UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Rebeca Moreira Sena

Mosaico tecnológico na formação de conceitos sobre polígonos: um estudo sobre a lógica dos adolescentes

Porto Alegre

2014

Rebeca Moreira Sena

Mosaico tecnológico na formação de conceitos sobre polígonos: um estudo sobre a lógica dos adolescentes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, da Faculdade de Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientadora: Prof. Drª. Beatriz Vargas Dorneles

Linha de pesquisa: Psicopedagogia, Sistemas de Ensino/Aprendizagem e Educação em Saúde

Porto Alegre
2014

CIP - Catalogação na Publicação

Sena, Rebeca Moreira
Mosaico tecnológico na formação de conceitos sobre polígonos: um estudo sobre a lógica dos adolescentes / Rebeca Moreira Sena. -- 2014.
199 f.

Orientadora: Beatriz Vargas Dorneles.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2014.

1. Mosaico tecnológico e aprendizagem da geometria. 2. Logo, Cabri e Objeto de Aprendizagem . 3. Operações formais. 4. Conceito sobre polígonos. 5. Lógica dos adolescentes. I. Dorneles, Beatriz Vargas, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Rebeca Moreira Sena

Mosaico tecnológico na formação de conceitos sobre polígonos: um estudo sobre a lógica dos adolescentes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, da Faculdade de Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação.

Aprovada em 15 de Janeiro de 2014.

Prof. Dra. Beatriz Vargas Dorneles - Orientadora

Prof. Dr[a]. Maria Cecília Bueno Fischer – UNISINOS

Prof. Dr[a]. Maria Luiza Becker – PPGEDU/UFRGS

Prof. Dr. Marcos Diligenti - FAUPUCRS

DEDICATÓRIA

A DEUS,

por ser fonte de toda inspiração e sabedoria.

A MEU PAI, PAULO,

pelo exemplo e fidelidade que nos legou como herança.

A MINHA MÃE, JOANA,

pela coragem e determinação com que nos ensinou a enfrentar a vida.

A MEU ESPOSO, EDMILSON,

pelo amor, incentivo e compreensão.

A MEUS FILHOS, EDMILSON JR E RHADASSA

pela fonte de alegria e esperança.

AGRADECIMENTOS

Pelo caminho não houve somente flores, encontrei espinhos, mas onde eles apareceram Deus permitiu que nascessem flores ainda mais belas. Portanto posso dizer que “todas as coisas contribuem para o bem daqueles que amam a Deus...”(Romanos 8:28). Compreendo que cada um que encontrei pelo caminho foi usado por Deus, por isso, sou profundamente grata a Ele por trilhar esta estrada.

Ao meu esposo, Edmilson, embora saiba que as palavras não são capazes de expressar o que fez, por ter patrocinado, apoiado e incentivado a vinda de toda a família para o sul, permitindo que compartilhássemos essa rica experiência.

Aos meus filhos, Rhadassa e Edmilson Júnior, por terem sido os melhores adolescentes que uma mãe poderia querer nessa fase.

À minha orientadora, Dra. Beatriz Vargas Dorneles, pelo direcionamento desde as primeiras ideias, pelo dedicado envolvimento ao longo da caminhada e pela competência e profissionalismo demonstrados.

Ao Curso de Pós-Graduação da UFRGS e à UNEMAT por terem oportunizado o DINTER, possibilitando a nós, professores de Mato Grosso, acesso ao doutorado em um centro de excelência. Ainda, agradeço aos coordenadores, aos órgãos de fomento, aos professores que nos receberam e aos que se dispuseram ir a Sinop, presentear-nos com suas aulas.

A outro grupo de professores, de quem recebi ensinamentos, especialmente o Dr. Fernando Becker, a Dra. Maria Luiza Becker, a Dra. Léa Fagundes, a Dra. Terezinha Nunes e o Dr. Eliseo Reategue, pela possibilidade de dividir meus anseios e inquietações, que se transformaram em momentos riquíssimos de aprendizado e de troca de experiências por toda minha vida.

Aos professores que participaram da banca de defesa do projeto, pelas significativas contribuições de avanços para este trabalho e também àqueles que aceitaram participar da defesa da tese, que possam ser ricamente abençoados.

À Dra. Marta Maria Pontin Darsie e minha amiga Loriege Pessoa Bitencourt, pelas contribuições significativas a este trabalho.

Aos meus amigos do DINTER, do grupo de pesquisa e de outros grupos com os quais convivi em diferentes etapas, pelas ideias, pelo companheirismo e pelo incentivo.

RESUMO

Nesta pesquisa buscou-se identificar os processos de elaboração e de reelaboração de conceitos relativos a polígonos, a partir de uma intervenção, de curta duração, com adolescentes, mediada por tecnologias digitais. A base teórica alicerça-se em Piaget, Vergnaud, o casal Van Hiele e Ausubel. Nesta investigação, analisaram-se processos e relações estabelecidas em oito encontros de intervenção, apoiados por um mosaico tecnológico, composto de algumas tecnologias recentes e outras pioneiras no estudo da geometria. Para o estabelecimento de relações geométricas, utilizou-se o *Slogo-3.0*, o *Cabri-Géomètre II* e o *MatGeo*, este desenvolvido no contexto da pesquisa. Para o incentivo às trocas entre os participantes da intervenção, utilizamos o Moodle. E, por fim, para observar a evolução dos conceitos representados por mapas conceituais, recorreu-se ao Cmap Tools. Entre os instrumentos de coleta de dados estão: os testes, para suporte aos estudos comparativos; os mapas, efetivados em três diferentes momentos e outros registros escritos, orais e digitais, para revelar mais sobre o processo. Os dados foram obtidos através das gravações das sessões interventivas em vídeos, da troca de arquivos on-line, do caderno de campo da pesquisadora e do acesso aos registros escritos dos alunos. Os resultados dos testes revelam que houve avanços significativos advindos do processo interventivo, relacionados ao reconhecimento de figuras, indicando que um mosaico tecnológico pode favorecer o desenvolvimento da aprendizagem, desde que permita aproximações sucessivas e distintas ao objeto de estudo. Os dados mostram, também, que há elaboração e reelaboração de conceitos por parte dos alunos, quando eles têm a oportunidade de agir sobre um mesmo conteúdo de diferentes formas, o que ocorreu na intervenção, apoiada pelo mosaico tecnológico. O processo interventivo permitiu aos alunos realizarem operações ligadas a uma dedução informal, assim como avanços nos processos lógicos. A metodologia utilizada na intervenção, embora em um processo de curta duração, permitiu a todos os alunos um alcance de resultados expressivos no processo de reconhecimento de figuras. Os mapas conceituais foram eficientes, pois evidenciaram os avanços concebidos e, também, as melhorias no processo de elaboração de conceitos relativos a polígonos.

Palavras-Chaves: Mosaico tecnológico; Operações formais; Conceitos sobre polígonos.

ABSTRACT

This research has sought to identify the processes of elaboration and re-elaboration of concepts related to polygons, based on a short intervention involving teenagers, mediated by digital technologies. The theoretical basis is founded on Piaget, Vergnaud, the couple Van Hiele and Ausubel. This study aimed to analyze the processes and relationships established in eight intervention sessions. The intervention used a technological mosaic, composed of both recent and pioneering technologies for the study of geometry. To establish geometric relationships, we used the 3.0-Slogo, Cabri-II and Géomètre MatGeo, which was developed in the research context. To encourage interaction among the individuals participating in the intervention, we used Moodle. And finally, to observe the evolution of the concepts represented by concept maps, we used Cmap Tools. The data collection instruments were: tests to support comparative studies, conceptual maps produced at different times and written, oral and digital records. Data were obtained through recording sessions in interventional videos, exchanging files online, the researcher's field notebook, and access to students' written records. Test results show that significant advances, related to the recognition of figures, were achieved using the intervention process. Thus, suggesting the use of that a technological mosaic may favor learning, since it allows successive approximations. The data show that there is elaboration and re-elaboration of concepts by students when they have the opportunity to act on the same content in different ways, as occurred in the intervention. The intervention process allowed students to perform operations related to informal deduction and achieve advances in logical processes. The method involved the use of a short intervention which allowed all the participants to achieve significant results in the figure recognition process. Concept maps were shown to be efficient in assessing improvements in the process of elaborating concepts related to polygons.

Key words: Technological Mosaic; Formal Operations; Concepts of Polygons.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVAs - Ambientes Virtuais de Aprendizagem

BIOE - Banco Internacional de Objetos Educacionais

CESTA - Coletânea de Entidades de Suporte ao uso de Tecnologia de Aprendizagem (UFRGS)

CETIC.BR - Centro de Estudos Sobre Tecnologias da Informação e Comunicação

EDUCOM - Educação com Computadores

IC - Instituto de Computação (Unicamp)

LABVIRT - Laboratório Virtual (USP)

LDB - Leis de Diretrizes e Bases

MERLOT - Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching

MIT - Massachusetts Institute of Technology

MMM - Movimento da Matemática Moderna

MOODLE - Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment

NIED - Núcleo de Informática Aplicado à Educação (Unicamp)

NUTED - Núcleo de Pesquisas em Tecnologia e Educação (UFRGS)

OA - Objeto de Aprendizagem

PC - Personal Computer

PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais

PROINFO - Programa Nacional de Informática na Educação

PRONINFE - Programa Nacional de Informática Educativa

RIVED - Rede Internacional e Virtual de Educação

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

SEB - Secretaria de Ensino médio e Tecnológica

SEED - Secretaria de Educação à distância

TICs - Tecnologias da Informação e Comunicação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nosso objetivo nesta investigação foi o de **identificar os processos de elaboração e de reelaboração de conceitos relativos a polígonos em adolescentes**. Para alcançar essa meta, a pesquisa dividiu-se em dois momentos: inicialmente, compreendeu a seleção e criação de tecnologias, sobretudo digitais, que possibilitassem a aprendizagem matemática, potencializando avanços nos processos lógicos dos alunos e, na sequência, envolveu uma intervenção exploratória, mediada por essas tecnologias.

O tema desta pesquisa situou-se na interface entre dois campos: Educação Matemática e Tecnologia, no cenário escolar. A escolha dessa temática foi motivada pela nossa formação[1], experiência[2] e pelo desejo de compreender melhor os processos de aprendizagem, relacionados ao raciocínio da lógica matemática, tendo apoio de tecnologias digitais.

A velocidade na produção do conhecimento altera o mercado de trabalho, visto que a maioria das competências adquiridas por um indivíduo em sua formação inicial deve ser continuamente atualizada. A busca já não é somente pelo especialista – aquele que detém um conhecimento sobre um determinado saber – mas pelo profissional que saiba solucionar problemas, que lide com as diferentes variáveis e que seja capaz de agir no momento exato. A urgência não é somente quantitativa, mas qualitativa em relação ao trabalho, pois a necessidade é de pessoas ativas, criativas e versáteis.

A tecnologia digital é responsável, em grande parte, pelos avanços nos processos de comunicação, sobretudo pelos acessos proporcionados pela *Internet* em suas múltiplas vertentes. Vivemos em um tempo de aparente contradição, marcada, de um lado, pelo excesso de informação e, do outro, pelo insuficiente aprendizado, visto que avanços em comunicação foram mais significativos do que os aprimoramentos nos processos escolares. Assim, os alunos são

---

[1]Formação básica em Pedagogia (1989) e Ciência da Computação (2000).
[2]Atuamos, aproximadamente, há dez anos na docência de matemática no Ensino Fundamental, a maior parte do tempo, em escolas particulares de Cuiabá/MT. Trabalhamos, também, na orientação de professores, por cinco anos nas escolas adventistas e outros cinco anos no colégio São Gonçalo, neste especificamente com tecnologia educacional. No mestrado (UFMT), realizamos uma pesquisa interventiva apoiada em tecnologias digitais. Coordenamos projetos de pesquisa/extensão em tecnologias e matemática, por quatro anos, depois do ingresso na docência universitária (2005), atuando no curso de licenciatura em computação, da UNEMAT de Cáceres/MT.

ávidos por informações, mas, paradoxalmente, não conseguem transformar a maioria das informações acessadas em conhecimento, como destaca Marks (1998).

Darsie (2001) e Sena (2005) destacam que a matemática tem um papel essencial na formação do sujeito pensante, tendo em vista seus aspectos informativo e formativo: o primeiro diz respeito aos conteúdos da disciplina; o segundo refere-se ao crescimento humano, sobretudo pela possibilidade de desenvolver o raciocínio lógico. Embora tenha essa relevância no desenvolvimento humano, a matemática é traumatizante para muitos alunos, como constatam D' Ambrosio (1997) e Vitti (1995), entre outros. E ainda é a disciplina responsável, em grande parte, pelo expressivo número de retenções, com envio de alunos a projetos de aceleração.

As avaliações nacionais refletem a situação brasileira. Neste estudo, destacamos os dados referentes ao Ensino Fundamental II, por ser o foco da pesquisa. Coelho (2008) destaca que, até o ano de 2005, em uma escala de zero a dez, a média das notas foi de aproximadamente 3,0. Já os dados descritos em Brasil (2012) das últimas avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB (2007, 2009, 2011), mostram um pequeno crescimento que eleva o índice de notas (3,5; 3,7; 3,9), embora ainda permaneça muito baixo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, do Ensino Fundamental II, esclarecem que os conteúdos de matemática são tratados de forma isolada e sem conexão. Utiliza-se uma linguagem específica e difícil, na qual se enfatizam as definições e as fórmulas. Na tentativa de cumprir o programa pré-elaborado, não são estabelecidas as relações entre os conteúdos, fragmentando-se o conhecimento (BRASIL, 1998).

Estudos da década de 90, como os de Carraher, Carraher e Schilieman (1995), Carvalho (1990) e D'Ambrosio (1999), indicam que praticamente não havia conexões entre a matemática aprendida na escola e a matemática do cotidiano. Bicudo e Borba (2009) mostram que, se antes do ano 2000, a pesquisa em educação matemática visava apontar falhas no processo, passa, depois da virada do século, a apontar caminhos, com investigações mais centradas em práticas interventivas. No entanto, ainda existem muitas questões a serem superadas. Imenes (2010) destaca que a prática da matemática ainda está muito ligada ao cálculo escrito, com destaque para conjuntos de regras prontas, em detrimento da construção de significados. Nacarato, Mengali e

Passos (2011), assim como, Silva, Carvalho e Rego (2012), destacam a necessidade de avanços na formação dos professores para atuar no campo da matemática, dentro do cenário atual.

O acesso à informática altera a forma de perceber e de estabelecer relações com a matemática, como mostram Lopes (2010), Borba e Penteado (2010), Bittar (2010), entre outros. Esses autores destacam que as competências na área ampliaram-se das habilidades em cálculo mecânico, para a interpretação, produção, resolução e aplicação do conhecimento matemático em vários contextos. Avanços computacionais no tratamento de dados impulsionaram o estudo de novos ramos na matemática, possibilitaram o aprimoramento do uso de métodos estatísticos e permitiram experiências inovadoras, através da exploração de diferentes mídias digitais.

O visual passa a ter um grande destaque no espaço digital. Borba (2010) indica, por exemplo, as facilidades de representar questões matemáticas através de desenhos e gráficos, de forma mais precisa. Juntamente com Bairral (2010), Notare (2009) reforça as possibilidades dos ambientes virtuais no gerenciamento de dados e na comunicação entre os pares. Quanto aos desafios, esses autores constatam que os professores não têm preparo apropriado para o trato com a tecnologia e, quando usam o laboratório de informática, fazem-no de forma relativamente desconexa do que se passa na sala de aula. Além disso, destacam que os currículos estão inadequados para atender as demandas em transformação. Para o espaço *online* consideram que as trocas no ambiente virtual não ocorrem facilmente, como em outras disciplinas.

É preciso que os centros de ciência aproximem-se da escola, e, “[...] no momento em que nos interessamos por aquilo que se passa na sala de aula, somos obrigados a nos interessar especialmente pelo conteúdo do conhecimento” (VERGNAUD, 1996a, p.10). Assim, neste trabalho, procuramos compreender como se dá o pensamento matemático, no que se refere à formação de conceitos sobre polígonos, e como a utilização da tecnologia digital pode favorecer esse processo.

Nosso foco atêm-se à geometria, que, por sua vez, compõe saberes que nasceram da necessidade do homem de resolver problemas práticos. Consideramos que a geometria é, particularmente, propícia a um ensino fortemente baseado em situações exploratórias e investigativas. Mais do que resolver desafios geométricos, interessamo-nos pela elaboração do desenho[3] em diferentes perspectivas, pela organização, pela classificação, pelas relações que se estabelecem entre os diferentes polígonos e, destes, com outros conteúdos matemáticos, pois consideramos que estas diferentes aproximações colaboram com o desenvolvimento da conceituação. Conceituar, de nosso ponto de vista, equivale a descrever as propriedades essenciais de um objeto, que se altera na medida em que o sujeito passa a construir novas relações mais elaboradas.

Assim, defendemos a ideia de que um mosaico tecnológico, utilizado dentro de um contexto escolar, que permita aproximações sucessivas ao objeto de conhecimento, favoreça a elaboração e reelaboração de conceitos geométricos, possibilitando avanços na construção do conhecimento. Compreendemos que mosaico é um artefato composto de várias partes distintas, o qual, neste trabalho refere-se aos recursos tecnológicos utilizados. Não encontramos trabalhos que utilizassem o termo “mosaico tecnológico” em educação, nem na educação matemática, apesar de existirem muitas pesquisas que se utilizam de tecnologias no ensino da matemática, como Papert (1994), Borba e Penteado (2010), Borba (2009), Fagundes (1999), Miskulim (1999/2005), Gravina e Santarosa (1998), Notare (2009), Marinho (2010), Dantas (2010), Dizeró (2010), entre outras. As pesquisas citadas direcionaram nossas escolhas e ações.

Para compor o mosaico tecnológico, selecionamos tecnologias como o *Slogo-3.0* e *Cabri-Géomètre II*, ambas com destaque na aprendizagem da geometria, conforme apontam as pesquisas acima citadas. Também criamos um Objeto de Aprendizagem (OA) nomeado de *MatGeo*. Juntas, essas tecnologias foram utilizadas em um processo de intervenção com adolescentes. Escolhemos atuar com adolescentes pois nossas experiências de ensino, com essa faixa etária, apresentaram-se complexas e instigantes. Os adolescentes atuais crescem usando múltiplos recursos tecnológicos, desde seus primeiros dias de vida. Assim, inferimos que a pesquisa pode colaborar na utilização da tecnologia a favor da aprendizagem matemática, tendo respaldo de usuários frequentes.

Ao lado do objetivo central, proposto no início deste trabalho, tivemos ações e metas complementares como: **construir um Objeto de Aprendizagem; verificar o potencial para desenvolver os processos operatórios nas tecnologias selecionadas e construídas; identificar**

[3] Nesse contexto, entendemos desenho como formado pela composição de figuras geométricas planas.

os avanços dos adolescentes, relacionados ao reconhecimento das figuras geométricas; constatar se esses avanços melhoram o desempenho deles, envolvendo a geometria como um todo. Para alcançar essas metas, este estudo divide-se em seis capítulos.

O primeiro capítulo inicia-se pela revisão teórica sobre adolescentes e mídia, com base em autores como Bee (1997), Elkind (2004), Prensky (2011), Palfrey e Gasser (2011), Veen e Vrankking (2009). Na sequência, discute a relação entre adolescentes e a aprendizagem matemática, a partir dos seguintes conceitos e autores: a lógica operatória de Piaget (1976); os mapas conceituais de Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996a) e Dutra (2006).

O segundo capítulo, também teórico, destaca os estudos geométricos, apoiados em Eves (1992/2004), Valente W. (1999), Cyrino (1896) e a infralógica de Piaget Inhelder (1993). Com a finalidade de mostrar como se dá o pensamento geométrico, priorizamos os estudos de Piaget e Inhelder (1993), de Inhelder e Piaget (1976) e do casal Van Hiele (1984).

O terceiro capítulo descreve as tecnologias selecionadas e apresenta o Objeto de Aprendizagem, construído no processo da pesquisa. São também descritos, de forma sucinta, os limites e possibilidades dessas tecnologias (selecionadas e construídas) na aproximação com o nosso objeto de estudo, a partir da teoria constituída.

O quarto capítulo expõe o método: a) descrição sucinta do estudo piloto e direcionamentos; b) universo e sujeitos da pesquisa; c) instrumentos de coleta de dados; d) descrição da intervenção; e) descrição dos resultados.

O quinto capítulo apresenta os dados analisados, discutindo primeiramente os resultados quantitativos, na sequência os conceitos prévios, depois as operações e relações constituídas nos mapas, seguidos das relações efetivadas no geral. Aponta, também, conceitos e relações indicadas nos testes finais, e, por último, reflexões gerais a partir da teoria em relação aos objetivos propostos.

O sexto e último capítulo trata das conclusões deste trabalho.

1 APRENDIZAGEM DOS ADOLESCENTES

A adolescência é a etapa da vida que marca a passagem da infância para a vida adulta. Não há definições rígidas sobre seu começo ou fim, embora o Estatuto da Criança e do Adolescente, em nosso país, estabeleça a faixa entre 12 e 18 anos. Essa fase tem-se estendido: se, de um lado, a puberdade é cada vez mais precoce, de outro, a fase escolar é cada vez mais longa, tendo em vista a necessidade crescente de qualificação nos espaços de trabalho.

Assim, dentro do tema proposto para este estudo, consideramos ser fundamental conhecer um pouco mais o adolescente e suas peculiaridades, sobretudo as relações que ele estabelece com as tecnologias, e compreender os processos de aprendizagem, com destaque para a formação do pensamento hipotético-dedutivo, que se desenvolve no período.

1.1 Adolescentes

Estudiosos da área como Bee (1997), Elkind (2004), Houzel (2005), Palfrey e Gasser (2011), entre outros, mostram que a adolescência corresponde a um período de intensas transformações. Bee (1997) indica que a fase se situa, psicológica e culturalmente, entre a meninice e a vida adulta. Nessa medida, a adolescência é um fenômeno social, que demarca importantes transformações nos aspectos físicos, afetivos e intelectuais.

É nessa época que o sujeito toma decisões e faz escolhas que influenciarão diretamente seu futuro. Novas relações se estabelecem entre os pares e os colegas/amigos passam a ter destaque, para além das relações familiares. Elkind (2004) destaca que, normalmente, os adolescentes criam conceitos de pais e professores ideais e, a partir disso, comparam com os que têm e, quase sempre, os acham insuficientes. Lidar com adolescentes é, no mínimo, complicado, pois, “[...] suas competências intelectuais recém-descobertas os transformam em formidáveis oponentes em qualquer discussão” (ELKIND, 2004, p. 203). Tornam-se críticos nas relações, fazendo com que as pessoas os encarem com algumas apreensões.

A infância, desde os primeiros anos, era considerada a fase de alterações mais significativas em relação ao crescimento e ao desenvolvimento cerebral. Contudo, pesquisas recentes, como Houzel (2005), Strasburger, Wilson e Jordan (2011), Cosenza e Guerra (2011), baseados em estudos de ressonância magnética da neurociência, indicam que existem mudanças substanciais no desenvolvimento cerebral, durante a adolescência, com destaque para as regiões do córtex frontal. O cérebro passa por uma grande reorganização estrutural, que afeta não somente o número de neurônios, mas sua capacidade de troca de sinais. Devido a essa reorganização e ao papel direcionador das experiências vividas, a adolescência, assim como a infância, demarca uma fase em que o ambiente pode exercer grande influência. Esse fato reafirma o papel fundamental dos professores nesse período, visto que podem proporcionar experiências aos alunos que despertam suas capacidades mentais.

Os estudos de Piaget, desde a década de 30, já defendiam a estruturação do pensamento. Nessa perspectiva, os adolescentes passam a ter a possibilidade de dominar o pensamento lógico formal, e, pouco a pouco, desenvolvem mecanismos que os capacitam a trabalhar com um raciocínio hipotético-dedutivo. Essa nova forma de pensar possibilita a abertura para novas ideias, tornando-se uma conquista fundamental para toda a vida.

1.2 Os adolescentes e a tecnologia

O acesso à tecnologia acabou por demarcar ainda mais a adolescência. A geração atual e os demais, que nasceram depois da década de 80, recebem muitos apelidos como “geração digital”, “geração instantânea”, “geração cyber”, “nativos digitais”, entre outros. O termo “nativos digitais” foi designado primeiramente por Marc Prensky e identifica aqueles que se valem “[...] da linguagem digital dos computadores, videogames e da *internet* [...]” (PRENSKY, 2011, p.1), que crescem com o *mouse* e costumam utilizar múltiplos recursos tecnológicos. Os adolescentes, mesmo antes de entrarem para a escola, dominam vários recursos tecnológicos: já sabem manipular o controle remoto; têm acesso ao celular (a grande maioria), e, inclusive, possuem o seu primeiro aparelho nos primeiros anos do ensino fundamental[4].

Os nativos digitais, ao verem televisão ou ao assistirem a diferentes mídias, interpretam imagens e sons ao mesmo tempo. Costumam, simultaneamente, usar o computador, falar ao telefone e ouvir música ou assistir à televisão. Assim, mesclam comunidades reais e virtuais. Eles

[4] No Brasil, dados do Centro de Estudos sobre Tecnologia da Informação e Comunicação, CETIC.BR (2010), mostram que 60% da população de crianças de 5 a 9 anos já tinha celular.

sabem processar informações descontinuas e são capazes de fazer resumos dos vários canais a que assistem (VEEN; VRANKKING, 2009).

Através das diferentes tecnologias, os adolescentes são conduzidos a diversas informações que se alteram muito rapidamente, o que evidencia uma espécie de pressão e, ainda, essas informações podem vir expressas de forma complexa para o entendimento, constituindo-se como outro tipo de pressão. O primeiro tipo de pressão produz o estresse da sobrecarga de informação e o segundo da sobrecarga emocional (ELKIND, 2004).

Os nativos digitais, por perceberem que a informação é maleável, reconhecem que ela pode ser controlada e reconfigurada e, por isso, “[...] conseguem ter controle sem precedentes sobre seu ambiente” (PALFREY; GASSER, 2011, p.16). Nesse sentido, alguns pesquisadores defendem que eles são mais criativos, se comparados aos adolescentes de outras épocas. Contudo, apoiados nos autores acima, não reconhecemos essa superioridade criativa, haja vista a complexidade de uma comparação e a diversidade de tempo/espaço vivido. O que eles têm é mais oportunidade de expressar sua criatividade, sobretudo pelos espaços digitais, o que oportuniza uma repercussão maior de suas criações.

Pesquisas do Centro de Estudos Sobre as Tecnologias da Informação em Comunicação (CETIC[5].BR), com dados de 2010, indicam que parte da população brasileira (41%) utiliza a *internet*, e, outro dado importante: apontam os jogos como a atividade preferencial das nossas crianças e adolescentes. Os estudos de Rizzini et al. (2005)[6] revelam que, na sociedade brasileira, a televisão está presente na maioria dos lares e é a mídia usada por mais tempo. Em relação ao uso do computador pelos jovens, a CETIC.BR (2010) mostra um percentual de 60%, dos quais 50% têm acesso em casa. Quanto às crianças de 5 a 9 anos, 51% usam o computador e, destes, 27% a *internet*. Quanto ao tipo de uso pelas crianças, 90% recorrem a jogos e 45% realizam pesquisas para escola.

Ao analisarem os jogos, os estudiosos reconhecem aspectos positivos e negativos. Os estudos de Veen e Vrankking (2009), Mazzarella et al. (2009), Matar (2010), entre outros,

[5] O CETIC.BR, departamento do Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR (Nic.br), criado para atender as demandas do Comitê Gestor da *Internet* no Brasil (CGI.br), foi elevado à categoria de centro de estudo regional da Unesco, o primeiro dedicado ao estudo da sociedade da informação.
[6] Pesquisa internacional envolvendo 949 jovens do RJ, entre 11 a 17 anos.

mostram que os jogos, a partir dos anos 80, ficaram cada vez mais difíceis e complexos, e, nestes, os papéis a serem interpretados são mais elaborados, o que exige do usuário atual competências mais refinadas. Para Matar (2010), a violência dos jogos é vista de maneira positiva, pois proporciona aos jogadores interações, não cópia, das situações vivenciadas. Já Mazzarella et al. (2009), Palfrey e Gasser (2011), entre outros, indicam relações entre a violência e a mídia, destacando que mesmo desenhos infantis podem acarretar mudanças no comportamento das crianças, ligadas a atos violentos. Outra questão da qual ainda pouco se sabe, é a fascinação que determinados tipos de jogos exercem sobre indivíduos, levando o jogador a gastar tempo excessivo nessa atividade. E, em geral, os pesquisadores concordam que o acesso deve ser controlado, sobretudo para os menores.

As redes sociais têm-se caracterizado como os principais mediadores para as comunicações entre adolescentes, como apontam os estudos de Palfrey e Gasser (2011) e Strasburger, Wilson e Jordan (2011). Em geral, esses autores destacam que os adolescentes produzem textos curtos, acompanhados por imagens, desenvolvem habilidades icônicas, centradas em caracteres semânticos e são *experts* em executar múltiplas tarefas, sem ênfase para habilidades de concentração e reflexão. Ainda nos espaços digitais, deixam vestígios de si, com informações que podem colocá-los em perigo ou humilhá-los no futuro.

Uma parte de tais adolescentes não tem respeito à privacidade e assumem como suas as produções alheias, detendo, nesse sentido, ideias diferentes das gerações que lhes antecederam. Nesse contexto, Palfrey e Gasser (2011) mostram que estamos diante de mudanças profundas. Muito provavelmente, essa geração irá mover mercados e transformar indústrias, espaços culturais, organizações, educação e a própria política global. Resta saber até que ponto as escolhas feitas hoje afetarão as futuras gerações.

Outra realidade paradoxal da escola é que, enquanto a maioria dos educadores pertence ao grupo dos imigrantes, os educandos situam-se no grupo dos nativos digitais. Se no primeiro grupo ainda existem os resistentes ao uso da tecnologia, no segundo a interação é bastante natural. Esse é um dos fatores que tem provocado restrição ao uso por parte de muitos educadores, como apontam as pesquisas de Guimarães, Sena e Campos (2013).

Palfrey e Gasser (2011) mostram que escolas, em diversas partes do mundo, adquirem tecnologias, e, depois, ficam sem saber direito o que fazer com elas. A resistência à utilização, apoiada nas dificuldades encontradas, colabora para o uso precário da tecnologia educacional, impedindo os educadores de exercer influência positiva na formação do usuário digital consciente.

Reconhecemos a riqueza dos espaços virtuais para a aprendizagem, mas isso não anula nem substitui o espaço real. Por esse motivo, compreendemos que é preciso orientar nossos jovens para que vivam o melhor de cada espaço. Dessa forma, estudos sobre os processos de aprendizagem, com destaque para a produção e a construção do conhecimento, precisam ser repensados e reavaliados diante da modernidade exposta.

1.3 Aprendizagem

A aprendizagem é um processo vital e universal, que se inicia no nascimento e se prolonga pelo resto da vida, sendo direito e privilégio de todos. Para que ocorra a aprendizagem não precisa necessariamente haver ensino, pois é possível aprender de várias formas. Compreender os processos que envolvem a aprendizagem não é tarefa simples. Por mais que a ciência e as pesquisas nessa área avancem, a mente humana usa vários processos para aprender e nem todos são conhecidos. Nesse sentido, mantendo a ênfase na cognição, buscamos compreender melhor o processo de aprendizagem, sabendo, desde logo, que uma única teoria pode não contemplar todo o universo a ser estudado. Assim, os estudos de Piaget (1972/1976/2001), Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Vergnaud (1996/2009) constituem nossa base teórica.

Para Piaget (1972), a aprendizagem é uma função do desenvolvimento e depende de quatro fatores principais: a **maturação** considera que é preciso respeitar o desenvolvimento cerebral do sujeito; a **experiência** leva em conta a aproximação do sujeito com o objeto a ser conhecido; a **transmissão social** aponta os efeitos do ambiente físico e do convívio social; e a **equilibração** considera, no desenvolvimento cognitivo, a transformação do sujeito e do objeto por força da interação, pois o sujeito assimila os objetos e modifica-os, segundo os esquemas de que dispõe. Piaget (1977) destaca que o conhecimento resulta da interação entre sujeito e objeto, que interagem através dos mecanismos que têm, e "[...] quanto mais o sujeito limitar-se às reações elementares, mais ele deformará conceitualmente os dados de observação [...]" (PIAGET, 1977, p. 200). Defende, ainda, a necessidade de o sujeito encontrar uma totalidade, conceituar, ou seja, entender (ainda que parcialmente) um questionamento, pois, quando desequilibrado, tem a necessidade de retornar ao equilíbrio novamente, gerando novo conhecimento.

Com o desenvolvimento de novas estruturas do pensamento, há evolução intelectual que permite reelaborar, de forma mais profunda, relações anteriormente compreendidas. Assim, existe a importância da conscientização do conhecimento. Becker (2010) esclarece que a conscientização não se dá em uma "[...] totalidade, mas apenas algo, algumas características [...]" (BECKER, 2010, p.47), ou seja, sempre é possível fazer novas relações em patamares superiores. O autor chama a atenção para o fato de que não se trata de uma simples superação de níveis, pois o conhecimento da realidade é dialético, assim, há avanços, organização e desorganização e, na medida em que isso ocorre, o conhecimento adquire maior profundidade.

Vergnaud, a partir de trabalhos desenvolvidos com Piaget, propõe a teoria dos campos conceituais. Ele destaca o interesse dos estudos de Piaget "por uma teoria da conceituação", que tendia sempre a "voltar às estruturas lógicas e ao desenvolvimento das operações do pensamento" (VERGNAUD, 1996a, p.11). Para o autor, os campos conceituais significam, ao mesmo tempo, um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o primeiro pede vários conceitos, enquanto o segundo contribui para o domínio dessa situação. Os conceitos, por sua vez, formam sistemas, cuja organização é progressiva e jamais acabada. O autor destaca que os meios utilizados para resolver um problema em uma tarefa são enraizados na representação que se faz da situação, e isso se dá conforme a percepção que o sujeito tem das relações (VERGNAUD, 2009a).

Para Vergnaud um dos problemas do ensino é desenvolver a forma operatória do conhecimento (saber fazer), e a forma predicativa (saber explicitar). No seu entendimento, o educando não é capaz de demonstrar competência para o desenvolvimento das estruturas lógico-matemáticas, se não for capaz de explicitar os conhecimentos envolvidos na resolução do desafio proposto. Contudo, considera que nenhum de nós é hábil para explicitar, já que, muitas vezes, alcançamos o êxito na execução de uma tarefa, sem ter noção da conceituação. Portanto, "[...] um dos problemas da psicologia cognitiva é o de reconstruir os conhecimentos implícitos na ação [...]" (VERGNAUD, 1996a, p.14), ou seja, o grau de consciência que revela o processo.

Dessa forma, Vergnaud (1996a) compreende a importância de explicitar os conhecimentos envolvidos na resolução do desafio proposto, processo fundamental para a generalização. Por sua vez, concebe a generalização como imprescindível para o desenvolvimento intelectual, sendo possível através de operações do pensamento. Assim, é fundamental dar oportunidade para que o aluno possa construir o conhecimento, a fim de que ele seja capaz, através de operações lógicas, de fazer generalizações. O autor destaca a existência dos conceitos em ação, presentes tanto na matemática como na vida social, que nos permite selecionar a informação pertinente, para resolução de um desafio.

É preciso considerar, ainda, que a aprendizagem da matemática distingue-se dos demais campos do saber, visto que forma um conjunto "[...] de noções, de relações, de sistemas relacionais que se apoiam uns sobre os outros" (VERGNAUD, 2009b, p. 16). Se considerássemos, por exemplo, um simples ato de verificar o maior entre os números 2 ou 3, uma operação considerada fácil pode tornar-se extremamente complexa para aquele que não conhece os conceitos básicos relacionados, ou que não tenha estruturas que potencializem a resolução. Se, por exemplo, não se conhece o significado de 2 e 3, esse conceito não se formará facilmente, pois não está ligado à palavra "dois" ou "três" nem ao símbolo "2" ou "3". Também não existe um objeto real que defina esses números, pois representam quantidades que podem estar associadas aos mais diferentes objetos. Dessa forma, além de compreender essa relação numérica envolvida, é preciso entender as relações de ordem estabelecidas e o significado de maior e menor.

Evidentemente conceitos mal elaborados tornam-se impeditivos a estudos mais avançados sobre um tema, visto que inibem a formação de novas relações que se ligam a um sistema de conceitos. Desse modo, impedem a elaboração de novos conceitos, assim como a construção e a percepção de novas relações. Para a aprendizagem é fundamental a organização do pensamento, e, entre as tecnologias de apoio para esse processo, encontramos os mapas conceituais. Os trabalhos, nesse sentido, surgem da teoria de Ausubel e dos estudos de Novak e seus seguidores. Para seguir nessa direção, acreditamos ser necessário entender parte da teoria da aprendizagem que fundamenta os mapas conceituais, os quais serão utilizados na pesquisa.

1.3.1 Aprendizagem significativa

Se Ausubel tivesse que reduzir toda a psicologia da educação a um único princípio, diria que o mais importante para a aprendizagem é verificar aquilo que o aluno já sabe. O conceito fundamental na sua teoria é o da aprendizagem significativa, que “[...] envolve a aquisição de novos significados, e os novos significados, por sua vez, são produtos da aprendizagem significativa” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.34).

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) explicam que a aprendizagem significativa ocorre quando um novo conceito ou uma nova informação interage com os conceitos existentes, os quais nomeiam de subsunçores. Quando um novo material não interagir com o subsunçor correspondente, permanece de forma arbitrária na estrutura cognitiva, caracterizando uma memorização fragmentada, isolada. Para que a informação se transforme em conhecimento, é preciso que haja ponto de ancoragem de subsunçores. Por esse prisma, quanto maior a quantidade de subsunçores, conhecimentos existentes na mente sobre o assunto para a ancoragem, maior possibilidade de solidificação e criação de bases de conhecimento.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) distinguem a aprendizagem significativa da mecânica, na qual há aquisição de novas informações com pouca ou nenhuma interação com os conceitos relevantes e existentes na estrutura cognitiva. Como nosso foco é o desenvolvimento do pensamento, compreendemos que informações soltas e desconexas de seus significados não indicam aprendizagem no sentido que buscamos e, sendo assim, a aprendizagem mecânica é irrelevante para este trabalho. Já na aprendizagem significativa, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) distinguem três tipos: representacional, conceitual e proposicional.

A aprendizagem representacional implica aprender o significado dos símbolos, em particular, e das palavras, no geral. No estágio inicial, o sujeito deve aprender o símbolo, ou seja, se viu pela primeira vez a palavra “cachorro”, esse símbolo ainda não tem significado. Quando, porém, relacionada ao seu significado, a palavra é realmente “[...] capaz de provocar o aparecimento de uma imagem composta de vários cachorros em sua experiência” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.39). Assim, quando se adquire o significado mais genérico da palavra, o símbolo serve como significante para o conceito.

A aprendizagem conceitual consiste na formação de conceitos, unidades genéricas ou ideias categóricas, representadas por símbolos particulares. Consiste na aprendizagem dos atributos essenciais (distinguir ou identificar). Nesse caso, os atributos essenciais de um novo conceito são incorporados pela estrutura cognitiva, resultando em novo significado, porém unitário. Ocorre por descobertas, envolvendo, mesmo que primariamente, “[...] processos psicológicos subjacentes, como a análise discriminativa, abstração, diferenciação, formulação e testes de hipóteses e generalização” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.77).

A aprendizagem proposicional não se reduz ao aprendizado do que representam as palavras isoladamente ou a combinação, “[...] implica, em um sentido mais amplo, aprender o significado de uma estrutura gerada pela combinação de palavras isoladas numa sentença [...]”, distinguida da aprendizagem conceitual, no sentido de que uma proposição ou ideia composta “[...] é incorporada para formar outra estrutura significativa”. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.40). Os autores consideram que a aprendizagem representacional ocorre de forma mais automática, enquanto a conceitual e a proposicional podem atingir formas mais complexas.

Moreira e Masini (2001), estudiosos da teoria, declaram que, quanto à formação de conceitos, Ausubel vê o armazenamento de informações na mente humana como algo altamente organizado, formando uma “[...] hierarquia conceitual na qual, elementos mais específicos do conhecimento são relacionados (e assimilados) a conceitos e proposições mais gerais, mais inclusivos” (MOREIRA; MASINI, 2001, p. 17). Consiste, assim, em um processo de abstração dos aspectos comuns essenciais de uma classe, que por sua vez podem ser observados através de um mapa conceitual.

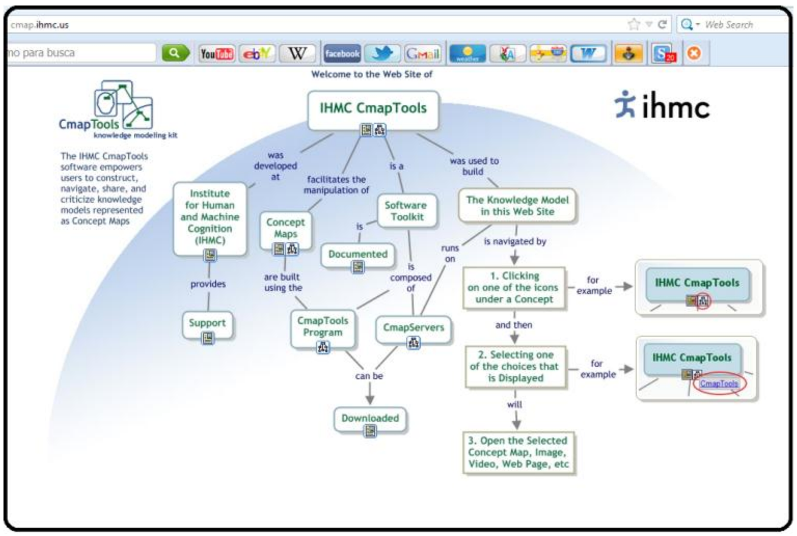
1.3.1.1 Mapas conceituais

Tendo como base a teoria da aprendizagem significativa, Novak, colaborador de Ausubel, idealizou uma estratégia, o mapa conceitual, que se constitui em uma ferramenta para organizar e representar o conhecimento. É composto por representações gráficas que apresentam conceitos e relações estabelecidas entre eles. São diagramas que contêm relações significativas e até hierarquias conceituais (MOREIRA, 2010).

Os mapas têm sido utilizados nas mais diferentes áreas do conhecimento, e têm despertado o interesse de vários educadores. O mapeamento pode seguir um modelo hierárquico no qual conceitos mais inclusivos estão no topo (parte superior do mapa) e conceitos específicos, na parte inferior. Não há regras gerais ou específicas para o traçado do mapa, o importante é que seja um instrumento capaz de evidenciar significados atribuídos a conceitos e relações entre conceitos. É importante constatar que o valor de um mapa conceitual está na explicação dada pela pessoa que o elabora, pois ela externaliza significados (MOREIRA, 2010).

Na pesquisa empírica, descrita no capítulo referente ao método, utilizamos o Cmap Tools, *software* livre utilizado na construção de modelos, representados por mapas conceituais, como mostra a figura 1.

Figura 1 - Ambiente do Cmap Tools



Fonte: Ambiente encontrado em http://cmap.ihmc.us/

Esse mapa conceitual digital suporta uma adaptação do seu uso original a uma análise do processo de conceituação, baseado no processo da construção do conhecimento, pois os diagramas, além de tornarem acessíveis as relações estabelecidas pelo sujeito, permitem o acesso a diferentes etapas de sua elaboração, que se modificam a partir de novas relações estabelecidas.

Dutra (2006) destaca que o uso de conceitos em uma perspectiva piagetiana difere das proposições estabelecidas por Ausubel, nas quais os mapas aparecem como um dispositivo auxiliar para o processo de uma aprendizagem significativa. O diferencial é que na epistemologia genética há uma assimilação ativa a partir das coordenações das ações. O autor destaca que quando ocorre uma assimilação, de acordo com a acomodação possível, é preciso uma transformação no sistema de significações do sujeito “[...] para que possa integrar (e não apenas ancorar) novos conhecimentos, o que implica em modificações nas relações entre noções e conceitos" (DUTRA, 2006, p. 20). Esses fenômenos, em diferentes níveis, modificam-se a partir de novas compreensões que se estabelecem. Assim, o conceito é transformação.

Nessa perspectiva, o conceito é reelaborado na medida em que se estabelecem novas relações, o mesmo ocorre através da aprendizagem. As estruturas intelectuais que surgem com os estádios de desenvolvimento possibilitam um novo olhar para o objeto de conhecimento. Desse modo, é preciso compreender as estruturas do pensamento formal, que aos poucos se estabelece no adolescente, permitindo novas formas de compreensão da realidade.

1.4 Possibilidades operatórias do pensamento formal

Desde os primeiros estudos sobre o nascimento da inteligência na criança, Piaget (1987) revela que a lógica é fundamental para o desenvolvimento de estruturas e nasce mesmo antes da linguagem, sendo apresentada pela coordenação das ações. Nunes et al. (2007) indicam a importância do desenvolvimento da lógica para aprender matemática. Alencar (1984), Hottois (2002), Bicudo (2009), entre outros, declaram que a lógica não é ciência, mas se faz ciência através de um encadeado de demonstrações lógicas.

Piaget (2001) defende a existência de uma construção natural das estruturas lógico-matemáticas elementares, que existe como função do desenvolvimento global da inteligência, pois, antecedendo "[...] qualquer linguagem, em um nível puramente sensório motor, as ações são suscetíveis a repetições e depois a generalizações" (PIAGET, 2001, p. 1). Assim, destaca a importância do papel inicial das ações e experiências para a formação do raciocínio dedutivo, mesmo para o estádio sensório-motor (0-2 anos) e para o próximo, o pré-operatório (2-7/8 anos).

É no estádio operatório concreto (7-12 anos em média) que ocorre o desenvolvimento espontâneo do pensamento dedutivo, com características de conservação e reversibilidade, que permitem à criança a elaboração da "[...] lógica elementar de classes e relações, a construção operacional de toda a série dos números pela síntese de inclusão e ordem" (PIAGET, 2001, p.2). O avanço da lógica, nesse período, é limitado, pois a criança ainda não consegue raciocinar a partir de hipóteses e, portanto, precisa apoiar seu raciocínio hipotético dedutivo no real.

No estádio operatório formal (12 anos em diante), a mente se organiza, alcançando um estado de equilíbrio por volta dos 16 anos. A lógica que se apresenta nesse período, capacita-os a raciocinar em termos de hipóteses. Os sistemas elementares de classificação e de ordenação vão constituir um sistema combinatório do pensamento formal, como mostra Piaget (1993). O adolescente torna-se capaz de tratar com proposições combinatórias. A lógica proposicional surge, então, como a principal conquista desse nível.

Importante considerar que, apesar da teoria piagetiana destacar níveis de desenvolvimento demarcado por uma idade média, a idade não é determinante do desenvolvimento, mesmo porque as idades são variáveis nos diferentes estudos realizados. Inclusive, com relação ao estádio operatório formal, Piaget (1993) indica que nem todo o adulto desenvolve a capacidade de formalização, ou ainda, esse desenvolvimento não se dá em todas as áreas. A revisão teórica de Bee (1997) retoma essas ideias e indica que o pensamento formal é encontrado em maior frequência entre jovens e adultos de países industrializados. Sugere, ainda, que a tecnologia pode ser a grande aliada desse desenvolvimento.

Esse fato nos leva a compreender a importância de retomarmos o tema da lógica, apesar de não ser frequente nas pesquisas atuais. Compreendemos que esse estudo pode contribuir para as lacunas encontradas na matemática, sinalizando caminhos a serem percorridos dentro das diferentes modalidades de ensino, a fim de alavancar a aprendizagem. Nesse sentido, é importante distinguir o processo de formalização, assim como as operações lógicas envolvidas.

1.4.1 Lógica das proposições

A lógica das proposições é constituída de composições entre proposições. Proposição é todo conjunto de ideias ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo, que pode ser verdadeiro ou falso. Os estudos de Piaget (1976) apresentam uma possibilidade de 16 combinações lógicas. Assim, se considerarmos duas proposições quaisquer, *p* e *q,* verificando apenas sua verdade ou falsidade, haverá a possibilidade de composição de um sistema que consiste, primeiramente, em repartir as quatro associações básicas: *p* e *q (pq)*; *p* e não *q (p ~q)*; não *p* e *q (~p q);* não *p* e não *q (~p ~q).* Depois, aparecem suas combinações, em número de 16, como mostra tabela 1, na qual o 0 equivale a falso e o 1 a verdadeiro.

Tabela 1 - As dezesseis combinações a partir de duas proposições

(p, q)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(1 , 1)	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
(1 , 0)	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
(0 , 1)	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
(0, 0)	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

Fonte: Piaget (1997).

Para maior esclarecimento, elaboramos a figura 2, constituída das 16 combinações, divididas em dois blocos, todas nomeadas na primeira linha. Também nesta figura, apresentamos a tabela de entrada para *p* e *q*. Escrevemos, nas três linhas (abaixo do nome numerado), formas diferentes de representar a mesma operação. Já as últimas quatro linhas de cada coluna apresentam o resultado da operação lógica descrita (falso/verdadeiro). A tabela foi feita numa planilha eletrônica, a qual apresenta automaticamente o resultado da operação lógica instituída.

Figura 2 - Possibilidades de combinações – as 16 operações

Tabela das 16 Proposições				1) Negação	2) Conjunção	3) Não implicação	4)Não-implicação reciproca	5) Negação conjunta	6) Afirmação de p	7) Afirmação de q	8)Equivalëncia
Entrada				~(a+b+c+d)	a	b	c	d	a + b	a + c	a+d
				0	p . q	x	$(\bar{p}.q)$	$(\bar{p}.\bar{q})$	p [q]	q[p]	p≡q
p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	[illegible]	p . q	$(p\ .\bar{q})$	$(\bar{p}.q)$	$(\bar{p}.\bar{q})$	$(p\ .\ q)v(p\ .\bar{q})$	$(p\ .\ q)v(\bar{p}.q)$	$(p\ .\ q)v(\bar{p}.\bar{q})$
VERDADEIRO	VERDADEIRO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	VERDADEIRO
VERDADEIRO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO	FALSO	FALSO
FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO	FALSO
FALSO	FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO

Pares de Inversas

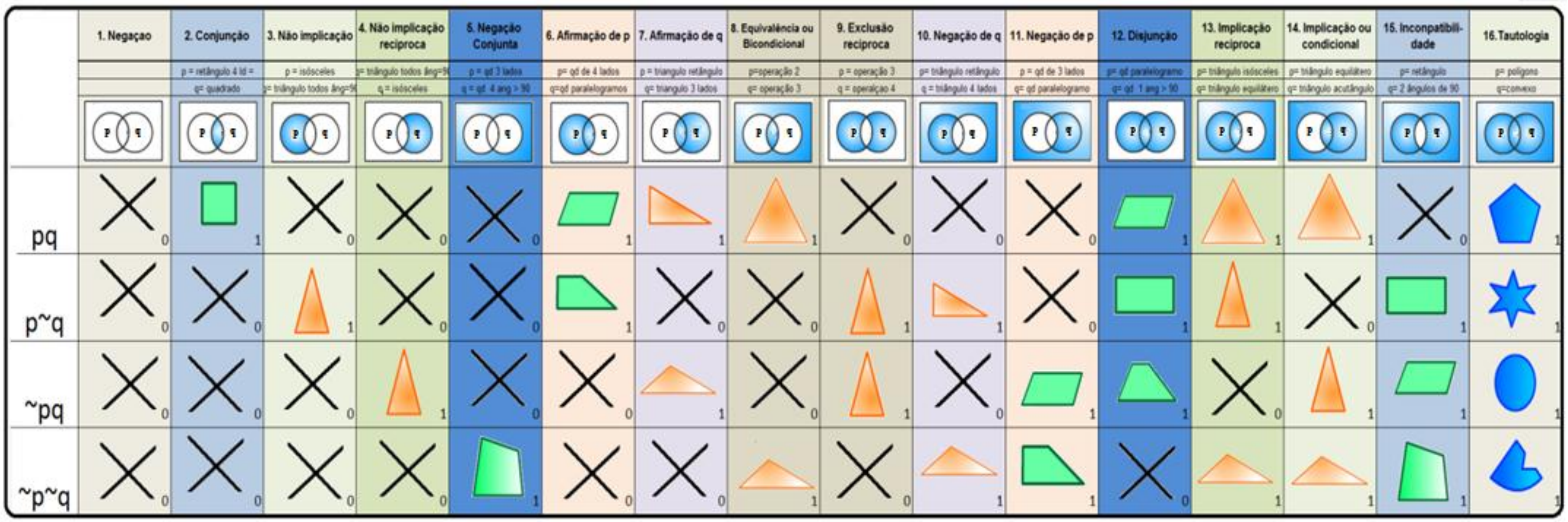
- 1 e 16
- 2 e 15
- 3 e 14
- 4 e 13
- 5 e 12
- 6 e 11
- 7 e 10
- 8 e 9

9) Exclusão reciproca	10) Negação de q	11) Negação de p	12)Disjunção	13)Implicação reciproca	14) Implicação	15) Incompati-bilidade	16) Tautologia
b+c	b+d	c+d	a+b+c	a+b+d	a+c+d	b+c+d	a+b+c+d
pvvq	$\bar{q}$[p]	$\bar{p}$[q]	pvq	pCq	pƆq	p/q	p*q
$(p\ .\bar{q})v(\bar{p}.q)$	$(p\ .\bar{q})v(\bar{p}.\bar{q})$	$(\bar{p}.q)v(\bar{p}.\bar{q})$	$(p.q)v(p.\bar{q})v(\bar{p}.q)$	$(p.q)v(p.\bar{q})v(\bar{p}.\bar{q})$	$(p.q)v(\bar{p}.q)v(\bar{p}.\bar{q})$	$(p.\bar{q})v(\bar{p}.q)v(\bar{p}.\bar{q})$	$(p.q)v(p.\bar{q})v(\bar{p}.q)v(\bar{p}.\bar{q})$
FALSO	FALSO	FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	FALSO	VERDADEIRO
VERDADEIRO	VERDADEIRO	FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO
VERDADEIRO	FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	VERDADEIRO
FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	VERDADEIRO	VERDADEIRO

Fonte: Figura elaborada pela autora, tendo como base estudos de lógica realizados.

A seguir, apresentamos exemplos próprios de operações referentes ao estudo de polígonos, os quais construímos por não termos parâmetros de comparação, exceto os exemplos que Piaget (1976) apresenta, no campo da biologia.

Figura 3 - Exemplos das 16 operações (polígonos)



Fonte: Figura elaborada pela autora, a partir de reflexões sobre classificação de polígonos.

Legenda: a) O (X) indica ausência da figura e, portanto, representa o falso;

b) O desenho do polígono indica pelo menos uma figura existente, equivalente ao atributo verdadeiro, se comparado a figura2;

c) Cada atributo *p* e *q* e os exemplos considerados serão explicados na sequência.

Destacamos um modelo de cada operação na figura 3, no qual a primeira linha descreve o nome de cada uma das operações, a segunda e terceira linha apresentam atributos que teriam as proposições *p* e *q.* A quarta linha apresenta um diagrama representando dois conjuntos, baseados em Piaget (1976), no qual o primeiro sempre representa *p* e o segundo *q.*

Optamos por descrever as operações a partir de seus pares de inversas, baseados nos descritos de Inhelder e Piaget (1976), Piaget (1976), explicitando os exemplos destacados na figura 3. As operações e suas respectivas inversas são:

A primeira operação é a *Negação*[7] (1), cujas quatro possibilidades de associação *pq* (**a),** *p~q* **(b),** *~pq* **(c)** e *~p~q* **(d**) são falsas. Sua inversa, ou também chamada de complementar, é a Tautologia (16), que contém as quatro possibilidades verdadeiras. A *Tautologia* ocorre quando as características presentes nas proposições têm parte ligada entre si, mas, ao mesmo tempo, partes disjuntas. Ex.: em *p* (polígonos) e *q* (convexos), as quatro possibilidades são verdadeiras, pois existe *pq* (polígono convexo); existe *p~q* (polígono côncavo); existe *~pq* (não polígono convexo) e existe *~p~q* (**d,** não polígono côncavo).

A *Conjunção* (2) ocorre, na forma isolada, quando apenas *pq* é verdade e se dá quando as duas proposições têm o mesmo valor ou função. Por ex.: *p* (retângulo de 4 lados iguais) e *q* (quadrado). Já sua inversa, a operação *Incompatibilidade* (15), tem apenas essa operação como falsa, sendo composta da combinação **b**+**c**+**d**[8]**.** Nesse caso, *p* e *q* não são jamais conjuntas, mas estão unicamente presentes em uma operação sem a outra ou estão em ambas ausentes. Ex.: em *p* (retângulo) e *q* (possui dois ângulos > 90) não existe a operação *pq*, ou seja, um retângulo que tenha dois ângulos maiores que 90. Por sua vez, existe *p~q* **(b**, só retângulo**),** *~pq* **(c,** paralelogramo) que tem dois ângulos maiores que 90, e *~p~q* **(d,** quadrilátero com somente um ângulo maior que 90).

A *Não implicação* (3), ou não condicional, é a negação da condicional, verdadeira somente na operação *p~q*. Na forma isolada, é empregada pelo sujeito para provar a não intervenção de um fator possível, por exemplo, *p* (isósceles) e *q* (triângulo com todos os ângulos

---

[7] A *negação* completa desempenha o papel de operação idêntica (produto da direta com a inversa) que não modifica, ou seja, *p* ~p* = 0, como mostra Piaget (1976).

[8] É importante destacar que a operação <u>ou</u> é aditiva, assim (b+c+d) equivale à operação b <u>ou</u> c <u>ou</u> d. Já a operação multiplicativa (*pq)* equivale à operação *p* <u>e</u> *q*.

retos). Já sua inversa, a *Implicação* (14), exprime a combinação **a**+**c**+**d** e é empregada quando uma causa em *p* produz um efeito que se apresenta em *q*, portanto ocorre quando *p* Ɔ *q* (*p* contém *q*). Ex.: em *p* (triângulo equilátero) e *q* (triângulo acutângulo), existe *pq* (**a,** triângulo equilátero e acutângulo), existe *~pq* (**c,** triângulo não equilátero, mas acutângulo) e existe *p~q* (**d,** triângulo não equilátero e não acutângulo), mas é impossível existir *p~q* (**b,** triângulo que seja equilátero mas que não seja acutângulo), pois todo equilátero é acutângulo.

A *Não implicação* recíproca (4) é verdadeira apenas na operação *~pq* e ocorre de forma similar à *Não implicação*, desde que os valores das proposições estejam invertidos. Sua inversa, a *Implicação recíproca* (13), compreende as operações **a+b+d** e ocorre de forma similar à *implicação*, desde que *p* C *q*, ou seja, inversão dos termos.

A *Negação conjunta* (5), na forma isolada, possui exclusivamente a operação *p~q* (**d)** como verdade e exprime a ausência simultânea das duas causas consideradas como, por exemplo, *p* (quadrilátero de 3 lados) *e q* (quadrilátero com 4 ângulos maiores que 90). A *Disjunção* (12) tem as operações **a+b+c** como verdadeiras, exprime um caso em que uma ou outra afirmação é verdadeira (mesmo que disjunta), ou ambas juntas são verdadeiras. Ocorre quando um efeito pode ser devido a duas causas que atuam independente entre si ou, então, conjuntamente. Ex.: em *p* (quadriláteros paralelogramos) e *q* (quadrilátero que possua pelo menos um ângulo > 90), então existe *pq* (**a,** paralelogramo com ângulo maior de 90), existe *p~q* (**b,** paralelogramo retângulo), existe *~pq* (trapézio), mas não existem *~p~q* (quadriláteros não paralelogramos que não tenham pelo menos um ângulo maior que 90)[9].

A *Afirmação de p* (6) tem as operações **a+b** como verdadeiras. Equivale a afirmar *p* tanto para *q* verdadeiro ou *q* falso. Assim o fator suposto em *p* não é determinante ou não intervém em *q*. Ex: *p* (quadrilátero de 4 lados) e *q* (quadrilátero paralelogramo), nesse caso existem as operações: *pq* (**a,** quadrilátero de 4 lados sendo paralelogramo); *p~q* (**b,** quadrilátero de 4 lados trapézio); mas não existem as operações *~pq* nem *~p~q* , visto que não existe quadrilátero que não tenha 4 lados independente do outro ser ou não paralelogramo. A *Negação de p* (11) se dá de

[9] Se não é paralelogramo, não pode ser retângulo (todo retângulo é também um paralelogramo e este tem todos os ângulos iguais a 90º). Assim, restam quadriláteros que podem ter ângulos maiores e menores que 90º. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero corresponde a 360º, não existem quadriláteros cujos ângulos sejam todos agudos. Então, quando houver um ângulo menor que 90º, será preciso outro maior que 90º para equilibrar, o que confirma a impossibilidade da operação **d,** nesse caso.

forma inversa quando se parte de uma proposição *p* que não existe, como, por exemplo, *p* (quadrilátero de 3 lados) e *q* (quadrilátero paralelogramo).

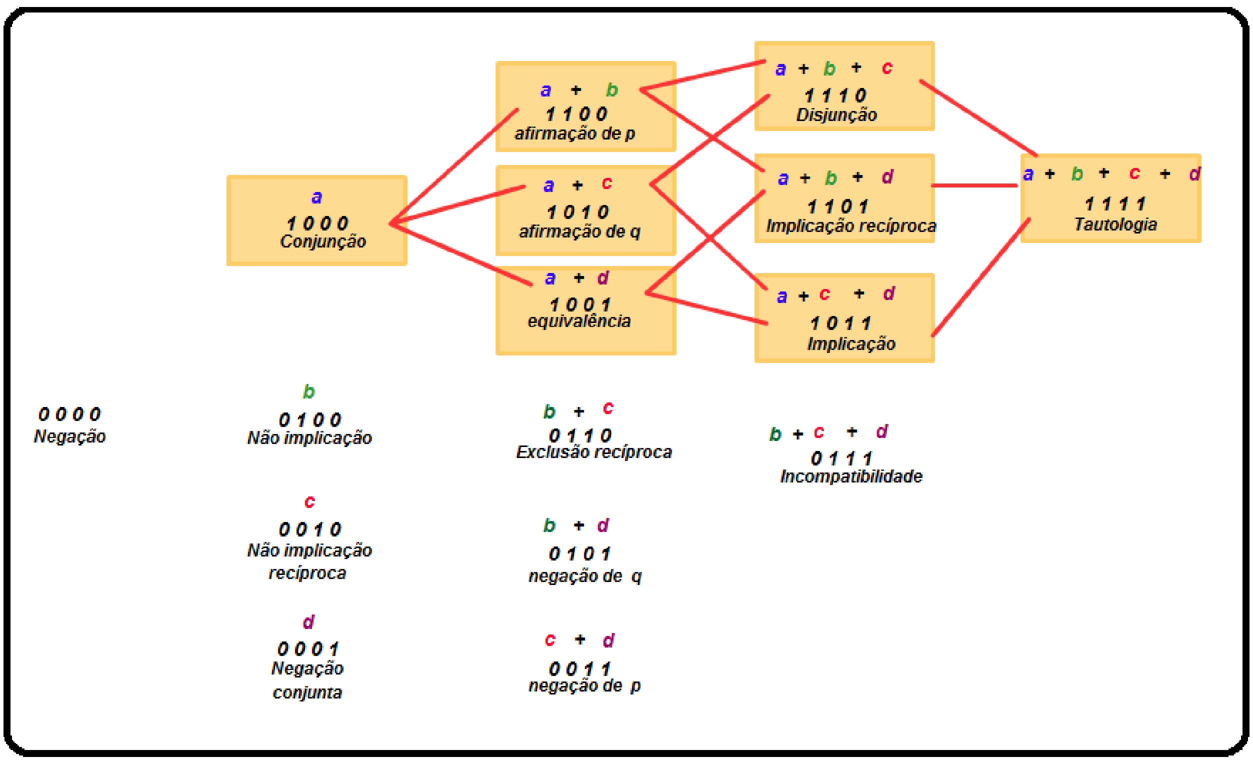
A *Afirmação de q* (7) tem as operações **a**+**c** como verdadeiras. Ex.: em *p* (triângulo retângulo) e *q* (triângulo de 3 lados), existem as seguintes operações: *pq* (**a,** triângulo retângulo com 3 lados); *~pq* (**c,** triângulo não retângulo de 3 lados); mas não existem as operações *p~q* nem *~p~q* , visto que não existe triângulo que não tenha 3 lados, independente de o outro ser ou não um triângulo retângulo. A *Negação de q* (10) tem como verdadeiras as operações **b**+**d**. Vai ocorrer de forma similar à operação anterior, quando se parte de uma proposição *q* que não existe como, por exemplo, *p* (triângulo retângulo) e *q* (triângulo de 4 lados).

A *Equivalência* (8) ou *Bicondicional* ocorre quando as operações **a**+**d** são verdades e não são uma identidade nem uma igualdade, mas apenas a afirmação de que duas proposições são sempre verdadeiras ou falsas em conjunto, correspondendo ao produto de uma *implicação* recíproca por uma *implicação*. Se realizarmos, por exemplo, a multiplicação (operação **e** entre 13 e 14 da tabela), nos exemplos dados *p* Ɔ *q e p* C *q*, teríamos: *p* (triângulos equiláteros e acutângulo) e *q* (triângulos isósceles e equiláteros). Nesse caso, existe *pq* (**a,** triângulo que é ao mesmo tempo equilátero, isósceles e acutângulo) e existe *~p~q* (**d,** triângulo que não tem nenhum dos atributos ao mesmo tempo). Contudo, não existe *p~q* nem *~pq*, visto que não é possível ser equilátero e não ser equilátero ao mesmo tempo, condição que pertence às duas proposições. A sua inversa é a *Exclusão recíproca* (9), a negação da equivalência, cujas operações **b**+**c** são verdades. Consiste na negação da equivalência não no produto, mas na adição de duas não implicações, *p~q* ***ou*** *~pq* (operação **ou** entre 3 e 4 da tabela).

As operações que contêm uma única combinação são as seguintes: a *conjunção* (**a**) ou (*p * q*); a *não implicação* (**b**) ou (*p * ~q*); a *não implicação recíproca* (**c**) ou (*~p * q*); e a *negação conjunta* (**d**) ou (*~p * ~q*), como mostra a segunda coluna da figura 4. É interessante destacar que cada uma delas pode se apresentar em dois sentidos: um particular, na forma isolada, quando constitui uma única proposição verdadeira; outro geral, ligado às demais operações. Podemos constatar que as quatro primeiras composições, que correspondem às letras **a, b, c** e **d** (da figura 4), podem ser combinadas duas a duas (**a**+**b**). A seguir, combina-se a segunda com a anterior (**a**+**b**+**c)**, por exemplo. Por fim, encontramos a combinação das quatro primeiras (**a**+**b**+**c**+**d)**.

Assim, uma única proposição, por exemplo, a *conjunção* **a,** se encontra em 7 classes superiores, definidas por Piaget (1976), pois está na: (a) *afirmação de p*, (b) *afirmação de q*, (c) *equivalência*, (d) *disjunção*, (e) *implicação recíproca*, (f) *implicação*, (g) *tautologia*, como mostra a figura 4. Esse fato também pode ser visualizado, a partir dos conjuntos da figura 3, pois a interseção dos dois conjuntos, que representa a *conjunção*, pode ser vista nas demais operações descritas.

Figura 4 - Destaque de uma composição sobre proposições, descritas hierarquicamente.

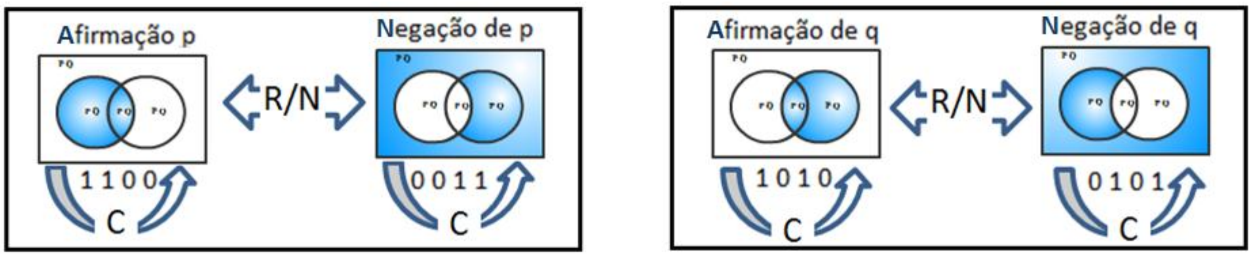


Fonte: Figura elaborada pela autora, a partir dos registros de Piaget (1976).

Vários estudos de Piaget indicam que o adolescente torna-se capaz de combinar as operações de forma que possa compreender cada uma delas, podendo distinguir o INRC. Em outras palavras, partindo de uma proposição e identificando-a como uma identidade (I), existe sempre a operação inversa ou negação (N); existe a operação recíproca (R), que atua de forma equivalente a essa operação; e existe a correlativa (C), que representa a inversa da recíproca. Consideramos importante destacar todos os grupos INRC, mostrando os três casos possíveis:

a) Primeiramente, existem quatro operações em que as correlativas (C) são idênticas entre si e as recíprocas (R), idênticas às inversas ou negativas (N), como mostra a figura 5. Constituem operações simples compostas: pela *afirmação de p* (p[q]), pela *negação de p* (~p[q]), pela *afirmação de q* (q[p]) e pela *negação de q* (~q[p]). Inhelder e Piaget (1976) destacam que são graças a essas operações que os sujeitos passam a verificar quando um fator suposto não intervém ou não é determinante na produção de um fenômeno.

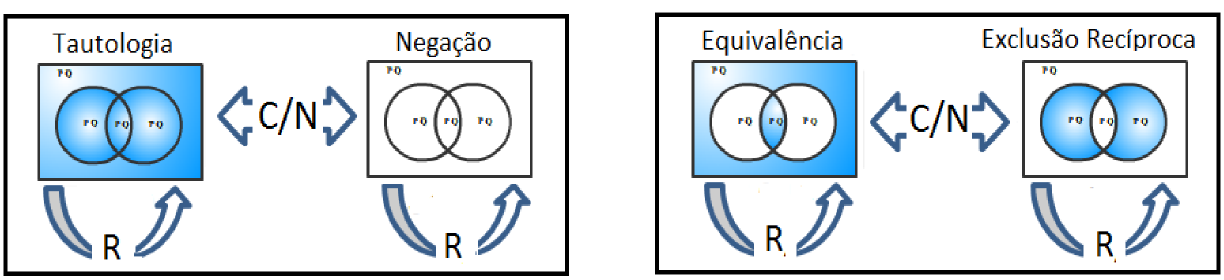
Figura 5 - INRC (operações de simples afirmação e negação de p e q)



Fonte: Figura adaptada pela autora, a partir dos desenhos de Piaget (1976).

b) Existem outras quatro operações cujas recíprocas (R) são idênticas entre si e as correlativas (C) idênticas às negativas (N) ou inversas. São constituídas pelas operações simples de equivalências multiplicativas, positivas - *tautologia* (p * q) ou negativas - *negação* (0) e as equivalências aditivas, positivas - *equivalência* (*p* ≅ *q*) ou negativas - *exclusão recíproca* (*p* w *q*), como mostra a figura 6.

Figura 6 - INRC (equivalência e tautologia)



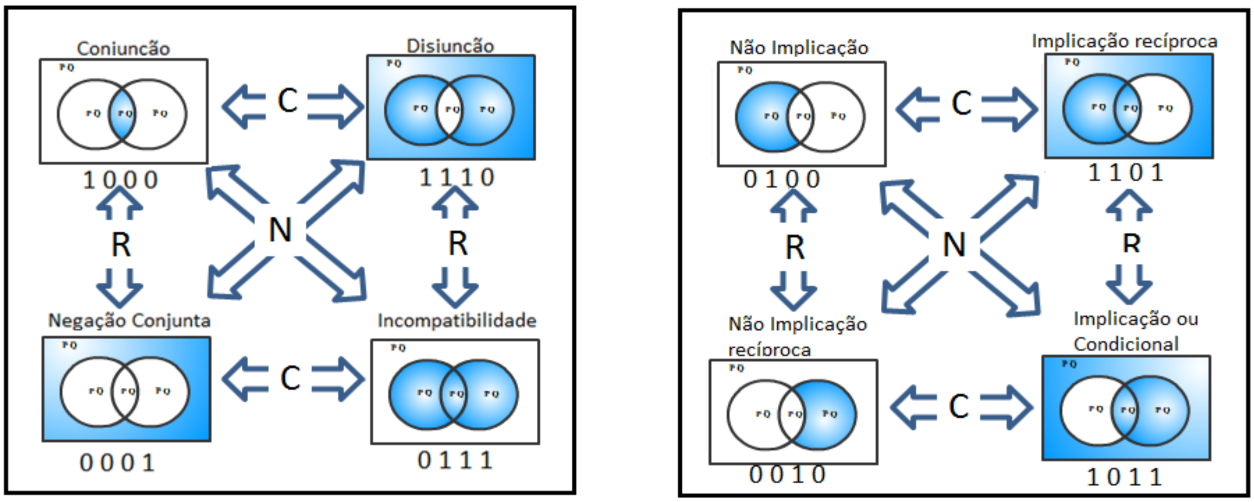
Fonte: Figura adaptada pela autora, a partir dos desenhos de Piaget (1976).

c) Existe também um conjunto de oito operações, dois grupos de quatro, que apresentam negativas (N), correlativas (C) e recíprocas (R), distintas umas das outras. "São, portanto, essas oito operações que desempenharão papel decisivo (isto é, construtivo) na dedução" (PIAGET, 1976, p. 255). São elas capazes de fechar, em um grupo INRC[10], pois cada uma

[10] Em um exemplo clássico de INRC, o equilíbrio da balança, dos estudos de Inhelder e Piaget (1976), seria assim: a) **I** (*conjunção*) = (*p* * *q*): aumentar ao mesmo tempo o peso e a distância. b) **N** (*incompatibilidade*)= (*~p* * *~q*) v (*p* * *~q*) v (*~p* * *q*): desfazer a ação, diminuindo peso e distância; ou aumentar peso e diminuir a distância; ou diminuir

das operações pode levar a outra e vice-versa, com propriedades distintas, como mostra a figura 7.

Figura 7 - INRC (operações completas)



Fonte: Figura adaptada pela autora, a partir dos desenhos de Piaget (1976).

O primeiro subgrupo, apresentado na figura 7, expressa o pensamento combinatório, capaz de considerar todas as possibilidades de um fator destacado, contendo as operações: *conjunção* (*p * q), incompatibilidade* (*p / q*), *disjunção* (*p v q)* e a *negação conjunta (~p * ~q*). Se a *conjunção* (*p * q*) serve para provar que duas proposições têm o mesmo valor ou função, sua reciproca, a *negação conjunta* (*~p * ~q*), indica ausência simultânea das duas causas consideradas. Já a correlativa, a *disjunção* (*p v q*), serve para mostrar uma operação em que um fator existe sozinho, ou somente o outro fator existe, ou existem ambos juntos; e a recíproca da *disjunção*, a *incompatibilidade* (*p / q*), serve para mostrar a ausência dessa combinação de fatores.

O segundo subgrupo, da figura 7, trata das classes, subclasses e suas implicações, contendo as operações: *não implicação* (*p * ~ q*), *implicação* (*p Ɔ q*), *implicação recíproca* (*p C q*) e *não implicação recíproca* (*~p * q*). A *implicação* indica uma causa em *p* que produz um efeito que se observa em *q*, portant*o p Ɔ q e*, na sua *implicação recíproca*, é a causa em *q* que produz um efeito visto em *q*, portanto *p C q*. A correlativa da *implicação*, a *não implicação*

---

peso e aumentar a distância; c) **R** (*negação conjunta*)=(*~p * ~q*): compensar I, aumentando, ao mesmo tempo, o peso e a distância do outro lado da balança. d) **C** (*disjunção*)= (*p * q*)v (*p * ~q*) v (*~p * q*):anular R da mesma maneira que N anula I. Na figura 2, o INRC está destacado pelas mesmas cores, sendo que os dois tons de azuis e verdes apresentam as oito proposições de papel decisivo na dedução.

recíproca, serve para provar a não intervenção de um fator *p* em *q*, e a *não implicação recíproca* à não intervenção de um fator *q* em *p*.

Assim, enquanto a *disjunção* capacita o indivíduo a compreender todas as causas disjuntas que atuam sobre o fenômeno, a *implicação* capacita-o a compreender os fatores implicados entre si. Piaget (1993) destaca que todos os indivíduos são capazes de chegar ao nível do pensamento formal, desde que o meio social e a experiência adquirida proporcionem para o sujeito estímulo intelectual necessário para construção do conhecimento.

Consideramos interessante, também, explicitar as relações infralógicas, pois elas estão relacionadas ao espaço. Nesse caso, compreendemos que envolvem a dimensão deste trabalho e são relevantes, pois se trata de um estudo sobre a geometria.

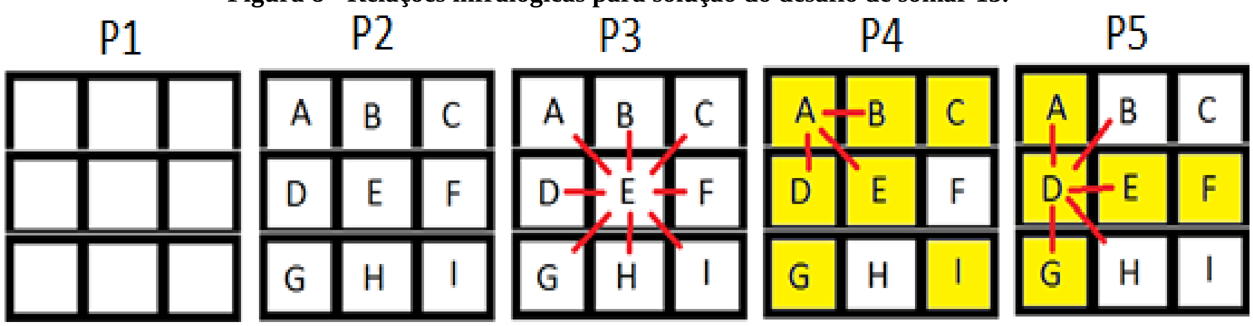
1.4.2 Operações infralógicas

As operações infralógicas referem-se ao espaço temporal e consistem, basicamente, em compor o objeto através de seus elementos. Assim, se queremos saber qual a medida de uma área ou do ângulo entre duas paredes, tratamos de questões quantitativas; mas, quando interrogamos sobre quais estados ficam entre Mato Grosso e Rio Grande do Sul, ou ainda, se o livro está aberto ou fechado, estamos considerando questões qualitativas, ligadas à infralógica.

Os estudos de Piaget e Inhelder (1993) indicam uma ordem de sucessão que vai das relações topológicas iniciais às relações projetivas e, depois, às métricas. Mostram que as relações elementares, prévias da construção operatória do espaço, dividem-se em: **vizinhança**, a mais simples de toda estrutura perceptiva, equivalente à proximidade dos elementos percebidos em um mesmo campo; **separação**, capacidade de dissociar dois elementos ou fornecer um meio de distingui-los; **ordem**, sucessão espacial estabelecida, ao mesmo tempo, entre vizinhos e separados, e é através da relação de ordem que se constitui a relação de simetria; **circunscrição** ou envoltório, cujo elemento B é percebido como estando entre A e C, o que constitui uma circunscrição a uma dimensão; **continuidade**, capacidade de verificar em que sentido o conjunto de um campo perceptivo constitui um campo espacial contínuo, ou seja, um conjunto de elementos (partes de uma figura), formando um todo.

Mesmo que elementares, as relações acima estão presentes no cotidiano de problemas matemáticos, sobretudo os que têm no seu bojo figuras ou desenhos relacionados. No período de construção deste trabalho, foi proposto[11] o seguinte desafio, que se mostrou elucidativo, a fim de colaborar no entendimento das relações apresentadas: preencher os nove quadrados (figura 8/P1), com os números distintos de 1 a 9, de tal forma que as linhas horizontais, verticais e diagonais somassem 15, denominado por alguns de quadrado mágico. Na figura 8, parte 1, observamos um quadrado maior formado por nove quadrados menores que, de forma **disjunta,** devem ser preenchidos. É preciso ver o todo e cada elemento em s**eparado**. Cada pequeno quadrado estabelece uma relação de **vizinhança** com os demais. O quadrado central (figura 8, parte 3) é vizinho de todos. Já cada um dos cantos (ACGI) contém três vizinhos (**v**), ou seja: (A **v** B, E e D) e, de forma simétrica, observamos essa mesma relação nos outros cantos, como mostra a figura 8, parte 4.

Figura 8 - Relações infralógicas para solução do desafio de somar 15.



Fonte: Figura elaborada pela autora, a partir de reflexões para resolução do desafio (quadrado mágico).

Assim, ao definir a posição central (E), os cantos (ACGI) ou o meio das laterais (BDFH), chegamos a um tipo de **ordenação** - organização dos elementos. Ora, cada um dos elementos do meio das laterais está entre os cantos (Ex.: B está entre A e C), o que aponta para uma relação de **circunscrição**. Podemos constatar a quantidade de vizinhos mostrados na (figura 8, parte 5), que possui o meio das laterais (BDFH), são cinco (Ex: D **v** A, B, E, H e G).

Observar a **continuidade** é essencial, nesse caso, pois cada um dos cantos está contido em três trincas diferentes (Ex: o canto A, está contido nas trincas ABC, AEI, ADG) e assim ocorre com os demais cantos. Enquanto isso, o meio das laterais (BDFH), apesar de possuir 5 vizinhos,

[11] Um aluno da universidade trouxe o problema para ser resolvido, visto que discutíamos aprendizagem da lógica. Na resolução do desafio, compreendemos as operações lógicas e infralógicas relacionadas com a solução.

só estão contidos em duas trincas da solução (Ex.: o meio da lateral D está contido, somente, na trinca ADG e na trinca DEF), com seus respectivos simétricos. A solução também demanda operações lógicas.

Utilizando a combinatória, podemos considerar todas as possibilidades de formar trincas, tirar as impossibilidades formadas por números repetidos e considerá-los disjuntos com todas as *conjunções* possíveis, excluindo-se as recíprocas. A fim de compreender as operações, é preciso pensar nas possibilidades de forma ordenada, por isso optamos por apresentar as trincas ordenando-as e consideramos os números distintos do maior para o menor. Assim, iniciando com 9, temos duas trincas 951 e 942. Se iniciar com 93, seria necessário outro 3 para somar 15 e, como os números não podem repetir, chegar-se-ia a uma impossibilidade. As trincas com 8 seriam: 861, 852 e 843. Com 7, as possibilidades seriam 762 e 753, já com 6 só haveria a trinca 654, pois a partir disso as outras possibilidades são recíprocas às já apresentadas (Ex.: 591 ≅ 951; 582 ≅852). Assim, todas as trincas possíveis seriam: 9**5**1, 942, 861, 8**5**2, 843, 762, 7**5**3, 6**5**4. É possível verificar que o número que mais se repete nas trincas disjuntas é o **5.** Também encontramos **5** quando dividimos 15, soma total, por 3. Assim, é o **5** que deve ocupar a casa central, pelas relações infralógicas e lógicas vistas. Depois, observamos que os números pares aparecem três vezes nas trincas e, portanto, devem ocupar os cantos, enquanto os ímpares repetem apenas duas vezes devendo ocupar o meio das laterais. Não existe uma única solução correta, no entanto há um equilíbrio que se forma para a solução, pois, no extremo oposto da diagonal em que estiver o 8, deve estar o 2; enquanto, no extremo oposto do 6, deve estar o 4. A partir disso, basta completar o meio das laterais com os números ímpares correspondentes.

Ainda sobre as operações infralógicas, os estudos de Piaget e Inhelder (1993) as relacionam com a topologia elementar, as relações projetivas e o espaço euclidiano, como destaca o quadro 1. As relações topológicas aparecem antes das projetivas e as euclidianas métricas são as últimas. Piaget e Inhelder (1993), Borges (2005), Leivas (2008), entre outros, indicam que as relações topológicas são de natureza qualitativa; e a geometria projetiva é mais qualitativa que quantitativa; por sua vez, é na geometria euclidiana que as relações quantitativas (métricas) são mais usuais. Borges (2005) e Leivas (2008) destacam que as questões qualitativas do campo topológico fazem parte dos estudos recentes da geometria e envolvem questões relacionadas à vizinhança, interior-exterior, fora-dentro, aberto-fechado, longe-perto, contínuo-descontínuo, que costumam vir associadas a outras como proximidade, ordem, etc. As operações estão organizadas na tabela das mais elementares às mais elaboradas.

Quadro 1 - Operações sobre relações infralógicas

	Topologia Elementar	Relações Projetivas	Espaço Euclidiano
I-	Partição e adição primitiva	Adição e subtração dos elementos projetados	Adição e subtração de elementos
II	Ordem de colocação	A ordem retilínea	Colocações e deslocamentos
III	Reciprocidade das vizinhanças	A reciprocidade das perspectivas	Reciprocidade das referências
IV	Relações simétricas de intervalo	As relações simétricas de intervalo	Ajustes dos intervalos ou distâncias
V	Multiplicação biunívoca de elementos	Multiplicação biunívoca de elementos	Multiplicação biunívoca dos elementos
VI	Multiplicação biunívoca de relações	Multiplicação biunívoca de relações	Multiplicação biunívoca de relações de colocação e deslocamento
VII **VIII**	Multiplicação co-unívocas de elementos ou relações	Multiplicação co-unívocas de elementos e relações	Multiplicação co-unívocas de elementos e relações
	Multiplicação co-unívocas de relações	Multiplicação co-unívocas de relações	Multiplicação co-unívocas das relações

Fonte: Quadro elaborado pela autora, a partir dos registros de Piaget e Inhelder (1993).

Observamos assim, que o adolescente possui peculiaridades de comportamento e ações. Os atuais, os nativos digitais, têm a tecnologia como aliada, dado o interesse aguçado para compreender cada vez mais o espaço digital, que faz parte do seu universo. Verificamos, sobretudo, que no período da adolescência há mudanças nas estruturas mentais internas, capacitando o sujeito a dominar a lógica formal e o pensamento infralógico. Assim, compreendemos que o estudo das operações formais, lógicas e infralógicas, possibilita uma verificação da elaboração e reelaboração de conceitos. Nesse sentido, consideramos importante detalhar as operações infralógicas. Como, entretanto, essas operações estão mais voltadas ao estudo do espaço, consideramos mais adequado seu exame no próximo capítulo, quando vamos nos deter especificamente em geometria. Tema, esse, fundamental para a tese, visto que nosso foco é o estudo de polígonos, que se situa dentro desse campo do saber.

2 GEOMETRIA E ESTUDO DE POLÍGONOS

A geometria é um ramo da matemática que tem por objeto de estudo o espaço e suas formas. A palavra *geometria* (do grego *geo* = terra + *metria* = medida) significa "medir terra". Optamos por apresentar, a seguir, um breve histórico sobre os estudos geométricos, parte da história da geometria no Brasil, as operações infralógicas, o pensamento geométrico e algumas noções referentes a polígono, foco do nosso estudo.

2.1 Breve histórico

A geometria atinge o patamar de "conhecimento científico" na Grécia Antiga, como mostram Eves (1992), Cyrino (1986), Diligenti (2006), Bicudo (2009), entre outros. Todos destacam que Tales (600 a. C), Pitágoras (540 a. C) e Euclides (300 a. C) foram alguns nomes de maior relevância no período grego clássico. Tales de Mileto foi o pioneiro em estudos geométricos demonstrativos. Pitágoras trabalhou com a organização de proposições emergentes de conhecimentos e desenvolveu as propriedades das retas e paralelas. As sistematizações de Tales e dos pitagóricos, deram base para Euclides escrever sua principal obra, "Os elementos" (um legado acessível em nossos dias), que contém três tipos de princípios: definições, sentenças apresentadas como verdades; postulados, sentenças não provadas, consideradas verdadeiras por serem óbvias; e axiomas, noções comuns e claras cuja veracidade é garantida pela evidência.

Tratando da geometria euclidiana, Eves (2004) destaca geômetras gregos como: Apolônio (255 a. C.) que introduziu termos como elipse, parábola e hipérbole, através dos estudos de secções cônicas; Herão (75 a. C.), que desenvolveu trabalhos práticos em relação à medida da área de diversos quadriláteros; Hiparco (140 a. C.), Menelau (100 d. C.) e Ptolomeu (150 d. C.) que trataram da trigonometria. Hiparco expôs a divisão do círculo em 360º, dividindo o diâmetro do círculo em 120 partes, criando o que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica; Ptolomeu criou a tábua de cordas que apresenta os senos dos ângulos de 0º a 90º; Menelau foi o primeiro a escrever a definição de triângulos esféricos e, através de deduções, encontrou os recíprocos para os senos a partir de 90º.

A geometria projetiva está presente desde o século XV, haja vista a pretensão dos artistas renascentistas de que seus quadros tivessem uma aparência natural. Eves (2004), contudo, esclarece que ela só alcança o patamar de estudos empíricos com a publicação sobre as seções cônicas de Desargues, em 1639, em que foram apresentadas ideias de projeção; e com as tentativas de Pascal (1648), seu discípulo, de inserir a projeção central na geometria. Entretanto, foi somente com a publicação do tratado das propriedades projetivas de Poncelet (1822) que nasce o marco da geometria projetiva. A partir desses estudos, os geômetras classificam a geometria em duas categorias: as métricas, que intervêm nas medidas de distância e ângulo; e as descritivas, que tratam das relações e posições dos elementos geométricos entre si.

Ainda na geometria euclidiana, Euclides (2009) define paralelas como sendo retas que, estando num mesmo plano e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos quatro lados, em nenhum se encontram. O quinto postulado afirma que "[...] caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado quais estão os menores do que dois retos e [...]" (EUCLIDES, 2009, p. 98). Há indícios de que essa ideia causou problemas e que as tentativas de deduzir os postulados dessa teoria, em relação aos demais postulados de Euclides, ocuparam os geômetras por mais de dois milênios, tendo alcance na matemática atual, quando foram obtidas provas consistentes da geometria não euclidiana. Assim, com o tempo, a geometria demonstrativa (iniciada com Tales de Mileto) tornou-se um estudo do espaço físico (das formas, tamanhos e relações entre objetos). Com o advento da geometria analítica (cartesiana), concebida por Descartes (1637) e Fermat (1629), o espaço passou a ser visto como uma coleção de pontos, mas, ainda o local onde as figuras poderiam ser comparadas (EVES, 2004).

Já com a geometria não euclidiana, se aceita que há mais de um espaço a ser concebido, que foi desenvolvida por três matemáticos: Lobachevsky (1829), Bolyai (1832) e Gauss (1800). Entretanto, o assunto ganhou destaque com as publicações de Riemann que "[...] sugeriu uma geometria em que duas retas nunca são paralelas e a soma dos ângulos de um triângulo é maior que dois ângulos retos" (EVES, 1992, p.47). Surgem, assim, estudos aplicados ao espaço curvo, como a geometria esférica e hiperbólica, com importantes aplicações práticas na navegação e astronomia.

Eves (1992) indica que o termo "topologia" foi introduzido por Listing (aluno de Gauss), em 1847. O autor declara que Poincaré (1895) é quem tem lugar de destaque nos estudos topológicos e que, juntamente com Möbius (1865) e Riemann (1851), defenderam a noção de que uma figura geométrica é formada de por um conjunto infinito de partes fundamentais, ligadas entre si. Os estudos topológicos iniciaram como um ramo da geometria, mas, durante o século XX, houve tantas generalizações que hoje a topologia é considerada como uma parte da matemática que se divide em três: topologia geral, algébrica e geométrica. No contexto geométrico, a topologia consiste no estudo "[...] relativo às formas e às maneiras que as superfícies podem assumir ao serem puxadas, esticadas, amassadas, sofrer múltiplas transformações [...]" (KOBAYASHI, 2001, 39), sem que sejam rompidas suas fronteiras.

2.2 Geometria no Brasil

Valente W. (1999) esclarece que os estudos de geometria, no Brasil, foram alavancados pela necessidade de preparo militar, a partir de 1648, pois soldados sem conhecimento matemático apresentavam dificuldades em acertar alvos, realizar leitura de mapas e organizar o material de artilharia. Assim, em 1699, foi criada a aula especial de fortificações com objetivo de ensinar a desenhar e a trabalhar no forte. É da década de 1730 o registro do primeiro livro brasileiro sobre estudos de geometria - *Exames de Artilheiros e Exames de Bombeiros*. Foi a época em que o ensino militar tornou-se obrigatório a todo oficial. A necessidade dessa classe ter noções geométricas, impulsionou estudos matemáticos que passaram a ser incorporados nos currículos oficiais. O conteúdo geométrico tratava de noções sobre ponto, linha, ângulo, posição na reta, círculos, circunferências, triângulos, proporcionalidade, parábolas e volumes.

Em 1824, com o estabelecimento da gratuidade do nível primário, as tentativas de incluir as noções de geometria, além das quatro operações fundamentais, foram infrutíferas, primeiramente por não haver professores primários habilitados e, depois, por "[...] não ser um conhecimento escolar solicitado para o ingresso em nenhuma instituição secundária" (VALENTE W., 1999, p.113). Assim, a geometria ficou reservada ao ensino secundário, sobretudo porque os cursos de Direito passaram a exigir esse conhecimento. Em 1889, tornou-se obrigatório[12] o "[...] ensino do desenho técnico e geométrico em todo o país, haja vista o caráter científico e positivista desses saberes, expressão do rigor e da precisão" (KOPKE, 2006, p.13). Portanto, até a década de 30, permeou o período que Fiorentini (1995) denominou de tendência **formalista clássica**,

[12] Rui Barbosa foi um grande defensor da inserção do desenho na escola, destacando o sucesso de outros países.

segundo a qual o ensino foi pautado, de um lado, no modelo euclidiano, ou seja, na sistematização lógica do conhecimento matemático com base em axiomas, definições e postulados e, de outro, na concepção platônica, caracterizada por uma visão estática, a-histórica e dogmática das ideias, como se elas existissem independentemente do homem. O ensino da geometria era obrigatório com ênfase inclusive na trigonometria. Pavanello (1993) e Kopke (2006) indicam que foi uma época de excessiva geometrização.

Fiorentini (1995) destaca que a década de 30 foi marcada por uma tendência **empírico-ativista.** Essa época tornou-se um marco para a matemática a partir da reforma educacional (Francisco Campos), mesmo porque, como destacam Pavanello (1989), Fiorentini (1995) e Kopke (2006), foram criadas as primeiras instituições[13] de ensino, destinadas à formação dos professores dos cursos secundários. Também houve preocupação com a organização do currículo, que resultou na divisão do curso secundário em dois ciclos[14]: 5 anos (integral) e 2 anos (preparação profissional). Destacou-se um movimento ativista[15], no qual passou-se a conceber o aluno como ativo e a valorizar métodos desenvolvidos em pequenos grupos. Essa tendência serviu para formular diretrizes metodológicas e unificar o ensino da matemática que ficou composta no currículo por aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Pavanello (1989/1993) e Kopke (2006) esclarecem que a Geometria passou a ser ensinada em todo o curso secundário, composta de desenho (com ramificações na indústria) e o estudo dedutivo da geometria.

Em abril de 1942, a lei orgânica do ensino secundário reestruturou o ensino, deixando o ginásio com 4 anos e o científico com 3 anos. Nesse contexto, a geometria foi organizada com o mesmo programa estabelecido na reforma de 30: abordada intuitivamente nas duas primeiras séries do ginásio e, dedutivamente, nas duas últimas. No científico, estava presente em todos os anos, além da inclusão de estudos de trigonometria a partir do 2º ano. No entanto, as críticas aos programas extensos levou o ministro da educação, em 1951, a incumbir o Colégio Pedro II de elaborar um currículo mínimo. A geometria foi então redistribuída e passou a não constar “[...] no programa da 2ª série do ensino ginasial e, no 2º ciclo, ficou toda concentrada ao 1º ano. A

[13] São criadas as Universidades de São Paulo e do Rio de Janeiro, com elas, as primeiras faculdades de Filosofia e Ciência. Em 1934 passa a funcionar, em São Paulo, o curso de matemática.
[14] Estamos utilizando a nomenclatura da época, e, nesse caso, o 2º ciclo corresponde ao ensino médio.
[15] Participaram desse movimento professores de destaque da área de matemática como Roxo, e mais tarde, Melo e Souza (Malba Tahan), Irene de Albuquerque, Manoel Jairo Bezerra e Munhoz Maheder.

geometria analítica passou a ser desenvolvida no 3º ano do 2º ciclo, sob o nome de função linear." (PAVANELLO, 1989, p. 159). O programa não diferiu substancialmente do anterior, apenas se distinguiu pela distribuição dos conteúdos nas séries.

A educação matemática passou por uma fase de mobilização, em virtude dos Congressos Brasileiros de Ensino da Matemática (1955, 1957, 1959, 1961, 1966), ocasião em que surgiu o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Fiorentini (1995) chamou esse período de **formalista moderno**, pois houve a intenção de unificar os três campos fundamentais da matemática (Teoria dos conjuntos, Estruturas algébricas e Funções), dando ênfase aos aspectos estruturais e lógicos. A legislação vigente não condizia com a prática da época, como analisa Silva (2008), visto que havia uma imposição da geometria dedutiva e os debates do movimento estiveram relacionados às questões didáticas. Leme da Silva (2010) esclarece que esses debates giravam em torno do dualismo entre a geometria intuitiva e dedutiva. O movimento serviu para propor um ensino da geometria a partir de outras abordagens, como das transformações geométricas desenvolvidas no plano vetorial. A partir da análise de livros didáticos, Leme da Silva (2010) classifica essa década como momento inicial das primeiras apropriações das propostas defendidas no MMM. Kaleff (1994), Pavanello (1993) e Silva (2008) indicam que o movimento serviu para romper com a geometria clássica, pois "[...] levou matemáticos a desprezarem a abrangência conceitual e filosófica da geometria euclidiana, reduzindo-a a um exemplo de aplicação da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra Vetorial" (KALEFF, 1994, p. 20).

Do final da década de 60 até o final da década de 70, surgiu o **tecnicismo**, termo indicado por Fiorentini (1995), em função do entendimento de que a escola teria a finalidade de preparar o indivíduo para a sociedade. Leme da Silva (2010) destaca que é a década marcada por avaliações e críticas do MMM. O período foi caracterizado pela ênfase às tecnologias do ensino e, nesse contexto, houve redução da matemática a um conjunto de técnicas e regras, sem preocupação com justificativas ou fundamentações. Centrou-se no behaviorismo e nas pesquisas de Skinner, que inspiraram os primeiros trabalhos com o computador. Pavanello (1989) esclarece que a ideia central foi trabalhar a matemática do ponto de vista das estruturas, com a linguagem simbólica e a teoria dos conjuntos, orientação posta em prática no tocante à álgebra e à aritmética, mas não à geometria. Em geometria, optou-se por acentuar nos livros as noções de figuras geométricas e de intersecção de figuras, para que fossem trabalhadas segundo uma abordagem intuitiva, sem preocupação de sistematizações empiricamente elaboradas. Zuin (2002) mostra que, em 1961, surgiu a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a qual propôs tirar o desenho das disciplinas obrigatórias, dando sinais claros de desprestígios à geometria.

Foi a partir da década de 60 e 70, que, no Brasil, observou-se a influência das ideias construtivistas, concebendo a matemática como uma construção humana. Os conteúdos passaram a ser meios úteis, mas não indispensáveis, para a construção das estruturas básicas da inteligência. Fiorentini (1995) destaca que, a partir da década de 60, apoiada nos estudos de Freire, surgiu a tendência socioetnocultural, e, em matemática, decorrente desse modelo, destacou-se a etnomatemática[16]. A matemática deixou de ser vista como conhecimento pronto e acabado e passou a ser concebida como saber prático, relativo, não universal e dinâmico, produzido histórica e culturalmente nas diferentes práticas sociais.

As alterações curriculares dessa época, segundo Pavanello (1989), deram ênfase a um curso intuitivo para as quatro séries iniciais do primeiro grau, envolvendo estudos de medidas; introdução à teoria dos conjuntos, na 5ª série (6º ano); estudo da geometria pelas transformações, a partir da 7ª série (8º ano)[17]; e a substituição da disciplina de Desenho Geométrico por Educação Artística. Zuin (2002) destaca que o desenho tornou-se optativo e já não era mais obrigatório nos concursos de vestibulares de Arquitetura e Engenharia. Indica, porém, que várias escolas mantiveram as construções geométricas em Educação Artística, apoiados por professores que prestigiavam e legitimavam esses conhecimentos. Ainda na década de 80, algumas editoras publicaram livros de desenho geométrico para serem utilizados em Artes. No entanto, o fato de o desenho não estar presente nos currículos, levou a um abandono gradativo do seu ensino.

Para o final do século, as consequências foram desastrosas, visto que a maioria deixou de aprender geometria, como considera Pavanello (1989). Os professores das quatro séries iniciais limitaram-se a trabalhar aritmética e noções de conjunto. No ginásio, sem o suporte do desenho geométrico, os alunos passaram a apresentar maiores dificuldades em geometria. Em geral, os conteúdos geométricos, presentes nos livros, eram deixados de lado ou para o final do bimestre –

[16] Termo surgido com D' Ambrosio, referindo-se à arte ou técnica de explicar, conhecer, de entender os diversos contextos culturais que envolvem o campo de saber da matemática (D' AMBROSIO, 1998).
[17] Como esse assunto não era dominado por muitos professores secundários, foi deixado de lado pela grande maioria, passando a álgebra a receber destaque proeminente, como refere Pavanello (1989).

se houvesse tempo – com exceção de colégios militares e de algumas escolas particulares. Assim, o estudo da geometria ficou reservado apenas para o 2º grau, na maioria das escolas.

Com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da educação, em 1996, o ensino foi dividido em dois níveis: educação básica e ensino superior. A educação básica passou a compreender educação infantil, ensino fundamental e ensino médio. A LDB 9.394/96, no artigo 23, permite outras modalidades de ensino, podendo “[...] organizar-se em séries anuais, períodos semestrais, ciclos, alternância regular de períodos de estudos [...]”. Assim, final do 3º e o 4º ciclo correspondem às séries finais do ensino fundamental II, para o qual voltamos nosso olhar.

Zuin (2002) destaca que apenas em 1998, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, houve uma real preocupação com o ensino das construções geométricas nesse nível de ensino. Com os PCNs (1997/1998), são estabelecidas as diretrizes para o ensino atual. Nesse contexto, a geometria foi caracterizada como o estudo de espaço, de formas e de medidas.

No anos iniciais do Ensino fundamental, a ênfase voltou-se para a representação e reconhecimento dos objetos em diferentes perspectivas, iniciando com estudos topológicos (a partir do seu próprio corpo), objetos concretos e, por último, a representação. A percepção da geometria na arte (projetiva), a representação das figuras geométricas e medidas de áreas e perímetros de figuras (desenhadas em malhas) passaram a ser trabalhadas, ainda sem o uso de fórmulas. Nos anos finais, o aluno deveria ser capaz de classificar, compor, decompor e resolver situações problemas que envolvam figuras e sólidos geométricos; utilizar os instrumentos adequados para medição, tanto de lados quanto de ângulos; ampliar e reduzir figuras semelhantes, identificando o elemento variante (lado) e o invariante (ângulo); interpretar deslocamento no plano cartesiano, com a verificação de pontos diretamente proporcional e inversamente proporcional; reconhecer as propriedades dos triângulos e quadriláteros; utilizar as fórmulas para o cálculo de área perímetro (planos) e volume (sólidos); seccionar as figuras e analisar. A parte dedutiva ainda ficou mais reservada aos dois últimos anos. Assim, o desenrolar do processo histórico e a análise de livros didáticos, pesquisa de Almeida (2008), mostram que a dedução tende a desaparecer, apesar de os PCNs destacarem a importância do pensamento indutivo e dedutivo para a formação do cidadão contemporâneo.

Pesquisas como Silva (2008), Leivas (2009), Azevedo (2009), indicam que o descaso com a geometria é realidade em nossos dias, além de mostrarem que os alunos do ensino fundamental não dominam conceitos elementares, correspondentes ao ano escolar, e de denunciarem as dificuldades dos professores para exercer a docência dos conteúdos geométricos. Portanto, a realidade imposta na década de 50 está presente, e, ainda que os PCNs tentem resgatar esse ensino, não conseguem reverter o abandono que se deu gradativamente.

Consideramos importante detalhar, na sequência, as questões infralógicas com respeito à geometria, as quais foram apresentadas no capítulo anterior.

2.3 Geometria e operações infralógicas

Apesar de a ciência ter descoberto a geometria topológica por último, ela é uma das primeiras noções que se desenvolve no indivíduo, pois o pensamento geométrico é desenvolvido inicialmente pela visualização. As noções projetivas aparecem depois das topológicas e as euclidianas se estabelecem com o desenvolvimento das possibilidades operatórias. Piaget e Inhelder (1993) destacam, nessas geometrias, que as operações infralógicas (vizinhança, separação, ordem, circunscrição e continuidade) são as que dão base ao pensamento geométrico. Ainda assim, isso não exclui, de modo algum, que figuras possam ser submetidas a operações lógicas, visto que se apoiam "[...] em objetos individuais considerados como invariantes e limita-se a reuni-los ou a relacioná-los independentes de suas vizinhanças ou distâncias espaço-temporais que os separam" (PIAGET, INHELDER, 1993, p. 478). Não há superioridade do nível lógico sobre o infralógico: ambos tratam de um mesmo sistema de operações, aplicado a modos diferentes de operar com o objeto.

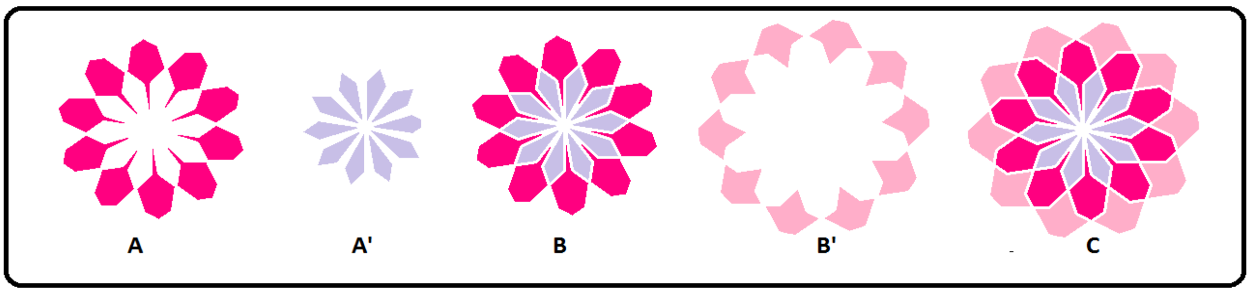
Piaget e Inhelder (1993) destacam as noções infralógicas em oito níveis e cada um deles foi detalhado neste trabalho, no âmbito das topologias elementares, das relações projetivas e do espaço euclidiano. Compreendemos que nosso trabalho está mais direcionado ao espaço euclidiano com algumas noções topológicas, mas a construção do *MatGeo* e seu uso envolvem noções projetivas. Optamos por apresentar cada operação, comparando os três campos, baseados em Piaget e Inhelder (1993), com exemplos relacionados ao tema desta pesquisa.

Quadro 2 - Operação infralógica ligada à adição

I -	Topologia elementar	Relações projetivas	Espaço euclidiano
Adição	**Partição e adição primitiva:** ocorre na dissociação de um contínuo em elementos vizinhos, que, adicionados gradualmente, constituem o todo. Se considerarmos o todo como C, por exemplo (figura 9): A + A’ = B + B’ = C etc., C - B’ = B – B’ =A.	**Adição e subtração dos elementos projetados:** ocorre em função das mudanças do ponto de vista. Nesse caso, a reunião das partes vizinhas é a supressão de um elemento que cessa de ser visível, porque é mascarado por outro objeto. Exemplo (figura 9): A + A’ = B; B + B’ = C etc., B – A’ = A.	**Adição e subtração de elementos:** consiste em reunir ou dissociar as partes em operações, ou seja, compreender o processo de adição/subtração e o processo inverso na composição. Exemplo: A + A’ = B; B + B’ = C etc. B – A’ = A.

Fonte: Quadro elaborado pela autora, a partir dos registros de Piaget e Inhelder (1993).

Figura 9 - Modelo de mosaico[18] apresentado em partes



Fonte: Figura elaborada pela autora, repetindo 10 vezes octógonos regulares, com inclinação de 36º entre eles.

Apesar de as operações parecerem semelhantes, cada um dos diferentes campos possibilita observações distintas na composição da figura 9. Através de **noções topológicas** é possível determinar que A e A’ compõem B, sendo que A’< A. Também é possível observar que A’ está no centro e A no seu entorno, na composição da figura B. As **noções projetivas** permitem observar que, apesar de B ser composto de A + A’, se compararmos A e B, elas são figuras distintas que dependem de um ponto de vista. Assim, B – A’ = A, pois é a supressão de A’ que deixa de ser visível em A. As **noções euclidianas** permitem reconhecer cálculos métricos sobre ângulos e medidas como apresentados na fonte da figura 9, dentro da operação A + A’ = B.

[18] Nesse contexto, o mosaico não se refere à composição de tecnologias, mas a um desenho composto de várias partes (polígonos), que foi trabalhado dentro do ambiente *Slogo-3.0*, descrito no próximo capítulo.

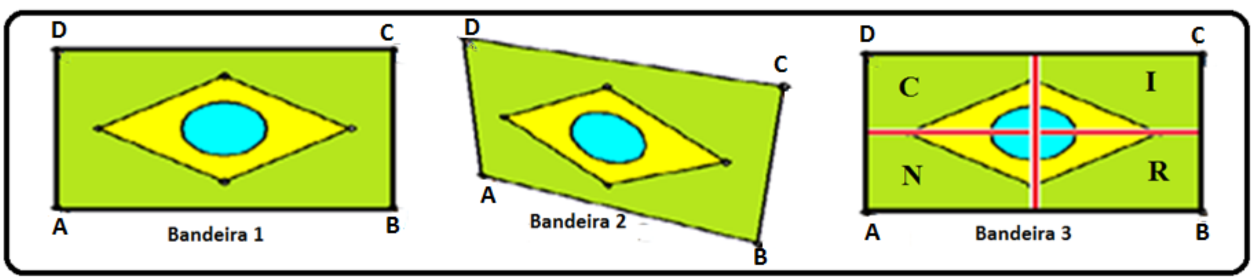
Quadro 3 - Operação infralógica ligada à ordenação, colocações e deslocamentos

II -	Topologia elementar	Relações projetivas	Espaço euclidiano
Ordem colocações e deslocamentos	**Ordem de colocação:** refere-se à operação direta e inversa entre os elementos A, B, C, mostrando as ordens. Assim, possuem ordens diretas e inversas dos elementos citados como exemplo (bandeira 1, figura 10): A→B→C.... e .... →C→B→A.	**Ordem retilínea:** ocorre na sucessão linear A→B→C, etc. Difere da topologia, na medida em que é transformada em ordem retilínea, segundo um ponto de vista. A reta é invariante, ao passo que as paralelas, os ângulos e as curvas são modificados, como exemplo (bandeira 2, figura 10).	**Colocações e deslocamentos:** ocorre se considerados separados, cada quadrante da bandeira 3, figura 10. Tais objetos, A→B→C→D, serão colocados uns em relação aos outros. A operação inversa no espaço euclidiano não é simplesmente um percurso no sentido contrário: é preciso ver as possibilidades, como vamos esclarecer na sequência.

Fonte: Quadro elaborado pela autora, a partir dos registros de Piaget e Inhelder (1993).

Um objeto no plano pode sofrer rotação horizontal e vertical, ou nas duas direções ao mesmo tempo. Nesse sentido, formam um grupo finito de deslocamentos chamado grupo Klein[19], que pode ser aplicado de forma isomórfica às transformações lógicas do INRC e de forma correspondente às alterações no objeto como um todo.

Figura 10 - Bandeira construída por mudança na coordenada cartesiana

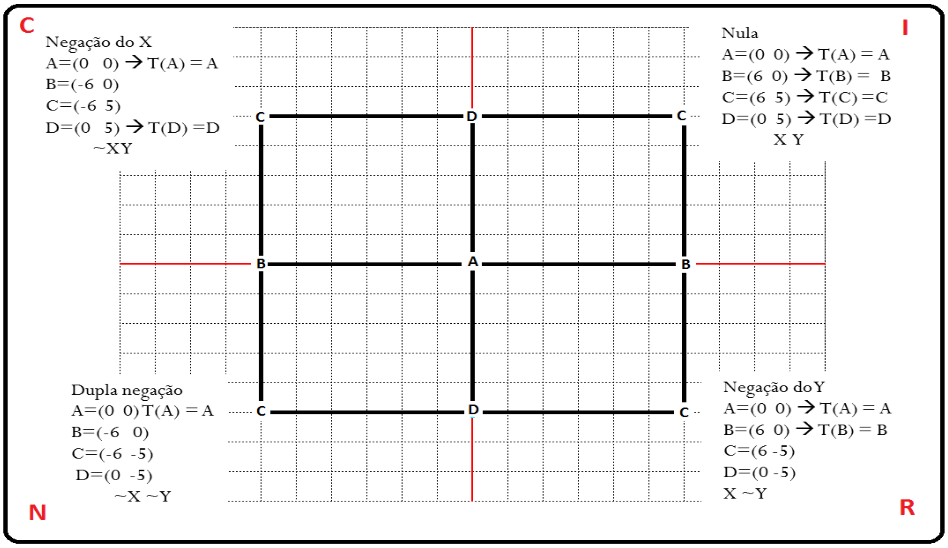


Fonte: Figura elaborada pela autora, através de desenhos construídos em *Slogo-3.0*.
Legenda: Na bandeira 1 e na bandeira 2 a posição inicial do desenho é o A. Na Bandeira 3, a posição seria o centro das retas vermelhas e os 4 quadrantes são elaborados de forma simétrica, a partir do centro.

Se considerados os deslocamentos horizontal e vertical da bandeira 3, figura 10, podemos dispor inicialmente do retângulo **I** (no quadrante em que x e y são positivos); com o giro horizontal, temos o recíproco **R** (no quadrante em que x é positivo e y negativo), o verso da figura. Partindo de **I**, com uma rotação vertical, temos um correlativo **C** (no quadrante cujo x é negativo e y é positivo). O inverso de **I** exige dupla rotação representada pela negação **N** (no quadrante em que x e y são negativos).

[19] Pode ser visto em Vergnaud, 2009, p. 228; ou em Piaget, 1995, p.120.

Figura 11 - Transformações do grupo Klein em um retângulo



Fonte: Figura elaborada pela autora, através de desenhos construídos em *Slogo-3.0*, respeitando o INRC descrito.

Para ficar mais claro, partindo do desenho de um retângulo no papel, similar ao da figura 11, contendo no verso outro retângulo, no qual se marquem os pontos correspondentes. Por exemplo: **A** no canto esquerdo inferior no retângulo da frente equivale a **A** no canto inferior direito no verso. Assim, partindo de **I** e executando um giro horizontal, obtém-se **R**. Partindo de **I** e executando um giro vertical obtém-se **C**. Partindo de **I** e executando ao mesmo tempo um giro horizontal e vertical, obtém-se **N.**

Figura 12 - Representação do grupo Klein (transformações isomórfica do INRC)

	0	giro VH	giro H	giro V
Grupo Klein	XY	~X~Y	~XY	X~Y
XY	XY	~X~Y	~XY	X~Y
~X~Y	~X~Y	XY	X~Y	~XY
~XY	~XY	X~Y	XY	~X~Y
X~Y	X~Y	~XY	~X~Y	XY

Grupo INRC	I	N	R	C
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

Fonte: Figura elaborada pela autora, baseada nos estudos do grupo Klein.
Legenda: giro V (vertical), giro H (horizontal), giro VH (vertical e horizontal ao mesmo tempo).

Curiosamente, essas transformações fecham-se em um grupo Klein, pois é possível verificar as propriedades de grupos como: comutativa, associativa, existência do elemento neutro, e existência do inverso para todo o deslocamento. A figura 12, que apresenta as possibilidades de operações de grupo, de forma equivalente às do INRC. Assim, não importa de onde parta: por exemplo, ao executar qualquer operação dentro do grupo, o resultado será uma das quatro transformações possíveis de deslocamento. Essas transformações podem ser vistas também em objetos concretos, como mostram os estudos de Piaget (1995) e Vergnaud (2009b).

Quadro 4 - Operação infralógica ligada à reciprocidade

III	Topologia elementar	Relações projetivas	Espaço euclidiano
Reciprocidade	**Reciprocidade da vizinhança:** seja A um vizinho de B, então necessariamente B é vizinho de A. Com relação à figura 9, pode-se partir do elemento A considerando A' como vizinho (A_1 e A_1'), ou ainda, pode-se dizer que A' é o vizinho de A (e representar A2 e A2') Assim: $A_1+A_1' = A_2+A_2' =(B)$.	**Reciprocidade da perspectiva:** seja um alinhamento A_1+A_1' visto da esquerda para a direita de um determinado ponto de vista (reta $\overleftrightarrow{AB}$ da bandeira 2), e A_2+A_2' a mesma sequência vista no sentido contrário (reta $\overleftrightarrow{BA}$ na bandeira 2). Assim o elemento A_2'(do último alinhamento) será idêntico a A_1 (do primeiro alinhamento). O mesmo ocorre com A_2 e A_1'... Assim: $A_1+A_1' = A_2+A_2'$.	**Reciprocidade das referências**: sejam diversas figuras vizinhas (partes da bandeira 3). Se A = quadrante 1; A'= o correlativo no quadrante 2; A'' = o recíproco; e A''' = negativo. E, se B = a parte de cima e B' = a parte de baixo. Assim, A + A' = B; A'' + A''' = B'; B + B' = C. Nesse caso, poderemos chegar à figura C (bandeira toda) partindo de A ou B. Isso leva à reciprocidade dos sistemas coordenados, sendo A ou B considerados como a origem de cada um dos sistemas distintos.

Fonte: Quadro elaborado pela autora, a partir dos registros de Piaget e Inhelder (1993).

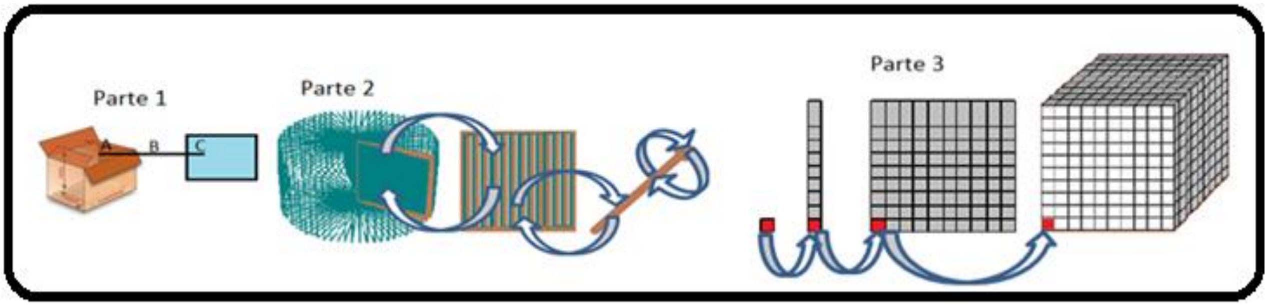
Quadro 5 - Operação infralógica ligada à simetria

IV	Topologia elementar	Relações projetivas	Espaço euclidiano
Simetria	**Relações simétricas de intervalo:** existem nas noções topológicas, ignorando-se as distâncias e conservação. No desenho da bandeira (figura 10), o ponto B está entre o ponto A e C (ordem direta). Da mesma forma, está situado entre C e A (ordem inversa). Assim: A↔B(=0); A↔C(=B); A↔D(=B,C);...	**Relações simétricas de intervalo:** existe percepção dos elementos medianos, por exemplo, na bandeira 2, figura 10: a troca, quando de uma inversão dos pontos de vista, do elemento da esquerda A, pelo elemento da direita C, e a troca de C da esquerda por A da direita, mas a manutenção do elemento médio, pois $B_1= B_2$. Assim: $A_1+ B_1 + C_1 \equiv C_2+B_2+A_2$.	**Ajustes dos intervalos ou distâncias:** existe o intervalo entre dois pontos, no qual a distância é assegurada, pois os pontos fazem parte de "localizações" imóveis, podendo ser percorridos por um objeto em movimento. Na bandeira, a distância entre A e B é a mesma entre B e A, ou seja, A↔B ≡ B↔A.

Fonte**:** Quadro elaborado pela autora, a partir dos registros de Piaget e Inhelder (1993).

A partir desse ponto estaremos ilustrando os quadros somente com as figuras respectivas.

Figura 13 - Desenho representativo da multiplicação dos elementos



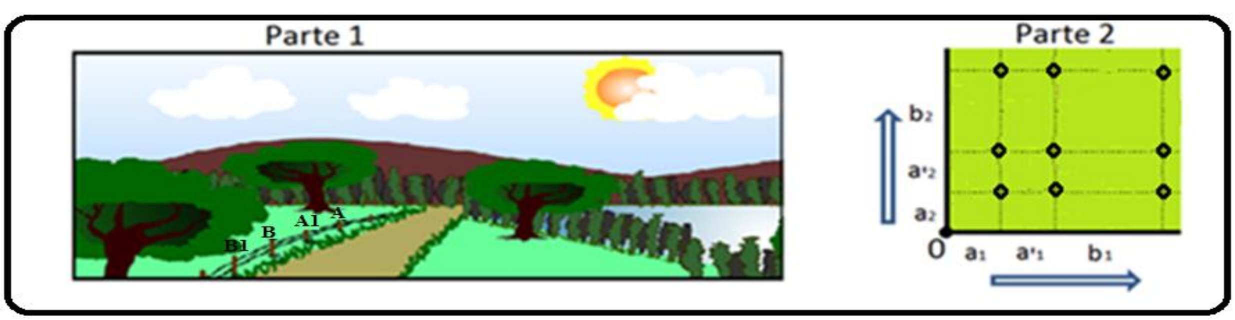
Fonte: Figura elaborada pela autora, tendo como base os estudos realizados.

Quadro 6 - Operação Infralógica relacionada à multiplicação biunívoca de elementos

V	Topologia Elementar	Relações Projetivas	Espaço Euclidiano
Multiplicação biunívoca de elementos	**Multiplicação biunívoca de elementos:** existe em função do envolvimento. Um elemento, no interior de uma caixa, não pode ser ligado a outro no exterior, a não ser atravessando uma linha (parte 1 da figura 13). Assim, B situado entre A e C não pode ser ligado a um ponto D (no plano), a não ser atravessando o ponto C. Essas imagens intuitivas fornecem um sistema de 3 dimensões que têm por fronteira um plano, dimensão (2); uma linha, dimensão (1); e um ponto, dimensão (0). Assim, percebe-se que um ponto pertence "ao mesmo tempo" à linha e ao plano (operação multiplicativa).	**Multiplicação biunívoca de elementos:** não se restringe a noções de interior, exterior, etc., mas a relações de conjunto entre figuras, tais como esquerda, direita, em cima e em baixo. Essas relações, segundo um ponto de vista acrescentado às operações multiplicativas, resultam no espaço projetivo. Ou seja, um plano é um feixe de retas. Uma reta vista de ponta se reduz a um ponto. Os vários planos resultam em um feixe de planos, ou espaço projetivo tridimensional (parte 2, figura 13).	**Multiplicação biunívoca dos elementos:** implica uma sequência linear de elementos A_1 + A_1'=B_1; B_1 + B_1' = C_1, multiplicada por outra A_2 + A_2'+B_2 etc., constituindo uma superfície e, multiplicada por uma terceira A_3 + A_3'+B_3, engendram um volume (parte 3, figura 13). Nesse exemplo, existe a multiplicação com possibilidades métricas.

Fonte: Quadro elaborado pela autora, a partir de Piaget e Inhelder (1993).

Figura 14 - Desenho do "*MatGeo*", apresentando multiplicação biunívoca de relações



Fonte: Figura elaborada pela autora, tendo como base os estudos realizados.

Quadro 7 - Operação infralógica relacionada à multiplicação biunívoca de relações

VI	Topologia elementar	Relações projetivas	Espaço euclidiano
Multiplicação biunívoca das relações	**Multiplicação biunívoca de relações:** ocorre quando existe uma rede de 2 ou 3 dimensões que pode ser feita em termos de relações. Isso significa estabelecer um rede com os elementos A_1 B_1 C_1 de uma sequência com A_1' B_1' C_1'de outra. Quando é estabelecida a conexão entre A_1 e A_1', em geral não ultrapassa o simples trajeto do olhar, mas poderiam ser desenhadas linhas que ligam os elementos similares.	**Multiplicação biunívoca de relações:** ocorre quando existem tabelas de dupla/ tripla entrada que engendram as dimensões do espaço projetivo. Na figura 14, parte 1, os desenhos são organizados de cima x baixo, esquerda x direita e de frente x trás, em um sistema de 3 coordenadas. Desenha-se primeiro o céu (por baixo), depois as figuras acima (chão, sol) depois figuras que vão acima destas. A cerca, o caminho constituem comprimentos fugidios (com ponto de fuga), no qual o último/final é menor que o primeiro/início. Por ex, pontos na cerca: $A < A_1$, $B < B_1$ etc...	**Multiplicação biunívoca de relações de colocações e deslocamentos:** ocorre quando existe um sistema de coordenadas. Trata-se, portanto, de uma rede de colocações ordenadas pelos pontos de referência ou objetos considerados imóveis. É métrico. Na figura 14, parte 2, veem-se distâncias: $a_1+a'_1 = b_1$; $b_1+b'_1 = c_1$ etc, enquanto que $a_2+a'_2 = b_2$ etc, não é possível nesse caso saber a distância por falta de métrica, mas pode-se afirmar que $a_1 < b_1$ e $a'_1 < b_1$, assegurado pelo paralelismo.

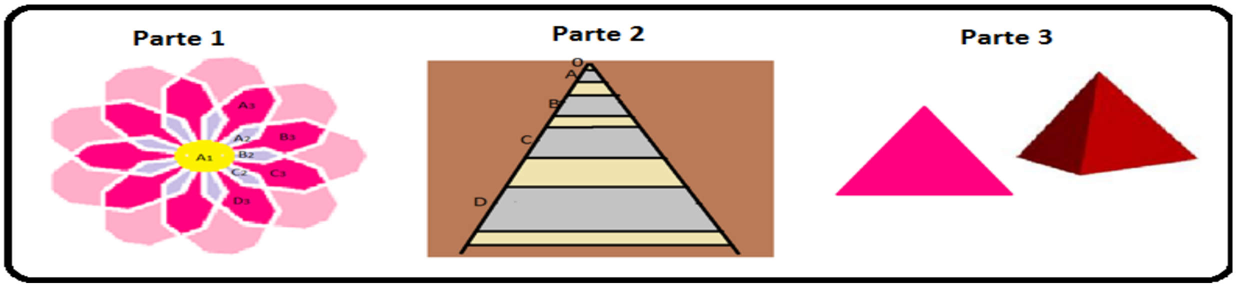
Fonte: Quadro elaborado pela autora, a partir dos registros de Piaget e Inhelder (1993).

Quadro 8 - Operação infralógica relacionada à multiplicação co-unívoca

VII VIII	Topologia Elementar	Relações Projetivas	Espaço Euclidiano
Multiplicação co-unívoca	**Multiplicação co-unívoca de elementos ou relações –** implica correspondências biunívocas, isto é, um termo a um termo, e também para construir de um para diversos, que seria co-unívoca. Ex.: no mosaico (flor, figura 15), A_1 tem vários vizinhos como A_2 B_2 C_2... Cada um terá outros vizinhos como A_3 B_3 C_3 D_3...	**Multiplicação co-unívoca de elementos e relações:** implica um duplo/triplo jogo de similares biunívocas, segundo as duas ou três dimensões consideradas. Ex.: o aumento progressivo das traves (parte 2, figura 15) pode dar lugar a uma quantificação extensiva. Assim, ao invés de A=A'=B'=C'... ou A<A'<B'<C'..., teremos $0 < A < B < C$, sem quantificação das diferenças.	**Multiplicação co-unívoca de elementos:** Engendra a noção de triângulo, a duas dimensões ou do tetraedro a três dimensões (parte 3, figura15) **Multiplicação co-unívoca de elementos:** são oito agrupamentos operatórios que caem no terreno das operações lógicas INRC.

Fonte: Quadro elaborado pela autora, a partir dos registros de Piaget e Inhelder (1993).

Figura 15 - Operação infralógica co-unívoca



Fonte: Figura elaborada pela autora, tendo como base os estudos realizados.

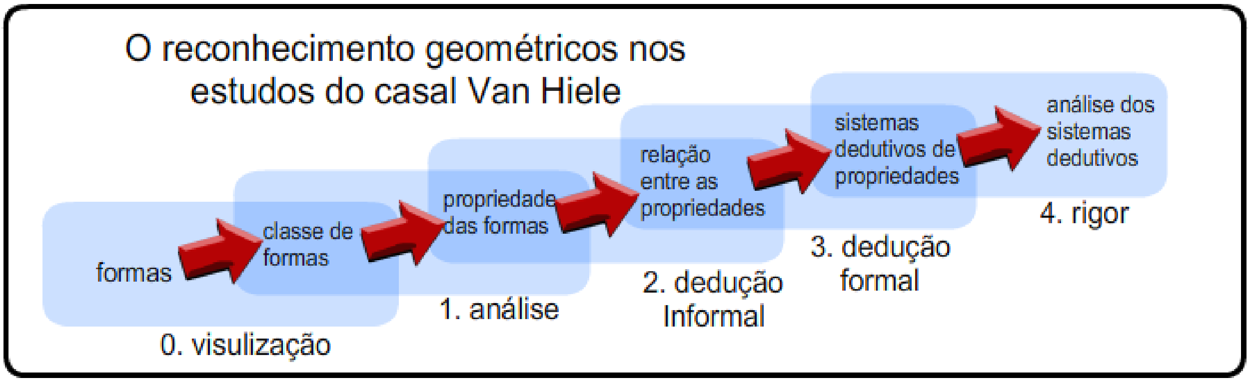
Consideramos importante destacar o pensamento geométrico e focar em autores que estudaram sobre os níveis de reconhecimento geométrico, como apresentamos na sequência.

2.4 O pensamento geométrico

Estudiosos da área como Pavanello (1993), Kaleff (1994), Lorenzato (1995), Wale (2009), entre outros, afirmam que diferentes tipos de investigações geométricas podem contribuir para o desenvolvimento intelectual do indivíduo. Kaleff (1994) indica que não estamos conscientes da complexidade das relações que se estabelecem na mente do sujeito, no trato de figuras espaciais. Lorenzato (1995) declara que, sem conhecimentos geométricos, a leitura interpretativa de mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática distorcida. Wale (2009) constata que o senso espacial, capaz de levar o indivíduo a apreciar formas geométricas, pode ser desenvolvido em qualquer um. Alguns autores preocuparam-se em descrever níveis do pensamento geométrico, como Piaget e Inhelder (1993), Pierre Van Hiele (1994) e Dina Van Hiele (1994), o casal Van Hiele que destacaremos abaixo.

A teoria dos níveis de reconhecimento geométrico, do casal Van Hiele, é muito significativa para este estudo. Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele Geoldof, educadores holandeses, descrevem os processos de pensamento usados no contexto geométrico. Nasser et al. (2004), Walle (2009), Braga e Dorneles (2011) destacam o valor desses estudos, pois “[...]a teoria dos Van Hiele se tornou um fator de influência no currículo geométrico norte-americano e de diversos países” (WALLE, 2009, p. 440). Nessa perspectiva, os níveis de reconhecimento vão da geometria elementar, trabalhada nas séries iniciais, para uma abstração, estudada no ensino médio e na universidade, como mostra a figura 16.

Figura 16 - Níveis de reconhecimento geométrico para os Van Hiele



Fonte: Figura elaborada por John A. Van de Walle (WALLE, 2009, p.443).

O **nível 0** é da **visualização**, no qual as “[...] figuras são julgadas por sua aparência” (VAN HIELE, P. 1984, p. 249, tradução nossa). Nesse nível, as crianças reconhecem, nomeiam as figuras por suas características globais e a aparência da forma as define. Reconhecem que os retângulos são diferentes dos quadrados, dos paralelogramos e dos losangos, mas não percebem o que essas figuras têm em comum. O fato da aparência ser o fator dominante, faz com que essa característica domine sobre as propriedades das formas. Assim, ao verem um quadrado (com giro de 45º graus), identificam-no como um losango e não mais como um quadrado. Os agrupamentos e classificações são estabelecidos através da aparência, ou seja, formas parecidas são agrupadas juntas. Com isso, as operações aditivas e multiplicativas de classes, ou relações primárias ou secundárias, próprias do pensamento lógico formal, não são realizadas. Wale (2009) destaca que, nesse nível, as propriedades das formas, tais como lados paralelos, simetrias, ângulos retos, entre outros, estão incluídas, mas de maneira informal e observacional. Portanto, um aluno pode aprender o vocabulário geométrico, identificar e reproduzir formas específicas.

O **Nível 1** refere-se ao início dos processos de **análise** das formas, pois os estudantes “[...] reconhecem as figuras por meio do estudo de suas propriedades” (BRAGA; DORNELES, 2011, p.3). Os alunos são capazes de pensar sobre o que define um retângulo (lados opostos paralelos, lados opostos de mesmo comprimento, quatro ângulos retos, diagonais congruentes). Nesse caso, reconhecem as propriedades das figuras planas isoladamente e podem classificar os diferentes tipos de retângulos, por exemplo, como pertencentes a uma classe. Aspectos irrelevantes como tamanho ou orientação desaparecem e os alunos classificam, através de operações primárias de relações, tendo como fator determinante as propriedades das formas. Ainda não reconhecem as propriedades de uma classe/subclasse de forma ordenada, “[...] de modo que um quadrado não é necessariamente identificado como sendo também um retângulo" (VAN HIELE, P. 1984, p. 249, tradução nossa), pois não percebem o retângulo pelas características que o definem. A compreensão sobre simetria, paralelismo, continua a ser refinada. Wale (2009) destaca que, nesse nível, os objetos do pensamento são as classes das formas e o produto desse pensamento resulta nas propriedades das formas. Assim, apesar de continuar a utilizar modelos e desenhos das formas, eles começam a vê-las como representantes de classes, mas ainda não explicam inter-relações entre as figuras.

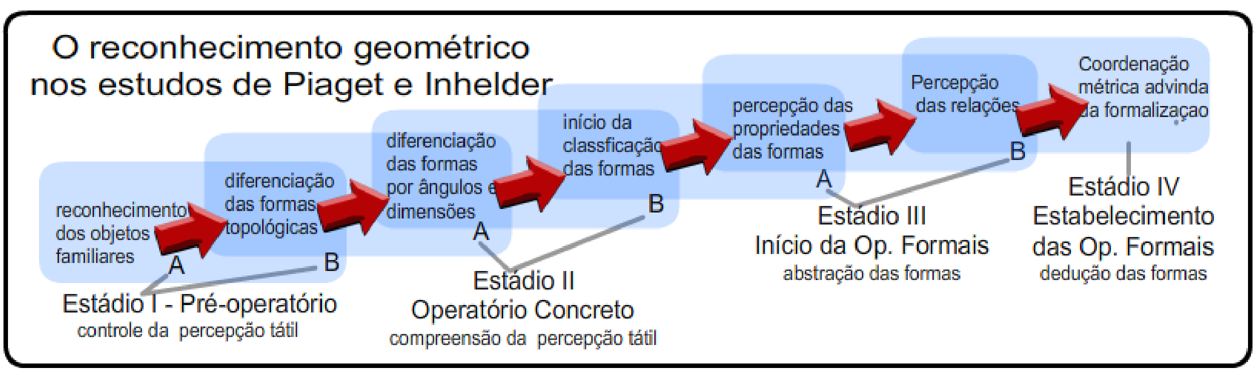
O **Nível 2,** da **dedução informal,** ocorre quando os alunos começam a pensar sobre as propriedades dos objetos geométricos, sem as restrições de um objeto em particular. São capazes de generalizar que, se os quatro ângulos de um polígono são retos, então, em sua forma, ele deve ser um retângulo. Portanto, um quadrado que tem os quatro ângulos retos compreende também a representação de um retângulo. Assim "[...] as propriedades são ordenadas e podem ser deduzidas umas das outras: uma propriedade precede ou segue outra propriedade" (VAN HIELE, P. 1984, p. 249, tradução nossa). Eles se engajam em um raciocínio do tipo "se - então", estabelecendo relações como: "[...] se isso é um quadrado, ele tem de ser um retângulo" (WALLE, 2009, p. 442). Esse autor afirma também que as operações, nesse momento, são relações entre as propriedades do objeto, com apresentação de argumentos lógicos de forma intuitiva, sem preocupação com o rigor. Assim reconhece inclusão e intersecção de classes, mas não compreende o papel da dedução como um todo.

O **Nível 3**, da **dedução,** é aquele em que os estudantes são capazes de examinar mais que propriedades das formas e passam a fazer relações entre as propriedades dos objetos geométricos. Seu "[...] pensamento está preocupado com o significado da dedução, com o inverso de um teorema, com axiomas, com condições necessárias e suficientes" (VAN HIELE P., 1984, p. 250, tradução nossa). Assim, os alunos utilizam um sistema lógico, completo de afirmações para, então, deduzirem outras verdades e, a partir daí, compreenderem axiomas, definições, corolários e postulados. Apreciam a necessidade de um sistema lógico fundamentado sobre um conjunto mínimo de proposições. Para Wale (2009), o produto do pensamento são sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria, pois o estudante é capaz de trabalhar com sentenças abstratas sobre propriedades geométricas e estabelecer conclusões mais baseadas na lógica do que na intuição. Wale (2009) indica que é um tipo de raciocínio que deveria ser característico no ensino médio.

O **Nível 4** (último nível), do **rigor,** é composto por sistemas dedutivos axiomáticos para a geometria. Não ocorrem apenas deduções dentro de um sistema, como destaca Wale (2009), mas relações entre os diferentes sistemas axiomáticos. Passa a existir apreciação das distinções dos diferentes sistemas axiomáticos, que capacita o indivíduo a compreender a geometria em diferentes perspectivas, para além da geometria euclidiana, vista neste trabalho. Braga e Dorneles (2011) destacam que esse nível é característico dos especialistas em matemática do ensino superior, que trabalham com diferentes sistemas, estabelecendo relações entre eles.

Inhelder e Piaget (1976) descrevem a lógica que se constitui na criança e no adolescente e Piaget e Inhelder (1993) expõem a representação do espaço pela criança. Eles distinguem a capacidade operatória do sujeito em níveis: **Estádio I** - das operações pré-operatórias; **Estádio II**- das operações concretas; **Estádio III** - início das operações formais; **Estádio IV**- estabelecimento das operações formais, como mostra a figura 17.

Figura 17 - Níveis de reconhecimento geométrico na teoria piagetiana



Fonte: Figura elaborada pela autora, baseado nos registros de Piaget e Inhelder (1993).

No **Estádio I**, o reconhecimento é resultado de uma ação sensório-motriz. As crianças são capazes de controlar a percepção tátil, reconhecer objetos familiares, depois as formas topológicas, mas não as euclidianas. O sujeito dessa fase apresenta uma incapacidade sintética e opera por correspondências intuitivas simples. Piaget e Inhelder (1993) distinguiram dois subestádios: **IA**, quando há o reconhecimento apenas dos objetos familiares, e não das formas; **IB,** quando há um início de abstração, com o reconhecimento das formas topológicas. Há diferenciação dos círculos e dos quadrados como formas fechadas, mas não a capacidade de distingui-los de uma forma aberta. As primeiras formas geométricas reconhecidas pelas crianças são caracterizadas por qualidades: fechamento, abertura ou enlaçamento, e não por elementos euclidianos (retas/curvas, ângulos, entre outros).

O **Estádio II** representa a coordenação crescente das ações exteriores da criança, com a coordenação interna dos esquemas. Assim, com capacidade de controlar a percepção tátil, há o reconhecimento progressivo das formas euclidianas. No subestádio **IIA**, há distinção progressiva das formas, segundo seus ângulos e suas dimensões. Nas formas simples como quadrado, retângulo e círculo, a diferenciação consiste em combinar igualdades, raios do círculo, ângulos retos. Já o losango, por apresentar dupla dificuldade gráfica e recognitiva, não é reconhecido. Os sujeitos têm dificuldades de construir uma reta paralela a um dos lados, apresentando, ainda, uma representação centrada no ponto de vista próprio. Já no subestádio **IIB**, há descobertas sucessivas do losango e trapézio e antecipação das transformações, mas sem noções de paralelismo ou conservação de lados. No entanto, já são capazes de distinguir os ângulos retos dos agudos. Diferenciam formas mais complexas, através de reações intermediárias, com tentativas de diferenciar os pontos de vista, mas subsistem vários erros de representação. Há o início de análise através de coordenações parciais.

No **Estádio III,** existe compreensão sobre a abstração das formas, com coordenação operatória reversível, uma “[...] forma de equilíbrio atingida pelos movimentos de exploração e acomodação intuitiva [...]”, quando estes são compostos entre si de modo que “[...] cada elemento explorado seja ao mesmo tempo distinguido dos outros e reunido a eles em um todo coerente” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 52). No subestádio **IIIA**, são construídas noções de paralelismo e análise inicial sobre ângulos. Passa a existir uma diferenciação operatória parcial dos pontos de vista, nas perspectivas euclidianas e projetivas, com o início das coordenações de conjuntos. No subestádio **IIIB**, passa a existir uma diferenciação operatória completa, e o sujeito atua com a realidade completa das perspectivas, com o início das relações de distância, análise progressiva dos ângulos e lados, completando-se com as coordenações de conjuntos.

O **Estádio IV** diz respeito à formação explícita das relações, uma dedução do processo com plano esquematizado das coordenações métricas envolvidas. Dá-se com o advento do pensamento hipotético dedutivo, isto é, o sistema de operações “que opera nas proposições abstratas, referindo-se, elas mesmas, à operações concretas, concebidas como possíveis...” (PIAGET; INHELDER, 1993, p.160).

Enquanto a classificação piagetiana, correspondente à gênese do pensamento geométrico, dá base para analisarmos parte dos nossos dados, a classificação dos Van Hiele aponta níveis mais abrangentes, indo do nível 0 a 2 (no qual basicamente estariam os estudos piagetianos) até o nível 4 do rigor (com sistematização mais elaborada em nível universitário), o que ultrapassa os conhecimentos esperados para o grupo selecionado neste trabalho. Compreendemos, entretanto, que as teorias juntas nos permitem maior aproximação com nosso objeto de estudo e consideramos importante fazer algumas comparações dessas teorias, relacionando os três primeiros níveis, por ter alcance nos sujeitos desta pesquisa.

No nível 0 (Van Hiele), as figuras são nomeadas por suas características globais e julgadas por sua aparência. Dessa forma, inferimos que contempla todo o estádio I dos estudos piagetianos, quando há controle das percepções táteis e reconhecimento das formas topológicas, aproximando-se do reconhecimento do subestádio IIA, no qual existe o reconhecimento de diferentes formas relacionado a ângulos e dimensões.

No nível 1 (Van Hiele), há o reconhecimento das figuras geométricas, que se dá por suas propriedades. Ocorre quando os alunos são capazes de realizar classificações através de operações primárias. Assim, compreendemos que envolve o período das operações concretas, partindo de um subestádio IIA, com o reconhecimento das diferentes formas, avançando para processos de classificações, relacionadas a ângulos e lados das figuras, como ocorre no subestádio IIB.

No nível 2 (Van Hiele), as figuras são classificadas através de classes e subclasses. Os alunos, nesse nível, se engajam em um tipo de raciocínio que os capacita a compreender inclusão e intercessão de classes. Assim, as propriedades para o reconhecimento são deduzidas umas das outras. Esse contexto, compreendemos que se dá a partir do subestádio IIIA, quando se inicia os processos de análise, avançando para IIIB, quando analisam as propriedades das diferentes formas, relacionadas a lados ângulos e paralelismo. Também se aproxima do subestádio IV, pois há coordenações das relações métricas envolvidas.

A partir desse ponto, consideramos necessário detalhar um pouco mais o conteúdo que é o foco da pesquisa: polígonos.

2.5 Categorização das formas bidimensionais - polígonos

Polígono é uma palavra de origem grega (*poli* = muitos + *gonos* = ângulos). Os polígonos pertecem à classe das curvas fechadas simples. Euclides denomina-as de figuras retilíneas, ou seja, "[...] são contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto as multiláteras, as contidas por mais de quatro retas" (EUCLIDES, 2009, p. 98). Nessa ótica, as figuras circulares não seriam polígonos e, apesar de compreendermos que é um conceito incompleto/questionável[20], consideramos que seria importante distinguir as figuras circulares das retilíneas, até para obter novas abstrações em níveis superiores. Assim, utilizamos a posição euclidiana, que se fundamenta nas observações ligadas a lados e ângulos, e nas noções de paralelismo, sobretudo, em triângulos e quadriláteros. Para compreender os elementos que compõem esses fatores, consideramos importante apresentar as definições dadas por Euclides, assim como alguns apectos elementares dessa posição.

Euclides inicia as definições pelo **ponto** "aquilo de que nada é parte", ou seja, o primitivo. Já a **linha** "é um comprimento sem largura", cujas "extremidades são pontos" (imagine um pedaço solto de barbante). A **linha reta** "é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma", ou seja, o caminho mais curto para unir dois pontos. Ele define a **superfície** como "aquilo que tem somente comprimento e largura", cujas "extremidades são retas"; e superfície plana "é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma" (EUCLIDES, 2009, p. 97).

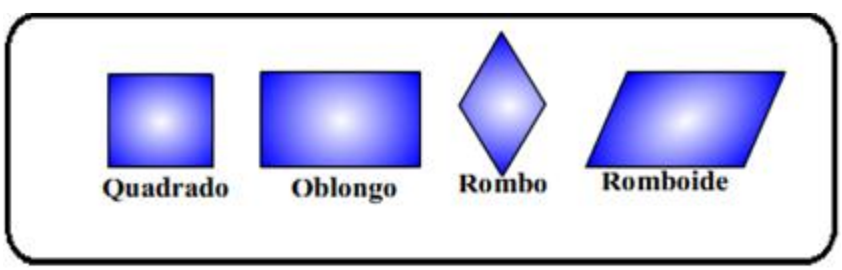
Com a introdução da teoria de conjuntos e das ideias topológicas, constata-se também que a **reta** é um conjunto infinito de pontos e o **plano** um conjunto infinito de retas, que, por sua vez, é um conjunto infinito de pontos. Para Euclides **ângulo plano** "é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta" e, quando "as linhas que contêm o ângulo são retas, o ângulo é chamado **retilíneo**"; ângulo "**agudo** é menor que o reto", e **obtuso** "é maior que o reto". Para ele **fronteira** "é extremidade de alguma coisa" e **figura** é contida por uma ou várias fronteiras (EUCLIDES, 2009, p.97).

[20] A inscrição de polígonos regulares numa circunferência indica que, quanto mais se aumenta a quantidade de lados, mais essa figura se aproxima de uma circunferência. No *Slogo-3.0*, se alguém repetir 180 vezes um lado (reta) de tamanho 2 passos, com um giro de ângulo de 2 graus, obterá um desenho que se mostra como uma circunferência. Os estudos de limites também apontam que uma curva pode ser definida por pequenas retas que tendem ao infinito.

Para este estudo selecionamos alguns conceitos referentes a triângulos. O **equilátero** é o que tem os três lados com medidas iguais; **isósceles**[21] o que tem só dois lados com medidas iguais; enquanto **escaleno**[22] é o que tem os três lados com medidas desiguais. Por seus ângulos, o triângulo pode ser dividido em **triângulo retângulo**, o que tem um ângulo reto; **obtusângulo**, o que tem um ângulo interno obtuso; e **acutângulo**, o que tem os três ângulos internos agudos. Quanto aos postulados, é importante reconhecer que as medidas de dois lados de todo o triângulo, somadas, são maiores do que o restante; e que a medida do maior lado de todo o triângulo é subentendido pelo maior ângulo (EUCLIDES, 2009).

Entre os quadriláteros, Euclides (2009) destaca, como mostra a figura 18, primeiramente o **quadrado** como sendo uma forma que tanto é equilátera quanto retangular; distinta do **oblongo** (conhecida como retângulo hoje) que, por um lado, é retangular e, por outro, não é equilátera; e o **rombo** (losango), que, por um lado, é equilátero e, por outro, não é retangular. Esse autor ainda distingue o romboide (paralelogramo), que tem "[...] tanto lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátero nem retangular [...]" (EUCLIDES, 2009, p. 98), ou seja, significa a negação das demais proposições, mantendo ângulos e lados opostos iguais. Nesse caso, a classificação se dá pela análise de duas proposições: p = ter todos os ângulos retos (retangular) e q = ter todos os lados iguais (equilátero), no qual p q é um quadrado, p $\sim q$ é um retângulo, $\sim p$ q é um losango, *e* $\sim p$ $\sim q$ não rombo nem oblongo, romboide.

Figura 18 - Classificação dos quadriláteros a partir de duas proposições



Fonte: Figura elaborada pela autora, baseada na classificação proposta por Euclides (2009).

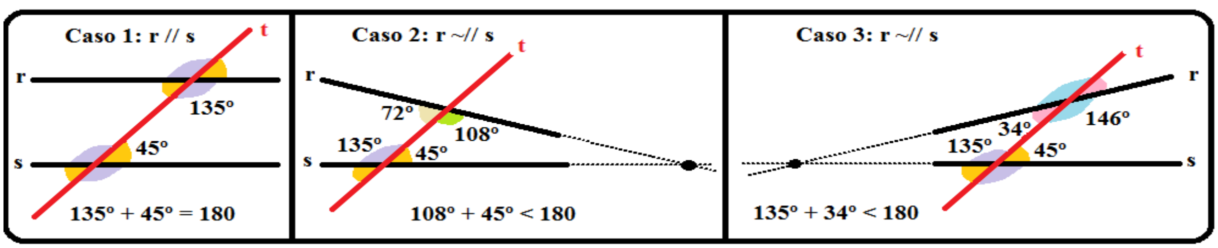
Entre os quadriláteros, são reconhecidas as noções de paralelismo. Retas paralelas "[...] são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram" (EUCLIDES, 2009, p. 98). Assim, apesar de o romboide ser

[21] A palavra tem origem grega, *isos* (igual) mais *skelos*, "perna", sentido de "lado".
[22] A palavra tem origem na palavra grega *skalenos*, que significa "desigual".

representado por um paralelogramo (figura 18), a explicação de Euclides nesse momento distingue somente os aspectos disjuntos.

Quanto ao controvertido postulado das paralelas que, observado em uma geometria axiomática, pode ser totalmente refutado, consideramos que é preciso primeiramente entender o conceito na geometria euclidiana, até para posteriormente compreender o porquê das polêmicas e os possíveis olhares avançados sobre o tema. Para Euclides o paralelismo ocorre quando a soma dos ângulos interiores das duas retas for igual a 180º, pois, nesse caso, se as retas forem prolongadas ilimitadamente, em nenhum dos quatro lados se encontram. As infinitas possibilidades podem ser reduzidas às três apontadas na figura 19: a) duas retas **(r)** e **(s)** que não apresentam nenhuma inclinação (no qual o prolongamento não resultaria em ponto de encontro); b) uma inclinação qualquer da direita para a esquerda, em uma das retas ou em ambas; c) uma inclinação da esquerda para direita, em uma das retas ou ambas.

Figura 19 - Representação gráfica do postulado das paralelas de Euclides



Fonte: Figura elaborada pela autora, baseada no postulado das paralelas de Euclides (2009).

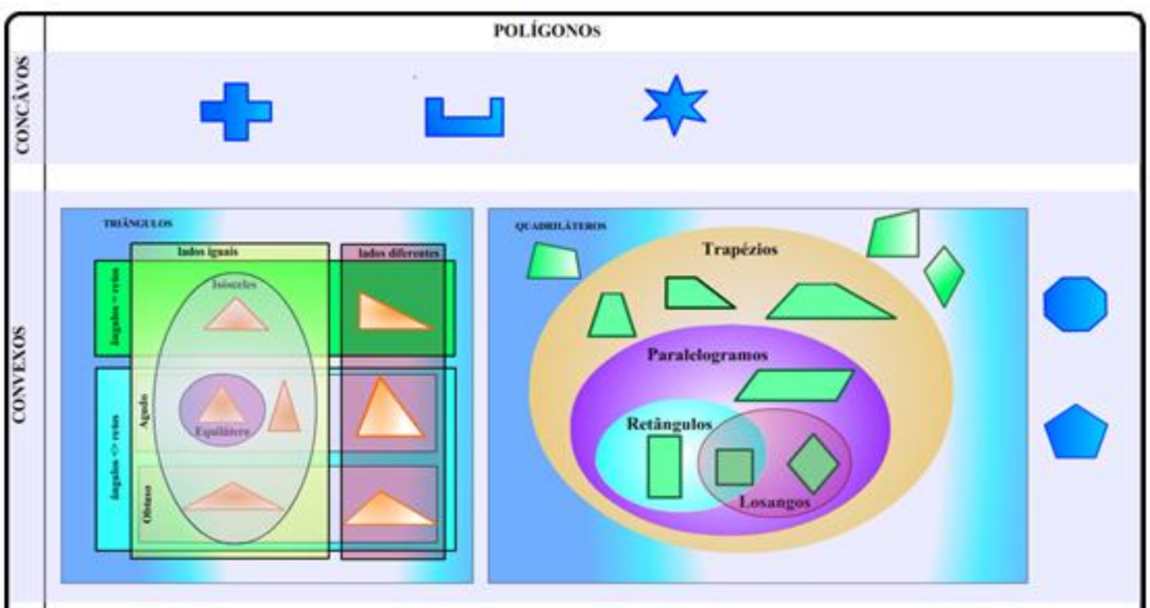
Na figura 19, mantivemos uma reta igual nos três casos **(s)** e inclinamos a outra **(r)**. Considerando a totalidade de combinações e o INRC para inclinação dessas retas, haverá mais possibilidades, embora recíprocas aos três casos apresentados.

Sobre a conservação do paralelismo, Piaget e Inhelder (1993) indicam que essa noção "[...] constitui-se ao mesmo tempo em que a noção de ângulo é natural, pois duas retas formam entre si um ângulo tão logo elas cessam de ser paralelas". (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 333). Esses estudos mostram que as noções de ângulos e paralelismo são complementares. Nesse sentido, os autores refletem sobre a identidade da direção, mas consideram que a noção de direção no espaço constitui o ponto de partida dos sistemas coordenados. Portanto, esses estudos indicam que o paralelismo de duas linhas quaisquer não é mais simples do que conceber o paralelismo dos dois lados de uma figura fechada e bem estruturada.

Na perspectiva dos conceitos trabalhados até aqui, elaboramos uma classificação dos polígonos, que apresenta, de forma mais detalhada, os fatores que atuam na classificação dos triângulos e quadriláteros, como sintetizamos na figura 20.

Quanto aos triângulos, podemos dizer que existem dois fatores que podem ser observados: lados e ângulos. Ao considerar fatores disjuntos *p = ter lados iguais e q = ângulos retos*, observamos partes ligadas entre si, mas, ao mesmo tempo, partes disjuntas. Primeiramente há quatro divisões distintas destacadas (medida de lados iguais ou desiguais e ângulos iguais ou diferentes do reto), como expresso na figura 20. Ao ver os demais aspectos disjuntos, relacionados aos ângulos diferentes do reto, é possível distinguir obtusos (maior que 90º) e os agudos (menor que 90º). Quando consideramos dois fatores, lados iguais e ângulos diferentes do reto, observamos partes ligadas, que exprimem dois casos distintos, com uma subdivisão: ter todos os lados iguais (equilátero), ter dois lados iguais (isósceles) que pode ser acutângulo ou obtusângulo.

Figura 20 - Classificação dos polígonos

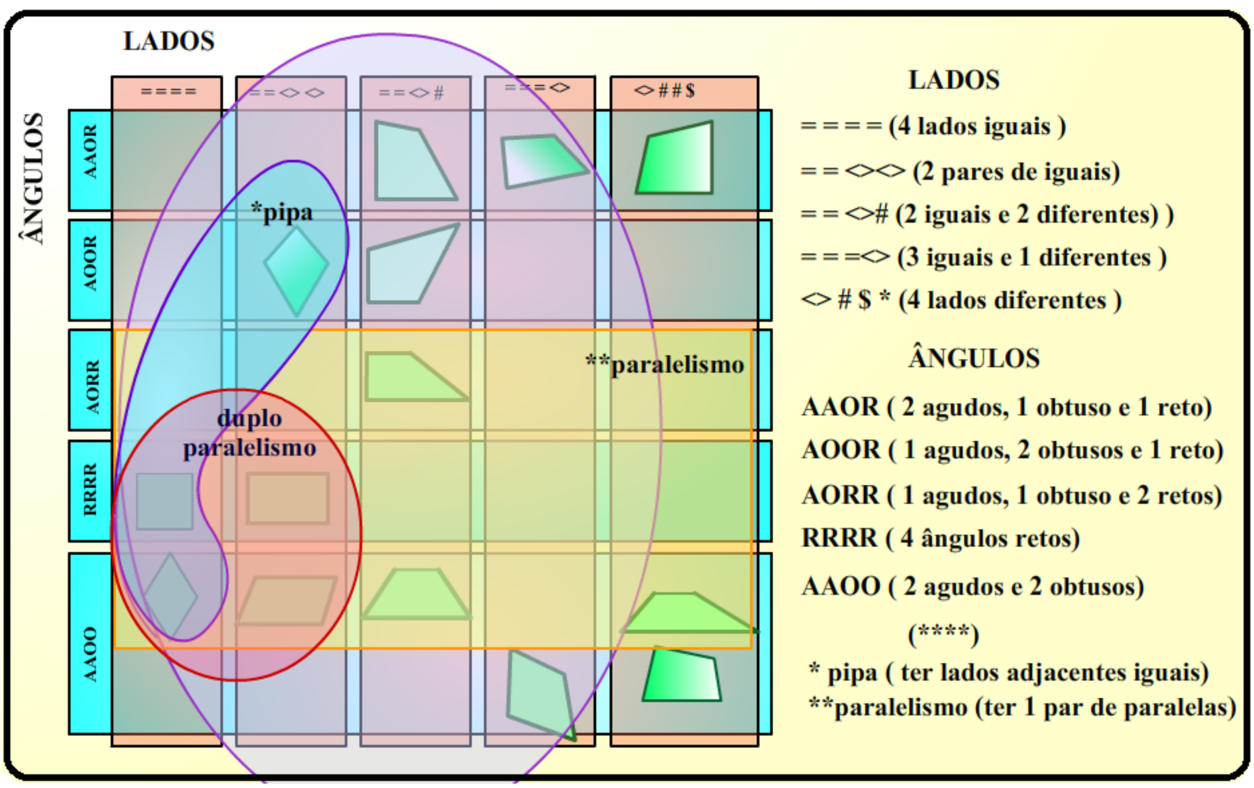


Fonte: Figura elaborada pela autora, a partir de reflexões sobre classificação de polígonos, enquanto a parte dos quadriláteros baseia-se nas representações feitas por Wale (2009).

A operação de *implicação* é observada nos triângulos que tem lados iguais, sendo possível ter dois iguais (isósceles) ou os três iguais (equilátero). Assim um triângulo equilátero é também isósceles, pois, se considerar *p*=ter três lados iguais e *q* ter dois lados iguais, tem-se uma *implicação*, pois *p* Ɔ *q*, mas *q* não Ɔ *p*. Desse modo, pode-se afirmar que todo equilátero é também isósceles, mas nem todo isósceles é equilátero.

Em relação aos quadriláteros, a figura 20 aponta várias implicações, pois é possível observar que os trapézios Ɔ paralelogramos, os paralelogramos Ɔ retângulos/losangos, os retângulos/losangos Ɔ os quadrados. No entanto, não aponta as disjunções, ou seja, os fatores que distinguem os quadriláteros, mesmo que somente relacionados a ângulos, lados ou paralelismo, foco deste estudo. O simples fato de os quadriláteros terem um lado e um ângulo a mais que o triângulo, faz com que se ampliem consideravelmente as possibilidades de relações e sua descrição torna-se complexa. Assim, elaboramos uma nova classificação[23] mais detalhada, como mostra a figura 21. Cabe destacar que as figuras não apresentam a totalidade de exemplos possíveis, mas mostram a totalidade que distingue os quadriláteros, nos fatores estudados, contendo, pelo menos, um exemplo de cada característica observada.

Figura 21 - Classificação dos quadriláteros em relação às possibilidades lógicas observadas



Fonte: Figura elaborada pela autora, a partir de reflexões sobre classificação de polígonos.

---

[23] É importante destacar que essa classificação surge somente depois de muito estudo e análise da teoria e do tema, o que ocorre depois do processo interventivo.

É possível observar que as quatro primeiras colunas da figura 21 indicam quadriláteros que têm pelo menos um par de medidas de lados iguais. A igualdade pode se dar pela medida do lado congruente, como ocorre com as pipas, ou no caso do trapézio-retângulo desenhado. Outra forma de ver a igualdade é nos lados opostos dos quadriláteros, que existirá nas figuras com duplo paralelismo e no trapézio-isósceles.

Já o paralelismo ocorre de duas formas: simples, quando o quadrilátero é composto de, pelo menos, um par de retas paralelas; duplo, quando o quadrilátero apresenta dois pares opostos de retas paralelas. Os trapézios são figuras que apresentam paralelismo simples, portanto contêm as figuras com duplo paralelismo (trapézios $\supset$ paralelogramo...); e podem ser distinguidos como: trapézio-isósceles, quando aponta igualdade entre os lados opostos não paralelos, o que implica em igualdade entre os ângulos da base e também entre os seus complementares; trapézio retângulo, quando possui um ângulo reto; e o trapézio escaleno, cujos lados são todos diferentes, o que implica ângulos também diferentes. Existe, ainda, uma relação entre a igualdade e o paralelismo, pois os quadriláteros da primeira coluna apresentam dupla igualdade entre os lados congruentes e duplo paralelismo, portanto são, ao mesmo tempo, pipas, trapézios, paralelogramos (definidos pelo duplo paralelismo) e losangos (definidos pela dupla igualdade de lados).

Entre os quadriláteros que contêm um ângulo reto e um paralelismo simples existem os trapézios-retângulos. Já os quadriláteros que possuem todos os ângulos retos são conhecidos como retângulos. Os quadrados são retângulos que têm os quatro lados iguais, ou losangos que contêm os quatro ângulos retos.

É importante destacar que, apesar de encontrarmos similaridade de formas geométricas na natureza e nas construções humanas, consideramos que essas formas só têm existência real no nosso pensamento. Enfim, não existe, por exemplo, na natureza ou nas coisas criadas pelo homem, uma forma retangular com somente duas dimensões – o que define figura plana. Mesmo que pensássemos em uma folha de papel, essa, além do comprimento e largura, que todos percebem claramente, contém uma espessura (menos perceptível), evidenciando que não se trata de uma figura plana, mas de um plano tridimensional. Ainda, os desenhos em papel acabam sendo realizados pelo risco do grafite e ocupam uma espessura pequena, embora possam representar melhor um plano. Fagundes (2011) aponta que as figuras planas passam a ter existência real no mundo virtual, pois, por mais que se coloque um desenho em cima do outro na tela do computador, a espessura do desenho não ultrapassa o primeiro traço visto, assim não ocupa outro lugar no espaço, sendo bidimensional.

Deste modo, vimos que o campo da geometria é composto de saberes que vem dos tempos antigos e marcam presença, sobretudo, nos currículos escolares. Observamos que as operações infralógicas são fundamentais para dar sustentação ao pensamento geométrico, e que de forma nenhuma eliminam as operações lógicas. A compreensão é que essas lógicas capacitam o sujeito a resolver desafios geométricos, ao mesmo tempo em que contribuem para o seu desenvolvimento intelectual. Verificamos também que os níveis de pensamento geométrico estão relacionados à capacidade lógica e infralógica do aluno, inclusive com relação a polígonos. Essas capacidades permitem um olhar mais aprofundado sobre o tema.

É necessário compreendermos as tecnologias educacionais e seu potencial de utilização para a aprendizagem da geometria, visto que nosso estudo envolve um mosaico tecnológico. Portanto, no próximo capítulo destacaremos as tecnologias, procurando evidenciar o potencial para desenvolver os processos operatórios.

3 TECNOLOGIA EDUCACIONAL E GEOMETRIA

A palavra tecnologia tem sua origem no grego, da junção de *téchne* (arte) *e lógos* (estudo). Representa o conjunto de arte e técnicas (invenções) que, de alguma maneira, simplifica o trabalho do homem. Já a tecnologia educacional refere-se àquelas que facilitam o processo ensino-aprendizagem, das quais podemos citar livros, giz, quadro-negro, papel, lápis, mídias em geral. Entre essas, o computador merece destaque, pois, juntamente com a *internet*, trouxe, para os tempos modernos, novas formas de comunicação e informação, abrindo um leque de possibilidades. Nessa perspectiva, consideramos interessante apresentar um breve histórico sobre o uso da informática educativa no Brasil, destacar algumas tecnologias digitais utilizadas na/para a geometria, descrever as tecnologias digitais (selecionadas) e o objeto de aprendizagem (construído) para a intervenção exploratória.

3.1 Breve histórico da informática educativa no Brasil

Os computadores de grande porte surgiram nos Estados Unidos, nomeado de MARK I, e na Inglaterra, nomeado de COLOSSUS. No Brasil, a entrada dessas máquinas foi condicionada às intenções militares, integradas ao projeto nacional desenvolvimentista, ainda na década de 60, como constatam os autores Moraes (2002/2003), Tavares (2001) e Valente J. (1999).

Somente na década de 80, quando o *Personal Computer* (PC)[24] surgiu no mercado, é que os computadores chegaram à escola, marcando presença rápida nas instituições particulares de ensino. Tavares (2001), Oliveira (1997), Moraes (2002/2003) e Valente J. (1999) ressaltam que a época foi marcada por investimentos em ações que se propunham a levar os computadores às escolas públicas. Foram realizados os primeiros seminários[25] nacionais de Informática na Educação, os quais destacaram a importância do computador como recurso educacional e a necessidade da formação de professores para a área. Surgiu, em 1983, o projeto Educação com Computadores (EDUCOM[26]), que selecionou cinco universidades, quatro federais - Pernambuco, Minas Gerais, Rio de Janeiro e Rio Grande do Sul - e uma estadual - Campinas - para que fossem

[24] Em 1974, a Intel projetou o microprocessador 8080, que possibilitou o surgimento do PC. Em 1976, a Apple lançou o primeiro PC, e a IBM lançou seu modelo em 1981, cujo sistema operacional era o MS-DOS.
[25] Com apoio da Secretaria Especial de Informática (SEI), do MEC e CNPq, foi realizado em Brasília o I Seminário Nacional de Informática na Educação, e, no ano seguinte, ocorreu um evento similar na Bahia.
[26] O projeto EDUCOM pôs em execução concursos de softwares educacionais e atuou em dois projetos: o Formar (formação de recursos humanos) e o CIED (Centros de Informática e Educação).

criados os centros precursores da investigação sobre o uso dos computadores na educação. Valente J. (1999) destaca a influência dos Estados Unidos e da França, embora, diferentemente desses países, o Brasil norteou-se pela preocupação com a mudança pedagógica. O LOGO[27] foi marcante nessa época, sendo "[...] a única alternativa que surgiu para o uso do computador na Educação com uma fundamentação teórica diferente" (VALENTE J.,1999, p. 14).

A década de 90 foi marcada pela popularização dos computadores[28]. Valente J. (1999), Tavares (2001) e Moraes (2002) indicam a consolidação do Programa Nacional de Informática Educativa (PRONINFE)[29] e, mais tarde (1997), o Programa Nacional de Informática na Educação (PROINFO)[30]. Com a disseminação dos computadores, criou-se a cultura da alfabetização em informática e o computador passou a ser objeto de estudo, ao invés de auxiliar o aprendizado. Nessa perspectiva, conseguiu-se, no máximo, permitir que o aluno se apropriasse das partes técnicas da máquina, sem promover alterações educacionais significativas.

A primeira década, da virada do século é marcada por mudanças bruscas que vieram com a popularização da *internet*[31]. As Tecnologias da Informação e comunicação (TICs) representaram a força determinante no processo de mudança social. Assim, as políticas públicas se voltaram para a inclusão digital, como indicam Paiva (2011), Mori (2011), entre outros. Destaca-se o Governo Eletrônico - Serviço de Atendimento ao Cidadão (GESAC), programa de inclusão digital do governo federal, cuja meta foi disponibilizar a *internet* às comunidades excluídas, além do projeto de Um Computador por Aluno (UCA). Também criou-se ações voltadas para a disponibilização de conteúdos digitais, com destaque para a produção de Objetos

---

[27] LOGO, Linguagem de programação (1967) teve como base as ideias piagetianas.

[28]A Apple lançou o primeiro computador a trabalhar com ícones e mouse em 1984. A Microsoft lançou o Windows para os PC da IBM, que só obtiveram sucesso com a versão 3.0 (1990). O Windows 95 (1995) trouxe um grande avanço na interface, bem na época em que a *internet* passou a existir de forma comercial em nosso país.

[29] O PRONINFE foi instituído em 1989, que passou a funcionar por meio de centros de informática, espalhados pelo país, divulgando e analisando projetos educacionais, com ênfase na formação de professores.

[30] O PROINFO funciona de forma descentralizada sob coordenação federal, com operacionalização estadual e municipal, com a finalidade de introduzir as Tecnologias de Informação e Comunicação –TIC – nas escolas públicas de ensino médio e fundamental, além de articular os esforços e as ações desenvolvidas no setor, em especial as ações dos Núcleos de Tecnologia Educacional (NTEs), espalhados por toda a federação.

[31] Em 1984, a Nacional Science Foundation, nos Estados Unidos, cria a Internet, rede mundial de computadores que conecta governos, universidades e grandes companhias. No Brasil, surge em 1988, na USP. Foi só em 1991 que foi criado o sistema de hipertexto World Wide Web (www), mas somente no ano de 1995, o Ministério das Comunicações de Ciência e Tecnologia libera a operação comercial para nosso país. O acesso, portanto, foi difundido a partir da virada do século.

de Aprendizagem[32] (OA), assim como espaços de integração de dados, como portal Domínio Público, o Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE) e o portal do professor[33]. Também se dá popularização aos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA's), que serão caracterizadas nas páginas seguintes.

As mudanças rápidas e abrangentes, dessa última década, permitiram acesso de educandos e educadores à informação, embora se tenha perdido, em parte, o foco aos avanços pedagógicos, marcados pelos primeiros projetos de informática educacional no país. Vimos que as políticas públicas, da última década, estiveram mais ligadas à quantidade (acesso/disponibilização) do que à qualidade. Nesse contexto, o perigo pode estar em assumir que o novo é sempre melhor e que o velho deve ser descartado[34]. Por isso, consideramos importante compreendermos os diferentes tipos de *softwares* e tecnologias digitais existentes, a fim de nortear ações mais adequadas.

3.2 Softwares na educação matemática

Um *software é* qualquer conjunto de programas que instrui a máquina na execução de uma tarefa. Os *softwares* educacionais são os que, de alguma forma, contribuem com o processo educativo, mas isso não se dá automaticamente, pois "[...] é necessário que sua utilização esteja atrelada a um contexto de ensino e aprendizagem [...]" (Brasil, 1998, p. 155) e que faça a diferença no processo. A simples utilização de técnicas não é condição suficiente para garantir a aprendizagem dos conteúdos escolares.

Os *softwares* sofreram influência dos avanços tecnológicos. Enquanto os primeiros eram mais voltados a textos, a evolução das máquinas possibilitou uma riqueza maior de sons, imagens e textos. Os *softwares* educacionais são variados e podem ser classificados em diferentes tipos. Valente J. (1999), Miskulim (1999), Dantas (2010), Dizeró (2010), no geral, destacam os

[32] No Brasil, em 1997, houve um acordo de produção conjunta de Objetos de Aprendizagem (OA) com os Estados Unidos, por meio da parceria entre a Secretaria de Ensino Médio e Tecnológica (SEB) e a Secretaria de Educação à distância (SEED). A participação efetiva do Brasil se dá depois de 1999. Até 2003, a equipe da Rede Internacional e Virtual de Educação (RIVED) foi a responsável pela produção de 120 objetos nas disciplinas de Biologia, Química, Física e Matemática para o Ensino Médio. A partir de 2004, a SEED transferiu o processo de produção de OA para as Universidades e em 2005, 2006 e 2007, foi lançado o concurso RIVED, premiando OA.

[33] O Portal Domínio Público foi lançado em 2004. O BIOE e Portal do professor em 2008.

[34] Isso vem ocorrendo com produtos como o celular, por exemplo, cuja evolução dos modelos atuais contém funcionalidades antigas melhoradas, e, ainda, outras acrescentadas. Em contrapartida, a evolução dos *softwares* educacionais não se deu com a mesma proporção de investimentos que os produtos comerciais.

seguintes tipos: a) **repetição e prática** – utiliza perguntas e respostas, para revisão do material estudado, com vistas à aquisição e aplicação do conteúdo; b) **tutorial** – emprega programas organizados de acordo com uma sequência pedagógica, para agir como professor/tutor; c) **simulação** – possibilita a vivência simulada de uma situação real; d) **programação** – permite a criação de outros ambientes; e) **ferramenta** – emprega o uso de aplicativos do sistema como editor de texto, planilhas de cálculo, projetor de slides; f) **resolução de problemas** – permite desenvolvimento de estratégias mentais complexas, que permite ao usuário testar hipóteses; g) **jogos** – possibilita ao usuário entreter, motivar, despertar sua curiosidade; h) **sistemas integrados de ensino –** patrocinam ambientes que incluem várias tarefas, facilitando o gerenciamento das informações.

Quanto à influência dos *softwares* na matemática, os PCNs evidenciam a necessidade de repensar o processo de ensino-aprendizagem, pois a tecnologia altera a importância do cálculo mecânico e da manipulação simbólica, uma vez que os instrumentos fazem isso de forma mais rápida e eficaz. Nesse aspecto, alguns matemáticos, já no final do século passado, destacam que "[...] estamos no começo de uma nova era na educação matemática e isso tem atraído enorme atenção de pesquisadores da área" (D' AMBROSIO, 1999, p.8). Ponte, Oliveira e Varandas (2003) destacam que a tecnologia possibilita o ensino da matemática de modo inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de ferramentas digitais de representação.

As atividades digitais, "[...] além de naturalmente trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação" (BORBA; PENTEADO, 2010, p. 37). Assim, a informática abre a possibilidade de mudanças dentro do próprio conhecimento, tendo em vista o potencial de verificação dos objetos matemáticos que o espaço digital pode proporcionar aos usuários.

A *internet* possibilitou a criação e a popularização de, por exemplo, Objetos de Aprendizagem (OA), fazendo emergir uma grande variedade de utilização, reutilização e trocas de materiais digitais. Permitiu a comunicação em rede, quebrando o paradigma da linearidade, [...] "não existe mais apenas um fio, um caminho a seguir [...] fazemos parte de uma rede de infinitos fios, em uma trama que é definida por todos e cada um" (FAGUNDES, 1999, p. 79). Também forneceu condições para o desenvolvimento de Ambientes Virtuais de Aprendizagem

(AVAs). A riqueza das mídias e as novas formas de comunicação virtual permitem "[...] que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma "nova linguagem" que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea" (BORBA; PENTEADO, 2010, p. 48). Assim, as ferramentas digitais possibilitam uma infinidade de formas de aproximação do objeto de conhecimento.

Borba (2009) considera que as possibilidades oferecidas pelos *softwares* de criar, explorar e testar hipóteses matemáticas representam uma "primeira onda" de mudanças. Já *internet* e suas interfaces inauguraram a "segunda onda". Referindo-se a esse tema, Miskulim, Amorim e Silva (2005) indicam que talvez essa tenha sido a maior contribuição para a educação matemática (depois dos anos 80), representada no avanço e na disseminação de produtos produzidos pela tecnologia. Esses autores compreendem que o fazer matemático *online* ainda é um longo caminho a ser trilhado, pois constatam que plataformas como o TelEduc[35] não permitem trocas de [...] "fazer Matemática", talvez por serem ainda, como quase todas, bem "alfabéticas", feitas para desenvolvimento da escrita usual e que não permitem manipulações em figuras no estágio em que se encontram ou da forma que conseguimos utilizá-las" (BORBA, 2009, p. 309).

Borba (2009) destaca que o ambiente *online* não permite manipulação/criação de figuras, para que os alunos de uma sala virtual participem juntos. Outros estudos vão por esse mesmo caminho. Assis (2010) analisa as trocas mediadas por fóruns e mostra que diálogos matemáticos acontecem espontaneamente, embora sejam raros, o que exige o emprego de estratégias adequadas pelos educadores. Jucá (2011) aponta a deficiência dos modelos de EAD para trocas matemáticas e constata que a comunicação não é satisfatória e que a efetividade do ambiente virtual depende da interação, quando há ativa mediação do professor. Notare (2009) destaca alguns desses desafios e procura favorecer a comunicação *online* através da criação do ROODA Exata[36], que apresenta símbolos para a comunicação matemática. É um início para o percurso, mas não suficiente, diante dos desafios desse espaço em relação matemática.

No nosso entender, o fazer matemático no espaço virtual ainda é um campo a ser desenvolvido e precisa ser estudado através de modelos presenciais (que façam uso dos

[35] É um ambiente virtual de aprendizagem, do qual trataremos na sequência.
[36] É uma ferramenta, produzida pelo NUTED, que facilita a comunicação entre as ciências exatas, pois possibilita a utilização de símbolos, fórmulas e expressões matemáticas.

ambientes virtuais), semipresenciais (que mesclem o presencial e virtual) e totalmente virtuais. O ambiente, seja presencial ou virtual, deve promover construções, engendrar reflexões e contribuir na formação de conceitos, e, nesse aspecto, ainda existe muito a ser pesquisado e descoberto**.** Para este trabalho, consideramos importante explicitar um pouco melhor os Ambientes Virtuais de Aprendizagem e os Objetos de Aprendizagem, modelos de tecnologias da "segunda onda", que permeiam nossas ações.

3.2.1 Ambiente de aprendizagem

Os Ambientes Virtuais de Aprendizagem[37] (AVAs) são sistemas de gestão da aprendizagem, baseados na *internet*, compostos de espaços digitais flexíveis, que trazem interfaces amigáveis (favorecendo o uso e o acesso dos usuários); gerenciamento de um banco de dados (responsável por controlar as informações circuladas no ambiente); suporte às diversas tecnologias (possibilitando a disponibilização de materiais didáticos, os quais podem ser acessados a qualquer hora e lugar). Em geral, possuem ferramentas síncronas (tempo real de execução) e assíncronas. Entre as síncronas, podemos citar o chat, que permite um bate-papo e, nesse caso, pode ser usado para uma discussão em tempo real com o professor, encontro de trabalho entre alunos e espaço de convívio, além de todas as conversas ficarem gravadas no banco de dados. Entre as assíncronas, destacamos o e-mail, usado para correspondência; mural, mensagens para exposição; fórum, espaço aberto para reflexões dos participantes; biblioteca virtual, seleção de materiais virtuais; portfólio e espaço para registro de experiências.

Santos (2003), Bassani et al. (2009), Ramos et al. (2009), Silva e Silva (2009), tratando de avaliação e desenvolvimento de AVAs, indicam que os mesmos têm potencial para auxiliar na solução de problemas, para promover a interatividade, a autonomia, a colaboração e por empregarem um conjunto de ferramentas computacionais adequadas. No geral, destacam que a tecnologia não é mera solução em si mesma e até "[...] pode inclusive constituir-se um problema, se não for utilizada convenientemente" (RAMOS, et al. 2009, p. 31).

Um ambiente pode estar em constante reformulação e, enquanto houver investimentos (pessoal/financeiro/organizacional), serão acrescentadas novas funcionalidades, para melhoria do

[37] Em inglês, denomina-se Learning Management System (LMS)

atendimento, evidenciando as diferenças entre as versões. Destacamos três, a fim de observarmos a diversidade: o primeiro, de abrangência internacional; o segundo, de abrangência nacional; e o terceiro, projetado para um ambiente interno da universidade.

O **MOODLE**[38], ambiente de aprendizagem Modular e Dinâmico Orientado a Objeto, é utilizado principalmente em um contexto de e-learning (ensino eletrônico), permitindo a criação de cursos "*on-line*", páginas de disciplinas, grupos de trabalho e comunidades de aprendizagem. Segundo a própria comunidade[39], está presente em 220 países, contando com 68.097 sites registrados. O **TelEduc**[40]**,** criado pelo Núcleo de Informática Aplicada à Educação (NIED) e pelo Instituto de Computação (IC) da UNICAMP, foi desenvolvido de forma participativa, com suas ferramentas idealizadas, projetadas e depuradas, segundo as necessidades relatadas por seus usuários. Esse ambiente está presente em mais de 4000 instituições cadastradas e foi traduzido para três idiomas. O **ROODA**[41], Rede Cooperativa de Aprendizagem, foi um ambiente desenvolvido no ano 2000, pela equipe do Núcleo de Pesquisas em Tecnologia e Educação (NUTED), com o intuito de atender as demandas da UFRGS. A partir de 2003, foi reconhecido institucionalmente e passou a fazer parte do projeto de educação à distância da universidade.

3.2.2 Objeto de aprendizagem (OA)

Uma das definições mais aceitas sobre OA foi proposta por Wiley (2000): é qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para dar suporte à aprendizagem, composto de elementos de instrução baseados no computador e criado em pequenos módulos que possam ser reutilizáveis. São, assim, “[...] entidades digitais disponíveis através da *internet*” (WILEY, 2000, p.2, tradução nossa). É comum encontrarmos diferentes conceitos, pois não existe consenso entre o que os autores escrevem sobre o tema, como declara Behar et al. (2009).

Os OAs geralmente são armazenados em repositórios educacionais digitais, uma espécie de banco de dados, com o objetivo de facilitar sua busca. Há vários repositórios reconhecidos em nível internacional como mostra Tarouco (2009). São eles: *Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching* (MERLOT)[42]; *Jorum Learning do Share*[43]; *National Digital*

---

[38] *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*. Encontrado em: http://www.moodle.org.br/
[39] Encontrado em : http://moodle.org/community/ acesso em 13/09/2012
[40] Disponível em: http://www.teleduc.org.br, acesso em 13/09/2012
[41] Disponível em: https://ead.ufrgs.br/rooda/, acesso em 13/09/2012
[42] Disponível em: http://www.merlot.org/merlot/index.htm, acesso em 13/09/2012.

Learning Network[44]; *eduSource.ca*[45]; *National Learning Network*[46]. No Brasil, entre os criados pelo MEC, temos: (a) portal o Domínio Público[47]; (b) Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE[48]) e o portal do professor[49]. Existem também repositórios das Universidades, como: Laboratório Virtual[50] (LABVIRT), da USP; Coletânea de Entidades de Suporte ao uso de Tecnologia na Aprendizagem[51] (CESTA), da UFRGS, entre outros.

Rivas (2009) indica que os enfoques atuais para a utilização de OA estão descontextualizados e isolados, falhando quanto a proporcionar um efetivo resultado educacional, pela simples utilização dos objetos. Aponta falhas quanto aos métodos existentes para a criação, questionando a qualidade dos mesmos. Destaca que a maioria dos OAs ainda apresenta um enfoque tecnicista e behaviorista. Os *softwares* educacionais comercializados nem sempre vão ao encontro dos objetivos pedagógicos dos educadores, ou apresentam a qualidade técnica e gráfica requerida, o que seria ideal, como indicam Torressan e Behar (2009), Rivas (2009), entre outros.

Amante e Morgado (2001) destacam quatro etapas para a construção de OA: (a) **Concepção**: definição das linhas mestras e estabelecimento de pressupostos teóricos; (b) **Planificação:** pesquisa para a produção e condução ao *storyboard*, guia para o autor com esboços dos elementos que integram o objeto; (c) **Implementação:** desenvolvimento propriamente dito, com divisões em partes menores; (d) **Avaliação:** testagem do funcionamento do OA, seu grau de adequação ao público alvo e aos objetivos.

3.3 Softwares em geometria

Analisando os rumos da pesquisa no Brasil sobre o ensino de geometria, Sena e Dorneles (2013) indicam que as linhas de pesquisa com maior destaque são: formação de professores (21%), informática (18%), estudos de novos métodos (14%), cognição (13%) e estudos do cotidiano (11%). Os outros 23% ficam divididos em estudos históricos, materiais didáticos, filosofia, currículo e etnomatemática. A primeira metade da década de 90 foi marcada por início

---

[43] Disponível em http://www.jorum.ac.uk/, acesso em 13/09/2012.
[44] Disponível em http://www.ndlrn.edu.au/default.asp , acesso em 13/09/2012.
[45] Disponível em http://www.edusource.ca/, acesso em 13/09/2012.
[46] Disponível em: http://www.nln.ac.uk/, acesso em 13/09/2012.
[47] Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp.
[48] Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/, acesso em 13/09/2012.
[49] Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html , acesso em 13/09/2012.
[50] Disponível em: http://www.ideiasnacaixa.com/laboratoriovirtual/, acesso em 13/09/2012.
[51] Disponível em: http://www.cinted.ufrgs.br/CESTA/, acesso em 13/09/2012.

de estudos no espaço digital ligados à geometria, ressaltando vantagens do uso de *softwares* que promoviam desenhos. Os trabalhos de Fainguelernt (1996) e Miskulim (1999) demarcam o início, apoiados em teorias educacionais construtivistas. Destacam o LOGO em que o fazer geométrico se dá pela construção dos desenhos, através de linhas e ângulos direcionados por comandos. Os resultados sugerem o uso do computador não somente como uma ferramenta para promover a aprendizagem, mas, também, como um catalisador de mudanças na postura dos professores com os alunos, através de exploração, descoberta, criação e construção.

As ferramentas de geometria dinâmica ganham destaque na pesquisa a partir do ano 2000. O termo geometria dinâmica foi usado inicialmente por Nick Jakiw e Steve Raumussem, da *Key Curriculum Press*, como indica Marinho (2010), e designa não uma nova geometria, mas um tipo de *software* geométrico que permite construções como: ponto, linha, reta, segmento, triângulos, polígonos, círculos, sendo possível investigar e explorar as diversas propriedades (medidas de ângulos, comprimentos...) intrínsecas à construção de figuras geométricas. Uma vez construídas, as figuras podem movimentar-se, conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. As pesquisas destacam o *software Cabri-Géomètre II* (Software Proprietário) e, mais recentemente, o *software* Geometrix (*Software* Livre), em projetos de formação colaborativa.

Outros estudos on-line ganharam visibilidade, também a partir do ano 2000. Barbastefano (2002) destaca a criação de ferramentas que permitem o intercâmbio de construções geométricas, além da comunicação de fórmulas, expressões e gráficos de curvas e superfícies. Zulatto (2007) indica que o espaço virtual também educa, quando organizado com metodologia adequada. Lima (2007) apresenta o Projeto MECAM que descreve a criação de recursos tecnológicos para melhoria das condições de aprendizagem matemática. Assis (2010) analisa trocas mediadas por fóruns, cujos resultados mostram que diálogos matemáticos, nesses espaços, acontecem de forma espontânea, mas são raros, exigindo que os educadores promovam trocas com estratégias adequadas. Jucá (2011) também destaca que a efetividade do ambiente virtual depende da interação do grupo e ocorre quando há ativa mediação do professor.

Pelas possibilidades distintas de construção e pelo potencial para o estudo da geometria, selecionamos para a intervenção um *software* da família LOGO (*Slogo-3.0*), um de geometria dinâmica (Geometrix) e o Objeto de Aprendizagem (*MatGeo*), que construímos no processo.

Optamos por trabalhar com *softwares* livres. No entanto, houve falhas na instalação do Geometrix[52], assim o substituímos pelo o *Cabri-Géomètre II.* Abaixo, passamos a descrever algumas funções desses *softwares*, sobretudo o que nos interessou para a aproximação com o estudo efetivado na intervenção.

3.3.1 Programação - LOGO

O LOGO é uma linguagem de programação (acessível a crianças) desenvolvida a partir dos anos 60, no Instituto de Tecnologia de Massachusettes (MIT), sob a direção de Seymour Papert, matemático sul-africano, que trabalhou com Jean Piaget, em Genebra. Os congressos nacionais e internacionais destacaram seu potencial, que esfriou com o tempo. E isso se deve, de acordo com nosso ponto de vista, a três questões interligadas: às novidades das mídias digitais com avanços de sons e imagens; às dificuldades do uso pelos educadores e à concepção de que os estudantes não têm mais interesse pelo LOGO, com tanto material mais atrativo disponível.

Descrevendo a preferência dos alunos, quanto ao uso de *softwares* matemáticos a pesquisa de Sena[53] (2011a) mostra os seguintes dados: 57% preferem o LOGO, 26% MicroMundos (família Logo), 9% ClicMat (jogos matemáticos), 4% *Cabri-Géomètre* (geometria dinâmica) e 4% Objetos de Aprendizagens. Os resultados indicam que os alunos compreendem a complexidade envolvida no LOGO para construir um simples desenho, e que o desafio, aliado à oportunidade de criar passo a passo, fascina os adolescentes. Com relação a avanços de sons e imagens, o MIT lançou o Scratch[54] (família LOGO), possibilitando avanços na programação do objeto, e facilidades para criação de desenho, já não efetivado somente por comandos.

A programação permite o desenvolvimento da lógica, através da resolução de problemas, como mostram Papert (1994), Valente J. (1999), Chaves (1988) e Miskulim (1999).

---

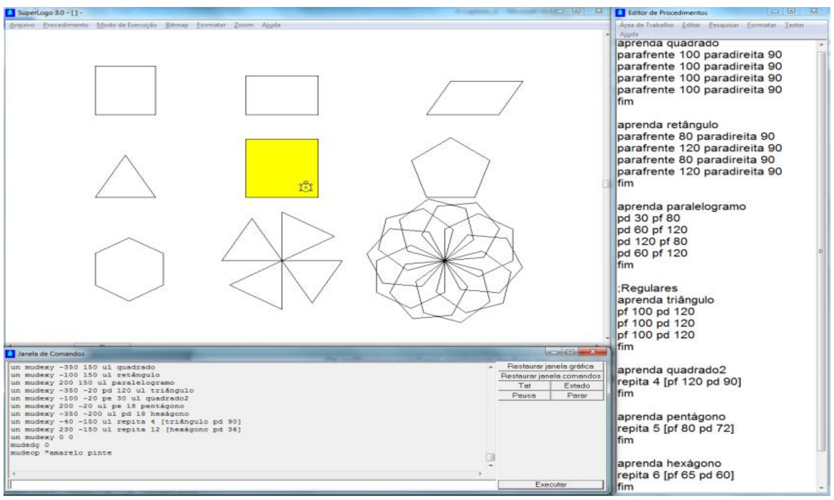
[52] Não conseguimos instalar o Geometrix, pois exigia instalação da máquina virtual Java. Os computadores eram antigos e não suportaram essa instalação.

[53] Tivemos acesso, em nosso país, a uma primeira versão ainda em MS-DOS (que tive acesso no curso de pedagogia na década de 80), ou seja, essa versão pode ser utilizada nos primeiros computadores. Isso nos faz compreender por que foram tão difundidos, nessa época, pesquisas sobre o LOGO, apontado por Valente J. (1999) como umas das poucas alternativas viáveis para a educação. Na década de 90, época dos computadores com mouse e os elementos gráficos, o NIED da Unicamp desenvolveu algumas versões para Windows. Trabalhei com projetos em LOGO95 na década de 90 (com meus alunos da 7ª série, na disciplina de matemática). De 2000 a 2005, trabalhei com o *Slogo-3.0*, no São Gonçalo, com projeto de construção envolvendo os professores de matemática e alunos da 5ª a 8ª série. Em 2008 e 2009, trabalhei com extensão em matemática para alunos do CAC.

[54] Disponível em: http://scratch.mit.edu/

Como linguagem de programação, o LOGO distingue-se das demais linguagens procedimentais por ser interpretada[55] e baseada em desenho; o que patrocina um ambiente ideal para aprender a desenvolver habilidades lógicas, mesmo com crianças/adolescentes, como mostra os diferentes trabalhos de Sena (2001/2005/2011). Selecionamos para a intervenção a versão *Slogo-3.0* pela familiaridade e pela sua estrutura. Vamos destacar a seguir, na figura 22, as possibilidades que a ferramenta proporciona para trabalharmos com polígonos.

Figura 22 - Modelos de polígonos e mosaicos no *Slogo-3.0*



Fonte: Figura elaborada a partir das atividades realizadas pelos alunos na intervenção.

No programa, o desenho é feito pela composição de suas partes, ou seja, lados e ângulos. O comando **parafrente** (**pf**) indica os passos e o comando **paradireita** (**pd**) indica giro. Para desenhar deve-se escrever na janela de comandos, por exemplo: **pf** 100, depois deve-se clicar em executar e a tartaruga irá deslocar 100 passos para onde estiver apontando sua pequena cabeça. Para ir à outra direção, basta girar antes através do comando, por exemplo: **pd** 30. Não existe comando para apagar. Só é possível executar o caminho inverso[56], o que favorece o processo de

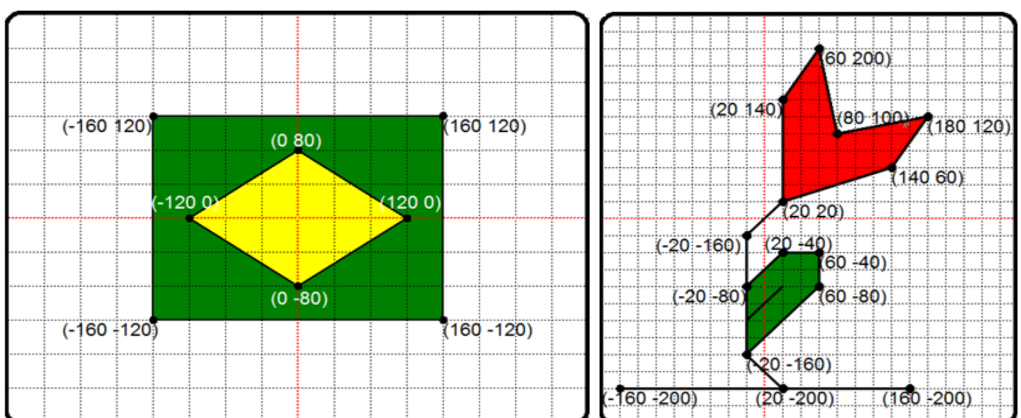
[55] A maioria das linguagens de programação é compilada, ou seja, o código escrito é submetido a um compilador, que lê o que está escrito e o converte para código executável, compreendido por linguagem de máquina. No caso do LOGO, de caráter interpretativo, cada linha é lida e executada pelo interpretador, ou seja, o computador executa o comando e retorna uma mensagem para o usuário. Esse processo é mais lento para a criação de programas executáveis, mas se mostra eficaz para compreender o que a máquina executa.

[56] Os pares de comandos inversos são: a) (**pf <> pt**) para frente - para trás; b) (**pd <> pe**) para direita - para esquerda; c) comandos (**ul <>ub**) use lápis – use borracha e, nesse caso, existe um outro comando que não é inverso, mas complementar, usado quando se quer deslocar a tartaruga sem desenhar nada, que é o comando (**un)** use nada. Todos esses processos colaboram com a lógica das proposições. Outro comando que utilizamos acima é o **mudedç** (mude a direção para onde aponta a tartaruga). Nesse caso, as inversas estariam na compreensão do círculo trigonométrico, em que o valor corresponde à direção na qual a tartaruga estará posicionada depois do comando. Assim, **mudedç 0** equivale ao norte; a direção **180** equivale ao sul; **90** ao leste; **270** ao oeste, e envolve a lógica do grupo Klein vista.

reflexão e lógica que é estimulado na simples construção de um desenho qualquer. Também é possível criar pequenos procedimentos (editor específico), que devem ter um nome simples e serem separados um do outro por blocos, iniciados com a palavra **aprenda** e encerrados com a palavra **fim.** Pronto o procedimento, é preciso atualizar (no primeiro ícone do editor), depois escrever o nome na janela de comandos e executar.

Os polígonos regulares podem, também, ser construídos através de comandos de repetição (dentro de cada colchete [...[57]]), como mostram os três últimos procedimentos do Editor (quadrado2, pentágono e hexágono), na figura 22. Os mosaicos (desenhos) foram criados a partir de comandos de repetição, ou seja, exatamente como destaque em negrito: **repita 4 [triângulo pd 90]** corresponde ao desenho da penúltima figura abaixo; **repita 12 [hexágono pd 36]** corresponde ao desenho da última figura. É possível criar modelos diferentes, trocando a figura base, a quantidade de repetição e o ângulo de giro, as duas ou as três variáveis ao mesmo tempo, o que determina uma infinidade de possibilidades lógicas para a construção dos mosaicos.

Figura 23 - Desenho feitos por alunos através da mudança de posição na coordenada cartesiana



Fonte: Marcação dos pontos das coordenadas[58], feito pela autora, baseada nos pontos utilizados pelos alunos.

Também é possível desenhar no programa mudando a posição do par ordenado, que, nesse caso, envolve a geometria analítica (cartesiana), como mostra a figura 23. Ao se deslocar de um ponto a outro, deixa rastro. Assim, a tartaruga desenha uma reta (o caminho mais curto para unir dois pontos). Nesse modelo, qualquer parte fechada de um desenho se constitui em um polígono. É possível trocar os pontos das coordenadas com o comando **mudexy** (mude a posição

[57] Nesse caso, a tarefa em bloco a ser realizada deverá estar adequadamente descrita entre colchetes.

[58] Importante destacar que a malha foi programada pela pesquisadora, com possibilidades de alterar a unidade de medida, como vimos nos exemplos acima, no primeiro a unidade é 40 passos e no segundo 20 passos.

x e a posição y). Se for dado o comando, por exemplo, **mudexy 0 0,** a tartaruga se desloca para o centro da tela (isso se já não estiver posicionada no centro).

Utilizamos esses comandos na figura 22 para mudar de posição, antes de chamar os procedimentos prontos. Já na figura 23, os desenhos são feitos a partir das mudanças dos pontos cartesianos destacados. Para riscar deve-se antes dar o comando **ul** (use lápis) e para ir de um ponto a outro; para se deslocar sem deixar rastro, utiliza-se o comando **un** (use nada), antes de executar o comando **mudexy** com os pontos adequados. Os desenhos produzidos podem ter uma simetria horizontal e vertical (caso da bandeira), simetria em somente uma das direções ou nenhuma simetria (caso da flor). Nos desenhos simétricos, é possível observar o INRC ligado ao grupo Klein, já descrito neste trabalho.

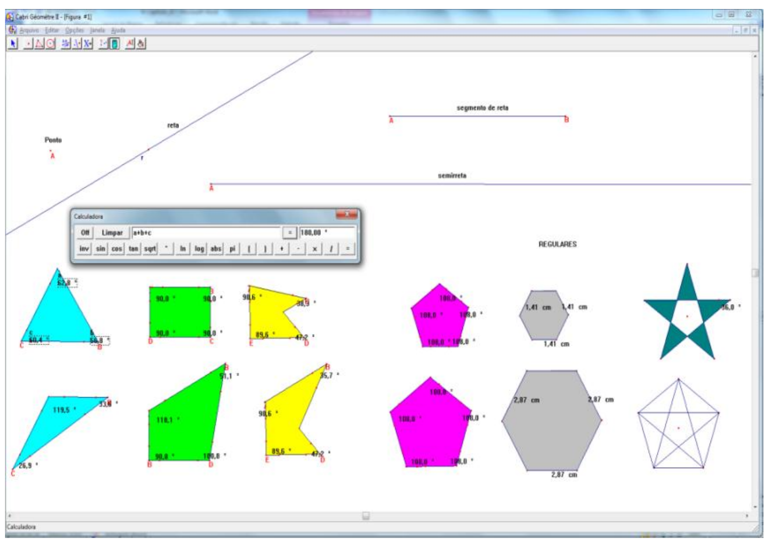
Assim, o ambiente oferece espaços distintos para experimentação. Papert (1994) destaca que programar com a tartaruga leva o sujeito a refletir sobre suas ações e, no desafio de programar, acabam se engajando na reflexão de processos mais complexos do seu próprio pensamento. O programa tem infinitas possibilidades, até por ser uma linguagem de programação, mas nos restringimos a essa explanação por ser a parte que nos interessa nos estudos de polígonos.

3.3.2 Geometria dinâmica - CABRI-GÉOMÈTRE

O *Cabri-Géomètre* foi desenvolvido por Ives Baulac, Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain, no Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG), na França. O nome traduz o caderno de rascunho interativo. Pesquisas como de Miskulim (1999), Gravina e Santarosa (1998), Marinho (2010) e Jazen (2011) apontam avanços na aprendizagem com a utilização desse *software* no Brasil. É um *software* geométrico (desenvolvido exclusivamente para estudos na área) que permite construções como ponto, linha, reta, segmento, triângulos, polígonos, círculos, sendo possível investigar e explorar as diversas propriedades (medidas de ângulos, comprimentos...), intrínsecas à construção de figuras geométricas. Depois de construídas, as figuras podem movimentar-se, conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas, o que se constitui em uma ferramenta rica de validação experimental de fatos geométricos que, para Gravina e Santarosa (1998), levam à descoberta de novas propriedades. Os estudos dessas autoras mostram que a ferramenta permite aos alunos realizarem experimentos conceituais no uso de modelos matemáticos, fato interessante para a proposta deste trabalho. Em Lisboa, a pesquisa de Junqueira (1994) indicou mudança de níveis, na perspectiva dos Van Hiele, com um processo interventivo mediado pelo *Cabri-Géomètre II.*

Nesse *software*, é possível compreender com clareza os elementos que, para Euclides (2009), compõem a figura como ponto, reta, além de subprodutos, como semirreta, segmento de reta e vetor. A ferramenta contém ícones especiais para desenhar polígonos quaisquer, polígonos regulares e triângulos específicos. Os elementos estão prontos, bastando marcar e arrastar para o palco[59] (parte central) e clicar. Depois é possível colocar rótulo ou comentário, nomeando-os, como foi feito na figura 24. Também é possível apresentar as medidas de ângulos e lados de cada figura. Com a calculadora, basta clicar nos valores dos ângulos, somando-os, como foi feito com o primeiro triângulo da figura 24.

Figura 24 - Possibilidades de estudos sobre polígonos



Fonte: Figura elaborada a partir das atividades realizadas pelos alunos na intervenção.

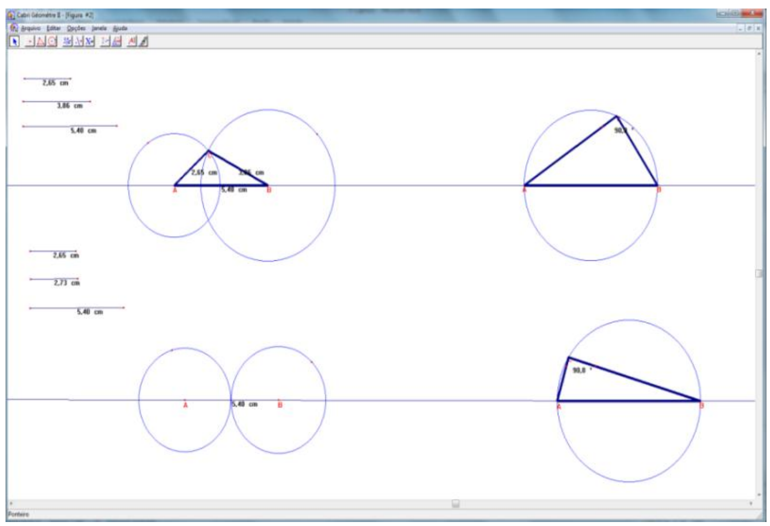
Outra possibilidade interessante da ferramenta, através da qual a reflexão pode ser promovida, é o fato de que, depois de pronto, pode-se clicar em um elemento do desenho e modificá-lo. Isso foi feito em todos os polígonos não regulares, como mostra a figura 24, em que alteramos apenas o ponto B. No caso do pentágono, marcamos os ângulos internos (108º) e

[59] No caso do segmento, devem ser dados dois cliques no palco. O triângulo precisa de três cliques. Para um polígono qualquer, é preciso dar a quantidade de cliques equivalentes aos lados da figura. Para um polígono regular, deve-se dar o primeiro clique (central), um segundo (que determina a distância entre o centro e cada ponta da figura) e, na sequência, arrastar o mouse para conseguir a quantidade de lados desejados.

depois fizemos outro semelhante ampliado, deixando os ângulos marcados (108º). Nas figuras regulares, podemos observar outras questões: no hexágono, marcamos os lados da figura (1,14 cm) e, abaixo, na figura semelhante, o lado (2,87 cm) ampliado; no caso da estrela, a primeira foi desenhada como um polígono regular e na outra conseguimos esse efeito traçando todas as diagonais possíveis de um pentágono regular. A ferramenta permite colocar o elemento no palco, observar as relações e conceituar cada uma delas.

É possível fazer reflexões sobre lados e ângulos, fazer comparações entre as figuras, alterando uma variável por vez a fim de fazer diferentes testes. Outro aspecto interessante é, por exemplo, verificar que se for triângulo inscrito em uma semicircunferência, cuja hipotenusa é igual ao seu diâmetro, esse triângulo sempre será triângulo retângulo, como mostra figura 25.

Figura 25 - Existência e identificação de triângulos em uma semicircunferência



Fonte: Figura elaborada a partir das atividades realizadas pelos alunos na intervenção.

É possível trabalhar com transferência de medidas, ou seja, pode-se ter um segmento, por exemplo, o maior deles, e transferir para reta, nomeando seus pontos A e B, como na figura 25. A partir disso, transfere-se um dos segmentos menores, a partir de A, e o outro, a partir de B. Dados três segmentos, é possível verificar a existência ou não de um triângulo, variando apenas um elemento por vez. Para isso, cria-se, então, uma circunferência[60] a partir do ponto A que passe

---

[60] Nesse caso, a circunferência não é material de estudo, mas é desenhada apenas para ser possível achar o ponto de encontro entre as transferências de medidas. Para desenhar basta abrir o quarto ícone da barra.

pelo ponto que foi transferido como medida. O mesmo é feito no ponto B, transferindo agora o outro segmento. Exatamente no ponto de encontro das duas circunferências, marca-se o ponto C.

A partir disso, por exemplo, diminuindo a medida do segmento do meio, como mostra o desenho da figura 25, é possível verificar que, dependendo do tamanho, o triângulo, juntamente com o ponto de encontro, desaparece. Se o aluno for estimulado a fazer uma série de anotações, compreenderá mais facilmente o postulado de Euclides: “De três retas [...] dadas, construir um triângulo; e é preciso as duas, sendo tomadas juntas de toda a maneira, sejam maiores do que a restante [...]” (EUCLIDES, 2009, p.114).

3.3.3 Objeto de aprendizagem- MATGEO

O objeto de aprendizagem *MatGeo* está sendo construído por nós (pesquisadora), sob a direção da orientadora, atendendo a um dos objetivos secundários da pesquisa. Compreendemos que um OA deve ter qualidade tecnológica, pedagógica e gráfica, e que deve ser produzido por uma equipe multidisciplinar, mas, aceitamos o desafio de construir sem equipe, pela formação em duas dessas áreas (computação e pedagogia) e porque tínhamos parte das ideias rascunhadas. Assim, consideramos que seria possível criar o OA, que atendesse às necessidades da pesquisa.

Para a construção do objeto, baseamo-nos nas etapas de Amante e Morgado (2001), concepção, planificação, implementação e avaliação. Realizamos testes com adolescentes[61], até ficar pronta a versão I, utilizada no projeto piloto. A partir das necessidades vistas no piloto, foi elaborada a versão II, aplicada na intervenção desta pesquisa. A partir das análises e resultados dos dados, estamos desenvolvendo a versão III, que deverá ser publicada em algum repositório para OA, após a defesa da tese. Neste trabalho, procuramos descrever o objeto na concepção do uso pela meta proposta neste estudo, detalhando a versão aplicada na intervenção.

Na versão II, o *MatGeo* foi dividido em quatro partes: **História**, **Atividades**, **Jogos** e **Ideias**, como mostram os ícones da contracapa na figura 26. Assim, há uma base construída com pequenas **histórias** interativas (três), facilitadoras das percepções de relações entre polígonos. Compreendemos que a animação é um material potencialmente significativo e, dessa forma, pode contribuir para a construção da aprendizagem, como destaca Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

[61] Realizados com aproximadamente seis adolescentes, das diferentes partes do OA.

Figura 26 - Capa e contra capa do Objeto de Aprendizagem *MatGeo*

Fonte: Objeto de aprendizagem *MatGeo*, elaborado pela autora.

As **atividades** têm ênfase no processo de classificação e organização. O **jogo** do Tangram e a parte das **ideias** para professores e alunos, serão elaborados a partir das experiências vivenciadas e dos resultados da análise dos dados deste trabalho, mas, no caso do Tangram, utilizamos uma versão da *internet*[62]. Descrevemos a seguir as três partes, Histórias, Atividades e o Tangram, com suas possibilidades lógicas.

3.3.3.1 Histórias animadas sobre polígonos

Uma das vantagens de apresentar um conteúdo através de histórias é possibilitar o estabelecimento de relações. Pesquisas, como de Silva e Silva (2012), apontam que a literatura infantil auxilia na aprendizagem da matemática. A literatura pode trazer uma riqueza de fatos matemáticos, além de promover uma experiência interdisciplinar. As experiências de inter-relação de diferentes “áreas do conhecimento se mostram altamente favorável para o desenvolvimento de habilidades matemáticas” (NACARATO; MENGALI; PASSOS 2011, p. 120). Além de utilizar a literatura existente, as três histórias foram construídas especificamente para tratar de conteúdos de geometria. Vamos descrever as três histórias separadamente: “Aventuras do quadrado[63]”, “O desfile fashion TRI[64]” e “Descobertas do quadrado[65]”.

---

[62] Encontrado em www.polyhedraldesign.com.au

[63] Surge a partir de uma história ouvida em um curso de formação de professores de matemática, ilustrada por cortes em um papel quadrado, que ganhava vida através dos lábios da palestrante.

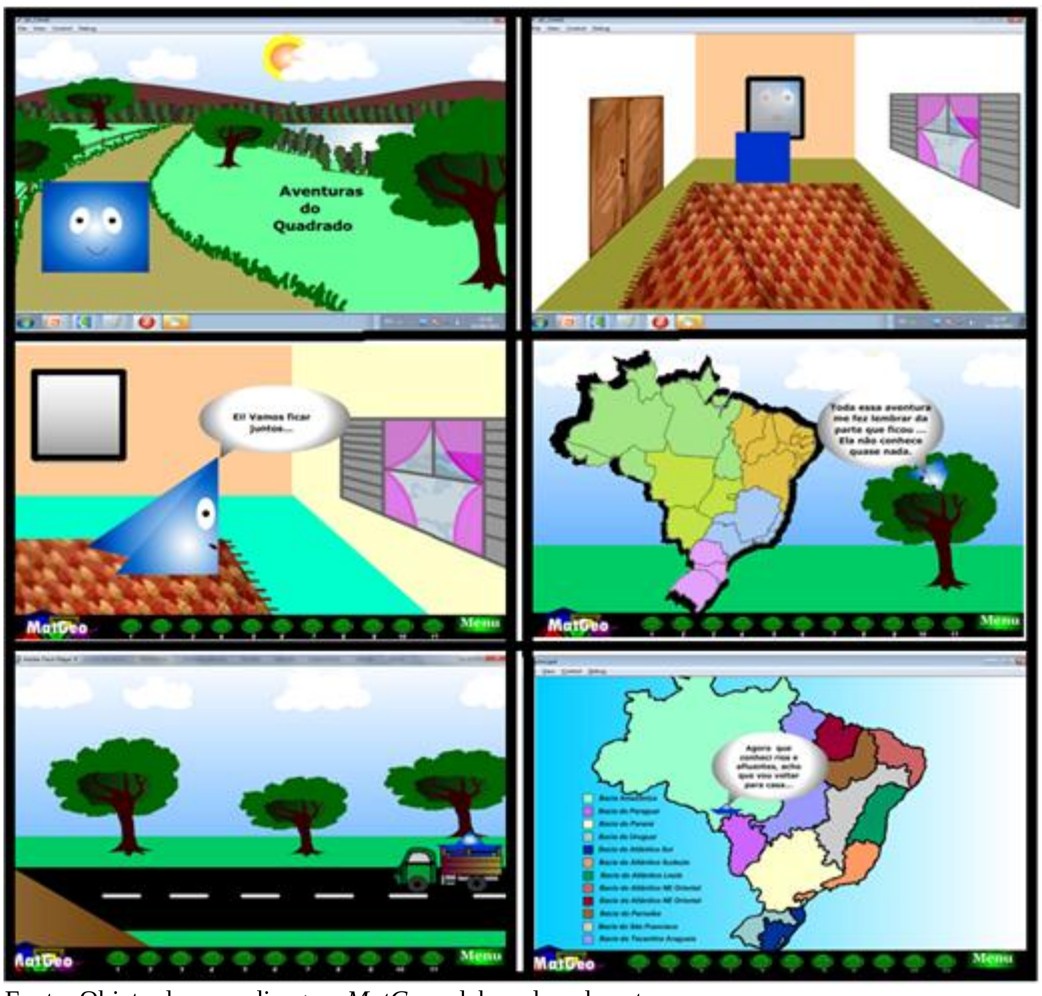
[64] Essa história surgiu na semana do projeto piloto. Embora houvesse alguns rabiscos e ressalvas de programação, a necessidade dos alunos indicou a importância dessa história.

[65] Essa história surgiu somente com a intervenção do estudo principal: em um primeiro olhar para o processo, compreendemos as dificuldades em observar detalhes nas figuras pertinentes a cada grupo de organização, assim surgiu a ideia da história. Ficou pronta no último momento, e necessita de algumas melhorias no *design* e fechamento, que estaremos construindo para a última versão.

3.3.3.1.1 Aventuras do quadrado

Essa é a história de um quadrado que deseja aventurar-se. Ele se olha no espelho (foto 2, figura 27) e, descontente com sua forma, decide dividir-se em duas partes com um corte ao meio, na diagonal. Vira dois triângulos (retângulos e isósceles): um fica parado perto do espelho, o outro vai até a frente do espelho. Percebendo-se ainda pesado, novamente se divide ao meio, em outros dois triângulos (retângulos e isósceles). Esses dois se juntam (como um pássaro) e saem pela janela viajando (foto 3, figura 27) pelos céus do Brasil.

Figura 27 - Cenas da animação "Aventuras do quadrado" pertencentes à coleção *MatGeo*



Fonte: Objeto de aprendizagem *MatGeo*, elaborado pela autora.

De forma interativa, o aluno pode clicar em qualquer estado da federação (foto 4, figura 27), quando, então, aparece o nome do estado, a capital, sua bandeira e fotos. Assim, o OA foi pensado em um contexto interdisciplinar.

Ao clicar para mudar de cena, esse “pássaro” retorna para o estado de onde iniciou a história (Mato Grosso). No retorno para casa, vai descansar e o outro triângulo que ficou em casa, ganha vida, olha para o espelho e decide fazer uma aventura diferente daquela vivida pelo “irmão”. Divide-se ao meio, em um corte paralelo ao lado maior, separando-se em um trapézio isósceles e um triângulo retângulo. O triângulo junta-se acima do maior lado do trapézio e passa a ter o formato de um “barco”, que viaja em cima do caminhão (foto 5, figura 27). É descarregado no rio, onde viaja em um percurso único, visitando rios e afluentes da nossa federação (foto 6, figura 27), e, depois, retorna a Mato Grosso, quando a base do “barco” (o trapézio isósceles) divide-se ao meio na beira do cais, e vira dois trapézios retângulos. Esses passam a representar dois sapatinhos que exploram a cidade, no caso Cáceres, que o usuário pode conhecer clicando em algumas localidades destacadas. Como os sapatos andam de maneira torta, um deles, na última divisão, quebra a ponta (virando um quadrado e um triângulo retângulo) e o outro, o calcanhar (virando um paralelogramo e outro triângulo retângulo similar aos demais).

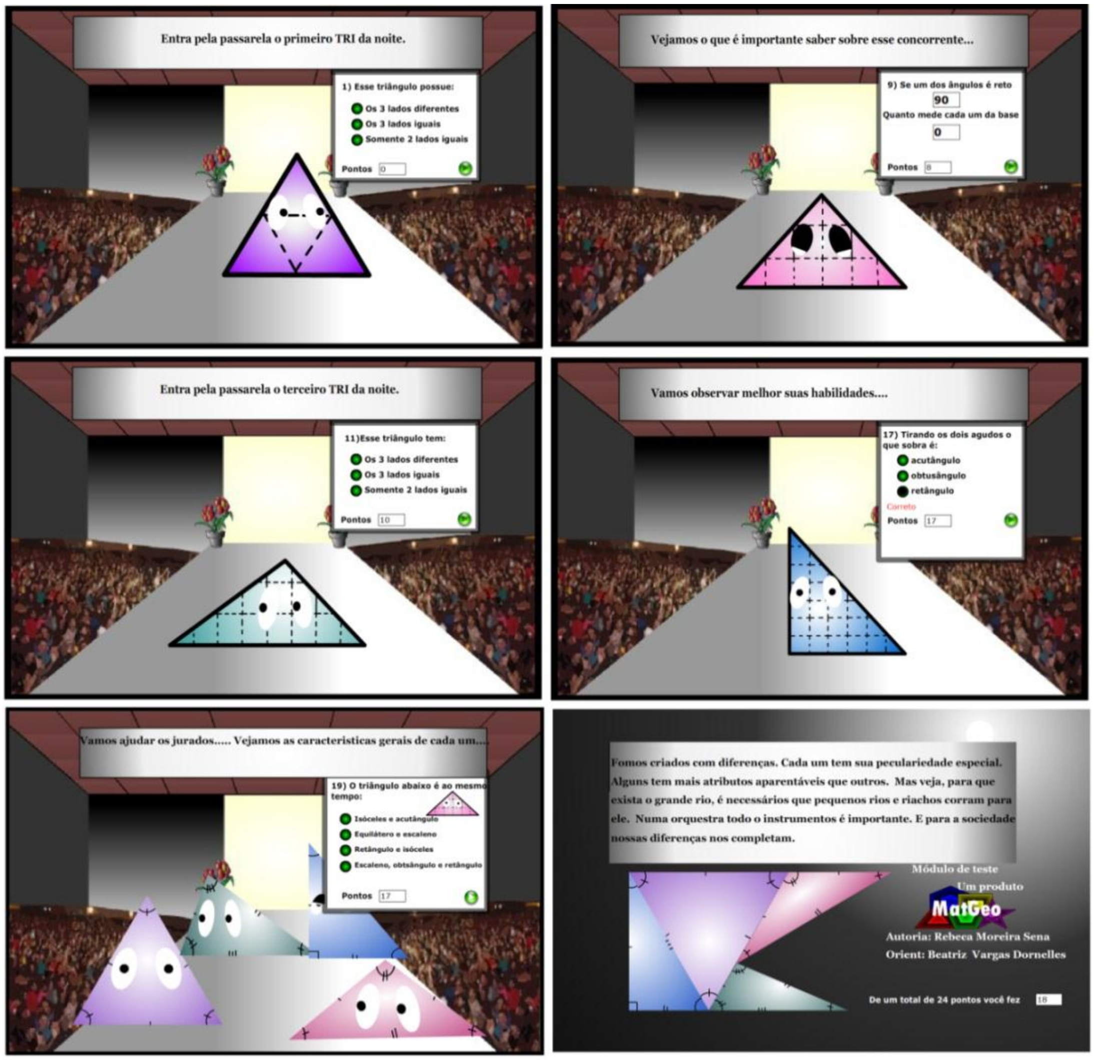
As divisões permitem ter sete peças do Tangram. Assim, conforme a peça é dividida, o aluno pode ser levado a refletir sobre as relações entre as figuras e suas partes, em um contexto topológico e compreender que uma figura pode ser dividida diversas vezes, assim como observar outras relações e generalizações.

3.3.3.1.2 Desfile fashion TRI

Na história do desfile, aparece a cada tempo uma figura diferente no palco (figura 28). Os desenhos foram elaborados sobre malhas (triangulares ou quadriculadas), a fim de levar o usuário a observar as relações envolvidas, tendo pontos de medida como parâmetro. As figuras têm proporções reais, o que permite colocar uma medida de ângulo reto, por exemplo, um canto de uma folha de papel sobre a tela e verificar se o ângulo é igual, maior ou menor que o reto. A história exige a intervenção do aluno que só consegue avançar quando acerta a questão proposta. Também existe um contador que permite saber quantos pontos o usuário faz ao passar pela história, disponível na última página.

O primeiro triângulo a desfilar é o equilátero. O segundo triângulo é isósceles/retângulo, mas, como o ângulo reto não está na base, é preciso observar a malha ou medir o ângulo em questão. O terceiro triângulo é escaleno e tem um ângulo obtusângulo, possível de observar pela composição da malha ou medindo. O quarto triângulo é escaleno e retângulo. A história chama a atenção ao se observarem os triângulos que podem ter mais de uma classificação.

Figura 28 - Cenas da animação “Desfile fashion TRI” pertencentes à coleção *MatGeo*



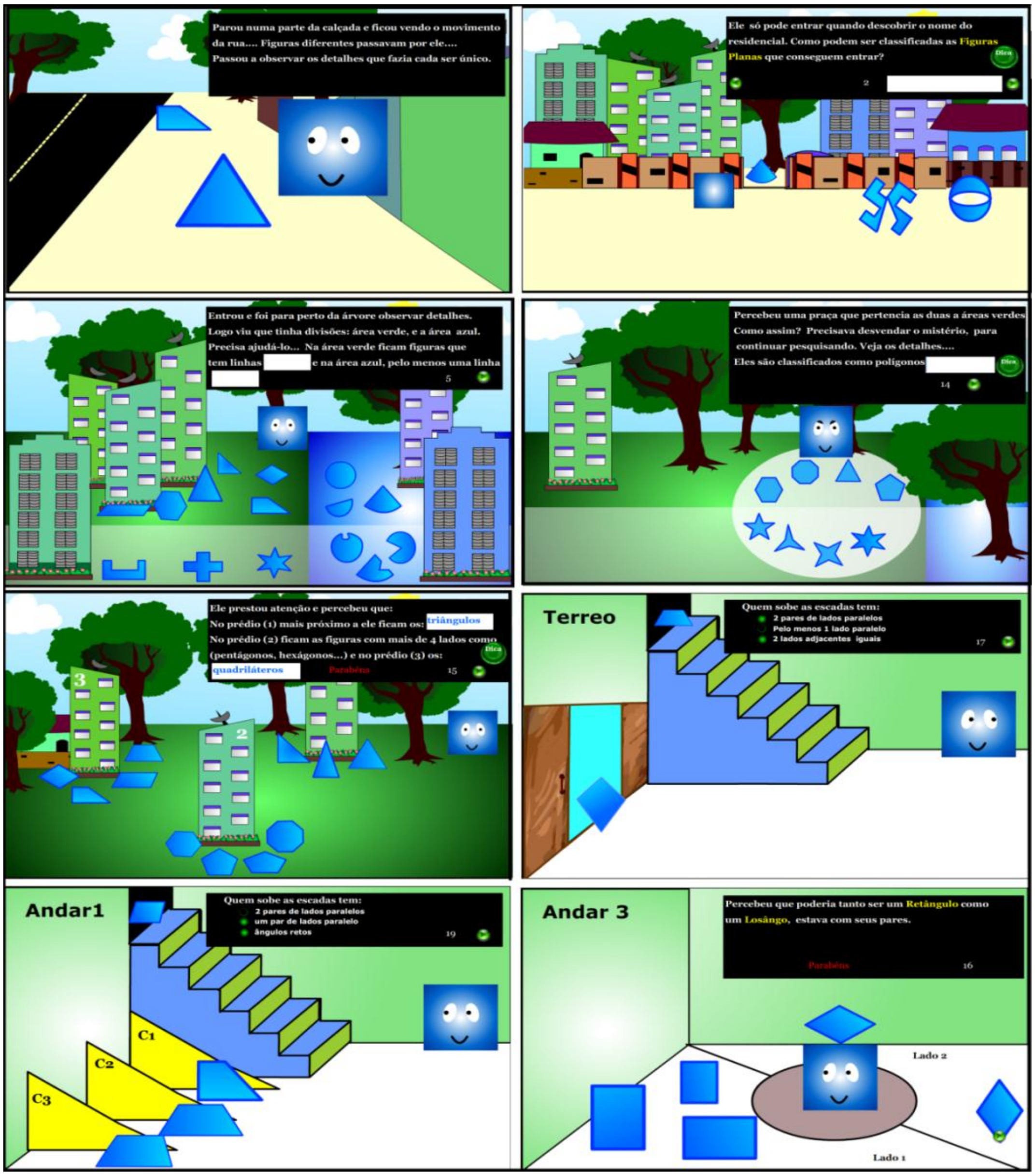
Fonte: Objeto de aprendizagem *MatGeo*, elaborado pela autora.

Quando aparecem todos os triângulos de uma vez é destacada a roupa de gala (foto 6, figura 28) outro formato para marcações de ângulos e lados, sem a malha, que encontramos nos livros didáticos. No momento da escolha do triângulo para ser o modelo da bandeira, aparece uma criança e leva a plateia a observar que não precisa escolher um e rejeitar o outro, mas que a junção de todos dá uma bela bandeira para a festa. Assim, mostra que os diferentes podem se completar na construção de um todo maior (foto 6, figura 28).

3.3.3.1.3 Descobertas do quadrado

A última história, também interativa, apresenta as descobertas de um quadrado que resolveu sair de casa para conhecer mais sobre ele mesmo e sobre os moradores do seu bairro. Fala sobre um quadrado pois ele pertence a várias classes e subclasses entre os quadriláteros.

Figura 29 - Cenas da animação "Descobertas do quadrado" pertencentes à coleção *MatGeo*



Fonte: Objeto de aprendizagem *MatGeo*, elaborado pela autora.

Assim, enquanto as figuras passam, o quadrado percebe que mora no bairro das "figuras planas". Na entrada do condomínio (foto 2, figura 29), ele observa que nem todos podem entrar e a imagem mostra que as figuras não simples ficam do lado de fora do ambiente, sendo possível reconhecer que os moradores do condomínio são as “curvas fechadas simples”. Dentro dos muros (foto 3, figura 29), a imagem separa a parte verde (dos polígonos) e a parte azul (não polígonos), e também distingue, nos prédios da frente, as figuras côncavas e, na parte de trás, as convexas. Observando melhor, somente a parte verde, existe a praça das figuras regulares (foto 4, figura 29). Nos três prédios, que estão na área dos polígonos convexos, moram os triângulos, quadriláteros e figuras com mais de quatro lados (foto 5, figura 29). Entrando no prédio dos quadriláteros, o quadrado pode notar que só sobem para os andares de cima as figuras que têm, pelo menos, um lado paralelo (trapézios). Para o segundo andar, sobem as figuras que têm dois lados paralelos ao mesmo tempo e para o terceiro somente as figuras que têm ou todos os ângulos iguais ou todos os lados iguais, sendo caminho frequente do quadrado. No último andar, o quadrado percebe que sua casa fica exatamente na interseção entre os losangos e retângulos (foto 8, figura 29) e compreende que pertence às duas classes ao mesmo tempo.

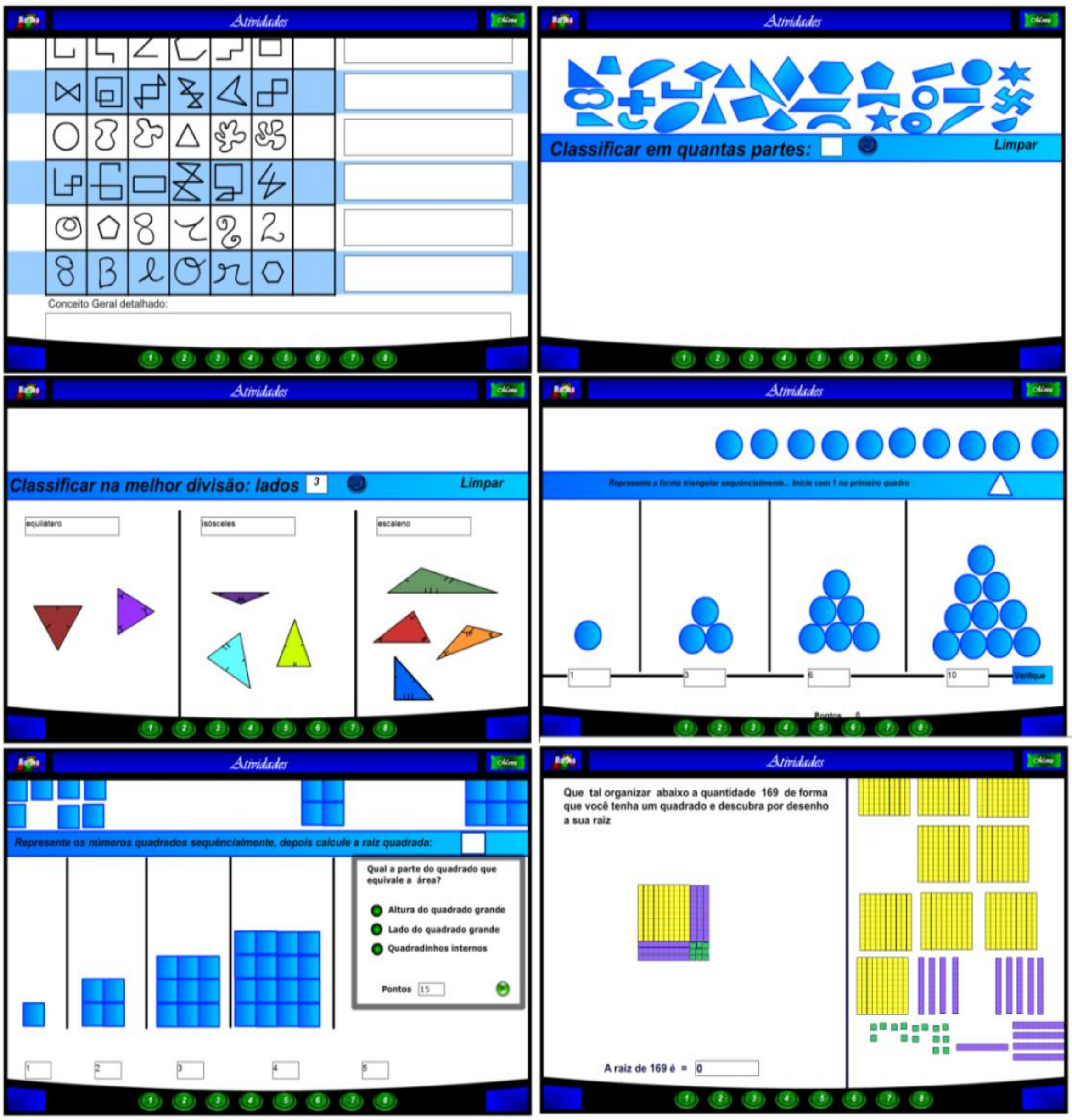
3.3.3.2 Atividades

As atividades têm o objetivo de levar o usuário a fazer diferentes relações, com base em polígonos. Elas foram divididas em três grupos que auxiliam: na descoberta da conceituação de polígonos; na organização e classificação; e nas relações que alguns polígonos estabelecem com os números.

Quanto à atividade de conceituação (foto 1, figura 30), o usuário deve observar o desenho diferente de cada linha e colocá-lo na mesma linha, mas na última coluna. No espaço branco, na frente, deve escrever por que a figura destacada é diferente das demais. Como é o polígono que ressalta, essa atividade favorece o sujeito a construir o conceito diferenciando os atributos que lhe são pertinentes dos que não são.

Quanto às atividades de classificação (foto 2 e 3, figura 30), aparecem vários polígonos, o sujeito escolhe em quantas partes quer classificar e o programa divide o espaço adequadamente. Depois, ele arrasta a figura para o espaço pelo critério que determinou. É uma atividade interessante e, quando realizada na presença de um professor/orientador, o usuário pode ser direcionado para novas classificações, a partir da primeira feita, por exemplo, aumentando ou eliminando um atributo. A atividade contribui para que o aluno construa relações de lógica, a partir do que ele observa, organiza e classifica. Existem sete tipos diferentes de modelos de classificação na coleção *MatGeo*, nesta versão.

Figura 30 - Exemplo de atividades da coleção *MatGeo*



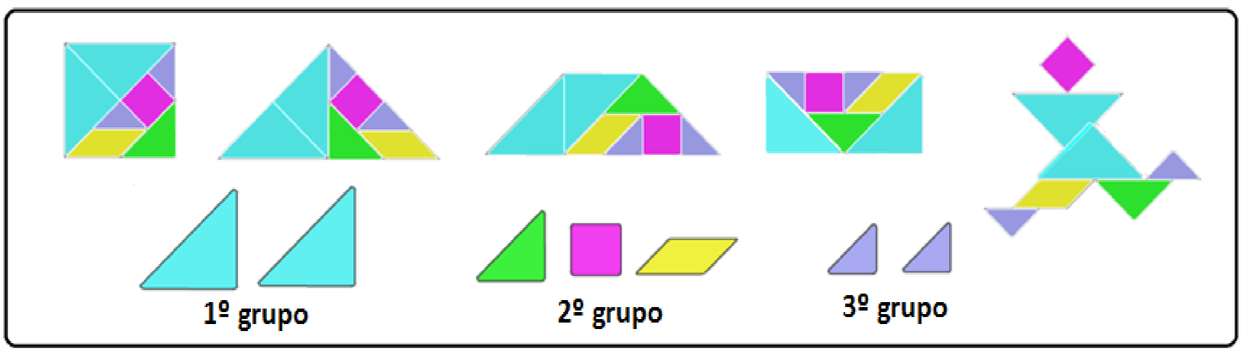
Fonte: Objeto de aprendizagem *MatGeo*, elaborado pela autora.

Quanto às atividades que relacionam o conceito de polígonos (como triângulo e quadrado) a outros conteúdos matemáticos, a atividade seguinte (foto 4, figura 30) possibilita a relação entre o desenho de um triângulo e os números triangulares, pois permite manipulação das figuras para ter os formatos exigidos pela questão. Isso ocorre de forma similar com os números quadrados (foto 5, figura 30). Os desafios não envolvem solução de um problema, mas auxiliam o sujeito a compreender as relações entre esses conteúdos. Também colocamos duas atividades relacionadas com raiz quadrada (foto 6, figura 30), a fim de que o aluno perceba que a resposta tem a ver com o desenho do quadrado e a raiz corresponde à quantidade que fica na base ou na altura, visto que, no quadrado, essas medidas são iguais.

3.3.3.3 Jogo do Tangram

O Tangram, jogo chinês das 7 peças, é formado por 5 triângulos isósceles e retângulos (semelhantes), um quadrado e um paralelogramo (não retângulo e não losango). Os dois triângulos maiores, assim como os dois menores, são iguais. É possível, na composição das 7 peças, formar um grupo enorme de composições. Não é simples reunir as peças para formar as diferentes figuras, mas compreendemos que o reconhecimento das operações lógicas e infralógicas auxiliam nesse desafio. É essa a colaboração da história “Aventuras do Quadrado”.

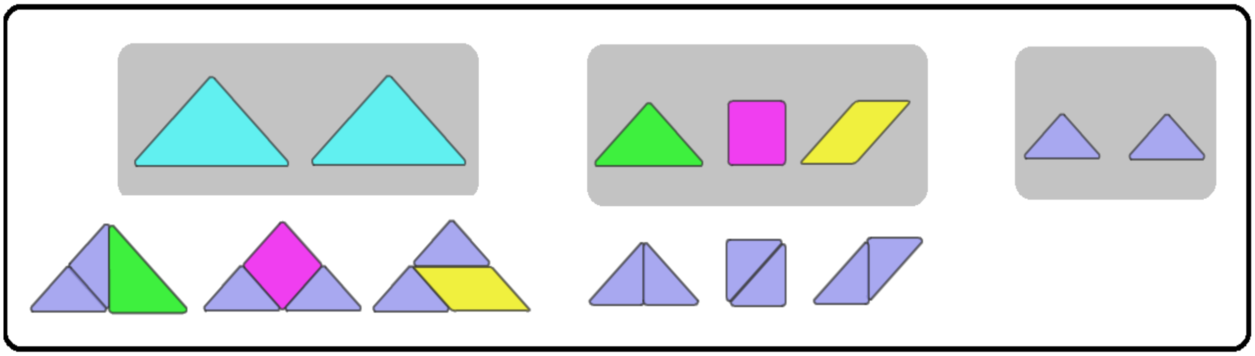
Figura 31 - Desenho feitos com 7 peças do Tangram e organizados por tipo



Fonte: Objeto de aprendizagem *MatGeo*, elaborado pela autora.

Se pensarmos na área que cada peça ocupa, comparando-as na sobreposição, é possível compreender que o primeiro grupo tem a maior área, o segundo grupo tem a ½ da área do primeiro e o terceiro grupo tem uma área equivalente ¼, como mostra figura 31. Logo abaixo, na figura 32, apresentamos a possibilidade de se obter a mesma figura na composição das peças menores.

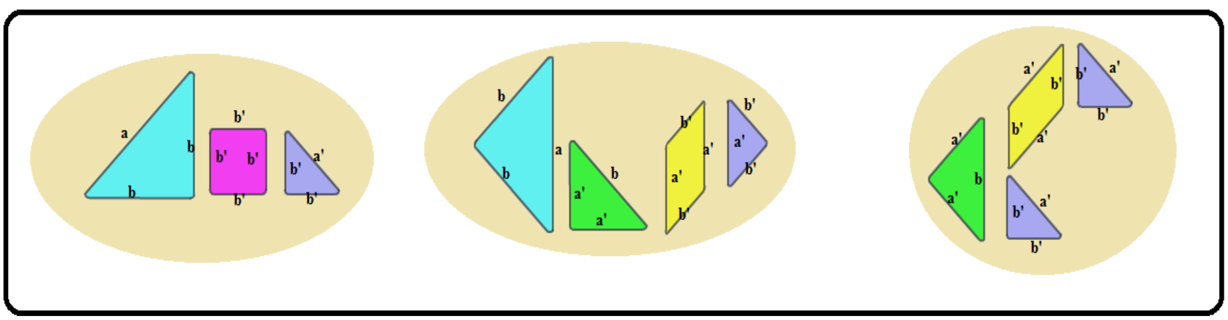
Figura 32 - Algumas relações que as peças estabelecem entre si



Fonte: Objeto de aprendizagem *MatGeo*, elaborado pela autora.

Quanto ao tamanho do lado, a fim de verificarmos em que posição cada peça se encontra, obteremos quatro tipos de medidas: a medida $\mathbf{b' = \frac{1}{2}\, b}$ e $\mathbf{a' = \frac{1}{2}\, a}$**,** como mostra a figura 33, e se encaixam em relações de igualdade ou aditivas, $\mathbf{b' + b' = b}$ **ou** $\mathbf{a' + a' = a}$, obedecendo a uma ordem de colocação e contendo uma simetria entre esses lados, como observamos na figura 33. Já a relação que existe entre **a** e **b** ou entre **a’** e **b’** é que $\mathbf{a} = \mathbf{b}\sqrt{\mathbf{2}}$ ou $\mathbf{a'} = \mathbf{b'}\sqrt{\mathbf{2}}$**,** ou seja**,** partes que não se encaixam uma na outra e que, pelas relações métricas que apresentam em geral, confundem o usuário.

Figura 33 - Relação entre o tamanho das laterais com seus possíveis vizinhos de encaixe



Fonte: Objeto de aprendizagem *MatGeo*, elaborado pela autora.

Assim, é possível formar várias totalidades com as 7 peças ou ainda outras totalidades com quantidades de peças variadas, nas quais é possível verificar as operações infralógicas elementares, as topológicas e as euclidianas, já estudadas neste trabalho. Tratando da ordem de colocações e deslocamentos, relacionadas à lógica do grupo Klein, é possível verificar alterando a posição das peças, da mesma forma que foi realizada na (figura 11) seção 2.3. É possível observar que todas as peças se encaixam, exigindo um tipo de rotação (para direita ou esquerda), com exceção do paralelogramo que precisa, além dessa, outra do tipo (para cima e para baixo), pois as diferentes posições alteram seu formato de encaixe, exigindo, assim, dupla complexidade.

Observamos que as tecnologias podem contribuir para facilitar os processos de comunicação entre indivíduos, favorecendo a aprendizagem. Também o avanço nos computadores permitiu uma exploração maior da mídia e do desenho, abrindo novas possibilidades para o espaço digital. Entre as tecnologias selecionadas para a intervenção, observamos o potencial para o desenho e desenvolvimento da lógica com a linguagem de programação (LOGO), a facilidade de tratar com componentes geométricos em um espaço de geometria dinâmica (*Cabri-Géomètre II)* e o potencial da animação e atividades do Objeto de Aprendizagem (*MatGeo*). Compreendemos, então, que parte das metas complementares foi alcançada como: a construção do Objeto de Aprendizagem, e a descrição do potencial para desenvolver os processos operatórios nas tecnologias selecionadas e construídas. Resta ainda, para a análise, identificar os avanços mediados pelas tecnologias descritas.

4 MÉTODO DE PESQUISA – ESCOLHAS E PERCURSO

Para construirmos respostas às nossas indagações, sobretudo ao objetivo central, relacionadas com os processos de elaboração e de reelaboração de conceitos sobre polígonos, optamos por uma metodologia com abordagem qualitativa, baseada em um estudo interventivo. Descrevemos, a partir deste ponto, o caminho percorrido dividido nos seguintes tópicos: universo e sujeitos da pesquisa, instrumentos de coleta de dados, descrição sucinta do estudo piloto, com uma breve análise e direcionamentos, descrição da intervenção e dos resultados.

4.1 Universo e sujeitos da pesquisa

Selecionamos alunos do 8º ano por compreendermos que pertencem à fase na qual o pensamento formal está em desenvolvimento. Selecionamos o colégio CAC[66] pela parceria em projetos anteriores e pelo livre acesso aos computadores. Enfim, precisaríamos instalar programas e fazer testes com o Objeto de Aprendizagem (OA).

Uma intervenção adequada não é simples. Por isso, foi necessária a aplicação de um projeto piloto para direcionamentos, capaz de delimitar as tecnologias utilizadas; direcionar; testar e validar o OA (versão I); indicar ideias a serem construídas no OA (versão II); delimitar o tempo e quantidade de sujeitos; definir melhor os instrumentos de coleta de dados. Assim, existiram dois momentos de intervenção: a do projeto piloto e a do estudo principal.

Participaram da intervenção do projeto piloto sete alunos, nomeados de: Al, Ed, El, Je, Jv, Ke e Lu. O grupo foi composto por dois alunos do sexo feminino (Je e Ke) e os demais do sexo masculino. A idade média do grupo era de 13,6 anos, com desvio padrão de 5,2 meses. O projeto piloto ocorreu nos meses de outubro e novembro de 2011.

Participaram do estudo principal da tese cinco[67] alunos nomeados de An, Al, Ca, Sh e Wa, com apenas um do sexo masculino (Wa). A idade média do grupo era de 12,8 anos, com desvio padrão e 3,2 meses. A intervenção aconteceu nos meses de março e abril de 2012, portanto no

[66] CAC – Colégio Adventista de Cáceres
[67] Eram efetivamente seis, mas os dados de um foram descartados, pois, além das faltas, não fez todos os testes.

primeiro semestre. Todos os sujeitos, juntamente com seus pais, assinaram um termo de consentimento para a pesquisa (Anexo A).

A seleção dos sujeitos que participaram da primeira e da segunda intervenção foi feita pelo professor que era o mesmo em 2011 e 2012. Para participar, o aluno deveria ter interesse e possibilidade de estar na escola fora do período de aula.

4.2 Instrumentos de coleta de dados

Compreendemos que nenhum de nós é hábil em explicitar o processo que envolve a aprendizagem, mesmo alcançando êxito na resolução de um desafio proposto. Vergnaud (1999) destaca que o êxito advém de processos internos estabelecidos, mas nem sempre conscientes. Assim, entendemos que o êxito pode ser um indicativo do desenvolvimento do processo, mas não sozinho, e, quanto mais o sujeito externaliza seu pensamento em relação ao tema, mais detalhes são revelados sobre o processo. Nesse contexto é que selecionamos diferentes instrumentos: a) testes; b) mapa conceitual; c) classificação digital; d) registros dos alunos.

Com a finalidade de observar os avanços, ainda no projeto piloto, foram realizados dois tipos distintos de testes: o de **reconhecimento de figuras** (Anexo B), aplicado somente aos sujeitos da intervenção do projeto piloto; e **o teste de geometria** (Anexo C), aplicado à turma do 8º ano (2011). Ambos os testes foram aplicados em dois momentos, antes e depois da intervenção.

Os testes foram reelaborados para o estudo principal. O primeiro de **reconhecimento de figuras** (Anexo D), composto de desenhos e classificações sobre polígonos, apresentou uma quantidade maior e mais concisa para o reconhecimento, comparados ao teste similar do projeto piloto, mas de igual modo foi aplicado somente ao grupo que participou da intervenção da tese. Já o segundo teste, o de geometria, foi totalmente refeito, baseado no **SAEB** (Anexo E), no qual selecionamos dez questões existentes no Modelo de Teste da Prova Brasil, referentes à geometria, próprias para a faixa etária. Esse teste foi aplicado à turma do 8º ano (2012), na qual estavam os adolescentes que participaram da intervenção, em três momentos: antes da intervenção, o **pré-teste**; depois da intervenção, o **pós-teste**; e o último, o **pós-teste tardio**, seis meses após a intervenção.

O mapa conceitual teve dupla finalidade: mostrar a evolução dos conceitos e colaborar com o processo de aprendizagem. Ele foi elaborado em três fases: a) na primeira, a cada aluno (atendido individualmente) foi apresentada a ferramenta Cmap Tools e dadas orientações para construir um mapa conceitual sobre o tema de polígonos; b) na segunda fase, cada aluno refez seu mapa, todos no mesmo momento, na oitava sessão; c) na terceira fase, reelaboraram o mapa no momento das entrevistas individuais, quando questionados sobre as relações estabelecidas, com a finalidade de evocar novas relações.

A classificação foi realizada de duas maneiras diferentes: (a) gerais (com todos em aula), feita com polígonos de papel, somente quadriláteros, somente triângulos; (b) individuais (entrevista), feita no *MatGeo* com acompanhamento do processo (filmagem) e com confronto de ideias, a partir das elaborações realizadas.

Os registros envolveram diferentes fontes, como: registro oral (RO), advindo das sessões interventivas; a entrevista individual (EI); a escrita *online* (EO), através da participação digital no fórum; a escrita do diário (ED), que deveria ser feita em casa, após cada encontro; a escrita final (EF), feito no último encontro, juntamente com o pós-teste.

4.3 Descrição sucinta do projeto piloto

A intervenção, do projeto piloto, ocorreu entre os meses de outubro e novembro de 2011. Foram oito sessões, de 3 horas, com um intervalo de ½ hora. Apresentamos, na sequência as sessões interventivas, descrição geral dos resultados e direcionamentos para a tese.

4.3.1 Intervenção do projeto piloto

As atividades que ocorreram no momento da intervenção com os alunos Al, Ed, El, Je, Jv, Ke e Lu estão descritas no quadro 9.

Quadro 9 - Intervenção no projeto piloto

Data	Objetivo	Atividades realizadas	Tecnologia
25/10	• Aplicar o pré-teste; • Introduzir o curso; • Avaliar processos de classificação;	Os alunos realizaram o teste de reconhecimento, e efetivaram o cadastro no Moodle. Depois, com jogos de poliedros (papel), realizaram classificações em grupo e digitais. Por último, resolveram os desafios do Tangram.	• Classificação (*MatGeo*) • Jogo Tangram • Moodle
26/10	• Realizar classificações; • Construir relações entre o quadrado e suas partes.	Realizaram novas classificações (digitais) de polígonos. Interagiram com a história “Aventuras do Quadrado” e novamente resolveram os desafios do Tangram.	• *MatGeo* • Jogo Tangram
27/10	• Construir polígonos a partir da noção de lado e ângulo.	Trabalharam com os comandos básicos do *Slogo-3.0*. Depois, foram desafiados a desenhar um retângulo, trapézio, paralelogramo e polígonos regulares.	• *Slogo-3.0*
28/10	• Construir polígonos, por mudança de pontos na coordenada cartesiana.	Primeiro, desenharam na malha quadriculada (papel) com linhas retas. Então, marcaram o ponto da coordenada cartesiana (XY). Depois, construíram o desenho no *Slogo-3.0*, ampliando 20 vezes.	• *Slogo-3.0* com apoio de uma malha programada
31/10	• Reconhecer propriedades dos quadriláteros e triângulos	Realizaram as atividades dos desafios de triângulos e quadrado que disponibilizamos. Depois, participaram da história interativa “Desfile fashion TRI”.	• Jogos dos Triângulos/ Quadrado[68]
1/11	• Resolver situações, problemas relativos à área e perímetro.	Trabalharam com situações e problemas relacionadas com área e perímetro de polígonos desenhados sobre malha triangular ou quadriculada.	• MicroMundus[69]
03/11	• Compor o desenho através da análise de seus elementos com variação de alguns.	Traçaram ponto, reta e semirreta. Depois, conceituaram cada um a partir da visualização. Desenharam vários tipos de polígonos e, nos regulares, as suas diagonais. Verificaram a possibilidade de construção de triângulo.	• *Cabri-Géomètre* II
04/11	• Verificar conceitos elaborados; • Aplicar o pós-teste	No Cmap, eles elaboraram um mapa conceitual, referente à geometria estudada nos encontros. Depois, realizamos uma entrevista grupal e aplicamos o pós-teste de lógica.	• Cmap

Fonte: Dados coletados na intervenção do projeto piloto.

Foram ao todo 24 horas de intervenção, no turno oposto, contendo a aplicação do pré-teste e pós-teste de reconhecimento de figuras. Já o pré-teste e o pós-teste de geometria foi aplicado para todos os alunos do 8º ano, pela manhã. Consideramos interessante trazer alguns resultados do projeto piloto que podem colaborar para a interpretação dos dados da pesquisa realizada.

4.3.2 Descrição geral dos resultados

Dando sequência apresentamos os resultados dos testes, sendo que a tabela 2 mostra resultados do teste de reconhecimento (Anexo B), no qual era possível alcançar até 29 pontos.

[68] Está disponível em: http://www.uff.br/cdme/jcq/jcq-html/jcq-br.html. Não foi apresentada no capítulo 4, pois não foi utilizada na intervenção da tese, mas é uma tecnologia possível para o objetivo proposto.
[69] É um *software* da família LOGO, no qual construímos desafios para serem realizados. Não apresentamos a tecnologia e os desafios no capítulo anterior, pois não foram utilizados na intervenção da tese.

Tabela 2 - Resultado do teste de reconhecimento do projeto piloto

Reconhecimento	Al	Ed	El	Je	Jo	Ke	Lu	Média
Pré-teste	10	7	12	7	16	7	13	**10,3**
Pós-teste	15	12	20	10	22	12	21	**16**

Fonte: Dados do projeto piloto.

A tabela 3 mostra resultados do teste de geometria (Anexo C), no qual era possível alcançar 13 pontos.

Tabela 3 - Resultados do teste geral de geometria do projeto piloto

Geometria	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	M	Al	Ed	El	Je	Jo	Ke	Lu	M
Pré-teste	3	1,5	4,5	2	1	2,1	0,6	1,1	1,1	1,4	0,8	4,8	**2**	4	2,2	7	2,4	4	1,1	5,5	**3,7**
Pós-teste	3,5	1,2	5,5	1,1	1,3	3	0,6	0,9	1,2	1,2	1,7	6,5	**2,3**	6,4	3,6	7,3	3	8,9	1,5	8,4	**5,6**

Fonte: Dados do projeto piloto.
Legenda: As colunas (0-12) são as notas da sala, seguidas das médias. As próximas colunas são as notas do grupo experimental seguidas das médias.

A comparação entre as médias do pré-teste e do pós-teste de reconhecimento de figuras, aplicado somente ao grupo experimental, apresenta avanços equivalentes a 55,3%. Já o teste de geometria indica avanços de 51%, para o grupo que participou da intervenção, enquanto que o resto da turma foi de 15%.

Portanto, os dados indicaram que a intervenção mostrou-se adequada para o propósito desta pesquisa. Observamos, através das falas, escritas e construção do mapa conceitual a evolução dos conceitos, que poderia elucidar o processo que queríamos observar. Os alunos apresentaram grande interesse pelas atividades e sinalizaram interesse em continuar com mais sessões. Assim, compreendemos que a intervenção foi eficaz. No entanto, a análise geral do processo indicou ajustes a serem feitos, que descrevemos a seguir, em direcionamentos.

4.3.3 Direcionamentos

O interesse e a participação dos alunos apontaram que o tempo deveria ser reduzido, ficando com duas horas sem intervalos; as sessões não deveriam ser sequenciais, tendo no mínimo um dia de intervalo entre um encontro e outro, para replanejamento; a quantidade de sujeitos deveria ser reduzida para, no máximo, seis, pois percebemos que um grupo maior dificulta a coleta de dados e uma observação mais minuciosa necessárias à pesquisa proposta; as regras precisariam estar bem estabelecidas para melhor andamento das sessões interventivas.

Todas as ferramentas selecionadas apresentaram-se úteis para desenvolvimento do processo. Os alunos não mostraram dificuldades quanto ao uso das tecnologias apresentadas, com exceção da malha (*Slogo-3.0*), que exigia dupla ação: encontrar o ponto cartesiano e depois ampliar esse ponto para reproduzi-lo no meio digital. Isso foi resolvido com a malha (em papel), contendo os números proporcionais à malha digital. Quanto ao objeto de aprendizagem, os resultados acima sinalizaram efeitos positivos do seu uso.

Na análise dos encontros[70], foi reconhecida a necessidade de rever conteúdos, melhorar a coleta de dados, inserir pequenas alterações sequenciais entre tecnologias/atividades trabalhadas e manter o foco. Isso fez com que selecionássemos três tecnologias de apoio às sessões, restringindo o conteúdo somente a polígonos.

Em relação aos instrumentos de coleta de dados, consideramos que os diferentes tipos, utilizados no projeto piloto, estariam adequados. No entanto, para facilitar o processo de análise, decidimos focar nos testes, que necessitavam de alterações; em alguns registros orais e escritos que privilegiassem construções (únicas) e no mapa conceitual, que teria destaque para alcançar o objetivo principal deste trabalho. Dessa forma, decidimos que elaboração do mapa se daria em três fases. Essas sugestões nortearam as escolhas e o processo interventivo da pesquisa.

4.4 Descrição da intervenção

A intervenção ocorreu em 10 sessões, entre os meses de março e abril de 2012, das 14h às 16h, descritas na sequência.

4.4.1 Sessões de intervenção

1ª sessão (22/03/2012) – teve como objetivo reconhecer os conhecimentos prévios dos alunos referentes a polígonos. Foi aplicado o pré-teste de reconhecimento de figuras (Anexo D). Depois, os alunos preencheram o questionário de caracterização (Anexo F). Na sequência, foram para o Moodle, efetivando seu cadastro no ambiente digital. Depois, foi observado o que eles conheciam sobre polígonos em um debate sobre o assunto. No final da sessão, com o objetivo de

[70] Aqui só destacamos os resultados que contribuíram com a melhoria do processo e não para alcançar o objetivo da tese, realizada posteriormente com os dados da intervenção sequente desenvolvida.

evitar desistências, eles conheceram a ferramenta *Slogo-3.0* e tiveram oportunidade de desenhar o quadrado e o retângulo.

2ª sessão (26/03/2012) – teve como objetivo levar os alunos a compreenderem as relações que definem um polígono, com apoio da atividade respectiva do *MatGeo*, assim como oportunizar a construção do conceitos das diferentes figuras, a partir das partes que as compõem. Para isso, no *Slogo-3.0*, eles foram desafiados a desenhar retângulo, trapézio, paralelogramo e polígonos regulares de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lados, a partir de seus elementos, compondo assim relações. Os polígonos regulares foram construídos por comandos de repetição. No final da aula, fizeram alguns modelos de mosaicos (desenhos), chamando várias vezes o polígono regular escolhido e dando um giro no ângulo ou outra alteração qualquer, para executar o próximo comando.

3ª sessão (29/03/2012) – teve como objetivo compor a figura em seus elementos, para facilitar o reconhecimento. Para isso foi utilizado o *Cabri-Géomètre II*, em que os alunos tiveram a oportunidade de traçar/conceituar ponto, reta, semirreta e segmento de reta. Depois, distinguiram cada elemento a partir da observação e através de comentários. Na sequência, foram instruídos a dividir a tela, desenhando de um lado polígonos convexos e, do outro, côncavos. Então, eles foram instruídos a desenhar somente figuras regulares convexas de 3, 4, 5, 6, 7, 8 lados, nas quais deveriam traçar todas as diagonais. A seguir, eles foram orientados a preencher uma tabela, em que deveriam marcar o valor do lado, de um ângulo, a soma de todos os ângulos e a quantidade de diagonais para cada polígono desenhado com suas diagonais.

4ª sessão (02/04/2012) – teve como objetivo levar os alunos a distinguirem os polígonos que formam o Tangram e as relações que se estabelecem entre suas partes, com a finalidade de formar diferentes totalidades com as 7 peças. Primeiramente, eles conheceram o jogo e tentaram resolver os desafios propostos em aproximadamente 30 minutos. Alguns estavam impacientes, pois não conseguiam formar nenhuma totalidade e queriam desistir. Nenhum deles conseguiu formar qualquer combinação possível nesse tempo. Então, passaram a interagir com a história "Aventuras do Quadrado" do *MatGeo*. Ficaram encantados com a animação, mas passaram rapidamente por ela. Foram instigados a cortar uma folha de papel quadrada, exatamente igual aos passos da história. Para isso, retornaram a cada parte da história percebendo detalhes e observando relações. Com as 7 peças em mãos, foram orientados a pensar na história, remontá-la, e, depois, formar o quadrado. Na sequência, resolveram os demais desafios do jogo digital.

5ª sessão (04/04/2012) – teve como objetivo levar os alunos a reconhecerem as propriedades dos triângulos. Para isso, foram distribuídas malhas triangulares para cada aluno, nas quais fizeram pequenos desenhos (simples) e os reproduziram em uma malha semelhante (digital), no *Slogo-3.0*. Depois, eles interagiram com a história do “Desfile fashion TRI”, no *MatGeo*. No final da aula (com objetivo de preparar para a próxima), foram questionados a pensar em que outros conteúdos matemáticos encontravam a palavra quadrado, registrando suas descobertas.

6ª sessão (09/04/2012) – teve como objetivo levar os alunos a compreender/construirem relações entre triângulo, mas, sobretudo, do quadrado e outros conteúdos matemáticos. No fórum, eles indicaram tipos de uso, sem justificar o motivo. Trabalharam com as atividades do *MatGeo*, nas quais, primeiramente, identificaram os números triangulares e quadrados. Relacionado à raiz quadrada, eles formaram um desenho de quadrado e a partir disso, poderiam identificar a base para saber qual era a raiz desse número, apoiados pelas duas atividades (foto 6, da figura 30). Quanto ao quadrado[71] de uma soma algébrica, foi mostrado (em papel) um quadrado **a** (cor laranja), de base 3, dividido em 9 partes iguais, e um segundo quadrado **b** (cor azul), de base 2, dividido em 4 partes iguais, representando $(a + b)^2$, nesse exemplo $(3 + 2)^2$.

7ª sessão (12/04/2012) – teve como objetivo levar os alunos a descobrirem propriedades dos quadriláteros, a partir de outras observações sobre o quadrado, comparando-as às propriedades das demais figuras. Primeiramente, manipularam o jogo de papel dos polígonos, com destaque para quadriláteros, que deveriam ser agrupados. Depois, interagiram com a história “Descobertas do quadrado”, elaborada para atender essa sessão. A partir das observações percebidas (pois tinham que acertar para continuar na animação), foram coordenando as relações observadas. No final da aula, separados em dupla, fizeram um cartaz, agrupando os polígonos.

8ª sessão (16/04/2012) - os primeiros 20 minutos dessa sessão foram reservados para que os alunos refizessem o mapa conceitual, a partir de tudo que tinham aprendido até o momento.

[71] Só não conseguimos programar essa parte, mas pretendemos fazer para a versão III do Objeto.

Desse momento em diante, iniciou-se as atividades da sessão cujo objetivo era compreender relações entre os triângulos e sua existência a partir de três retas quaisquer. Trabalharam primeiramente com o *Cabri-Géomètre II*, identificando o tipo de triângulo inscrito em uma semicircunferência, como mostrado na figura 25 (segunda parte). Depois, trabalhamos com as possibilidades de existência de um triângulo, através da construção conjunta dos modelos apresentados na figura 25.

9ª sessão (19/04/2012) - teve como objetivo possibilitar a construção de desenho de polígonos por mudança de ponto na coordenada cartesiana. Eles primeiramente fizeram o desenho na malha quadriculada e, depois por alteração de pontos, com comandos no *Slogo-3.0*, construíram seus desenhos no espaço digital.

10ª sessão (23/04/2012) - teve como objetivo verificar a alteração nos conceitos através do pós-teste de reconhecimento de figuras (Anexo D). Depois, cada sujeito fez uma redação sobre o processo geral. Aqueles que terminaram antes também participaram do último fórum revelando descobertas realizadas. Depois, o grupo todo foi reunido para a última entrevista geral.

4.4.2 Entrevistas individuais

Os sujeitos da pesquisa também participaram de entrevistas individuais, pré-agendadas, de 30 minutos, distribuídas segundo o quadro 10.

Quadro 10 - Entrevistas individuais

Entrevista 30 (min)	Objetivo	Atividades realizadas	Tecnologia (Coleta)
26-29/03	• Apresentar o CMAP • Resgatar os conhecimentos iniciais	Conheceram, primeiramente, o funcionamento do CMAP. Depois, os alunos construíram um mapa do que sabiam sobre o assunto.	CMAPs
02-04/04	• Classificar/organizar e compreender relações das figuras em geral	Trabalharam com atividades de classificação do *MatGeo*: figuras planas compostas pelos testes utilizados pelo casal Van Hiele, associadas a outras figuras dos testes feitos por Piaget e Inhelder.	*MatGeo*
09-12/04	• Classificar/organizar e compreender relações dos quadriláteros e triângulos	Trabalharam nas atividades de classificação do *MatGeo*.	*MatGeo*
16-23/04	• Reelaborar conceito	Reelaboraram o mapa conceitual, a partir do confronto de ideias sobre as construções/relações estabelecidas.	CMAPs

Fonte: Dados de atividades dos alunos coletados na intervenção.

4.5 Caracterização dos participantes da pesquisa

Consideramos interessante revelar mais detalhes dos participantes da pesquisa realizada. Apresentamos, na tabela 4, alguns dados dos cinco sujeitos, segundo o questionário de caracterização (Anexo F).

Tabela 4 - Sujeitos da pesquisa

Alunos	Idade	Internet/ semana	Internet/ dia	Tempo/TV	Tempo Estudo	Tempo Sono	Gosta/ Matemática	Boas Notas[72]
Al	13,1	3 vezes	2,5 h/ dia	3 h/dia	1 h/d	+ 8 h/dia	pouco	1
An	12,8	7 vezes	2,5 h/dia	+ 3 h/dia	(*)[73]	8 h/dia	muito	2
Ca	12,9	1 vez	0,5 h/dia	2,5 h/dia	0,5 h/ dia	7 h/dia	pouco	3
Sh	12,3	3 vezes	2,5 h/dia	1 h/dia	1 h/dia	+ 8 h/dia	muito	2
Wa	13,1	7 vezes	2 h/dia	1h/dia	1h/dia	8 h/dia	muito	2

Fonte: Dados coletados na intervenção no questionário de caracterização, respondido no primeiro dia.

Os quatro primeiros sujeitos da tabela são do sexo feminino e somente o último é do sexo masculino. Os alunos estão em uma mesma faixa etária, com idade média de 12,8 anos. Todos têm computador em casa com acesso à *internet* e permanecem conectados aproximadamente 2 horas por dia, ficam 2 horas na frente da televisão, dedicam 1 hora para o estudo e dormem, geralmente, 8 horas por dia.

Os resultados do questionário mostram que todos os sujeitos afirmam gostar de matemática (uns mais do que outros), porém apenas um disse que geralmente tira boas notas. Os demais apresentam boas notas de vez em quando e um deles raramente tira boas notas.

Em relação às tecnologias digitais, observamos que os sujeitos conhecem as ferramentas básicas do sistema (texto, slides, apresentação, planilha) e não têm dificuldade de lidar com o computador (ferramentas, e-mail, redes sociais, entre outros). Nenhum deles é analfabeto digital.

4.6 Descrição dos resultados

Apresentamos primeiramente os resultados dos testes, seguidos dos conceitos prévios observados nos testes iniciais. A seguir, os conceitos e relações estabelecidas, conforme

[72] (1) Geralmente tira boas notas; (2) de vez em quando tira boas notas; (3) raramente tira boas notas;
[73] Nesse caso, escreveu que não estuda todo dia.

observação nos mapas, os processos de classificação e, por último, as relações e conceitos constituídos, revelados nos testes finais.

4.6.1 Resultados dos Pré-Teste x Pós-teste

Apresentamos os resultados dos diferentes momentos: pré-teste (antes da intervenção), pós-teste (logo depois da intervenção) e pós-teste tardio (realizado 6 meses depois da intervenção). No teste de reconhecimento das figuras, cada aluno poderia alcançar 103 pontos[74] no total. A tabela 5 mostra os acertos em cada fase do teste, a soma e a média geral das notas.

Tabela 5 - Números de acertos no teste de reconhecimento

Lógica	Al	An	Ca	Sh	Wa	Soma	Média
Pré-teste	17	35	13	21	12	**98**	**19,6**
Pós-teste	70	85	47	78	73	**353**	**70,6**
Pós-teste tardio	36	58	17	29	40	**180**	**36**

Fonte: Dados dos testes de lógica coletados na intervenção.

No teste SAEB, o aluno poderia alcançar no máximo 10 pontos. Todas as questões eram de alternativas, mas havia espaço para justificativa. Na tabela 6, mostramos os resultados da sala, na qual os nomeados correspondem aos que participaram da intervenção e os numerados ao grupo controle[75], ambos seguidos das médias gerais, como mostram as colunas em destaque.

Tabela 6 - Resultados dos três momentos de teste do SAEB

SAEB	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	M	Al	An	Ca	Sh	Wa	M
Pré-teste	4	6	5	3	3	2	3	3	3	3	3	2	3	4	2	5	3	**3,4**	4	4	3	4	7	**4,4**
Pós-teste	5	8	3	4	4	4	4	5	2	2	7	5	3	3	5	4	5	**4,3**	5	7	5	5	6	**5,6**
Pós-teste tardio	5	8	8	5	3	5	5	7	4	6	5	4	6	4	5	4	7	**5,4**	7	8	6	6,5	7	**6,8**
Total de justificativas	7	4	12	2	3	3	2	3	2	0	1	2	2	3	0	4	1	**3**	10	13	4	7	2	**7,2**

Fonte: Dados do teste SAEB, coletados na intervenção.
Legenda: As colunas (0-17) são as notas do grupo controle, seguidas das médias. As próximas colunas são as notas do grupo experimental seguidas das médias gerais.

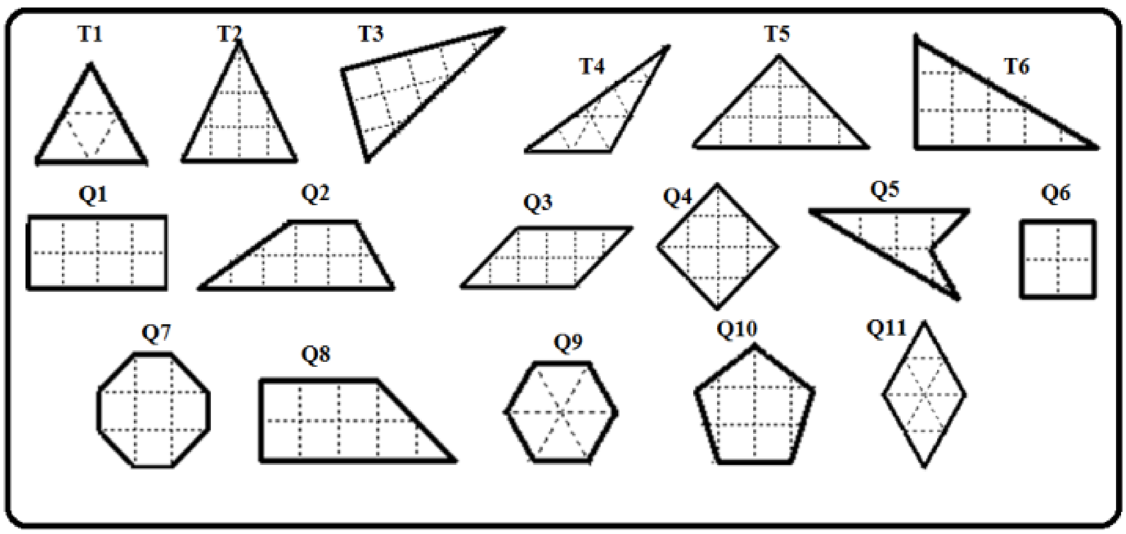
[74] Peso 2 para o desenho e peso 1 para cada relação assinalada corretamente.
[75] Refere-se aos alunos da sala que não participaram da intervenção.

A tabela mostra a quantidade de exercícios corretos nos três momentos do teste SAEB e, na última linha, o total de justificativas, ou seja, exercícios que foram resolvidos ou aqueles em que a resposta foi apresentada através de um processo descritivo correto.

4.6.2 Conceitos prévios revelados nos testes

Os conceitos prévios foram encontrados no pré-teste de reconhecimento de figuras, SAEB e registros do primeiro dia da intervenção. Apresentamos separadamente os dados de cada aluno, organizando-os em ordem alfabética, para facilitar a leitura. Na figura 34, destacamos os polígonos que aparecem no teste de reconhecimento.

Figura 34 - Desenhos utilizadas no teste de reconhecimento de figuras



Fonte: Dados dos testes de lógica, elaborados pela autora.

Al identifica apenas o T1 como polígono. Não distingue as figuras por quantidade de lados, apesar de desenhar um quadrilátero correto no formato de quadrado e, na justificativa no SAEB, indica que o retângulo e quadrado têm quatro lados. Com relação aos triângulos, reconhece o T2, mas não identifica os diferentes tipos ou suas características. Ela assinala somente Q1 e Q6 como figuras planas. Reconhece Q1 como um retângulo e o Q6 como um quadrado. Apesar de desenhar um polígono correto, não identifica nenhum polígono entre as figuras. Não desenha um losango, mas reconhece-o no Q11 e no SAEB aponta que o losango e o quadrado têm lados iguais. Desenha um trapézio, mas não o reconhece entre as figuras.

An identifica várias figuras como planas. Entre os triângulos, não identifica nem desenha os diferentes tipos. Desenha um quadrilátero, cujo desenho se aproxima de um quadrado, mas identifica somente Q6 como quadrilátero. Apesar de desenhar o losango e identificar corretamente o Q4 como tal, reconhece somente o Q11 como trapézio. Escreve "o losango é a mesma coisa que o quadrado, mas está virado" (**An**, SAEB, 20/03). Reconhece o retângulo simples Q1 e o quadrado Q6, identifica-os como paralelogramos, mas não reconhece os demais paralelogramos nas figuras. Não tem noção do que seja uma figura regular. **An** assinala como pipa as figuras Q4 e Q11. Não reconhece o pentágono, mas identifica o hexágono.

Ca reconhece os triângulos como figuras planas, mas não identifica seus diferentes tipos nem consegue desenhá-los. Reconhece o quadrado Q6, mas não o que está com rotação de 45º. Já entre as figuras com quatro lados ou mais, só reconhece o retângulo como figura plana. Identifica somente a figura Q4 como retângulo. Não reconhece ou desenha figuras com mais de quatro lados. Reconhece apenas o Q11 como pipa. Não reconhece nenhuma figura regular. Também não reconhece o trapézio, nem identifica ou desenha o losango.

Sh, apesar de desenhar corretamente um polígono, identifica somente o Q10 como tal. Reconhece T2 como triângulo acutângulo, T4 obtusângulo e o T6 como escaleno, mas não percebe outras relações envolvidas. Reconhece T5 como triângulo retângulo, apesar de não desenhá-lo. Desenha corretamente um quadrilátero com formato de quadrado, mas não reconhece os quadriláteros entre as figuras. Não identifica o trapézio. Desenha corretamente um paralelogramo parecido com Q3 que identifica, mas não a totalidade de paralelogramos. Reconhece somente Q11 como pipa. Com relação ao trapézio (SAEB), amplia o risco do lado de cima e de baixo e escreve: "[...] os lados riscados nunca se encontram" (**Sh**, SAEB, 20/03). Não identifica figuras regulares. Não desenha nem identifica as figuras com maior número de lados.

Wa desenha e identifica somente os triângulos acutângulos como triângulos, e reconhece que o T4 é escaleno. Apesar de desenhar corretamente um quadrilátero, identifica somente o Q1 e o Q11 como tal. Não reconhece as figuras planas, ou polígonos. Não reconhece os trapézios ou losangos. Quadrado, para ele, seria somente o Q6. Identifica o Q11 e, erroneamente, o Q10 como pipa. Não distingue as figuras regulares, nem um pentágono ou um hexágono. Pelos dados do

SAEB, compreendemos que ele reconhece o losango e o quadrado como figuras com lados iguais e identifica também o triângulo isósceles.

É interessante destacar que a intervenção começou pelas figuras mais conhecidas pelos adolescentes: o quadrado e o retângulo. Os alunos não conseguiam definir, ou seja, dizer o que eram essas figuras ou suas partes, apesar de todos conseguirem desenhá-los e identificá-los entre as figuras. Já o reconhecimento do quadrado com rotação de 45º graus apresentou dificuldade para todos, como mostra o diálogo abaixo.

> (P) E o quadrado... O que é quadrado? (Wa) Já sei, tem 4 lados. (P) Seria isso? (Fe) Tem quatro lados iguais. (P) Ok, vamos ver um exemplo. *A professora recorta uma folha no formato de um quadrado e pergunta:* E agora isso é um quadrado? (Classe) Sim. (P) Ok, *e agora ela gira a folha 45º e pergunta:* E agora, é um quadrado? (An) Losango. (P) *Gira, retorna à figura anterior e diz:* e agora, que figura é essa? (classe) Quadrado. (P) *Vira novamente, igual à primeira forma da figura 1, e diz:* que figura? (classe) Losango. (P) Ok, então digam meu nome? (classe) Rebeca. (P) Ok! Agora virei de costas... *(gira)* E aí qual é meu nome? (classe) Rebeca. (P) E aí como chama essa figura? (Wa) Acho que não entendi... (RO, 22/03).

Os alunos foram instigados a desenhar o quadrado e o retângulo no *Slogo-3.0*, a fim de obterem novas percepções sobre essas figuras. Depois, falaram sobre as relações percebidas.

> (P) O que é um retângulo? (Wa) É dois... (P) Vamos ver o que ele em tem que é igual a um quadrado? (Ca) Quatro lados. (Wa) Ângulos de 90º. (P) Perfeito... Mas o que ele tem de diferente? (Ca) Os lados... Lados... Dois lados diferentes. (P) Quais lados? (Ca) Os de cima e dos lados. (An) Ele tem lados paralelos. (P) Paralelos, por que paralelos? (Sh) Porque nunca se encontram... *E mostra com as mãos destacando duas semirretas no ar...* (RO, 22/03).

Na discussão, vão percebendo algumas relações sobre lateralidade e ângulos.

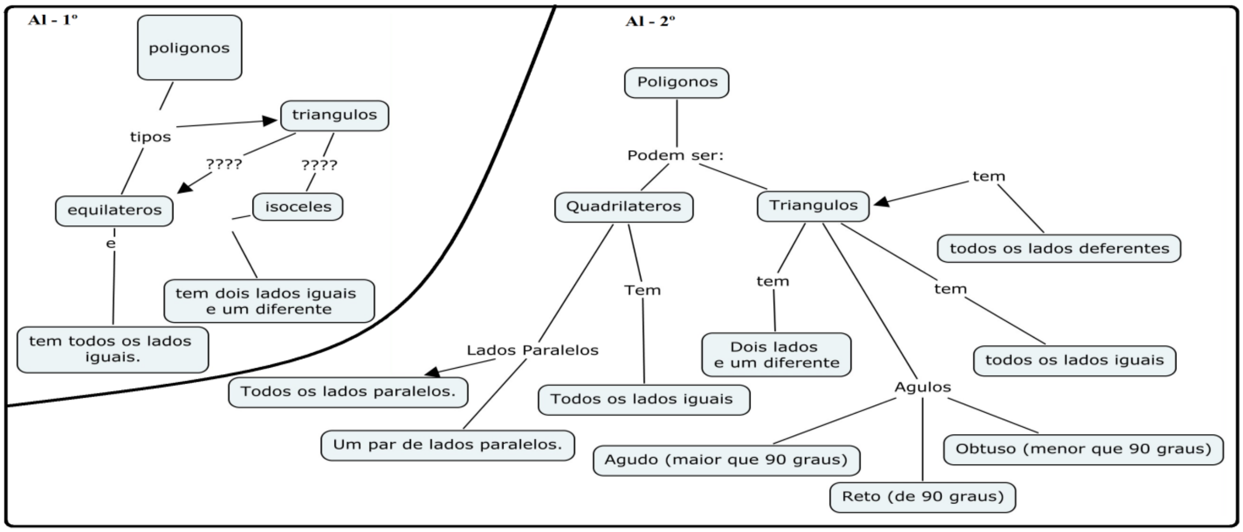
4.6.3 Conceitos e relações constituídas nos mapas

Os conceitos constituídos são encontrados nos diferentes registros mencionados, mas destacamos os mapas conceituais, pois revelam o processo geral e, ainda, a evolução do conceito pela forma como foram elaborados. Cada aluno construiu três mapas, o primeiro feito na primeira sessão interventiva; o segundo, na oitava sessão; e o último, no momento das entrevistas individuais, na última semana. Os mapas aparecem na sequência, apresentados de acordo com a ordem alfabética de cada aluno. Buscamos reunir os dados dos dois primeiros em uma única figura; enquanto o terceiro aparece em uma figura isolada. Cabe destacar que no interior desses mapas foi mantida a ortografia original de cada aluno.

a) Aluna **Al**

No primeiro mapa (02/04), **Al** destaca somente os triângulos. Já no segundo mapa (16/04), **Al** aponta que os quadriláteros também são polígonos e apresenta novos conceitos elaborados.

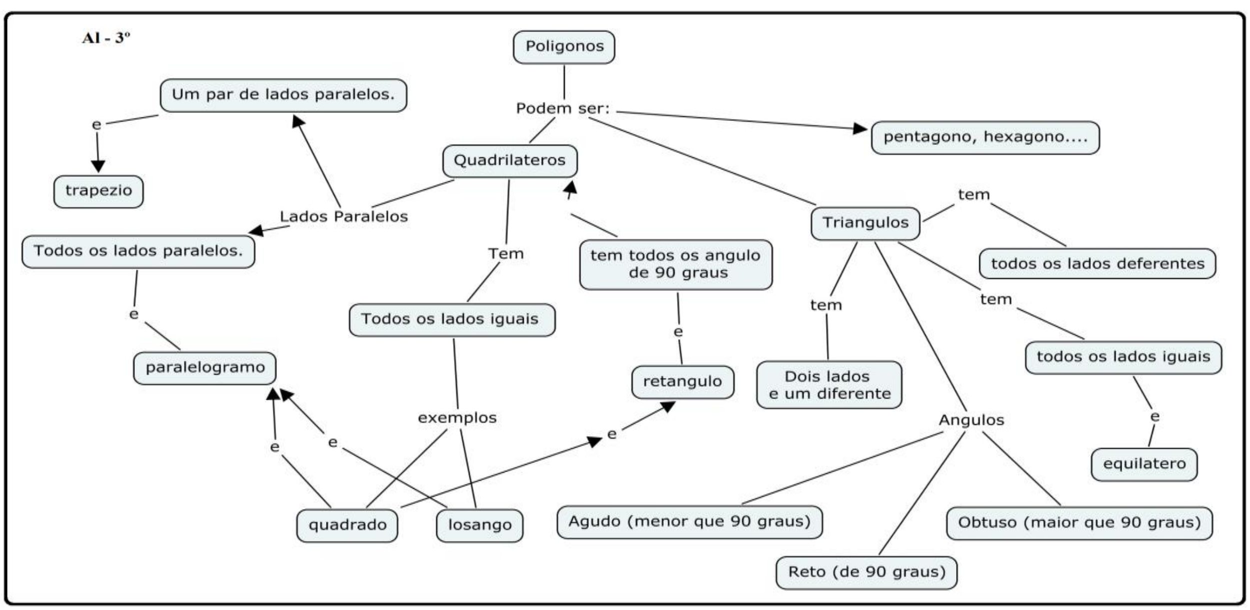
Figura 35 - Primeiros mapas conceituais (Al)



Fonte: Dados de atividades da aluna Al, coletados na intervenção.

Em relação aos triângulos, classifica-os por ângulos e lados descrevendo todos os tipos. Quanto aos quadriláteros, ela distingue lados iguais de lados paralelos.

Figura 36 - Terceiro mapa conceitual (Al)



Fonte: Dados de atividades da Aluna Al, coletados na intervenção.

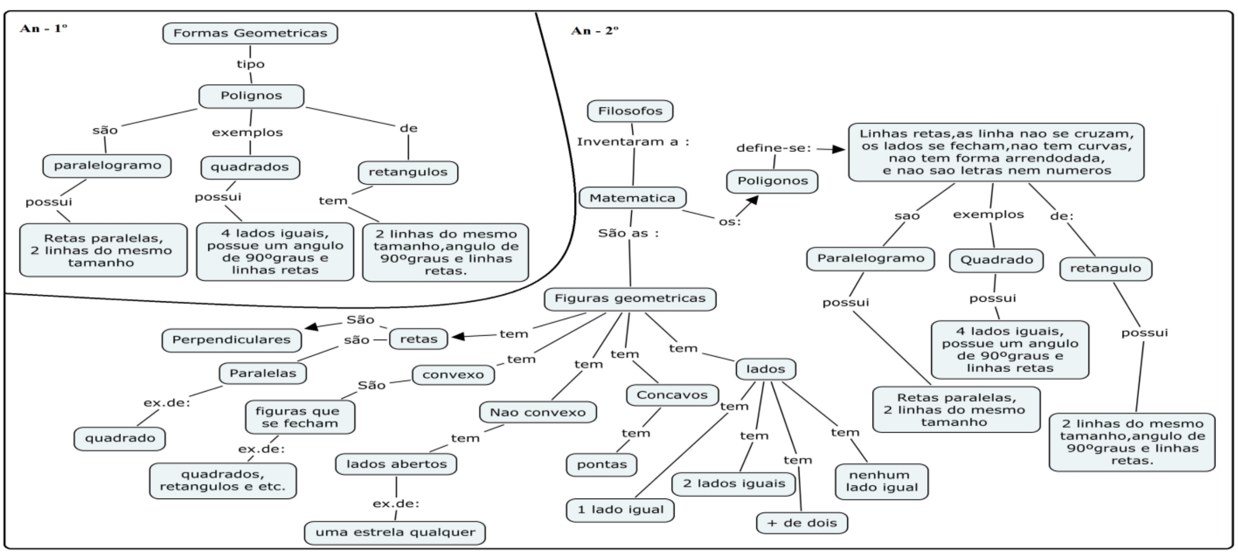
Entre avanços no terceiro mapa (19/04), **Al** identifica que outras figuras podem ser polígonos (pentágono, hexágono...). Consegue estabelecer novas relações entre os conceitos apresentados e amplia-os, sobretudo em relação aos quadriláteros. A entrevista, baseada no questionamento, foi importante para avanços contidos no terceiro mapa, como mostra o registro que selecionamos abaixo:

> (P) Você diz que o polígono pode ser um quadrilátero ou triângulo, seria somente isso ou teríamos ainda outro tipo? (Al) Losango (P) E o losango é um quadrilátero ou não? (Al) Acho que sim, depende... (P) O que é quadrilátero? (Al) Figuras de quatro lados. (P) Têm polígonos com outras quantidades de lados? (Al) Têm. (P) Não seria interessante colocar também? (Al) Pentágono tem cinco lados, né... (P) Seria só o pentágono? (Al) Não, o hexágono de 6 lados, pode ter figuras com 7, 8... (EI, 19/04).

b) Aluna **An**

No primeiro mapa (29/03), **An** destaca somente os quadriláteros e inicia distinguindo os lados, sem considerar relações envolvidas.

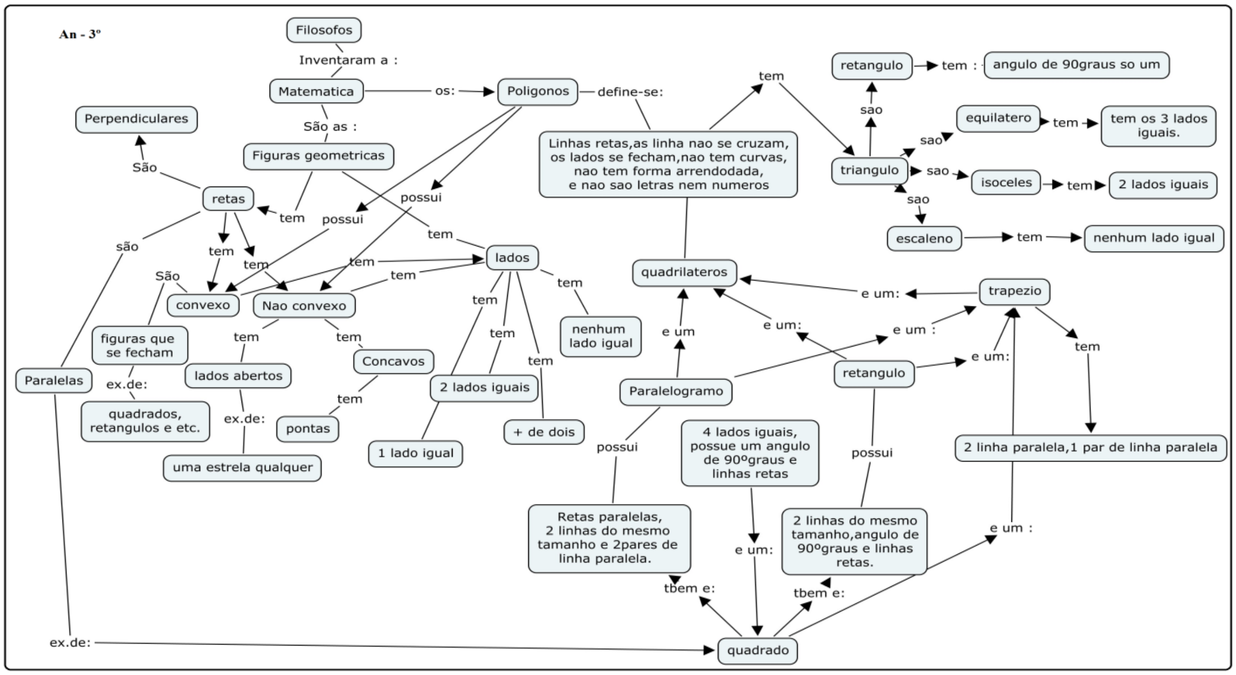
Figura 37 - Primeiros mapas conceituais (An)



Fonte: Dados de atividades da aluna An, coletados na intervenção.

Já no segundo mapa (16/04), **An** distingue os polígonos das formas geométricas, sem destacar as relações entre esses conceitos. Distingue tipos de formas geométricas, mas não os organiza em uma classe. No terceiro mapa (19/04), ela distingue os triângulos, já aponta relações entre quadriláteros e entre as figuras geométricas.

Figura 38 - Terceiro mapa conceitual (An)



Fonte: Dados de atividades da aluna An, coletados na intervenção.

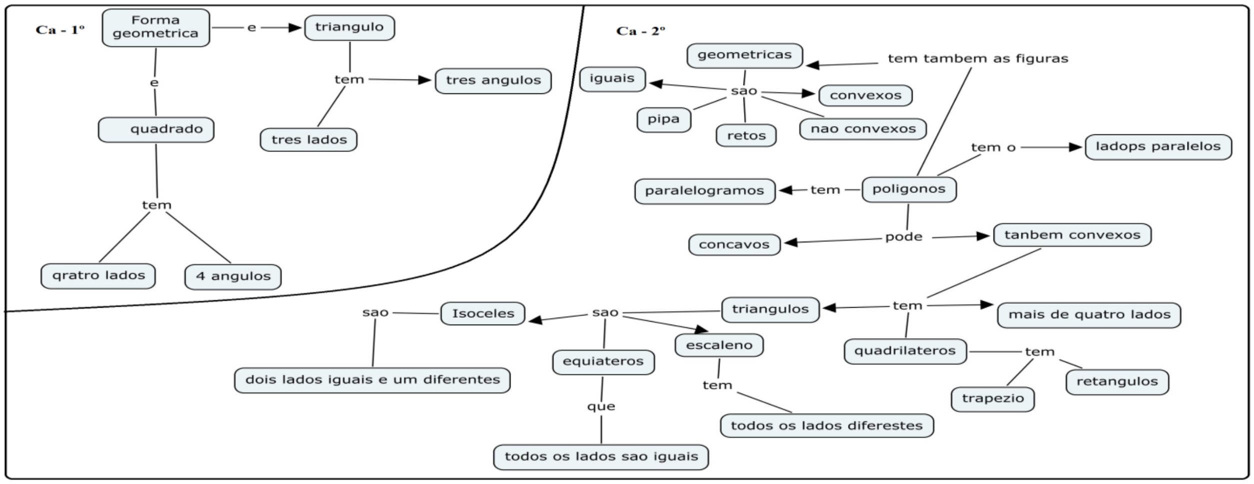
Os dados que selecionamos da entrevista de **An** são:

> (P) E os quadriláteros têm relação? (An) Têm. O quadrado sim, porque ele também é um trapézio. (P) E o paralelogramo? (An) É (P) E o retângulo? (An) É, também. (P) O trapézio é um paralelogramo ou o paralelogramo que é um trapézio? (An) O trapézio é paralelogramo. (P) Todo trapézio é paralelogramo? (An) É. (P) Desenha o trapézio. (An) Não é não, professora, não é... (P) Você não falou dos triângulos. (An) Ah, e agora? (P) Os triângulos são o quê? (An) Ah, mas vou ter que ligar aqui... *E foi escrevendo sobre os triângulos no mapa*... (EI, 19/04).

c) Aluna **Ca**

No primeiro mapa (26/03), **Ca** destaca somente o triângulo e quadrado como se eles fossem um único tipo. Já no segundo mapa (16/04), ela distingue os polígonos côncavos dos convexos e neles destaca: os triângulos e alguns tipos, os quadriláteros e alguns tipos e um grupo de mais de quatro lados, em um mesmo nível.

Figura 39 - Primeiros mapas conceituais (Ca)

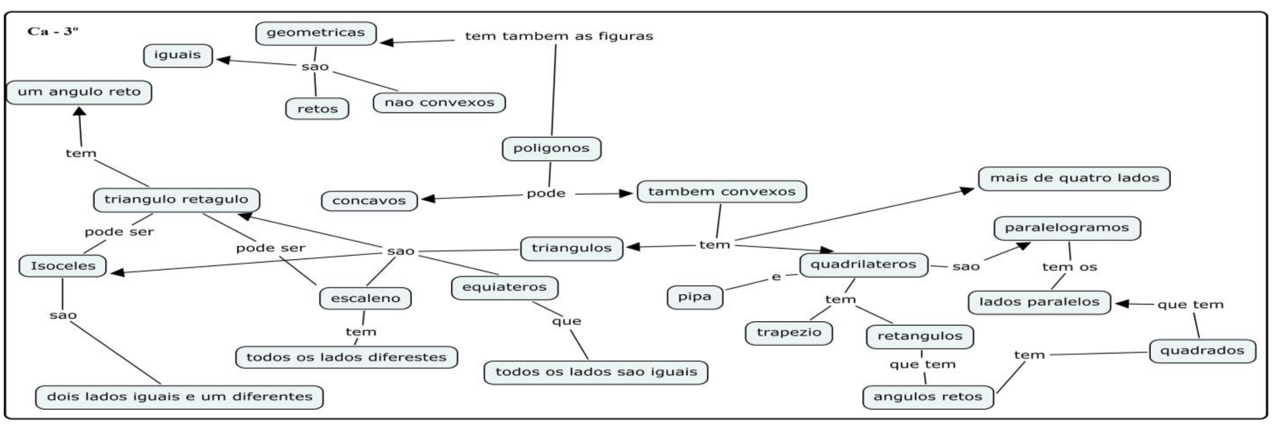


Fonte: Dados de atividades da aluna Ca, coletados na intervenção.

No terceiro mapa (19/04), **Ca** reconhece novos tipos de triângulos e quadriláteros. Selecionamos alguns dados da entrevista abaixo:

> (P) A pipa é um quadrado? (Ca) É esse... *E apontou para palavra quadrilátero. Ela coloca a figura no lugar certo*.... (P) Tem mais algum quadrilátero que lembra o nome? (Ca) não sei. (P) O que é trapézio? (Ca) É um quadrilátero. (P) Você sabe o que é trapézio? Mais detalhes sobre ele... *Ela já tinha colocado o trapézio no mapa*... (Ca) Não lembro... (P) Não lembra, ok. A figura que tem todos os lados iguais como chama? (Ca) Equilátero. (P) Sim, mas como chama o quadrilátero que tem todos os lados iguais? (Ca) Não me lembro... (P) Então está bem. Vamos encerrar o mapa e salvar... (EI, 19/04).

Figura 40 - Terceiro mapa conceitual (Ca)

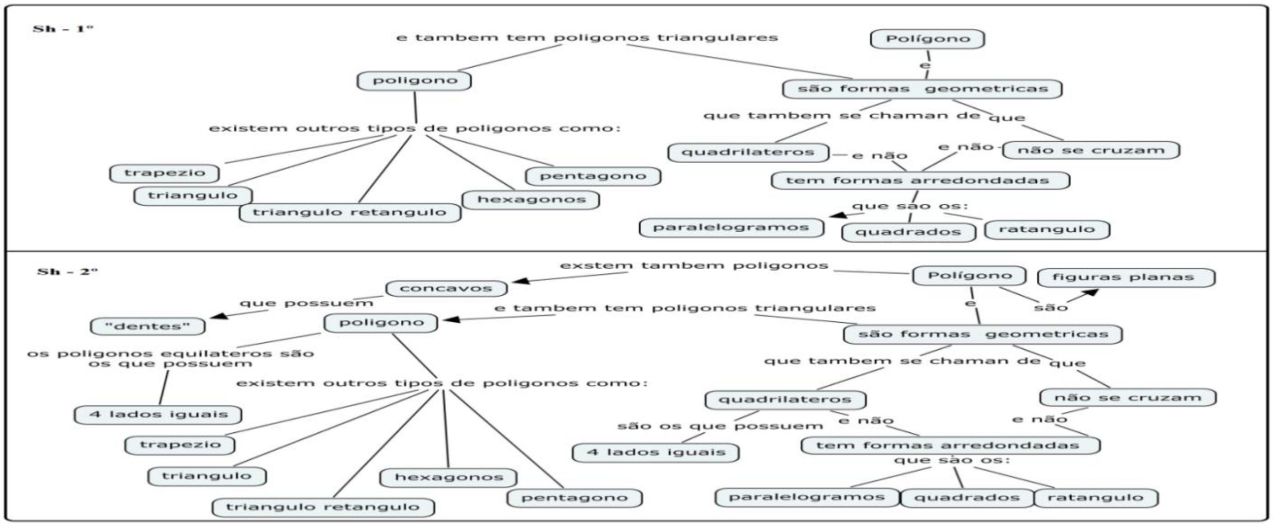


Fonte: Dados de atividades da aluna Ca, coletados na intervenção.

d) Aluna **Sh**

Apresentamos os primeiros mapas da aluna **Sh** na figura 41.

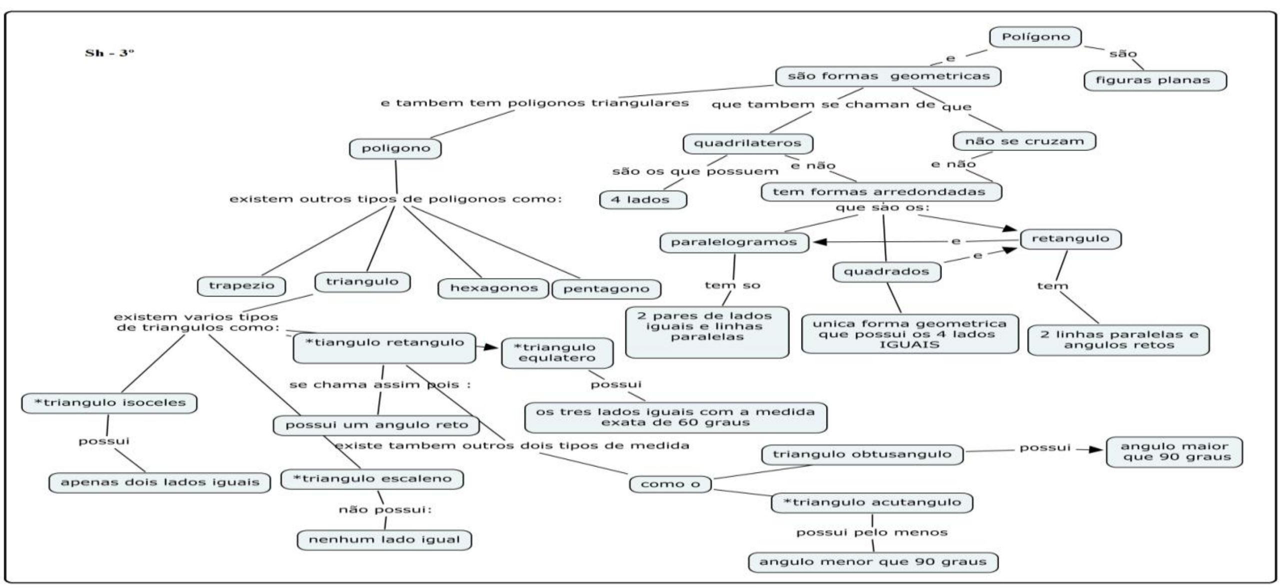
Figura 41 - Primeiros mapas conceituais (Sh)



Fonte: Dados de atividades da aluna Sh, coletados na intervenção.

No primeiro mapa (29/03), **Sh** indica o conceito de polígono, dando exemplos de polígonos de diferentes lados, e separa os quadriláteros dos demais polígonos. No segundo mapa (16/04), ela acrescenta o conceito de quadrilátero, polígonos côncavos e polígonos equiláteros, que se restringe aos quadriláteros. No terceiro mapa (23/04), **Sh** passa a fazer uma definição mais detalhada dos tipos identificados anteriormente e destaca várias relações, vistas na figura 42.

Figura 42 - Terceiro mapa conceitual (Sh)



Fonte: Dados de atividades da aluna Sh, coletados na intervenção.

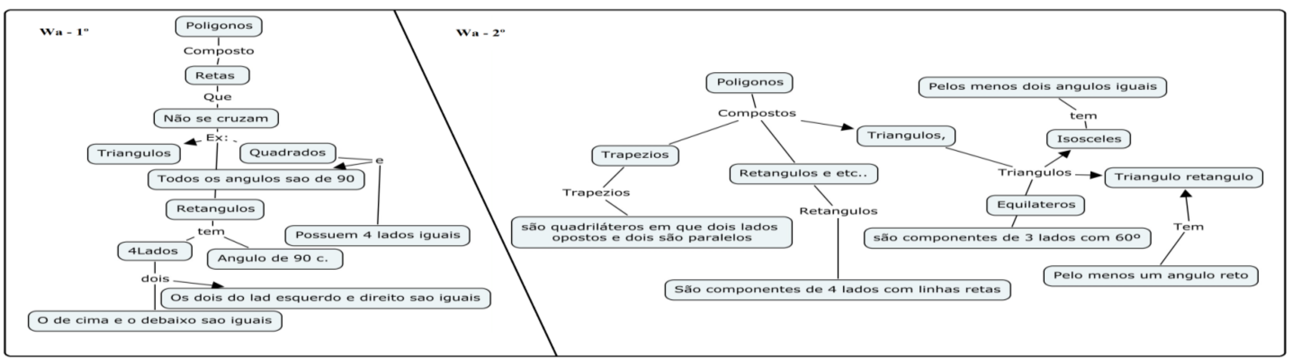
A seguir trazemos parte da entrevista selecionada.

> (P) O que o retângulo tem que o paralelogramo não tem? (Sh) Tem as retas. (P) Mas o paralelogramo também tem as retas. Como é o ângulo do retângulo? (Sh) Não sei (P) Olhe o nome:, retângulo, o que quer dizer? (Sh) Ah! Ângulo reto. *Ela passa a arrumar o mapa.* (P) O paralelogramo tem dois pares de lados iguais, como são esses lados?(Sh) Paralelos. (P) As linhas do paralelogramo são paralelas? (Sh) São. (P) É que você escreveu lá: só dois pares de lados iguais.... *Ela passou a arrumar o mapa...* (P) Tá, entre os triângulos, quais você conhece? (Sh) Equilátero retângulo... (P) Vamos encaixar todos os que você lembra... (Sh) *Passou a acrescentar os outros triângulos...* (EI, 23/04).

e) Aluno **Wa**

No primeiro mapa (26/03), **Wa** distingue polígono, dando exemplos de triângulos e quadriláteros. No segundo mapa (16/04), ele já distingue tipos de triângulos e quadriláteros.

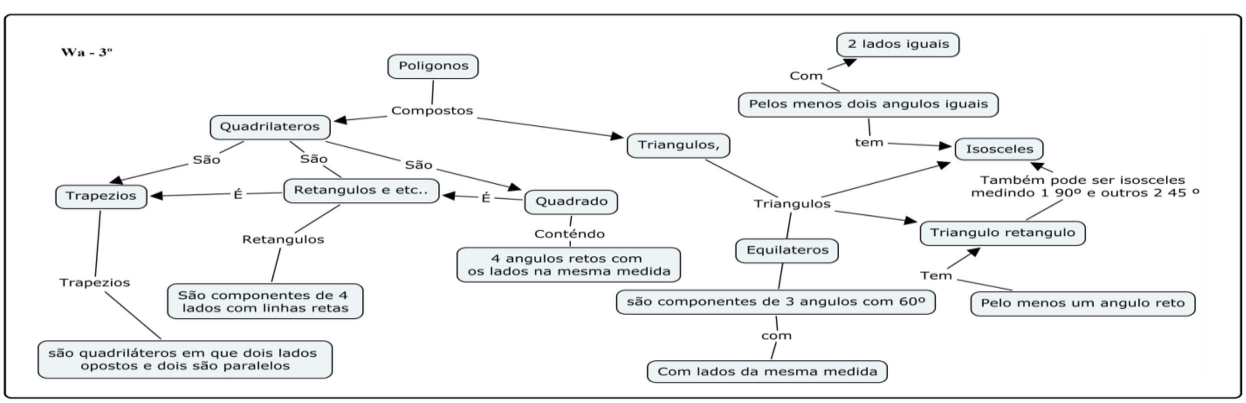
Figura 43 - Primeiros mapas conceituais (Wa)



Fonte: Dados de atividades do aluno Wa, coletados na intervenção.

No terceiro mapa (16/04), **Wa** organiza a classe dos quadriláteros e seus tipos e aponta novas relações, como mostra a figura 44.

Figura 44 - Terceiro mapa conceitual (Wa)



Fonte: Dados de atividades do aluno Wa, coletados na intervenção.

A seguir apresentamos a parte da entrevista selecionada.

> (P) Vamos confirmar: o trapézio que é retângulo ou o retângulo que é trapézio? (Wa) É o retângulo que é trapézio. (P) Então, tem que arrumar a linha de ligação para que a seta indique isso claramente. (P) E não têm mais quadriláteros? (Wa) Tem o quadrado. (P) E não é interessante falar do quadrado? *Ele acrescenta então os dados sobre o quadrado*.... (P) Dá para unir o quadrado com outros conceitos colocados no mapa?(Wa) Acho que dá para unir com o retângulo, não sei quanto ao trapézio... Porque o quadrado tem 4 ângulos retos, igual ao retângulo. (P) Então une. E ele é trapézio? (Wa) Acho que não... (P) Têm mais quadriláteros para considerar? (Wa) Têm, mas não lembro. (P) Na definição que colocou para o trapézio, você diz que ele tem dois lados paralelos. E se tiver 2 pares de lados paralelos? (Wa) Daí, vou ter um quadrado... (EI, 16/04).

4.6.4 Processo de classificação

O processo de classificação realizado no *MatGeo* (OA) permite organizar polígonos. A figura 45 mostra as diferentes classificações realizadas pelos alunos.

Figura 45 - Classificação dos polígonos

Fonte: Dados dos alunos: Al, An, Ca, Sh e Wa coletados no momento das entrevistas individuais.
Legenda: Cada linha corresponde aos dados de um mesmo aluno, Al, An, Ca, Sh e Wa, respectivamente. O número que aparece na linha corresponde ao item destacado pelo aluno, que é usado sem o texto nas classificações seguintes.

Nesse caso, o programa permite que o usuário selecione em quantas partes quer dividir e arraste as figuras para o local desejado. Os desenhos selecionados foram inspirados nos modelos descritos por Piaget e Inhelder (1993) e nos desenhos propostos por Walle (2009). Vamos nomear cada quadro com a letra que o distingue, polígonos (P) e triângulos (T), seguidos por um par de números, dos quais o primeiro representa a linha e o segundo a coluna.

Al primeiramente, em P_{11}, distingue os polígonos convexos dos côncavos e figuras curvas, grupo que chama erroneamente de polígonos não convexos. Já em P_{12}, sendo instigada a definir polígono na entrevista, distingue as curvas indicando corretamente três grupos: polígonos convexos, não convexos e não polígonos. Foi questionada para que observasse as figuras côncavas, pois deixou erroneamente o trapézio nesse grupo, reorganizando-o em P_{13}. Em P_{14}, separa do grupo dos polígonos as figuras com mais de quatro lados do resto.

An, em P_{21}, distingue os polígonos dos demais e, já em P_{22}, deixa os não polígonos no centro e coloca os não convexos na terceira divisão. Em P_{23}, separa os polígonos, deixando no primeiro grupo os que têm ângulos retos. Em $P_{24,}$ separa os polígonos em três grupos por quantidades de lados: com três, quatro e mais de quatro lados. Também separa as curvas fechadas das que têm orifício central.

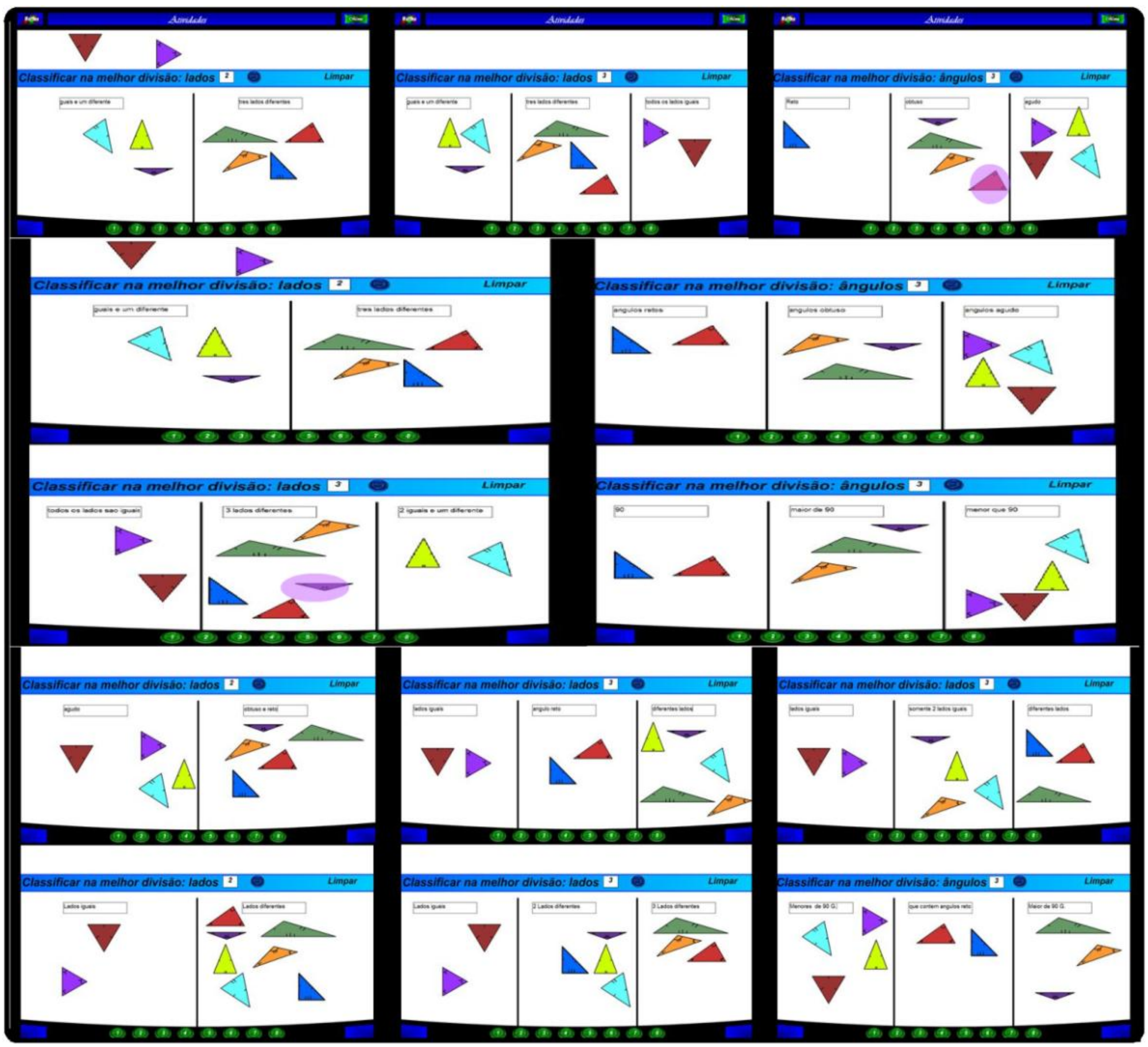
Ca, em P_{31}, separa em três grupos, que chama de inteiro, corte de figura e figuras diferentes. Em P_{32}, separa das inteiras as circulares, mas ela não coloca nesse grupo as circulares com orifício central e só o faz no próximo agrupamento, em P_{33}, quando instigada. É também nesse momento que distingue, no primeiro grupo, figuras de 3 ou 4 lados e, no seguinte, de 5 e 6 lados. Em P_{34}, ela separa as figuras de 3 ou 4 lados em dois grupos, denominando-os de triângulos e, erroneamente, de quadrados.

Sh, em P_{41}, separa em três grupos: o primeiro que “fecha”, outro que “fecha” e o último que não “fecha”. Quando questionada sobre o que entendia sobre fechar, ela não soube responder. Assim, passa a agrupar por critério conhecido, divide em três grupos, como mostra P_{42}: redondo, pontas triangulares e não ponta. No P_{43}, separa novamente em três grupos: redondo, não têm retas paralelas e tem, pelo menos, um par de paralelas. Em P_{44}, ela distingue, na parte de cima, os que têm, segundo ela, “buraco”. Do segundo grupo, distingue os triângulos colocando-os na parte de cima. E, no último grupo, ela separa, na parte de cima os convexos, sem defini-los.

Wa, em P_{51}, distingue, primeiramente, as figuras que têm curvas das sem curvas, que ele denominou de polígonos. Em P_{52}, ele distingue dos polígonos os convexos e os não convexos. Em P_{53}, dos polígonos convexos distingue as figuras que têm pelo menos um ângulo reto. Já em P_{54}, **Wa** distingue das figuras curvas as que têm buraco no centro.

Quanto à divisão dos triângulos, o programa permite ao usuário escolher em quantas partes deseja que seja feita a classificação, no entanto já indicava lados ou ângulos, sugestionando as atividades, como mostra a figura 46.

Figura 46 - Classificação dos triângulos



Fonte: Dados dos alunos Al, An, Ca, Sh e Wa, coletados nos momentos de entrevistas individuais.

Al, em T_{11}, separa os triângulos de dois lados iguais e um diferente dos de três lados diferentes. Já em T_{12}, acrescenta um terceiro grupo contendo os três lados iguais em que coloca os triângulos que ela tinha deixado de classificar. Em T_{13}, separa o grupo dos ângulos retos, obtusos e agudos, só que deixa, erroneamente, um triângulo retângulo (destacado) na classe dos obtusângulos, colocando-o na classe certa quando questionada.

An, em T_{21}, separa os triângulos em três lados iguais, dois lados iguais e nenhum lado igual, deixando erroneamente o triângulo laranja juntamente com os isósceles. Em T_{22}, separa os triângulos em retos obtusos e agudos.

Ca, em T_{31}, separa lados iguais, lados diferentes e dois lados iguais e um diferente, só que deixa o triângulo em realce, colocado erroneamente. Em T_{32}, distingue os triângulos colocando ângulo 90º, maior que 90º e menor que 90º.

Sh, em T_{41}, separa o primeiro grupo em agudos e o segundo em obtuso e reto, apesar da divisão indicar por lados. Questionada na segunda divisão ainda por lados, aponta lados iguais, ângulos retos, e lados diferentes, sem observar que nos ângulos retos os lados também são diferentes. Na terceira divisão, ela distingue lados com medidas iguais (dois lados) e diferentes.

Wa, em T_{51}, separa primeiramente em dois grupos de lados iguais e lados diferentes. Em T_{52}, divide os lados diferentes em dois lados diferentes ou todos diferentes. Em T_{53}, separa os ângulos em menores que 90º, que contêm ângulo reto e maiores que 90º.

4.6.5 Conceitos e relações constituídas reveladas nos testes

Os conceitos e relações constituídas foram retirados, sobretudo, do pós-teste de reconhecimento das figuras quanto do pós-teste imediato, logo após a intervenção, como do pós-teste tardio, realizado depois de seis meses da intervenção.

O pós-teste indica que **Al** reconhece os diferentes polígonos e as figuras planas. Também identifica os triângulos e seus diferentes tipos, portanto reconhece o equilátero e os dois dos triângulos retângulos existentes (T3 e T6), também desenha esse tipo corretamente. Quanto aos quadriláteros, traça corretamente o trapézio e reconhece o Q2 e o Q3 como tal. Confirma o Q1, Q3, Q6 como paralelogramo e identifica o Q1, Q6 como retângulo. Não desenha nem reconhece o losango. Reconhece como quadrado apenas o Q6. Identifica como pipa o Q4 e Q11. Reconhece o hexágono e o pentágono. Identifica a figura Q4, Q6, Q9 como regular. O pós-teste tardio indica que **Al** continua reconhecendo que os triângulos pertencem à classe dos polígonos e que todos os quadriláteros pertencem à classe das figuras planas. Entre os triângulos, identifica o equilátero e o isósceles. Desenha corretamente o quadrilátero, mas não o identifica entre as figuras. Desenha corretamente o trapézio, mas não o identifica. Reconhece o Q1 como paralelogramo e retângulo, o Q4 e Q6 como quadrado. Reconhece o pentágono. O SAEB revela que **Al** reconhece se um triângulo é retângulo e isósceles ao mesmo tempo, identifica que o losango e quadrado têm lados com a mesma medida, distingue o trapézio do losango e reconhece que o quadrado e retângulo são paralelogramos.

O pós-teste indica que **An** reconhece os diferentes polígonos e figuras planas, distinguindo triângulos, quadriláteros, inclusive desenha corretamente os diferentes tipos pedidos. Reconhece os tipos de triângulos, com exceção dos isósceles e dos acutângulos. Com relação aos quadriláteros, reconhece os trapézios Q2 e Q11, mas também o Q1 como trapézio. Reconhece o Q3 como paralelogramo, mas também o Q1, Q6 e Q11 como tal. Reconhece o Q1 como retângulo, mas também o Q4 e Q6. Só identifica o Q6 como quadrado, mas identifica o Q4 e Q11 como pipa e como losango. Reconhece e desenha corretamente o pentágono e hexágono. O pós-teste tardio indica que **An** ainda identifica que se são triângulos, então são polígonos e figuras planas. Também percebe que todos os quadriláteros são figuras planas e distingue o retângulo e quadrado como quadriláteros. Reconhece diferentes tipos de triângulos distinguindo-os por lados (T1 equilátero e T2 isósceles) e por ângulos (T5 e T6 como triângulos-retângulos). Reconhece quando um triângulo é retângulo e isósceles ao mesmo tempo. Reconhece os diferentes tipos de quadriláteros, mas identifica apenas um tipo de cada. Também identifica que losango e quadrado têm lados iguais e distingue o trapézio do quadrado, do losango e do retângulo, identificando-o como o único a ter apenas um par de paralelas.

O pós-teste indica que **Ca** identifica como polígonos todos os triângulos e como figuras planas todos os quadriláteros. Distingue o equilátero (T2), o escaleno (T4), o isósceles (T5) e o triângulo retângulo (T6). Só identifica o Q2 como trapézio, também somente identifica o Q1 como retângulo, assim como somente o Q6 como quadrado. Identifica o Q11 como pipa e, erroneamente, o Q5. Reconhece que o pentágono e o hexágono são figuras regulares. O pós-teste tardio indica que **Ca** distingue o triângulo T2 como acutângulo, T6 como retângulo e o T4 como escaleno. Distingue o Q1 como retângulo, o Q6 como quadrado, o Q10 como pentágono. Reconhece o Q6 como quadrado, o Q10 como pentágono e o Q11 como pipa. O SAEB mostra que ela distingue o quadrado e o retângulo como quadriláteros e reconhece que o losango e o quadrado têm lados iguais.

O pós-teste revela que **Sh** reconhece os diferentes polígonos e figuras planas, distinguindo triângulos e quadriláteros, inclusive desenha corretamente os diferentes tipos. Distingue o T3 como escaleno, o T5 como isósceles e o T6 como retângulo. Identifica o Q1 como retângulo, o Q4 como losango, o Q6 como quadrado, o Q11 como pipa. Reconhece várias figuras regulares e o hexágono entre as figuras. O pós-teste tardio indica que **Sh** consegue desenhar corretamente os diferentes tipos de figuras pedidos no teste. Reconhece corretamente como obtusângulo o T4 e como triângulo retângulo o T6. Entre os quadriláteros, reconhece o Q1 como retângulo e o Q3 como paralelogramo. Através do SAEB, observamos que reconhece o quadrado e o retângulo como quadriláteros, percebe que o losango e o quadrado têm lados iguais, apresenta noções de paralelismo, justificando seu procedimento, e distingue os diferentes quadriláteros do teste.

O pós-teste indica que **Wa** desenha corretamente os diferentes tipos pedidos. Reconhece os diferentes polígonos e figuras planas, distinguindo os triângulos e os quadriláteros. Entre os triângulos, identifica-os como figuras planas e polígonos. Identifica o T2 e o T5 como isósceles, o T3 e T6 como retângulo. Entre os quadriláteros, identifica-os como figuras planas e polígonos. Identifica o Q1 como retângulo, o Q4 como losango, o Q6 como quadrado, o Q11 como pipa. Reconhece várias figuras regulares e identifica o hexágono. O pós-teste tardio indica que **Wa** continua desenhando corretamente os diferentes tipos pedidos com exceção do paralelogramo. Ainda reconhece o T3 e T6 como retângulo e o T5 como isósceles. Distingue, também, os quadriláteros como figuras planas e indica que figuras de quatro lados são quadriláteros. Reconhece como retângulo o Q1, como quadrado o Q4 e o Q6, como pentágono o Q10. Reconhece que o losango e o quadrado possuem lados com medidas iguais e distingue o trapézio do losango, do quadrado e do retângulo como sendo o único que não é paralelogramo.

5 ANÁLISE DOS DADOS

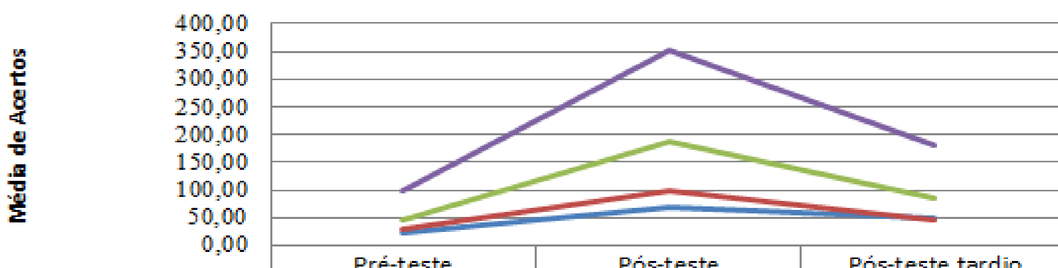
Para alcançar o objetivo central da pesquisa, que é o de identificar os processos de elaboração e de reelaboração de conceitos relativos a polígonos, através das operações e das relações constituídas pelos adolescentes que participaram do processo interventivo, passamos a descrever primeiramente conceitos prévios, depois os conceitos elaborados no processo interventivo (estabelecidos) e, por último, os que observamos nas diferentes etapas do pós-teste.

As metas complementares desta pesquisa, como a construção de um Objeto de Aprendizagem (*MatGeo*) e as possibilidades de desenvolvimento dos processos operatórios nas tecnologias selecionadas, já foram descritas no capítulo três. Quanto aos avanços operatórios no reconhecimento de figuras geométricas e sua relação com o desempenho em geometria, vamos apresentar os resultados apoiadas nos testes efetivados, descritos primeiramente.

5.1 Dados quantitativos

O teste de reconhecimento nos possibilita observar avanços em conteúdos que foram trabalhados na intervenção. Para uma melhor compreensão, optamos por uma observação detalhada, separando as questões do teste em desenhos, triângulos e em quadriláteros (figuras com quatro lados ou mais, em que predominam os quadriláteros), como mostra o gráfico 1.

Gráfico 1 - Total de acertos no teste de reconhecimento



	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste tardio
Desenhos	24,00	68,00	50,00
Triângulos	28,00	99,00	45,00
Quadradriláteros	46,00	186,00	85,00
total	98,00	353,00	180,00

Fonte: Dados dos testes de reconhecimento coletados na intervenção.

Os dados gerais (total) indicam avanços significativos entre o pré-teste e o pós-teste, com resultados três vezes melhores que no início. Entre o pré-teste e o pós-teste tardio, os dados apresentam quase 100% de melhora. Esses resultados permitem afirmar que a intervenção alcançou resultados significativos dentro do conteúdo que se propôs a trabalhar.

Para compreender detalhes sobre conteúdos tratamos com dados específicos. Para melhor visualização dos dados, apresentamos a tabela 7.

Tabela 7 - Diferença percentual entre os conteúdos do teste de reconhecimento

	Total	**Desenhos**	**Triângulos**	**Quadriláteros**
Pré-teste e Pós- teste	260,20%	183,33%	253,57%	304,35%
Pré-teste e Pós-testes tardio	83,67%	108,33%	60,71%	84,78%
Pós-teste e Pós-teste tardio	-49,01%	-26,47%	-54,55%	-54,30%

Fonte: Cálculo percentual do gráfico 2.

No geral, há avanços que equivalem a 260,20% entre o pré-teste e o pós-teste, fato que indica o estabelecimento de novas relações pelos alunos, com aprendizagens significativas, apesar de a intervenção ser de curta duração. Também indica que, apesar de o pós-teste tardio ter sido efetivado depois de seis meses, ainda apresenta avanços equivalentes a 83,67% entre este e o pré-teste. Observamos diferenças abaixo de 50% entre o pós-teste e o pós-teste tardio, revelando que não houve perdas significativas das novas aprendizagens elaboradas.

A análise por tópicos revela que a relação entre o pré-teste e o pós-teste é mais significativa nos quadriláteros, depois nos triângulos e, por último, nos desenhos. Esse fato indica que, de alguma forma, a aprendizagem dos quadriláteros apresenta um resultado mais adequado, quando comparado aos outros conteúdos, após a intervenção. Quando analisamos as perdas do pós-teste para o pós-teste tardio, observamos que o percentual entre os conteúdos de quadriláteros e triângulos é o mesmo (-54,30%), mas é bem menor no caso dos desenhos (-26,47%).

Assim, é possível afirmar que a intervenção teve melhor resultado em relação aos quadriláteros do que em relação aos triângulos. Esses dados indicam que, de alguma forma, a tecnologia ou ainda a metodologia foram mais eficientes no estudo dos quadriláteros. Os dados também apontam que desenhar parece ser mais fácil do que identificar ou descrever as partes das figuras geométricas.

Apesar de o teste de reconhecimento do estudo piloto não ser equivalente ao aplicado na intervenção principal da tese, consideramos importante apresentar os resultados, comparando-os nas fases equivalentes. Os dados do piloto mostram um crescimento logo depois da intervençãode 55,3%, enquanto que para os alunos do estudo principal foi de 260,2%, diferença de 204,8%. A diferença é ampla e, apesar de tratar de sujeitos distintos, esse dado parece indicar avanços no método de ensino, mais adequado na intervenção do estudo principal. Lembramos que para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), o ensino pode favorecer a aprendizagem significativa desde que empregue métodos adequados, com a utilização de princípios apropriados. Compreendemos que o material da intervenção estava mais adequado do que a do projeto piloto e que o avanço metodológico se deu, sobretudo, pelo próprio direcionamento dado no projeto piloto, assim como o uso de uma tecnologia digital mais voltada ao objetivo da tese. Compreendemos, também, que houve melhoria significativa no instrumento de avaliação, permitindo observar um maior número de relações, através de uma contagem precisa (Anexo E).

Através do teste SAEB, pretendíamos observar se um processo interventivo de curta duração, como o realizado na pesquisa, teria interferência na aprendizagem da geometria em geral. Organizamos os resultados comparando os testes, dois a dois, em um formato de tabela.

Tabela 8 - Avanço percentual do teste SAEB

	Grupo experimental	**Grupo controle**	**Diferença**
Pré-teste e Pós-teste	27,27%	28,07%	0,80%
Pré-teste e Pós-teste tardio	56,82%	59,65%	2,83%
Pós-teste e Pós-teste tardio	23,21%	24,66%	1,44%

Fonte: Dados dos testes SAEB coletados na intervenção.

Os resultados mostram que tanto o grupo controle como o grupo experimental apresentam avanços bem próximos. A cada etapa eles aumentam a quantidade de acertos. Os dados não revelam perdas entre o pós-teste e o pós-teste tardio, indicando um crescimento da sala durante o ano letivo, o que realmente se espera de alunos que estão em processo de aprendizagem. Como não há diferenças significativas entre os grupos, pois o percentual entre eles é muito próximo e a diferença não ultrapassa 3%, não é possível afirmar que os participantes da intervenção evoluíram mais ou menos em relação à classe como um todo.

Nesse sentido, é importante considerar os limites de um teste como o SAEB. Compreendemos que, por apresentar alternativas, pode levar a um acerto por “chute”. Diante disso, nesse teste deixamos espaços para justificativas ou resoluções dos exercícios, que poderiam detalhar o processo desenvolvido ou ainda nos auxiliar na compreensão da solução do problema. Essa justificativa, contudo, não foi efetivada por todos os alunos, ou ainda, em todos os exercícios ou nos vários momentos dos testes. Por isso, analisamos apenas a totalidade das justificativas corretas nos três momentos de testes.

Importante destacar que reconhecemos o valor do erro e compreendemos que, nas justificativas, tanto o erro quanto o acerto representam um ótimo material de análise. No entanto, não é esse o foco deste trabalho, assim nos detivemos nesse momento na quantidade de justificativas corretas, como consta na tabela 5 do capítulo anterior.

Calculando a média de justificativas por alunos, observamos que no grupo experimental corresponde a 7.2, enquanto no grupo controle apenas 3. Esse dado parece mostrar uma diferença significativa entre os dois grupos, pois os participantes da intervenção do estudo principal apresentam, em média, mais que o dobro de justificativas coerentes. Portanto, esse grupo apresenta maiores condições de descrever o desenvolvimento mental para a solução dos desafios propostos, o que aponta para um melhor desempenho do grupo. Inclusive os resultados do teste similar, vindos do projeto piloto, parecem confirmar esse posicionamento, mesmo porque há diferenças de 36% entre os participantes do projeto piloto e o resto da sala, em um modelo de avaliação que exigiu de cada aluno a resolução do problema proposto.

Podemos afirmar que, através dos resultados do teste proposto (SAEB), não foi possível fazer distinção entre o grupo controle e o experimental. No entanto, a comparação de outras variáveis, como justificativas (ainda que gerais) e os resultados do piloto, aponta para possíveis avanços do grupo experimental no contexto geométrico geral. Assim, compreendemos que são necessárias investigações diferenciadas com outros testes para responder a essa questão.

5.2 Análise dos conceitos prévios

Os conceitos prévios têm relação direta com o reconhecimento das figuras, advindos do pré-teste e outros registros iniciais que revelam o processo. Os dados mostram que, de forma geral, o triângulo simples é reconhecido e desenhado por todos. Todos desenham um quadrilátero com formato de quadrado (com exceção de **Ca)**. O quadrado Q6 é a figura mais identificada entre os sujeitos. A figura Q1 é reconhecida como retângulo pela maioria dos alunos. Outra figura que se destaca é a Q11, reconhecida como pipa, embora não a reconheçam por identificar suas características, pois não a definem. Compreendemos que esse conhecimento se dá pelos aspectos visuais, ou seja, a proximidade com o objeto "pipa", brinquedo que conhecem por esse nome. Piaget e Inhelder (1993) afirmam que as primeiras percepções, ainda no estádio I, decorrem primeiramente do reconhecimento dos objetos familiares, depois das formas topológicas e, por último, das euclidianas. Assim, também nossos dados indicam que são as figuras mais simples que sobressaem no processo de identificação.

O nível do pensamento geométrico dos adolescentes se dá pela capacidade de compreender as relações e classificações dos polígonos. Alguns estudiosos da teoria do casal Van Hiele, como Nasser et al. (2004), Walle (2009), Braga e Dorneles (2011), indicam que os adolescentes, como os estudados nesta pesquisa, deveriam alcançar o nível 2 (dedução informal), pois o nível 3 (dedução) seria adequado para alunos do ensino médio e o nível 4 (rigor) para especialistas da área. Assim, vamos primeiramente verificar o nível que seria esperado, o nível 2, na teoria dos Van Hiele, em articulação com os níveis próximos dos estudos de Piaget e Inhelder (1993).

Vimos que o **Nível 2** é o da **dedução informal** e ocorre quando os sujeitos são capazes de generalizar sobre as características que definem uma forma. Assim, um quadrado que tem os quatro ângulos também representa um retângulo. As propriedades de uma figura podem ser deduzidas de outra figura, como destaca Van Hiele (1984). Os alunos são capazes de um tipo de raciocínio do tipo "se - então", estabelecendo relações do tipo: "[...] se isso é um quadrado, ele tem de ser um retângulo" (WALLE, 2009, p. 442). Compreendemos que é coerente com a transição do estádio III para o IV, pois enquanto no nível IIIB passa a existir uma diferenciação operatória completa e um início da formulação das relações, completando as coordenações de conjuntos, no estádio IV predomina a formalização explícita das relações, como mostram os estudos de Piaget e Inhelder (1993). A coordenação métrica, sobre interferência do pensamento formal, capacita os estudantes a explicitar regras, pensar nas características e deduzir resultados.

Nossos dados revelam que nenhum dos nossos alunos se encontrava inicialmente no nível 2 do pensamento dedutivo. Mesmo no caso de **An**, que obteve a maior nota em reconhecimento de figuras, não apresentava níveis de dedução ou ainda uma diferenciação operatória completa, pois, apesar de ter reconhecido o losango e o quadrado como a mesma coisa, justifica dizendo “está virado", ou seja, sua justificativa é apoiada em visualização e não em uma dedução que aponte propriedades interligando essas figuras.

O nível 1, proposto pelos Van Hiele, é do início dos processos de **análise** das formas, quando os sujeitos reconhecem as figuras por meio do estudo de suas propriedades, como destacam Braga e Dorneles (2011). Os alunos definem as figuras em suas propriedades de forma isolada e classificam os diferentes tipos como pertencentes a uma classe, como destacam os estudos de Van Hiele (1984). Compreendemos que, dentro do processo de análise, é possível distinguir subníveis apoiados nos estudos piagetianos e consideramos que a transição do estádio II para III seria coerente. Piaget e Inhelder (1993) indicam que, no IIB, há o início de classificação das formas e diferenciação de formas mais complexas através de reações intermediárias com tentativas de diferenciar os pontos de vista; enquanto no IIIA passa a existir uma diferenciação operatória parcial dos pontos de vista e ocorre o início das coordenações de conjunto, provenientes da lógica formal. Os dados iniciais dos alunos **An** (12.8), **Wa** (13.1), **Al** (13,1) e **Sh** (12.3), mostram que eles se encontravam no nível 1 ou na transição para esse nível.

Para sua distinção, vamos compará-los apoiados pelos subníveis piagetianos. Piaget e Inhelder (1993) indicam que no subnível IIB há descobertas sucessivas do losango e trapézio e antecipação das transformações, mas sem paralelismo e ideia da conservação de lados. **Al** e **Wa** reconhecem que o quadrado e o losango são definidos por igualdade de lados. **Al** reconhece Q1 e Q6 como figuras planas e o retângulo e quadrado como quadriláteros. **Wa** identifica duas figuras diferentes como quadriláteros e desenha corretamente um quadrilátero. Os dados deles ainda indicam classificações simples, inclusive o primeiro mapa de **Wa** e o de **Al** apresentam distinções mais ligadas à visualização, compatíveis com o subnível IIB.

Verificamos critérios mais elaborados no reconhecimento das alunas **Sh** e **An.** Para além das classificações simples, feitas por todos, observamos que **Sh** destaca algumas disjunções e é a que mais reconhece tipos distintos de triângulos. Ainda, apresenta ter noções claras de paralelismo. **An** indica e desenha corretamente um trapézio no formato de losango, mas não apresenta noção de *implicação* entre essas figuras, embora reconheça o quadrado com giro de 45º graus como losango. Ela é a única que reconhece que o quadrado e o retângulo são também paralelogramos. O primeiro mapa de ambas é mais detalhado. Elas se encontravam no subnível IIIA, mesmo porque, como indicam Piaget e Inhelder (1993), é quando passa a existir diferenciação de algumas características e as noções de paralelismo são instituídas.

Visto que o nível 1 para os Van Hiele está relacionado com a análise, consideramos que as alunas **An** e **Sh** encontravam-se nesse nível antes da intervenção, pelas relações alcançadas. Como **Wa** e **Al** apresentaram noções de análise mais simples, encontrando-se em um subnível inferior, dentro dos estudos piagetianos e ainda com um processo fortemente arraigado na visualização, compreendemos que ambos se encontravam na transição entre o nível 0 e o nível 1, da classificação dos Van Hiele. O nível 0 está muito ligado à visualização, nível no qual as figuras são julgadas por sua aparência, como destaca Van Hiele (1984).

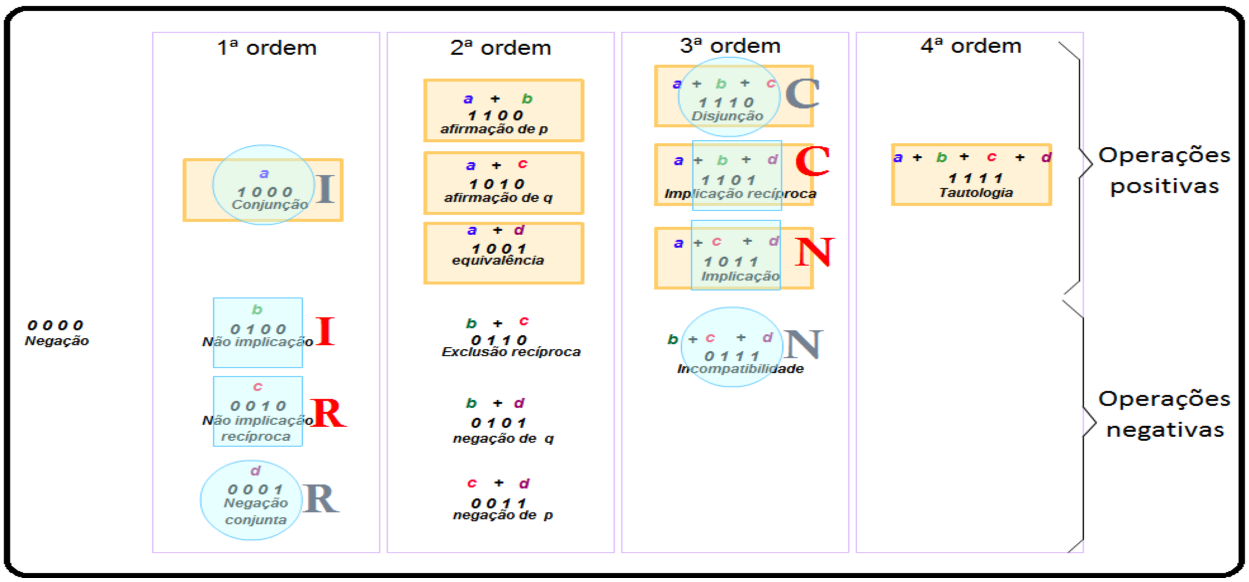
Já os resultados de **Ca** indicam que ela não desenha nem identifica o losango ou o trapézio. Reconhece as figuras mais simples como o retângulo, o quadrado (que não está em rotação de 45º graus) e identifica somente a pipa, Q11. Os dados sugerem que ela distingue a partir do que consegue observar. Os estudos do casal Van Hiele (1984) destacam que quando a aparência é o fator dominante, essa característica domina sobre a propriedade das formas, o que intuímos que ocorre com **Ca**, pois ela não apresenta nenhum princípio de análise. Assim, podemos considerar que ela ainda se encontra no nível 0. Observamos que ela reconhece as figuras por suas características globais e a aparência da forma a define. Nesse sentido, consideramos que ela se encontra no nível IIA dos estudos piagetianos, em que há distinção progressiva das formas, com a representação ainda muito centrada no seu ponto de vista.

De forma geral, observamos que os alunos apresentam uma defasagem em relação ao esperado para sua faixa etária, pois deveriam dominar mais as propriedades das figuras e reconhecer maior número de *disjunções* e *implicações*. A maioria dos alunos estava no nível 1 ou bem próxima a esse nível e essa defasagem encontrada em nos nossos dados, dá-se de forma análoga aos níveis do pré-teste dos alunos do 9º ano, encontrados por Junqueira (1994), trabalhando na perspectiva dos Van Hiele.

5.3 Operações e relações nos mapas conceituais

Para analisar as operações e relações contidas nos mapas conceituais, é importante destacar as opções de análise na perspectiva da teórica descrita. Para maior esclarecimento, refizemos a figura 4 com marcações, como consta na figura 47.

Figura 47- Hierarquia das 16 composições, apontando a ordem e o INRC das 8 principais



Fonte: Figura elaborada pela autora, a partir da análise dos escritos de Piaget (1976).

As 16 operações podem ser descritas em ordem de complexidades, como apontam os estudos de Piaget (1976). Cabe ressaltar que as operações das ordens mais elevadas são formadas de uma composição de operações. Assim, por exemplo, uma *tautologia* contém todas as operações (a+b+c+d); a *disjunção* (a+b+c) contém a *afirmação de p* (a+b) e a *afirmação de q* (a+c); a *implicação* contém a *afirmação de q* (a+c) e a *equivalência* (a+d). Todas essas, por sua vez, contêm a *conjunção* (a), como é possível observar na figura 45.

Portanto, quando o aluno destaca uma *disjunção,* implicitamente, ele conseguiu afirmar e negar *p* ou *q*, assim como teve que coordenar as operações de 1ª ordem envolvidas nessa operação. De forma similar, quando o aluno destaca uma *implicação* ou uma *implicação recíproca,* ele conseguiu afirmar e negar *p* ou *q* e ainda compreender as equivalências envolvidas, ou seja, as operações de 2ª ordem; assim como as operações de 1ª ordem relacionadas.

Das 16 operações, nosso interesse está, sobretudo, nos dois grupos do INRC de operações completas, que para Piaget (1976) desempenham papel decisivo na dedução, destacadas na figura 47 com as letras (INRC). No grupo das combinatórias, considerando a operação *conjunção* (I) como uma identidade, a sua negativa é a *incompatibilidade* (N), a sua correlativa é a *disjunção* (C) e a sua recíproca a *negação conjunta* (R). No grupo das classes e subclasses, considerando a operação *não implicação* (I) como uma identidade, a sua negativa é a *implicação* (N), a sua correlativa a *implicação recíproca* (C) e a sua recíproca a *não implicação recíproca* (R).

Importante destacar que nos mapas, não observamos, por exemplo: (a) a não intervenção de um fator, como a *não implicação* e a *não implicação recíproca*; (b) a ausência simultânea de duas causas consideradas, dada pela *negação conjunta*; (c) ou, ainda, a união de uma *não implicação* e sua recíproca que resulta na *exclusão recíproca*. Nesses casos, as operações revelam-se pelo fator que o aluno descarta[76]. Todas essas se constituem em operações negativas que, em geral, não são descritos numa solução de desafio ou na apresentação de relações existentes, como ocorre no mapa. Portanto, vamos analisar os dois grupos decisivos na dedução, a partir das operações positivas, compreendendo, no entanto, que o registro dessas operações subentende as demais do grupo. Dutra (2006) também não trata com essas operações, analisando conceitos em mapas conceituais dentro de uma perspectiva similar a nossa.

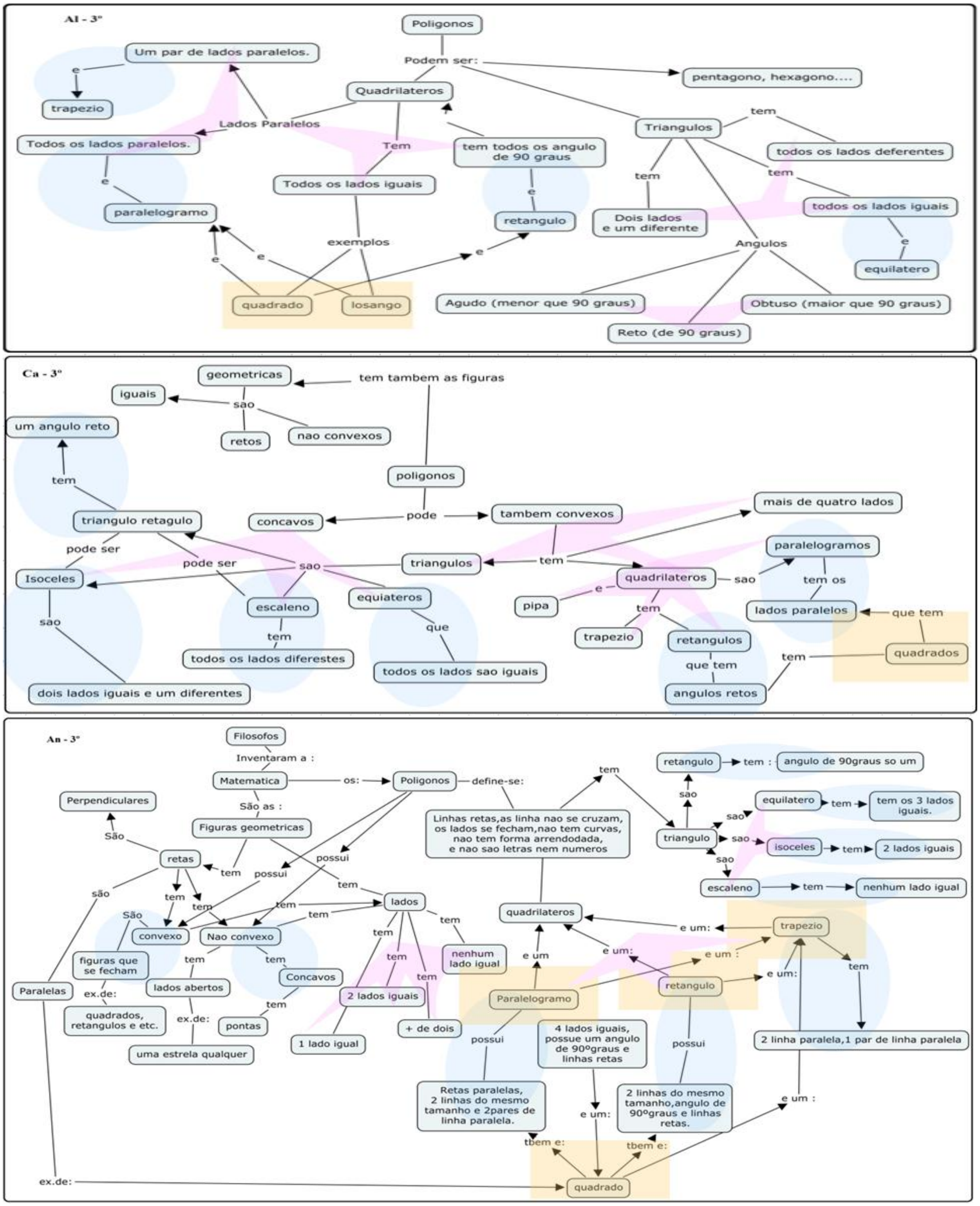
No grupo INRC das combinatórias, destacaremos a *conjunção* e a *disjunção*, e no grupo das classes e subclasses a *implicação*. Inferimos que a análise dessas três compreende todo o grupo de operações positivas. Pois, juntas, *a implicação* e a *disjunção* formam uma tautologia. Na operação *disjunção* é realizada, implicitamente, a afirmação de *p* ou *q* e na *implicação*, além dessas, a equivalência. Importante destacar que a *implicação* recíproca é similar à implicação como visto na teoria. Assim, nos mapas, a análise dessas três compreende as demais operações.

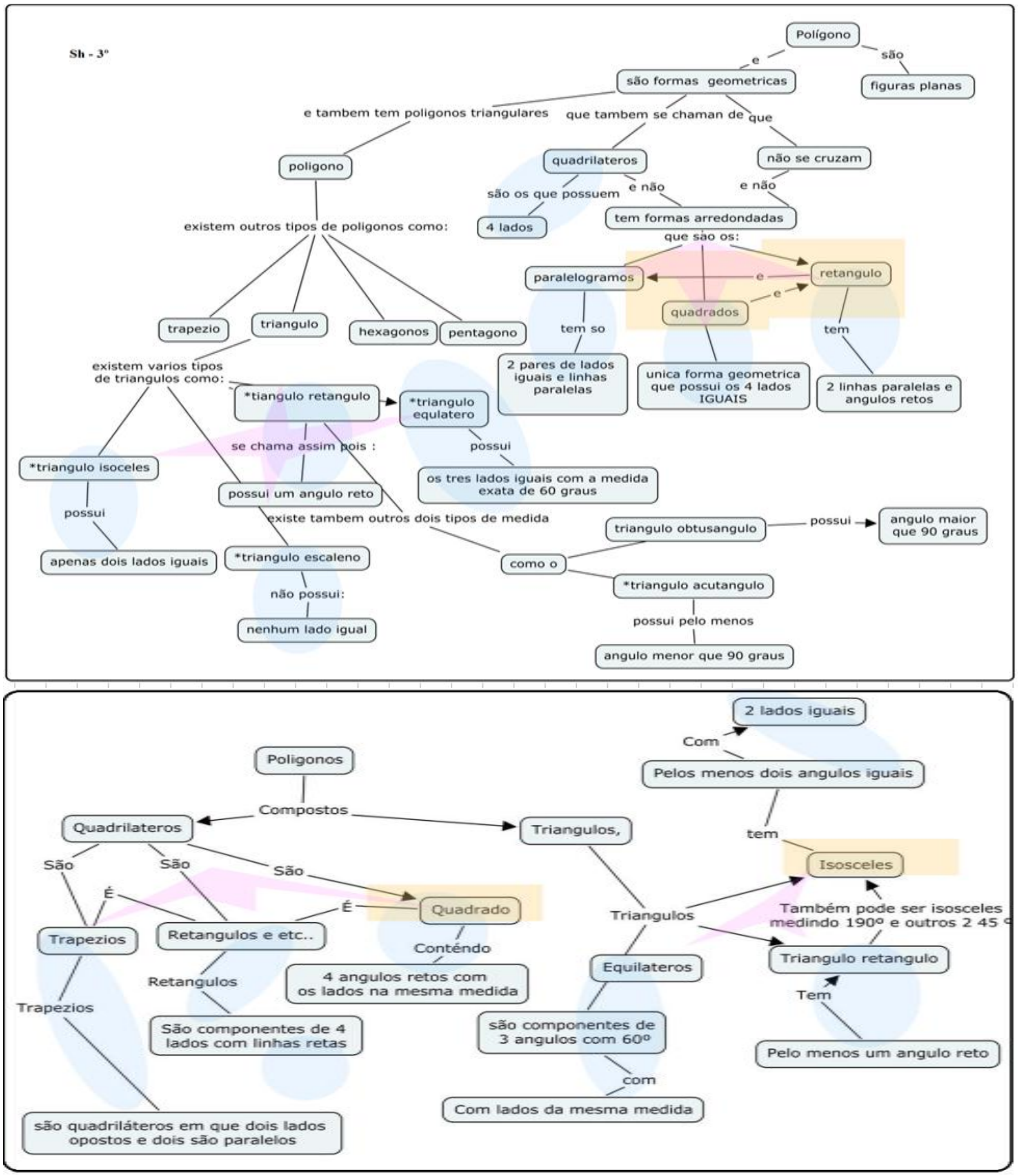
Para facilitar a análise, trazemos o desenho do último mapa que mostra a totalidade de relações estabelecidas pelos adolescentes. Na figura 48, os mapas são, respectivamente, dos

[76] Por exemplo, ao escrever os números primos compreendido entre 10 e 20, é necessário ter estabelecido os conceitos sobre maior e menor que capacita o sujeito a descartar os menores que 10 e os maiores que 20. Fato não revelado explicitamente pela resposta do desafio (11, 13, 17 e 19). No entanto, é preciso que ele compreenda as incompatibilidades e as exclusões citadas para escrita correta. Assim, os registros escritos, em geral, se baseiam nas possibilidades e não na negação delas. Como as operações estão interligadas, as possíveis de descrever indicam que o processo tem relação com todo o grupo INRC correspondente.

alunos **Al**, **An**, **Ca, Sh** e **Wa**. E destacamos as *disjunções* (com estrelas rosadas), as *conjunções* (com círculos azuis) e as *implicações* (com retângulos alaranjados).

Figura 48 - Mapas dos alunos com marcação para análise





Fonte: Dados das atividades dos alunos, coletados durante a intervenção.
Legenda: Círculos azuis (*conjunções*); estrelas roseadas (*disjunções)*; retângulos alaranjados (*implicações).*

5.3.1 Pensamento Combinatório – Conjunções e Disjunções

A *conjunção* ocorre quando duas proposições têm o mesmo valor ou função, como mostram Inhelder e Piaget (1976). Piaget (1976) destaca, também, que a *conjunção* é “por definição a afirmação simultânea de duas proposições ao mesmo tempo". Assim, quando o sujeito apresenta uma definição e identifica detalhes, ele revela uma *conjunção*, pois considera um conectivo (tem/contém) unindo duas proposições que indicam a mesma coisa.

Com relação aos triângulos, podemos destacar *conjunções* de lados e ângulos. Referentes a lados, é possível observar que as alunas **An**, **Ca**, **Sh** indicam que o equilátero tem três lados iguais, que isósceles tem dois lados iguais e que escaleno tem três lados diferentes. Dessa forma, reconhecem os atributos relacionados a lados que distinguem nos triângulos como: todos iguais; somente dois iguais; ou, ainda, todos desiguais. Somente **Wa** não aponta os lados desiguais e **Al**, apesar de distinguir as diferenças por lados, não descreve os nomes que os definem, ou seja, não escreve as *conjunções* nesse caso. Em relação a ângulos, observamos que o tipo mais conhecido é o do triângulo retângulo, destacado por todos os alunos. Já **Al** distingue os três diferentes tipos sem mostrar as *conjunções*, ou seja, não apresenta os nomes correspondentes às distinções feitas. **Sh** é a única que distingue todas as *conjunções* possíveis, mas somente em relação a ângulos.

Quanto aos quadriláteros ampliam-se os fatores, pois para além de lados e ângulos é possível observar o paralelismo entre lados e outras relações; e são esses três fatores que se destacam nesta pesquisa. Observamos que os alunos unem os retângulos a uma proposição e a maioria descreve-os como possuindo ângulos retos, o que realmente o define. Entretanto **Ca** aponta que poderia ser somente um reto e **Wa** destaca as linhas retas, que compreendemos ser um conceito que se encontra em um patamar inferior, pois linhas retas definem um polígono e o olhar dele deveria estar voltado para os ângulos, a fim de definir o retângulo. Mesmo assim, os dados da entrevista mostram que **Wa** reconhece esse atributo, pois afirma: "o quadrado tem quatro ângulos retos, igual ao retângulo" (Wa, EI, 16/04). Parece, apenas, que não compreendeu que são os ângulos retos que definem o retângulo. Nesse sentido, reconhecemos que para ele essa definição está em processo de construção, mesmo porque, como destaca Becker (2010), a conscientização não se dá em uma totalidade, mas apenas em algumas características, sendo sempre possível fazer novas relações em patamares superiores. Assim, um sujeito pode fazer totalizações a partir de fechamentos parciais e superá-las depois em totalizações mais abrangentes em novos patamares.

Ainda com relação aos quadrados, é possível observar outras *conjunções*. **Wa** integra o quadrado a uma proposição, indicando ao mesmo tempo os quatro lados iguais e ângulos retos; **Sh** une-o a uma proposição que identifica como única forma, com quatro lados iguais (erroneamente, pois esquece o losango). Com relação ao paralelogramo, é possível observar que todos o descrevem com exceção do **Wa**. **Al** e **Ca** apontam que tem lados paralelos, ou seja, uma definição correta; **An** e **Sh** definem-no de forma mais precisa, destacando um par de lados paralelos. Apesar de todos indicarem nos seus respectivos mapas o trapézio, somente **Wa** e **An** indicam *conjunção*, pois o definem pela ligação ao paralelismo. Para **Wa** "são quadriláteros que possuem dois lados opostos e dois são paralelos" (Wa, MAPA3), e, nesse caso, a indicação é feita a partir do segundo mapa (figura 43). Já **An** descreve que são "duas linhas paralelas um par de paralelas" (An, MAPA3), mas precisou da entrevista para escrever sobre o trapézio. **Al** indica o losango sem *conjunção* que o define, apesar de, nesse caso, apontar uma *implicação* que vamos descrever a seguir; e **Ca** indica também a pipa como pertencente aos quadriláteros.

Os dados revelam que todos os alunos apresentam estruturas correspondentes à operação *conjunção*, mas nenhum deles, em relação ao triângulo, apresenta todas as *conjunções* possíveis ligadas conjuntamente aos fatores ângulos. Com relação aos quadriláteros, nenhum dos sujeitos sinaliza todas as *conjunções* com relação a lados, ângulos e paralelismo.

A *disjunção* é a operação correlativa à *conjunção* e ambas pertencem ao mesmo grupo INRC, como mostra Piaget (1976): é uma operação aditiva *ou* que exprime uma causa em que um fator é verdadeiro, outro também é verdadeiro, ou, ainda, ambos são verdadeiros. É a *disjunção* feita com os fatores identificados corretamente através de *conjunções*, que expressa o pensamento combinatório capaz de considerar todas as possibilidades de um fator em destaque. A *disjunção* nos polígonos foi observada nesta pesquisa em relação: aos lados e ângulos, nos triângulos; e aos lados, ângulos e paralelismo, nos quadriláteros.

Com relação aos triângulos, os dados indicam que **Al** percebe a totalidade de fatores disjuntos e que essa totalidade forma-se no processo da intervenção. Ela destaca: "aprendemos que para reconhecer uma figura tem duas coisas, por exemplo, retangular e escaleno" (Al, 04/04). Assim, ela vai percebendo a existência desses dois fatores no triângulo, que, nesse caso, indicam um tipo específico de ângulo (ser reto) e de igualdade de lados (todos diferentes). No mapa, **Al** cria a classe ângulos (destacada), mas não a classe lados, apesar de indicar todos os tipos possíveis de ambos os fatores. **An** e **Ca** descrevem a totalidade dos fatores relacionados somente aos lados e ambas também destacam o triângulo retângulo. **Wa** distingue três tipos de triângulos: isósceles, escaleno e retângulo, no entanto não observa a totalidade disjunta de um nem de outro fator relacionado.

Com relação aos quadriláteros, **Al** distingue lados iguais, lados paralelos e ângulos retos como uma primeira linha sucessória, ou seja, igualdade de lados, paralelismo e ângulos retos. Os lados paralelos, para ela, são ligados ao paralelogramo (apesar de erroneamente considerar que tem todos os lados paralelos), pois seriam dois pares de lados paralelos, o que sugere uma definição em processo de construção. **An** distingue o quadrado do paralelogramo e do retângulo, ou seja, relacionado a lado (igualdade e paralelismo) e ângulo (um reto), só não destacou todos, apesar de unir o quadrado ao retângulo, ou seja, conceito em construção. **Ca** distingue os trapézios e retângulo com suas respectivas *conjunções*. Distingue a pipa e o trapézio sem *conjunções*. **Sh** distingue o paralelogramo do quadrado e do retângulo aponta as *conjunções*, definindo-as. **Wa** distingue os trapézios e retângulos, mas como subnível do polígono, juntamente com o triângulo, apesar de nas *conjunções* apresentadas, indicar que ele os identifica como quadriláteros. Aponta mais um nível e indica a classe dos quadriláteros, na qual distingue o trapézio, o retângulo e o quadrado, todos apontando definições, ou seja, descrevendo *conjunções*.

Os estudos de Piaget e Inhelder (1993) mostram que há avanços na distinção progressiva das formas, segundo suas dimensões e seus ângulos, nessa sequência, de forma silimar ao que encontramos nesta pesquisa. Os primeiros mapas apresentam distinções mais relacionadas a lados e os últimos avançam para paralelismo e ângulos, o que é consistente com os resultados encontrados pelos estudos de Piaget e Inhelder (1993), quando indicam que o paralelismo e as noções de ângulos são complementares e são mais elaboradas que as distinções dos lados.

5.3.2 Inclusão de classes - Implicações

A *implicação*, como destaca Piaget (1976), ocorre quando uma causa *p* produz um efeito que se observa em *q*, ou seja, quando um fator está contido em outro fator observado, ou, ainda, uma classe está contida em outra. Os estudos de Inhelder e Piaget (1976) mostram que nos períodos anteriores à lógica formal, o sujeito vai-se dando conta de algumas *implicações* e não de sua totalidade. Já com a lógica formal instituída, o sujeito tem condições de compreender a totalidade das partes implicadas e os fatores ligados à classificação. A *implicação*, um tipo de raciocínio "se-então", permite observar suas várias possibilidades. Assim, por exemplo, o quadrado está contido nas demais classes, portanto se quadrado, então retângulo, losango, paralelogramo, trapézio e quadrilátero. É importante destacar que esse é um tipo de raciocínio dedutivo e é nesse nível que "[...] as propriedades são ordenadas e podem ser deduzidas uma das outras: uma propriedade precede ou segue outra propriedade" (VAN HIELE, 1984, p. 249, tradução nossa), raciocínio que capacita os alunos a realizarem *implicações*.

A análise dos conceitos prévios mostrou a inexistência de implicações dedutivas nos alunos antes da intervenção. Observamos que foi a partir das reflexões feitas no processo interventivo e nas entrevistas individuais que surgiram algumas *implicações*. Os dados parecem indicar que as operações implicativas são mais complexas se comparadas com as operações combinatórias, apesar de nestas não ser simples para o sujeito coordenar a intervenção de todos os fatores disjuntos.

Com relação aos triângulos, observamos que nenhum dos alunos destaca alguma *implicação*, mesmo no terceiro mapa conceitual, e que somente **Wa** mostra um caso específico de triângulo retângulo cujos demais ângulos medem 45º grau, que, nesse caso, seria também isósceles. Com relação aos quadriláteros, já observamos algum tipo de *implicação* por parte de todos os alunos. **Al** indica que o quadrado possui todos os lados iguais, então também é paralelogramo e retângulo ao mesmo tempo. Também indica se é losango, então todos os lados são iguais e é também paralelogramo. **An,** no terceiro mapa, deixa num primeiro nível de forma disjunta, paralelogramo, retângulo e o trapézio (que acrescenta), ou seja, observando o paralelismo simples e duplo e o ângulo reto. Já o quadrado é colocado abaixo, como subnível, e indica a *implicação*, pois relaciona o quadrado às demais figuras que distinguiu no primeiro nível. **Ca,** apesar de fazer ligação do quadrado com outros quadriláteros que definiu, curiosamente só conseguiu ligá-los com os dois que destacou a *conjunção*, os paralelogramos e os retângulos. Isso nos leva a refletir sobre relações entre *conjunções* e *implicações*. **Sh**, a partir do terceiro mapa e instigada pelo diálogo, consegue apresentar *implicações* feitas como: se quadrado, então retângulo, e, por sua vez, se retângulo, então paralelogramo, como mostra a figura 47. **Wa** consegue apontar *implicações* do tipo: se quadrado, então retângulo, e, por sua vez, se retângulo, então trapézio.

De maneira geral, todos indicam *implicações* relacionadas ao quadrado após o processo interventivo. **Ca** e **Al** sugerem *implicações* simples, ligando o quadrado diretamente a outros conceitos distintos, ou seja, conseguem observar somente uma classe que contém outra. **Al**, além de observar *implicações* com o quadrado, sinaliza outras ligadas ao losango, unindo-o com os mesmos conceitos ligados ao quadrado, sem indicar uma relação entre losango e quadrado. Já **Sh** e **Wa**, apesar de ligarem apenas duas classes, indicam dupla *implicação*, ou seja, apontam o retângulo como uma categoria que contém o quadrado e depois o paralelogramo contendo o retângulo que, por sua vez, também contém o quadrado. Aqui estaria a dupla *implicação*. **An** mostra dupla *implicação* em dois casos: no primeiro, o trapézio contém paralelogramo e que, por sua vez, contém o quadrado; no segundo, o trapézio contém o retângulo que contém o quadrado. Consideramos interessante destacar esses detalhes, pois os dados indicam que a *implicação* parece ser uma das operações mais complexas, fundamentais para o pensamento dedutivo.

Observamos que as operações formais foram constituídas no processo, visto que são inexpressivas quando expressas nos mapas e registros iniciais, mas presentes nos mapas conceituais ao final do processo. Assim, os avanços encontrados também parecem indicar que um meio estimulante pode favorecer a aprendizagem mais elaborada, assim como a elaboração e reelaboração de conceitos. Notamos que existem relações entre as operações analisadas, ou seja, quanto mais *conjunções* o aluno destaca mais facilmente percebe as disjunções correlatas e possíveis *implicações* que os conceitos podem estabelecer entre si. Assim, as conjunções também tem relação com o grupo INRC das classes e subclasses, apesar de pertencer ao grupo das operações relacionadas à combinação de fenômenos.

5.4 Operações e relações observadas nos dados gerais

Vamos destacar algumas relações percebidas, privilegiando, sobretudo, registros escritos, pois compreendemos que os mesmos exigem uma compreensão mais elaborada do tema. Passamos a examinar os processos de classificação, as atividades com o Tangram, os desenhos feitos em diferentes tecnologias e as indicações sobre o processo de aprendizagem de cada um.

5.4.1 Processos de classificação

Observamos que em relação aos polígonos (figura 45) e aos triângulos (figura 46), todos realizaram a classificação no *MatGeo* no momento da entrevista individual. Relacionados a polígonos, os dados incidam que, em geral, todos distinguem primeiramente as figuras com curvas e, depois, avançam para critérios mais elaborados. Estudos de Piaget e Inhelder (1993) mostram que o conhecimento que demarca as crianças no estádio II é a separação das formas curvas das diversas formas retilíneas particulares, coerente com nossos resultados.

Na primeira distinção, reconhecemos que **Wa** e **An** distinguem os polígonos das figuras curvas e **Al**, de forma parecida, diferencia os polígonos convexos, só que erroneamente considera todas as curvas como não convexas. Compreendemos também que, de forma similar, esses três sujeitos separam os polígonos convexos, curvas e polígonos não convexos em uma próxima etapa de classificação. Só que **Al** deixa o trapézio erroneamente na classe dos côncavos. O critério mais utilizado para classificação foi o conceito de polígonos, que direcionam as escolhas dos alunos. Esse conceito está relacionado à propriedade das formas.

É interessante destacar que, por ocasião da classificação, os alunos já tinham definido o conceito de polígono, em outra sessão. Notamos que, de alguma forma, o conceito ainda estava se formando em **Al**, além de se mostrar presente, num patamar inferior, nas alunas **Sh** e **Ca**, que fazem suas primeiras divisões mais ligadas à percepção dos aspectos figurativos das formas do que à propriedade das formas. Os estudos de Piaget e Inhelder (1993) reforçam que no nível IB há início de abstração das formas, mas as primeiras reconhecidas são topológicas e não euclidianas. Os dados das duas indicam esse fato, pois enquanto **Ca** separa inteiras, metades e estranhas, **Sh** separa o grupo que “fecha” do que não “fecha”, muito embora o conceito de “fechar” por ela utilizado não seja claro, por estar disposto erroneamente na sua classificação. Esse fato não indica que elas ainda estão no estádio I, mesmo porque, em outros dados elas avançam.

Os dados sugerem o uso inicial de estruturas mais elementares no processo de classificação, ou seja, as alunas **Ca** e **Sh** revelam que os critérios utilizados nas classificações iniciais estão mais ligados à topologia. Assim, esses dados são coerentes com os resultados de Piaget e Inhelder: observando as crianças do estádio III, destacam que esses sujeitos continuam a explorar as formas por meio de atividades perceptivas dos primeiros estádios, mas “[...] essa atividade, ao invés de estar entregue unicamente aos seus meios iniciais, é, de agora em diante, dirigida por um método operatório [...]” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 52), que consiste em agrupar os elementos percebidos através das coordenações reversíveis segundo retas, curvas ângulos e paralelismos. Dessa forma, a atividade perceptiva é dirigida pelas operações.

Vergnaud (1996) destaca que o educando não é capaz de adquirir competência para o desenvolvimento de estruturas lógico-matemáticas, se não for capaz de explicitar os conhecimentos envolvidos na resolução do desafio proposto. Assim, é fundamental dar oportunidade ao aluno para construir seu conhecimento, a fim de que, a partir disso ele seja capaz de generalizar por meio de operações lógicas. Compreendemos que a intervenção individual levou os alunos a pensar e fez com que critérios mais elaborados fossem despertados.

Os estudos piagetianos mostram que “[...] quanto mais o sujeito limitar-se às reações elementares mais ele deformará conceitualmente os dados de observação [...] ” (PIAGET, 1977, p.200), ou seja, se não tiver estruturas para estabelecer relações mais elaboradas, compreenderá somente as parciais, o que acarreta uma tendência de cometer mais erros. Nesse aspecto, verificamos que **Ca** distingue primeiramente características das figuras como inteiras, partes e figuras diferentes. Essas noções são topológicas. Depois, instigada por novas divisões, consegue chegar ao critério de lados que apresenta na última classificação feita, embora permaneçam vários erros, como mostram os destaques. Mesmo assim, os dados de **Ca,** nesse processo, parecem estar mais ligados a uma visualização e o critério lados está entre as distinções mais simples do que ângulos e paralelismo, como indicam os estudos de Piaget e Inhelder (1993).

Sh separa os que fecham, mas provavelmente sem compreender a totalidade do critério escolhido. Questionada, muda de critério sem definir o conceito de fechar. O segundo critério que utiliza tem relação com as figuras de pontas triangulares (o que provavelmente seriam ângulos agudos), no entanto ela não distingue adequadamente as figuras e, mesmo questionada, considera estar correta a divisão, como mostra P_{42}, na figura 45. Esse também é um critério topológico. Depois, consegue observar uma das propriedades que retomamos na intervenção, o paralelismo, já apresentando noções operatórias formais, como faz em P_{43}. Na última classificação, contudo, ainda são os critérios topológicos que a impulsionam, e, apesar de separar as figuras em seis divisões, não consegue defini-las e agrupá-las em classes.

Quanto aos triângulos, os dados indicam que **An** e **Wa** distinguem as diferenças entre lados e ângulos. **Wa**, inclusive, mostra-se atento na classificação por ângulos e indica que o triângulo retângulo contém um ângulo reto. **Ca** e **Al** também diferenciam lados e ângulos, mas ambas apresentam erros, deixando um dos triângulos numa classe que não lhe pertence. **Sh** não evidencia um mesmo fator, pois mistura lados e ângulos. Dessa forma, a maioria consegue realizar uma classificação correta por ângulos, com exceção da **Sh** que mistura os critérios, apesar de o programa indicar ora lados, ora ângulos. Compreendemos que essa indicação na classificação no OA está inadequada, pois inibe o aluno de formular novas estratégias ou apontar outras formas de classificação que possam surgir, e pretendemos alterar na versão III.

O processo de classificação nos revela a importância desse tipo de atividade. Compreendemos que para o aluno avançar e organizar seu pensamento desenvolvendo novas estruturas, é preciso que ele seja instigado a formar novas classes por outras divisões, assim como retirar divisões para, na adição de critérios, ser possível compor novas classes. Observamos que, apesar de esse tipo de atividade parecer simples, os dados mostram uma organização de estratégias do pensamento, que se fundamenta em estruturas operatórias.

5.4.2 Processos elaborados nas atividades do Tangram

O Tangram é o jogo dos sete polígonos que se encaixam, ou seja, que compõem totalidades em infinitas possibilidades. Os dados revelam que, nos primeiros 30 minutos, nenhum dos alunos conseguiu compor uma totalidade, ou seja, passar de uma etapa para outra do jogo. Os relatos dos adolescentes revelam suas dificuldades, conforme registro abaixo:

> (Al) Se fosse mais aberto dava... (*refere-se ao paralelogramo ser mais largo para encaixe)*. (P) Se fosse mais aberto? (Al) Quero colocar esses troços aqui e não encaixa. (Ca) Professora, não quer ficar do tamanho. Não quer ficar aqui... (P) Também é possível girar figuras. (Ca) Mas todas essas peças cabem aqui? (P) Cabem todas as peças aí. (Al) Acho que não encaixam não? (P) Será? (Al) Estamos tentando encaixar há um tempão e ninguém está conseguindo. (Al) Pode mudar de programa? (Ca) Que ódio! Não encaixa. Deixa ver se assim dá certo. (Al) Ele não entra certinho no quadrado. Pode ficar fora assim, professora? (RO, 05/04)

Notamos que, depois de várias tentativas frustradas, o grupo não queria mais jogar. Assim, mesmo que o jogo com conteúdos digitais seja atrativo e esteja entre as atividades preferidas dos alunos, como mostram os estudos e pesquisas de Veen e Vrankking (2009), Mazzarella et al. (2009), Matar (2010), CETIC.BR (2010), os adolescentes perdem o interesse quando não atingem o objetivo esperado e rapidamente querem ir para outro ambiente, prática comum dos nativos digitais.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) consideram que o material de apoio deve estar conceitualmente claro e ser apresentado de forma que o aprendiz possa relacioná-lo com seus conhecimentos prévios. As atividades interventivas foram conduzidas, nessa perspectiva, de forma a capacitar os alunos a alcançar os desafios do jogo, levando-os primeiramente a refletir nas partes divididas do quadrado para depois compor o todo, sugestionado pela animação “Aventuras do quadrado”, componente do OA, *MatGeo*. A interação com o OA permite aos alunos realizarem relações de divisão e composição de um quadrado em partes. Nesse aspecto, observamos que eles tiveram oportunidade de construir as operações infralógicas de adição e subtração dos elementos que compõem o jogo, o qual consiste em dissociar as partes e compor as partes, como mostram os estudos de Piaget e Inhelder (1993). Isso ocorre quando, juntamente com a história, cortam seu quadrado em sete partes na sequência sugerida pela animação.

Depois os alunos passam a compor as partes, realizando o caminho inverso, pois foram orientados a pensar na animação do final para o início, operando com adição e subtração de elementos, compatível com a infralógica aditiva e também com simetria e reciprocidade das relações, apresentados nos estudos de Piaget e Inhelder (1993). A partir disso, uns antes dos outros, conseguiram compor com as sete peças o quadrado novamente. **An** foi inclusive “a primeira que conseguiu, quando gritou: - Consegui! *Interessante que sua euforia é tanta que no vídeo dá para vê-la pulando de alegria.*” (An, RO, 02/04). Em geral, os dados revelam que todos ficaram contentes quando conseguiram compor o primeiro quadrado.

Com relação à animação, os sujeitos revelam que depois da história conseguiram resolver os desafios, como mostra uma das descrições (**An**) que trouxemos abaixo:

> “Nós começamos a olhar a história do quadrado que virou sete figuras, 5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Depois, tínhamos que montar o quadrado e eu imaginei: ele se dividiu em 2 triângulos e depois 1 deles mais uma vez se dividiu em dois. A outra parte se

> dividiu e virou um barco, depois se quebrou e virou dois sapatinhos, sendo um trapézio. Eu refleti nisso, assisti de novo e consegui montar. Depois, no jogo do Tangram, consegui formar 7 figuras...” (An, ED, 03/04).

Os dados mostram que **Al** precisou fazer outras relações para compor o quadrado. Ela cortou as peças, mas estava com dificuldade, assim...

> [...] ela foi rever a história, cortou corretamente depois de um tempo. (P) Ok. Que tipo de figuras têm aqui? (Al) Quadrado, triângulo e paralelogramo. (P) Os triângulos são de que tipo? (Al) Isósceles. (AL, RO, 05/04)

É possível observar que ela organiza e classifica as partes em figuras que conhece e também ordena da peça maior para a menor. Nesse caso, além de realizar a operação infralógica de colocações e deslocamentos, apontada nos estudos piagetianos, ela classifica os triângulos do Tangram percebendo semelhanças, pois indica que todos eram isósceles. Também, juntamente com **An,** que tinha se aproximado, percebem algumas relações entre as peças através de operações infralógicas ligadas à multiplicação biunívoca dos elementos, pois mostram que os triângulos menores juntos podem dar origem a outras peças, como exemplificamos na figura 32.

Al, depois de ter todas as peças recortadas em mãos, retoma a história ao contrário, observa a composição das peças, que anteriormente tinha decomposto, verifica vizinhos que se encaixam e consegue compor o quadrado original. Para compor novas totalidades com as mesmas peças, foi necessária a compreensão da reciprocidade das referências apontadas por Piaget e Inhelder (1993), ou seja, quando com um giro de uma peça, se pode ou não formar uma figura recíproca em relação ao encaixe. Os demais alunos passam por um processo similar.

Os dados mostram que os sujeitos, em geral, conseguem formar várias totalidades no jogo digital. **Al** conseguiu ao todo quatro, **An** cinco, **Ca** dezessete, **Sh** oito e **Wa** seis. Nesse processo, eles reconhecem que as peças são simétricas, ou seja, mesmo giradas com rotação (da esquerda para a direita) são as mesmas, fato ligado à operação infralógica da simetria. No entanto, o paralelogramo, apesar de ser simétrico, exerce uma reciprocidade diferente a cada giro e é a única peça que também permite rotação (de cima para baixo). Foi pedido aos alunos que indicassem a peça mais difícil. **Wa**, no grupo, e os demais, individualmente, indicaram o paralelogramo, pois compreenderam sua dupla complexidade.

Depois de interagir com a animação, todos foram capazes de resolverem os desafios do jogo Tangram. Como todos conseguiram compor várias totalidades, compreendemos que a história "Aventuras do quadrado" tornou-se um material de apoio significativo que possibilitou aos alunos realizar operações infralógicas, capacitando-os a compor e a decompor partes. Os dados revelam inclusive que, nos encontros seguintes, em momentos de folga eles retornavam ao jogo, realizando novas composições. Assim, de forma análoga aos estudos Piaget e Inhelder (1993), as experiências oportunizaram aos alunos elaboração das operações infralógicas.

5.4.3 Processos elaborados nos desenhos efetivados no Slogo-3.0

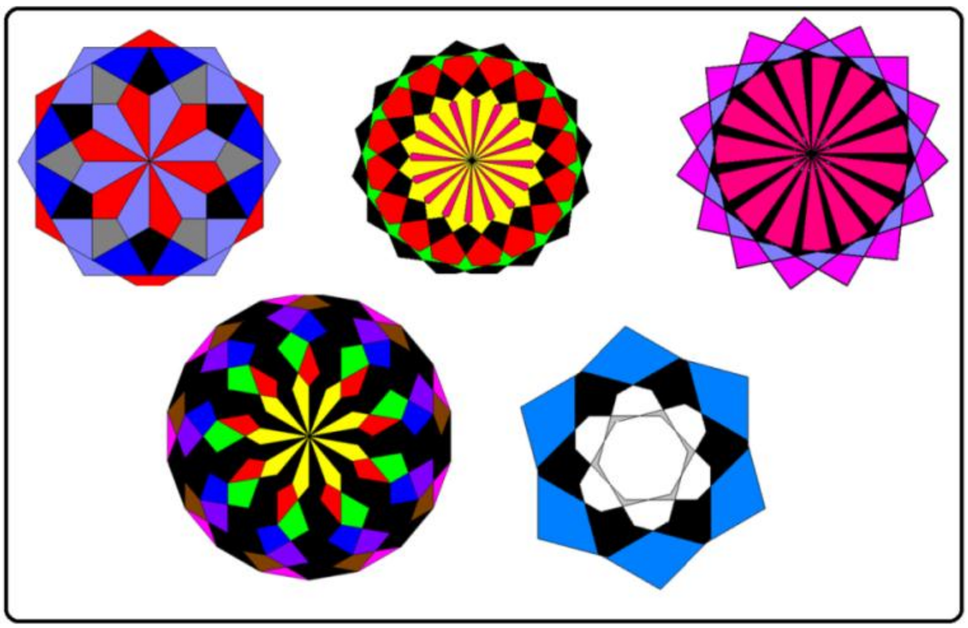
Ao desenharem no *Slogo-3.0*, os adolescentes trabalharam com dois processos que pretendemos apresentar separadamente. Em primeiro lugar os desenhos foram feitos por meio de componentes básicos, ou seja, retas e ângulos, e, em segundo lugar, trabalharam com a composição do desenho, por mudança de pontos na coordenada cartesiana.

5.4.3.1 Desenhos com os componentes básicos (retas e ângulos)

Compor o desenho através de retas e ângulos, remete a várias operações infralógicas estudadas. Observamos que para desenhar o quadrado não houve muitas dificuldades e os dados mostram que todo o grupo presente (**An**, **Ca**, **Sh** e **Wa**) consegue desenhá-lo facilmente, com comandos de deslocamento da tartaruga e, quando necessário, giro de 90º graus. A maioria dos alunos fez a primeira reta e giro e percebeu que era necessário repetir o mesmo comando outras quatro vezes. Como o desenho é feito por passos, as operações infralógicas, estudadas por Piaget e Inhelder (1993) são necessárias: adição de elementos, deslocamento a ser percorrido na direção adequada e sequência correta para executar os desenhos. Um quadrado é simétrico, o que permite repetir o tamanho do lado e o giro (e, no caso do quadrado, tanto o ângulo externo quanto o interno têm a mesma medida 90º). O desenho do retângulo foi feito tranquilamente por todos, o que indica que essa figura não oferece maiores complicações para sua construção no *Slogo-3.0*.

Na execução do triângulo, mesmo o regular, houve maiores dificuldade, relacionadas ao ângulo. Mesmo sabendo o valor do ângulo, é preciso verificar a posição da tartaruga para distinguir se utiliza o interno ou externo. Por exemplo, **Ca** pergunta: "- Professora, e aqui quanto... 110?". Observamos que, nesse momento, ela já tinha percebido que deveria usar o externo, mas apresentava erros ao medir/calcular o ângulo. Assim, para fazer um triângulo regular na tela é preciso observar também operações de vizinhança e adicionar o elemento inverso no processo de composição, operações destacadas nos estudos de Piaget e Inhelder (1993), pois o ângulo interno somado com o externo dá 180º. É importante considerar que eles utilizavam o transferidor para medir o ângulo no papel e depois reproduziam no computador.

Figura 49 - Mosaicos feitos no *Slogo-3.0* e colorido no Paint



Fonte: Mosaico dos alunos, coletados na intervenção, respectivamente de Al, An, Ca, Sh e Wa.

Desenharam também os polígonos, utilizando comandos de repetição, depois construíram outros desenhos, mais elaborados, e mosaicos utilizando a repetição dos polígonos criados, equidistantes um do outro, a medida de um ângulo específico, como mostra a figura 49.

Al construiu seu mosaico (desenho) repetindo 12 vezes o hexágono regular, com um giro de 30º graus entre eles. **An** repetiu 16 vezes o hexágono feito, dando um giro de 22,5º graus. **Ca** repetiu 15 vezes o quadrado, dando um giro de 24º graus entre eles. **Sh** repetiu 18 vezes o eneágono, dando um giro de 20º graus entre eles.

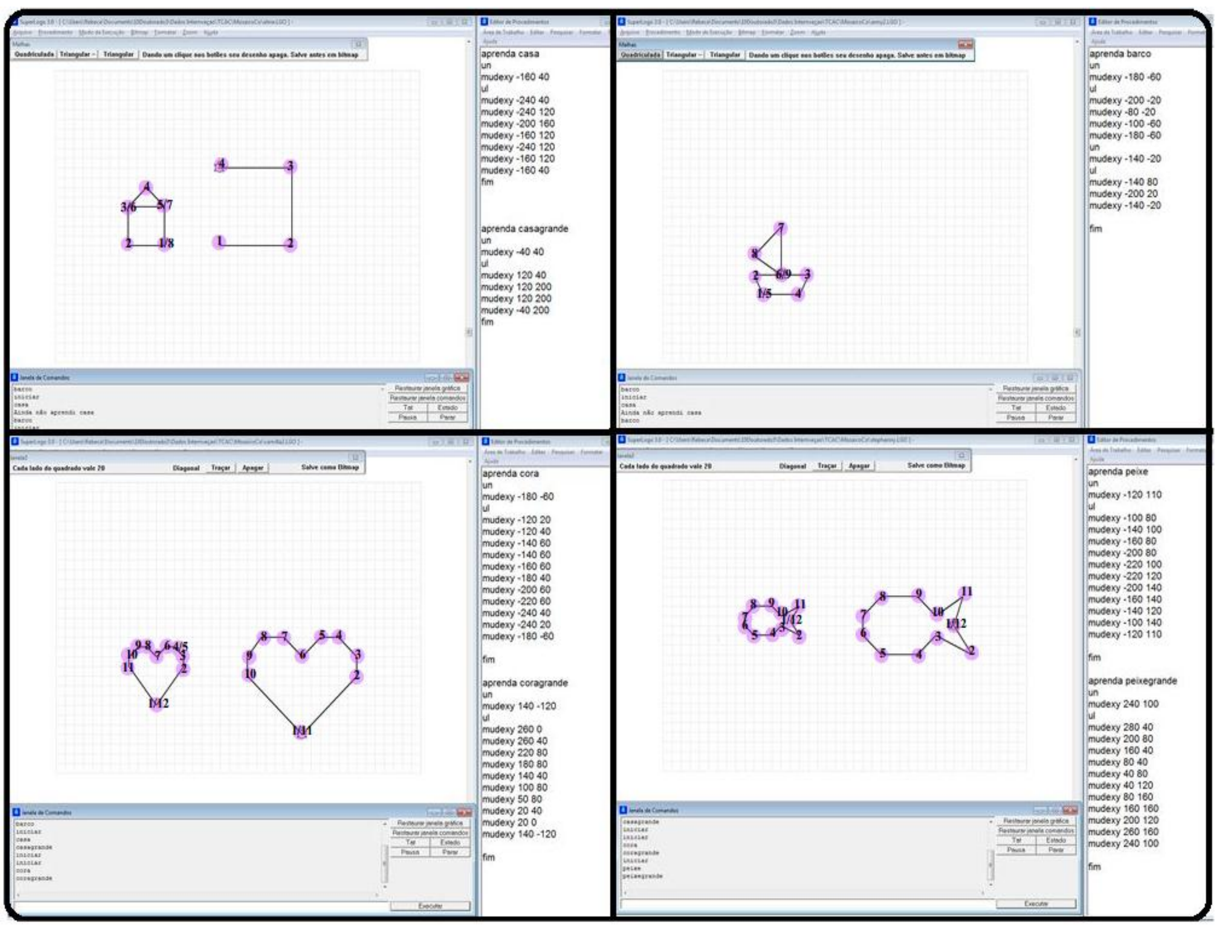
Os mosaicos (desenhos) mostram uma composição que surge ao se adicionarem polígonos regulares. Trata-se, portanto, de uma adição de elementos, mostrados nos estudos infralógicos. Cada um dos diferentes mosaicos criados pelos alunos apresenta reciprocidade de referências, pois, se fosse dividido em quadrantes, teríamos partes recíprocas umas às outras. Esses mosaicos também apresentam multiplicações dos elementos que compõem a figura.

Assim, as atividades propostas além de fomentarem nos sujeitos relações sobre os diferentes tipos de polígonos desenhados, fizeram com que cada um realizasse diferentes operações infralógicas, descritas nos estudos de Piaget e Inhelder (1993).

5.4.3.2 Desenhos com mudança de pontos na coordenada cartesiana

O grupo compôs desenhos, ainda no *Slogo-3.0*, através da mudança de ponto da coordenada cartesiana. É importante relembrar que cada aluno teve acesso a uma malha quadriculada em papel, em que fizeram seu esboço, no qual indicaram os pontos das coordenadas. Depois, foram para o computador, a fim de executarem os desenhos.

Figura 50 - Desenhando pela mudança de ponto na coordenada cartesiana



Fonte: Dados de atividades dos alunos, coletados na intervenção.
Legenda: Os números indicam a sequência utilizada e foi acrescido pela autora para análise.

Conseguimos os dados de todos, como mostra a figura 50, com exceção de **Wa,** cujo desenho se perdeu, por ter fechado o programa sem salvar. Isso também ocorreu com **Sh,** no entanto ela ficou depois da sessão interventiva e refez todo o processo.

Al desenha a primeira casa, **An** o barco, **Ca** o coração e **Sh** o peixe. Para esse processo é necessário compreender noções de ordem e deslocamento, propostos por Piaget e Inhelder (1993), no espaço cartesiano.

Podemos observar que os alunos percorrem o caminho numerado e iniciam pela figura pequena. Se o ponto está em uma mesma reta horizontal (como ocorre com o ponto 1 e 2 no caso da **Al**), é preciso variar o x mas manter o y. Já se o ponto está em mesma reta na vertical (como ocorre com o ponto 8 e 9 de **Sh**), é preciso manter o x e variar o y. Os pontos nos quais os alunos iniciam e finalizam o desenho estão demarcados com dois pontos. É importante relembrar que quando o ponto é antecedido por "**un**", há um deslocamento sem riscos na tela do computador; quando os vários pontos são antecedidos por "**ul**", há deslocamento, deixando um rastro que equivale à menor distância entre os pontos, portanto um segmento de reta.

Os dados acima revelam que os desenhos de **Ca** e **Sh** iniciam em um ponto e apresentam uma sequência única da direita para esquerda, encerrando no mesmo ponto. No caso de **Ca**, a sequência ocorre da esquerda para direita, de forma equivalente no primeiro e segundo coração. No caso de **Sh**, a sequência acontece da direita para esquerda, tanto no peixe pequeno como no peixe grande. Para encontrar esses pontos é preciso compreender as noções de reciprocidade e simetria, apresentadas por Inhelder e Piaget (1993), além da adição dos elementos, ou seja, dos segmentos de retas que formam o desenho desejado. É interessante destacar que **Ca** conseguiu fazer o primeiro desenho mais tranquilamente, mas errou em um ponto recíproco no desenho maior e precisou de intervenção para encontrar o erro.

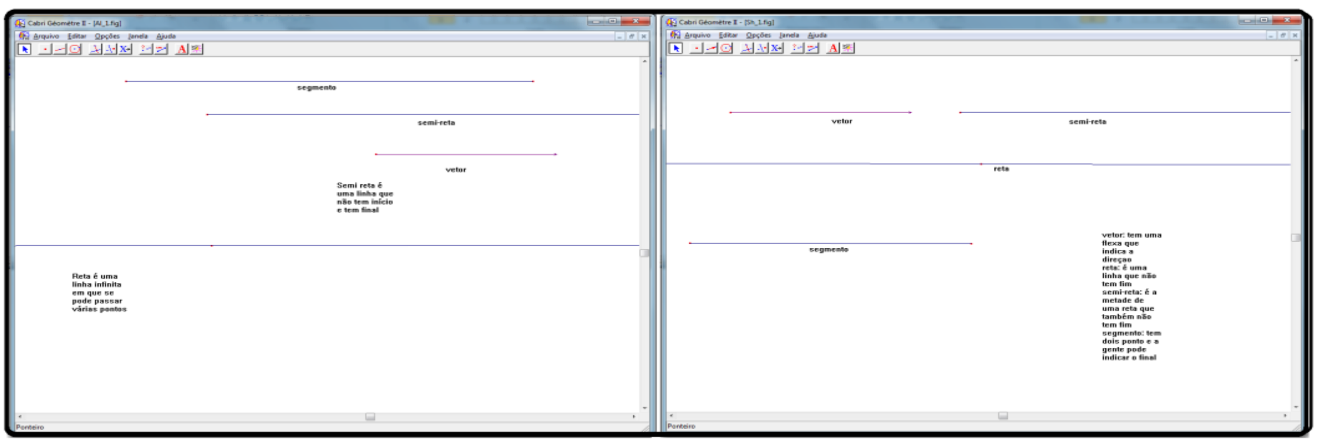
Al não terminou e **An** não fez a ampliação. Tanto uma quanto a outra passaram mais de uma vez pelos pontos sem que tivessem terminado o desenho. A casa e o barco têm uma divisão explícita, ou seja, a casa é formada por um retângulo e um triângulo justaposto na parte de cima, e os dois são ligados por um segmento de reta. Já o barco é formado por um trapézio e um triângulo, que, por sua vez, são ligados somente em um ponto comum. Por essa razão, é necessário passar mais de uma vez pelo mesmo ponto, sendo fundamental compreender essa adição de elementos na composição do todo, relacionado à operação infralógica da adição, apresentada nos estudos de Piaget e Inhelder (1993).

Apesar de **Al** não terminar a ampliação, seus dados mostram que ela inicia pela base da casa grande, como no primeiro desenho, só que parte para uma sequência inversa: ao invés de ir da direita para esquerda (como fez na casa pequena), ela parte da esquerda para a direta, construindo o outro desenho a partir da reciprocidade simétrica, que está entre as operações infralógicas destacadas nos estudos piagetianos. O segundo desenho era para ser o dobro e, nesse sentido, compreendemos as relações voltadas à multiplicação biunívoca dos elementos, como constatam Inhelder e Piaget (1993), que também são estabelecidas.

5.4.4 Processos nos desenhos realizados em geometria dinâmica

Uma das primeiras atividades realizadas em geometria dinâmica foi a definição de alguns elementos básicos. Como a ferramenta nomeia os elementos da geometria, é preciso compreender os conceitos para utilizá-los. Os alunos foram orientados a colocar na tela ponto, reta, semirreta, segmento de reta, vetor e, a partir do que viam, deveriam conceituar cada elemento.

Figura 51 - Conceitos básicos de geometria, realizadas no *Cabri-Géomètre* II.



Fonte: Dados de atividades dos alunos, coletados na intervenção, respectivamente de (Al e Sh).

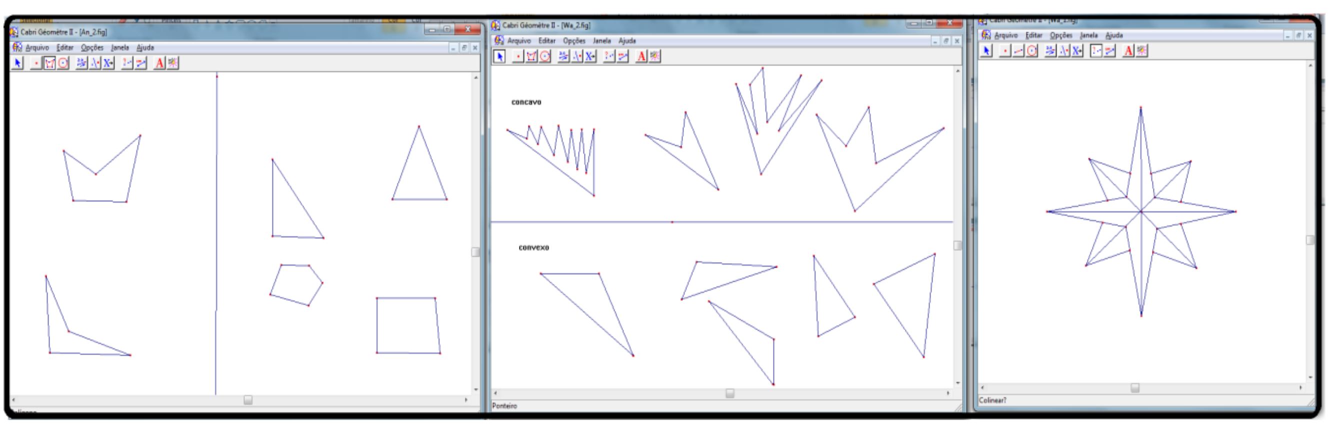
Os dados revelam que todos os alunos conseguiram realizar a tarefa, apesar de encontrarmos alguns mais resistentes, como **Sh** que, após colocar os elementos na tela, disse que não sabia o que fazer. Foi pedido a ela que falasse sobre o que estava vendo e ela disse: “mas não estou vendo nada” (Sh, RO, 29/03). Instigada a continuar, assim como os demais, descreveu seus conceitos. Como exemplo, trouxemos o modelo de **Al** e **Sh** expresso na figura 51.

Observamos que, em geral, com pequenas diferenças, eles chegam a conceituar cada elemento, como mostra a figura 51. Para **Al**, por exemplo, “reta é uma linha infinita em que podem passar vários pontos” (Al, RE, 29/03). Nesse sentido, até se aproxima da definição de Euclides (2009), que define linha reta como aquela “que está posta por igual com os pontos sobre si mesma”.

Outras definições similares são encontradas como “reta é uma linha formada de pontos; a semirreta equivale à metade de uma reta” (Sh, RO, 29/03). Para a compreensão de uma reta formada por pontos, é necessária a operação infralógica relacionada à multiplicação biunívoca de elementos, em que a multiplicação de infinitos pontos constitui uma reta, como vimos nos estudos de Piaget e Inhelder (1993). Ainda sobre reta, os alunos descrevem: “reta é uma linha que não tem fim” (Sh, RE, 29/03), “a reta vem dos dois lados” (Ca, RO, 29/03). Assim, a oportunidade de compreender os elementos compõe processos importantes para a aprendizagem.

Outra atividade significativa realizada com a ferramenta está demonstrada na figura 52, com exemplos dos alunos **An** e **Wa**, em que eles distinguiram os polígonos convexos dos côncavos. Foi uma atividade feita por todos, sem maiores dificuldades. Observamos que a distinção colabora para a formação do conceito.

Figura 52 - Desenho de polígonos com o *Cabri-Géomètre* II

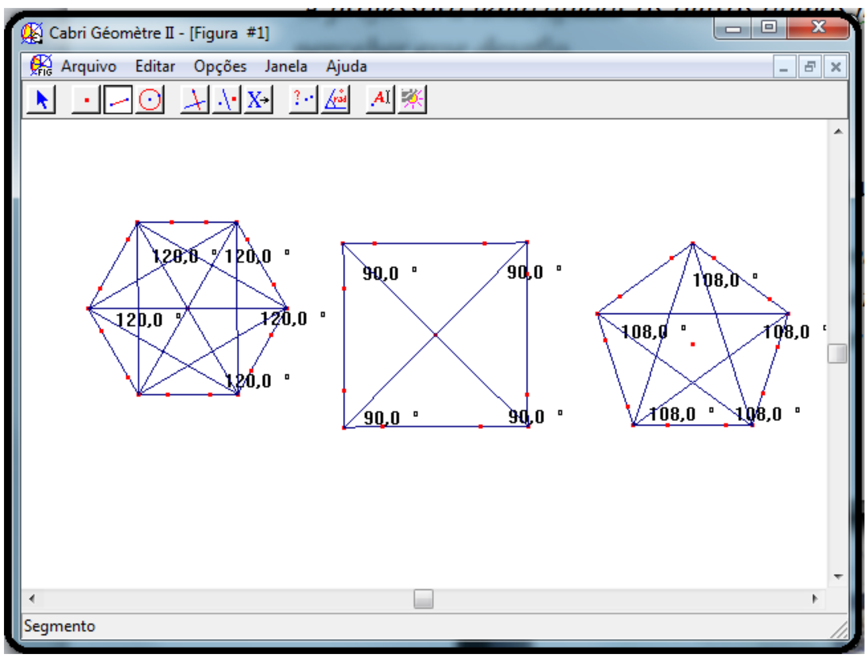


Fonte: Dados de atividades dos alunos, coletados na intervenção: o primeiro da **An** e os últimos do **Wa**.

Consideramos interessante destacar o desenho extra que **Wa** fez na ferramenta. Não é simples no *Cabri-Géomètre II* fazer um desenho simétrico com detalhes, como o realizado por ele, pois diferente do *Slogo-3.0*, não é possível calcular ou repetir algo já feito. Os dados revelam que o aluno estava radiante de conseguir fazer e de vencer sua dificuldade, pois, quando a câmara se aproxima, diz: “esse é mais um trabalho de **Wa**... aproveita agora, está chegando a outra parte mais difícil”. Nesse tipo de construção, **Wa** trabalha com operações infralógicas, defendidas pelos estudos de Piaget e Inhelder (1993), ligadas à adição de elementos, por serem partes simétricas que compõem o todo; ordenação e deslocamentos, pelo fato de o desenho seguir uma ordem; simetria e reciprocidade, pois em cada quadrante a figura é semelhante.

Outra atividade trabalhada foi a de desenhar os polígonos regulares, variando de três a dez lados, nos quais os alunos deveriam colocar o valor dos ângulos e, depois, desenhar as diagonais de cada polígono, como mostra o exemplo da aluna **Ca** (figura 53).

Figura 53 - Desenho de polígonos regulares e suas diagonais



Fonte: Dados da aluna **Ca**, coletados na intervenção.

Os dados revelam que todos conseguiram executar a atividade, embora **Al**, **Sh** e **Ca** tenham feito apenas as figuras com menor número de lados, enquanto **An** e **Wa** fizeram todas as figuras. Esse tipo de atividade, além de envolver relações infralógicas como adição de elementos, simetria, entre outros, também colabora na percepção de relações lógicas entre lados e ângulos de figuras regulares e de suas diagonais. No final, os alunos deveriam preencher uma tabela relatando a quantidade de lados de cada figura, o valor do respectivo ângulo, a soma dos ângulos da figura e a quantidade de diagonais.

Depois de preencher as tabelas, os alunos **An** e **Wa** indicam ter descoberto a relação de diagonais em cada figura. **An** inclusive registra no diário: "[...] e fizemos uma descoberta que a cada figura é uma diagonal a mais" (An, ED, 02/04). Observamos que não é fácil descrever a descoberta e a escrita não revela todo o processo que foi mais detalhado em sala quando, juntamente com **Wa**, eles mostraram e comentaram que, cada vez que aumenta um lado da figura, amplia-se o número de diagonais que parte dos seus cantos. Indicaram que de cada canto do quadrado parte apenas uma diagonal, no pentágono, duas, e assim por diante. Verificamos que a escrita não revela a descoberta e isso confirma as ideias de Vergnaud (1999), quando considera que nenhum de nós é hábil em explicitar, já que, muitas vezes, alcançamos o êxito na execução de uma tarefa, sem ter noção da conceituação.

Com respeito às atividades relacionadas a compreender a existência ou não de um triângulo qualquer, a partir de três retas dadas, similar ao apresentado no terceiro capítulo deste trabalho, e mostrado na figura 25, reconhecemos que todos os alunos, juntamente com a pesquisadora, constroem o triângulo cujos lados estão inscritos em duas circunferências, a partir de transposição de segmentos de retas. A partir disso, quanto a reconhecer a existência dos triângulos, **Ca** revela: "Tem um triângulo quando as linhas da coisa... se encontram" (**Ca**, RO, 16/04). Já **An**, ao ser questionada, responde: "Quando a soma de **a** e **b** for maior que cinco". Observamos que tanto uma como a outra apresentam resultados em patamares inferiores: no qual **Ca** está muito ligada somente ao que vê acontecer, enquanto **An** consegue calcular a soma dos lados menores e, inclusive, indica que eles podem ter várias medidas, embora pense que o lado maior era fixo (muito provavelmente ela não alterou o segmento do lado maior no modelo digital). Quando questionada, pensa no lado maior como **c** e não em um lado com valor específico. No diário, **Al** revela: "Aprendi que nem todo o lado pode formar um triângulo. A soma dos lados menores tem que ser maior do que o lado maior para formar um triângulo" (Al, ED, 16/04). Os demais alunos também reconheceram que a existência do triângulo está relacionada ao tamanho de seus lados.

Nesse sentido, as descobertas dos alunos aproximam-se do vigésimo axioma de Euclides que retrata "[...] os dois lados de todo o triângulo, sendo somados juntos de toda maneira, são maiores do que o restante" (EUCLIDES, 2009, p. 112). Assim, compreendemos que um conceito está sendo formado, a partir das operações topológicas (aquelas que podiam ser observadas no desenho), para operações métricas, pois, na observação das medidas do lado, é possível generalizar a solução do questionamento. É interessante observar que **Al** consegue escrever sobre o processo, o que inclusive é mais complexo, pois não temos facilidade de explicitar, como mostram os estudos de Vergnaud (1999).

Os resultados indicam que os alunos em geral descobrem e fazem relações por si mesmos, ainda que sejam complexas, a partir da orientação e a oportunidade de experimentação em ambientes favoráveis. Esse dado é similar aos encontrados por Junqueira (1994) que trabalhou somente com uma das tecnologias, o *Cabri II,* indicando que seus alunos chegaram à abstração a partir da experiência empírica, através do diálogo e que eles eram atraídos por aquilo que viam modificar-se, necessitando, entretanto, de orientação para formular conjecturas.

5.4.5 Revelações sobre o processo de aprendizagem de cada aluno

Consideramos interessante apresentar, de forma sucinta, alguns destaques do que os alunos revelam. Em primeiro lugar, destacamos a preferência entre as tecnologias digitais trabalhadas dentro do conteúdo: *MatGeo, Slogo-3.0 e Cabri-Géomètre*. Na sequência, apresentamos dados nos quais os alunos trazem revelações sobre o processo de sua aprendizagem.

As animações existentes no *MatGeo* indicam que, no geral, as histórias os ajudaram a compreender conteúdos relacionados, como mostram os relatos abaixo:

> "A história das "Descobertas do Quadrado" me ajudou em sala de aula com a tarefa sobre polígonos" (Al, ED, 23/04).
> "Eu gostei daquele quadrado que vai... *e fazia os gestos de divisão nas mãos...* que a gente pegou o computador e começou a fazer igual no papel. E, depois, pudemos fazer os vários desenhos. Dividimos, como na historinha, o quadrado e conseguimos montar o quebra-cabeça" (Ca, RO, 23/04).
> "As histórias me ajudaram muito e eu tive mais facilidade para aprender com as histórias" (Al, EF, 23/04).

Os alunos revelam que as histórias auxiliam a aprendizagem matemática e favorecem a formação de relações, que colabora na resolução do desafio. Esse fato nos reporta às pesquisas de Silva e Silva (2012), Nacarato, Mengali e Passos (2011) que destacam as histórias pedagógicas, no escopo da literatura infantil, como auxiliar na aprendizagem da matemática. Também, em se tratando da história relacionada ao Tangram, é possível observar que as relações feitas pela animação colaboram significativamente para solução do desafio.

Compreendemos que, nesse sentido, a animação foi um material relevante, até porque os adolescentes já cresceram num mundo de animação digital. Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), o material significativo deve apresentar ao aprendiz conceitos e princípios unificadores, com maior poder explanatório e com propriedades integradoras, além de métodos adequados. Os apontamentos dos alunos indicam que o *MatGeo* é um material significativo e destacam o que mais os agrada, como mostra a descrição abaixo:

> (P) Vamos votar, qual das três historinhas gostaram mais? (Wa) A descoberta do quadrado. (An) Eu também gostei dessa. (Al) Eu gostei mais do desfile TRI. (Ca) Desfile TRI. (Mi) Desfile TRI. (Sh) Desfile TRI. (Mi) Desfile ganhou Huum!!! (Wa) Também é coisa de menina. (RO, 23/04)

Com relação ao *Slogo-3,0*, revelam que os desafios encontrados deixaram o programa mais interessante.

> "O LOGO é mais difícil, mas eu gostei e acho que tem de prestar atenção para resolver. Achei interessante que, para resolver, a gente tinha que marcar um ponto e depois dar o outro ponto. A gente pode saber certinho onde vamos parar e onde começa..." (Ca, RO, 23/04).
> "[...] então, para você fazer uma figura, precisa do conhecimento de ângulos" (An, RO, 23/04)
> A gente aprende a calcular melhor. Por exemplo, aquela vez que a senhora colocou a gente para descobrir os ângulos, não dá para resolver somente olhando. Tive que fazer a conta... (Wa, RO, 23/04).
> "Eu não gostei muito do LOGO. Essa de mudança de ponto para lá e para cá, não gostei, complicou muito...". (Al, RO, 23/04).

Somente **Al** não gostou da dificuldade apresentada. Consideramos que a dificuldade dela tem relação com a não participação nas primeiras sessões, quando foi inicialmente trabalhado com o programa.

É interessante destacar que, de forma análoga aos resultados nas pesquisas de Sena (2009/ 2011b), o desafio e a complexidade encantam o aluno quando ele ultrapassa as dificuldades e consegue construir conhecimento. Nesse sentido, a teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980) indica a necessidade de o desafio, o novo a ser descoberto, estar relacionado a conhecimentos que o aluno já possua. Os dados mostram processos reflexivos que são perceptíveis para os alunos, processos já destacados pelos estudos em LOGO desde sua criação, como aponta Papert (1994).

Outro momento de reflexão sobre as preferências, mostra que **An** gostou do *Cabri-Géomètre II* pelas facilidades proporcionadas com relação aos componentes das formas, de acordo com sua fala abaixo. Outras colegas também manifestaram seu apreço, como **An** e **Ca,** enquanto **Sh** afirma não ter gostado da ferramenta.

> (An) Não sei. O que eu mais gostei foi o *Cabri*. (Sh) Ai, foi o trem que eu mais odiei! (P) Por que você não gostou do *Cabri*? (Sh) Porque me deu dor de cabeça. (Ca) Qual era o *Cabri*? (P) O que fizemos retas, semirretas... (Al) Ah, esse aí é legal. (Ca) Esse é bem fácil de fazer. (An) Ele é mais fácil. (RO, 23/04).

No geral, a ferramenta preferida de **Wa**, **Sh** e **Ca** foi o *Slogo-3.0*; de **An** o *Cabri-Géomètre* II; de **Al,** o Objeto de Aprendizagem, *MatGeo*.

Mais do que considerar as preferências, é importante observar os destaques de cada ambiente tecnológico para processo de aprendizagem. O *Slogo*-3,0 apresenta desafios que envolvem o cálculo e construção; o *Cabri-Géomètre II* permite usar com facilidade os elementos geométricos; e no *MatGeo* destaca-se o visual com animações, possibilitando reflexões.

Mais importantes, ainda, foram os registros individuais que revelam o processo de aprendizagem, pois compreendemos que esses dados estão mais ligados ao objetivo geral do nosso trabalho. Desse modo, selecionamos alguns registros:

> “Na sala a gente vê um pouco de tudo. Aqui a gente termina..., tipo, completa o pensamento. Aprendendo aqui fica mais fácil de fazer as tarefas...”. (AL, RO, 23/04)
> “Ah, não sei... Nós aprendemos, aprofundamos o pensamento e acabamos fazendo mais descobertas sobre o que víamos como coisa comum. Fizemos descobertas... Aprofundamos o pensamento de tudo”. (AN, RO, 23/04)
> “Eu gostei porque, além de ter avançado um pouco mais a matemática da sala, eu passei a raciocinar mais”. (SH, RO, 23/04)

Os alunos indicam que, de alguma forma, as sessões colaboraram mais do que para a aprendizagem na sala de aula, pois eles se veem raciocinando mais e melhor, indicando profundidade no pensamento. Para Vergnaud (1996), um dos problemas do ensino é desenvolver a forma operatória do conhecimento, e, longe de apresentar uma solução para essa grande inquietação, os dados parecem apontar um caminho a ser trilhado, a fim de que haja mais oportunidade de desenvolvimento dos processos mentais em cada aluno.

Entre as questões específicas que contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio, eles revelam, por exemplo: "Hoje nós aprendemos a definir as formas geométricas e me foi mostrado que é tão complexo, que elas também têm me deixado curioso na parte da matemática..." (Wa, ED, 22/03). **Wa** indica que aprofundar em um tema para alcançar novas compreensões pode incentivar o interesse para o que está sendo proposto.

Outra questão importante, destacada pelos alunos, é o processo de organização do pensamento: "Eu aprendi a importância de organizar e de classificar o que estou aprendendo" (Ca, RO, 04/04), revela **Ca**. Sobre seu processo, em momentos anteriores, ela escreveu: "... sou muito demorada para compreender a matemática, eu só consigo compreender com figuras ou desenhos..." (Ca, ED, 22/03). Também destaca que os desenhos e as animações colaboram com o processo de aprendizagem, embora se reconheça como alguém que tem muita dificuldade para aprender matemática, e, muito provavelmente, esse sentimento interfira na sua capacidade de compreensão. Ela ainda ressalta a importância de organizar e classificar para que a aprendizagem se efetive e esse aspecto evidencia uma reflexão do seu processo.

Em relação a **Wa,** observamos seu processo de reflexão, como mostramos abaixo:

> "Eu não gostei muito da reunião após o projeto, pois tive que mostrar, ou melhor, expor meus pensamentos e organizá-los. Mas no final até foi bom, porque fiquei refletindo sobre aquilo e compreendi um pouco mais sobre polígonos" (WA, ED, 26/03).

Assim, revela que a exposição das ideias concebidas colabora com a organização do pensamento, o que demonstra seu nível de reflexão. Nessa perspectiva, a reflexão em patamares superiores possibilita ao sujeito a generalização de um tema. Esses dados vão ao encontro de vários ensinamentos apresentados nas obras de Piaget, no que concerne a desenvolvimento de estruturas e de aprendizagem da lógica. Vergnaud (1996) também compreende que a generalização é imprescindível para o desenvolvimento intelectual, possível através de operações do pensamento que precisam ser oportunizadas para os alunos. Nessa ótica, observamos que a intervenção com o mosaico tecnológico e a metodologia utilizada representou muito mais do que meros estudos sobre conteúdos referentes a polígonos.

5.5 Conceitos e relações estabelecidas

Os conceitos e as relações estabelecidas advêm das observações que foram constituídas durante o processo e que podem ser visualizadas nos resultados do pós-teste imediato e do pós-teste tardio. O pós-teste de **Al**, **An, Wa** e **Sh** destaca princípios de *implicações* e disjunções pela possibilidade de reconhecerem e identificaram os diferentes tipos de triângulos, assim como a identificação de uma figura pela observação de mais de uma característica. Mesmo depois do pós-teste tardio os mesmos princípios são mantidos, ainda que com menos acertos no reconhecimento das figuras. Os acertos comprovam as propriedades reconhecidas e os princípios de dedução informal estabelecidos. Assim, pelos princípios da lógica formal usados nos mapas e identificados nos testes, observamos que os alunos avançam para o **nível 2** da **dedução informal**, pois são capazes de discorrer sobre as características da forma.

Na tabela 8, apresentamos os dados da classificação que antecederam e sucederam a intervenção.

Quadro 11 - Níveis encontrados antes e após a intervenção

	Nível para o casal Van Hiele		**Nível nos estudos piagetianos**	
	Antes da intervenção	Após a intervenção	Antes da intervenção	Após a intervenção
Al	Transição do nível 0 para o nível 1	Nível 2	Nível IIB	Nível IIIB
An	Nível 1	Nível 2	Nível IIIA	Transição IIIB para IV
Ca	Nível 0	Nível 1	Nível IIA	Transição do IIB para IIIA
Sh	Nível 1	Nível 2	Nível IIIA	Nível IIIB
Wa	Transição do nível 0 para o nível 1	Nível 2	Nível IIB	Nível IIIB

Fonte: Análise dos resultados efetivados pela autora.

De forma próxima, **Al**, **An, Wa** e **Sh** encontram-se no nível **IIIB**, pois passa a existir uma diferenciação operatória em que se faz presente a realidade completa das perspectivas. O mesmo vale para o início da formulação das relações e análise progressiva dos ângulos, que se completa nas coordenações de conjuntos, como destacam os estudos de Piaget e Inhelder (1993).

Assim, **Al** e W**a** avançam do nível **IIB** para o **IIIB**, e **Sh** do **IIIA** para o **IIIB**, dentro do processo interventivo e mantêm os métodos que podem ser observados no pós-teste tardio, ainda que sejam incompletas as percepções. No caso de **An**, que apresenta os melhores resultados no pós-teste e no pós-teste tardio, observamos que ela consegue apontar mais *disjunções* e *implicações*, mas não a totalidade de uma classe ou a indicação que compreende todas as relações envolvidas no processo dedutivo, como devem apresentar os sujeitos do nível **IV**, segundo os estudos de Piaget e Inhelder (1993). No entanto, compreendemos que ela, no grupo, estaria mais próxima da mudança de nível, caminhando do **IIIB** para o **IV**.

Os resultados dos testes de **Ca** indicam que no pós-teste, ela apresenta algumas *disjunções* e *implicações,* em quantidade bem inferior ao resto da turma, enquanto no pós-teste tardio ela não revela *implicações* de classes mais elaboradas, obtidas pela dedução das formas, apesar de apresentar propriedades disjuntas. Mesmo assim, **Ca** avança do nível da visualização (0) para o nível da análise (1). Também podemos considerar que ela vai do nível **IIA** para o final do **IIB** e início do **IIIA**, pois ela mostra princípios de classificação, próximos de uma operatória formal, como distinguem os estudos de Piaget e Inhelder (1993).

5.6 Reflexões gerais dos dados a partir da teoria

Para alcançar o objetivo central da tese, que é o de identificar os processos de elaboração e de reelaboração de conceitos, foi necessário detectar, de início, se houve aprendizagem e se foi possível a reelaboração de conceitos. Para isso, foi feita primeiramente a comparação entre as diferentes etapas dos testes, o que revelou um avanço expressivo em reconhecimento de figuras. Passados seis meses e reconhecidas as perdas de conteúdo, manteve-se o percentual de 83,67%, confirmando a eficácia do processo interventivo. Dessa forma, chegou-se à conclusão de que houve aprendizagens significativas, envolvendo a competência lógica, num processo de intervenção de curta duração (10 encontros), mesmo depois de seis meses.

Para responder a um dos nossos objetivos secundários - identificar se os avanços em lógica têm relação com o desempenho em geometria como um todo - os resultados do SAEB não apontam diferenças entre o grupo que participou da intervenção e o resto da sala. Na realidade, neste teste o aluno escolhe uma resposta certa entre quatro possibilidades, o que permite a existência de acertos sem que o mesmo signifique conhecimento do conteúdo. Já as justificativas, respostas que foram descritas no teste, indicam maior coerência entre o acerto e o conhecimento do conteúdo. Nesse sentido, o total de justificativas dos alunos que participaram da intervenção do estudo principal é significativamente maior que o resto da sala, coerente com os resultados encontrados no projeto piloto, cujas respostas dos testes indicaram diferenças expressivas entre os participantes da intervenção. Dessa forma, os resultados parecem indicar que uma intervenção na qual se priorize a lógica pode contribuir na compreensão de outros conteúdos matemáticos.

Também, como objetivo secundário, pretendíamos identificar os avanços relacionados ao reconhecimento de figuras mediado por tecnologias digitais. Assim, foi interessante destacar o processo de aprendizagem e os progressos evidenciados pelos testes dentro da perspectiva escolhida nesta pesquisa. Na teoria piagetiana a aprendizagem depende da maturação que, apesar de ser distinta em cada indivíduo, tem relação com a idade e com experiências vividas. Os alunos tinham uma média de 12,8 anos, com desvio padrão de 3,2 meses. Apesar das idades próximas, a classificação dos alunos em relação aos níveis do pensamento geométrico revelou uma variação maior entre os alunos no momento que antecedeu a intervenção, entre estádios II a III, e uma variação menor depois da intervenção, todos próximos ao estádio III. Esse fato mostra duas questões distintas: em primeiro lugar, a variação maior encontrada remete a fatores distintos para a aprendizagem, apontados por Piaget (1972), como a maturação, a experiência (que se divide em lógico-matemática e física), a transmissão social e a equilibração, elementos que são distintos uns dos outros. Em segundo lugar, o fato de observarmos aproximação de níveis depois da intervenção mostra que, apesar das diferenças entre eles, as experiências comuns vivenciadas pelo grupo permitiram o crescimento de todos em relação ao reconhecimento de polígonos, aproximando-os de um nível de formalização comum. Nesse sentido, observamos crescimento maior de uns em relação aos outros, o que consideramos importante destacar.

Com base no pré-teste e no pós-teste tardio, e partindo da compreensão de que a aprendizagem significativa é a que permanece na estrutura cognitiva, foi estabelecida a comparação. Na análise dos dados individuais (tabela 5), observamos que o maior avanço ocorre nos alunos **Wa** (233%) e **Al** (111%), que vão da passagem dos níveis elementares para o nível 2, dentro da escala dos Van Hiele. O reconhecimento dos polígonos desses alunos era voltado à percepção dos aspectos figurativos, com indicações de um início de processos de análise. Depois, ambos avançam para um nível de dedução informal, pois foram capazes de pensar as propriedades da forma sem restrições a um objeto em particular, em coerência com o que revelam os estudos do casal Van Hiele (1984) sobre esses níveis. O crescimento de ambos vai do subestádio **IIB**, pois havia tentativas de diferenciar pontos de vista, para **IIIB**, pois tratam com uma diferenciação operatória, percebendo de forma progressiva fatores relacionados a ângulos e lados, coerente com os registros de Piaget e Inhelder (1993).

A aluna **An** apresenta melhores resultados nos testes e no desenvolvimento em geral, mas seu avanço é de 65% entre o pré-teste e o pós-teste tardio. Inicialmente, parte do nível 1, mais elevado do que os demais, pois já conseguia analisar algumas formas e reconhecia as figuras por algumas propriedades, de acordo com esse nível, como considera Braga e Dorneles (2011). Alcança o nível 2, da dedução informal, engajando-se em um tipo de raciocínio implicativo do tipo "se - então", apresenta argumentos lógicos de forma intuitiva, coerente com esse nível, como nos mostra Wale (2009). **An** também avança para além do estádio III, pois já tinha compreensão sobre a abstração das formas com início de coordenação operatória, apresentando estar no início do estádio IV, o que indica formação explícita das relações que ocorre com o advento do pensamento hipotético dedutivo, como definem os estudos de Piaget e Inhelder (1993).

Apesar de **Sh** ter alcançado após a intervenção um nível mais alto que **Ca**, ambas revelam menores avanços entre o pré-teste e o pós-teste tardio, 38% e 30,7% respectivamente. Ambas apresentam um salto em apenas um subestádio: **IIIA** para **IIIB** (**Sh**) e **IIA** para **IIB** (**Ca**). Esses dados indicam que no processo interventivo, ao contrário dos demais, elas de alguma forma se detiveram mais nas relações elementares, o que confirma o pensamento de Piaget (1977) quando indica que essas limitações levam o sujeito a "deformar" os dados da observação. Esse fato é coerente aos demais dados apresentados no processo interventivo. Vergnaud (2009) indica que os meios utilizados para resolver um problema em uma tarefa são enraizados na representação que se faz da situação e depende das relações estabelecidas.

Junqueira (1994), trabalhando com 20 alunos de Portugal com intervenção mediada e apoiada por tecnologias dentro perspectiva dos van Hiele, indica que a maioria dos alunos que se encontravam no nível 1, antes da intervenção, avançam para o nível 2, após o processo interventivo. Esse dado é semelhante ao que encontramos em nossos sujeitos: antes da intervenção, **An** e **Sh** estavam no nível 1 e **Al** e **Wa** na transição para esse nível; depois da intervenção, ambos avançam para o nível 2 e permanecem nele mesmo depois do teste tardio. Somente **Ca** apresenta uma defasagem inicial maior: estava no nível 0 e, depois da intervenção, avançou para o nível 1.

Compreendemos que a aprendizagem estabelecida foi significativa, pois os alunos propõem relações que permanecem mesmo depois de seis meses do processo interventivo. Nesse sentido, entendemos que a informação trabalhada na intervenção transformou-se em conhecimento, como ocorre com o que é significativo segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

Quanto aos processos realizados durante a intervenção, os avanços demonstraram a relação direta com a utilização inicial das estruturas formais mais avançadas, ou seja, com as operações que envolvem *disjunções* e *implicações*, o que reflete a capacidade de operar através do INRC completo. De fato, observamos que as estruturas mentais em formação permitem ao sujeito passar de um reconhecimento dos aspectos figurativos para a análise e da análise para uma dedução informal, coerente com os estudos de Piaget e Inhelder (1993).

Quanto à operação de *conjunção*, observamos que todos os alunos tratam com essa operação desde que elaborem e reelaborem o conceito, o que foi revelado nas diferentes etapas do mapa. A *conjunção*, como mostram os estudos de Piaget (1976), serve para demonstrar que duas proposições têm o mesmo valor ou função. Ela é fundamental no processo de definição e nossos dados indicam que, quando bem estabelecidas, dão suporte para observar os aspectos disjuntos e implicativos de um fator. Nos últimos registros, verificamos a ampliação da quantidade de *conjunções* estabelecidas.

A *disjunção*, correlativa da *conjunção*, é a operação que capacita o aluno a compreender as causas disjuntas que atuam sobre um fenômeno. Como indicam os estudos de Piaget (1976), ocorre quando o efeito é devido a duas causas que atuam independente ou conjuntamente entre si, o que permite agrupar os fenômenos pelas causas que os distinguem um do outro. Os dados mostram que, nos primeiros mapas, todos apresentam alguma *disjunção* mais simples, muito ligada aos aspectos figurativos dos polígonos mais conhecidas. Já os últimos mapas e registros evidenciam um crescimento significativo na quantidade e qualidade de *disjunções* estabelecidas: com relação aos lados de um triângulo, basicamente todos conseguiram distinguir os três tipos possíveis; com relação a ângulos do triângulo, somente **Al** destaca todos os tipos de *disjunção*; quanto aos quadriláteros, apesar de todos avançarem no reconhecimento de diferentes tipos, nenhum dos alunos apresenta a totalidade dos fatores lados, ângulos ou paralelismo.

A *implicação* é a operação que capacita o sujeito a compreender causas que produzem um efeito em um objeto e que pode ser observado em outro, capacitando-o a aprimorar o processo classificatório, como mostram os estudos de Piaget e Inhelder (1993). Nossos dados indicam que, inicialmente, nenhum dos nossos alunos apresentou *implicações* seja nos testes, nos registros iniciais ou nos primeiros mapas. Também mostram que é a operação mais difícil de ser encontrada nos dados finais. Esse resultado é similar aos encontrados por Braga e Dorneles (2011), quando indicam que seus alunos percebem relações "entre o paralelogramo, o retângulo, o losango e o quadrado... não destacando as relações inclusivas existentes entre os quadriláteros" (BRAGA; DORNELES, 2011, p. 282), ou seja, sem inclusões de classes.

Assim, com relação às operações formais, sobretudo as que são consideradas completas em relação ao INRC, os dados iniciais sugerem que aquelas ligadas à *implicação* são inexistentes e que, apesar de existirem características disjuntas, há dificuldades em distinguir todas as possibilidades. Nesse sentido, os dados parecem indicar que são distintas as operações relativas ao INRC completas. De alguma forma, as operações ligadas à *disjunção* aparecem de forma mais natural que as operações ligadas à *implicação*. Inclusive são as operações implicativas que, para o casal Van Hiele, distinguem o nível 2 da dedução informal, capacitando o sujeito ao tipo de raciocínio "se-então". Assim, a distinção para um próximo nível a partir dessa capacidade, realizada pelos Van Hiele, é coerente com o que encontramos nos resultados desta pesquisa.

Já os dados finais apontam aumento expressivo dos dois grupos de operações consideradas, o que confirma a importância de uma intervenção por parte do educador que promova questionamentos, debates, experimentações, auxiliando o aluno a compreender o objeto de estudo em patamares mais elevado de conhecimento.

Apesar dos dados terem sido analisados dentro de uma perspectiva piagetiana, há coerência com as estruturas da aprendizagem significativa apontada por Ausubel, Novak e Hanesian (1980). Esses autores constatam que a aprendizagem significativa pode ser representacional, conceitual e proposicional, evidenciando uma complexidade gradativa entre elas, ou seja, a próxima depende dos processos estabelecidos na anterior. Assim a proposicional teria o sentido mais amplo das três. A representacional implica em aprender o significado das palavras, processo mais inicial e, dessa forma, “o símbolo serve como significante para o conceito” (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980, p.39).

Nesse sentido, observamos nos dados deste trabalho que a *conjunção*, apontada nos mapas, aproxima-se da aprendizagem significativa representacional indicada por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), mesmo porque, segundo a perspectiva piagetiana, a *conjunção* indica que duas proposições têm o mesmo valor e que é possível observar quando o sujeito compreende o significado de uma proposição. Nossos dados também evidenciam que a *conjunção* é uma operação que dá suporte à *disjunção* e, até mesmo, à *implicação* e a outras operações, assim como a representacional dá suporte para a conceitual e proposicional nos estudos de Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

Poderíamos até considerar aproximações entre a aprendizagem significativa conceitual e proposicional, proposta por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), com as demais operações estudadas neste trabalho, até mesmo porque a conceitual envolve processos com análises, diferenciação, formulação e generalizações. Já a proposicional implica um sentido ainda mais amplo, incorporado para formar outra estrutura significativa, mas compreendemos que esse tipo de aprendizagem não deixa de ter relações com as 16 operações estudadas e os grupos INRC.

Gostaríamos também de destacar os dados por outra perspectiva, considerando separadamente os fatores que distinguimos neste estudo para analisar os polígonos: lados ângulos e paralelismo.

Com relação aos lados, observamos que são as distinções que mais se apresentam nos sujeitos de forma estável. Ainda nos primeiros mapas, todos fazem alguma distinção por lados. Inclusive, nos triângulos (último mapa) os alunos apontam todos os tipos possíveis, diferenciando-os por lados. Nos processos de classificação, a distinção por lados é a que mais aparece. Esse dado é compatível com os encontrados nos estudos piagetianos, quando indicam que, “[...] com o segundo estádio, começam as formas euclidianas que repousam nas distinções das retas e das curvas... sobretudo, das relações de igualdade e desigualdade entre lados das figuras” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 58).

Com relação aos ângulos, observamos que todos distinguem as figuras pelos seus diferentes tipos, sendo que o ângulo reto é o mais conhecido. **Al** consegue distinguir todos os tipos de triângulos em relação aos ângulos. Os demais distinguem em partes. Os estudos piagetianos indicam que “[...] a semelhança dos triângulos por igualização dos ângulos não é adquirida sob sua forma estável senão no nível IIIB” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 367). Nesse contexto, eles não diferenciam ou classificam triângulos pelos tipos de ângulos, antes percebem semelhanças entre triângulos por meio do estudo dos ângulos, o que confirma que as noções de ângulos são mais complexas que lados e estabelecidas como produto operatório. Nossos dados mostram que, com exceção da **Ca,** os alunos descrevem nos mapas valores de ângulos que eles consideram como exemplos para as distinções feitas. Assim, são diversas noções operatórias e euclidianas que vão-se estabilizando nos sujeitos, ainda que, como **Wa** e **Sh,** apontem valores para definir tipos que não se referem à totalidade da classe representada.

Com relação ao paralelismo, observamos que inicialmente somente **Sh** distingue o conceito. Também é a única que nos processos classificatórios diferencia as figuras por terem linhas paralelas. **An** indica ter somente noções iniciais e os demais sujeitos não apresentam noções de paralelismo. Nos estudos piagetianos “[...] o paralelismo não é percebido sem erros em nenhuma idade, mesmo no adulto exercitado” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 334) e não se constitui um produto perceptivo, fazendo parte de um produto operatório. Nesse aspecto, nossos dados indicam que todos os sujeitos, no último mapa, distinguem as figuras por terem um par de lados paralelos ou dois pares, reconhecendo diretamente o paralelismo relacionado ao paralelogramo e o trapézio. O retângulo, o quadrado e o losango não são indicados diretamente, embora as noções de paralelismo sejam reconhecidas nessas figuras por apontarem *implicações* que as ligam umas às outras.

Os processos classificatórios realizados com as atividades do *MatGeo* demostram que as características visuais são as primeiras que se destacam, sobretudo nos sujeitos que estão em um nível inferior, o que está de acordo com os estudos de Piaget e Inhelder (1993). Os dados também revelam que, através de uma intervenção adequada, levando-os a compreender novos fatores, todos são capazes de realizar classificações mais elaboradas, apesar de prevalecer aspectos percebidos pela capacidade de distinção dos fatores.

Compreendemos que nossa intervenção permitiu observar a elaboração e a reelaboração de conceitos, assim como entender um pouco mais sobre os processos e relações envolvidas, o que alcança o objetivo proposto. Dentro desse contexto, defendíamos a ideia de que um mosaico tecnológico, que permitisse aproximações sucessivas ao objeto de conhecimento, poderia favorecer a elaboração e a reelaboração de conceitos, promovendo avanços. Tínhamos até mesmo como objetivo secundário, a criação de um Objeto de Aprendizagem que pudesse contribuir com o processo, o que foi efetivamente realizado neste trabalho. Nesse sentido, observamos que cada uma das tecnologias utilizadas nesse mosaico contém aspectos relevantes para os resultados expressos, como passamos a mostrar brevemente na sequência.

No *Slogo-3.0*, ao desenharem os diferentes polígonos e mosaicos (desenhos), os adolescentes passaram a trabalhar com várias operações infralógicas, desde adição de elementos para a composição da figura até reciprocidade e multiplicação de elementos. Desenhando através de mudança de posição na coordenada cartesiana, eles compreenderam outras operações ligadas a ordenações, colocações e deslocamentos. É importante considerar que todos os alunos conseguiram desenhar nas diferentes perspectivas e, mesmo sem se darem conta das operações envolvidas, souberam tratá-las muito bem no processo de construção do desenho. Esse fato é consistente com as ideias de Vergnaud (1996), que indica a dificuldade de reconstruir e de expor os conhecimentos implícitos na ação, que, se efetivada, constitui uma conscientização em patamares superiores, como também esclarece Becker (2010).

Todos os alunos construíram diferentes mosaicos (desenhos), com base no polígono da sua escolha, repetindo-o a partir do centro. Entre os diferentes mosaicos, selecionaram um para ser enviado e que foi apresentado neste trabalho, na figura 49. Assim, na composição dessa tarefa, foram colocadas em prática várias operações infralógicas destacadas por Piaget e Inhelder (1993), como **adição** - reunião das partes (polígonos), formando um todo (desenho); ordem de colocações e deslocamentos - colocação de polígonos uns em relação aos outros, com giro calculado para apresentação do todo - reciprocidade, desenho correlativo nos diferentes quadrantes; simetria - emprego de simetria axial, assegurando a distância equivalente do centro até a ponta do mosaico, assim como a simetria, observando os diferentes quadrantes; multiplicação de elementos - repetição do mesmo polígono, constituindo o desenho. Esse tipo de atividade também contribui para o desenvolvimento das operações lógicas, pois o desenho é composto por elementos, lados e ângulos, oportunizando outro tipo de aproximação ao objeto de estudo.

Ainda no *Slogo-3.0*, o desenho por mudança de coordenada cartesiana foi uma atividade realizada por todos. Primeiramente todos desenharam e ampliaram seus desenhos em uma malha de papel, transpondo-o para o ambiente. O desenho por coordenada amplia a capacidade infralógica, correspondentes à ordem, colocações e deslocamentos, na medida em que os alunos calculam cada ponto equivalente para a construção do desenho e, sobretudo, fazem-no ampliando seu desenho. Piaget (1995) identifica essa capacidade infralógica com a equivalência ao grupo Klein, que pode ser aplicado de forma isomórfica às transformações lógicas do INRC. Essa construção também tem ligação direta com a operação infralógica ligada à reciprocidade dos pontos, sobretudo quando o desenho aponta uma simetria, como ocorre em todos os casos apresentados, com exceção da vela do barco da **An**. Nesse sentido, como descrevem Piaget e Inhelder (1993), poderemos chegar a obter a figura partindo em uma ou outra direção. Quanto à simetria, esses autores destacam que a distância entre pontos é assegurada com relação ao ponto da simetria, o que pode ser observado nos efetivos desenhos apresentados. Assim, pela riqueza de experimentação vivida, compreendemos que nem mesmo os testes, mapas ou demais registros permitiram observar todos os processos relacionados à intervenção.

Com relação às construções cartesianas, é interessante constatar que, apesar desse tipo de atividade permitir rotações que sejam do grupo Klein e de os alunos trabalharem com os pontos negativos recíprocos e correlativos dentro da composição sem maiores dificuldades, nenhum dos nossos sujeitos descreveu as transformações do grupo INRC. Os resultados de Piaget (1995), trabalhando com rotações, mostram as dificuldades dos sujeitos do estádio III em descrever detalhes das rotações e de suas composições, mas, assim como nos nossos dados, conseguem através de manipulações apresentar as transformações do grupo INRC.

As atividades propostas no *Cabri-Géomètre II* possibilitaram aos alunos reflexões sobre as partes que compõem a figura além de facilitar a apreensão de conceitos básicos, como ponto, reta e plano. Como a ferramenta permite a construção e depois a movimentação da figura com conservação das propriedades atribuídas, possibilitou aos alunos a percepção de algumas propriedades. É possível, portanto, observar que o ambiente permite estabelecer relações de aprendizagem e processos cognitivos dentro de uma perspectiva construtivista, assim como já apontava Gravina e Santarosa (1998). O trabalho de Junqueira (1994) indica que uma intervenção mediada com esse ambiente permitiu avanços nos níveis do pensamento geométrico nos alunos pesquisados de forma coerente aos nossos resultados.

Nossos dados revelam que os alunos, auxiliados pelo ambiente de geometria dinâmica, definiram os elementos geométricos, aproximando-se das definições dadas por Euclides (2009). Ao desenharem os polígonos regulares, marcando ângulos e medidas, percebem o conceito de regularidade. Ao traçarem as diagonais dos polígonos regulares, alunos como **An** e **Wa** percebem a relação entre número de diagonais e lados. Ao transporem medidas dadas, reconhecem quando existe ou não um triângulo em um modelo experimental.

O *Cabri-Géomètre II* também propicia o desenvolvimento de operações infralógicas. Nossos sujeitos ao comporem polígonos diversos (côncavos e convexos) por seus elementos, utilizam a operação infralógica ligada à adição. Ao fazerem um desenho simétrico, como no exemplo de **Wa** (figura 52), realizaram operações de adição, ordem e deslocamento, simetria e reciprocidade. Essas mesmas operações podem ser vistas quando todos desenham as diagonais nas figuras regulares. Assim, nas atividades os alunos desenvolvem o processo reflexivo que contribui para a formação de conceitos sobre polígonos e as suas propriedades. Isso remete aos resultados de Gravina e Santarosa (1998), quando destacam que a ferramenta permite aos alunos realizarem experimentos conceituais utilizando, para isso, modelos matemáticos.

Borba e Penteado (2010) destacam a vantagem do componente visual para a aprendizagem da matemática e verificamos isso com relação ao *MatGeo*. Nossos dados indicam que as histórias facilitam o processo de aprendizagem, o que foi reconhecido pelos próprios alunos. Esse fato evidencia a importância de atividades interdisciplinares ligadas a histórias infantis, já apontada nos estudos de Silva e Silva (2012) e de Nacarato, Mengali e Passos (2011). Inclusive, observamos que há interesse dos adolescentes em trabalhar com histórias, mesmo que as pesquisas citadas destaquem o uso com crianças.

Nesta pesquisa, as histórias distinguem-se, pois foram elaboradas a partir da própria matemática e os polígonos tornaram-se personagens da história. Outro detalhe a ressaltar é o meio digital que permite maior número de explorações, pois a animação envolve elementos diversos que podem compor uma narrativa para além da escrita, possibilitando, assim, que noções mais complexas sejam observadas naturalmente. A interatividade, como ocorreu no "Desfile fashion TRI" e nas "Descobertas do Quadrado", possibilita ao usuário elaborar relações. Os dados apresentados mostram que o Objeto de Aprendizagem construído permite desafiar a forma de pensar dos alunos, o que é coerente com os estudos de Borba e Penteado (2010), quando destacam o papel que a mídia e a simulação podem proporcionar na experimentação de uma nova linguagem que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea.

Observamos, sobretudo com relação à história das "Aventuras do Quadrado" (relacionada ao Tangram), como os sujeitos descrevem as reflexões relacionadas à composição de um todo com as sete peças. No exemplo de **An**, ela organizou, classificou e ordenou, revelando o processo reflexivo por meio de operações lógicas e infralógicas. Essas reflexões permitiram a ela e ao resto do grupo compor totalidades no desafio do Tangram. As operações infralógicas são de natureza qualitativa, como nos mostram Borges (2005) e Leivas (2008), e as operações lógicas auxiliam no desenvolvimento da matemática, como destaca Nunes et al.(2007). Ambas são fundamentais para a solução do desafio do Tangram, de acordo com os dados.

Entre as tecnologias de comunicação e coleta de dados, destacam-se nesta tese, os mapas conceituais, que alcançam duplo objetivo: revelar os conceitos e apresentar os novos significados atribuídos, quando comparados às diferentes etapas do mapa. Mesmo assim, a forma de analisar tais mapas esteve dentro de uma perspectiva piagetiana, com a indicação de integrações e de novas relações efetivadas dentro do processo. Nossos dados revelam que o mapa não alcança apenas esse objetivo, pois quando os alunos refletem sobre sua aprendizagem, destacam que houve alterações no pensamento na medida em que foram levados a expor, organizar e refletir. Compreendemos que os momentos de registros diários, diálogos em grupos e a confecção dos mapas conceituais contribuíram para esse processo reflexivo. Assim, de forma coerente ao que mostram os resultados de Moreira (2010), o mapa também contribui para os avanços destacados.

Entendemos que o mosaico tecnológico, formado pelas tecnologias selecionadas e construídas, favoreceu aproximações ao objeto de conhecimento alavancando a aprendizagem, pois encontramos mudanças de níveis dentro das perspectivas teóricas analisadas, além de observarmos avanços significativos nos resultados dos testes sobre polígonos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao chegar ao fim deste trabalho, compreendemos que um mosaico tecnológico que possibilita aproximações sucessivas ao objeto do conhecimento, pode alavancar processos de aprendizagens. Observamos que os adolescentes querem ser desafiados a desenvolver novas relações e organizações mentais, pois eles indicam que o desafio os instiga, justificando, assim, suas preferências em relação às tecnologias utilizadas. Todos são capazes de elaborar e reelaborar conceitos, quando o ambiente favorece a experimentação para alcançar o conhecimento.

Os dados revelam que houve avanços de níveis do pensamento geométrico por parte de todos dentro das perspectivas teóricas selecionadas. Em geral, eles passaram de um nível ligado aos processos analíticos voltados à visualização, do real para processos ligados a uma dedução informal, avançando para os possíveis, ou seja, um reconhecimento dos polígonos por atributos que ultrapassa os aspectos figurativos. Os avanços, constatados em um período relativamente curto de intervenção, comprovam que as escolhas e a construção de ambientes proporcionaram aproximações distintas ao objeto do conhecimento. As escolhas foram utilizadas dentro de uma metodologia que, no nosso entender, privilegiou a construção de conhecimento e possibilitou a elaboração e reelaboração de conceitos. Sendo assim, pode-se considerar que é fundamental para a escola oportunizar ambientes (presenciais ou digitais) como meios favoráveis à estimulação intelectual, para que os alunos ultrapassem a superficialidade e avancem em conhecimento.

Os dados também revelam que o desenho é a forma inicial e mais natural de mostrar conhecimentos dos sujeitos com relação a polígonos e que, quando os alunos são instigados, passam a compor novas relações. Foi justamente no processo de criação de diferentes desenhos, ou ainda na apresentação da animação (composta de desenhos), que o estudo da geometria revelou-se mais atrativo para os sujeitos. Nesse aspecto, compreendemos que a tecnologia não deve eliminar o desenho livre no papel, nem o desenho geométrico efetivado com o uso do compasso transferidor e régua, entre outros. Inferimos, inclusive, que um uso mais efetivo desses elementos poderia colaborar ainda mais no processo de aprendizagem e compor, de forma mais proeminente, o mosaico tecnológico em estudos de geometria. Com certeza, seriam elementos para novos estudos, pois, apesar de usarmos tecnologias, não as exploramos em um processo mais elaborado e investigativo para observar o papel de cada uma no processo.

Apesar de o *Slogo-3.0* ser a tecnologia digital mais antiga e aparentemente menos atrativa, foi a que se destacou na preferência dos alunos. Nesse sentido, compreendemos seu potencial na construção de um desenho que nasce dos cálculos, permitindo criações únicas e tornando-se atrativo para adolescentes, que estão em processos de mudanças cognitivas. No entanto, como revelam nossos dados, cada tecnologia permite uma aproximação diferenciada ao objeto de conhecimento e, por isso, o mosaico tecnológico propicia um ambiente rico em experimentação.

Dessa forma, longe de tentar comparar qual a tecnologia é mais favorável ou ainda de pensar na substituição de uma mais antiga por outra mais recente, constatamos a necessidade de promover tipos diferentes, com aproximações distintas ao objeto de conhecimento. Assim, a junção de novas tecnologias digitais sem deixar de lado a régua e o compasso, permitem novas percepções e a agregação de diferentes representações das figuras geométricas que favorecem a aprendizagem.

Nossos dados parecem confirmar a premissa, implícita a esta pesquisa, de que o desenvolvimento cognitivo dos alunos em raciocínio lógico-matemático é argumento que confirma a qualidade da aprendizagem. Indicam que a experimentação e a aproximação ao objeto de conhecimento por diferentes perspectivas possibilitam olhares renovados sobre o conteúdo a ser estudado, o que permite para o sujeito avanços para patamares superiores do conhecimento, ultrapassando a superficialidade no trato com o objeto de estudo. Os próprios alunos, descrevendo o processo de aprendizagem, revelam que os avanços alcançados extrapolam o próprio conteúdo e que parece colaborar com a e estruturação do pensamento.

Ainda ficam questionamentos instigantes em aberto que podem direcionar outros estudos da seguinte ordem: Como alcançar avanços que permitam aos sujeitos desenvolverem o pensamento formal? Qual é a contribuição das diferentes tecnologias? Se o estudo fosse realizado com adultos, mesmo que em algumas áreas do conhecimento em detrimento de outras, quais seriam os avanços percebidos?

A pesquisa realizada aponta possibilidades de melhorias no processo de aprendizagem a partir do desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, sendo favorecida com os avanços em ambientes de experimentação. E indica que talvez esse desenvolvimento permita a estruturação do pensamento mesmo em adultos. Assim, compreendemos que o papel do docente vai além de ensinar um conteúdo matemático. É necessário possibilitar ao aluno reflexão, elaboração e reelaboração do conceito a ser estudado. Nesse sentido, reconhecemos que a geometria é propícia para gerar o desafio e integrar conteúdos matemáticos. Também intuímos que o estudo da geometria, que vai além de um conhecimento superficial, é estruturante do pensamento.

Apesar da pesquisa não indicar o papel de uma das tecnologias utilizadas, fica claro que elas podem enriquecer consideravelmente as experiências empíricas, sendo fundamentais para o ensino da matemática. A pesquisa aponta que cada um dos ambientes digitais utilizados neste trabalho (*Slogo, Cabri-Géomètre e Matgeo*) tem contribuições que lhe são únicas. Assim, utilizar a tecnologia não basta é preciso que educadores, além de oportunizar diferentes ambientes, favoreçam a exploração pelos alunos e até tente ultrapassar os propósitos para os quais as tecnologias foram criadas. O fundamental é que a tecnologia não determine o conteúdo, mas que um conteúdo possa ser amplamente explorado por diferentes tecnologias.

Com relação ao método utilizado, este deve possibilitar aos aprendizes um aprofundamento temático que ultrapasse o conhecimento superficial. A tecnologia, sobretudo a novidade, sempre causa encantamento, mas é preciso considerar, como destacam os próprios alunos desta pesquisa, que o encantamento também vem com desafios que podem ser alcançados. E sabemos que o desafio é algo novo (para o aprendiz), não simplista, que desequilibra, ideal para a construção de conhecimento necessário para alunos e também para educadores, que deveriam aprender sempre.

Participar deste estudo nos fez compreender que o processo de ensino é muito mais complexo do que concebíamos. Promover a construção de conhecimento está muito longe de deixar o aprendiz caminhar sozinho. Entendemos que para avançar nos processos de aprendizagem é preciso elaborar e reelaborar conceitos sobre o objeto de conhecimento, compreendendo-o em patamares mais elevados. É a capacidade de compreender um conteúdo para além da superfície que permite ao educador instigar processos dedutivos. Nesse sentido, esta pesquisa revela que o estudo da lógica capacita o sujeito (aluno e professor) a compreender o objeto de conhecimento através de novos olhares, inclusive permitindo que o ambiente da sala de aula seja um espaço para descobertas inovadoras.

Talvez este trabalho possa apontar caminhos para a criação de ambientes ricos que favoreçam o pensamento dedutivo em cada sala de aula e, também, sugerir ideias para o desenvolvimento de ambientes digitais que favoreçam a construção do conhecimento. Além dessas questões, fica como resultados deste trabalho o Objeto de Aprendizagem *MatGeo* que, depois de construída a versão III, ficará disponível para utilização livre.

Concluímos que o caminho para alavancar a aprendizagem, a elaboração e reelaboração de conceitos, para além da superfície, deve apresentar o máximo possível de possibilidades para uma experimentação que desafie e encante o aprendiz. A tecnologia pode ser grande aliada nesse processo, desde que o método priorize a construção de conhecimento e não somente a busca de informações.

REFERÊNCIAS

ALENCAR F. E. **Iniciação à Lógica Matemática,** 15. Ed. São Paulo, Nobel, 1984.

ALMEIDA, R. C. M. **Demonstrações em geometria plana em livros-textos no Brasil a partir do século XIX.** (Tese em Educação), Pontifícia Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

AMANTE, L.; MORGADO, L. Metodologia de concepção e desenvolvimento de aplicações educativas: o caso dos materiais hipermídia. In: **Discursos**, III série, nº especial, Universidade Aberta, 2001, p. 125 -138.

ASSIS, C. F. C. **Diálogo Didático Matemático na EaD: uma perspectiva para o ensino e aprendizagem em fóruns no Moodle.** (Tese em Educação), Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2010.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda, 1980.

AZEVEDO, I. L. **Reflexões sobre a construção e evolução de conceitos geométricos nas séries intermediárias do ensino fundamental.** (Tese em Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

BAIRRAL, M. A. A Educação Matemática em Ambientes Virtuais**.** Palestra. . In: X **Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, Bahia, 2010.

BARBASTEFANO, R. G. **Ferramentas síncronas para o ensino a distância de matemática.** (Tese em Engenharia da Produção). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

BASSANI, P. S. et al. Avaliação da aprendizagem em ambientes virtuais. In: **Modelos Pedagógicos em Educação a Distância.** Org. Patrícia A. Behar e colaboradores. Artmed, 2009, p. 93-113

BECKER, F. **O caminho da Aprendizagem em Jean Piaget e Paulo Freire: da ação a operação**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

BEE, H. **O ciclo vital.** Trad. Regina Garcez. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

BEHAR, P. A. et al. **Modelos Pedagógicos em Educação a Distancia.** Porto Alegre: Artmed, 2009.

BICUDO, I. Peri apodeixeos/de demostratione. In: **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** Org. Maria Aparecida Bicudo e Marcelo de Carvalho Borba. – 3ª ed. São Paulo: Cortez, 2009, p. 58-76.

BICUDO, M. A.; BORBA, M. C. **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** Org. Maria Aparecida Bicudo e Marcelo de Carvalho Borba. – 3ª ed. São Paulo: Cortez, 2009, p. 58-76.

BITTAR, M. A parceria Escola X Universidade na inserção da tecnologia nas aulas de matemática: Um projeto pesquisa ação**.** In XV **ENDIPE: Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho da docência**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010, p.591 a 609.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Porto: Editora Porto, 1994.

BORBA, M C. Dimensões da Educação Matemática a distância. In: **Educação Matemática: Pesquisa em Movimento.** 3 ed. São Paulo: Cortes, 2009, p. 296-317.

BORBA, M.C. *Softwares* e internet na sala de aula de Matemática. Palestra. In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, Bahia, 2010.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática.** 4ª Ed. Belo Horizonte: Autentica, 2010.

BORGES, C. C. A topologia: considerações teóricas e implicações para o ensino da matemática. **Caderno de Física da UEFS**. Feira de Santana: v.3, n2, p.15-35, 2005.

BRAGA, E.; DORNELES, B. V. Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental. In: **Educação Matemática em Pesquisa,** São Paulo, v.13, n.12, 2011, p. 273-289.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental (I). Brasília: MEC/ SEF, 1997.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental (II). Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL, MEC. **Banco de teses da Capes**. Disponível em http://servicos.capes.gov.br/capesdw/ Acesso em 17/10/2010.

BRASIL, MEC. **Rived.** *Homepage*. Disponível em http://rived.mec.gov.br/. Acesso em 27/11/2011a.

BRASIL, MEC. **Banco Internacional de Objetos Educacionais**. *Homepage.* Disponível em http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/ . Acesso em 27/11/2011b.

BRASIL, MEC. **Explorando os recursos Educacionais no Portal do Professor**. Disponível em http://portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em 27/11/2011c.

BRASIL, MEC. **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica**. Disponível em http://portalideb.inep.gov.br/ Acesso em 24/09/2012.

CARRAHER, T. N; CARRAHER D. W; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida, dez, na escola, zero:os contextos culturais da aprendizagem da matemática**. 10. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

CARRAHER, T. N.; SCHLIEMANN, A. D. Fracasso escolar uma questão social. **Caderno de Pesquisa.** São Paulo (45) 3-19, maio 1983.

CARVALHO, D. L. **Metodologia do Ensino da Matemática**. São Paulo: Cortez, 1990.

CASTORINA, A. J; PALAU, G.D. **Introduccion a la Logica Operatoria de Piaget: Alcances y significado para la psicologia genética.** Buenos Aires: Ediciones Paidós, 1982.

CETIC.BR. **Pesquisa TIC crianças 2010.** Disponível em: http://www.cetic.br/tic/criancas/2010/index.htm Acesso 15/07/2012.

CHAVES, E. O. C. O uso de Computadores em Escolas: Fundamentos e Críticas. In: **O uso de Computadores em Escolas**, São Paulo: Scipione, 1988, p. 5-67.

COELHO, M.I.M. **Vinte anos de avaliação da educação Básica no Brasil: aprendizagens e desafios.** Ensaio, Rio de Janeiro: v. 16, n.59, abril/junho, 2008, p.259-258.

COSENZA, R, M; GUERRA, L. B. **Neurociência e Educação: como o cérebro aprende.** Porto Alegre: Artmed, 2011.

CYRINO, H. **Matemática e os gregos.** Campinas: Editora Ypsilon, 1986.

DANTAS, D. M. P. **SEM²: Uma proposta metodológica para o uso de softwares na educação.** (Dissertação em Educação), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

D' AMBROSIO U. Cultural Framing of Mathematics Teaching and Learning. In BIELER, R.; SCHOLZ, R.W.; STRABER, R; WINKELMANN, B (eds.). In: **Didactics of Mathematics as a Scientifc Discipline. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,** 1994, p. 443-455.

D' AMBROSIO U. **Transdiciplinaridade**. São Paulo: Editora Palas Athena, 1997.

D' AMBROSIO U. Entrevista**.** In: **Educação Matemática em Revista**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo: ano 6, nº 7, julho,1999, p. 5-10.

DARSIE, M. M. P. Educação matemática. In: **Escola Ciclada de Mato Grosso: Novos tempos e espaços para ensinar-aprender a sentir, ser e fazer.** Cuiabá: Secretaria de Estado e Educação, 2001, p. 155-161.

DILIGENTI. M. P. **A geometria da Complexidade**. (Tese em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

DIZERÓ. W. J. **Formalismos adaptativos aplicados na modelagem de softwares educacionais.** (Tese em Engenharia). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

DUTRA, I. M. **Mapas Conceituais no acompanhamento dos processos de conceituação.** Tese (Tese em Informática na Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

ELKIND, D. **Sem tempo para ser criança: a criança estressada.** Trad. Magda F. Lopes. 3ª Ed. Porto Alegre: Artmed, 2004.

EUCLIDES. **Os elementos**. Trad. Irineu Bicudo. Rio Claro: FAPESP, 2009.

EVES, H. História da Geometria; In **Tópicos de história da matemática para o uso em sala de aula**; vol.3 trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: atual, 1992.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**; Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, Editora Unicamp, 2004.

FAGUNDES, L. et al. **Aprendizes do Futuro: as inovações começaram**. Coleção Informática para a mudança na Educação. Brasília: MEC/SEED/ProInfo, 1999.

FAGUNDES, L. **Inclusão da Educação na Nova Cultura Digital.** (Comunicação Oral). Porto Alegre, UFRGS, 2011.

FAINGUELERNT, E. K. **Representação do conhecimento geométrico através da informática.** (Tese em Educação). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1996.

FIORENTINI, D. Alguns modos de conceber o ensino da matemática no Brasil**.** In ***Zetetiké***, nº 4, v, Ano 3, 1995, p. 1-37.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem de matemática em ambientes informatizados. In: **Congresso Ibero Americano de Informática na Educação e do desporto**, Brasília, 1998, p.73 - 98.

GUIMARÃES, T. M. M.; SENA, R. M.; CAMPOS, K. E. **Informática Educativa: diagnósticos e Perspectivas.** Cáceres, UNEMAT Ed, 2013.

HOTTOIS, G. **Pensar a Lógica: uma introdução à filosofia da lógica e da linguagem.** Lisboa: Instituto Piaget, 2002.

HOUZEL, S. H. **O cérebro em transformação.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2005.

IMENES, L. M. Matemática ao Alcance de todos**.** Conferência Geral. In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, Bahia, 2010.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à Lógica do Adolescente: Ensaios sobre a construção das estruturas operatórios formais.** Tradução Dante Moreira Leite. São Paulo: Pioneira, 1976.

JAZEN, E. A. **A dinamicidade dos conceitos no processo de prova num ambiente de geometria dinâmica e o papel formativo do professor no ensino superior nesse processo.** (Tese em Educação), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

JUCÁ, A. M. **Construções geométricas no ambiente virtual de ensino telemeios com mediação na sequência de Fedathi.** (Tese em Educação), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza 2011.

JUNQUEIRA, M. M. B. B. **A aprendizagem da geometria em ambiente computacionais dinâmicos: um estudo do 9º ano de escolaridade.** (Dissertação em Ciência da Educação), Universidade nova de Lisboa, Lisboa, 1994.

KALEFF, A. M. Tomando o ensino da geometria em nossas mãos**.** In: **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: v. 1, n.2, 1994, p. 19-25.

KOBAYASHI, M. C. M. **A construção da geometria pela criança.** Bauru: EDUSC, 2001.

KOPKE, R. C. M. **Geometria, Desenho, Escola e Transdiciplinaridade: abordagens possíveis para Educação**. (Tese em Educação), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

LEIVAS, J. C. P. **Organizando o espaço Geométrico por caminhos topológicos.** VIDYA, v.28, n.2, jul/Dez, 2008, p. 59-71.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática.** (Tese em Educação), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LEME DA SILVA, M. C. A geometria escolar e o Movimento da Matemática Moderna: em busca de uma nova representação. In: Cláudia Flores, Joseane Pinto de Arruda. (Org.). **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: contribuição para a história da educação matemática.** 1ed. São Paulo: Annablume, 2010, v. 1, p. 65-88.

LIMA, I. P. **Oficinas pedagógicas e a plataforma TELEDUC na construção dos conceitos matemáticos na formação inicial do pedagogo.** (Tese em Educação), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

LOPES, M. L. M. A matemática do século XXI e suas repercussões na Matemática Escolar. Palestra. . In: X **Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, Bahia, 2010.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria**.** In: **Educação Matemática em Revista.** São Paulo: v. 3, n. 4, , 1995, p. 3-13

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARINHO, F. C. V. **Geometria com o uso de softwares livres.** Palestra. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, Bahia, 2010.

MARKS, S. R. **Ruptura da mente: excelência profissional através do estudo de pérolas.** Rio Grande do Sul :Editora Pallotti, 1998.

MATAR, J. **Games em educação: como os nativos digitais aprendem.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MAZZARELLA, S. R. et. al. **Os Jovens e a mídia.** Trad. Sandra M. M. da Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

MISKULIM, R. G. S. **Concepções teórico metodológicas sobre a introdução e utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria. (**Tese de doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas,1999.

MISKULIM, R.S.; AMORIM, J,A; SILVA,M.R.C. As possibilidades pedagógicas do ambiente computacional TELEDUC na exploração, na disseminação e na representação de conceitos matemáticos. In: **Ambientes Virtuais de Aprendizagem.** Porto Alegre: Artimed, 2005, p. 71-83

MORAES, R. A. **Rumos da informática educativa no Brasil.** Brasília: Plano Editora, 2002.

MORAES, R. A. **Rumos da informática educativa no Brasil. A primeira década de Informática Educativa na escola pública no Brasil: a história dos projetos Educom, Eureka e Gênese.** In: Tecnologias na Educação e formação de professores. Brasília: Plano Editora, 2003. p. 99-140.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E, F, S. **Aprendizagem Significativa: A teoria de David Ausubel.** São Paulo: Centauro, 2001.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e a Aprendizagem Significativa.** São Paulo: Centauro, 2010.

MORI, C. K. **Políticas Públicas para a inclusão digital no Brasil: aspectos institucionais e efetividade em iniciativas federais de disseminação dos Telecentros no período de 2000-2010.** (Tese em Política Social), Universidade de Brasília, 2011.

NACARATO, A. L.; MENGALI B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e aprender.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011

NASSER, L. et al. **Geometria Segundo a Teoria de van Hiele.** Rio de Janeiro: UFRJ. Projeto Fundão, 2004.

NOTARE, M. R. **Comunicação a Aprendizagem matemática on-line: Um estudo com Editor Científico ROODA Exata.** (Tese em educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

NUNES, T. et al. **The contribution of logical reasoning to the learning of Mathematics in primary school.** British Journal of Developmental Psychology, 2007, 25, 147–166.

OLIVEIRA, Ramon de. **Informática Educativa**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

PAIVA, L. **O choque tecnológico na educação: entre a modernização do velho e o velho na modernização.** (Tese em Políticas Públicas e Formação Humana).Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiros, 2011.

PALFREY, J. ; GASSER, U. **Nascidos na Era digital: entendendo a primeira geração de nativos digitais.** Trad. Magda Franca Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2011.

PAPERT, S. **A máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática.** Artes Médicas: Porto Alegre, 1994.

PAPERT, S. **Logo: Computadores e Educação**. Trad. J.A. Valente, B. Bitelman, A.V. Ripeer. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PAVANELLO, R. **O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica.** (Dissertação em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências**.** In ***Zetetiké***, nº 1, v. 1, 1993.

PIAGET, J. Desenvolvimento e aprendizagem. In: LAVATELLY, C,S e STENDLER, F. **Reading in child beravior and developpment.** New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972.

PIAGET, J. **Ensaio de Lógica Operatória***;* segunda edição de Tratado de Lógica, ensaio de lógica operatória. Trad. Maria Ângela Vinagre de Almeida. Porto Alegre, Globo; São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

PIAGET, J. **A tomada de consciência**. Trad. Edson Braga de Souza. São Paulo, Melhoramentos e Editora da Universidade de São Paulo, 1977.

PIAGET, J. **O nascimento da inteligência na criança.** Trad. Álvaro Cabral. Quarta edição. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S.A, 1987.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança: Imitação, Jogo e Sonho, Imagem e Representação**. Trad. Álvaro Cabral. Quarta edição. Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1990.

PIAGET, J. **Evolução intelectual da adolescência à vida adulta.** Trad. Tania B. I. Marques e Fernando Becker. (Texto digitado). Porto Alegre: UFRGS, 1993, 20p.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações especiais**. Tradução de Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, J. **Comentários sobre a Educação Matemática.** Trad. Paulo Francisco Slomp e Eduardo Brito Velho de Matos. Porto Alegre: UFRGS/FACED/DEBAS, 2001, 4 f.

PIAGET, J.; GRÉGO, P. **Aprendizagem e conhecimento.** Tradução Equipe da Livraria Freitas Barros. Rio de Janeiro: Freitas Barros, 1974.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **Gênese das Estruturas Lógicas Elementares. Trad. Álvaro Cabral.** Segunda edição. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1975.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A Representação do espaço na criança.** Trad. Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. **O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional.** In: Formação de Professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003, p. 159 -191.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA,H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 2ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

PRENSKY, M. **Digital Nativis, Digital Immigransts.** MBC University Press, Vol 9, n. 5, oct, 2011.

RAMOS, F. et. al. Perpectivas e práticas em e-lerning no ensino superior e no ensino ao longo da vida em Portugual, Irlanda e Reino Unido. In: SILVA, A, C. **Aprendiz@gem em @mbiente virtu@ia: e educação a distância.** Porto Alegre: Editora Mediação, 2009, p. 19-52.

RIVAS, T. **Objetos de aprendizagem no contexto das comunidades virtuais auto-organizadas para a produção de software libre e de código aberto**. (Tese em Engenharia). Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

RIZZINI, I. et al. **Adolescentes brasileiros, mídia e novas tecnologias**. ALCEU, v.6, n.11, p.41 a 63, jul/dez 2005.

SANTOS, E. O. Articulação de saberes na EAD *online:* Por uma rede interdisciplinar e interativa de conhecimentos em ambientes virtuais de aprendizagem. In: **Educação online**. São Paulo: Edições Loyola, 2003.

SENA, R. M. Logo em Geometria. In: III Seminário de Educação: **A Educação e as Novas Tecnolo**gias, Cuiabá: **Anais** UFMT, 2001.

SENA, R. M. **Evolução das Concepções de Professores de Matemática sobre Informática Educativa, a partir de um curso de capacitação**. (Dissertação em Educação), Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2005.

SENA, R. M. Tomada de Consciência dos alunos sobre o potencial dos ambientes digitais para a aprendizagem da matemática**.** In: XIX **Seminário de Educação: Educação e Relações Raciais: Dez anos de Estudo e Pesquisa na UFMT**, Cuiabá. **Anais** Cuiabá: UFMT, 2011a.

SENA, R. M. Concepções e Práticas sob o uso do laboratório de informática**.** In: VII **Congresso Internacional de Educação**, São Leopoldo: Unisinos, 2011b.

SENA, R. M; DARSIE, M. M. A "Tomada de Consciência" dos professores: O potencial dos ambientes digitais para a aprendizagem de matemática. In: **II Colóquio Internacional de Epistemologia e psicologia genética**, Marília, 2011b.

SENA, R. M; DORNELES, B. V. **Ensino da Geometria: Rumos da Pesquisa (1991 -2011).** In: REVEMAT, Santa Catarina, v. 08, n. 01, 2013, p. 138-155.

SILVA, R. I. **O Ensino da Geometria na Escola Fundamental: Uma análise de adequação às demandas educacionais. (**Tese em Educação), Universidade Federal da Paraíba: João Pessoa, 2008.

SILVA, A.C.; SILVA, C.M.T. Avaliação de ambiente virtuais de aprendizagem. In: SILVA, A, C. **Aprendiz@gem em @mbiente virtu@ia: e educação a distância.** Porto Alegre: Editora Mediação, 2009, p. 75-88

SILVA, A. C.; CARVALHO, M.; REGO, R. G.; **Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes**. Cuiabá: EdUFMT, 2012

SILVA, D. G.; SILVA, A. C. Linguagem, literatura infantil e ensino da matemática. In .; **Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes**. Cuiabá: EdUFMT, 2012, p. 273-289.

SILVA, M. **Sala de aula interativa: educação, comunicação, mídia clássica, tecnologias digitais, arte, mercado sociedade, cidadania.** São Paulo: Edição Loyola, 2010

STRASBURGER, V. C.; WILSON, B. J.; JORDAN, A. B. **Crianças, Adolescentes e a Mídia.** Trad. Sandra Mallmann. 2 ed. Porto Alegre: Penso, 2011

TAROUCO, L. M. R; et. al. **Gestão colaborativa de conteúdo educacional.** RENOTE [online]. 2009, n.1, v 7, 13p.

TAVARES, N. R. B. **Formação Continuada de professores em informática Educacional.** Dissertação de Mestrado apresentada a Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2001.

TORRESSAN; C. A. W.; BEHAR, P. A. Parâmetros para a construção de materiais educacionais digitais do ponto de vista do design pedagógico**.** In: **Modelos Pedagógicos em Educação a Distância**. Porto Alegre: Artmed, 2009, 33-65.

VALENTE, J. A. et al. **O computador na sociedade do conhecimento**. Coleção Informática para a mudança na Educação. Brasília: MEC/SEED/ProInfo, 1999.

VALENTE, J. A. **Análise dos diferentes tipos de software na Educação**. In: O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: NIED, 2002, p.89-109.

VALENTE, J. A. **Informática na Educação no Brasil: Análise e contextualização histórica.** In: O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: NIED, 2002. p 1-47.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930).** São Paulo: FAPESP, 1999

VAN HIELE, D. The didactics of geometry in the Lowest Class of secondary School. In: FUYS, David et al. **English translation of Selected Writing of Dina Van Hiele – Geodof and Pierre M. Van Hiele.** COPYRIGHT, 1984, p. 1-212

VAN HIELE, P. Summary of Pierre van Hiele´s dissertation entitled: The Problem of Insigth in Connection with School Children´s Insight into the Subject – Matter od Geometry. In: FUYS, David et al. **English translation of Selected Writing of Dina Van Hiele – Geodof and Pierre M. Van Hiele.** COPYRIGHT, 1984b, p. 237-252

VEEN, W.; VRANKKING, B. **Homo Zappiens: educando na era digital.** Tradução Vinicius Figueira. Porto Alegre: Artmed, 2009

VERGNAUD, G. **Piaget e Vigostsky: Convergências e Controvérisias**. Revista do GEEMPA**,** Porto Alegre: n.2, p. 63- 74, nov, 1993

VERGNAUD; G. **A trama dos campos conceituais na construção do conhecimento**. Revista do GEEMPA, nº 4, p. 8-19, julho 1996

VERGNAUD, G. **A formação de Competências Profissionais** Revista do GEEMPA, Porto Alegre: n.4, p. 63- 74, julho, 1996

VERGNAUD, G. **Gérard Vergnaud: Entrevista**. Pátio Revista Pedagógica. Porto Alegre: v. 2, n.5, p. 23-26, mai/jul, 1998

VERGNAUD, G. **O que é aprender**. In BITTAR, M; MUNIZ, C, A. (Orgs). A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos campos conceituais. Curitiba: Editora CRV, 2009a.

VERGNAUD, G. **A criança a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática da escola elementar**. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009b.

VITTI, C. M. **Matemática com prazer... A partir da história e da Geometria.** Prefácio de Ubiratan D'Ambrosio. Piracicaba: Editora Unimep, 1995.

WALLE, J. A. V. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WILEY, D. A. **Learning Object design and sequencing Theory.** (Thesis in Psychology). Brogham Young Universty, Provo, Utah, EUA, 2000.

ZULATO, Rubia Barcelos Amaral. **A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente on-line de formação continuada de professores.** (Tese em Educação). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Parâmetros curriculares nacionais de matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e o ensino de construções geométricas, entre outras considerações. **Reunião anual da associação nacional de pesquisa e pós-graduação em educação**, v. 15, p. 1-19, 2002.

ANEXO A - TERMO DE CONSENTIMENTO E LIVRE ESCLARECIMENTO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL / UNEMAT

FACULDADE DE EDUCAÇAO

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇAO EM EDUCAÇÃO

A professora Rebeca Moreira Sena, em parceria com o professor José Carlos, sob a orientação da Dra. Beatriz Vargas Dorneles, estará realizando na escola o projeto de Extensão/Pesquisa intitulado “Matemática e Tecnologias Digitais”, cujo objetivo é trabalhar num projeto de intervenção envolvendo o uso do computador e conteúdos de matemática, a fim de observar avanços no processo de aprendizagem.

Nesse contexto, estará desenvolvendo uma pesquisa que terá como fruto uma tese de doutorado, a fim de compreender melhor como as tecnologias podem contribuir de forma significativa para avanços no processo de ensino e aprendizagem.

Importante destacar que a participação na pesquisa não oferece danos ao participante, pelo contrário, o aluno estará aprendendo em cenários diferentes. Já foram efetivados projetos dessa natureza na escola nos anos de 2008, 2009 e 2011. A escola novamente abre as portas à parceria por compreender as vantagens para seus alunos. Serão feitas análises da escrita, fala e atividades realizadas pelos alunos, contudo será preservada a identidade dos mesmos.

As aulas do projeto ocorrerão nas tardes de segunda e quinta-feira, a partir do dia 22/03, no período das 14h às 16h, totalizando 10 encontros. Também haverá uma reunião semanal individual de 30 minutos, agendado previamente no primeiro encontro. Assim, posteriormente, encaminharemos o calendário das reuniões individuais. Os alunos levarão certificado de participação de 25h/a.

Assim, eu ____ responsável pelo aluno ____ matriculado na 7ª série (8º ano), concedo os direitos de participação no projeto de intervenção, bem como trabalhar com os depoimentos dos meus filhos para análise de pesquisa.

______________________	______________________	______________________
Assinatura do aluno participante	Professor da Escola	Assinatura do Responsável

ANEXO B - TESTE DE RECONHECIMENTO DE FIGURAS

*Nome:*_______________________________________ *Data* ____/___/___

Idade ______ *Data de Nascimento* ___/____/____

1) Desenhe:

Quadrilátero	Retângulo	Polígono qualquer	Trapézio	Paralelogramo

2) O polígono regular cuja medida do ângulo interno e externo é a mesma é o:
   a. Pentágono
   b. Quadrilátero
   c. Octógono
   d. Hexágono

3) Em todo o losango as diagonais:
   a. São perpendiculares entre si
   b. São paralelas
   c. Tem a mesma medida
   d. São coincidentes

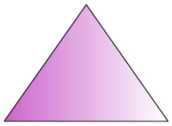
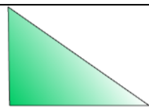
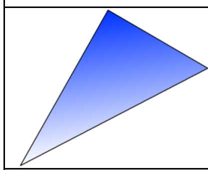
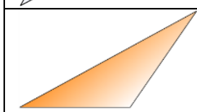
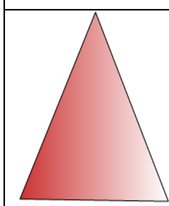
Responda e justifique
   e. Todo quadrado é um retângulo? ______________________________
   ____

   f. Todo retângulo é quadrado? _________________________________
   ____

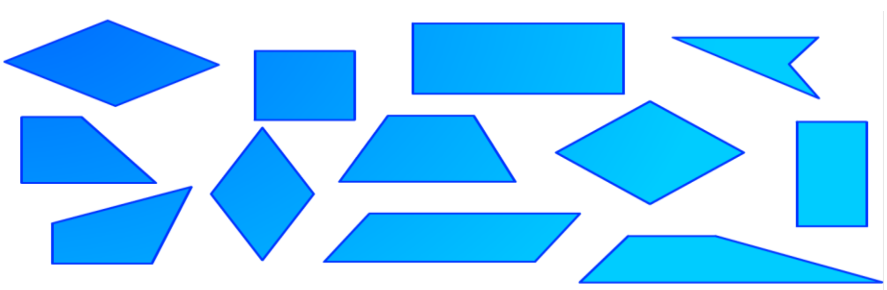
   g. Todo quadrado é losango? __________________________________
   ____

   h. Existe algum losango que é retângulo? _________________________

4) Relate o que você observa sobre os ângulos e lados das figuras abaixo:

	ângulos	lados
		
		
		
		
		

5) Observe as figuras abaixo, separe-as em no mínimo 4 grupos e justifique suas escolhas.

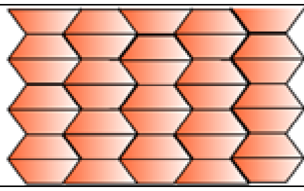
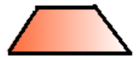
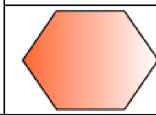
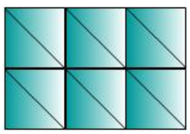
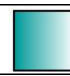


ANEXO C - TESTE DE GEOMETRIA

Nome:_______________________________________ Data ____/___/___

Idade ______ Data de Nascimento ___/____/____ Professor:

1) *Calcule a área das figuras abaixo considerando a unidade de área correspondente:~~?~~*

Figuras	Unidade de área	Área
		
		
		
		

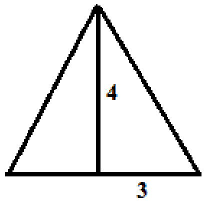
2) Num triângulo ABC, o ângulo A é triplo de B e o ângulo C é a ½ de B. Calcule os ângulos do triângulo.

3) Num trapézio isósceles, um ângulo obtuso mede 108. A medida do ângulo formada pela bissetriz dos ângulos internos da base maior é igual?
   a. 36 b. 72 c. 108 d. 120

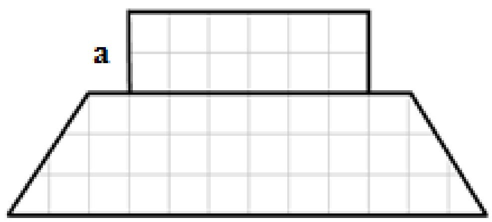
4) Complete a tabela corretamente, sendo que todos são polígonos regulares

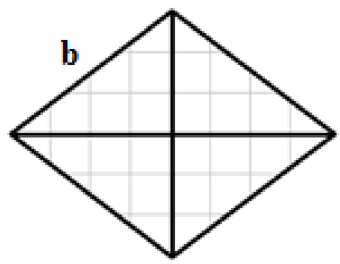
Lados	Cada ângulo interno	Desenho	Quantidade de diagonais
3			
4			
5			
6			

5) Um triângulo isósceles tem por altura 4 cm. O ponto médio divide o seguimento da base em dois de 3 cm. Determine o perímetro e a área do triangulo?



6) Determine a área das figuras abaixo em cm², sabendo que cada quadradinho da malha corresponde a 1 cm²





7) Entre as cidades Brasileiras de Cuiabá/MT, Brasília/DF e Maringá/PR é possível formar uma representação de um triângulo isósceles, como mostra a figura ao lado. O ângulo interno diferente da base é de 50 graus.:

a) Qual é o ângulo interno correspondente ao ponto da cidade de Maringá?

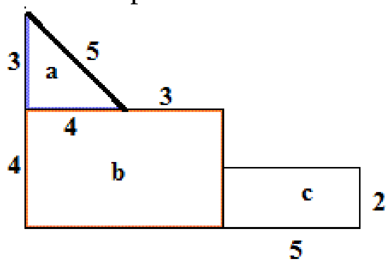
b) Qual é o ângulo interno correspondente ao ponto da cidade de Brasília?

c) Qual é o ângulo interno correspondente ao ponto da cidade de Brasília?

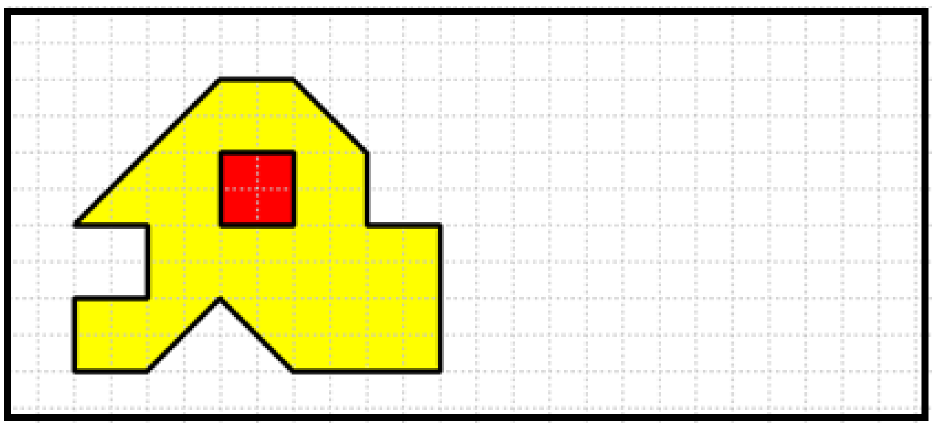
Se o avião deseja fazer um percurso entre essas três cidades, respectivamente, qual será a direção do ângulo para o giro da bússola (sendo que a bússola aponta para o norte em Cuiabá, inicio do percurso)?

d) *Cuiabá a Brasília?* *e) De Brasília para Maringá?* f) *De Maringá para Cuiabá?*

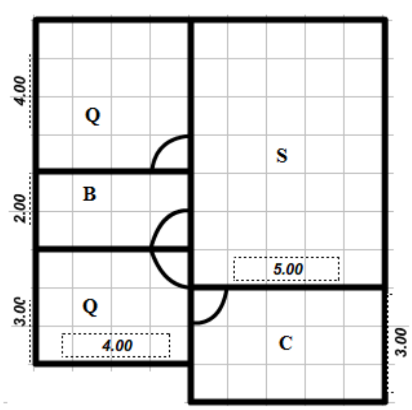
8) Calcule o perímetro e a área das figuras abaixo de: a, b, c e total (medida em cm).



9) Desenhe uma figura semelhante, mas reduzindo-a pela ½. Diga se a área e o perímetro da figura que desenhaste é a ½ da primeira. Justifique sua resposta.



10) Dada a planta baixa da casa abaixo, precisamos fazer alguns cálculos para a construção em metros (2.0).



a) Sabendo que a altura da casa é de 2,80 m, quanto preciso de azulejo para a cozinha (**C**)?

c) Preciso comprar carpete para os quartos (**Q**). Quanto de carpete preciso?

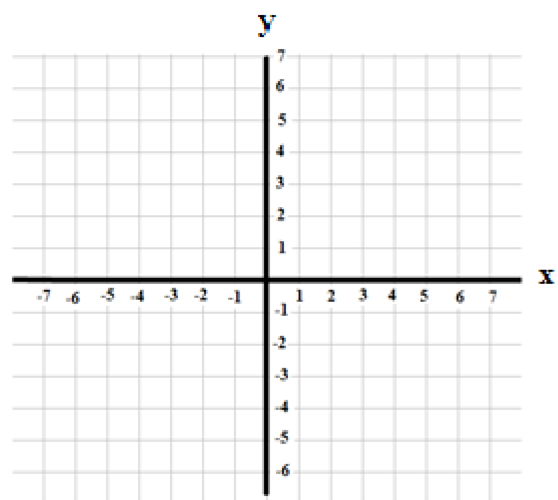
d) Quero colocar taco de madeira na sala (**S**). Quantos m² de taco preciso?

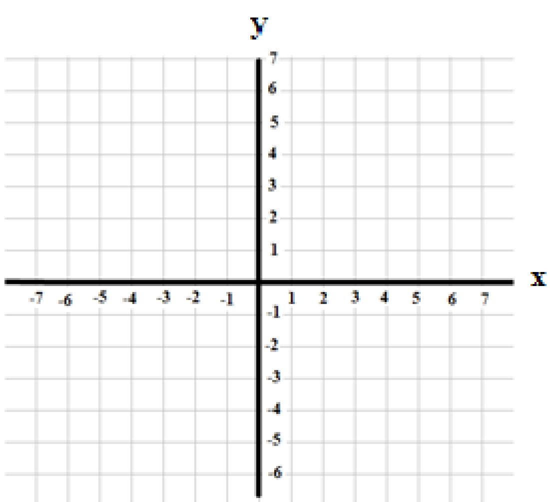
e) Quantos m² de piso preciso para colocar na cozinha **(C)** e banheiro **(B)**?

f) Gostaria de colocar uma faixa decorativa

b) Quanto de azulejo para o banheiro? (**B**)	juntamente com o azulejo da cozinha **(c)**. O mesmo, tem 10 cm de altura por 30 cm de comprimento. Quantos metros de faixa preciso comprar? Quantas faixas seriam ao todo?

11)Marque os pontos A (2,- 2) B (6,-2) C (2, 2)
Calcule a área da figura.





12) Marque a figura com os pontos A (-5,2) B (3, 2) C (-5, -3) e D (3,-3). Calcule a área e perímetro da figura.

ANEXO D - TESTE DE RECONHECIMENTO DAS FIGURAS

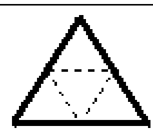
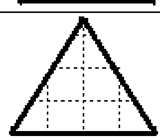
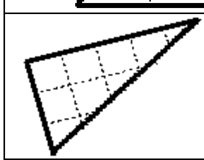
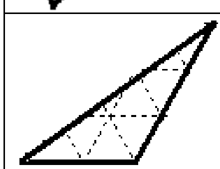
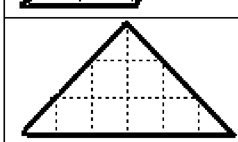
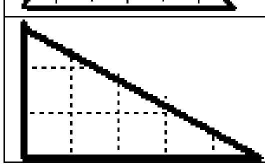
*Nome:*_______________________________________ *Data* ____/___/___
Idade ______ *Data de Nascimento* ___/____/____

1) Desenhe:

Quadrilátero	**Polígono**	**Trapézio**	**Paralelogramo**	**Losango**	**Triângulo Retângulo**	**Pentágono**

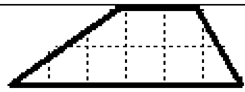
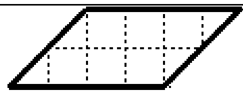
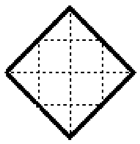
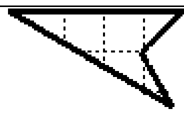
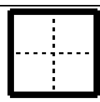
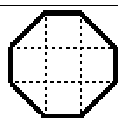
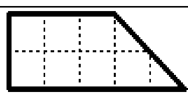
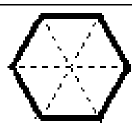
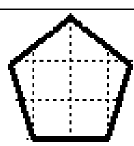
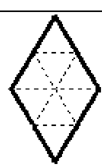
2) Observe as figuras. Assinale todas as propriedades que a mesma contém, ou seja, como as mesmas podem ser classificadas.

(a) Polígono	(b) Figura plana	(c) Triângulo
(d) Triângulo escaleno	(e) Triângulo equilátero	(f) Triângulo isóceles
(g) Triângulo acutângulo	(h) Triângulo obtusângulo	(i) Triângulo retângulo

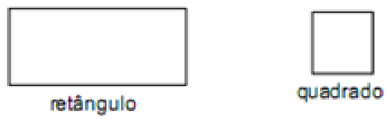
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)

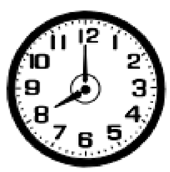
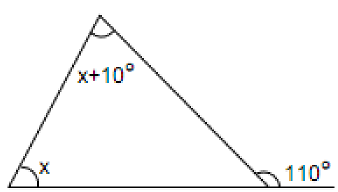
3) Observe as figuras. Assinale todas as propriedades que a mesma contém, ou seja, como as mesmas podem ser classificadas.

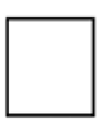
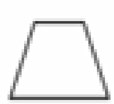
(a) Polígono	(b) Figura plana	(c) Quadrilátero	(d) Trapézio
(e) Paralelogramo	(f) Retângulo	(g) Losango	(h) Quadrado
(i) “Pipa”	(j) Regular	(l)Pentágono	(m) Hexágono

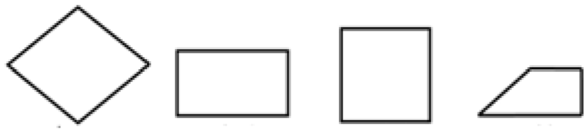
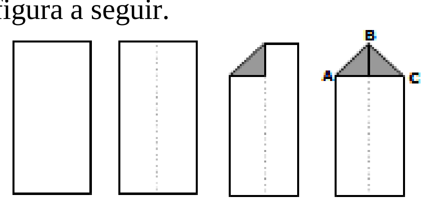
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)
	(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (m)

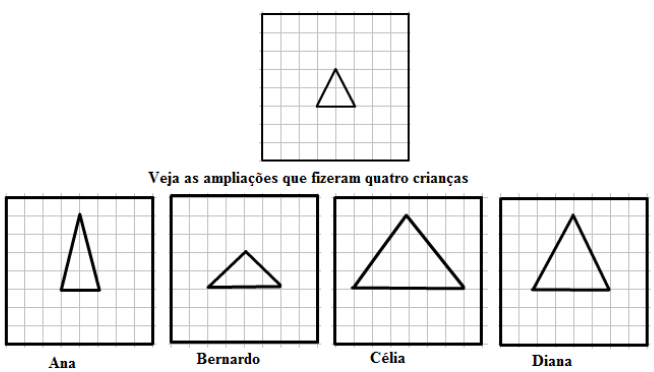
ANEXO E - TESTE SAEB

<table>
<tr><td colspan="2">Nome:____________________________________ Data ____/___/___ Professor: José Carlos</td></tr>
<tr><td>1) Observe as figuras abaixo.


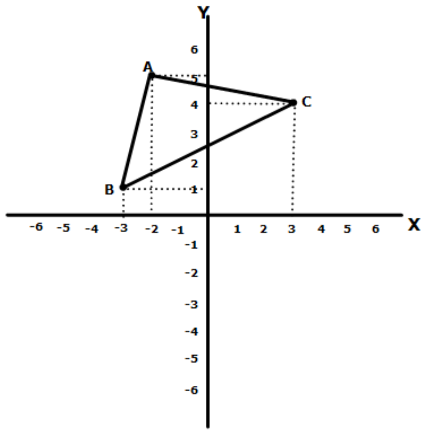
Considerando essas figuras,
(A) Somente o quadrado é um quadrilátero
(B) O retângulo tem todos os lados com a mesma medida.
(C) Os ângulos do retângulo e do quadrado são diferentes.
(D) O retângulo e o quadrado são quadriláteros.</td><td>Rascunho/Justificativa</td></tr>
<tr><td>2) Os ângulos formados pelos ponteiros de um relógio às 8 horas medem

(A) 60^0 e 120^0
(B) 120^0 e 240^0
(C) 140^0 e 220^0
(D) 120^0 e 160^0</td><td>Rascunho/Justificativa</td></tr>
<tr><td>3) Observe o triângulo abaixo.


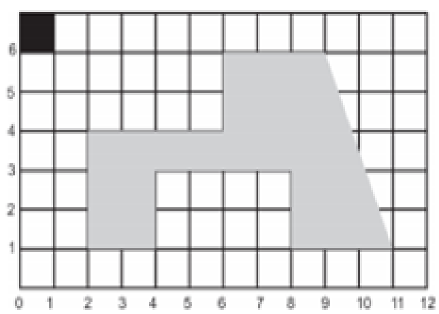
O valor de x é:
(A) 110^0
(B) 80^0
(C) 60^0
(D) 50^0</td><td>Rascunho/Justificativa</td></tr>
<tr><td>4) Alguns quadriláteros estão representados nas figuras abaixo. Qual dos quadriláteros possui apenas um par de lados paralelos?
(A)  (B)  (C)  (D) </td><td>Rascunho/Justificativa</td></tr>
</table>

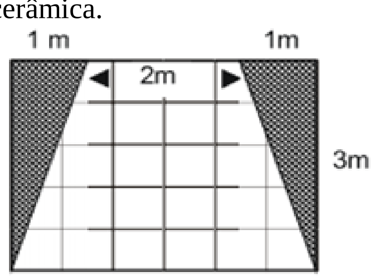
<table>
<tr><td>
5) Ao escolher uma lajota para o piso de sua varanda, Dona Lúcia falou ao vendedor que precisava de lajotas que tivessem os quatro lados com a mesma medida.

Que lajotas o vendedor poderia mostrar a Dona Lúcia?
(A) Quadrado ou retângulo.
(B) Quadrado ou trapézio.
(C) Losango ou quadrado.
(D) Losango ou trapézio.
</td><td>Rascunho/Justificativa</td></tr>
<tr><td>
6) Para fazer um aviãozinho, Felipe tomou uma folha retangular de papel e observou os passos indicados na figura a seguir.


f
O triângulo ABC
(A) Retângulo e escaleno.
(B) Retângulo e isósceles.
(C) Acutângulo e escaleno.
(D) Acutângulo e isósceles.
</td><td>Rascunho/Justificativa</td></tr>
<tr><td>
7) A figura abaixo foi dada para os alunos ampliá-la


Quem ampliou corretamente a figura?
(A) Ana
(B) Bernardo
(C) Célia
(D) Diana
</td><td>Rascunho/Justificativa</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
8) Os vértices do triângulo representado no plano cartesiano ao lado são


(A) A (-3,0); B (-2,0) e C (3,0).
(B) A (5,-2); B (1,-3) e C (4,3).
(C) A (2,-5); B (-3,-1) e C (3,4).
(D) A (-2,5); B (-3,1) e C (3,4).
</td>
<td>Rascunho/Justificativa</td>
</tr>
<tr>
<td>
9) Na ilustração ao lado o quadrado sombreado representa uma unidade de área.


A área da figura sombreada mede
(A) 23 unidades
(B) 24 unidades
(C) 29 unidades
(D) 25 unidades
</td>
<td>Rascunho/Justificativa</td>
</tr>
<tr>
<td>
10) O piso da entrada de um prédio está sendo reformado. Serão feitas duas jardineiras nas laterais, conforme indicado na figura, e o piso restante será revestido em cerâmica.


Qual é a área do piso que será revestido de cerâmica?
(A) 6m² (B) 9m² (C) 12 m² (D) 3m²
</td>
<td>Rascunho/Justificativa</td>
</tr>
</table>

ANEXO F - QUESTIONÁRIO DE CARACTERIZAÇÃO

Dados Pessoais
Nome: ____
Data de nascimento ___/____/___ Sexo: M ( ) F( )

1) Há quanto tempo estuda nessa escola?
( ) Entrei esse ano ( ) Mais de 1 ano ( ) Mais de 3 anos ( ) Sempre estudei aqui

2) Já estudou em escola pública? Quanto tempo?
( ) 1 ano ( ) 3 anos ( ) Mais de 3 anos ( ) Nunca estudou

3) Tem computador/nootebook em casa?
( ) Não tem ( ) 1 para toda a família ( ) 1 para cada membro da família

4) Acessa o computador em quais locais
( ) Escola ( ) Trabalho ( ) Cyber ( ) Casa de amigos ( ) Não acesso ( ) Outros_____

5) Quantas vezes por semana você utiliza a internet?
( ) uma vez por semana ( ) até 03 vezes ( ) diariamente ( ) Não utilizo

6) Quantas horas por dia você fica na internet?
( ) nenhuma ( ) 30 minutos ( ) 01 horas ( ) mais de 02 horas ( ) mais de 03 horas

7) Quantas horas por dia você fica na frente da TV?
( ) nenhuma ( ) 30 minutos ( ) 01 horas ( ) mais de 02 horas ( ) mais de 03 horas

8) Quantas horas por dia você separa para estudar?
( ) nenhuma ( ) 30 minutos ( ) 01 horas ( ) mais de 02 horas ( ) mais de 03 horas

9) Quantas horas você dorme por noite?
( ) 08 horas ( ) mais de 08 horas ( ) em média 07 horas ( ) menos de 07 horas

10) Assinale o que você possui em relação a elementos de comunicação digital.
( ) e-mail (que não foi criado hoje)
( ) Orkut
( ) Facebook
( ) Blog
( ) Página na internet

11) Com relação à informática, quais ferramentas você possui algum conhecimento? Anote (B) se básico e (A) se avançado_____________________________________

( ) Editor de Texto - "Word" ( ) Preparação de slides - "Power Point" ( ) Planilha - "Excel"
( ) Desenho - "Paint" ( ) Correio Eletrônico - "E-mail" ( ) Internet utilização
( ) Programação ( ) Banco de Dados ( ) Construção de paginas
( ) Softwares específicos? Outros, quais?________________________________

11) Gosta de estudar matemática
( ) muito ( ) pouco ( ) não gosto

12) Consegue tirar boas notas na disciplina de matemática
( ) geralmente sim ( ) de vez em quando ( ) raramente ( ) quase nunca

13) O que acha que precisa ser feito para que voce aprenda mamática com mais facilidade? Descreva.

____

____

____

____

14) Faça um desenho que represente a matemática para você.