UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**RAUL MITTMANN REIS**

# CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM BARRAS ENGASTADAS ATRAVÉS DO EFEITO PIEZOELÉTRICO

PORTO ALEGRE
2013/2

**RAUL MITTMANN REIS**

# CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM BARRAS ENGASTADAS ATRAVÉS DO EFEITO PIEZOELÉTRICO

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção da graduação em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

**PORTO ALEGRE**

**2013/2**

**RAUL MITTMANN REIS**

# CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM BARRAS ENGASTADAS ATRAVÉS DO EFEITO PIEZOELÉTRICO

Este projeto foi julgado adequado para fazer jus aos créditos da Disciplina "Projeto de Diplomação" do Departamento de Engenharia Elétrica e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS

Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS

Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira, UFRGS

Doutor pelo Instituto Tecnológico da Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Prof. Dr.Valner João Brusamarello, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Porto Alegre, Dezembro de 2013

## DEDICATÓRIA

Dedico a minha família.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente aos meus pais, Jair José Werle Reis e Angelita Beatriz Mittmann Reis, por todo apoio que me deram durante esses cinco anos, me dando condições de me manter sozinho em Porto Alegre, onde proveram tudo que eu sempre precisei, portanto facilitando muito o caminho da graduação em Engenharia Elétrica.

À minha irmã, Laura Mittmann Reis, para que lhe sirva de exemplo em sua nova caminhada de vida.

À Dilva Müller, ao Edson Rogério Müller, e a toda sua família, que me proporcionaram um ambiente familiar, mesmo estando distante da minha família.

Ao orientador, prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr. por incentivar e orientar a realização deste trabalho.

Aos meus colegas de curso, que sempre me ajudaram quando solicitados, e também nos quais sempre pude contar para desenvolvimento de trabalhos.

E aos meus amigos, que sempre me deram suporte quando precisei.

À Deus que sempre permitiu que eu seguisse meu caminho de acordo com meus valores e convicções.

*“Mede o que é mensurável e torne mensurável o que não é”*

Galileu Galilei

## RESUMO

O objetivo deste projeto é desenvolver um controle ativo de vibrações em barras engastadas através de sensores e atuadores piezoelétricos. O efeito piezoelétrico decorre da capacidade de alguns cristais gerarem tensão elétrica à resposta de uma pressão mecânica, assim como o efeito reverso. Portanto, com transdutores piezoelétricos em associação a uma malha de controle, é possível executar o controle ativo de vibrações. O controle é feito através do *software* Matlab em conjunto com a placa dSPACE DS1104, a qual faz a interface analógico/digital e digital/analógico da malha de controle. O sistema é modelado matematicamente e, após isso, uma identificação paramétrica é feita experimentalmente através da aplicação do sinal PRBS na entrada do sistema e da utilização do método dos mínimos quadrados. Com a planta definida, são projetados controladores através do método de alocação de polos. Por fim, são realizados experimentos para provar a eficiência deste método.



**Palavras-chaves: Controle Ativo de Vibrações, Efeito Piezoelétrico, Modelagem, Alocação de Polos, Barra Engastada.**

## ABSTRACT

The objective of this project is to develop an active control of vibrations in cantilever beams through piezoelectric sensors and actuators. The piezoelectric effect arises from the capability of certain crystals generates voltage in response to the mechanical pressure, as well as the reverse effect. Therefore, with piezoelectric transducers in combination with a control loop, is possible to implement an active control of vibrations. The control is done through the Matlab software in conjunction with the dSPACE DS1104 board, which will interface the analog/digital and digital/analog of control loop. The system will be modeled mathematically and, after that, a parametric identification is made experimentally by applying the PRBS signal at the input of the system and using the method of least squares. With the plant determined, the controllers will be designed by the method of allocation of poles. Lastly, experiments will be performed to prove the efficiency of this method.



**Keywords: Active Vibration Control, Piezoelectric Effect, Modeling, Allocation of Poles, Cantilever Bar.**

**SUMÁRIO**

**ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES** ..... **10**

**LISTA DE TABELAS** ..... **13**

**LISTA DE ABREVIAÇÕES** ..... **14**

**LISTA DE SIMBOLOS** ..... **15**

**1 INTRODUÇÃO** ..... **20**

**2 MODELAGEM MATEMÁTICA** ..... **22**

**2.1 Introdução** ..... **22**
**2.2 Modelagem Matemática da Barra** ..... **22**
**2.3 Análise em Vibração Livre** ..... **26**
**2.4 Análise do Atuador Piezoelétrico** ..... **29**
**2.5 Análise do Sensor Piezoelétrico** ..... **35**
**2.6 Truncagem do modelo matemático** ..... **37**
**2.7 Posicionamento dos pares piezoelétricos** ..... **40**
**2.8 Considerações** ..... **44**

**3 BANCADA EXPERIMENTAL** ..... **46**

**3.1 Introdução** ..... **46**
**3.2 Bancada Experimental** ..... **46**
**3.3 Detalhamento** ..... **47**
3.3.1 Estrutura Mecânica ..... 47
3.3.2 Transdutores Piezoelétricos ..... 51
3.3.3 Conversão Analógica-Digital e Digital-Analógica ..... 57

**4 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA** ..... **62**

**4.1 Introdução** ..... **62**
**4.2 Metodologia** ..... **64**
**4.3 Identificação dos Parâmetros** ..... **67**

**5 PROJETO DO CONTROLADOR** ..... **76**

**5.1 Alocação de Polos** ..... **76**
**5.2 Experimento** ..... **79**

**6 CONCLUSÃO** ..... **92**

**REFERÊNCIAS** ..... **94**

**ANEXO A – GERADOR DO SINAL PRBS** ..... **96**

## ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Barra Genérica. ..... 23
Figura 2: Diagrama de Corpo Livre de uma Barra. ..... 23
Figura 3: Barra Engastada. ..... 25
Figura 4: Modos de Vibração para uma barra engastada. ..... 28
Figura 5: Barra com J transdutores piezoelétricos. ..... 29
Figura 6: Dimensões da barra e do transdutor piezoelétrico. ..... 29
Figura 7: Deformações em uma atuador piezoelétrico. ..... 30
Figura 8: Controlabilidade Modal para os três primeiros modos. ..... 42
Figura 9: Controlabilidade Estrutural. ..... 43
Figura 10: Estrutura Mecânica do Experimento (WINCK, GEISON, 2012). ..... 47
Figura 11: Primeiro Modo de Vibração. ..... 49
Figura 12: Segundo Modo de Vibração. ..... 49
Figura 13: Terceiro modo de Vibração. ..... 49
Figura 14: Primeiro Modo de Vibração na barra experimentalmente. ..... 50
Figura 15: Segundo Modo de Vibração na barra Experimentalmente. ..... 50
Figura 16: Terceiro modo de Vibração na barra experimentalmente. ..... 51
Figura 17: a) Domínios de Weiss sem nenhuma aplicação de Campo Elétrico; b) Domínios de Weiss com um Campo Elétrico aplicado; c) Domínios de Weiss após aplicação de um Campo Elétrico. ..... 52
Figura 18: a) Piezoelétrico sem nenhuma carga aplicada; b) Piezoelétrico sendo contraído gerando uma tensão positiva em seus terminais; c) Piezoelétrico sendo expandido gerando uma tensão negativa em seus terminais. ..... 53
Figura 19: Circuito elétrico equivalente de um piezoelétrico (SAFARI et al., 1998). ..... 53
Figura 20: Circuito elétrico equivalente simplificado de um piezoelétrico conectado a um amplificador de tensão (SAFARI et al., 1998). ..... 54
Figura 21: Resposta em Frequência de um piezoelétrico (WIKIPÉDIA, Piezoelectricity). ..... 55

Figura 22: Circuito equivalente de um piezoelétrico conectado a um amplificador (SAFARI et al., 1998). ..... 55
Figura 23: Circuito equivalente de um piezoelétrico conectado a um amplificador com um resistor Shunt (SAFARI et al., 1998). ..... 56
Figura 24: Interface do software ControlDesk. ..... 58
Figura 25: Resposta em frequência do Filtro RC. ..... 59
Figura 26: Resposta em frequência do filtro Anti-Aliasing. ..... 60
Figura 27: Diagrama de Blocos da bancada experimental. ..... 61
Figura 28: Estrutura montada do experimento (WINCK, GEISON, 2012). ..... 61
Figura 29: Sistema LTI. ..... 62
Figura 30: Sinal de entrada e de saída do sistema. ..... 63
Figura 31: Sinal PRBS. ..... 64
Figura 32: Transformada de Fourier da saída do sistema com um ruído branco na entrada. ..... 69
Figura 33: Sinal de entrada e sinal de saída do experimento com PRBS. ..... 70
Figura 34: Diagrama de Bode do Sistema obtido pelo System Identification Toolbox. ..... 71
Figura 35: Diagrama de Bode do Sistema obtido pelo System Identification Toolbox ajustado. ..... 72
Figura 36: Diagrama de Polos e Zeros. ..... 73
Figura 37: Zoom no Diagrama de Polos e Zeros ..... 73
Figura 38: Resposta ao degrau unitário. ..... 75
Figura 39: Resposta a uma entrada senoidal com frequência de 33,35 Hz e amplitude de 4V. ..... 75
Figura 40: Controle por alocação de polos. ..... 76
Figura 41: Diagrama de bode do sistema em malha fechada para $\alpha = 1$. ..... 80
Figura 42: Diagrama de Bode do sistema em malha fechada e aberta com zoom para α=1. ..... 81
Figura 43: Experimento realizado para testar o controlador. ..... 82
Figura 44: Saída do Sistema em malha aberta. ..... 82
Figura 45: Saída do Sistema com o controlador com α=1. ..... 83
Figura 46: Sinal do controlador α=1. ..... 83
Figura 47: Diagrama de bode do sistema em malha fechada para α=4. ..... 84
Figura 48: Diagrama de Bode do sistema em malha fechada e aberta com zoom para α=4. ..... 85
Figura 49: Saída do Sistema com o controlador α=4. ..... 86
Figura 50: Sinal do controlador com α=4. ..... 86
Figura 51: Diagrama de bode do sistema em malha fechada para α=8. ..... 87

Figura 52: Diagrama de Bode do sistema em malha fechada e aberta com zoom para α=8. ... 87
Figura 53: Saída do Sistema com controlador com α=8. ... 88
Figura 54: Sinal do controlador com α=8. ... 88
Figura 55: Saída do Sistema em malha aberta x malha fechada. ... 89
Figura 56: Diagrama de Bode desconsiderando o comportamento em baixas frequências do piezoelétrico ... 90
Figura 57: Diagrama de Blocos no Simulink para gerar o sinal PRBS. ... 96

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Características da Barra (WINCK, GEISON, 2012). ..... 47
Tabela 2: Características dos transdutores piezoelétricos QP20w. ..... 56
Tabela 3: Característica da porta D/A da placa DS1104 ..... 58
Tabela 4: Característica da porta A/D da placa DS1104 ..... 58
Tabela 5: Parâmetros do sistema. ..... 74
Tabela 6: Controladores projetados. ..... 80

## LISTA DE ABREVIAÇÕES

| | |
|---|---|
| A/D | Conversão Analógico-Digital |
| D/A | Conversão Digital-Analógico |
| PRBS | *Pseudo-Random Binary Signal* (Sinal binário pseudorrandômico) |
| PZT | Titanato Zirconato de Chumbo |
| RTI | *Real Time Interface* (Interface em Tempo Real) |
| SNR | *Signal to Noise Ratio* (Razão entre sinal e ruído) |

## LISTA DE SIMBOLOS

| | |
|---|---|
| $r$ | Eixo das abscissas |
| $y$ | Eixo das ordenadas |
| $t$ | Tempo |
| $L$ | Comprimento da barra |
| $EI(r)$ | Módulo de Rigidez da barra |
| $E$ | Módulo de Elasticidade da barra |
| $I(r)$ | Momento de Inércia de área da seção transversal da barra |
| $Q$ | Tensão de Cisalhamento |
| $F$ | Força |
| $f(t,r)$ | Força distribuída ao longo da barra na posição $r$ e no tempo $t$ |
| $M$ | Momento Fletor |
| $p$ | Densidade de massa |
| $A(r)$ | Área da seção transversal da barra na posição $r$ |
| $y(t,r)$ | Vibração Longitudinal na posição r e no tempo $t$ |
| $m_a$ | Massa |
| $a$ | Aceleração Linear |
| $d$ | Distância |
| $\kappa$ | Curvatura resultante da barra |
| $u_{r_1}(t)$ | Força Aplicada no ponto $r_1$ |
| $r_1$ | Ponto $r_1$ pertencente à superfície da barra, $0 \leq r_1 \leq L$ |
| $c_b$ | Constante que depende das propriedades da barra |
| $i$ | Modo de vibração $i$ |
| $\phi_i$ | Solução da equação de Euller-Bernoulli no modo $i$ |
| $\lambda_i$ | Constante no modo $i$ |
| $A_i$ | Constante no modo $i$ |
| $B_i$ | Constante no modo $i$ |

| | |
|---|---|
| $C_i$ | Constante no modo $i$ |
| $D_i$ | Constante no modo $i$ |
| $\omega_i$ | Frequência angular do modo $i$ |
| $j$ | Número de pares de atuadores e sensores piezoelétricos |
| $L_{pj}$ | Comprimento do $j$-ésimo elemento piezoelétrico |
| $W_{pj}$ | Largura do $j$-ésimo elemento piezoelétrico |
| $h_{pj}$ | Espessura do $j$-ésimo elemento piezoelétrico |
| $W$ | Largura da barra |
| $h$ | Espessura da Barra |
| $V_{aj}(t)$ | Tensão Elétrica aplicada no $j$-ésimo atuador piezoelétrico |
| $M_{pr}(t,r)$ | Momento fletor gerado pelo atuador piezoelétrico |
| $\varepsilon_r$ | Deformação induzida no atuador piezoelétrico devido ao momento fletor |
| $\varepsilon_p$ | Deformação induzida no atuador piezoelétrico devido à tensão elétrica aplicada |
| $d_{31}$ | Constante de carga do atuador piezoelétrico |
| $\sigma_r$ | Tensão mecânica longitudinal na barra na direção $r$ |
| $\sigma_{pr}$ | Tensão mecânica longitudinal no atuador piezoelétrico na direção $r$ |
| $E_p$ | Módulo de Young do atuador piezoelétrico |
| $\Theta$ | Constante |
| $r_{1j}$ | Posição da borda inicial do $j$-ésimo elemento piezoelétrico |
| $r_{2j}$ | Posição da borda final do $j$-ésimo elemento piezoelétrico |
| $H(r)$ | Função de Heaviside |
| $\delta_{ij}$ | Função Delta de Kroenecker |
| $\zeta_i$ | Coeficiente de amortecimento |
| $\delta_i$ | Função Delta de Dirac |
| $q_i(t)$ | Solução geral da equação de Euller-Bernoulli em relação ao tempo |
| $\kappa$ | Constante que depende das propriedades da barra e do piezoelétrico |
| $K_j$ | Constante que depende das propriedades da barra e do $j$-ésimo atuador piezoelétrico |
| $\Psi_{ij}$ | Função que depende da localização do $j$-ésimo atuador piezoelétrico |
| $G(s,r)$ | Função de Transferência da tensão aplicada no atuador para a deformação da barra no ponto $r$ |

| | |
|---|---|
| $P_i$ | Constante que depende das propriedades da barra e dos pares piezoelétricos |
| $q_t(t)$ | Distribuição de carga elétrica gerada pelo sensor piezoelétrico |
| $k_{31}$ | Fator de acoplamento eletromecânico do sensor piezoelétrico |
| $g_{31}$ | Constante de tensão elétrica do sensor piezoelétrico |
| $y_p$ | Distância normal ao eixo neutro da barra e o plano médio do sensor piezoelétrico |
| $V_{sk}(t)$ | Tensão elétrica induzida no $k$-ésimo sensor piezoelétrico |
| $C_k$ | Capacitância do $k$-ésimo sensor piezoelétrico |
| $\Omega_k$ | Constante que depende das propriedades da barra e do $k$-ésimo piezoelétrico |
| $G_{vs}(s)$ | Função de Transferência da tensão elétrica aplicada no atuador piezoelétrico para a tensão elétrica induzida no sensor piezoelétrico |
| $\Upsilon_i$ | Constante que depende das propriedades da barra e dos elementos piezoelétricos |
| $\Phi_i$ | Constante que depende do modo de vibração e da posição do piezoelétrico |
| $G_N(s,r)$ | Função de Transferência da tensão aplicada no atuador para a deformação da barra no ponto $r$ truncada para $N$ modos |
| $E(s,r)$ | Erro da Função de Transferência da tensão aplicada no atuador para a deformação da barra no ponto $r$ truncada para $N$ modos |
| $k_e(r)$ | Erro acumulado DC |
| $F_i$ | Constante que depende das propriedades da barra e dos pares piezoelétricos |
| $\hat{G}_N(s,r)$ | Função de Transferência da tensão aplicada no atuador para a deformação da barra no ponto $r$ truncada para $N$ modos com a constante de otimização |
| $k_i$ | Constante de otimização da função truncada |
| $\ll . \gg_n$ | Norma $H_2$ para estrutura inteira |
| $J_c$ | Função de custo |
| $W(s,r)$ | Função de Transferência de um filtro RC ideal |
| $\hat{G}(s)$ | Função de Transferência $G(s,r)$ para um ponto definido no espaço |
| $\lVert\tilde{G}\rVert_2$ | Norma $H_2$ de $\tilde{G}$ |
| $\mathcal{R}$ | Intervalo do Domínio |
| $f_i(r_1)$ | Norma $H_2$ |
| $\mathcal{M}_i(r_1)$ | Controlabilidade Modal |
| $\alpha_i$ | Valor máximo de $f_i(r_1)$ |
| $S(r_1)$ | Controlabilidade Estrutural |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{B}$ | Valor máximo de $\sum f_i(r_1)$ |
| $f_i$ | Frequência angular no modo i |
| $Q$ | Carga de Entrada |
| $R$ | Resistência Equivalente |
| $C$ | Capacitância Equivalente |
| $C_c$ | Capacitância dos cabos |
| $C_a$ | Capacitância do amplificador |
| $R_a$ | Resistência do amplificador |
| $C_s$ | Capacitância do piezoelétrico |
| $R_s$ | Resistência do piezoelétrico |
| $I$ | Corrente |
| $V$ | Tensão Elétrica |
| $\tau$ | Constante de Tempo |
| $R_f$ | Resistor Shunt |
| $C_f$ | Capacitor do amplificador de tensão |
| $x(t)$ | Sinal de Entrada |
| $X$ | Amplitude do Sinal de Entrada |
| $y(t)$ | Sinal de Saída |
| $Y$ | Amplitude do Sinal de saída |
| $\varphi$ | Defasagem |
| $X(j\omega)$ | Transformada de Fourier do sinal de Entrada |
| $Y(j\omega)$ | Transformada de Fourier do sinal de saída |
| $y_{mq}$ | Dados de saída para o método dos mínimos quadrados |
| $x_{mq}$ | Dados de entrada para o método dos mínimos quadrados |
| $\theta_{mq}$ | Parâmetro a ser definido pelo método dos mínimos quadrados |
| $X_{mq}$ | Vetor com as entradas para o método dos mínimos quadrados |
| $\xi$ | Erro ao tentar explicar $y_{mq}$ através de $x_{mq}$ e $\theta_{mq}$ |
| $J_{mq}$ | Função de custo do método dos mínimos quadrados |
| $G_{piezoelétrico}$ | Função de Transferência a partir da tensão elétrica aplicada no filtro RC para a tensão elétrica induzida no sensor piezoelétrico |
| $G_{RC}$ | Função de Transferência a partir da tensão elétrica aplicada no filtro RC passa-baixas para a tensão elétrica de saída do filtro RC passa-baixas |

| | |
|---|---|
| $b$ | Polo que depende das características do piezoelétrico |
| $RC$ | Polo que depende dos valores da resistência e da capacitância do filtro |
| $k_s$ | Ganho da função de transferência |
| $p_p$ | Polinômio característico dos polos de $G_{vs}(s)$ |
| $u_1$ | Sinal de Entrada |
| $y_1$ | Sinal de Saída |
| $G_b(j\omega)$ | Função de transferência obtida da tensão elétrica aplicada no atuador piezoelétrico para a tensão elétrica induzida no sensor piezoelétrico |
| $G_{ba}(j\omega)$ | Função de transferência obtida e ajustada da tensão elétrica aplicada no atuador piezoelétrico para a tensão elétrica induzida no sensor piezoelétrico |
| $G_{bac}$ | Função de transferência utilizada para desenvolver o controlador |
| $R(s)$ | Sinal de referência |
| $u(s)$ | Sinal do controlador |
| $C(s)$ | Controlador |
| $a(s)$ | Numerador da planta $G_{ba}(s)$ |
| $b(s)$ | Denominador da planta $G_{ba}(s)$ |
| $q(s)$ | Numerador da planta $G_{ba}(s)$ |
| $p(s)$ | Denominador da planta $G_{ba}(s)$ |
| $T(s)$ | Função de transferência do sistema em malha fechada |
| $\Lambda(s)$ | Polinômio característico da $T(s)$ |
| $l(s)$ | Coeficientes que determinam $\Lambda(s)$ |
| $m$ | Ordem do controlador |
| $n$ | Ordem da planta |
| $M_{G_{ba}}$ | Matriz que depende de $G_{ba}(s)$ |
| $M_{c(s)}$ | Matriz que depende de $C(s)$ |
| $\alpha$ | Constante |
| $\beta$ | Constante |
| $\zeta_t$ | Coeficiente de amortecimento do sistema em malha fechada |
| $\omega_t$ | Frequência de ressonância a ser amortecida no sistema em malha fechada |

# 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho será visto como vibrações mecânicas afetam estruturas flexíveis e como isso pode ser atenuado, ou seja, controlado. Estruturas flexíveis são estruturas que, com a aplicação de alguma carga, sofrem alguma deformação estrutural, como vibrações. Esse tipo de estrutura pode ser encontrada em uma gama muito vasta de sistemas, como máquinas, construções, veículos, robôs, entre outros.

Como dito anteriormente, uma das deformações estruturais que ocorrem em estruturas flexíveis é a vibração. A vibração é um fenômeno natural que ocorre em vários sistemas que englobam diversas áreas da engenharia. Ela pode vir a ser contra ou a favor do processo. Em esteiras, por exemplo, a vibração ajuda o processo no aspecto de contribuir com o movimento de objetos. Porém, muitas vezes, essa vibração é um problema, afetando de forma considerável o desempenho do sistema, seja deformando estruturas, prejudicando o foco de equipamentos óticos ou outros efeitos indesejáveis e é dessa forma que a vibração será vista neste trabalho, como um problema a ser resolvido.

Um problema que é bem didático é de um braço robótico que necessita de uma acurácia elevada em sua tarefa ao qual foi designado. O que acontece se esse robô sofre uma perturbação, como um torque em sua junta, o qual gera uma vibração mecânica em seu braço? Sua acurácia será comprometida, então como resolver isto?

Para resolver este problema, ou se reprojeta todo o *design* do sistema (se for o caso anterior: reprojetar o braço do robô de forma a atenuar a vibração), ou se utiliza a técnica de amortecimento. O primeiro geralmente custa caro, e muitas vezes não há solução, enquanto que o segundo é efetivo somente para altas frequências, além do que ambos são formas de controles passivos. Neste trabalho será visto um método de controle ativo de vibrações para todas as frequências, de modo a apresentar uma solução prática para este problema e de preencher essa lacuna de controle de vibrações.

Para desenvolver um método de controle, o primeiro procedimento a se fazer é modelar todo o sistema matematicamente. Será visto a modelagem matemática de uma barra engastada a partir das equações fundamentais da mecânica, como as leis de Newton. Com a modelagem

matemática da barra, é possível equacionar sua vibração longitudinal, assim como seus vários modos de vibração. Cada modo de vibração depende da frequência de ressonância da barra e isso é de suma importância para este estudo, pois ressonância é a tendência de um sistema oscilar em máxima amplitude. Nessas frequências, até mesmo uma força de pequena amplitude pode causar uma vibração de grande amplitude, pois se armazena energia vibracional. Portanto, a malha de controle deve ser voltada a essas frequências, pois podem causar perturbações consideráveis com pouco esforço. Um exemplo bem conhecido é a famosa ponte de Tacoma, localizada no estreito de Tacoma, em Washington, Estados Unidos. Em 1940, essa ponte entrou em ressonância com os fortes ventos da região e eventualmente se rompeu, mesmo sendo uma estrutura considerada robusta, toda cimentada.

A outra parte da modelagem matemática é referente aos sensores e atuadores piezoelétricos. A piezoeletricidade é a capacidade de certos materiais apresentaram deformação mecânica quando lhe é aplicada uma tensão elétrica, e também de gerarem uma tensão elétrica quando é realizada uma deformação no material. Para projetar uma malha de controle de vibrações na barra engastada, é necessário saber como esses componentes se comportam no sistema, pois são eles que irão controlar a vibração, eles serão os componentes ativos. Portanto, será equacionada uma função de transferência que relaciona a tensão aplicada no atuador piezoelétrico com a tensão induzida no sensor piezoelétrico.

Com o embasamento teórico feito, o sistema será identificado experimentalmente, com o sinal PRBS, *Pseudo-Random Binary Signal*, que é um sinal pseudoaleatório de pulsos de tensão elétrica. Para isto, se aplica o sinal PRBS na entrada do sistema e se coleta dados da saída. O *software* Matlab oferece uma *toolbox* chamada *Identification System Toolbox*, a qual será utilizada para analisar esses dados coletados e assim validar a teoria com a prática.

Por último, será projetado um controle de vibrações para a barra engastada através de um método clássico em projetos de controle, que é o método de alocação de polos. Esse método consiste em alocar polos de acordo como se deseja no sistema de malha fechada. A partir disso e da função de transferência da planta é possível projetar um controlador que satisfaça as condições impostas pelos polos escolhidos na malha fechada. Para validar os controladores, será executado um teste de vibração na barra e será comparado o tempo, que a barra demora em parar, com e sem controlador, assim como os efeitos dos controladores na planta.

# 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

## 2.1 Introdução

A modelagem matemática é a área de conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos, sendo empregada em diversos campos de estudo, tais como física, química, biologia, economia e engenharia. Pode-se, então, dizer que um modelo matemático é desenvolvido para simular a realidade usando a linguagem matemática.

Um modelo matemático representa uma aproximação de um sistema físico. Ele deve incluir detalhes para conseguir descrever o sistema, em termos de equações, sem torná-lo muito complexo. Porém há um compromisso a ser feito, quanto mais próximo da realidade, mais complexo o sistema e mais difícil de resolvê-lo, e quanto mais simples, mais distante e fácil.

A primeira parte está voltada a modelagem matemática da barra em estudo, e logo em seguida a simulação em vibração livre pelo *software* Matlab, para analisar o comportamento da barra para os diferentes modos de vibração. Será vista também a modelagem matemática do comportamento dos sensores e atuadores piezoelétricos em relação às vibrações na barra e com isso a definição de uma função de transferência que relaciona as grandezas de interesse do estudo, além de determinar o posicionamento dos piezoelétricos a modo de otimizar o sistema como um todo.

## 2.2 Modelagem Matemática da Barra

Inúmeros sistemas podem ser classificados como sistemas espacialmente distribuídos. Este trabalho é concentrado em sistemas espacialmente distribuídos que são afetados, de uma maneira considerável, por vibrações, que são conhecidas como estruturas flexíveis.

A dinâmica desses sistemas pode ser especificada a partir de equações diferenciais, como será visto em seguida. Essa equação diferencial pode ser discretizada, utilizando o processo de análise modal, e, aplicando as condições de fronteira corretamente, é possível determinar as características espaciais do sistema.

Uma barra, como mostrado na Figura (1), é um sistema espacialmente distribuído, cujas dimensões laterais são insignificantes quando comparadas às dimensões longitudinais. Para analisar esse sistema, algumas condições são assumidas:

- ✓ O material segue as leis de Hooke;
- ✓ A deformação por cisalhamento é insignificante comparada a deformação por flexão;
- ✓ A rotação da barra é insignificante comparada a translação vertical.

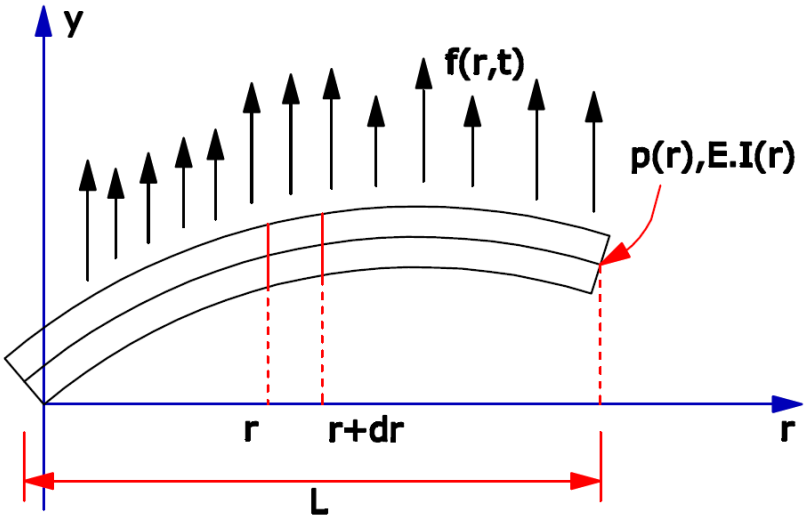


Figura 1: Barra Genérica.

Também é definido que essa barra possui um comprimento $L$, cuja rigidez à deformação em um ponto qualquer de sua supercicie, ponto $r$ é determinado por $EI(r)$, onde $E$ é o modulo de Young e $I$ é o momento de inércia. O diagrama de corpo livre é mostrado pela figura a seguir:

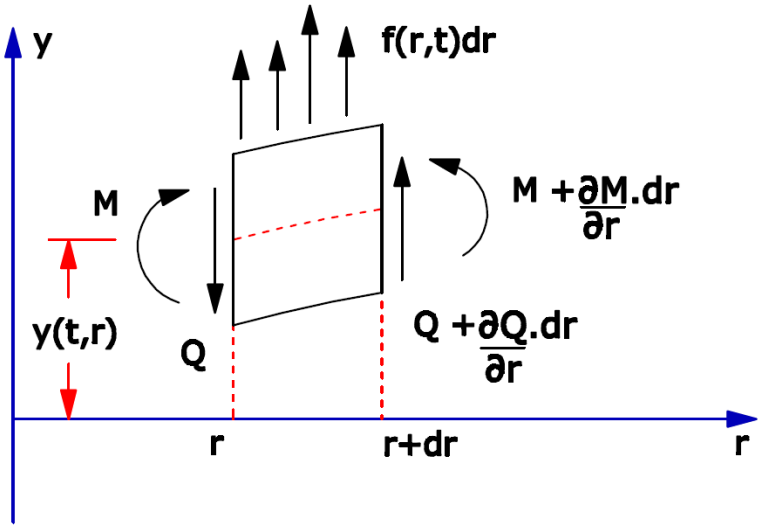


Figura 2: Diagrama de Corpo Livre de uma Barra.

Onde $Q$ denota a força de cisalhamento e $M$ denota o momento fletor. Aplicando a primeira lei de Newton, à qual diz que para um objeto estar em repouso a resultante das forças deve ser nula, chega-se à:

$$Q(t,r) + \frac{\partial Q(t,r)}{\partial r}.dr - Q(t,r) + f(t,r).dr = \rho.A(r).dr.\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} \quad (1)$$

Onde $f(t,r)$ é a força aplicada na barra, $\rho$ é a densidade do material, $A(r)$ é a seção de área da barra no ponto $r$, e $y(t,r)$ é a vibração longitudinal, a variável de interesse. O termo $\rho.A(r).\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2}$ é justificado pela segunda lei de Newton:

$$F = m_a.a \quad (2)$$

Onde $m$ é a massa e $a$ é a aceleração do objeto. A multiplicação $\rho.A(r)$ denota massa, pois é densidade multiplicado pela àrea, e $\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2}$ denota a derivada da segunda da vibração longitudinal (deslocamento), portanto aceleração. Logo, a multiplicação entre essas duas variáveis resulta em uma força, que deve ser considerada para satisfazer a primeira lei de Newton.

Voltando a equação (1), e simplificando-a, chega-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial Q(t,r)}{\partial r} + f(t,r) = \rho.A(r).\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} \quad (3)$$

Monta-se então a equação dos momentos fletores em relação ao eixo normal dos eixos $r$ e $y$ (na direção para fora da folha). De acordo com a segunda Lei de Newton para corpos rígidos, a rotação de um corpo em relação ao seu eixo é nula quando a resultante dos momentos também for nula. Portanto:

$$M(t,r) + \frac{\partial M(t,r)}{\partial r}.dr - M(t,r) + \left(Q(t,r) + \frac{\partial Q(t,r)}{\partial r}.dr\right).dr + f(t,r).dr.\frac{dr}{2} = 0 \quad (4)$$

Lembrando que a definição de momento fletor é:

$$M = F.d \quad (5)$$

Onde $d$ é a distância. Para simplificar a equação (4), ignoram-se as variáveis com as maiores ordens de $dr$ e com isso:

$$Q(t,r) = -\frac{\partial M(t,r)}{\partial r} \quad (6)$$

De acordo com a teoria clássica das vigas, ou barras, a relação entre o momento fletor aplicado, $M(t,r)$, e a curvatura resultante da viga, $\kappa$, é de:

$$M(t,r) = E.I(r).\kappa = E.I(r).\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2} \quad (7)$$

E finalmente substituindo as equações (7) e (6) na (3), chega-se à:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}.\left(EI(r).\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2}\right) + \rho.A(r).\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} = f(t,r), \qquad 0 \leq r \leq L \tag{8}$$

A equação definida em (8) é a equação Bernoulli-Euller para vibração devido à deformação em uma barra qualquer. Existem vários tipos de barras, e o tipo de barra de interesse deste trabalho é a barra engastada. Esse tipo de barra pode ser visto pela figura abaixo:

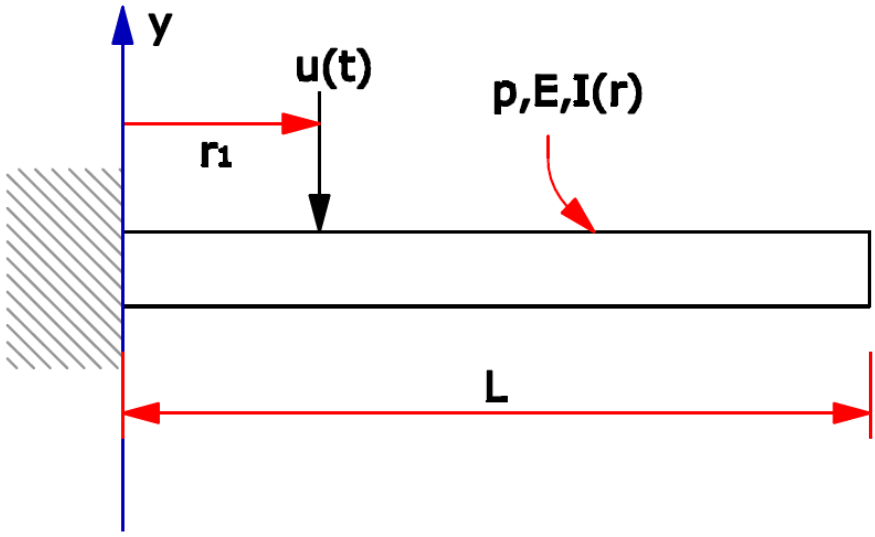


Figura 3: Barra Engastada.

Como pode ser visto, uma barra engastada é uma barra que possui uma extremidade livre e outra fixa. Considerando uma força $u(t)$ aplicada em um ponto $r_1$ da barra, têm-se as seguintes equações de fronteira:

$$y(t,0) = 0\ (Deslocamento) \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial(y(t,0))}{\partial r} = 0\ (Declividade) \tag{9.2}$$

$$M = \frac{\partial^2(y(t,L))}{\partial r^2} = 0\ (Momento\ Fletor) \tag{9.3}$$

$$Q = \frac{\partial^3(y(t,L))}{\partial r^3} = 0\ (Esforço\ Cortante) \tag{9.4}$$

No próximo tópico será visto a solução desta equação para vibração livre para diferentes modos, e também a simulação da resposta pelo *software* Matlab.

## 2.3 Análise em Vibração Livre

Vibração livre é quando a barra não apresenta uma distribuição de carga em sua superfície, ou seja, é aplicada em algum momento, alguma força para causar a perturbação e, logo após, essa força é retirada. Portanto a equação (8) fica na forma de:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}.\left(EI(r).\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2}\right) + \rho.A(r).\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \leq r \leq L \tag{10}$$

Que pode ser simplificada para:

$$\left(c_b.\frac{\partial^4 y(t,r)}{\partial r^4}\right) + \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \leq r \leq L \tag{11}$$

Onde $c_b$ equivale à:

$$c_b = \frac{EI(r)}{\rho.A(r)} \tag{12}$$

De acordo com (HALIM; MOHEIMANI, 2001) e com a teoria vista em equações diferenciais, essa equação tem como solução geral:

$$\phi_i(r) = A_i sin(\lambda_i.r) + B_i cos(\lambda_i.r) + C_i sinh(\lambda_i.r) + D_i\, cosh(\lambda_i.r) \tag{13}$$

Para determinar as constantes $A_i, B_{i,}, C_i\ e\ D_i$, devem-se aplicar as condições de fronteira vistas em (9). Será analisado primeiramente (9.1) e (9.2):

$$\begin{gathered}\phi_i(0) = 0 = A_i sin(0) + B_i cos(0) + C_i sinh(0) + D_i\, cosh(0) \\ \mathrm{B}_i + D_i = 0\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\phi(0))}{\partial r} = 0 = A_i.cos(0) - B_i sin(0) + C_i cosh(0) + D_i\, sinh(0) \\ A_i + C_i = 0\end{gathered} \tag{15}$$

Aplicando-se os resultados de (15) e (14) em (9.3) e (9.4):

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2(\phi(L))}{\partial r^2} = 0 = -A_i sin(\lambda_i.L) - B_i cos(\lambda_i.L) + C_i sinh(\lambda_i.L) + D_i\, cosh(\lambda_i.L) \\ A_i(sin(\lambda_i.L) + sinh(\lambda_i.L)) + B_i(cos(\lambda_i.L) + cosh(\lambda_i.L)) = 0\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3(\phi(L))}{\partial r^3} = 0 = -A_i.cos(\lambda_i.L) + B_i sin(\lambda_i.L) + C_i cosh(\lambda_i.L) + D_i\, sinh(\lambda_i.L) \\ A_i(cos(\lambda_i.L) + cosh(\lambda_i.L)) - B_i(sin(\lambda_i.L) - sinh(\lambda_i.L)) = 0\end{gathered} \tag{17}$$

Isolando $B_i$ na equação (16) e deixando em termo de $A_i$:

$$B_i = -\frac{A_i(sin(\lambda_i.L) + sinh(\lambda_i.L))}{(cos(\lambda_i.L) + cosh(\lambda_i.L))} \tag{18}$$

E agora substituindo em (17):

$$\begin{gathered}A_i(cos(\lambda_i.L) + cosh(\lambda_i.L)) \\ + \frac{A_i(sin(\lambda_i.L) + sinh(\lambda_i.L))}{(cos(\lambda_i.L) + cosh(\lambda_i.L))}.(sin(\lambda_i.L) - sinh(\lambda_i.L)) = 0\end{gathered} \tag{19}$$

Para simplificar a equação acima, deve-se primeiramente elevar toda a expressão ao quadrado e usar as seguintes propriedades trigonométricas:

$$\sin^2(x) + cos^2(x) = 1 \tag{20}$$

$$\sinh^2(x) + cosh^2(x) = 1 \tag{21}$$

Portanto:

$$A_i(cos(\lambda_i.L).cosh(\lambda_i.L)) = -1 \tag{22}$$

Como a solução trivial não é de interesse $A_i$ deve ser diferente de zero, logo a solução do sistema fica na forma de:

$$(cos(\lambda_i.L).cosh(\lambda_i.L)) = -1 \tag{23}$$

As primeiras três soluções da equação acima são:

$$\lambda_1 L = 1.875 \tag{24}$$

$$\lambda_2 L = 4.694 \tag{25}$$

$$\lambda_3 L = 7.855 \tag{26}$$

A solução também pode ser aproximada por:

$$\lambda_n L \approx \left(n - \frac{1}{2}\right).\pi \tag{27}$$

Para determinar a equação da vibração longitudinal, substitui-se as equações (14) e (15) na equação (13):

$$\begin{aligned}\phi_i(r) &= A_i sin(\lambda_i.r) + B_i cos(\lambda_i.r) - A_i sinh(\lambda_i.r) - B_i\, cosh(\lambda_i.r)\\ &= A_i\big(\sin(\lambda_i.r) - sinh(\lambda_i.r)\big) + B_i(cos(\lambda_i.r) - cosh(\lambda_i.r))\end{aligned} \tag{28}$$

E finalmente substituindo a equação (18) na equação (28) e admitindo $A_i = 1$, para uma equação normalizada, têm-se a expressão final da vibração longitudinal em uma barra engastada:

$$\phi_i(r) = \big(\sin(\lambda_i.r) - sinh(\lambda_i.r)\big) + \frac{(sin(\lambda_i.L) + sinh(\lambda_i.L))}{(cos(\lambda_i.L) + cosh(\lambda_i.L))}.(cos(\lambda_i.r) - cosh(\lambda_i.r)) \tag{29}$$

Para uma melhor análise da equação acima, o gráfico da função foi gerado pelo *software* Matlab para os três primeiros modos, pois neste trabalho os três primeiros modos são de interesse. Foi considerada uma barra de $L = 0{,}72m$ e $A_i = 1$.

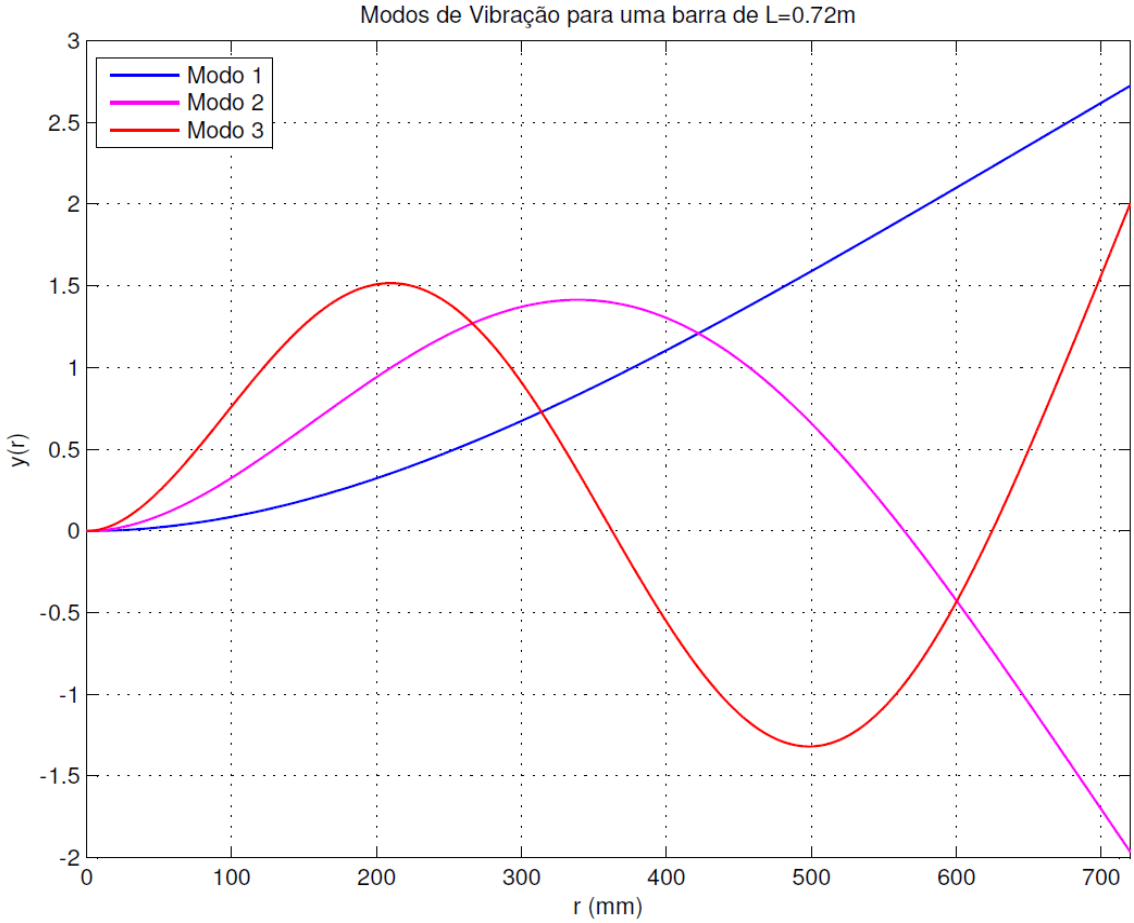


Figura 4: Modos de Vibração para uma barra engastada.

Onde a curva em azul é o primeiro modo de vibração, a curva em rosa é o segundo modo de vibração e a curva em vermelho é o terceiro modo de vibração. No primeiro modo de vibração existe somente um nó, isto é, ponto onde a vibração longitudinal é nula, e esse nó se encontra na origem da barra, onde ela se encontra fixa. Já o segundo modo de vibração possui dois nós, um na origem e outro em aproximadamente 0,56 metros. Por último, o terceiro modo de vibração possui três nós, um na origem, outro aproximadamente no centro da barra, em torno de 0,36 metros, e o último em torno de 0,63 metros.

As frequências de ressonância da barra, de acordo com (HALIM; MOHEIMANI, 2001), podem ser determinadas por:

$$\omega_i = \lambda_i^2 . \sqrt{\frac{E.I}{p.A}} \tag{30}$$

Onde $\omega_i$ é a frequência de ressonância, $\lambda_i$ é uma constante que pode ser encontrada por (27), $E$ é o módulo de Young, $I$ é o momento de inércia da barra, $p$ é a densidade volumétrica da barra e $A$ é a seção transversal da barra. (HALIM; MOHEIMANI, 2001) encontra a

equação (30), aplicando a equação (44) na equação de Euller-Bernoulli em vibração livre (10), e também aplicando as condições de ortogonalidade definidas em (45) e (46).

## 2.4 Análise do Atuador Piezoelétrico

Considere uma barra com as características da equação definida como equação de Euler-Bernoulli, equação (8), homogênea e com finitos pares de atuadores e sensores piezoelétricos, como na Figura (5). Suponha que existe $J$ pares de atuadores e sensores piezoelétricos ao decorrer da barra. Suponha também que os sensores e atuadores piezoelétricos possuam dimensões $W_{pj}, L_{pj}$ e $h_{pj}$, onde $W_{pj}$ é a largura do piezoelétrico, $L_{pj}$ é o comprimento do piezoelétrico e $h_{pj}$ é a espessura de cada componente do par, e que a barra possui dimensões de $W, L$ e $h$, onde $W$ é a largura da barra, $L$ é o comprimento da barra e $h$ é a espessura da barra, como mostrado na Figura (6). A tensão elétrica aplicada nos atuadores piezoelétricos é definida por:

$$V_{aj}(t) = \left[V_{ai}(t), V_{a2}(t), \dots, V_{aJ}(t)\right] \tag{31}$$

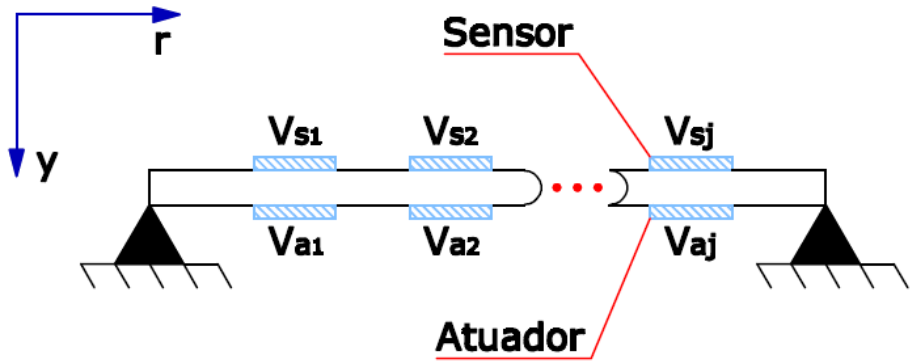


Figura 5: Barra com J transdutores piezoelétricos.

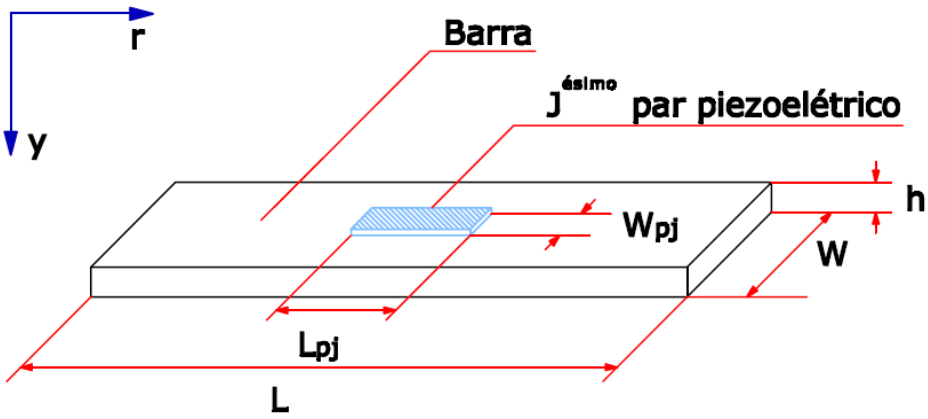


Figura 6: Dimensões da barra e do transdutor piezoelétrico.

Para analisar o efeito do atuador piezoelétrico no sistema, deve-se analisar novamente a equação de Euler-Bernoulli (8). Neste caso, a equação fica na forma de:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}.\left(EI(r).\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2}\right)+\rho.A(r).\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 M_{pr}(t,r)}{\partial r^2}, \qquad 0\leq r\leq L \tag{32}$$

Onde $\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_{pr}(t,r)$ é a carga distribuída ao longo da barra e $M_{pr}(t,r)$ é o momento fletor devido a uma perturbação externa na barra, supondo que somente a vibração longitudinal é considerada. Deve-se então definir os momentos fletores causados na barra pelos atuadores piezoelétricos.

Quando uma tensão elétrica é aplicada nos terminais dos atuadores piezoelétricos, os mesmos geram um momento fletor na barra através da contração e expansão do material piezoelétrico. Para simplificar a solução do sistema, assume-se que a massa e a rigidez dos atuadores são muito menores que da barra.

A deformação longitudinal resultante dentro do atuador é contribuída pela deformação induzida, devido ao momento na barra, $\varepsilon_r$, e pela deformação não forçada $\varepsilon_p$. Essa deformação não forçada é produzida pelo atuador piezoelétrico quando ele se encontra livre para se expandir ou comprimir, ou seja, é a deformação devida a tensão elétrica aplicada. Isso pode ser visto pela Figura (7).

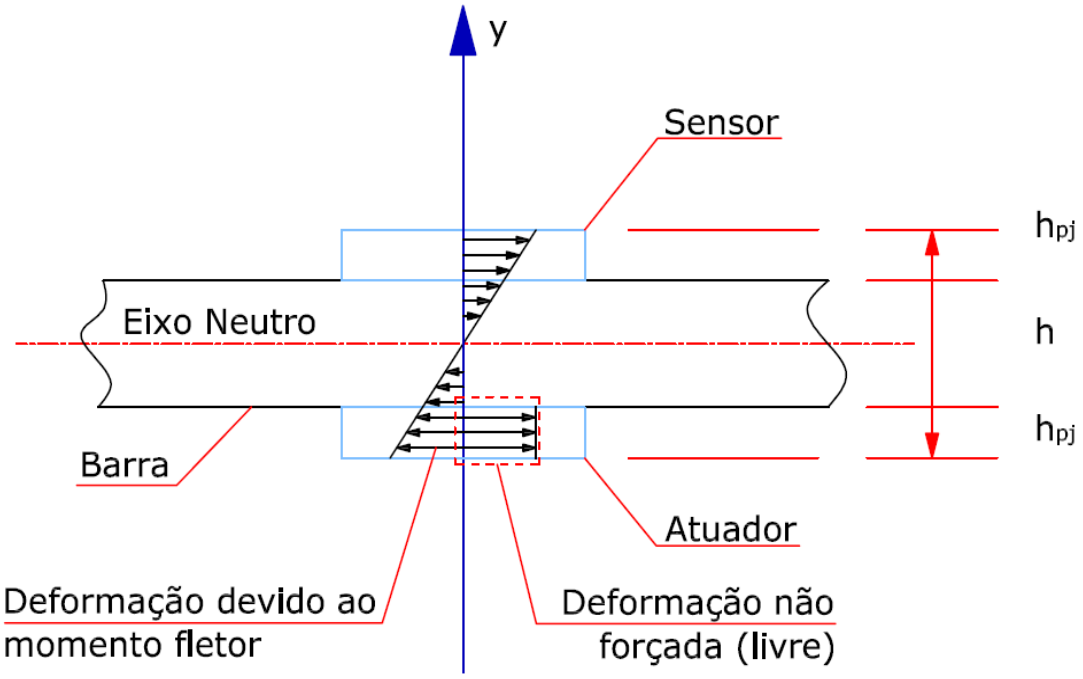


Figura 7: Deformações em uma atuador piezoelétrico.

A equação que define a deformação não forçada em relação a tensão elétrica aplicada é:

$$\varepsilon_p = \left(\frac{d_{31}}{h_p}\right) V_{aj}(t) \tag{33}$$

Onde $d_{31}$ é a constante de carga do atuador piezoelétrico, $h_p$ é a espessura do atuador piezoelétrico e $V_{aj}(t)$ é a tensão elétrica aplicada no $j$-ésimo atuador piezoelétrico. O termo $d_{31}$, que genericamente pode ser escrito por $d_{ij}$, é definido como a proporção entre a variação dimensional no piezoelétrico na direção $j$ para a diferença de potencial elétrico aplicado na direção $i$.

Para relacionar a deformação induzida com a deformação não forçada, utiliza-se a lei de Hooke:

$$\sigma_{pr} = E_p.(\varepsilon_r - \varepsilon_p) \tag{34}$$

$$\sigma_r = E.(\varepsilon_r) \tag{35}$$

Onde $\sigma_r$ é a tensão longitudinal da barra, $\sigma_{pr}$ é a tensão longitudinal do atuador piezoelétrico, $E$ é o modulo de Young da barra e $E_p$ é o modulo de Young do atuador. A distribuição da deformação pela espessura da barra pode ser considerada puramente linear somente se:

$$\varepsilon_r = \Theta.y \tag{36}$$

Portanto $\Theta$ pode ser definido pela equação de equilíbrio dos momentos fletores da Figura (7) em relação ao eixo neutro da barra:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y.\sigma_r.dy = -\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} y.\sigma_{pr}.dy \tag{37}$$

Para resolver (37), é assumido que o atuador piezoelétrico seja colado na barra perfeitamente, de modo que não há tensão de cisalhamento entre o atuador e barra. Também é assumido que a espessura dos atuadores piezoelétricos é muito menor que a espessura da barra, de modo a não alterar a posição do eixo neutro da barra. Usando as equações (34), (35) e (36) na equação (37), chega-se à:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2.E.\Theta.dy = -\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} y.E_p.(\Theta.y - \varepsilon_p).dy \tag{38}$$

Simplificando a equação acima:

$$\Theta = \varepsilon_p.\left[\frac{12.E_p.h_p.(h_p + h)}{2.E.h^3 + E_p.\left[\left(h + 2.h_p\right)^3 - h^3\right]}\right] \tag{39}$$

Ou:

$$\Theta = \varepsilon_p . k \tag{40}$$

Onde:

$$\kappa = \left[ \frac{12. E_p . h_p . (h_p + h)}{2. E. h^3 + E_p . \left[ \left( h + 2. h_p \right)^3 - h^3 \right]} \right] \tag{41}$$

Supõe-se que agora que os extremos dos atuadores piezoelétricos são localizados em $r_{1j}$ e em $r_{2j}$, sendo $j$ o $j$-ésimo atuador piezoelétrico. Resolvendo a primeira integral de (38), e substituindo pelos valores de (40) e (33), chega-se à expressão do momento fletor da barra (HALIM;MOHEIMANI,2001):

$$M_{prj} = \frac{\kappa . E . d_{31j} . h^3 . W_{pj}}{12. h_{pj}} . \left[ H\left(r - r_{1j}\right) - H(r - r_{2j} \right] . V_{aj} \tag{42}$$

Onde $H\left(r - r_{1j}\right)$ é a função de Heaviside:

$$H\left(r - r_{1j}\right) = \begin{cases} 0 & , r < r_{1j} \\ 1 & , r > r_{1j} \end{cases} \tag{43}$$

Com a função do momento fletor produzido pelo atuador piezoelétrico definida, voltaremos agora para a análise da equação de vibração longitudinal da barra, a equação (32). Essa equação possui infinitas soluções, visto que a estrutura possui infinitas frequências de ressonância, cada uma associada a um modo de vibração. De acordo com (HALIM; MOHEIMANI, 2001) a solução dessa equação é na forma de:

$$y(t, r) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(r) . q_i(t) \tag{44}$$

Onde o índice $i$ indica o $i$-ésimo modo de vibração, $q_i(t)$ é a solução temporal do sistema e $\phi_i(r)$ é a solução espacial do sistema, que depende da posição na barra. A função $\phi_i$(r) satisfaz as seguintes equações de ortogonalidade (HALIM; MOHEIMANI, 2001):

$$p. A(r) \int_0^L \phi_i(r). \phi_J(r). dr = \delta_{ij} \tag{45}$$

$$E. I(r) \int_0^L \frac{\partial^4 \phi_i(r)}{\partial r^4} . \phi_J(r). dr = \delta_{ij} . {\omega_i}^2 \tag{46}$$

Onde $\omega_i$ é a frequência natural da viga no modo i e $\delta_{ij}$ é a função delta de Kroenecker. A função de Kroenecker é definida como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases} \tag{47}$$

Definido isto, substitui a equação (44) em (32):

$$\frac{\partial^4}{\partial r^4}.\left(EI(r).\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(r).q_i(t)\right) + \rho.A(r).\frac{\partial^2}{\partial t^2}.\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(r).q_i(t) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}M_{pr}(t,r), \tag{48}$$

Simplificando e multiplicando os dois lados por $\phi_J(r)$:

$$\left(EI(r).\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t).\phi_j(r).\frac{\partial^4\phi_i(r)}{\partial r^4}\right) + \rho.A(r).\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(r).\phi_j(r).\frac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_{pr}(t,r)}{\partial r^2}.\phi_j(r) \tag{49}$$

Integrando a equação (49) por todo o intervalo da barra, isto é, de zero ao comprimento $L$ da barra:

$$EI(r).\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t).\int_0^L\phi_j(r).\frac{\partial^4\phi_i(r)}{\partial r^4}.dr + \rho.A(r).\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2}.\int_0^L\phi_i(r).\phi_j(r).dr = \int_0^L\frac{\partial^2 M_{pr}(t,r)}{\partial r^2}.\phi_J(r).dr \tag{50}$$

Para resolver esta equação, deve-se primeiro integrar a primeira integral da esquerda quatro vezes por integração por parte. Lembrando que integração por partes é definida por:

$$\int f(x).g'(x).dx = f(x).g(x) - \int g(x).f'(x).dx \tag{51}$$

Portanto, a equação (50) fica na forma de:

$$EI(r)\sum_{j=1}^{\infty}q_i(t).\left[\frac{\partial^3\phi_i(r)}{\partial r^3}.\phi_j(r) - \frac{\partial^2\phi_i(r)}{\partial r^2}.\frac{\partial\phi_j(r)}{\partial r} + \frac{\partial\phi_i(r)}{\partial r}.\frac{\partial^2\phi_j(r)}{\partial r^2} - \phi_i(r).\frac{\partial^3\phi_j(r)}{\partial r^3} + \int_0^L\phi_j(r).\frac{\partial^4\phi_j(r)}{\partial r^4}.dr\right] + \rho.A(r).\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2}.\int_0^L\phi_i(r).\phi_j(r).dr = \int_0^L\frac{\partial^2 M_{pr}(t,r)}{\partial r^2}.\phi_J(r).dr \tag{52}$$

Para simplificar a expressão (52), aplica-se as condições de ortogonalidade descritas pelas equações (45) e (46). Para essas condições possuírem um valor diferente de zero, as condições da função de delta de Kroenecker (Equação (47)) devem ser satisfeitas, de modo que $i$ deve ser igual à $j$. Portanto:

$$q_i(t).\omega_i^2 + \frac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{p.A(r)}\int_0^L\frac{\partial^2 M_{pr}(t,r)}{\partial r^2}.\phi_i(r).dr \tag{53}$$

(MOHEIMANI et al., 2003) sugere que um termo $2\zeta_i\omega_i$ deve ser acrescido na equação (53), pois existe um amortecimento viscoso em objetos situados em meios como o ar. Logo:

$$q_i(t).\omega_i^2 + 2\zeta\omega_i.\frac{\partial q_i(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{p.A(r)}\int_0^L \frac{\partial^2 M_{pr}(t,r)}{\partial r^2}.\phi_i(r).dr \tag{54}$$

Onde $\zeta_i$ é o coeficiente de amortecimento. Para chegar à equação final, deve-se finalmente resolver o lado direito da equação (54). Como o momento devido ao atuador piezoelétrico já foi determinado, basta derivar duas vezes em relação à $r$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_{pr}(t,r)}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2\left(\frac{k_j.E.d_{31j}.h^3.W_{pj}}{12.h_{pj}}.\left(H(r-r_{1j}) - H(r-r_{2j}).V_{aj}\right)\right)}{\partial r^2} \\ &= K_j.V_{aj}.\frac{\partial^2.\left(H(r-r_{1j}) - H(r-r_{2j})\right)}{\partial r^2}\end{aligned} \tag{55}$$

Lembrando que a função de Heaviside tem a seguinte propriedade:

$$\frac{\partial H(r)}{\partial r} = \delta(r) \tag{56}$$

Onde $\delta(r)$ é a função delta de Dirac. Logo:

$$\frac{\partial^2 M_{pr}(t,r)}{\partial r^2} = K_j.V_{aj}.\frac{\partial.\left(\delta(r-r_{1j}) - \delta(r-r_{2j})\right)}{\partial r} \tag{57}$$

Substituindo (57) em (54):

$$\begin{aligned}&q_i(t).\omega_i^2 + 2\zeta\omega_i.\frac{\partial q_i(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2} \\ &\quad = \frac{1}{p.A(r)}\int_0^L K_j.V_{aj}.\frac{\partial.\left(\delta(r-r_{1j}) - \delta(r-r_{2j})\right)}{\partial r}.\phi_i(r).dr\end{aligned} \tag{58}$$

Ou:

$$q_i(t).\omega_i^2 + 2\zeta\omega_i.\frac{\partial q_i(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{p.A(r)}.\sum_{j=1}^{\infty} K_j.\Psi_{ij}.V_{aj} \tag{59}$$

Onde $\Psi_{ij}$ vale:

$$\Psi_{ij} = \int_0^L \frac{\partial.\left(\delta(r-r_{1j}) - \delta(r-r_{2j})\right)}{\partial r}.\phi_i(r).dr \tag{60}$$

Essa expressão pode ser ainda mais simplificada usando a seguinte propriedade de delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^n.(t-\theta).\phi(t).dt = (-1)^n.\phi^n(\theta) \tag{61}$$

Onde $n$ é enésima derivação e $\phi$ é uma função contínua em $\theta$. Logo:

$$\Psi_{ij} = \frac{\partial \phi_i(r_{2j})}{\partial r} - \frac{\partial \phi_i(r_{1j})}{\partial r} \tag{62}$$

Como para projetar uma malha de controle é necessário analisar a função de transferência do sistema, deve-se aplicar a transformada de Laplace em (59), assumindo que as condições iniciais são nulas e que é uma função de transferência de múltiplas entradas e infinitas saídas. A função de transferência da tensão aplicada nos atuadores para o deslocamento na barra é:

$$G(s,r) = \frac{y(s,r)}{V_a(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(r).P_i}{s^2 + 2.\zeta_i.\omega_i + {\omega_i}^2} \tag{63}$$

Onde:

$$P_i = \frac{1}{p.A(r)}.[K_1.\psi_{i1}, \dots, K_j.\psi_{ij}] \tag{64}$$

Lembrando que $V_a(s)$ é a tensão no j-ésimo atuador piezoelétrico, isto é, $V_a = [V_{a1}(s), \dots, V_{aj}(s)]$, o que caracteriza o sistema como múltiplas entradas. O sistema possui infinitas saídas pelo fato de que a barra possui infinitos pontos, portanto em cada posição da barra o sistema terá um deslocamento de acordo com a tensão nos atuadores.

Com a função de transferência do atuador piezoelétrico definida, falta agora definir a função de transferência do sensor piezoelétrico para obter a função de transferência que relacione os dois. Este será o tópico abordado logo abaixo.

## 2.5 Análise do Sensor Piezoelétrico

Considere um $k$-ésimo sensor piezoelétrico anexado à barra, no topo, como é mostrado na Figura (5). Quando a barra sofre alguma perturbação, uma deformação é gerada na barra, de modo que uma tensão elétrica é produzida no sensor piezoelétrico pelo efeito da piezoeletricidade. A distribuição de carga elétrica, $q_t(t)$, isto é, a carga por unidade de comprimento, pode ser escrita como (HALIM;MOHEIMANI,2001):

$$q_t(t) = \frac{{k^2}_{31}.\varepsilon_r.W_p}{g_{31}} \tag{65}$$

Onde $k_{31}$ é o fator de acoplamento eletromecânico, $g_{31}$ é a constante de tensão elétrica do piezoelétrico e $W_p$ é a largura do sensor piezoelétrico. Usando agora a lei de Hooke para a deflexão longitudinal na direção $r$ do sensor piezoelétrico (HALIM;MOHEIMANI,2001):

$$\varepsilon_r = -y_p \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2} \tag{66}$$

Onde:

$$y_p = -\frac{h + h_p}{2} \tag{67}$$

Onde $y_p$ é a distância normal do eixo neutro da barra até o plano mediano do sensor piezoelétrico. A carga elétrica resultante gerada pelo sensor piezoelétrico pode ser obtida integrando a expressão (65) ao longo do comprimento do sensor:

$$V_{sk}(t) = \int_{r_{1k}}^{r_{2k}} \frac{k^2{}_{31}.\varepsilon_r.W_p}{g_{31}} \tag{68}$$

E substituindo a equação (67) na expressão (68):

$$V_{sk}(t) = \int_{r_{1k}}^{r_{2k}} \frac{k^2{}_{31}.W_{p.}.y_p}{g_{31}}.\frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2}.dr \tag{69}$$

Lembrando que a solução para a vibração longitudinal é determinada em (44), (HALIM;MOHEIMANI,2001) define o resultado da expressão acima, para todos os sensores piezoelétricos, como:

$$V_{sk}(t) = \frac{k^2{}_{31}.W_{p.y_p}.y_p}{g_{31}.C_k}.\sum_{i=1}^{\infty}\int_{r_{1k}}^{r_{2k}} \frac{\partial^2 \phi_i(r)}{\partial r^2}.dr\,.q_i(t) \tag{70}$$

Onde $C_k$ é a capacitância do k-ésimo sensor piezoelétrico. Essa equação pode ser escrita também como:

$$V_{sk}(t) = \Omega_k.\sum_{i=1}^{\infty}\int_{r_{1k}}^{r_{2k}} \frac{\partial^2 \phi_i(r)}{\partial r^2}.dr\,.q_i(t) \tag{71}$$

Onde:

$$\Omega_k = \frac{k^2{}_{31}.W_{p.y_p}.y_p}{g_{31}.C_k} \tag{72}$$

De acordo com (HALIM;MOHEIMANI,2001), a integral da equação (71) resulta na equação (60), se $j = k$, o que pode ser determinado, pois:

$$\int_{r_{1k}}^{r_{2k}} \frac{\partial^2 \phi_i(r)}{\partial r^2}.dr = \left.\frac{\partial \phi_i(r)}{\partial r}\right|_{r_{1k}}^{r_{2k}} = \frac{\partial \phi_i(r_{2k})}{\partial r} - \frac{\partial \phi_i(r_{1k})}{\partial r} \tag{73}$$

Onde claramente é visto que, caso a condição citada anteriormente for verdadeira, a equação (73) é idêntica à equação (62), que é resultado da equação (60) quando aplicada a propriedade da Delta de Dirac, como foi deduzido naquela seção.

Pode-se agora determinar a função de transferência da tensão elétrica aplicada nos atuadores piezoelétricos em relação a tensão elétrica gerada nos sensores piezoelétricos. Para isto, aplica-se a transformada de Laplace em (71) e (59), considerando o sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas, assim como condições inicias nulas. Portanto:

$$G_{Vs}(s) = \frac{V_{sk}(s)}{V_a(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Upsilon_i . P_i}{s^2 + 2.\zeta_i.\omega_i.s + {\omega_i}^2} \tag{74}$$

Onde:

$$\Upsilon_i = \left[\Omega_1.\Psi_{i1}, \dots, \Omega_j.\psi_{ij}\right]' \tag{75}$$

Lembrando sempre que o termo $i$ indica o $i$-ésimo modo de vibração e $j$ indica o $j$-ésimo par de sensores e atuadores piezoelétricos. De maneira similar a $V_a(s)$, $V_{sk}(s)$ também é um vetor definido por $V_{sk}(s) = [V_{sk1}(s), \dots, V_{sk2}(s)]'$, isto é, uma tensão induzida em cada sensor na barra. Como a função de transferência definida em (74) relaciona a tensão no atuador com a tensão no sensor, teremos um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas, já que no equacionamento se considera $j$ pares de sensores e atuadores piezoelétricos. Com isso, finaliza-se a modelagem matemática do sistema, porém existe um problema a ser resolvido. Como foi visto, as equações dependem de todos os $i$ modos de vibrações, os quais são infinitos. Na maioria dos casos, somente um número finito de modos são interessantes para a análise, inclusive neste estudo, onde somente os três primeiros modos serão analisados.

Para realizar uma análise para finitos modos, usa-se a técnica de truncagem. E esse será o próximo tópico a ser abordado.

## 2.6 Truncagem do modelo matemático

Como visto pelas equações dos capítulos anteriores, estruturas flexíveis possuem infinitos modos de vibração. Para projetar uma malha de controle, é necessário aproximar uma função infinita por uma função finita, isto é, com finitos modos, o que pode ser obtido pela técnica de truncagem. Se não bem feita, essa técnica ocasiona erros na resposta em frequência do sistema, devido aos componentes de alta frequência. Porém isso pode ser corrigido, como será visto ao decorrer deste capítulo.

Considerando um sistema espaço-temporal com entrada única e desconsiderando o coeficiente de amortecimento proposto por (HALIM; MOHEIMANI, 2001):

$$G(s,r) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(r).F_i}{s^2 + {\omega_i}^2} \tag{76}$$

E associado a isso, a seguinte condição de ortogonalidade:

$$\int_{\mathcal{R}} \phi_i(r).\phi_j(r).dr = {\Phi_i}^2.\delta_{ij} \tag{77}$$

Onde $\delta_{ij}$ é a função delta de Kroenecker, definida em (47). Como já citado, muitas vezes o interesse da função de transferência está voltado em certas frequências, ou seja, um modelo de ordem $N$, que pode ser expresso da seguinte maneira:

$$G_N(s,r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\phi_i(r).F_i}{s^2 + {\omega_i}^2} \tag{78}$$

Onde $N$ é o número de modos de interesse. De primeira vista o problema foi resolvido, porém os modos de ordem maior contribuem na dinâmica de baixa frequência, distorcendo os zeros da função truncada. Para ver como a truncagem perturba a dinâmica dos modos de baixa frequência, pode-se equacionar o erro fazendo a subtração da equação truncada com a original:

$$E(s,r) = G(s,r) - G_N(s,r) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(r).F_i}{s^2 + \omega_i^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\phi_i(r).F_i}{s^2 + \omega_i^2} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\phi_i(r).F_i}{s^2 + \omega_i^2} \tag{79}$$

Em DC, ou seja, na frequência $\omega = 0$, o erro acumulado é:

$$k_e(r) = \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\phi_i(r).F_i}{\omega_i^2} \tag{80}$$

Essa quantidade pode gerar erros significativos para baixas frequências, particularmente se em algum ponto da barra, $r_a$ por exemplo, o termo $\phi_i(r).F_i$ for diferente de zero para todos os modos $i$. Isso acontece caso exista uma força neste ponto $r_a$. Porém, é de se esperar que caso a equação (80) for adicionada ao modelo truncado, equação (78) , o erro pode se atenuar. Portanto a equação truncada com correção fica na forma de:

$$\hat{G}_N(s,r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\phi_i(r).F_i}{\omega_i^2 + s^2} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \phi_i(r).k_i \tag{81}$$

Onde $k_i = \frac{F_i}{\omega_i^2}$. Logo, deve-se achar esse termo $k_i$. Para isso, deve-se usar a norma espacial $\mathcal{H}_2$ de sistemas, utilizados em sistemas da forma de (76), onde $r \in \mathcal{R}$ $(0 \leq \mathcal{R} \leq L)$ , que possui a seguinte definição:

$$\ll G(s,r) \gg_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{\mathcal{R}} tr\{\hat{G}(j\omega)^* \hat{G}(j\omega)\} \, dr d\omega \tag{82}$$

Onde $tr$ é a função traço. Para um sistema de uma entrada, como uma barra com apenas uma força aplicada, $\ll G(s,r) \gg_2^2$ é a medida do volume abaixo da superfície definida por $|G(j\omega,r)|^2$. O próximo passo é achar um termo $k_i$ que minimize a função de custo definida pela equação (83). Achar um $k_i$ que minimize a equação (83) reduz os efeitos de altas frequências no modelo truncado, garantindo um modelo que representará bem o sistema e também que irá preservar as suas características espaciais. Logo:

$$J_c = \ll \left(G(s,r)\right) - \hat{G}_N(s,r).W(s,r) \gg_2^2 \tag{83}$$

Onde $W(s,r)$ é um filtro passa baixa ideal com uma frequência de corte $\omega_c$, que pertence ao intervalo $[\omega_N, \omega_{N+1}]$, e serve para delimitar a banda de interesse do sistema, ou seja, para garantir que a equação (82) permaneça finita:

$$|W(j\omega, r)| = \begin{cases} 1, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \tag{84}$$

Aplicando as definições de (82) em (83), onde $\hat{G}_N(s,r)$ é definido por (81) e $G(s,r)$ por (76), e também a condição de ortogonalidade definido por (77), chega-se que:

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega c}^{-\omega c}\int_{\mathcal{R}} \left|\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{F_i.\phi_i(r)}{\omega_i^2 - \omega^2}\right|^2 dr.d\omega - 2.\frac{1}{2\pi}\int_{\omega c}^{-\omega c}\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{F_i.k_i.\Phi_i{}^2}{\omega_i^2-\omega^2}.d\omega \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega c}^{-\omega c}\sum_{i=N+1}^{\infty} k_i{}^2.\Phi_i{}^2.d\omega \end{aligned} \tag{85}$$

Como dito, o objetivo dessa equação é achar um $k_i$ de tal modo que a equação (85) fique minimizada, ou seja:

$$\frac{\partial J}{\partial k_i} = 0 \tag{86}$$

Logo, obtêm-se:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\omega c}^{-\omega c}\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{F_i.\Phi_i{}^2}{\omega_i^2-\omega^2}.d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{\omega c}^{-\omega c}\sum_{i=N+1}^{\infty} k_i.\Phi_i{}^2.d\omega \tag{87}$$

E simplificando mais ainda:

$$\int_{\omega c}^{-\omega c}\frac{F_i.\Phi_i{}^2}{\omega_i^2-\omega^2}.d\omega = 2.\omega_{c.}k_i.\Phi_i{}^2 \tag{88}$$

Finalmente isolando $k_i$:

$$k_i = \frac{1}{2\omega_c.\Phi_i{}^2}.\int_{-\omega_c}^{\omega c}\frac{F_i.\Phi_i{}^2}{\omega_i^2-\omega^2}.d\omega \tag{89}$$

Resolvendo a integral da equação (89):

$$k_i = \frac{F_i}{2\omega_c.\Phi_i{}^2}.\ln\left(\frac{\omega_i+\omega_c}{\omega_i-\omega_c}\right) \tag{90}$$

Portanto o termo de correção da função truncada foi encontrado, onde $\omega_c$ é a frequência de corte do filtro passa baixa e $\omega_i$ é a frequência de ressonância do modo i da barra. Com isso, é possível truncar a função de transferência definida em (74) por:

$$G_{Vs}(s) = \frac{V_{sk}(s)}{V_a(s)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\Upsilon_i.P_i}{s^2+2.\zeta_i.\omega_i.s+\omega_i{}^2} + \sum_{N+1}^{N_{máx}} k_i \tag{91}$$

Com isso, o sistema foi modelado para os $N$ modos de vibração de interesse do experimento. Nota-se que esse termo de correção ignora os coeficientes de amortecimento. Isso se justifica pelo fato de que esses coeficientes geralmente são muitos pequenos e que eles complicariam demais os cálculos. Como eles possuem uma pequena contribuição é simplesmente melhor ignorá-los, como foi feito. Por último, será analisado a posição dos pares piezoelétricos, de maneira a otimizar o sistema no quesito de controlabilidade modal e controlabilidade estrutural, tópicos que serão explicados no próximo capítulo.

## 2.7 Posicionamento dos pares piezoelétricos

Uma das mais frequentes dúvidas de quem projeta um controle de vibrações com piezoelétricos é onde colocar os sensores e atuadores. Naturalmente é de se pensar que os piezoelétricos devem ser postos onde eles possuam maior controlabilidade sobre o sistema. Mas como encontrar esses pontos?

Para início, deve-se considerar que o modelo do sistema é da forma de (76), com o coeficiente de amortecimento incluído, cujas equações satisfaçam a condição de ortogonalidade descrita na equação (77). Supondo uma única resposta de interesse, como um ponto particular ao longo da barra, isto é, $r = r_s$. A função de transferência (RYALL; MOHEIMANI, 1999), que será chamada de $\hat{G}(s)$, é igual a:

$$\hat{G}(s) = G(s, r_s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(r_s).P_i}{s^2 + 2.\zeta_i.\omega_i + \omega_i^2} = \frac{y(s.r_s)}{V_a(s)} \tag{92}$$

Por definição, a norma $\mathcal{H}_2$ de $\hat{G}(s)$ é definida como o valor RMS da saída quando a entrada é um ruído branco, que é equivalente à:

$$\|\tilde{G}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\{\hat{G}(j\omega)^*\hat{G}(j\omega)\}\, d\omega \tag{93}$$

Que pode ser simplificada para:

$$\|\tilde{G}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(r_s).P_i}{s^2 + 2.\zeta_i.\omega_i + {\omega_i}^2} \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_j(r_s).P_j}{s^2 + 2.\zeta_j.\omega_j + {\omega_j}^2}\right\} d\omega \tag{94}$$

Porém a equação acima ignora totalmente as respostas dos outros pontos da estrutura, concentrando-se apenas no ponto $r_s$. Para ser mais preciso, caso queiramos saber as respostas nos pontos $r_1, r_2 ... r_n$, deve-se determinar a norma $\mathcal{H}_2$ da seguinte função de transferência:

$$\tilde{G}(s)' = [G(s, r_1)\ \ G(s, r_2)\ \ G(s, r_3) \dots\ G(s, r_n)] \tag{95}$$

Essa equação já é uma melhor aproximação do que (94), mas ela ainda não representa toda a estrutura e sim apenas alguns pontos. Para resolver este problema, (RYALL; MOHEIMANI, 1999) propõe a seguinte norma espacial $\mathcal{H}_2$ de $G(s,r)$:

$$\ll G \gg_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\mathcal{R}}\int_{-\infty}^{\infty} tr\{\hat{G}(j\omega)\hat{G}(j\omega)^*\}\, dr.d\omega \tag{96}$$

Onde a notação $\ll G \gg_2^2$ é usada para enfatizar que o sistema é da forma de (92). A equação (96) parece ser muito difícil de ser resolvida, porém graças as condições de ortogonalidade dos modos de vibração, equação (77), tem-se que:

$$\ll G \gg_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left\|\tilde{G}_i\right\|_2^2 \tag{97}$$

Onde $\tilde{G}_i$ é da forma de (98). O teorema descrito em (97), (RYALL; MOHEIMANI, 1999), prova que a norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema espacialmente distribuído da forma de (92), com as condições de ortogonalidade definidas em (77) é equivalente a norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema dimensionalmente finito e invariante no tempo da forma de (81).

$$\tilde{G}_i(s) = \frac{\Phi_i.P_i}{s^2 + 2.\zeta_i.\omega_i + {\omega_i}^2} \tag{98}$$

A prova de (97) pode ser demonstrada por:

$$\begin{aligned}
&\ll G(s,r) \gg_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{R}}\int_{-\infty}^{\infty} tr\{G(j\omega)^* G(j\omega)\}\, dr.d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{R}}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_k(r).P_k}{\omega^2 + 2j.\zeta_k.\omega_k\omega + {\omega_k}^2}\right. \\
&\left.\times\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_l(r).P_l}{\omega^2 + 2.\zeta_l.\omega_l.\omega + {\omega_l}^2}\right\} dr.d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\Phi_i}{-\omega^2 + 2j.\zeta_i.\omega_i.\omega + {\omega_i}^2}\right|^2 .tr\{P_i'.P_i\}.d\omega = \sum_{i=1}^{\infty}\left\|\tilde{G}_i\right\|_2^2
\end{aligned} \tag{99}$$

Com a norma $\mathcal{H}_2$ definida, pode-se voltar à análise de controlabilidade modal e controlabilidade espacial. Controlabilidade modal é a autoridade do controlador para cada modo. Digamos que a controlabilidade modal para um modo é zero, então isso significa que o controlador não tem nenhuma autoridade sobre o respectivo modo (RYALL; MOHEIMANI, 1999). A controlabilidade estrutural pode ser interpretada como a autoridade sobre toda a estrutura em relação à média da controlabilidade modal. Idealmente, uma posição boa seria onde a controlabilidade estrutural e modal fossem máximas, mas muitas vezes onde a controlabilidade estrutural é máxima a controlabilidade modal não é, então isso depende do que se deseja controlar.

Como é o caso do experimento desse trabalho, só foi considerado um atuador para análise. Assumindo que o piezoelétrico está localizado em $r = r_1$, pode-se definir $f_i(r_1)$ como:

$$f_i(r_1) = \left\|\tilde{G}_i\right\|_2 \tag{100}$$

Onde $\tilde{G}$ tem a forma de (98), então de acordo com (97):

$$\ll G \gg_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^{\,2}(r_1) \tag{101}$$

Com isso, se define que a controlabilidade modal é:

$$\mathcal{M}_i(r_1) = \frac{f_i(r_1)}{\alpha_1}.100 \tag{102}$$

Onde:

$$\alpha_i = \max_{r \in \mathcal{R}} f_i(r_1) \tag{103}$$

Os gráficos da controlabilidade modal para os três primeiros modos de vibração foram gerados para um melhor entendimento desse conceito, e pode ser visto pela figura a seguir:

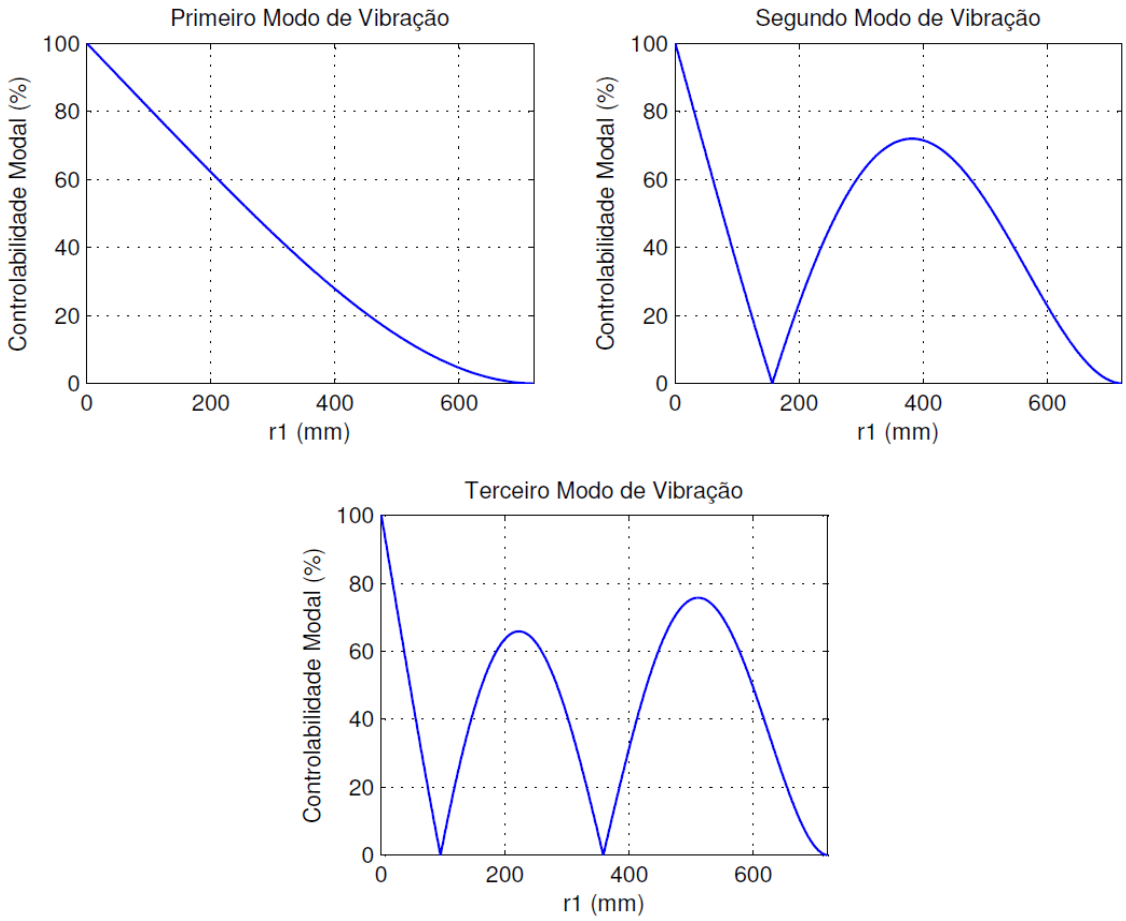


Figura 8: Controlabilidade Modal para os três primeiros modos.

Nota-se que a controlabilidade modal para os três primeiros modos de vibração são máximas em $r_1 = 0$, mas decresce muito rapidamente no terceiro modo de vibração. Por mais que pareça ser óbvio posicionar o controlador na origem do sistema, (RYALL; MOHEIMANI, 1999) não recomenda por questões técnicas. Nota-se também que para o terceiro modo de vibração existe uma controlabilidade modal alta em $r_1 = 500mm$. Falta agora apenas definir a equação da controlabilidade estrutural. A controlabilidade estrutural é definida por:

$$S(r_1) = \frac{1}{\mathcal{B}} . \sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i(r_1)} . 100 \tag{104}$$

Onde:

$$\mathcal{B} = \max_{r \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^{N} f_i(r_1) \tag{105}$$

O gráfico da controlabilidade estrutural considerando os três primeiros modos de vibração pode ser visto pela Figura (9).

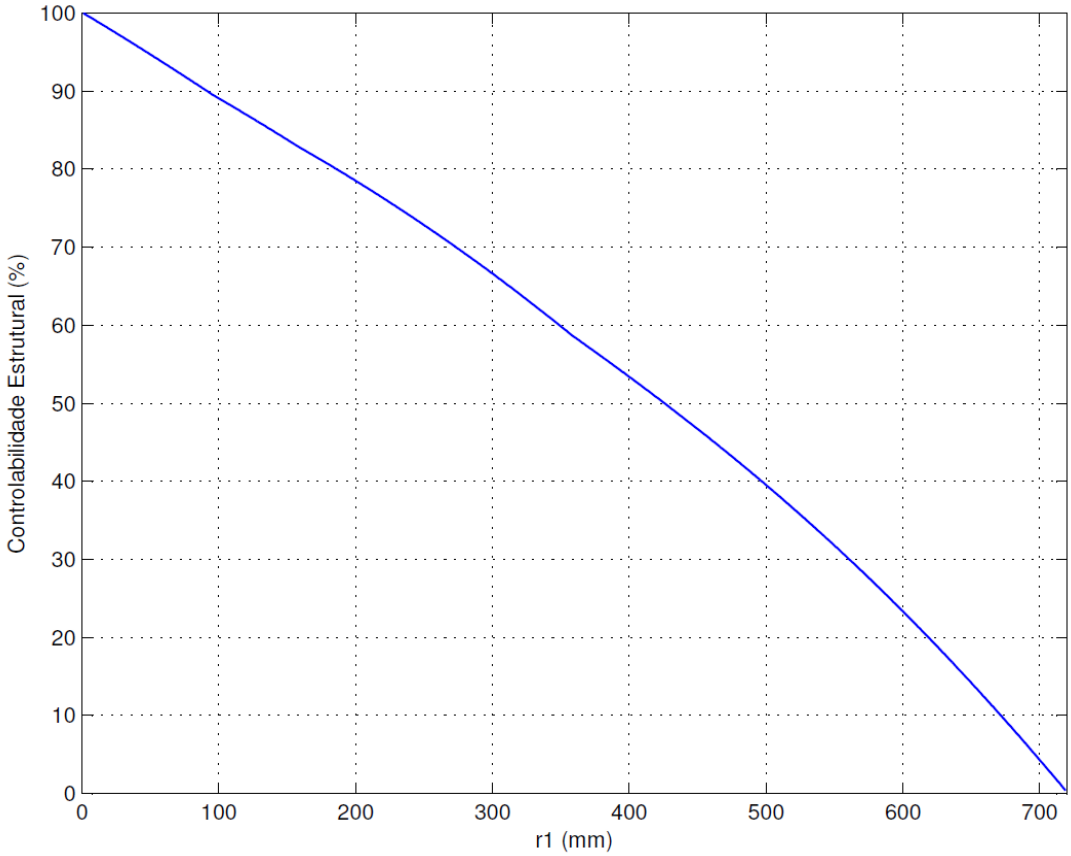


Figura 9: Controlabilidade Estrutural.

Nota-se que a controlabilidade estrutural é máxima na origem e vai decaindo até ser nula na outra extremidade. Como já foi citado, um problema bem comum é determinar o que se quer ser controlado. Por exemplo, em $r_1 = 500mm$ a controlabilidade estrutural é aproximadamente 40%, porém a controlabilidade modal do terceiro modo é de aproximadamente 80%, então caso a vibração de interesse fosse o terceiro modo, seria interessante posicionar o piezoelétrico nesta posição, por mais que a controlabilidade estrutural seja a metade do valor.

## 2.8 Considerações

Neste capitulo, foi analisada a modelagem matemática do sistema. Para isto, utilizaram-se as equações de equilíbrio dinâmico da barra, leis de Newton, e com algumas manipulações chegou-se na equação de Euler-Bernoulli. Com a equação de Euler-Bernoulli definida, foi feita a análise de vibração livre, e com essa análise foi possível aproximar as frequências de ressonância da barra pela seguinte expressão:

$$\omega_i = \lambda_i^2 . \sqrt{\frac{E.I}{p.A}} \tag{106}$$

Onde $\omega_i$ é a frequência de ressonância do modo $i$, $\lambda_i$ é uma constante que pode ser encontrada por (27), $E$ é o módulo de Young, $I$ é o momento de inércia da barra, $p$ é a densidade volumétrica da barra e $A$ é a seção transversal da barra.

Depois foi necessário analisar o efeito dos atuadores piezoelétricos na barra engastada, assim como o efeito da vibração no sensor piezoelétrico. Assim chegou-se na função de transferência da tensão elétrica aplicada no atuador pela tensão elétrica induzida no sensor, que é:

$$G_{Vs}(s) = \frac{V_{sk}(s)}{V_a(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Upsilon_i . P_i}{s^2 + 2.\zeta_i.\omega_i.s + {\omega_i}^2} \tag{107}$$

Onde:

$$\Upsilon_i = \left[\Omega_1 . \Psi_{i1}, \dots, \Omega_j . \Psi_{ij}\right]' \tag{108}$$

E que $\zeta_i$ é o coeficiente de amortecimento do modo $i$, $\Omega_j$ é definido por (72), $\Psi_{ij}$ por (62) e $P_i$ por (64).

Como o modelo possui infinitos modos de vibração, foi necessário achar um modelo truncado para sistema. Neste modelo truncado, foi definida uma nova variável, a constante $k_i$, que reduz os efeitos das altas frequências no modelo truncado, e que foi definido como:

$$k_i = \frac{F_i}{2\omega_c.{\Phi_i}^2}.\ln\left(\frac{\omega_i + \omega_c}{\omega_i - \omega_c}\right) \tag{109}$$

Onde $\omega_c$ é a frequência de corte do filtro passa baixa e $\Phi_i$ é definido por (77). Assim, tem-se então a função de transferência truncada:

$$G_{Vs}(s) = \frac{V_{sk}(s)}{V_a(s)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Upsilon_i.P_i}{s^2 + 2.\zeta_i.\omega_i.s + {\omega_i}^2} + \sum_{N+1}^{N_{máx}} k_i \tag{110}$$

Por último, definiu-se o posicionamento dos pares piezoelétricos, sensor e atuador, através do problema de otimização proposto por (RYALL; MOHEIMANI, 1999). Este problema tem como objetivo garantir a capacidade dos piezoelétricos de medir e controlar as vibrações sobre o sistema, nesse caso a barra engastada. Assim definiu-se que controlabilidade modal é a autoridade do controlador sobre cada modo de vibração, e que controlabilidade estrutural é a autoridade do controlador sobre toda a estrutura considerando uma média entre todos os modos. De acordo com a Figura (8) e (9), a melhor posição, tanto para o atuador quanto para o sensor piezoelétrico, para os três primeiros modos de vibração, é na origem do sistema, em $r = 0$, na extremidade engastada da barra.

# 3 BANCADA EXPERIMENTAL

## 3.1 Introdução

Neste capitulo será descrito como foram feitos os experimentos para a validação teórica do capitulo anterior, assim como todos os equipamentos utilizados no processo. Também será explicado o funcionamento dos transdutores piezoelétricos de um ponto de vista técnico, mais voltado para os conhecimentos adquiridos no curso de Engenharia Elétrica.

Por último, será feita a modelagem do sistema a partir dos dados teóricos e também a partir de dados experimentais. Os dados experimentais serão adquiridos com um sinal PRBS na entrada, e com isso será possível determinar a função de transferência do sistema, como será visto ao decorrer deste capítulo. Com isso, é possível analisar o quão coerente os dois modelos estão entre si, ou seja, se a teoria está de acordo com a prática.

## 3.2 Bancada Experimental

O objetivo deste trabalho é projetar um controle ativo de vibrações mecânicas em uma estrutura flexível, isto é, uma estrutura que se deforma com alguma carga aplicada ao longo de sua superfície. A estrutura flexível escolhida para este experimento foi uma barra engastada, que nada mais é que uma barra onde uma de suas extremidades está fixa e a outra está livre, como pode ser visto pela Figura (3). Para o sensoriamento de vibração e para a atuação do controle, foi fixado um sensor e um atuador na superfície da barra próxima de sua extremidade fixa. Essa opção será explicada em breve.

Para adquirir dados, e também para programar o controlador, foi utilizada a placa dSPACE DS1104, a qual possui uma interface simples e bem intuitiva com o software Matlab/Simulink. Como essa placa possui um nível de tensão elétrica baixa de saída para a operação ideal dos transdutores piezoelétricos, foi necessária a utilização de um amplificador de tensão desenvolvido pela própria fornecedora dos transdutores. Além disso, foi utilizado um filtro passa baixa RC, um filtro Anti-Aliasing e um atenuador de tensão, os quais serão justificados em seguida.

## 3.3 Detalhamento

### 3.3.1 Estrutura Mecânica

A estrutura mecânica do experimento é composta por uma barra de alumínio, que por sua vez é engastada em uma de suas extremidades em outra estrutura de alumínio, a qual também está fixa numa base de alumínio, como pode ser visto pela figura (10). A estrutura mecânica já estava montada para este projeto, a qual foi montada por Geison Winck em sua dissertação de Mestrado. Para mais detalhes dessa estrutura ver (WINCK, GEISON. Instrumentação, Identificação e Controle Ativo de Vibração em Barras Engastadas, 2012).

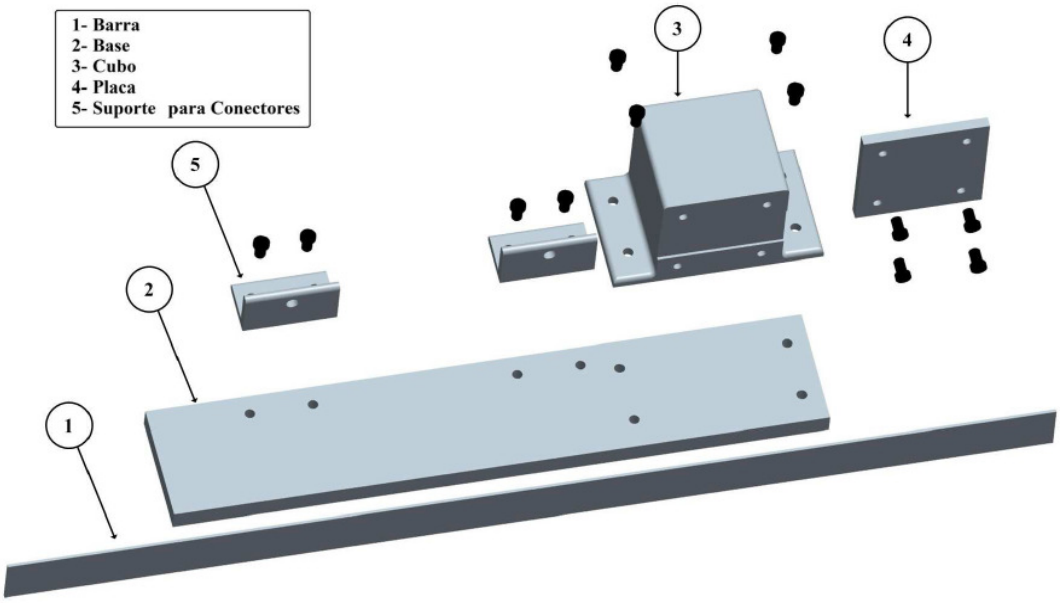


Figura 10: Estrutura Mecânica do Experimento (WINCK, GEISON, 2012).

A base fixa é formada por uma base retangular de comprimento de $625{,}00\ mm$, largura de $120{,}00\ mm$ e altura de $20{,}00\ mm$. O cubo maciço, no qual a barra é fixa, possui arestas de $120{,}00\ mm$ e espessura de $10{,}00\ mm$. Para que a estrutura seja considerada estática, em relação a barra, foi considerado, nos estudos prévios a esse trabalho, que a massa do cubo deveria ser no mínimo 50 vezes maior que a da barra em estudo. As características da barra de alumínio, na qual se realizou os experimentos, estão determinadas pela Tabela (1):

Tabela 1: Características da Barra (WINCK, GEISON, 2012).

| | |
|---|---|
| Comprimento da Barra, $L$ | $0{,}72\ m$ |
| Largura da Barra, $W$ | $0{,}05\ m$ |
| Espessura da Barra , $h$ | $0{,}003\ m$ |
| Constante de Young da Barra, $E$ | $7x10^{10}\ N/m^2$ |
| Densidade de Massa da Barra, $p$ | $2770\ kg/m^3$ |

Com essas características, pode-se determinar as frequências de ressonância da barra através (30):

$$\omega_i = \lambda_i^2 . \sqrt{\frac{E.I}{p.A}} \tag{111}$$

Onde $A$ é a área transversal da barra, $I$ é o momento de inércia, $p$ é a densidade e $E$ é o módulo de Young da barra. Os valores de $\lambda_i$ já foram determinados pela equação (27). Como o módulo de Young e a densidade volumétrica da barra são previamente determinadas pela Tabela (1), falta determinar a área transversal e também o momento de inércia da barra. A área transversal pode ser determinada por:

$$A = h.W = 0.00015\, m^2 \tag{112}$$

E o momento de inércia através de:

$$I = \frac{W.h^3}{12} = 1.1250.10^{-10}\, m^4 \tag{113}$$

Portanto as três primeiras frequências de ressonância desta barra são:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 29.52\, rad/s \\ \omega_2 &= 185.03\, rad/s \\ \omega_3 &= 518.16\, rad/s \end{aligned} \tag{114}$$

Em Hertz:

$$\begin{aligned} f_1 &= 4.69\, Hz \\ f_2 &= 29.44\, Hz \\ f_3 &= 82.46\, Hz \end{aligned} \tag{115}$$

Também simulou-se a barra engastada no *software* SolidWorks, onde foram realizados testes de vibração para determinar as frequências de ressonância, a fim de validar os cálculos anteriores. Os resultados podem ser vistos pelas figuras a seguir:

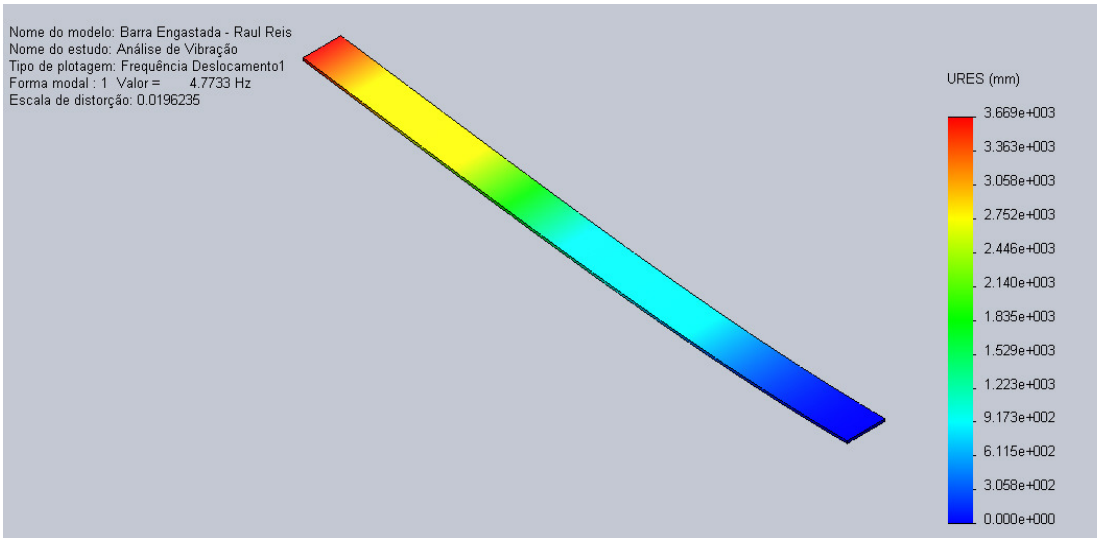


Figura 11: Primeiro Modo de Vibração.

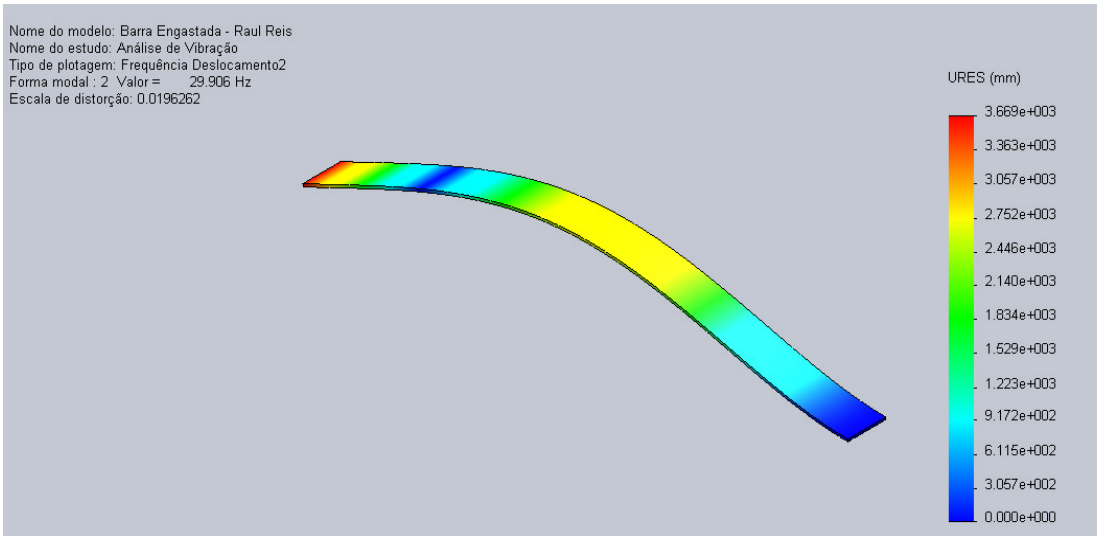


Figura 12: Segundo Modo de Vibração.

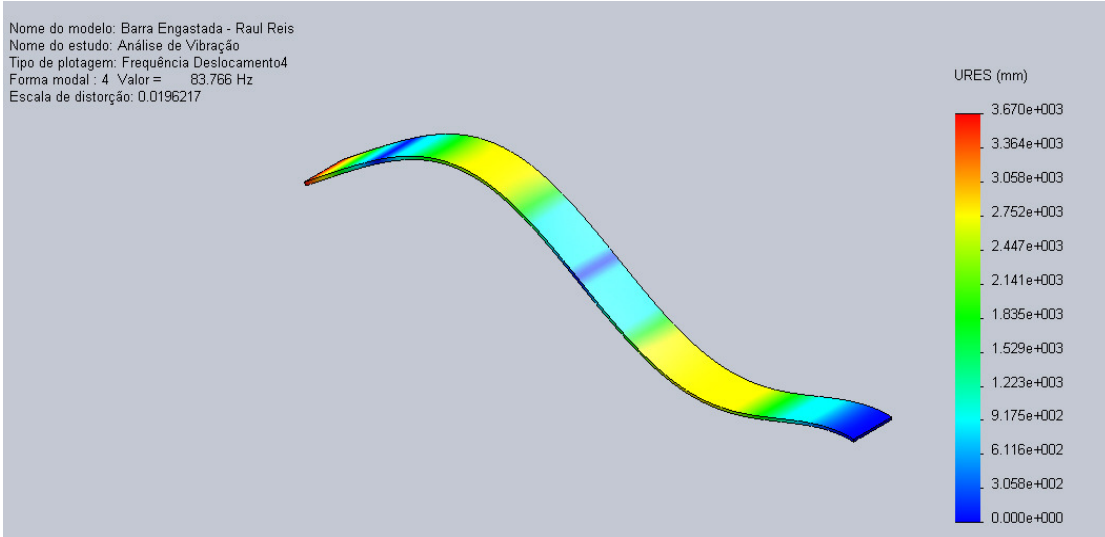


Figura 13: Terceiro modo de Vibração.

Nota-se que as frequências calculadas analiticamente, equação (114), quando comparadas com as frequências calculadas pelo *software* SolidWorks estão bem próximas, onde o erro é devido as características do material da barra, pois não foi possível aplicar um material idêntico à Tabela (1) no *software* referido. Os pontos em azul no gráfico são os nós da barra, isto é, local onde a vibração longitudinal é nula. Quanto maior o deslocamento mais vermelha a curva, como pode ser visto também pela legenda das figuras.

Os nós e as vibrações estão bem condizentes com a Figura (4), que corresponde à solução analítica da equação de Euller-Bernoulli para barras engastadas, portanto pode-se dizer que a teoria foi validada. Essas vibrações também são coerentes com as vibrações vistas na prática, como pode ser visto pelas figuras abaixo:

Figura 14: Primeiro Modo de Vibração na barra experimentalmente.

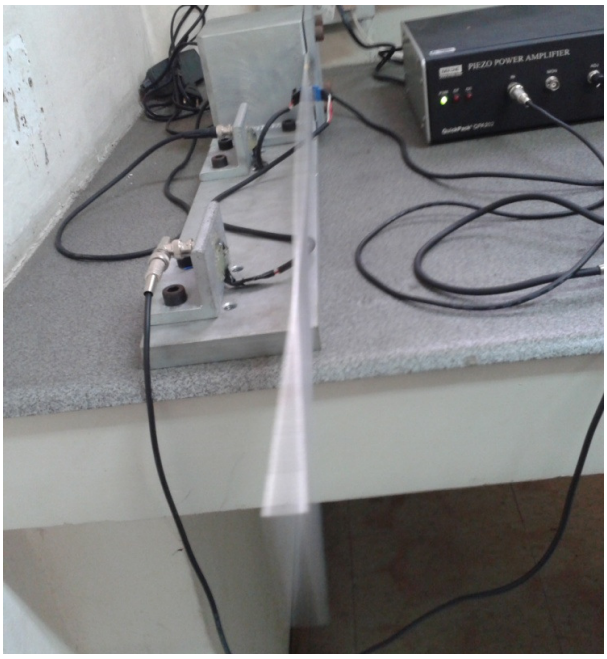


Figura 15: Segundo Modo de Vibração na barra Experimentalmente.

Figura 16: Terceiro modo de Vibração na barra experimentalmente.

### 3.3.2 Transdutores Piezoelétricos

O efeito piezoelétrico é geralmente observado no dia a dia das pessoas. Por exemplo, as membranas que vibram em um alarme, ou em um acendedor manual de chama de gás. O funcionamento do mesmo é baseado na aplicação de uma força mecânica em um cristal, que provoca o surgimento de um campo elétrico (BALBINOT; BRUSAMELLO, 2007).

O termo piezoeletricidade tem origem grega e significa pressão. A piezoeletricidade foi descoberta pelos Irmãos Curie, em 1880, quando constataram que aplicando uma pressão mecânica em um cristal de quartzo ele produzia um potencial elétrico. Os irmãos Curie então determinaram esse efeito como efeito Piezoelétrico. Porém, inicialmente o efeito reverso não era conhecido.

O efeito reverso, ou seja, de produzir uma deformação no material através de um potencial elétrico aplicado, só foi deduzido matematicamente através de princípios de termodinâmica por Gabriel Lippmann, em 1881. Os irmãos Curie então imediatamente confirmaram esse efeito experimentalmente, porém a piezoeletricidade permaneceu somente nos laboratórios por muito tempo, sem nenhuma aplicação no cotidiano das pessoas. A primeira aplicação da piezoeletricidade foi somente na primeira Guerra Mundial, em 1917, onde Paul Langevin, e seus ajudantes, desenvolveram um detector ultrassônico de submarino.

Esse detector consistia basicamente em um transdutor piezoelétrico, feito de cristal de quartzo, cuidadosamente colado em duas placas de metais, e um hidrofone para detectar o eco de retorno. Ou seja, emitindo um sinal de alta frequência através dos transdutores, e medindo o tempo que o sinal demorava em retornar, através do hidrofone, podia se calcular a distância do submarino alvo.

Com o sucesso do dispositivo citado anteriormente, muitas pesquisas foram voltadas a esse setor. Estes esforços levaram a descoberta, nas décadas de 40 e 50, das cerâmicas piezoelétricas de Titanato de Bário, pela antiga URSS e Japão, e das cerâmicas piezoelétricas de Titano-Zirconato de Chumbo (PZTs), pelos EUA. Essas cerâmicas foram revolucionárias, pois além de apresentarem melhores propriedades que os cristais como quartzo, turmalina ou Sal de Rochelle, também oferecem geometrias e dimensões flexíveis por serem fabricadas por meio de sinterização de pós cerâmicos conformados via prensagem ou extrusão.

A razão para existir o dipolo elétrico é a separação de cargas entre íons positivos e íons negativos. Grupos de dipolos com orientação em paralelo são chamados domínios de Weiss. De inicio, esses íons estão aleatoriamente distribuídos, porém com a aplicação de um campo elétrico no material (ainda quente), em torno de 2000 V/mm em PZTs, esses domínios tendem a se alinhar, alongando-se no eixo axial e comprimindo-se no eixo longitudinal (BALBINOT; BRUSAMELLO, 2007). Esses domínios então tendem a manter essa forma quando esfriados, deixando a cerâmica PZT polarizada. Esse processo pode ser visto pela figura a seguir:

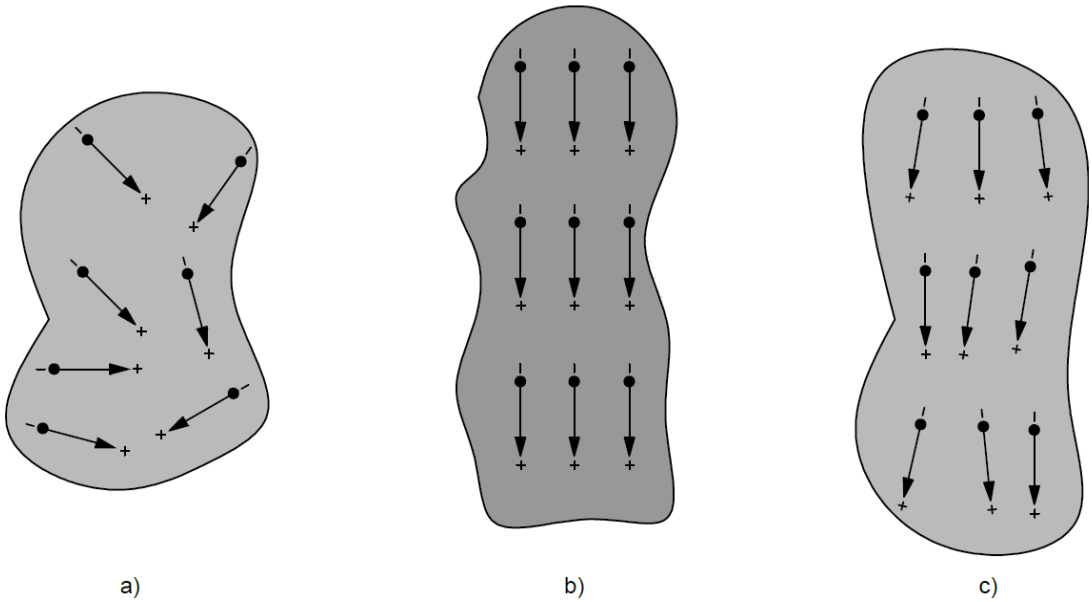


Figura 17: a) Domínios de Weiss sem nenhuma aplicação de Campo Elétrico; b) Domínios de Weiss com um Campo Elétrico aplicado; c) Domínios de Weiss após aplicação de um Campo Elétrico.

Assim, quando um campo elétrico é aplicado no material, os domínios de Weiss tendem a se alinhar, resultando em alteração nas dimensões do material, tendo então o efeito piezelétrico. Um exemplo prático desse efeito pode ser visto pela Figura (18):

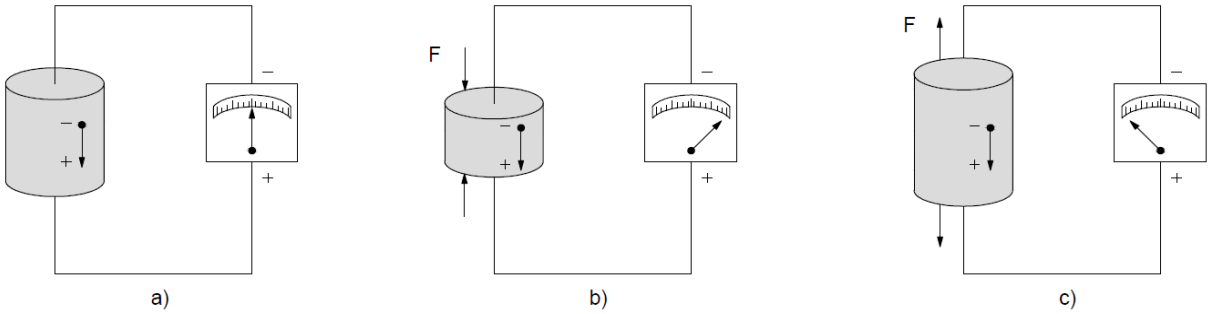


Figura 18: a) Piezoelétrico sem nenhuma carga aplicada; b) Piezoelétrico sendo contraído gerando uma tensão positiva em seus terminais; c) Piezoelétrico sendo expandido gerando uma tensão negativa em seus terminais.

Existem diferentes métodos para caracterizar os parâmetros citados anteriormente. Uma das técnicas utilizadas é a técnica de ressonância, a qual envolve medir a resposta em frequência do material piezoelétrico próxima às frequências de ressonância do piezoelétrico, quando este é submetido a um campo elétrico senoidal. Como este trabalho esta voltado para a utilização em frequências bem abaixo da frequência de ressonância do piezelétrico, será dada mais atenção à técnica de sub-ressonância, como será visto logo abaixo.

A técnica de sub-ressonância é geralmente usada para determinar os parâmetros dos piezoelétricos em baixas frequências, isto é, frequência muito abaixa das frequência de ressonância do piezoelétrico. Essa técnica inclui tanto medidas da carga mecânica aplicada quanto da tensão elétrica no material piezoelétrico. Para relacionar a tensão de saída em relação a uma carga aplicada no piezoelétrico, é necessário considerar o circuito equivalente da figura abaixo (SAFARI et al., 1998):

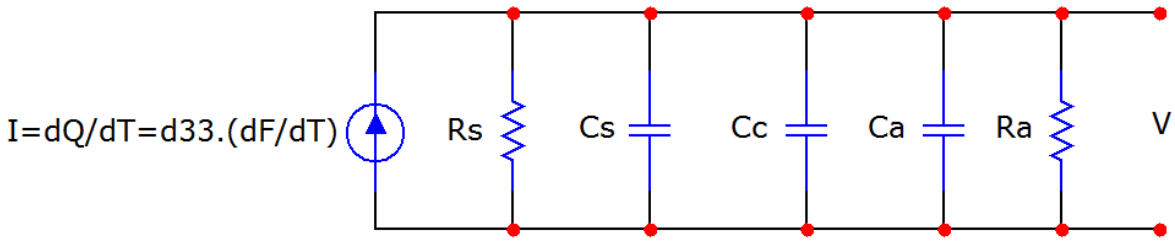


Figura 19: Circuito elétrico equivalente de um piezoelétrico (SAFARI et al., 1998).

O circuito inclui uma carga de entrada, $Q = d_{33}.F$, resistência do transdutor piezoelétrico $R_s$, capacitância do transdutor piezoelétrico $C_s$, capacitância dos cabos $C_c$, capacitância e resistência do amplificador, $C_a$ e $R_a$ respectivamente. $F$ denota a força aplicada no transdutor. Todas as resistências e capacitâncias do circuito da Figura (19) podem ser

simplificadas para o circuito da figura abaixo, através de simplificação de impedância em paralelo:

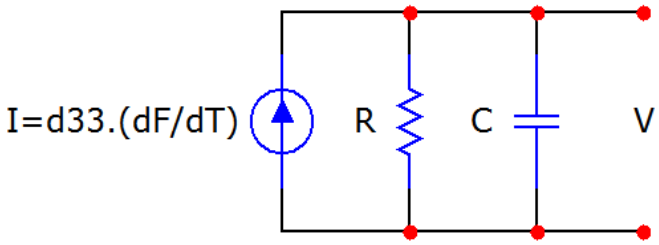


Figura 20: Circuito elétrico equivalente simplificado de um piezoelétrico conectado a um amplificador de tensão (SAFARI et al., 1998).

Onde:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_s} \tag{116}$$

$$C = C_a + C_s + C_c \tag{117}$$

A carga que funciona como fonte de tensão pode ser convertida para uma fonte de corrente, $I$, pela seguinte equação:

$$I = \frac{dQ}{dt} = d_{33}.\frac{dF}{dt} \tag{118}$$

A tensão de saída para uma determinada frequência é determinada por:

$$V = d_{33}.\frac{F}{C}.\frac{j\omega\tau}{(1 + j\omega\tau)} \tag{119}$$

Onde $\tau$ é a constante de tempo que pode ser determinada por:

$$\tau = R.C \tag{120}$$

De acordo com a equação (119), para frequências suficientemente altas, a tensão de saída independe da frequência e $d_{33}$ pode ser facilmente determinado pela mesma equação, se a capacitância resultante é conhecida. Já que a capacitância resultante é determinada pela capacitância total do sistema, muitas vezes ela é difícil de ser determinada. Para isto, é adicionada uma capacitância muito maior que a capacitância resultante, assim obtém-se um valor conhecido para esta variável. Se a constante de tempo $\tau$ não for suficientemente pequena, o sistema da equação (132) é caracterizado como um filtro passa alta, portanto não permite medições em baixas frequências já que a saída é atenuada. A resposta em frequência de um piezoelétrico genérico pode ser visto pela Figura (21).

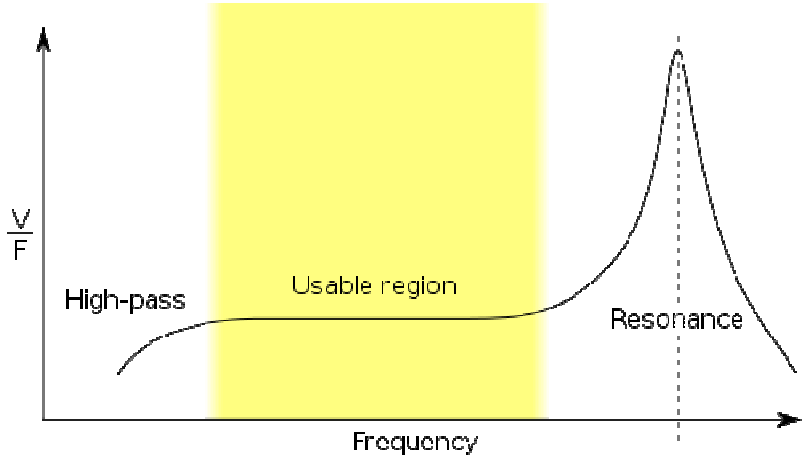


Figura 21: Resposta em Frequência de um piezoelétrico (WIKIPÉDIA, Piezoelectricity).

Nota-se pela figura (21) que o comportamento em baixas frequências do piezoelétrico é um filtro passa alta, como já previsto por (119). Para resolver este problema, um amplificador de carga é inserido ao experimento conforme propõe (SAFARI et al., 1998). O circuito proposto é mostrado pela figura a seguir:

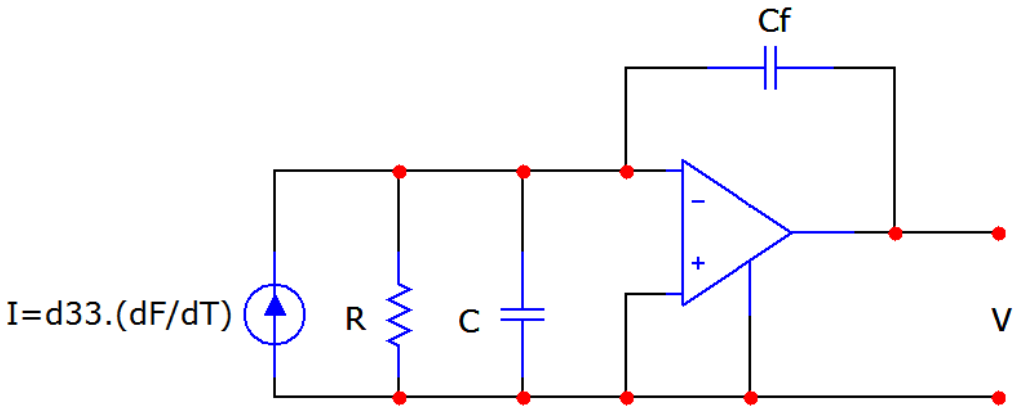


Figura 22: Circuito equivalente de um piezoelétrico conectado a um amplificador (SAFARI et al., 1998).

Assumindo que seja um amplificador ideal, isto é, corrente de entrada nula e tensão de offset nulo, pode-se relacionar a carga do transdutor com a seguinte tensão de saída:

$$V = \frac{-Q}{C_f} = \frac{-d_{33}.F}{C_f} \tag{121}$$

A equação acima relaciona uma resposta que permite usar o piezoelétrico em baixas frequências, pois a equação (121) não se caracteriza como um filtro passa alta, onde a tensão de saída é determinada apenas pelo coeficiente do piezoelétrico $d_{33}$ e a capacitância conhecida $C_f$. Infelizmente essa solução possui um problema, já que mesmo com uma corrente baixa de entrada o circuito carregará o capacitor $C_f$, saturando a saída do amplificador. Para resolver o problema de saturação, é adicionado um resistor *Shunt* em

paralelo com o capacitor $C_f$, o qual impede a carga no capacitor, como pode ser visto na Figura (24). Porém com esta resistência inserida, a tensão de saída volta a ficar dependente da frequência, na forma da equação (119), pois o circuito volta a ser um circuito RC, porém os valores do capacitor e do resistor para calcular a constante de tempo $\tau$ são conhecidos, pois a capacitância é capacitancia do amplificador $C_f$ e a resistência é a resistência *Shunt*, e isso da uma vantagem enorme comparado ao circuito original da equação.

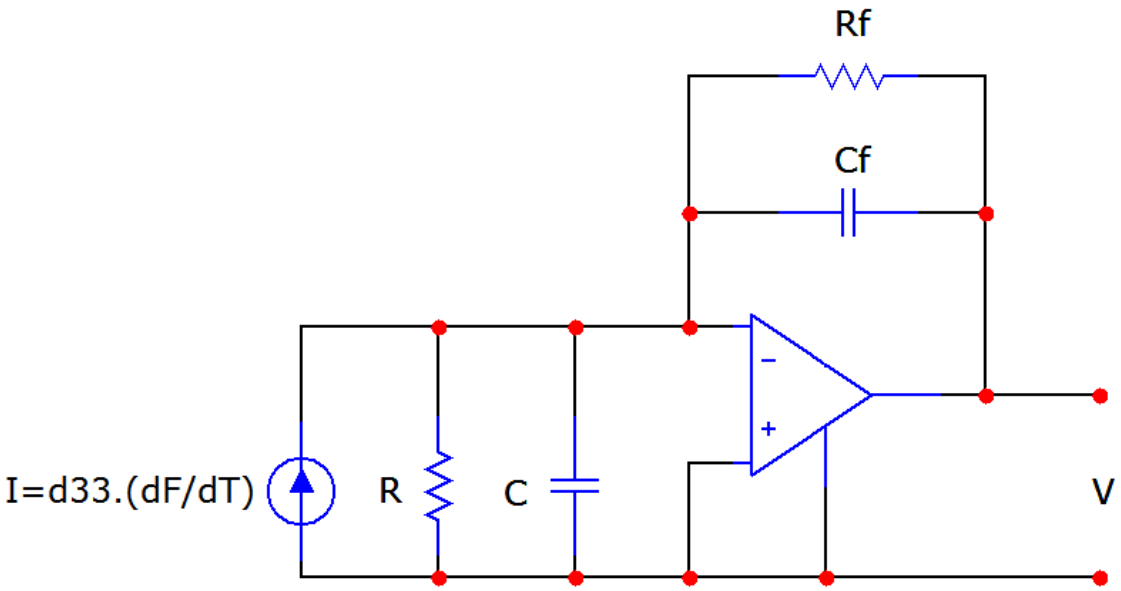


Figura 23: Circuito equivalente de um piezoelétrico conectado a um amplificador com um resistor Shunt (SAFARI et al., 1998).

Os transdutores piezoelétricos usados neste experimento são fabricados pela MIDE, do modelo QP20w. Foi utilizado um par deste tipo de piezoelétrico, um para a atuação e outro para sensoriamento, ambos já colados na barra pelo Geison Winck em (WINCK, GEISON. Instrumentação, Identificação e Controle Ativo de Vibração em Barras Engastadas, 2012). Esses transdutores podem ser usados tanto para atuação transversal como atuador de flexão. As características destes piezoelétricos são mostradas pela tabela abaixo:

Tabela 2: Características dos transdutores piezoelétricos QP20w.

| | |
|---|---|
| Faixa de tensão Elétrica, $V_a$ | $\pm 200\ V$ |
| Comprimento do Piezoelétrico, $L_p$ | $5{,}08x10^{-2}m$ |
| Largura do Piezoelétrico, $W_p$ | $3{,}81x10^{-2}m$ |
| Espessura do Piezoelétrico, $h_p$ | $7{,}62x10^{-4}m$ |
| Constante de Young do Piezoelétrico, $E_p$ | $6{,}7x10^{10}\ N/m^2$ |
| Constante de Tensão, $g_{31}$ | $-11{,}3x10^{-3}\ V.m/N$ |
| Constante de Carga, $d_{31}$ | $-1{,}9x10^{-10}\ m/V$ |
| Fator de Acoplamento Eletromecânico, $k$ | 0,36 |
| Capacitância, $C$ | $2{,}10x10^{-7}\ F$ |

Tanto o sensor quanto o atuador foram posicionados em aproximadamente $5mm$ da extremidade engastada, e com isso, de acordo com Seção (2.7), se garante que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(5mm) &= 99\% \\ \mathcal{M}_2(5mm) &= 97\% \\ \mathcal{M}_3(5mm) &= 95\% \end{aligned} \tag{122}$$

Onde $\mathcal{M}_i(r_1)$ é a controlabilidade modal. Também se garante que:

$$S(5mm) = 99\% \tag{123}$$

Onde $S(r_1)$ é a controlabilidade estrutural. Ou seja, se garantiu uma controlabilidade modal de 99% para o primeiro modo de vibração, de 97% para o segundo modo de vibração e de 95% para o terceiro modo de vibração e uma controlabilidade estrutural de no mínimo 99%.

### 3.3.3 Conversão Analógica-Digital e Digital-Analógica

O controle e os experimentos foram realizados através da placa dSPACE DS1104, instalada no computador do laboratório, a qual possui uma interface em tempo real com o *software* Matlab/Simulink. Com isso, existe uma biblioteca de blocos (*Real Time Interface* – RTI) que acompanha o software da placa, para serem executadas no Simulink. Essa biblioteca possui várias funções, mas neste experimento só foram usados os blocos de conversão A/D e de D/A, blocos DS1104ADC_C5 e DS1104DAC_C1, respectivamente.

Junto com a placa existe também um *software* chamado ControlDesk, que é usado como interface gráfica da placa dSPACE, onde se pode alterar os valores dos blocos feitos no Simulink assim como monitorar em tempo real as saídas e as entradas da placa. A interface pode ser vista pela Figura (24).

A placa dSPACE DS1104 disponibiliza 8Mbytes de memória flash e 32Mbytes de memória SDRAM. Possui também 8 conversores Analógico/Digital e 8 conversores Digital/Analógico, os quais somente foram usados um de cada neste experimento. As propriedades dos canais A/D e D/A desta placa podem ser vistas pelas tabelas (3) e (4).

Tabela 3: Característica da porta D/A da placa DS1104

| | |
|---|---|
| Tensão de Saída Máx. | 10 V |
| Tensão de Saída Mín. | -10 V |
| Corrente de Saída Máx. | 5 mA |
| Corrente de Saída Mín. | -5 mA |
| Resistência de Saída | → 0 Ω |
| SNR (Signal-to-noise-Ratio) | > 80 dB |

Tabela 4: Característica da porta A/D da placa DS1104

| | |
|---|---|
| Tensão de Entrada Máx. | 10 V |
| Tensão de Entrada Mín. | -10 V |
| Resistência de Entrada | Aprox. 1M Ω |
| SNR (Signal-to-Noise-Ratio) | > 80 dB |

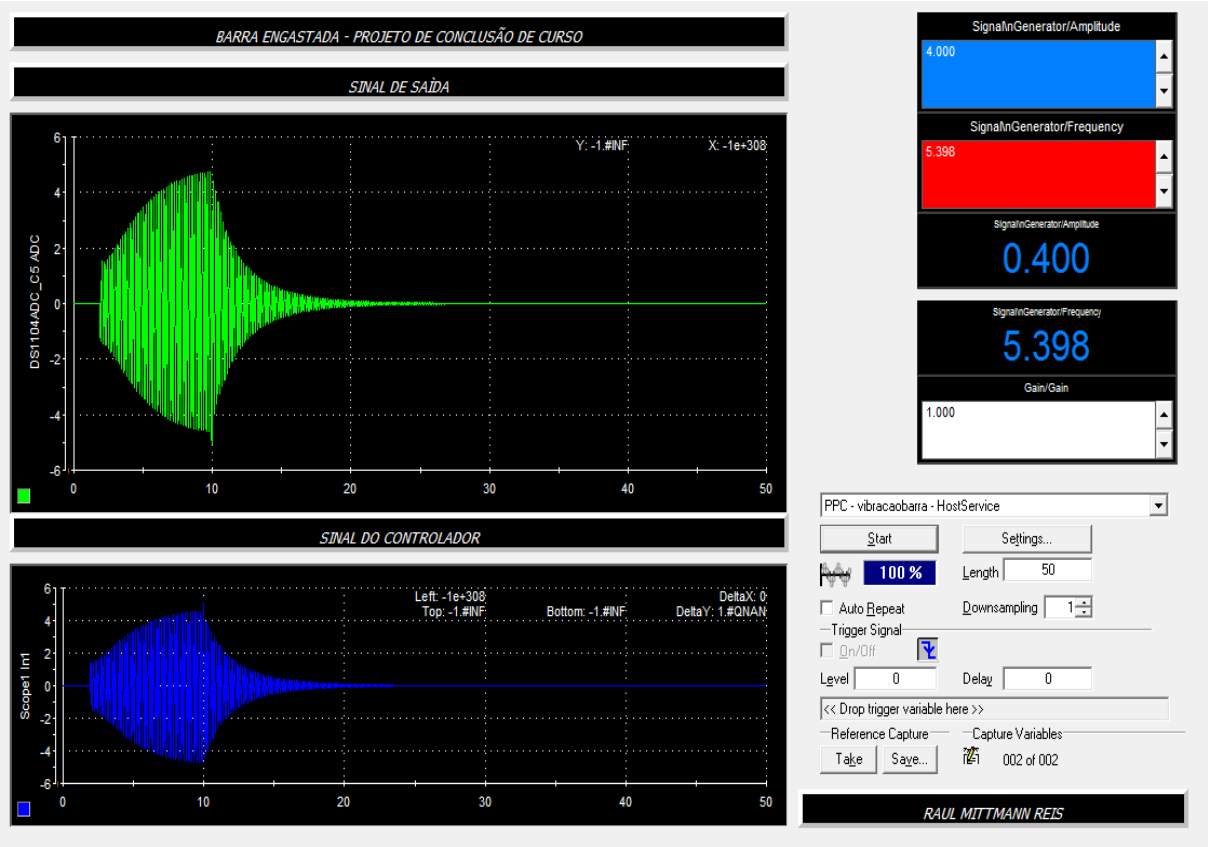


Figura 24: Interface do *software* ControlDesk.

O conversor D/A é utilizado para transformar sinal digital em analógico. Com isso se programa um modelo no Simulink, por exemplo, um gerador de sinais, e a placa captura esse sinal gerado no Simulink e transforma em um sinal analógico com exatamente as mesmas características na porta D/A especificada através dos blocos RTI.

O atuador piezoelétrico possui uma faixa de atuação entre ± 200V de tensão pico e o conversor D/A possui uma faixa de somente ±10V de pico em sua tensão de saída. Com isso se tornou necessário a utilização de um amplificador de tensão. Assim, utilizou-se o amplificador de potencia QPA 202, da mesma fabricante dos piezoelétricos, a MIDE. Esse amplificador possui uma faixa de tensão elétrica de entrada de ±5V de pico e uma saída de ± 212V de pico. Pode-se também determinar o ganho do amplificador através de um botão tipo *Knob*, ou deixá-lo fixo. Caso esteja fixo, o ganho do amplificador é de 50 V/V, com uma corrente de pico de até ±2A.

Também se tornou necessário a utilização de um filtro RC para o experimento. Notou-se que quando a barra engastada era excitada através dos piezoelétricos acima de 50 Hz, a barra gerava um barulho muito incômodo, o qual se tornava pior à medida que a frequência aumentava, se tornando quase insuportável no terceiro modo de vibração da barra. Isso acontecia devido ao ruído de quantização do conversar D/A da placa dSPACE. Para contornar este problema, utilizou-se um filtro passa baixa RC com faixa de corte idealmente em 50 Hz, porém devido às incertezas dos componentes utilizados a faixa de corte ficou em aproximadamente 47,107 Hz, como pode ser visto pela Figura (25). Assim, o filtro apenas irá afetar o terceiro modo de vibração, como será constatado no capitulo seguinte.

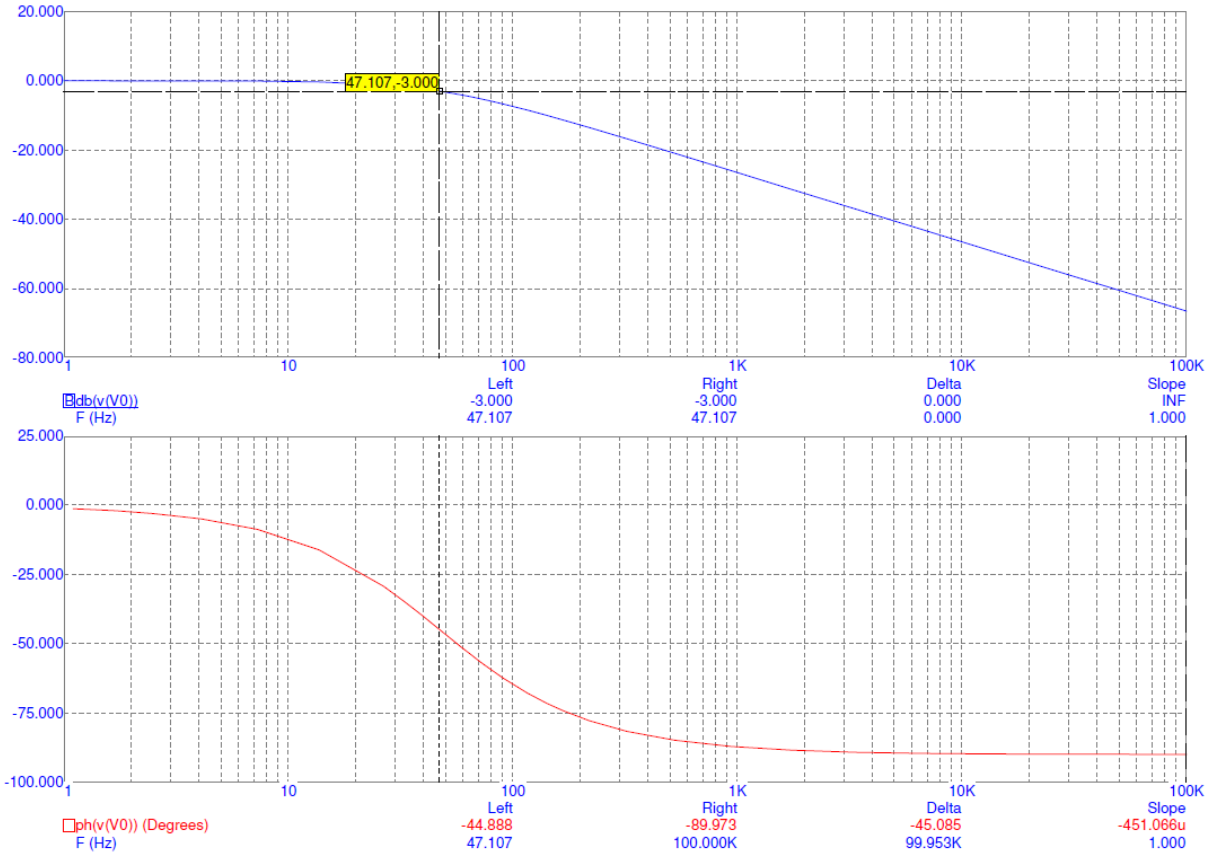


Figura 25: Resposta em frequência do Filtro RC.

A conversão A/D serve para monitorar o sinal de saída do sensor piezoelétrico. Notou-se que os maiores picos do sensor piezoelétrico estavam em torno de $\pm$ 60 V de pico, portanto utilizou-se um atenuador com ganho de 1/10 V/V entre a saída do sensor e a entrada da placa dSPACE, para não danificá-la, já que a mesma possui uma faixa de entrada de $\pm$10 V. Este atenuador é constituído de um divisor de tensão elétrica e um buffer,e seu esquemático pode ser visto em (WINCK, GEISON. Instrumentação, Identificação e Controle Ativo de Vibração em Barras Engastadas, 2012). Também foi utilizado um filtro *Anti-Aliasing* com frequência de corte em torno de 3,16 kHz, portanto não afeta nem o quarto modo de vibração, permitindo uma folga para possíveis futuros experimentos. O filtro *Anti-Aliasing* é um filtro RC simples que serve para atenuar possíveis sinais, como ruído, que possuam uma frequência suficiente que possam ocasionar o efeito de *alias* (imagem). A resposta em frequência do filtro *Anti-Aliasing* pode ser visto pela Figura (26).

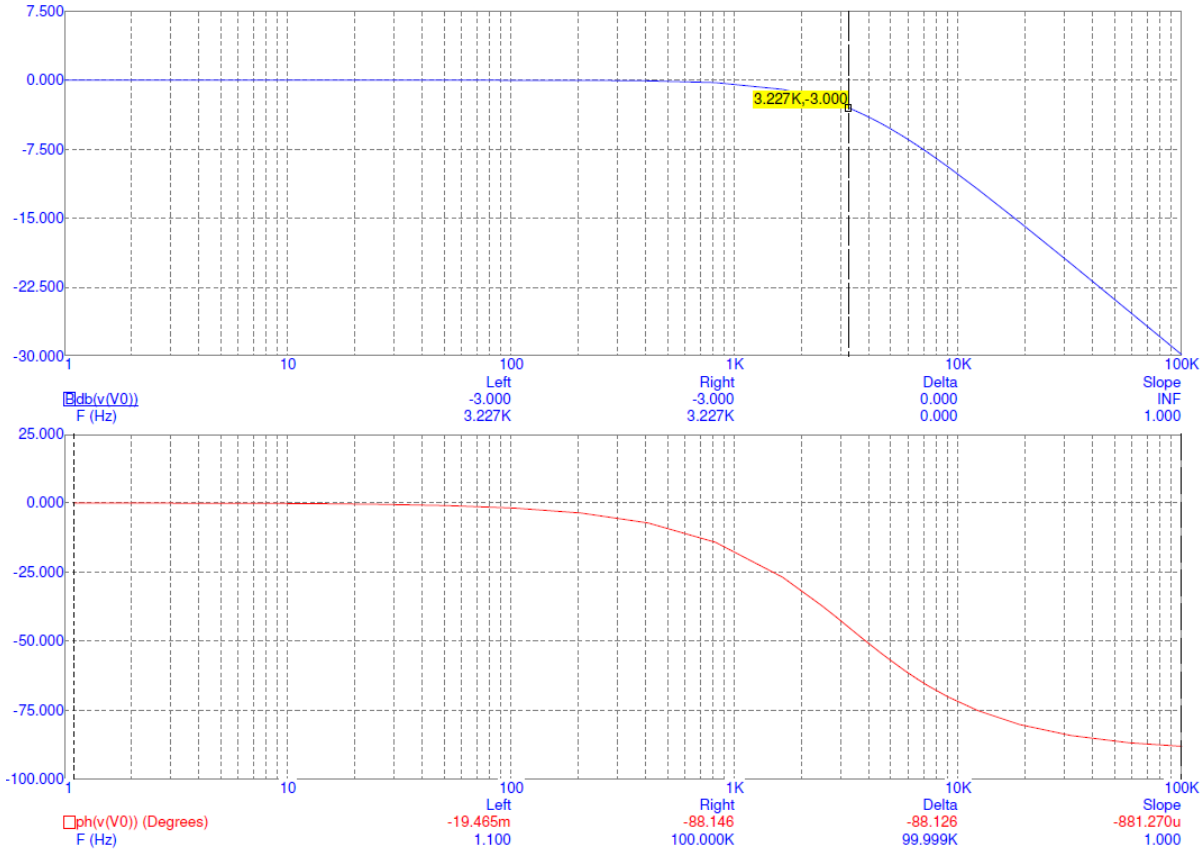


Figura 26: Resposta em frequência do filtro *Anti-Aliasing*.

A frequência de amostragem utilizada foi de 12,5 kHz, isto é, um tempo de amostragem de 0,00008 segundos. Essa frequência foi escolhida de modo que se permita utilizar um filtro *Anti-Aliasing* de até 6,25 kHz, pois de acordo com a teoria de sinais, mais precisamente o

teorema de Nyquist, a frequência de amostragem de um sinal analógico, para que possa posteriormente ser reconstituído com o mínimo de perda de informação, deve ser igual ou maior a duas vezes a maior frequência do espectro desse sinal.

O diagrama de blocos, e a estrutura, que constituem toda a bancada experimental, podem ser vista pelas Figuras (27) e (28), respectivamente:

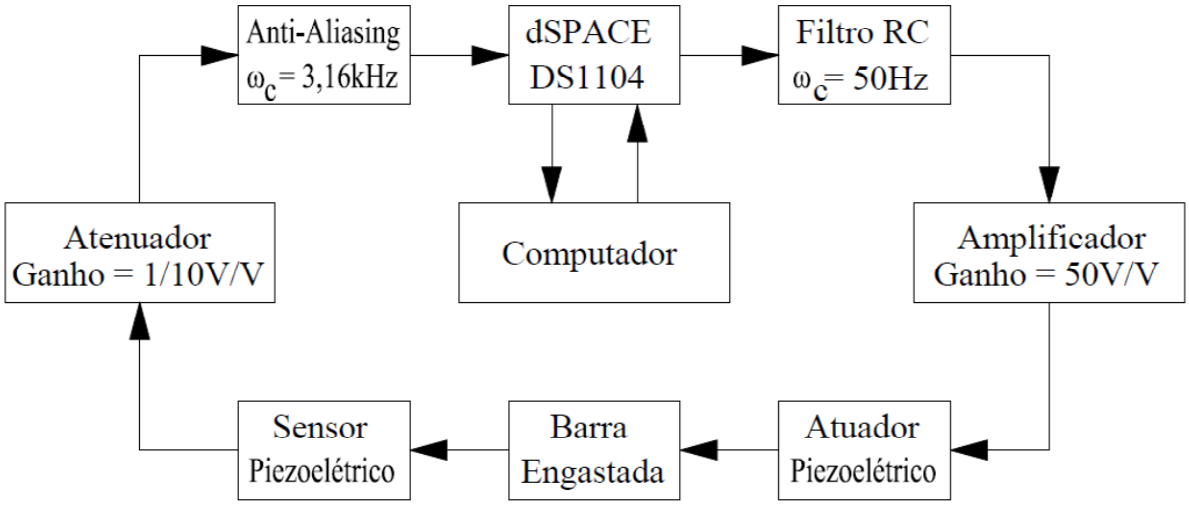


Figura 27: Diagrama de Blocos da bancada experimental.

.

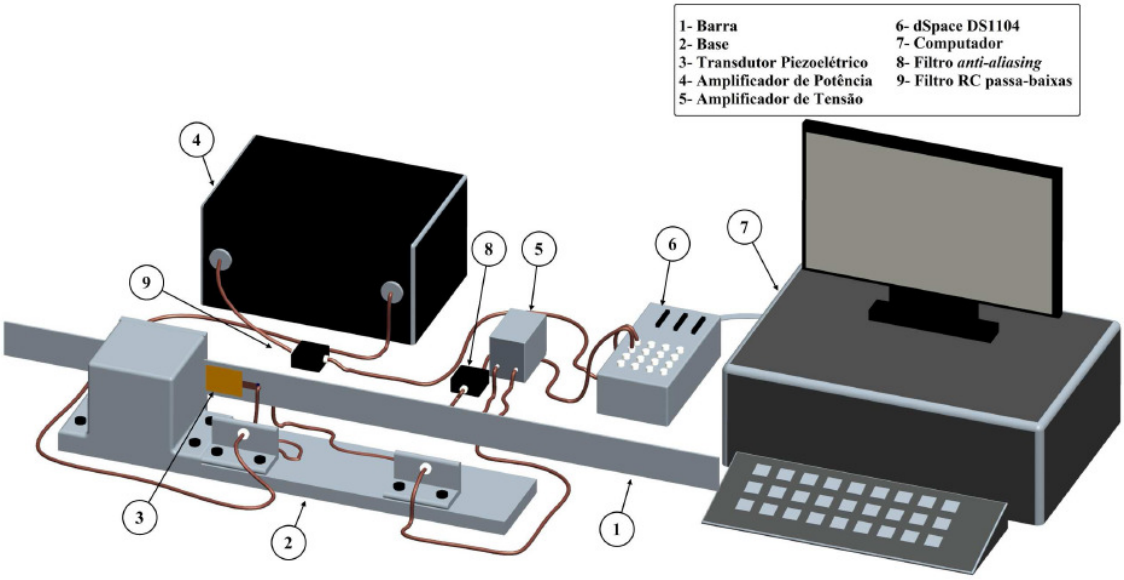


Figura 28: Estrutura montada do experimento (WINCK, GEISON, 2012).

# 4 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

## 4.1 Introdução

Sistemas lineares e invariantes no tempo são usualmente representados por sua função de transferência. Uma interpretação muito importante e conveniente para a função de transferência de um sistema é obtida levando em conta o que acontece com a saída do sistema quando ele é excitado por um sinal senoidal em sua entrada (GOMES DA SILVA JR; BAZANELLA, 2005). Um sistema desse tipo pode ser mostrado pela figura (29):

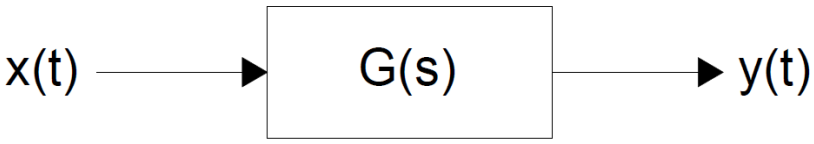


Figura 29: Sistema LTI.

Caso a entrada do sistema seja um sinal senoidal da forma:

$$x(t) = X.sen(\omega t) \tag{124}$$

Onde $X$ é a amplitude do sinal de entrada e $\omega$ a frequência do sinal. O sinal de saída em regime permanente também será um sinal senoidal de mesma frequência que a entrada, porém com amplitude e defasagem diferente:

$$y(t) = Y.sen(\omega t - \varphi) \tag{125}$$

Onde $Y$ é a amplitude do sinal de saída e $\varphi$ é a defasagem. O ganho e a defasagem dependem da frequência do sinal de entrada, portanto excitando um sistema com todas as frequências possíveis através de um sinal com a forma da equação (124), têm-se a resposta em frequência do sistema. A resposta em frequência, que pode ser graficamente representado pelo conhecido diagrama de Bode, é uma poderosa ferramenta matemática para análise de sistemas e para projetos de controle.

A amplitude e a defasagem do sinal de saída de um sistema podem ser definidas calculando-se o valor de $G(j\omega)$ para a frequência do sinal de entrada, onde $\omega$ é a frequência do sinal de entrada. O resultado disto será um número complexo, que representado nas

coordenadas polares apresentará um ganho, $|G(j\omega)\,|$, e uma defasem, $\angle G(jw)$, como pode ser visto pelas equações a seguir:

$$|G(j\omega)\,| = \frac{|Y(j\omega)\,|}{|X(j\omega)\,|} \tag{126}$$

$$\varphi = \angle G(jw) = \angle\left(\frac{|Y(j\omega)\,|}{|X(j\omega)\,|}\right) \tag{127}$$

Onde $Y(j\omega)$ e $X(j\omega)$ são as transformadas de Laplace do sinal de saída e entrada, respectivamente. Para o sistema em estudo, a barra engastada com os transdutores piezoelétricos, se excitou o sistema com o seguinte sinal de entrada:

$$x(t) = 4.sen(209{,}58t) \tag{128}$$

Ou seja, com amplitude de $\pm 4\,V$ de pico e com uma frequência de $33{,}35\,Hz$. A saída do sistema para essa entrada é mostrada abaixo:

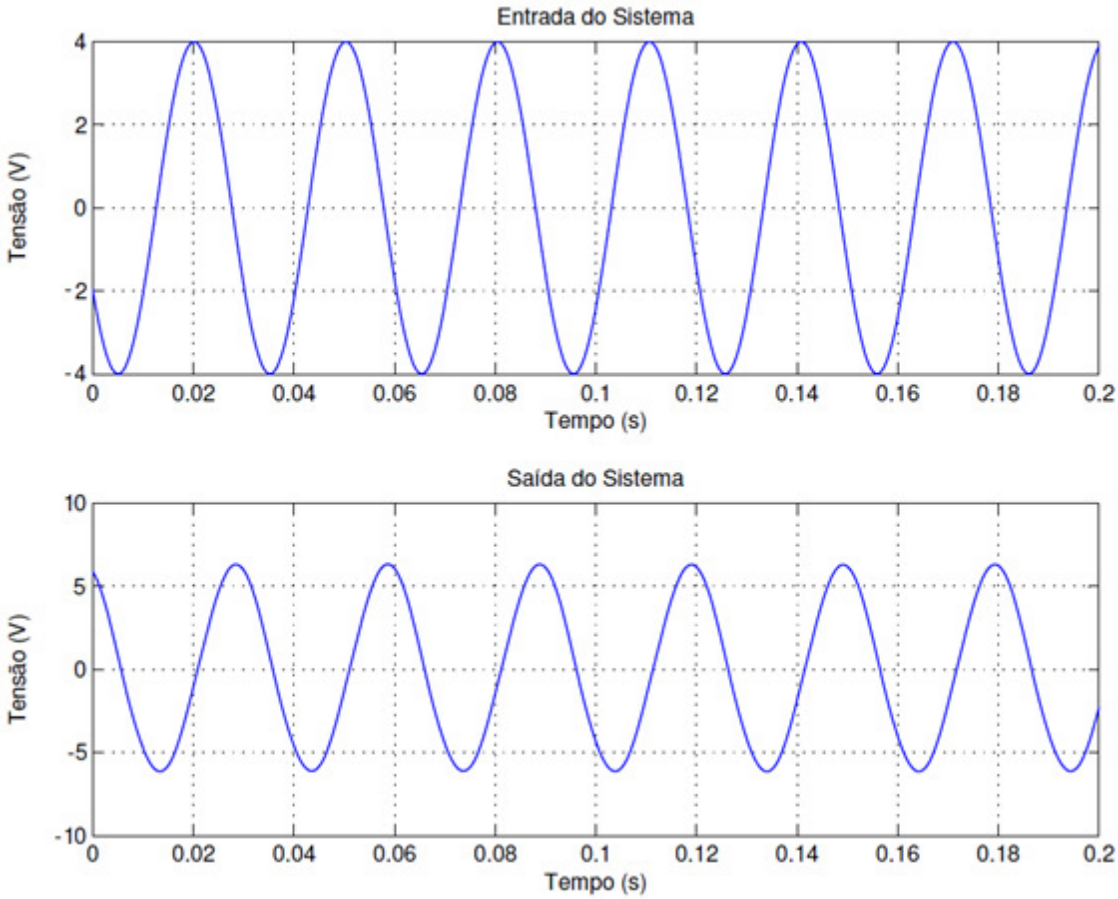


Figura 30: Sinal de entrada e de saída do sistema.

Nota-se que a saída possui amplitude de pico de aproximadamente $6{,}328\,V$, caracterizando um ganho de $1{,}58V/V$, ou $3{,}97dB$, e uma defasagem de aproximadamente 81

graus. Caso a frequência do sinal de entrada fosse variada, teríamos um ganho e uma defasagem diferente para o sinal de saída.

## 4.2 Metodologia

Nesse trabalho, a identificação do sistema é realizada aplicando um sinal PRBS (*Pseudo-Random Binary Signal*) na entrada do sistema e analisando os dados de saída adquiridos pelo sensor piezoelétrico. O sinal PRBS é um sinal pseudoaleatório de pulsos com amplitudes máximas e mínimas definidas pelo usuário, o qual compreende uma gama muito vasta de frequências, quase que caracterizando um ruído branco. Esse tipo de sinal é muito usado para identificação de sistemas. O termo pseudorrandômico se refere que, apesar de ser o usuário que crie o sinal, se tornando determinístico, o sinal parece ser randômico pelo fato de que os valores do sinal são independentes de qualquer outro elemento, se tornando um sinal randômico. Esse tipo de sinal pode ser visto pela figura abaixo:

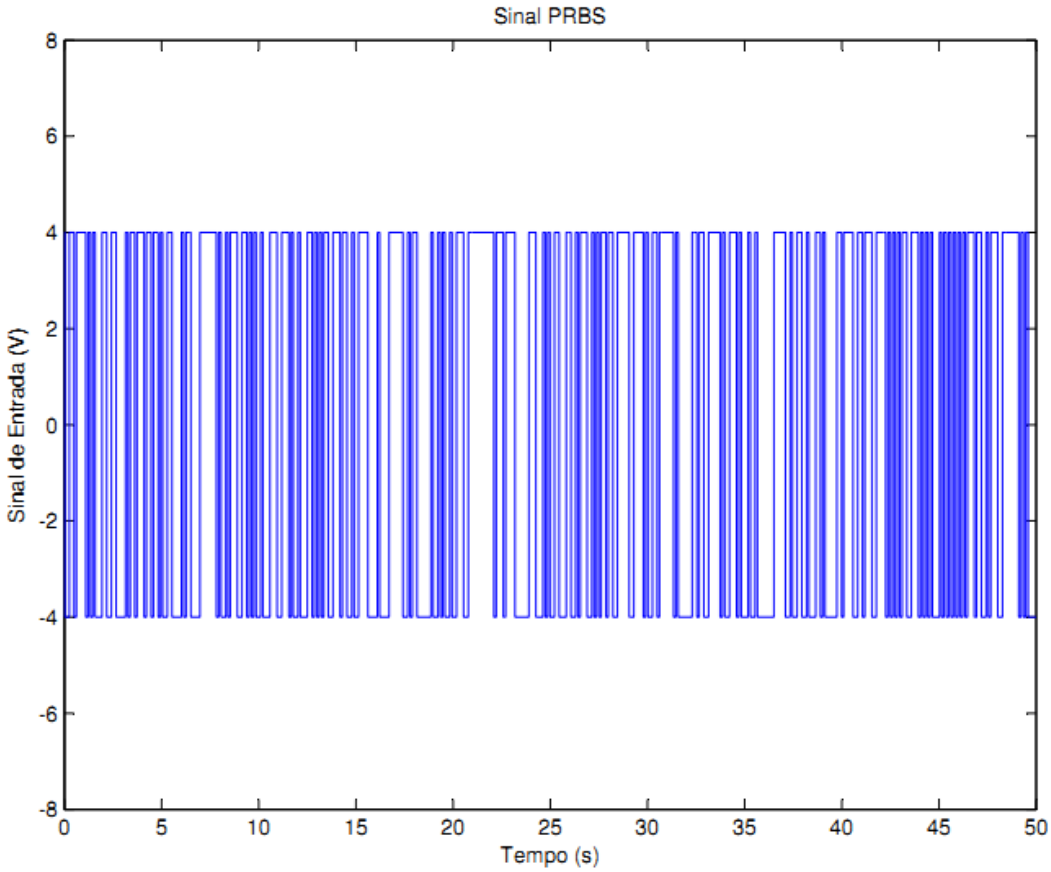


Figura 31: Sinal PRBS.

Para determinar a função de transferência, o que consiste na análise dos dados de saída do sistema em conjunto com o sinal de entrada, pode se usar o método dos mínimos quadrados. O método dos mínimos quadrados é uma técnica que procura encontrar o melhor ajuste para

um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. Portanto, se deseja ajustar a melhor curva para este conjunto de dados. Seja uma função escalar $y_{mq} = f(x_{mq})$ onde:

$$\begin{aligned} y_{mq_1} &= f\left(x_{mq_1}\right) \\ y_{mq_2} &= f\left(x_{mq_2}\right) \\ \vdots &= \vdots \\ y_{mq_n} &= f(x_{mq_n}) \end{aligned} \tag{129}$$

É visto que $f(x_{mq})$ depende de um vetor de $n$ parâmetros, que será chamado de $\theta_{mq}$. (AGUIRRE, 2004) define que a função $f(x_{mq})$ é parametrizada por $\theta_{mq}$ e pode ser representada da seguinte forma:

$$y_{mq} = f(x_{mq}, \theta_{mq}) \tag{130}$$

Semelhantemente:

$$\begin{aligned} y_{mq_1} &= f\left(x_{mq_1}, \theta_{mq}\right) \\ y_{mq_2} &= f\left(x_{mq_2}, \theta_{mq}\right) \\ \vdots &= \vdots \\ y_{mq_n} &= f(x_{mq_n}, \theta_{mq}) \end{aligned} \tag{131}$$

Logo se é conhecido $y_{mq}$ e $x_{mq}$, é possível determinar $f$ e $\theta_{mq}$. Assim, (AGUIRRE, 2004) define as seguintes considerações:

**Consideração 4.2.1**: a função $f$ e o vetor $\theta_{mq}$ não variam de uma restrição para outra, ou seja, todas as restrições são de fato a mesma equação.

**Consideração 4.2.2**: $y_{mq} = f(x_{mq}, \theta_{mq})$ pode ser escrita como:

$$y_{mq} = f(x_{mq}, \theta_{mq}) = {x_{mq}}^T . \theta_{mq} \tag{132}$$

**Consideração 4.2.3**: Serão tomadas $n$ restrições a fim de se ter $n$ equações para determinar os n elementos de $\theta$, isto é $N = n$, onde $N$ é o número de medidas realizadas. Feita essas três considerações, pode se escrever $y$ como:

$$\begin{bmatrix} y_{mq_1} \\ y_{mq_2} \\ \vdots \\ y_{mq_n} \end{bmatrix} = [x_{mq_1} \quad x_{mq_2} \quad \cdots \quad x_{mq_n}] . \begin{bmatrix} \theta_{mq_1} \\ \theta_{mq_2} \\ \vdots \\ \theta_{mq_n} \end{bmatrix} \tag{133}$$

O que pode ser escrito também por:

$$y_{mq} = X_{mq}\theta_{mq} \tag{134}$$

De acordo com a equação (134), $y_{mq}$ é a variável dependente (saída), pois depende de $x_{mq}$ (entrada), e $\theta_{mq}$ é a variável a ser determinada. Caso $N$ for igual a $n$, existe somente uma solução do sistema. Mas caso $N > n$, existem infinitas soluções do sistema. Para solucionar esta última situação, no início é assumido que se conheça o parâmetro a ser determinado, $\theta_{mq}$, e que existe um erro, $\xi$ , ao se tentar explicar o valor de $y_{mq}$ a partir dos vetores de $x_{mq}$ e $\theta_{mq}$ (AGUIRRE, 2004), logo:

$$y_{mq} = X_{mq}\theta_{mq} + \xi \tag{135}$$

Dada uma solução de $\theta_{mq}$, além de satisfazer a equação (135), que outra propriedade seria vantajosa? Essa outra propriedade seria um $\theta_{mq}$ que reduzisse o erro $\xi$. Para tomar a resposta mais precisa, (AGUIRRE, 2004) define uma função de custo que é o somatório do quadrado dos erros:

$$J_{mq} = \sum_{i_{mq}=1}^{N} \xi\left(i_{mq}\right)^2 = \xi^T\xi = \|\xi^2\| \tag{136}$$

Substituindo (135) em (136):

$$\begin{aligned} J_{mq} &= \left(y_{mq} - X_{mq}\theta_{mq}\right)^T.\left(y_{mq} - X_{mq}\theta_{mq}\right) \\ &= {y_{mq}}^T y_{mq} - {y_{mq}}^T X_{mq}\theta_{mq} - {\theta_{mq}}^T {X_{mq}}^T y_{mq} + {\theta_{mq}}^T {X_{mq}}^T X_{mq}\theta_{mq} \end{aligned} \tag{137}$$

Para achar um $\theta_{mq}$ que minimize a equação de custo (137), a primeira derivada da equação (137) em relação à $\theta_{mq}$ deve ser nula, portanto:

$$\frac{\partial J_{mq}}{\partial \theta_{mq}} = -\left({y_{mq}}^T X_{mq}\right)^T - {X_{mq}}^T y_{mq} + \left({X_{mq}}^T X_{mq} + {X_{mq}}^T X_{mq}\right)\theta_{mq} = 0 \tag{138}$$

Logo:

$$\theta_{mq} = \left[{X_{mq}}^T.X_{mq}\right]^{-1}.{X_{mq}}^T.y_{mq} \tag{139}$$

A equação (139) é a solução obtida pelo método dos mínimos quadrados, também conhecida como estimador de mínimos quadrados clássico. Existem versões mais sofisticadas desse estimador, sendo essas utilizadas pela *toolbox* do Matlab chamada *System Identification Toolbox*, cuja interface é de fácil compreensão, e que facilita muito a identificação dos parâmetros. Nesse *software,* o usuário entra com dados de sinais no domínio tempo, ou domínio frequência, e o programa tenta estipular a função de transferência com os dados

inseridos, através do método descrito anteriormente. Mas para isto, deve-se estipular o número de zeros e o número de polos do sistema a identificar, o que será feito em seguida.

## 4.3 Identificação dos Parâmetros

Para começo, deve-se lembrar do comportamento em baixas frequências do piezoelétrico, que se caracteriza como um filtro passa alta, como pode ser visto pela equação (119), a qual será simplificada por:

$$G_{piezoelétrico}(s) = \frac{s}{s+b} \tag{140}$$

Nota-se que essa função possui um zero na origem e um polo em $b$, portanto, de acordo com a Seção (3.3.2), não existe um amplificador de carga no transdutor piezoelétrico. Também existe um filtro passa baixa RC, com frequência de corte em 50 $Hz$, o qual foi utilizado para atenuar o ruído de quantização do conversor D/A da placa dSPACE. Esse filtro possui a seguinte função de transferência:

$$G_{RC}(s) = \frac{RC}{s+RC} \tag{141}$$

Onde $RC$ é a frequência de corte do filtro. Portanto a função de transferência completa do sistema é:

$$G(s) = G_{RC}(s).G_{piezoelétrico}(s).G_{Vs}(s) \tag{142}$$

Onde:

$$G_{Vs}(s) = \frac{V_{sk}'(s)}{V_a'(s)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Upsilon_i.P_i}{s^2+2.\zeta_i.\omega_i.s+\omega_i{}^2} + \sum_{N}^{N_{máx}} k_i \tag{143}$$

Os termos $V_{sk}'(s)$ e $V_a'$ se justificam que, neste experimento, se considerou a tensão de saída da placa dSPACE como a tensão do atuador piezoelétrico e a tensão de entrada da placa dSPACE como a tensão induzida no sensor piezoelétrico. De acordo com a Figura (28), a real tensão no atuador piezoelétrico é a tensão de saída da placa dSPACE multiplicada pelo amplificador de potência com ganho de $50\ V/V$, e filtrado pelo filtro RC. Também, de acordo com essa figura, a real tensão induzida no sensor é dez vezes maior, já que o mesmo possui um atenuador com ganho de $\frac{1}{10}V/V$, além de ser filtrado pelo filtro *Anti-Aliasing*. Esse fato só irá implicar no ganho do sistema, como será visto logo em seguida. Foi considerada essa situação pois, como o controlador vai ser programado pela placa dSPACE, o sistema deve ser visto pelas entradas e saídas da placa.

Neste modelo, estamos interessados somente nos três primeiros modos de vibração, portanto, de acordo com (143):

$$G_{Vs}(s) = \frac{\Upsilon_1 . P_1}{s^2 + 2.\zeta_1.\omega_1.s + {\omega_1}^2} + \frac{\Upsilon_2 . P_2}{s^2 + 2.\zeta_2.\omega_2.s + {\omega_2}^2} + \frac{\Upsilon_3 . P_3}{s^2 + 2.\zeta_3.\omega_3.s + {\omega_3}^2} + \sum_{N}^{N_{máx}} k_i \tag{144}$$

Onde $\Upsilon_n$ e $P_n$ são constantes que podem ser definidas pelas equações (75) e (64). O termo de correção pela truncagem do modelo, $\sum_{N}^{N_{máx}} k_i$, também pode ser aproximado por uma constante, ficando $G_{Vs}(s)$ da seguinte forma, aplicando mínimo denominador comum:

$$G_{Vs}(s) = k_s \left( \frac{p_{p6}s^6 + p_{p5}.s^5 + p_{p4}.s^4 + p_{p3}.s^3 + p_{p2}.s^2 + p_{p1}.s + p_{p0}}{(s^2 + 2.\zeta_1.\omega_1.s + \omega_1^2).(s^2 + 2.\zeta_2.\omega_2.s + {\omega_2}^2).(s^2 + 2.\zeta_3.\omega_3.s + {\omega_3}^2)} \right) \tag{145}$$

Onde $k_s$ é o ganho do sistema e $p_{pn}$ são os coeficientes do polinômio do numerador de (145). Portanto o sistema da equação (145) possui seis polos e seis zeros, sendo os zeros como três pares de zeros conjugados complexos. Logo a função completa da função de transferência fica na forma de:

$$G(s) = \frac{RC}{s + RC} . \frac{s}{s + b} . k_s \left( \frac{p_{p6}s^6 + p_{p5}.s^5 + p_{p4}.s^4 + p_{p3}.s^3 + p_{p2}.s^2 + p_{p1}.s + p_{p0}}{(s^2 + 2.\zeta_1.\omega_1.s + \omega_1^2).(s^2 + 2.\zeta_2.\omega_2.s + {\omega_2}^2).(s^2 + 2.\zeta_3.\omega_3.s + {\omega_3}^2)} \right) \tag{146}$$

Totalizando um total de oito zeros e sete polos. Antes de se analisar a saída do sistema aplicando o sinal PRBS, foi inserido um ruído branco como entrada, e com os dados adquiridos na saída, foi feita a transformada de Fourier. A transformada de Fourier da saída de um sistema excitado com um ruído branco nos fornece as frequências com maiores ganhos do sistema, o que nesse caso será as frequências de ressonância da barra. A transformada de Fourier da saída devido ao ruído branco pode ser vista pela Figura (32).

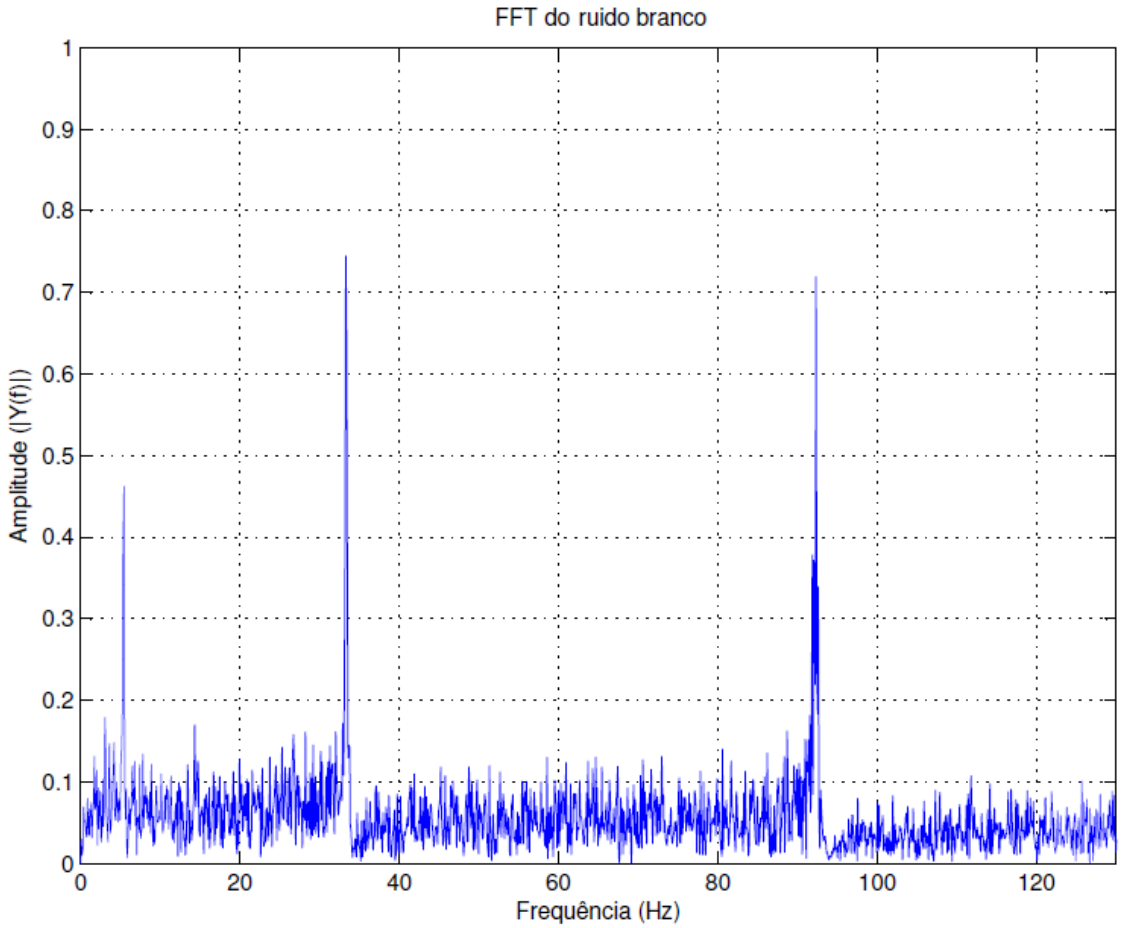


Figura 32: Transformada de Fourier da saída do sistema com um ruído branco na entrada.

Nota-se pelo gráfico da transformada de Fourier que o sistema possui picos em aproximadamente $5{,}4\,Hz$, $33{,}3\,Hz$, e $92\,Hz$. Esses valores, que são as três primeiras frequências de ressonância da barra, estão bem próximos das frequências calculadas por (115). Esse erro entre as frequências calculadas já era esperado, pois existem várias incertezas no sistema como: a impureza do material, o que acarreta no erro de densidade da barra e incerteza das dimensões da barra. Ambas as incertezas, de acordo com a equação (30), afetam no cálculo das frequências naturais da barra.

Com uma aproximação das primeiras três frequências de ressonância da barra, o que irá servir como base de dados para validar o experimento, se aplicou o sinal PRBS na barra, assim como se adquiriu os dados de saída. O sinal de entrada foi aplicado por 50 segundos com uma amplitude de $\pm 4\,V$. O sinal de entrada e o sinal de saída deste experimento podem ser vistos na Figura (33).

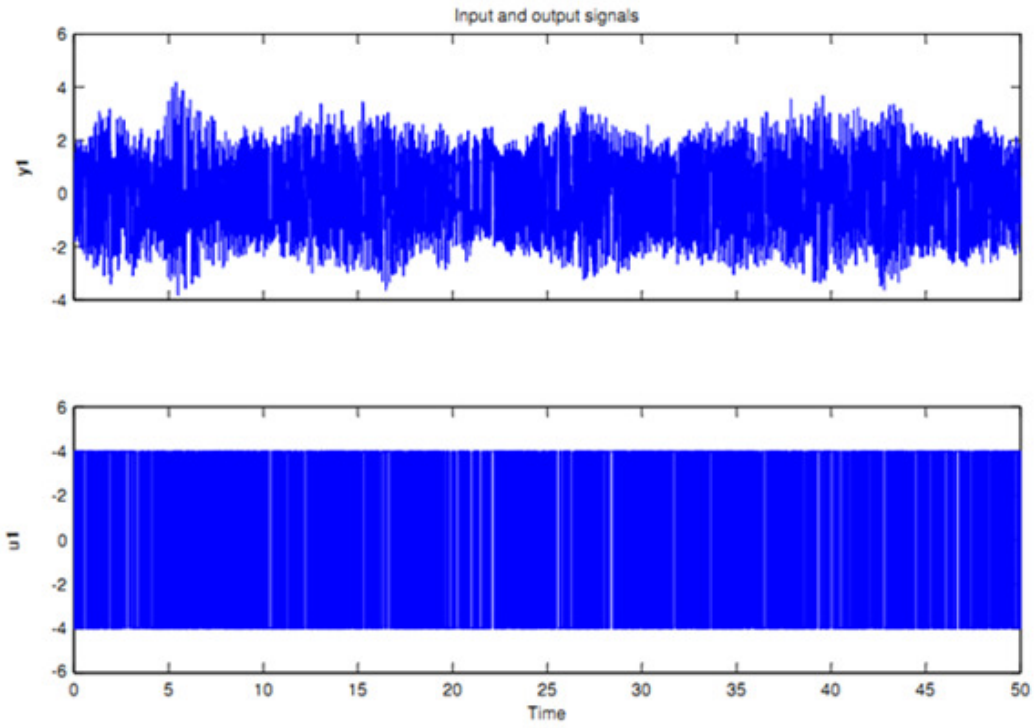


Figura 33: Sinal de entrada e sinal de saída do experimento com PRBS.

Onde $u1$ é a entrada e $y1$ é a saída. Com esses dados, se utilizou o *System Identification Toolbox*, do Matlab, e assim estipulou-se uma função de transferência com oito polos e sete zeros. O sistema identificado pela *toolbox* ficou da seguinte forma:

$$G_b(s) = \left(k_s.\frac{263{,}2}{s+263{,}2}.\frac{s}{s+2{,}827}\right).$$
$$\left(\frac{s^2+2.0{,}002.34{,}822s+34{,}822^2}{s^2+2.0{,}00317.33{,}919.s+33{,}919^2}\right).\left(\frac{s^2+2.0{,}00235.214s+214^2}{s^2+2.0{,}00225.209{,}58.s+209{,}58^2}\right). \quad (147)$$
$$\left(\frac{s^2+2.0{,}000407.589s+598^2}{s^2+2.0{,}00194.579{,}7.s+579{,}7^2}\right)$$

Onde $k_s = 0{,}335$, lembrando que esse ganho se refere à tensão de entrada da placa dSPACE com a tensão de saída da mesma placa. Portanto a função genérica da função de transferência fica na forma de:

$$G(s) = \frac{RC}{s+RC}.\frac{s}{s+b}.$$
$$k_s\left(\frac{s^2+2.\hat{\zeta}_1.\widehat{\omega}_1.s+\widehat{\omega}_1{}^2}{s^2+2.\zeta_1.\omega_1.s+\omega_1{}^2}.\frac{s^2+2.\hat{\zeta}_2.\widehat{\omega}_2.s+\widehat{\omega}_2{}^2}{s^2+2.\zeta_2.\omega_2.s+\omega_2{}^2}.\frac{s^2+2.\hat{\zeta}_3.\widehat{\omega}_3.s+\widehat{\omega}_3{}^2}{s^2+2.\zeta_3.\omega_3.s+\omega_3{}^2}\right) \quad (148)$$

Isto é, a função de transferência genérica para o sistema em estudo possui três pares de zeros e polos complexos conjugados, devido aos modos de vibração da barra engastada, um zero na origem e um polo em $b$, devido ao comportamento em baixa frequência do

piezoelétrico, e um polo em $RC$ devido ao filtro RC que foi utilizado para atenuar os ruídos acústicos gerados pela barra. Para comparar a função de transferência estipulada pela *Toolbox* com o sistema real, são necessários dados do sistema real. Assim, analisou-se o sistema real excitando-o com um sinal senoidal variando a frequência ponto a ponto, fazendo uma varredura da resposta em frequência. Com isso, se calculou a amplitude a defasagem entre a entrada e saída, e com esses dados foi possível fazer o Diagrama de Bode do sistema real. A comparação do diagrama de Bode do sistema estipulado com o sistema real pode ser visto na figura (34):

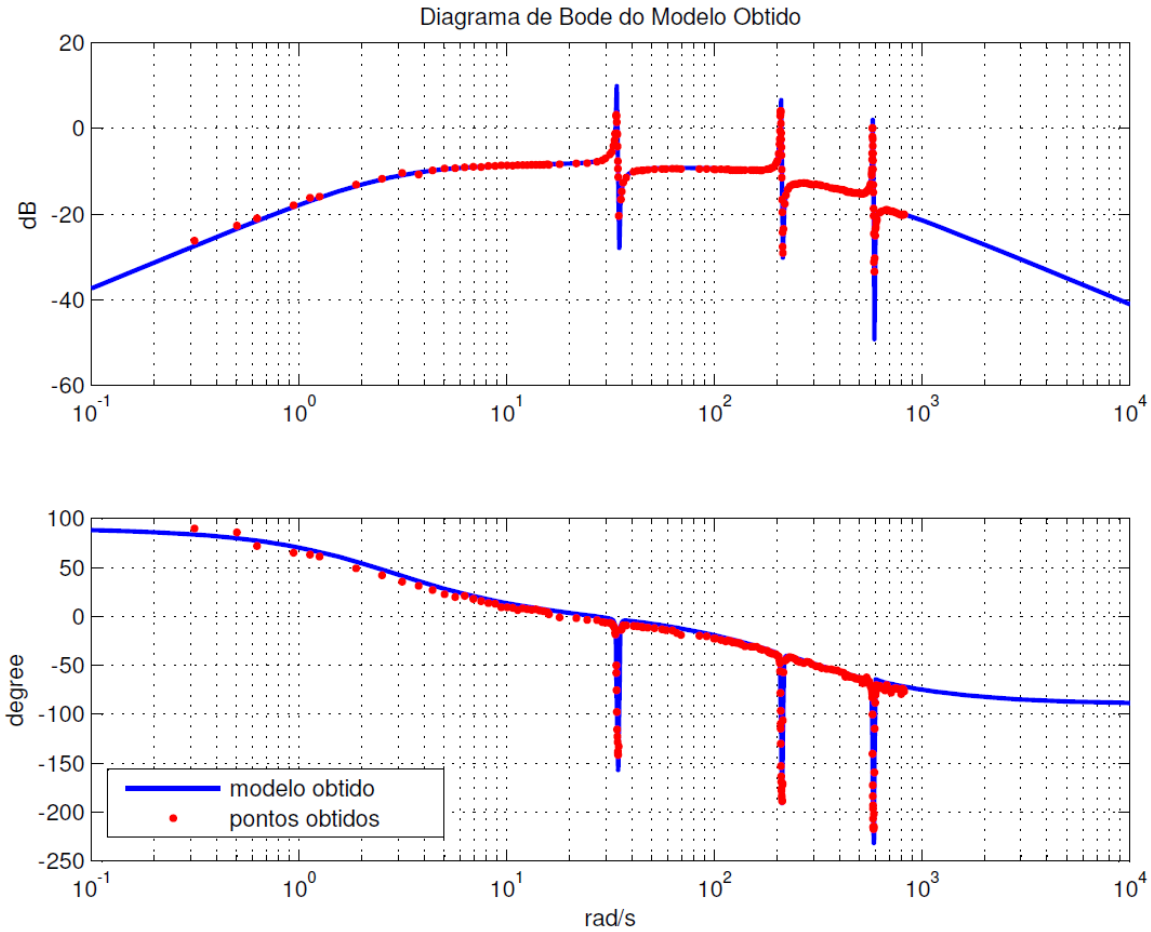


Figura 34: Diagrama de Bode do Sistema obtido pelo *System Identification Toolbox*.

Nota-se que a segunda frequência de ressonância está de acordo, porém a primeira e a terceira frequência não estão. É importante notar que mesmo com um filtro RC com uma frequência de corte em aproximadamente 50 $HZ$, o terceiro modo de vibração não foi afetado a ponto de ser atenuado. Com isso, ajustou-se experimentalmente, por tentativa e erro, os coeficientes de amortecimento da equação (147), de modo a otimizar a curva do modelo obtido com os pontos obtidos, pois são esses coeficientes que determinam os picos de pares

de polos e zeros complexos conjugados. Assim, a função de transferência do sistema ficou na forma de:

$$G_{ba}(s) = \left(k_s.\frac{263{,}2}{s+263{,}2}.\frac{s}{s+2{,}827}.\right)$$
$$\left(\frac{s^2+2.0{,}00620.34{,}822s+34{,}822^2}{s^2+2.0{,}00650.33{,}919.s+33{,}919^2}\right).\left(\frac{s^2+2.0{,}00245.214s+214^2}{s^2+2.0{,}00336.209{,}58.s+209{,}58^2}\right). \quad (149)$$
$$\left(\frac{s^2+2.0{,}00220.589s+598^2}{s^2+2.0{,}00200.579{,}7.s+579{,}7^2}\right)$$

O diagrama de Bode do sistema ajustado comparado aos dados do sistema real, e a localização de polos e zeros, podem ser vistas nas Figuras (35) e (36), respectivamente. Também foi feito um zoom no diagrama de polos e zeros para facilitar a análise dos dados, que pode ser visto na figura (37).

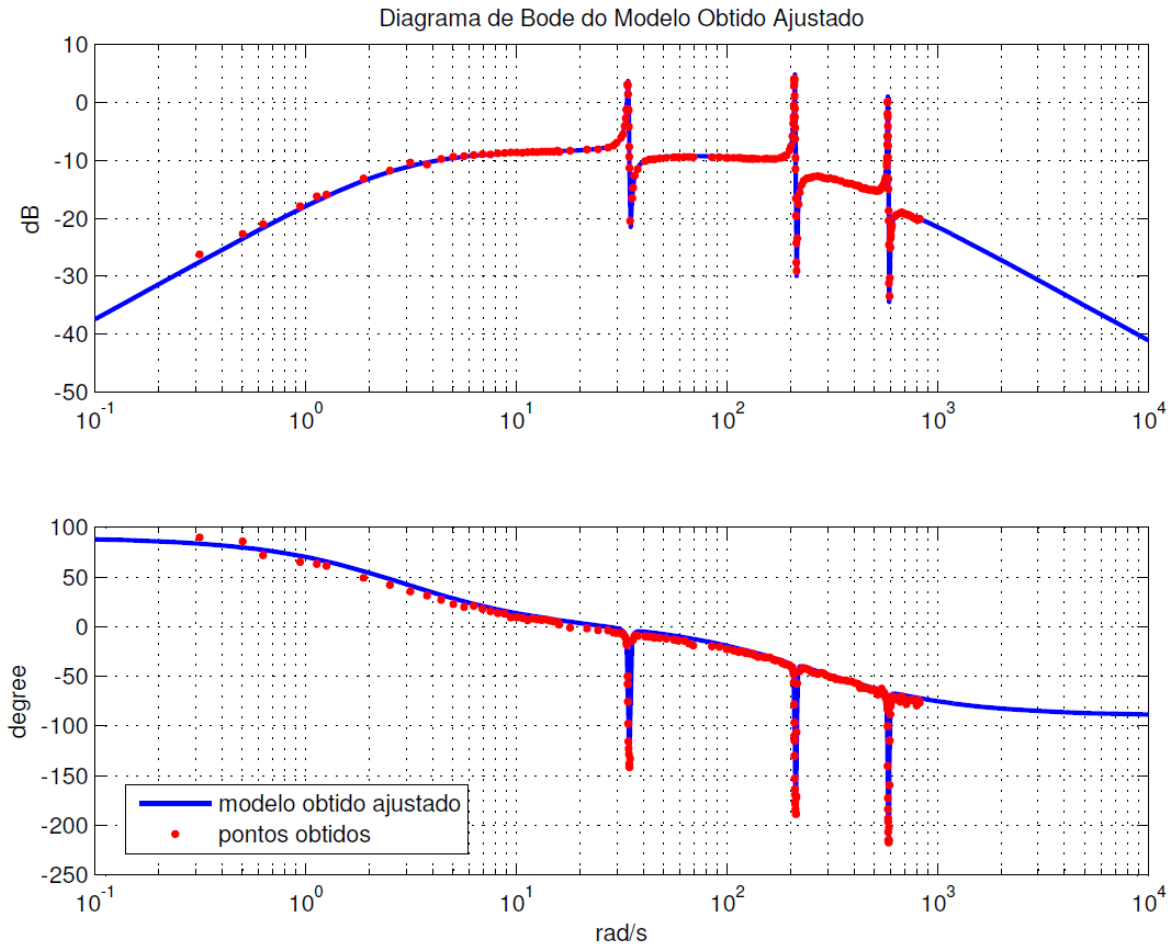


Figura 35: Diagrama de Bode do Sistema obtido pelo *System Identification Toolbox* ajustado.

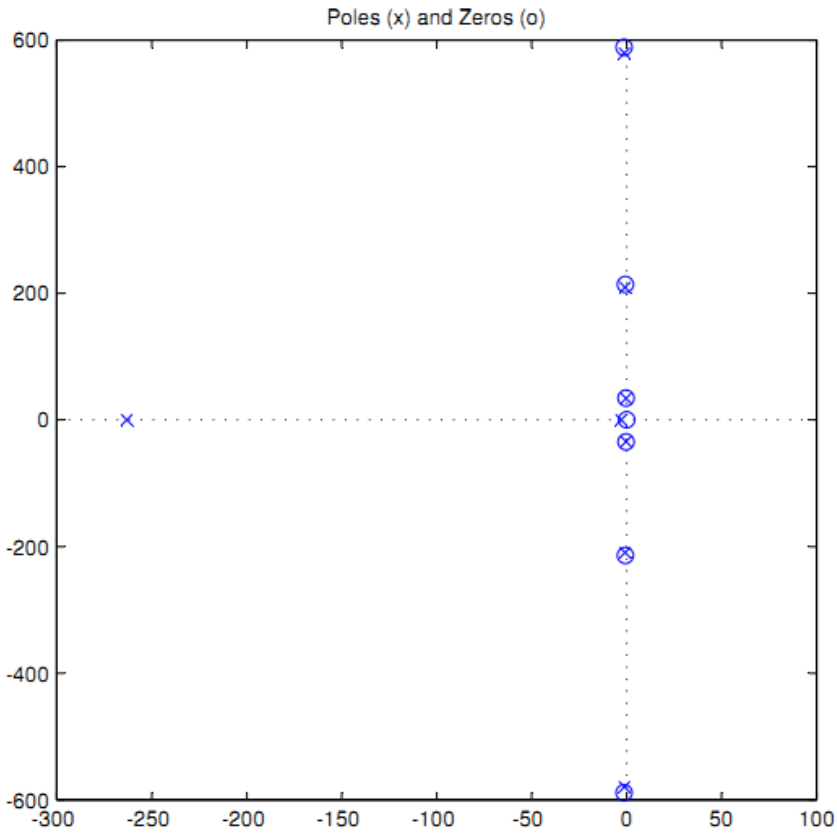


Figura 36: Diagrama de Polos e Zeros.

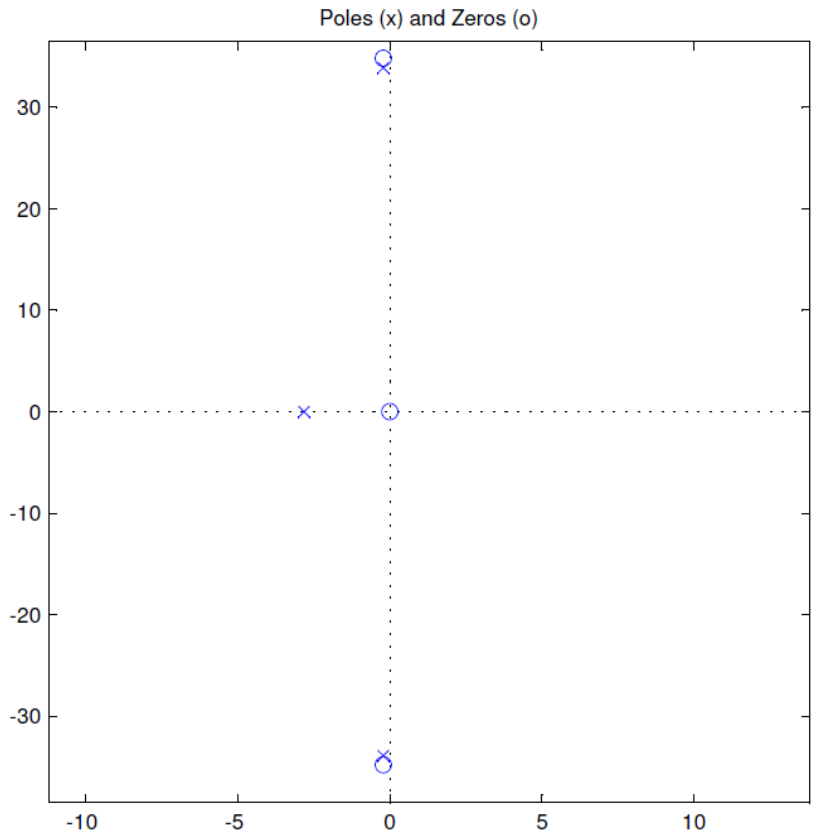


Figura 37: Zoom no Diagrama de Polos e Zeros

Como pode ser visto, a resposta em frequência ficou bem próxima com os dados adquiridos, com erros concentrados nos picos de no máximo $2\ dB$. Analisando o diagrama de polos e zeros, nota-se a presença de três polos e zeros complexos conjugados, que dependem das frequências de ressonância da barra, um polo em aproximadamente em $263{,}2\ rad/s$, do filtro passa baixa RC, um zero na origem e um polo em $2{,}827\ rad/s$, que correspondem ao comportamento em baixa frequência do piezoelétrico, o que já era esperado. Os parâmetros do sistema identificado, que definem a equação (148), podem ser vistos pela tabela a seguir:

Tabela 5: Parâmetros do sistema.

| Modo de Vibração | 1 | 2 | 3 | Parâmetro $RC$ | Parâmetro $b$ | Ganho $k_s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_n$ | 33,919 | 209,58 | 579,7 | 263,2 | 2,827 | 0,067 |
| $\hat{\omega}_n$ | 34,822 | 214 | 598 | | | |
| $\zeta_n$ | 0,00650 | 0,00336 | 0,00200 | | | |
| $\hat{\zeta}_n$ | 0,00620 | 0,00245 | 0,00220 | | | |

As frequências de ressonância da barra que foram identificadas são, aproximadamente, $5{,}39\ Hz$, $33{,}35 Hz$, e $92{,}26\ Hz$, o que está bem próximo dos valores identificados pela transformada de Fourier do sistema quando excitado com um ruído branco, Figura (32). Foi feita a simulação da resposta ao degrau unitário no sistema identificado para comparar com a resposta real do sistema, que pode ser visto na Figura (38). A resposta em preto é a resposta real do sistema e a em rosa é a resposta simulada do sistema identificado. Nota-se que a forma do sinal das duas respostas está praticamente idêntica, porém a simulação (rosa) atenua muito mais rapidamente que a resposta real. Isso acontece devido a um ruído que existe na entrada do sistema real inserido pela placa dSPACE, pois notou-se que quando o *script* do Matlab era rodado (script da resposta ao degrau), a barra possuía pequenas vibrações mesmo antes de cinco segundos, instante onde o degrau era aplicado. Mesmo assim, o erro máximo entre a resposta real a um degrau unitário e a resposta simulada ficou aproximadamente $0{,}09\ V$, ou seja, em torno de 6% comparada à amplitude máxima da resposta. Também foi feita a simulação no sistema identificado com um sinal senoidal da forma de (128) e comparou-se com a resposta real do sistema para esta entrada, Figura (39). A resposta do sistema real está em preto e a resposta do sistema simulado está em rosa. As duas respostas também possuem uma forma de onda praticamente igual, com erros de no máximo $0{,}2\ V$ concentrados nos

picos da resposta, o que equivale a aproximadamente 3% de erro comparado à amplitude máxima da resposta real.

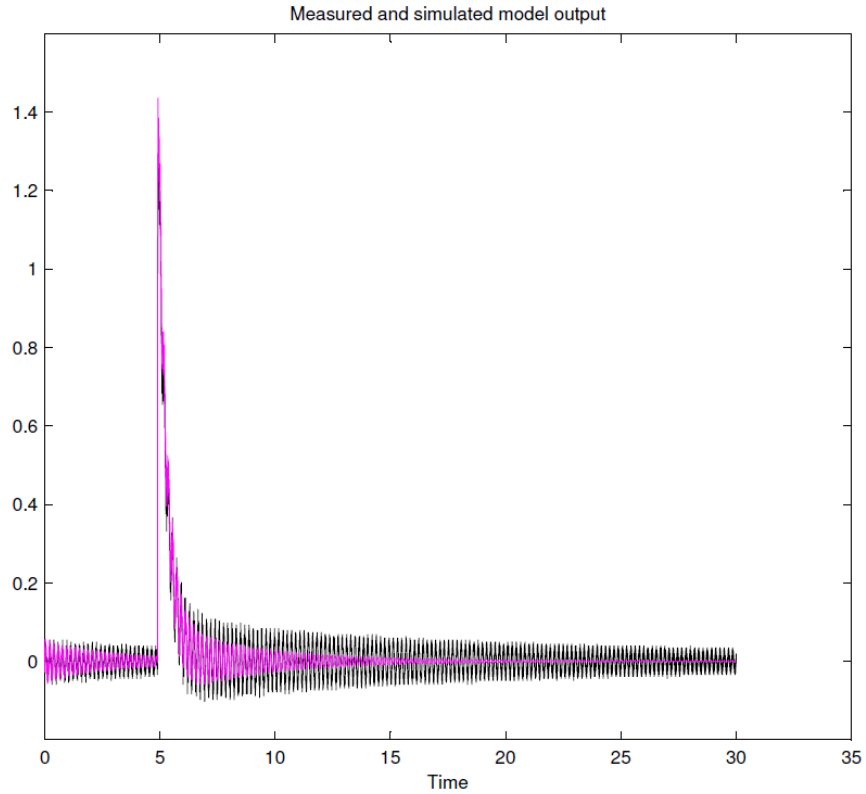


Figura 38: Resposta ao degrau unitário.

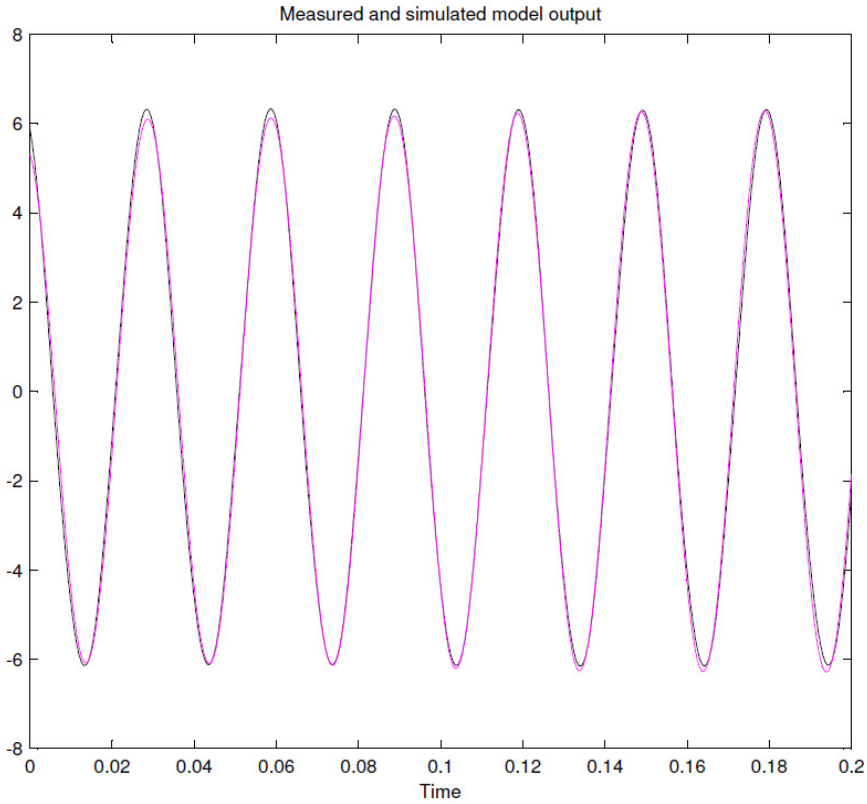


Figura 39: Resposta a uma entrada senoidal com frequência de 33,35 Hz e amplitude de 4V.

# 5 PROJETO DO CONTROLADOR

## 5.1 Alocação de Polos

O método de alocação de polos é uma técnica clássica de controle. Neste método, um sistema de controle é projetado para garantir que os polos da função de transferência de malha fechada, através de realimentação da saída, estejam em posições pré-especificadas, onde estas posições são escolhidas de acordo com o interesse do projetista.

Adiante, será visto como projetar um controlador para controle de vibrações em uma estrutura flexível, através de um método proposto por (HENRION et al., 2004), que utiliza alocação de polos. Um sistema de controle, que utiliza realimentação da saída, pode ser visto pela figura abaixo:

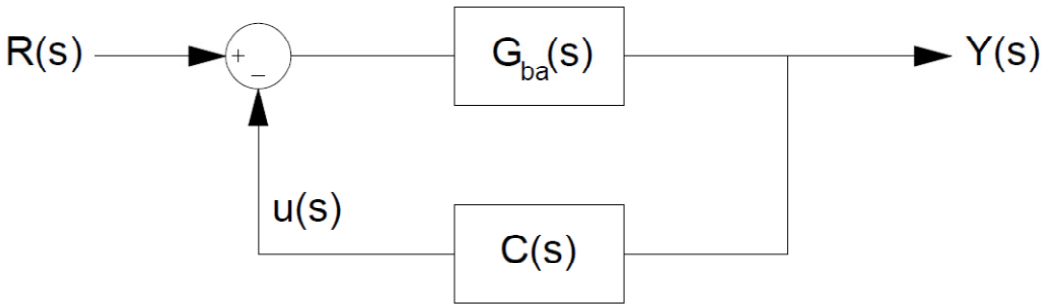


Figura 40: Controle por alocação de polos.

Onde $G_{ba}$ é a função de transferência do sistema a controlar, definido por (149), $C(s)$ é o controlador a ser projetado, $Y(s)$ é a saída do sistema, $R(s)$ é o sinal de referência e $u(s)$ é o sinal de controle. A planta $G_{ba}(s)$ pode ser escrita como função de um numerador e um denominador, como pode ser visto abaixo:

$$G_{ba}(s) = \frac{a(s)}{b(s)} \tag{150}$$

Onde $a(s)$ e $b(s)$ são os polinômios característicos do numerador e do denominador da planta, respectivamente. Como exemplo, caso somente o primeiro modo de vibração for considerado, esses polinômios podem ser definidos como:

$$a(s) = k_s(1 + 2.0{,}0062.34{,}822 + 34{,}822^2)$$
$$b(s) = 1 + 2.0{,}0065.33{,}919 + 33{,}919^2 \tag{151}$$

Onde $k_s = 0{,}335$. O mesmo pode ser feito para o controlador a ser projetado, $C(s)$:

$$C(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \tag{152}$$

Onde $q(s)$ e $p(s)$ são os polinomios característicos do numerador e do denominador do controlador. A função de transferência do sistema em malha fechada, Figura (40), a partir da entrada $R(s)$ para a saída $Y(s)$, pode ser equacionada por:

$$T(s) = \frac{G_{ba}(s).C(s)}{1 + G_{ba}(s).C(s)} \tag{153}$$

Ou:

$$T(s) = \frac{b(s).p(s)}{a(s).p(s) + b(s).q(s)} \tag{154}$$

Portanto, o polinômio característico, que determina os polos da função de transferência em malha fechada, é determinado por:

$$\Lambda(s) = a(s).p(s) + b(s).q(s) \tag{155}$$

Essa equação também é conhecida como equação Diofantina. Definindo $n$ como a ordem do polinômio da planta e $m$ como a ordem do polinômio do controlador, a ordem do polinômio característico, (155), vai ser de $n + m$, ou seja, $n + m$ polos. O objetivo deste controlador, como o próprio nome sugere, é de alocar polos, ou seja, o projetista que decide onde irão ser colocados esses $n + m$ polos. Assim:

$$\Lambda(s) = l_{(n+m)}.s^{(n+m)} + l_{(n+m-1)}.s^{(n+m-1)} + \cdots + l_0 \tag{156}$$

Para solucionar essa equação, o seguinte teorema é definido:

**Teorema 5.1** (CHEN,1999): Dada uma matriz $A$, $mxn$, um vetor $y$, $mx1$, existe uma solução $x$, $nx1$, em $Ax = y$, para qualquer $y$, se e somente se A possui posto $m$.

Com isso, determinada a localização dos polos, ou seja, $\Lambda(s)$ determinada, e com a função de transferência $G_{ba}(s)$, é possível encontrar o controlador $C(s)$. Para isto, utiliza-se o seguinte sistema de equação linear:

$$M_{G_{ba}}.M_{C(s)} = \Lambda(s) \tag{157}$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \ddots & a_0 & b_n & b_{n-1} & \ddots & b_0 \\ 0 & a_n & \ddots & a_1 & 0 & b_n & \ddots & b_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & 0 & \dots & 0 & b_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_m \\ q_0 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_{n+m} \end{bmatrix} \tag{158}$$

Onde $M_{G_{ba}}$ é uma matriz de Sylvester não singular de dimensão $(n+n+1) \times 2(m+1)$, $M_{C(s)}$ é uma matriz de $2(m+1) \times 1$ e $\Lambda(s)$é uma matriz $(m+n+1) \times 1$. De acordo com o Teorema 4.1, uma condição necessária para $M_{G_{ba}}$possuir posto $(m+n+1)$ é que essa matriz seja uma matriz quadrada e não singular, ou possua mais colunas do que linhas com $(m+n+1)$ linhas independentes (CHEN,1999):

$$2(m+1) \geq (n+m+1) \tag{159}$$

Isto é:

$$m \geq n-1 \tag{160}$$

Ou seja, caso a ordem do controlador for menor que $n-1$, então a matriz $M_{G_{ba}}$ não irá possuir posto $(m+n+1)$ e de acordo com o Teorema 4.1 talvez exista solução para o sistema, mas não para todo $\Lambda(s)$. Para determinar o polinômio característico, (HENRION et al., 2004) define as seguintes especificações:

- Garantir amortecimento suficiente do modo de vibração dominante;
- Respeitar as limitações físicas do sinal de controle.

De acordo com (160), $m$ deve ser maior que $n-1$ para que somente um controlador exista para um determinado polinômio característico da função de transferência de malha fechada. Já que este trabalho é voltado para amortecer os modos de vibrações dominantes, o controlador deve preservar o melhor possível o ganho em malha aberta e isto implica que:

$$T(0) = G_{ba}(0) \tag{161}$$

Ou seja, $q(0) = 0$. Portanto o termo de ordem zero do numerador do controlador é nulo. Para atender essa condição, (HENRION et al., 2004) define que a ordem do controlador deve ser igual a ordem da planta, pois como um termo do controlador foi definido (uma incógnita a menos), é possível elevar a condição de (160), por uma unidade, isto é $m = n$. Para projetar o controlador, (HENRION et al., 2004) define os seguintes passos:

1. Escolher uma planta de ordem $n$;

2. Projetar um controlador de ordem $m = n$;
3. Analisar o comportamento em malha fechada do controlador;
4. Se não for satisfatório, incrementa-se a ordem da planta a volta ao passo dois.

Caso somente um modo de vibração da função de transferência for analisado, o polinômio característico, $\Lambda(s)$, fica definido como:

$$\Lambda(s) = (s + \alpha).(s + \beta).(s^2 + 2.\zeta_t.\omega_t + \omega_t^2) \tag{162}$$

Onde $\alpha$ e $\beta$ são dois números que correspondem à dinâmica do sistema em malha fechada, $\zeta_t$ é o coeficiente de amortecimento desejado para o sistema em malha fechada e $\omega_t$ é a frequência ser atenuada.

## 5.2 Experimento

Com a finalidade de verificar o procedimento teórico analisado na seção anterior, foram projetado três controladores que variam de acordo com os coeficientes determinados pela equação (162). Para isto, somente foi analisado o primeiro modo de vibração. Assim, considerando a equação (148) para somente um modo de vibração, desconsiderando o efeito em baixas frequências do piezoelétrico, assim como o efeito do filtro RC, têm-se:

$$G_{bac}(s) = k_s\left(\frac{s^2 + 2.\hat{\zeta}_1.\widehat{\omega}_1.s + \widehat{\omega}_1{}^2}{s^2 + 2.\zeta_1.\omega_1.s + \omega_1{}^2}\right) \tag{163}$$

Substituindo pelos valores da Tabela (5), obtêm-se o modelo matemático utilizado para projetar o controlador:

$$G_{bac}(s) = k_s\left(\frac{s^2 + 2.0{,}00620.34{,}822s + 34{,}822^2}{s^2 + 2.0{,}00650.33{,}919.s + 33{,}919^2}\right) \tag{164}$$

Onde $k_s = 0{,}335$. Portanto $\omega_t = \omega_1 = 33.919\, rad/s$. Também se determinou que $\zeta_t$ deve ser igual a 2,5 vezes o valor de $\zeta_1$, portanto $\zeta_T = 2{,}5.0{,}00650 = 0{,}01625$. O valor de $\zeta_t$ se determinou experimentalmente para respeitar as especificações definidas na seção anterior, isto é, um valor que respeite os limites do controlador, sem ocasionar saturação, mas que também tenha um coeficiente de amortecimento efetivo em malha fechada. Os valores de $\alpha$ e $\beta$ também foram determinados experimentalmente, e chegou-se a conclusão que $\beta = 0{,}00009$ e que $\alpha$ poderia ter três valores, $1, 4\ e\ 8$, e com isso três controladores diferentes. Os três controladores podem ser vistos pela Tabela (6).

Tabela 6: Controladores projetados.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\zeta_T$ | $\omega_t$ | Controlador C(s) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00009 | 0,01625 | 33,919 | $\frac{0.01239s^2 - 36.6s}{0.9959s^2 + 13.92s + 0.00009}$ |
| 4 | | | | $\frac{0.1078s^2 - 36.61s}{0.9639s^2 + 16.93s + 0.00036}$ |
| 8 | | | | $\frac{0.235s^2 - 36.63s}{0.9213s^2 + 20.93s + 0.00072}$ |

Apesar dos controladores terem sidos projetados somente analisando o primeiro modo de vibração, eles funcionam para a planta completa, como será visto logo em seguida. Primeiramente será analisado o primeiro controlador projetado, isto é, com $\alpha = 1$. Com este controlador se obtém o seguinte diagrama de bode para o sistema em malha fechada:

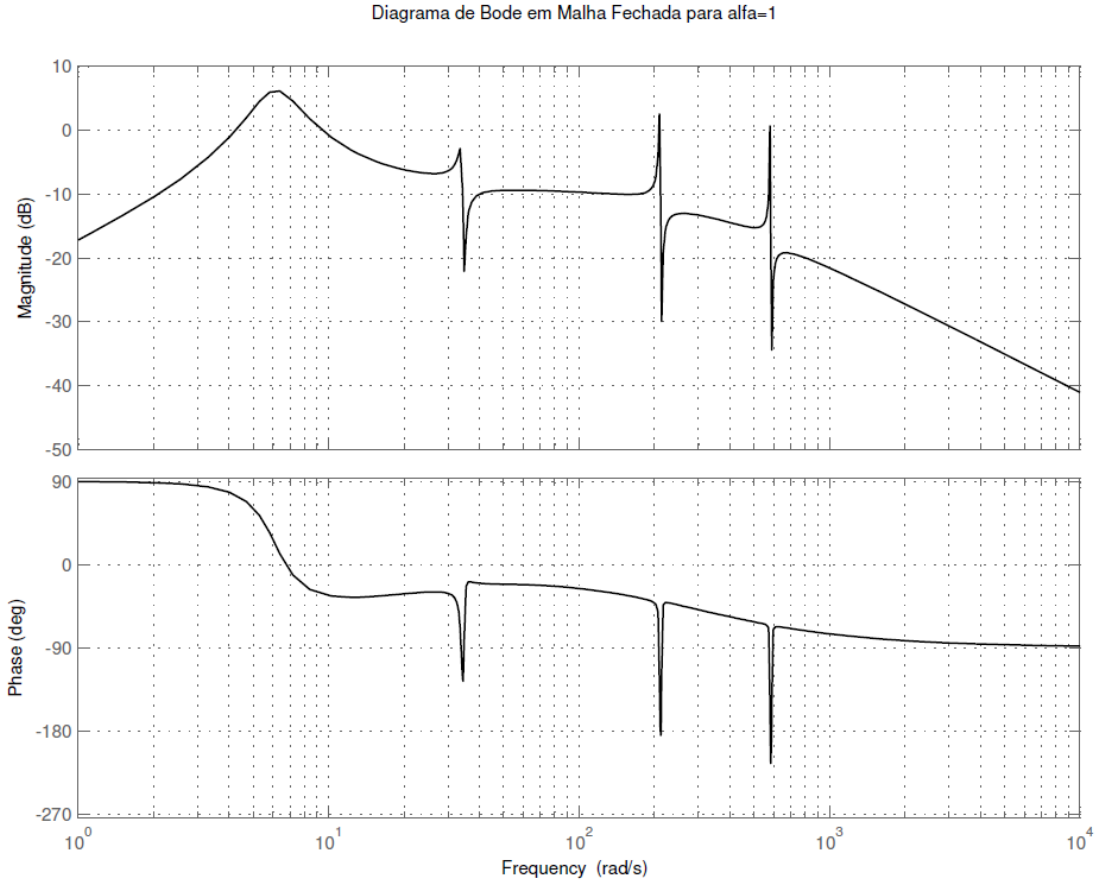


Figura 41: Diagrama de bode do sistema em malha fechada para $\alpha = 1$.

Para fins de comparação, foi gerado o diagrama de Bode de malha aberta (em tracejado), junto com o diagrama de Bode em malha fechada com o respectivo controlador, com um zoom nas três primeiras frequências de ressonância, como pode ser visto pela Figura (42):

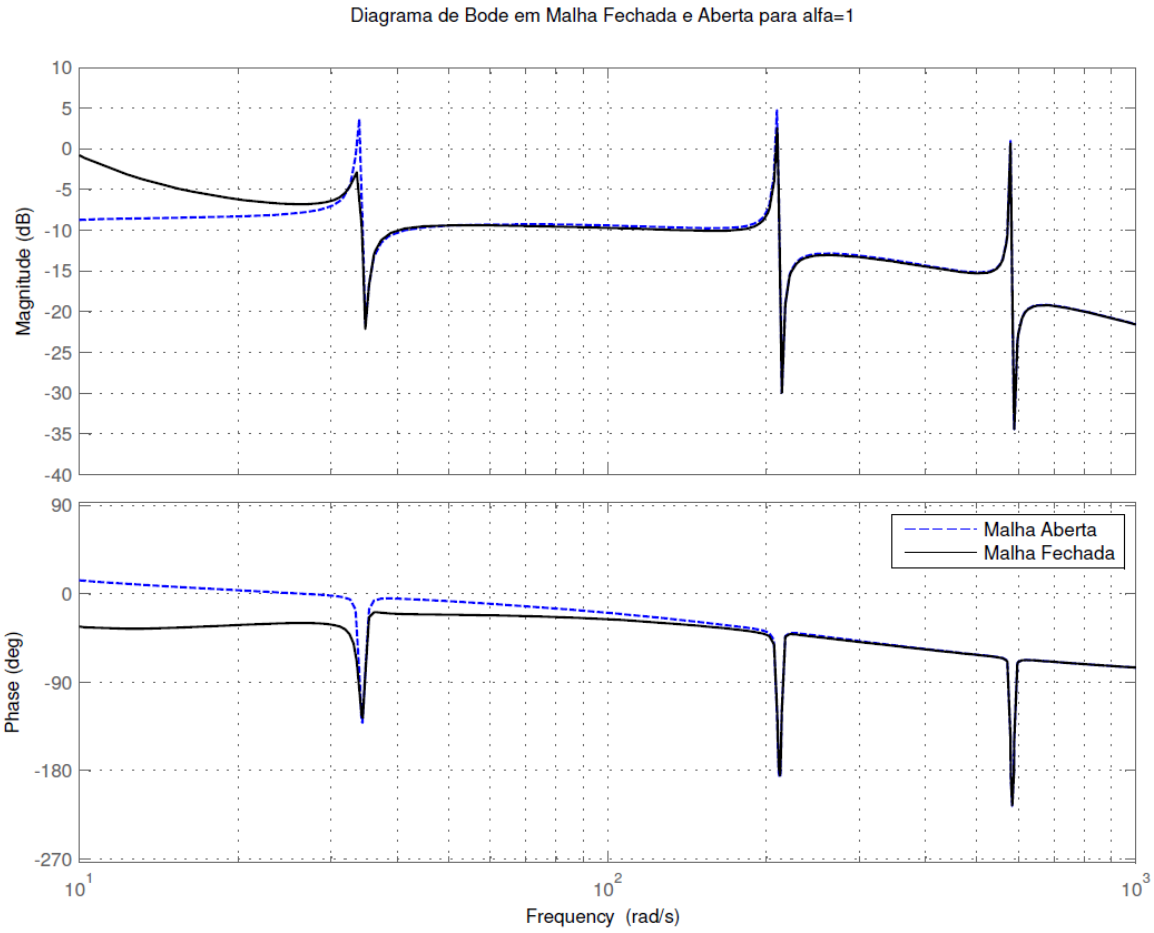


Figura 42: Diagrama de Bode do sistema em malha fechada e aberta com zoom para α=1.

De acordo com a Figura (42), o primeiro modo de vibração ficou atenuado em torno de 6,8 $dB$, enquanto o segundo modo de vibração se atenuou em 2,6dB e o terceiro modo de vibração em $0{,}4dB$. Também pode se notar pela Figura (41) que o ganho em baixas frequências aumentou, principalmente em aproximadamente 6 $rad/s$, onde se tem um pico de aproximadamente $6dB$ de magnitude.

Por último, deve se testar o controlador na barra em estudo. Como um teste de impacto não é possível, pois não teria como realizar um impacto sempre com a mesma força, se excitou a barra com a primeira frequência de ressonância por 8 segundos e, após esse tempo, a excitação é cortada. Logo que a excitação é cortada, a malha de controle entra no sistema, através de uma chave, como pode ser visto pela Figura (43). Foi escolhido o primeiro modo de vibração, pois é o modo dominante quando a barra recebe algum tipo de impacto.

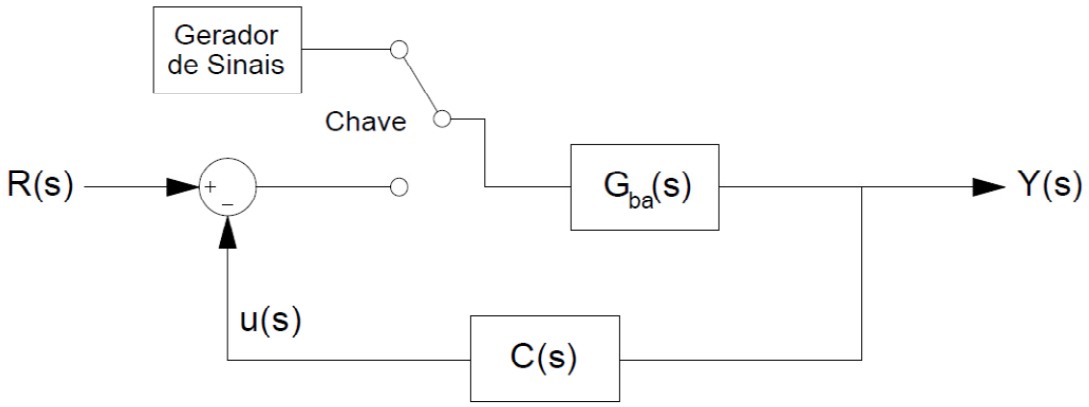


Figura 43: Experimento realizado para testar o controlador.

Onde o sinal de referência, $R(s)$, é nulo. Esse experimento foi utilizado em todos os controladores descritos pela Tabela (6), e será como teste padrão neste trabalho. Para analisar quanto atenuou a vibração, é feito um comparativo de tensão, isto é, quanto tempo o sistema demorou em chegar a um nível de tensão. Esse nível de tensão foi definido em 3% do valor de pico da excitação em malha aberta do primeiro modo de vibração. Com isso, se realizou o teste de excitar a barra com uma frequência de $33.919\,rad/s$, primeiro modo de vibração, e com uma amplitude de $4\,V$ pico a pico por oito segundos, sem o controlador, para analisar o pico de tensão e também o tempo que a barra demora em atingir os 3%. O gráfico pode ser visto abaixo:

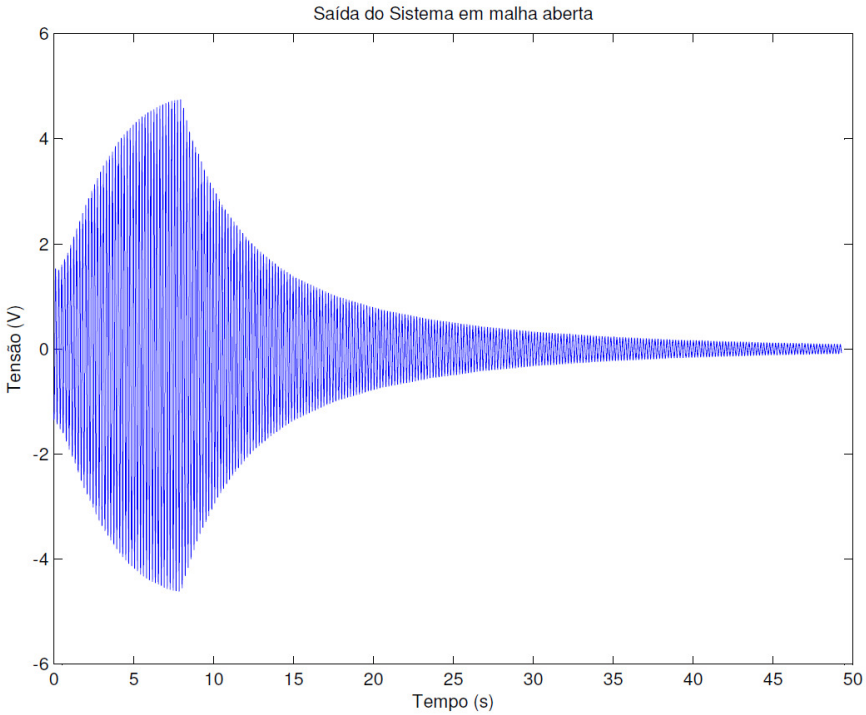


Figura 44: Saída do Sistema em malha aberta.

Nota-se que a barra, sem o sistema de controle, isto é, em malha aberta, tem uma tensão de pico de aproximadamente $4{,}8\ V$, ou seja, para a barra ser considerada estática, a tensão lida no sensor deve ser de aproximadamente $3\%$ deste valor, o que significa $0{,}144\ V$. Com esta tensão definida, se concluiu que a barra demora em torno de 44 segundos para parar. Com esses parâmetros definidos, finalmente se aplicou o primeiro controlador. A tensão de saída, assim como a do controlador, pode ser vista pelas figuras abaixo:

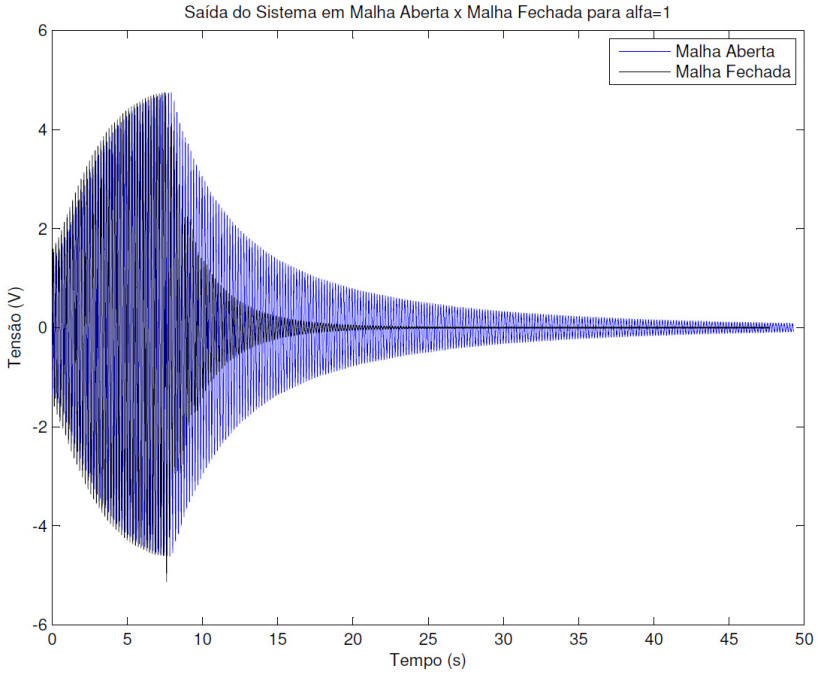


Figura 45: Saída do Sistema com o controlador com α=1.

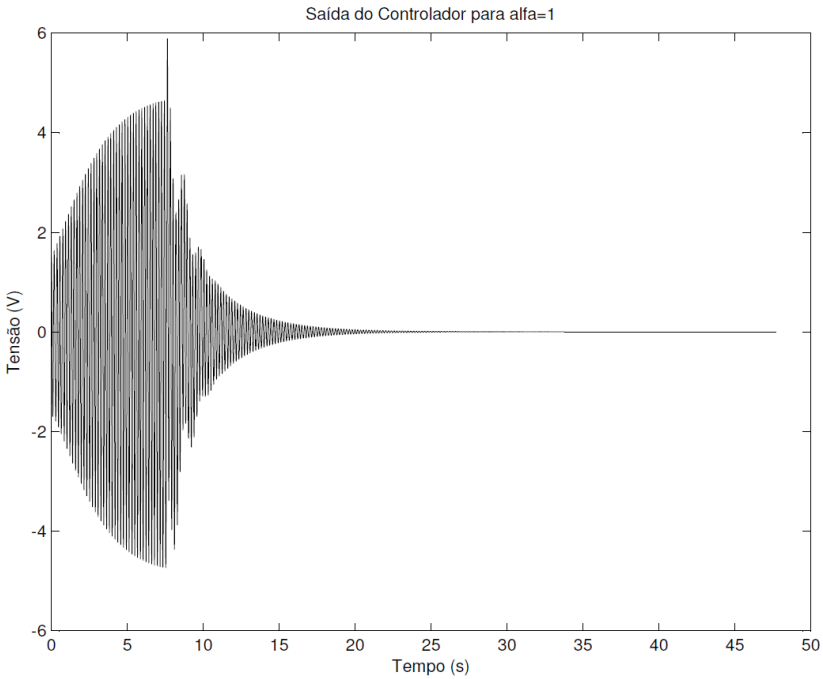


Figura 46: Sinal do controlador α=1.

Nota-se que o sistema com o primeiro controlador demorou em torno de 16,38 segundos para atingir os 3% de tensão determinados anteriormente. Isso equivale a uma melhora de 62,73% de tempo comparado ao sistema em malha aberta. Também é possível notar um alto pico de tensão logo que o controlador entra em ação, o que ocasiona em uma saturação de controle. Como nesse caso é em somente um pico que dura aproximadamente 0,01 segundos, a saturação não ocasionou problemas no controle.

Agora analisando o segundo controlador, onde $\alpha = 4$, chegou-se aos seguintes diagramas de Bode:

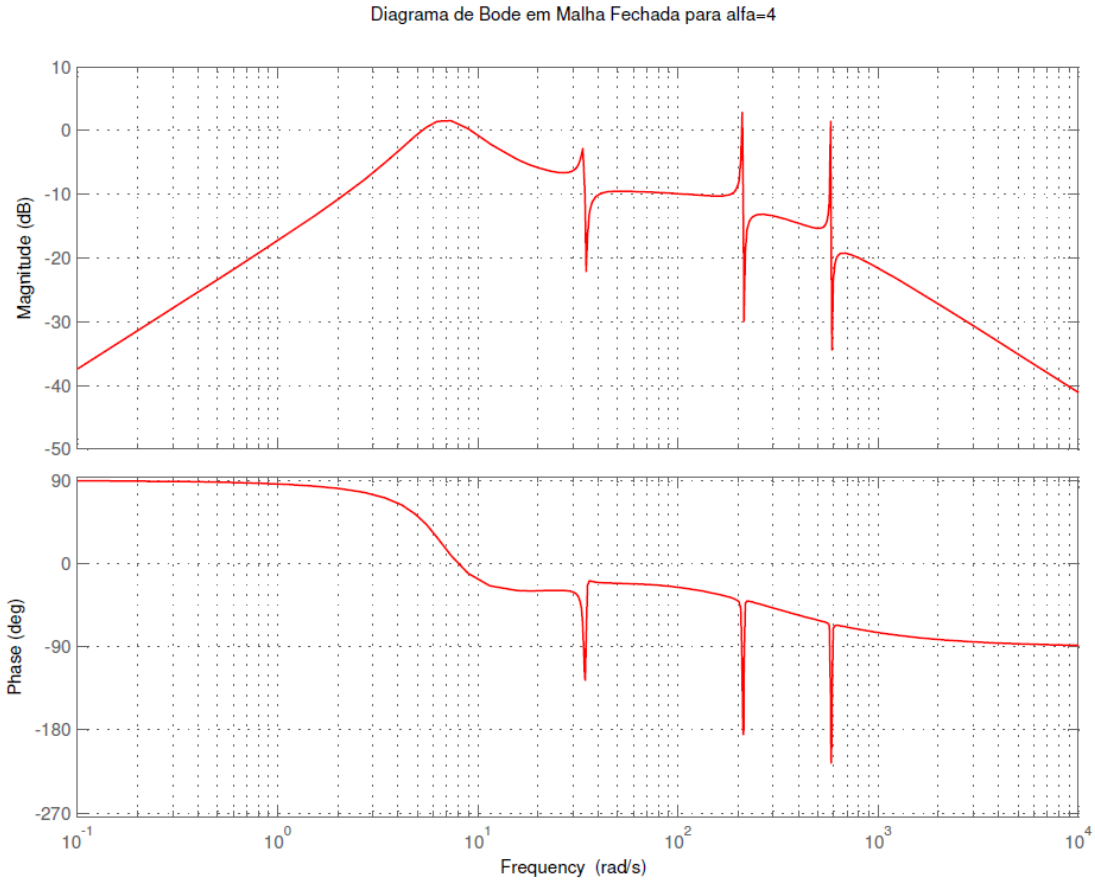


Figura 47: Diagrama de bode do sistema em malha fechada para α=4.

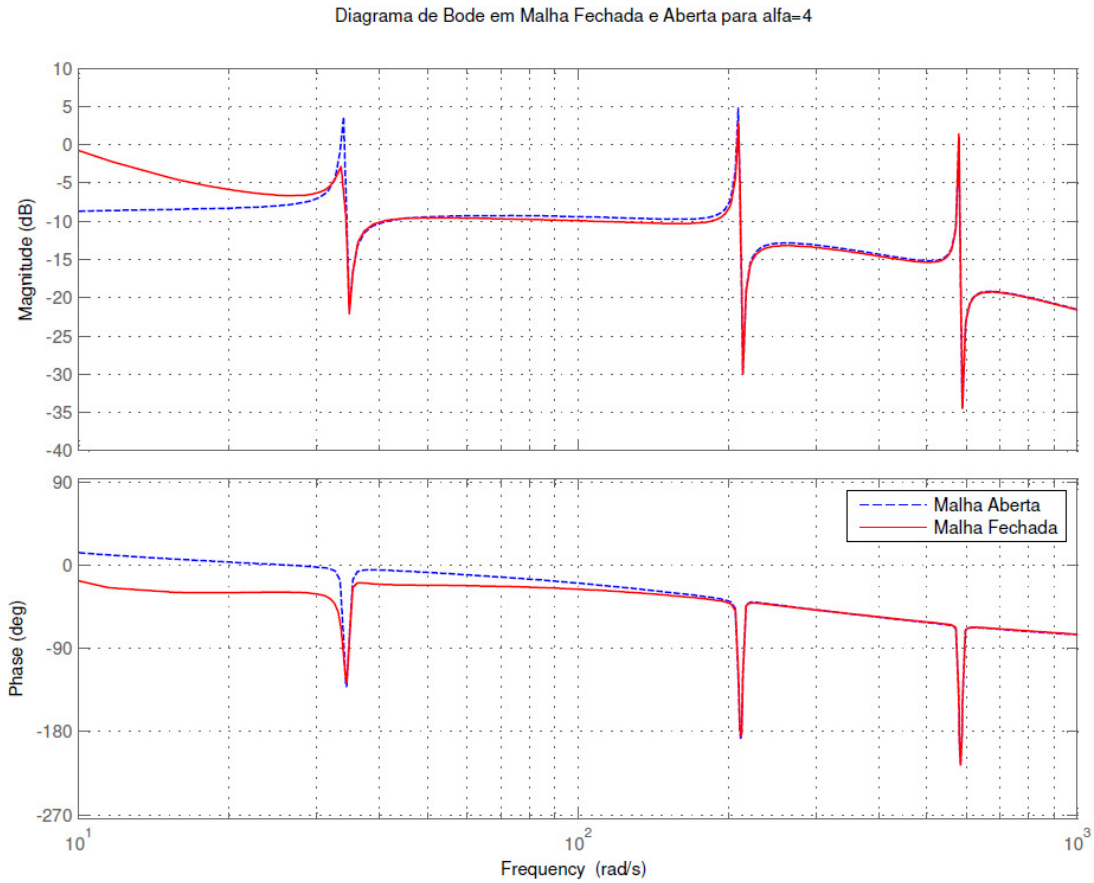


Figura 48: Diagrama de Bode do sistema em malha fechada e aberta com zoom para α=4.

Para o segundo controlador, de acordo com a Figura (48), o primeiro modo de vibração ficou atenuado em aproximadamente $6{,}7\ dB$, enquanto o segundo modo de vibração ficou atenuado por $2\ dB$ e no terceiro modo de vibração não houve nenhuma atenuação. Porém, o ganho em baixas frequências ficou mais baixo de acordo com a Figura (47), comparado ao primeiro controlador, ficando em torno de $1{,}5\ dB$, uma diferença de $4{,}5\ dB$. Realizando o teste padrão descrito anteriormente, obtiveram-se os seguintes sinais de saída e de controle da barra:

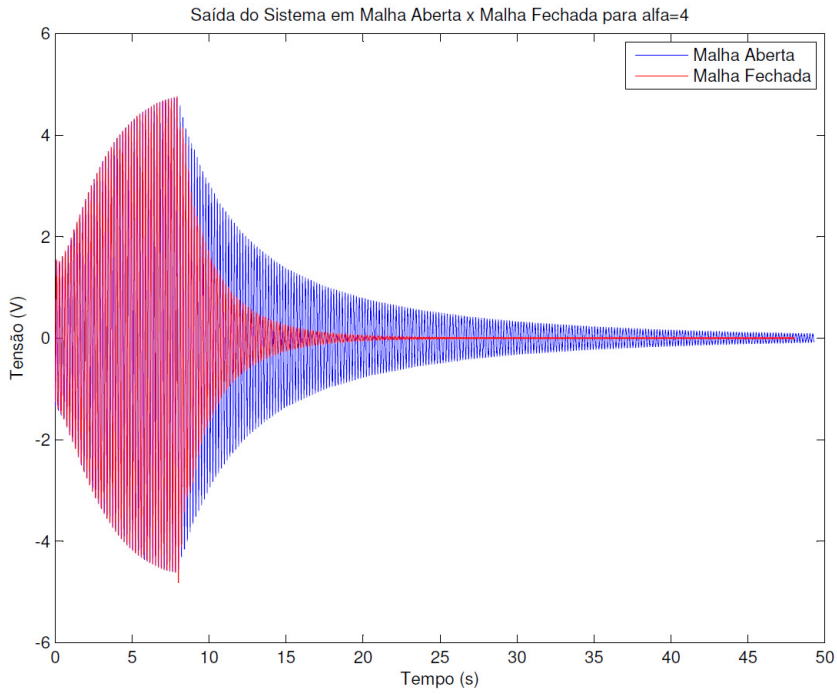


Figura 49: Saída do Sistema com o controlador α=4.

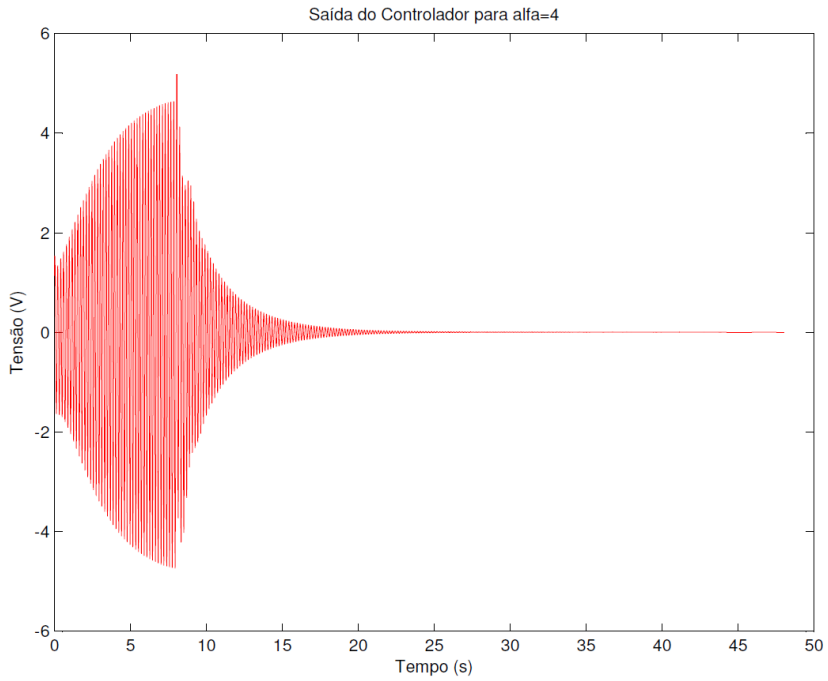


Figura 50: Sinal do controlador com α=4.

Com o segundo controlador, o sistema demorou em torno de 16,69 segundos para parar, o que resultou em uma melhoria de 62,08% de tempo de parada. Nota-se que, comparado ao controlador 1, o pico de tensão no controlador, logo quando ele entra em ação, ficou reduzido.

Por fim, analisando o terceiro e último controlador, onde $\alpha = 8$, têm se os seguintes diagramas de Bode:

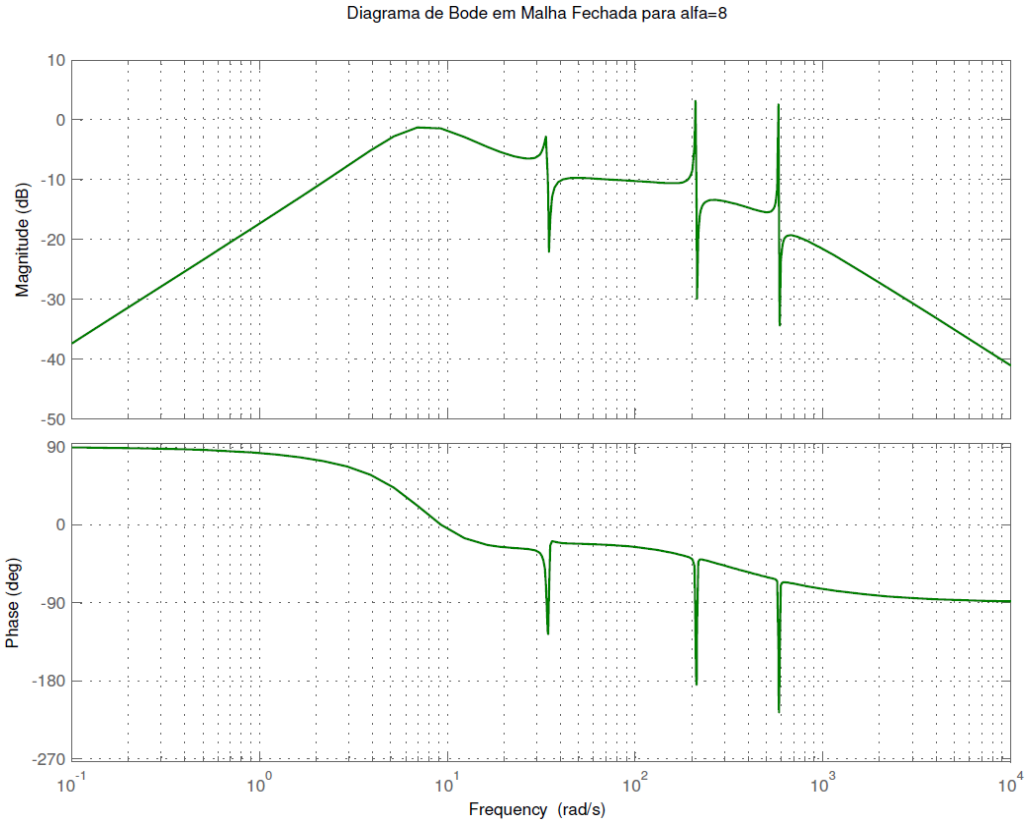


Figura 51: Diagrama de bode do sistema em malha fechada para α=8.

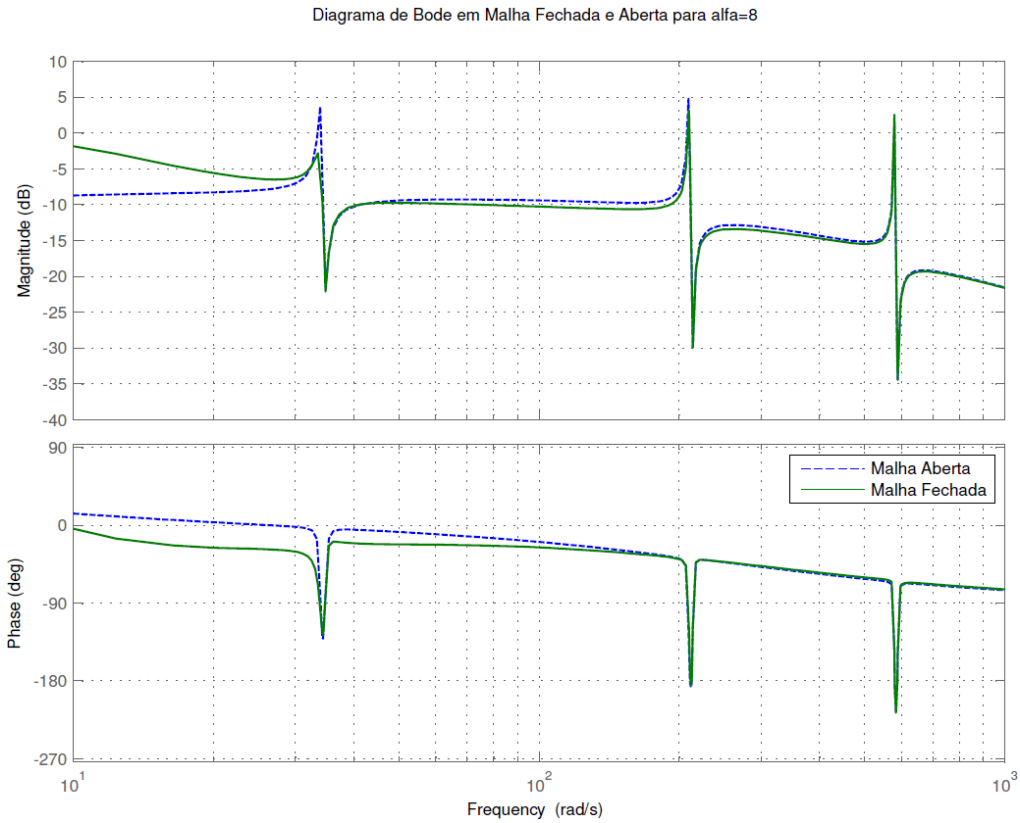


Figura 52: Diagrama de Bode do sistema em malha fechada e aberta com zoom para α=8.

Nota-se que neste último caso, o primeiro modo de vibração ficou atenuado por aproximadamente $6{,}7\ dB$, enquanto o segundo modo de vibração ficou atenuado por $1{,}7\ dB$ e o terceiro modo de vibração, em vez de atenuar, obteve-se um ganho de aproximadamente $1\ dB$ de acordo com a Figura (52). Porém o ganho em baixas frequências, Figura (51), ficou em torno de $-1{,}5\ dB$, o que é melhor que o primeiro e o segundo caso. Por fim, aplicou-se o controlador na barra pelo mesmo experimento anterior, chegando-se nos seguintes gráficos de saída e controle:

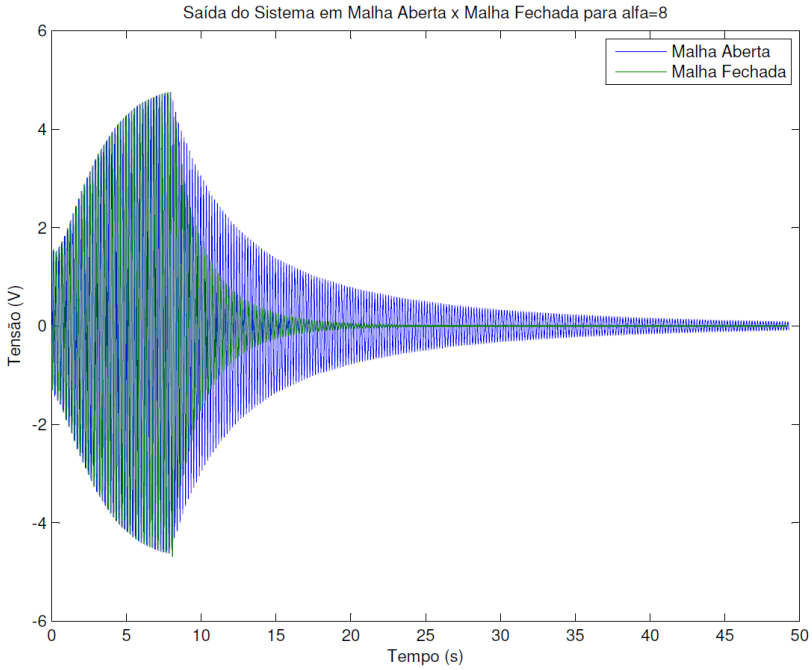


Figura 53: Saída do Sistema com controlador com α=8.

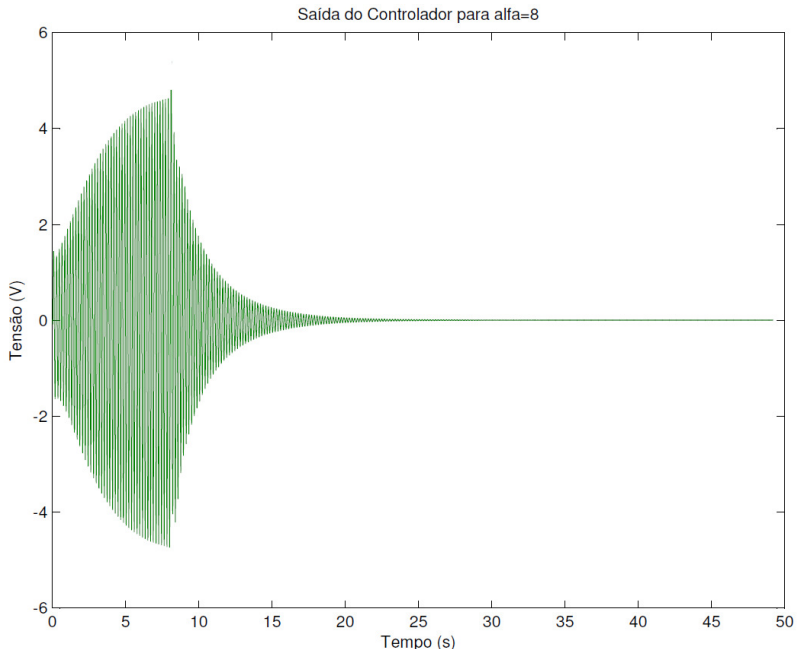


Figura 54: Sinal do controlador com α=8.

Para este último caso, a barra demorou em torno de 16,75 segundos para parar, o que resulta em uma melhora de 61,93% comparado ao sistema em malha aberta. A vantagem deste último controlador está na tensão do sinal de controle, que não satura logo que é inicializado, o que acontecia nos outros controladores.

Para comparar melhor a resposta em malha fechada com a resposta em malha aberta, o gráfico da saída do sistema com o segundo controlador (intermediário) foi ampliado:

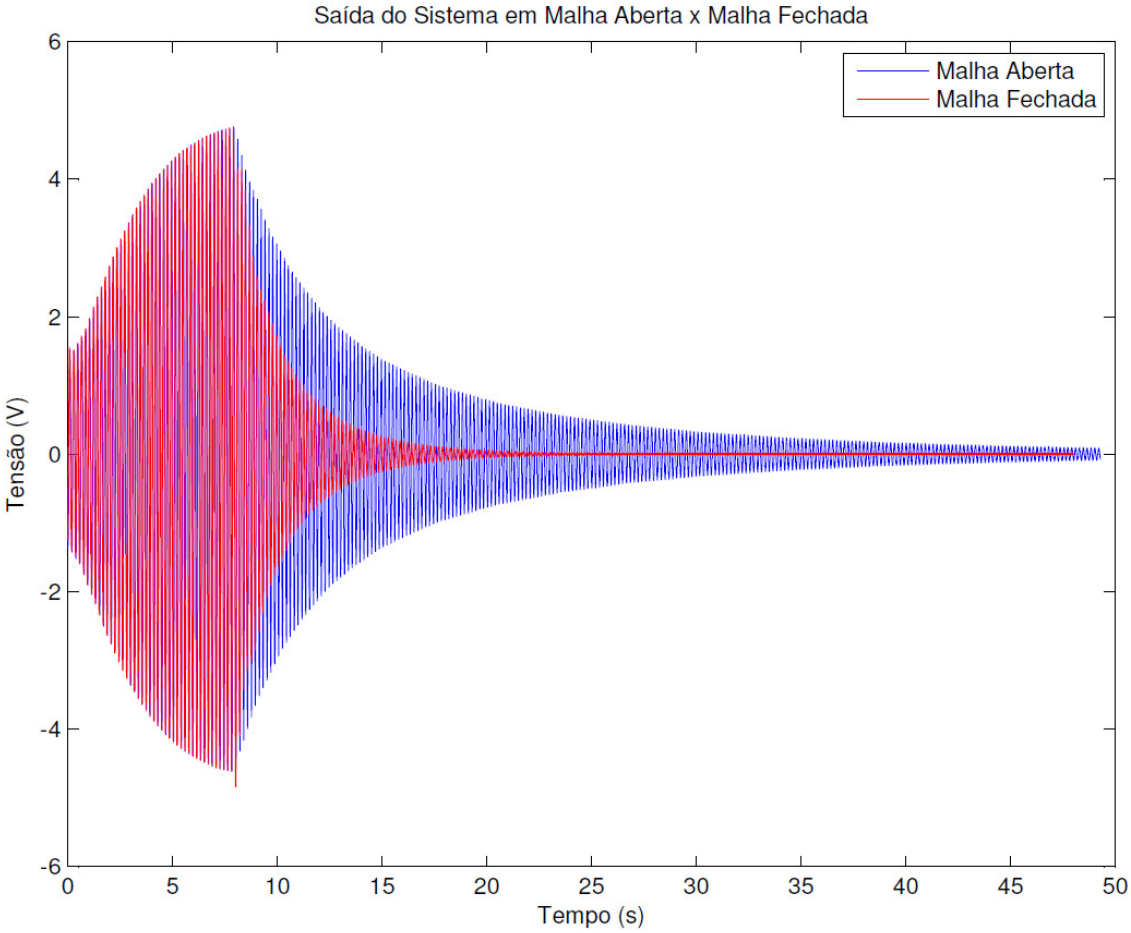


Figura 55: Saída do Sistema em malha aberta x malha fechada.

É bem notável a diferença da saída do sistema em malha aberta com o sistema em malha fechada, inclusive ficando a barra totalmente estática no regime permanente, o que não acontece com o sistema em malha aberta que, como é possível ver, ainda possui pequenos picos de tensão depois de um grande tempo decorrido.

Os três controladores mostraram praticamente o mesmo tempo para parar a barra, porém quanto maior o α, menor era a atenuação nos outros modos de vibração. Em contrapartida, quanto maior o α menor era a saturação do controlador quando ele era iniciado. O valor de α não pode ser muito baixo nem muito alto, pois foi verificado que caso α for maior que 32, o

ganho do terceiro modo fica tão grande que a barra depois de parada começa a vibrar no terceiro modo de vibração gerando uma vibração bem considerável. Por outro lado se α for muito pequeno, o ganho em baixas frequências aumenta muito, além do valor de pico se tornar cada vez mais alto, quando o controlador é iniciado. Com isso se recomenda que α esteja entre os valores testados neste trabalho, para este sistema.

O valor de β não afetou os experimentos para este trabalho, pois o que ele variava era a largura da faixa de amplificação em baixas frequências, mas como o transdutor piezoelétrico possui o comportamento em baixas frequências descrito por (119), esse fator não foi notado durante os experimentos. Caso esse comportamento seja ignorado, ou caso se desejasse fazer um controle de vibrações em frequências acima das baixas frequências do piezoelétrico, o valor de β pode alterar muito o sistema, como pode ser visto na Figura (56):

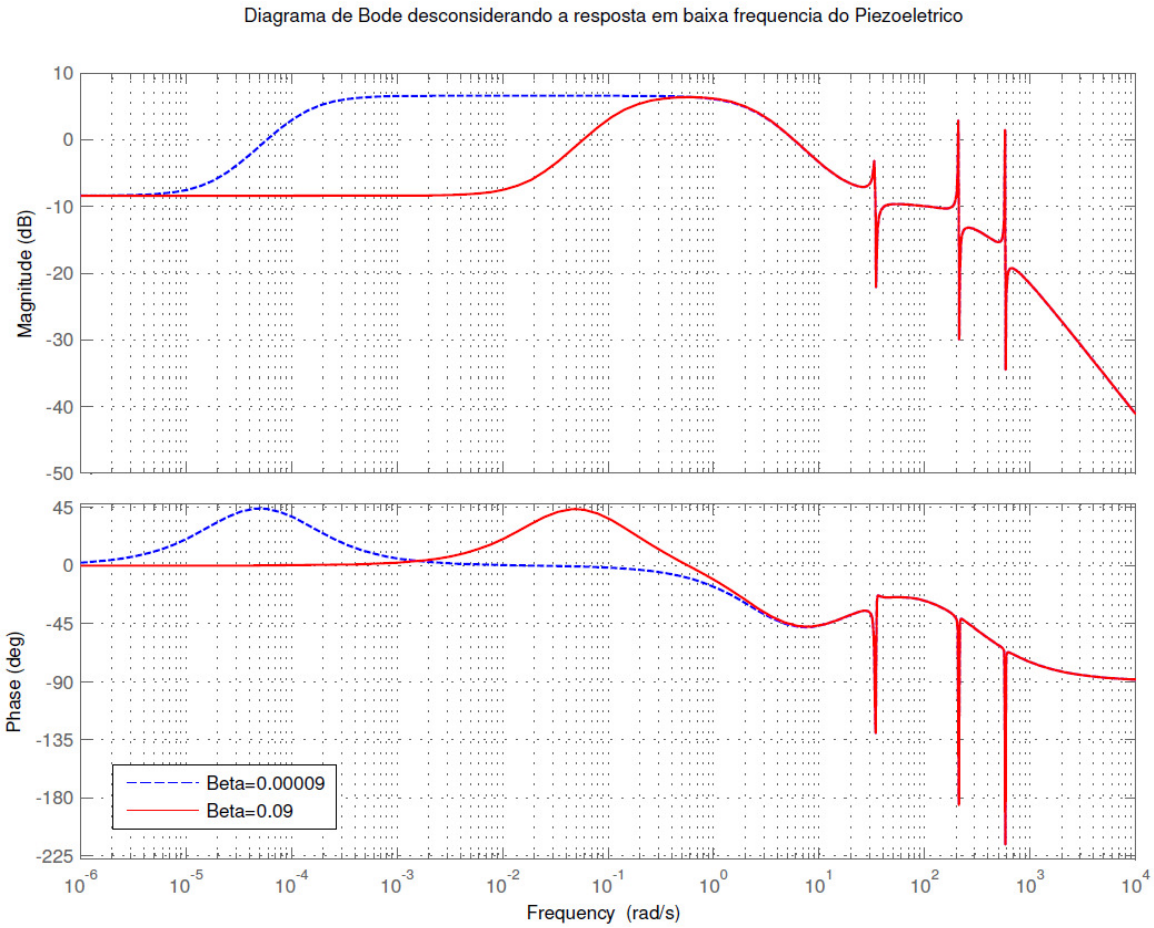


Figura 56: Diagrama de Bode desconsiderando o comportamento em baixas frequências do piezoelétrico.

Nota-se como a largura da faixa de amplificação em baixas frequências aumentou com um valor de β pequeno. Como foi visto, o experimento de controle foi todo baseado considerando somente o primeiro modo de vibração. De acordo com a Seção 5.1, poderia ser feito um controlador com vários outros modos de vibração inclusos, o que aumentaria a

ordem do controlador, porém (HENRION et al., 2004) cita que um controlador de ordem maior, além de dificultar os cálculos, não melhora significativamente os resultados.

# 6 CONCLUSÃO

Como foi dito no inicio deste trabalho, as vibrações podem auxiliar assim como prejudicar um sistema qualquer. Quando as vibrações prejudicam, elas podem gerar problemas graves no sistema e muitas vezes se necessita reprojetar todo o sistema para resolver este problema. Neste trabalho se desenvolveu um método de como realizar um controle ativo de vibrações, resolvendo este problema de uma maneira prática e simples, onde foi vista toda a modelagem matemática e também a aplicação do controle desenvolvido no sistema em estudo, que era a barra engastada.

A modelagem matemática foi desenvolvida a partir das leis de Newton, e com isso chegou-se a equação de Euller Bernoulli. Com a equação de Euller Bernoulli, foi feito um estudo em vibração livre da barra, e com isso foi possível determinar, de modo teórico, as frequências naturais de ressonância da barra, que são as vibrações onde o sistema possui o maior ganho. As frequências de ressonância ficaram muito próximas das frequências do sistema real, onde a diferença entre as duas se atribuiu as incertezas da barra, como as dimensões, e principalmente a pureza do material.

Com a equação de Euller Bernoulli também foi possível analisar o comportamento dos sensores e atuadores piezoelétricos na barra engastada, e com isso chegar a um modelo de função de transferência do sistema, a qual relaciona a tensão aplicada no atuador piezoelétrico com a tensão induzida no sensor piezoelétrico, o que é toda a base para o desenvolvimento do controle de vibrações, já que o controle é realizado a partir desta função de transferência.

Outra pergunta pertinente de qualquer sistema de controle é: onde posicionar os transdutores no sistema? A resposta disso veio com a utilização da norma $\mathcal{H}_2$ e assim se definiu controlabilidade modal e controlabilidade estrutural. Controlabilidade modal é a autoridade do controlador sobre os modos de vibração e controlabilidade estrutural é a autoridade do controlador sobre todo o sistema, considerando todas as controlabilidades modais. Com isso, se definiu que a posição que aperfeiçoava a controlabilidade estrutural e a controlabilidade modal era na extremidade engastada da barra, e foi nesta posição onde foi posicionado tanto o sensor quanto o atuador piezoelétrico.

Com a parte teórica realizada, era necessário identificar os parâmetros da função de transferência. Isso foi feito aplicando o sinal PRBS no sistema, *Pseudo-Random Binary Signal*. Esse sinal é consiste em um trem de pulsos aleatórios, de amplitude definida, mas com frequências aleatórias, isto é, o sistema é excitado com uma vasta gama de frequências, quase que como um ruído branco. Com os dados adquiridos da saída do sistema, quando este sinal foi aplicado, foi feito o processamento dos dados na ferramenta *System Identification Toolbox*, do Matlab, e com isso se chegou a uma função de transferência do sistema. Essa função de transferência ficou coerente com o modelo teórico determinado, porém foram necessários alguns ajustes devido ao filtro RC aplicado e também ao comportamento em baixas frequências do piezoelétrico.

Com o sistema definido teoricamente e experimentalmente, foi realizado o controle de vibrações através do método de alocação de polos. Esse método consiste em alocar polos no sistema de malha fechada de acordo com o interesse do projetista. Neste trabalho foi escolhido o primeiro modo de vibração a ser atenuado, pois esse é o modo de vibração dominante quando a barra é sujeita a algum impacto. Foram feitos três controladores para três diferentes parâmetros que definiam a equação Diofantina do sistema em malha fechada. Todos possuíam praticamente o mesmo tempo para parar a barra, o que representa aproximadamente 62% de melhora quando comparado ao sistema sem controlador, portanto se obteve uma boa eficiência do controlador. Esses resultados foram muito próximos com os resultados obtidos por Geison Winck em sua dissertação de Mestrado, o que também comprova a eficiência do método utilizado, já que foi o mesmo utilizado. Os parâmetros da equação Diofantina, $\alpha$ e $\beta$, dependem muito do sistema assim como do objetivo do que irá ser controlado, ficando a escolha do projetista.

Por fim, de uma maneira geral, este trabalho serviu como um ótimo aprendizado, pois foi necessário conhecimentos de varias áreas aprendidas durante o curso. Além disso, houve um grande aprendizado em programação do *software* Matlab, o que é uma ferramenta importantíssima para engenharia, além de ter aprendido a utilizar a placa dSPACE, que possibilita uma gama muito vasta de projetos de controle. Algumas melhoras para este trabalho podem ser feitas em estudos futuros, como: inserção de outros pares de sensores e atuadores piezoelétricos ao longo da barra, controle dos outros modos de vibração e projetos com controladores robustos, utilizando normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$.

# REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L.A. **Introdução à identificação de sistemas**. 2.ed. Editora UFMG, 2004. 236 p.

BALBINOT, A.; BRUSAMARELLO, V.J. **Instrumentação e fundamentos de medidas**. 2.ed. London: LTC, 2007. 672 p. v.2.

CHEN, C.T. **Linear system: theory and design**. 3.ed. New Yord: Oxford Press, 1999. 334p.

GOMES DA SILVA JR., J.M.; BAZANELLA, A.S. **Sistemas de controle: princípios e métodos de projeto**. 1.ed. Editora da UFRGS, 2005. 297 p.

HALIM, D.; MOHEIMANI, S.O.R. **Spatial resonant control of flexible structures: application to a piezoelectric laminate beam**. IEEE Transactions on Control Systems Technology, New York, v.9, n.1, p.37-53, 2001.

HALIM, D.; MOHEIMANI, S.O.R. **Experimental implementation of spatial H infinity control on a piezoelectric-laminate beam**. IEEE Transactions on Control Systems Technology, New York, v.7, n.3, p.346-356, 2002.

HALIM, D.; MOHEIMANI, S.O.R. **Spatial H2 control of a piezoelectric laminate beam: experimental implementation**. IEEE Transactions on Control Systems Technology, New York, v.10, n.3, p.533-546, 2002.

HAYKIN, S.; VAN VEEN, B. **Sinais e Sistemas**. 1.ed. Bookman, 2001. 668 p.

HENRION, D. et al. **Improving conditioning of polynomial pole placement problems with application to low-order controller design for a flexible beam**. LAAS-CNRS Research Report, Toulouse, n.04163, Feb. 2004.

HIBBLER, R.C. **Resistência dos materiais**. 5.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004. 670p.

MIDÉ, **QuickPack Produtcs: Material Properties & Spec Sheets**. Disponível em: <http://www.mide.com/pdfs/quickpack_specs_piezo_properties.pdf>. Acesso em 22 de setembro de 2013.

MIDÉ, **QuickPack QPA3202 Piezo Power Amplifier**. Disponível em: <http://www.mide.com/pdfs/Mide-QPA3202-piezo-power-amplifier.pdf>. Acesso em 22 de setembro de 2013

MOHEIMANI, S.O.R. et al. **Spatial control of vibration: theory and experiments**. Singapore: World Scientific, 2003. 223p.

MOHEIMANI, S.O.R.; FLEMING, A.J. **Piezoelectric transducer for vibration control and damping**. London: Springer, 2006. 287p

MOHEIMANI, S.O.R.; HEATH, W.P. **Model correction for class of spatio-temporal systems**. Automatica, Kidlington, v.38, n.1, p.147-155,2002.

MOHEIMANI, S.O.R.; RYALL, T. **Considerations on placement of piezoceramic actuators that are used in structural vibration control.** In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'99)., 38., 1999, Phoenix. Proceedings… New York: IEEE, 1999. p.1118-1123.

SAFARI, A. et al. **The measurement, instrumentation, and sensors handbook**. 1.ed. Boca Raton: CRC Press, 1998. 2630 p.

WIKIPÉDIA, **Piezoelectricity.** Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Piezoelectricity>. Acesso em 20 de setembro de 2013.

WINCK, G. **Instrumentação, identificação e controle ativo de vibração em barras engastadas**. 2012. 99 f. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

## ANEXO A – GERADOR DO SINAL PRBS

Para gerar o Sinal PRBS, devem-se seguir os seguintes passos:

1- Abrir o Matlab e iniciar o Simulink.

2- Adicionar os seguintes blocos: *Uniform Random Number, Sign, Pulse Generator, Sample and Hold.*

3- Conectá-los de acordo com a figura a seguir:

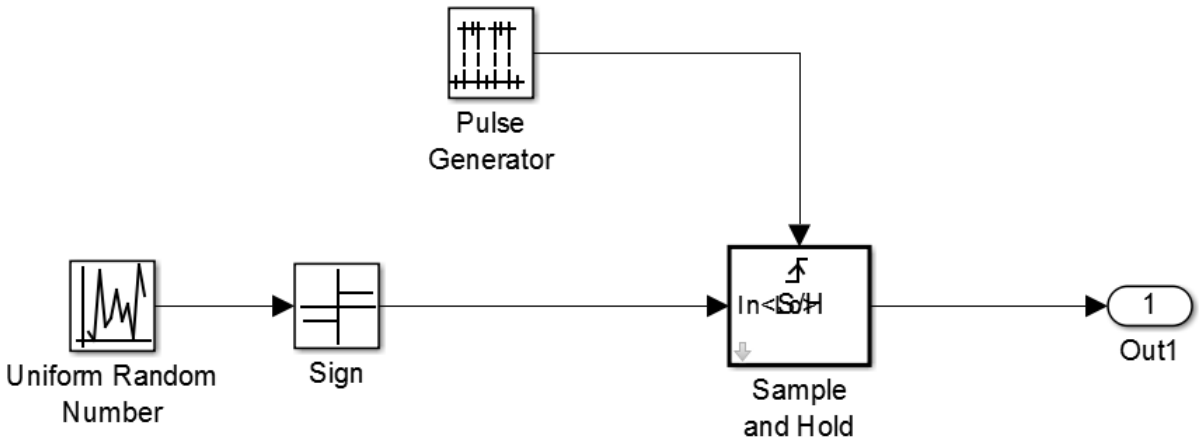


Figura 57: Diagrama de Blocos no Simulink para gerar o sinal PRBS.

4- Clicar com o botão direito em *Uniform Random Number* e definir os seguintes parâmetros: *Minimum*: -0.4; *Maximum*: 0.4; *Seed* :0, *Sample Time*: 8e-5; Dar *Check* em *Interpret vector parameters as 1-D*. O valor de *sample* depende da frequência de amostragem do sistema.

5- Clicar com o botão direito em *Sign* e definir os seguintes parâmetros: *Sample Time:* -1.

6- Clicar com o botão direito em *Sample and Hold* e definir os seguintes parâmetros: *Trigger Type: Rising Edge; Initial Condition*: 0; Dar *Check* em *Latch (buffer) Input*.

7- Clicar com o botão direito em *Pulse Generator* e definir os seguintes parâmetros: *Pulse Type*: *Sample Based*; *Time (t): Use simulation time*; *Amplitud*e: 1; *Period*: 400;

*Pulse Width*: 1; *Phase Delay*: 0; *Sample:* -1; Dar *Check* em *Interpret vector parameters as 1-D*. O valor de *Period* depende de quais frequências se deseja excitar o sistema.

O funcionamento deste sinal PRBS consiste em gerar um número aleatório através do bloco *Uniform Random Number* e com isso processar esse número gerado ao bloco *Sign.* Esse bloco *Sign* atribui o valor 1 caso o número for maior que zero e -1 caso for menor que zero, assim é gerado um pulso pseudo aleatório. Porém, esse número aleatório varia de acordo com frequência de amostragem do sistema, o que pode ser muito alto. Com isso se utiliza o bloco *Sample and Hold* que é controlado pelo bloco pulse *Generator.* Caso o bloco *Pulse Generator* esteja definido como foi no passo 6 deste tutorial, o pulso gerado só ira ser lido a cada 400 amostras. Assim, têm-se o sinal PRBS.