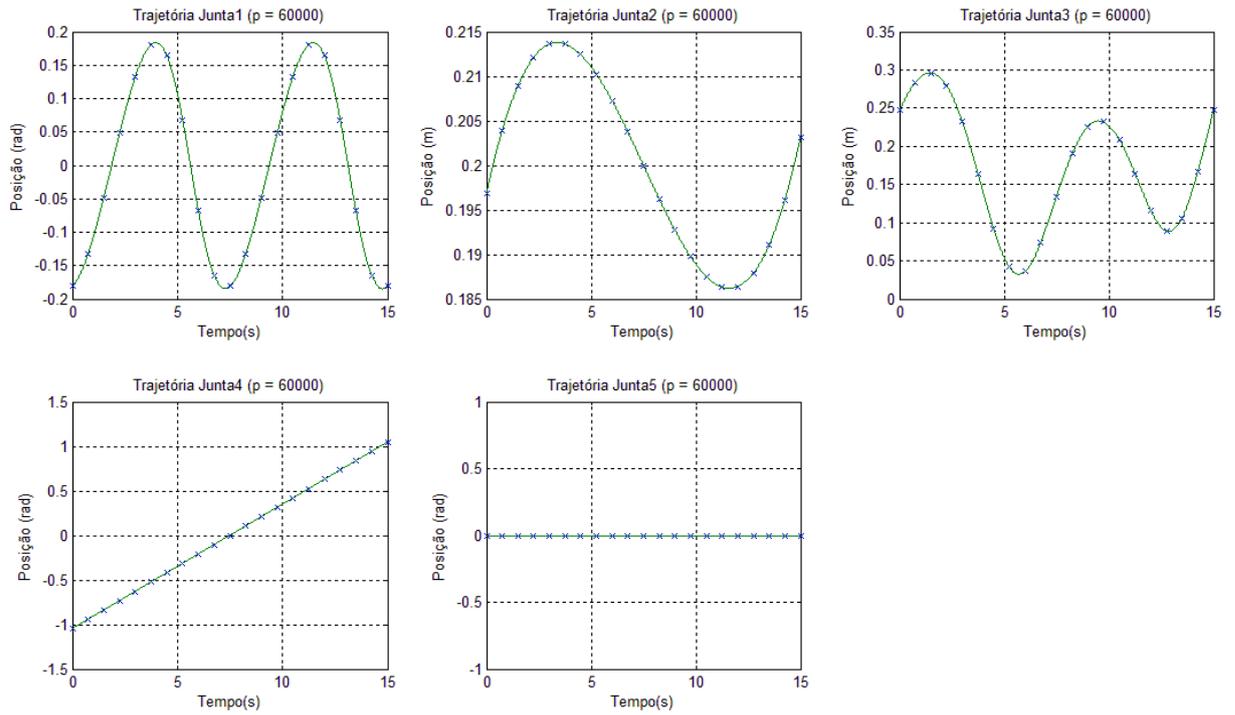


Figura 5.16 – Variáveis das juntas para a execução da trajetória helicoidal

6 CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos através das simulações, apresentados e discutidos no Capítulo 5, pode-se afirmar que os objetivos delimitados ao princípio deste trabalho foram alcançados. O modelo obtido para a cinemática inversa do manipulador permite o teste e a implementação de diferentes trajetórias, fornecendo as posições das juntas e dos atuadores do robô para o seguimento da trajetória desejada.

A aproximação de pontos no espaço dos atuadores utilizando *splines* formadas a partir de polinômios de sétimo grau com a minimização do *jerk* demonstrou ser útil para a obtenção de trajetórias suaves no espaço de trabalho do manipulador. A parametrização das *splines* propostas por Simon, 2004, permitiu ajustar facilmente as trajetórias às especificidades de cada uma das tarefas simuladas, proporcionando trajetórias com valores conhecidos para a velocidade, aceleração, *jerk* e de desvio de posição nos pontos-chave. Além disso, as trajetórias dos atuadores obtidas a partir dessas *splines* apresentaram continuidade da função de posição e das suas três primeiras derivadas, que são características desejáveis para trajetórias executadas por servoposicionadores pneumáticos, pois atendem os requisitos necessários à implementação da estratégia de controle em cascata que vêm proporcionando bons resultados no controle desse tipo de atuador.

A metodologia proposta para a criação das trajetórias possibilitou, através de uma sequência ordenada de processos, obter trajetórias para execução de diferentes tarefas e, utilizando as equações da cinemática direta, proporcionou a verificação da trajetória no espaço de trabalho do manipulador, resultante da aproximação por *splines* realizada no espaço dos atuadores. De uma forma geral, os testes realizados para os estudos de caso propostos no Capítulo 5 foram satisfatórios para a geração de trajetórias nas quais ao início do processo são conhecidos os pontos de passagem da curva e o tempo de execução da tarefa. Foi possível obter trajetórias otimizadas com valores mínimos de *jerk* para os atuadores considerando um limite de desvio máximo nos nós, o qual é especificado pelo usuário ou programador.

Na Seção 5.1 foi apresentada a geração de uma trajetória cujos pontos-chave são oriundos de uma reta paralela aos planos xy e xz e, nesse caso, constatou-se que nos segmentos entre os nós a trajetória se afasta da linha reta que os une. Quando se deseja seguir uma curva de geometria qualquer no espaço de trabalho do robô, caso similar ao estudado, recomenda-se a inserção de uma quantidade de pontos que possibilite à *spline* aproximar a função de maneira adequada. De maneira geral, quanto maior for o número de pontos-chave

especificados a partir da curva para a obtenção da trajetória, melhor será a capacidade da *spline* em reproduzi-la de maneira satisfatória.

6.1 Trabalhos Futuros

Como proposta para complementação do presente trabalho, propõe-se futuramente:

- Realizar a implementação e testes práticos no robô pneumático com a utilização de controladores.
- Elaborar ferramentas computacionais para a obtenção dos nós da trajetória no espaço de trabalho do robô.
- Desenvolver um método para a detecção de possíveis obstáculos no espaço de trabalho do manipulador a fim de gerar trajetórias seguras.
- Implantar outras estratégias para a geração de trajetórias a fim de comparar os resultados com os obtidos neste trabalho.
- Implementar o controle de velocidade ao longo da trajetória.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allgayer, R. S., **Desenvolvimento de um Manipulador Robótico Cilíndrico Acionado Pneumaticamente**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.
- Biagiotti, L; Melchiorri, C., **Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots**, Springer-Verlag, 2008.
- Chapra, S. C.; Canale, R. P., **Numerical Methods for Engineers**, Mc Graw Hill; 4ª ed., 2001.
- Craig, J. J., **Introduction to Robotics: Mechanics and Control**, Prentice Hall; 3ª ed., 2005.
- Cunha, M. A. B., **O Controle em Cascata de um Atuador Hidráulico: Contribuições Teóricas e Experimentais**, Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- Cupido, A.; Milanese. S.; Sala. R., **Sistemi ed Automazione Industriale 3**, Edizione Cupido, 60025 LORETO (AN) – Zona Ind.le Brodolini 12, 1996.
- Frasson M., **Projeto de um Robô Cartesiano com Acionamento Pneumático**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.
- Freeman, P., **Minimum Jerk Trajectory Planning for Trajectory Constrained Redundant Robots**, Tese de Doutorado, Department of Electrical and Systems Engineering, Washington University in St. Louis, 2012.
- Gasparetto, A.; Zanutto, V., **A New Method for Smooth Trajectory Planning of Robot Manipulators**, Mechanism and Machine Theory, 42, 2007.
- Guan, Y.; Yokoi, K.; Stasse, O.; Kheddar, A., **On Robotic Trajectory Planning Using Polynomial Interpolations**, IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, 2005.
- ISO 8373-1994, **Manipulating Industrial Robots – Vocabulary**, 1st Edition, 1994.
- Jaryani, M. H., **An Effective Manipulator Trajectory Planning With Obstacles Using Virtual Potential Field Method**, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2007.
- Kyriakopoulos, K.; Saridis, G., **Minimum Jerk Path Generation**, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, vol. 1, 1988, 364–369.
- Lin, C.; Chang, P.; Luh, J. Y. S., **Formulation and Optimization of Cubic Polynomial Joint Trajectories for Industrial Robots**, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-28, n°. 12, 1983.

Müller, P. A.; Boucherit, R.; Liu, S., **Smooth and Time-Optimal Trajectory Planning for Robot Manipulators**, American Control Conference (ACC), 2012, 5466 – 5471

Perondi, E. A., **Controle Não-linear em Cascata de um Servoposicionador Pneumático com Compensação do Atrito**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

Piazzi, A.; Visioli, A., **Global Minimum-Jerk Trajectory Planning of Robot Manipulators**, IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 47, n°. 1, 2000.

Rijo, M. G. Q., **Desenvolvimento da Base e Controle do Grau de Liberdade Rotacional de um Robô Cilíndrico com Acionamento Pneumático**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.

Ruggiero, M. A. G.; Lopes, V. L. R., **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**, Makron Books; 2ª ed., 1996.

Schoenberg, I. J., **Spline Functions and the Problem of Graduation**, Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 52, 1964, pp. 947–950.

Sengupta, A.; Chakraborti, T.; Konar, A.; Nagar, A. **Energy Efficient Trajectory Planning by a Robot Arm using Invasive Weed Optimization Technique**. Third World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing (NaBIC), 2011.

Simon, D., **Data Smoothing and Interpolation Using Eighth-order Algebraic Splines**, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 52, n°. 4, 2004.

Simon, D.; Isik, C. **A Trigonometric Trajectory Generator for Robotic Arms**, Int. J. Contr., vol. 57, n°. 3, 1993.

Sobczyk S., M. R., **Controle em Cascata e a Estrutura Variável com Adaptação de Parâmetros e Compensação de Atrito de um Servoposicionador Pneumático**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

Spong, M. W.; Vidyasagar, M., **Robot Dynamics and Control**, John Wiley & Sons, Inc., 1989.

Tian, L.; Collins, C. **An Effective Robot Trajectory Planning Method Using a Genetic Algorithm**. Mechatronics 14, 2004, 455–470.

APÊNDICE A – Nós utilizados para a geração da trajetória helicoidal.

Tabela A.1 – Pontos-chave para a trajetória helicoidal

Ponto	x (m)	y (m)	z (m)	θ_4 (rad)	θ_5 (rad)
p ₀	0,1000	0,5468	0	-1,0472	0
p ₁	0,0809	0,6056	0,0200	-0,9425	0
p ₂	0,0309	0,6419	0,0400	-0,8378	0
p ₃	-0,0309	0,6419	0,0600	-0,7330	0
p ₄	-0,0809	0,6056	0,0800	-0,6283	0
p ₅	-0,1000	0,5468	0,1000	-0,5236	0
p ₆	-0,0809	0,4880	0,1200	-0,4189	0
p ₇	-0,0309	0,4517	0,1400	-0,3142	0
p ₈	0,0309	0,4517	0,1600	-0,2094	0
p ₉	0,0809	0,4880	0,1800	-0,1047	0
p ₁₀	0,1000	0,5468	0,2000	0	0
p ₁₁	0,0809	0,6056	0,2200	0,1047	0
p ₁₂	0,0309	0,6419	0,2400	0,2094	0
p ₁₃	-0,0309	0,6419	0,2600	0,3142	0
p ₁₄	-0,0809	0,6056	0,2800	0,4189	0
p ₁₅	-0,1000	0,5468	0,3000	0,5236	0
p ₁₆	-0,0809	0,4880	0,3200	0,6283	0
p ₁₇	-0,0309	0,4517	0,3400	0,7330	0
p ₁₈	0,0309	0,4517	0,3600	0,8378	0
p ₁₉	0,0809	0,4880	0,3800	0,9425	0
p ₂₀	0,1000	0,5468	0,4000	1,0472	0

APÊNDICE B – Representação bidimensional de uma trajetória especificada a partir de pontos dispostos em linha reta.

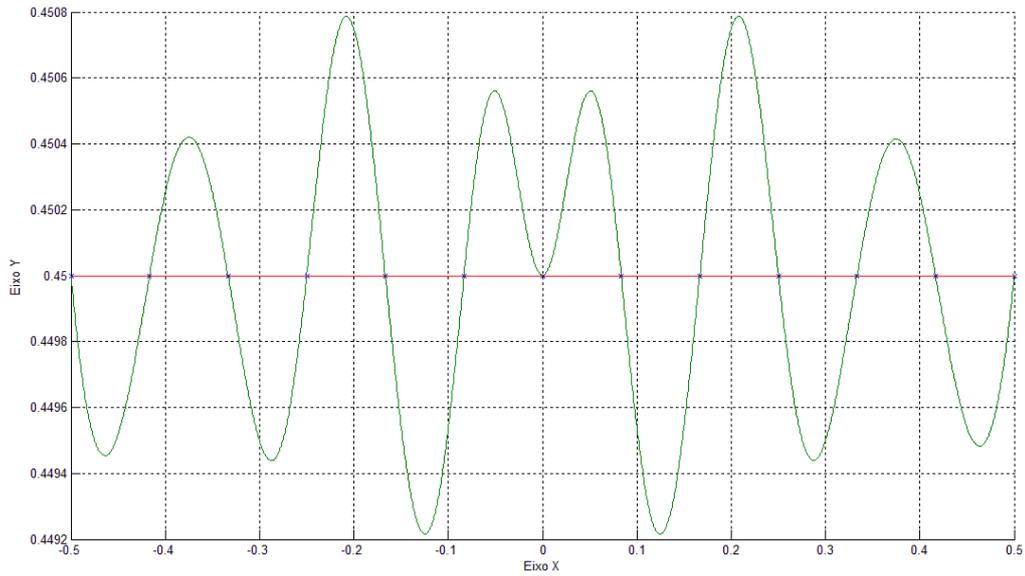


Figura B.1- Redução do desvio entre os nós para uma trajetória retilínea por meio da adição de pontos-chave à trajetória