UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

FRANCISCO WAGNER DE MOURA

O POTENCIAL DA LINGUAGEM LOGO NO APRENDIZADO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PORTO ALEGRE
2013/2

FRANCISCO WAGNER DE MOURA

O POTENCIAL DA LINGUAGEM LOGO NO APRENDIZADO DE MATEMÁTICA

Trabalho apresentado junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre

2013

FRANCISCO WAGNER DE MOURA

O POTENCIAL DA LINGUAGEM LOGO NO APRENDIZADO DE MATEMÁTICA

Trabalho apresentado junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Banca examinadora:

Prof. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha orientadora, Prof. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, por me incentivar a continuar desenvolvendo e escrevendo, mesmo não sendo eu o melhor ou mais dedicado dos orientandos. Agradeço também aos membros da banca examinadora, Prof. Dra. Elisabete Zardo Búrigo e Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo por terem aceito este fardo de analisar um Trabalho de Conclusão de Curso com estas dimensões.

Agradeço a todos os amigos que estiveram ao meu lado durante estes anos na Universidade. Amigos novos ou antigos, de dentro da faculdade ou de fora. Agradeço principalmente aos meus colegas em diversas disciplinas durante esta caminhada por me incentivar a ir adiante, de uma maneira ou outra. Agradeço aos amigos que aceitaram e entenderam as várias desculpas de “hoje não, estou ocupado com o TCC”.

Agradeço à minha família por ser sempre minha base, meus alicerces. Obrigado, mãe, por se sacrificar em tantos níveis para me proteger, desejando sempre o meu melhor. Obrigado, pai, por me ensinar a ser quem sou e me moldar com todo teu conhecimento. Obrigado, irmão, por me fazer sentir orgulho de te ver crescer e evoluir.

Um agradecimento especial à Maria Edi da Silva Nunes, que me amou e cuidou como a um filho por tantos anos e momentos, passando a ser parte da família e conquistando seu lugar nos meus sentimentos.

Acima de tudo, agradeço à Paola Rossato Bernardo, minha namorada, por me fazer crescer a cada momento; por me levar adiante quando a vontade desaparecia; por me guiar quando as luzes se apagavam e por me reerguer quando eu tropeçava. Teu sorriso é o que me leva adiante. Obrigado por sempre estar do meu lado.

Computador na educação não significa
aprender sobre computadores, mas sim
através de computadores.
José Armando Valente

RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa realizada com alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que visa analisar as contribuições da linguagem de programação Logo na construção do aprendizado matemático destes alunos. Respaldado pela teoria de autores como Seymour Papert, criador da linguagem, e José Armando Valente, defendo o uso de computadores em sala de aula e da linguagem Logo como ambiente de aprendizado. Para analisar a contribuição desta linguagem na construção do conhecimento matemático dos alunos da disciplina Computador na Matemática Elementar, foram realizados dois testes em momentos distintos: um teste, no início do semestre, que abordava problemas de Geometria e Trigonometria; o outro, com problemas envolvendo as mesmas áreas da Matemática, foi aplicado dois meses depois de contato frequente com a linguagem Logo na disciplina. As soluções dos alunos nestes dois momentos são analisadas e comparadas neste trabalho, frisando a evolução, ou não, dos conhecimentos matemáticos abordados.

Palavras-chave: Linguagem de programação Logo; Ensino e Aprendizagem de Matemática; Ensino de Geometria e Trigonometria;

ABSTRACT

This paper presents a research performed with students entering the course of Licentiate in Math in the Universidade Federal do Rio Grande do Sul, that aims to analyze the contributions of the Logo programming language in the construction these students' learning of Mathematics. Backed by the theory of authors like Seymour Papert, creator of the language, and José Armando Valente, I defend the use of computers in the classroom and of the language as a learning environment. To analyze the contribution of this language in the mathematical knowledge of the students of the subject Computador na Matemática Elementar, two tests were performed on them in different moments: one, at the beginning of the semester, with problems around Geometry and Trigonometry; the other, with problems on the same areas of Math, was applied two months after frequent contact with the Logo language on the subject. The students' solutions in these two moments were analyzed and compared in this paper, pointing out the evolution or lack thereof of the mathematical knowledge in perspective.

Keywords: Logo programming language; Mathematical Teaching and Learning; Teaching of Geometry and Trigonometry;

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. Introdução e Motivação

Em seu primeiro período letivo na Universidade, os calouros do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul são introduzidos em um ambiente que, para muitos, é novo: a programação via Logo. Na disciplina *Computador na Matemática Elementar*, estes alunos são apresentados a um currículo que trabalha unicamente com o software SuperLogo 3.0, versão mais atual (embora de 2004) e na língua portuguesa do programa, no qual se utiliza a linguagem Logo e, como Papert (1988, p. 77) chamava, sua Geometria de Tartaruga.

Cabe neste momento descrever, brevemente, os principais objetivos da disciplina Computador na Matemática Elementar. Segundo seu plano de ensino atualizado no segundo semestre do ano de 2012 (Anexo A), seus principais objetivos são: a exploração e consolidação de conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Fundamental e Médio no ambiente Logo e, com isto, a aprendizagem desta linguagem; a partir das atividades realizadas em aula, o desenvolvimento de um raciocínio lógico e, após familiarização com o software, a formação de uma postura investigadora para a construção de conhecimentos matemáticos; e por fim instigar os alunos para que façam conexões entre a teoria e a prática de modo a poderem criar atividades voltadas para a sala de aula.

No ano de 2010, como próprio calouro do curso de Licenciatura em Matemática, tive meu primeiro contato com a disciplina supracitada. Os primeiros comandos e construções geométricas me remeteram a memórias esquecidas há tempo: meu primeiro contato com a Tartaruga na tela branca e sua programação. Ainda no Ensino Fundamental, em uma das visitas semanais ao laboratório de informática da escola onde estudei, lembro-me de apenas brincarmos com o cursor, movendo a Tartaruga para frente e para trás, virando-a para um lado e para o outro. Estas memórias não passam de pequenos lampejos de uma atividade que eu acredito não ter tido sucessão, uma tentativa isolada e supostamente falha de introduzir a linguagem a alunos do Ensino Fundamental, levando-me a pensar: por que não houve uma continuação? A tentativa foi realmente falha? Não houve interesse dos alunos? Ou não houve preparo e/ou conhecimento técnico para com o programa por parte do professor?

Talvez esta introspecção que a disciplina me proporcionou tenha me levado a criar tanto afeto para com ela e para com a linguagem Logo em si. No ano seguinte ao meu ingresso no curso, candidatei-me a monitor da disciplina, cargo para o qual fui eleito e mantive por cinco semestres, obtendo contato com mais de uma centena de alunos. Este contato proporcionou-me experiências de diversas naturezas e todas elas levaram-me a reforçar a ideia que há muito tenho formada: a linguagem Logo é perfeitamente aplicável no ensino matemático de qualquer faixa etária.

Enfim, o objetivo deste trabalho é analisar aspectos em que a linguagem Logo pode ser utilizada beneficamente para o aprendizado de Matemática destes alunos ingressantes da UFRGS e também no Ensino Básico.

Para verificar o avanço dos alunos na compreensão de alguns conceitos de Matemática, apliquei dois testes com todos os alunos que aceitaram participar desta pesquisa. O primeiro teste foi realizado no momento de ingresso dos alunos na Universidade, com o intuito de verificar o que eles sabiam enquanto calouros. O segundo teste foi realizado perto do final da disciplina, com o objetivo de verificar o quanto eles evoluíram em seus conhecimentos matemáticos no decorrer do semestre, a partir do contato com a linguagem Logo. Para verificar que foi, de fato, a linguagem Logo que os ajudou nesta caminhada, foi realizada uma análise das atividades realizadas em aula e dos conceitos matemáticos trabalhados que poderiam possibilitar o aprendizado dos alunos.

Veremos no capítulo 2, uma breve fundamentação teórica, na qual se defende o uso de computadores para o ensino-aprendizagem da Matemática. Nele, é argumentado o porquê utilizar computadores e especificamente softwares para o ensino e o porquê, supostamente, eles proporcionam um ambiente propício para a aprendizagem de Matemática. Os referenciais teóricos foram Papert (1880), Valente (2003), Basso e Gravina (2012), Hernandez (1998) e Ferreira (1997).

Vemos então neste capítulo exemplos de outros softwares para o aprendizado de Matemática diferentes do SuperLogo, porém é na seção 2.1 que é analisado, especificamente, a linguagem Logo e seus benefícios para a educação, além de contar brevemente a história e a motivação para a criação da linguagem Logo no ano de 1970.

O capítulo 3 apresenta os “Procedimentos Metodológicos”, ou seja, apresenta os dois testes aplicados na turma, explicados detalhadamente questão por questão, analisando os conteúdos matemáticos exigidos na solução de cada questão e os conteúdos aprendidos na disciplina Computador na Matemática Elementar.

No capítulo 4 encontra-se a análise dos testes que foram selecionados dentre os alunos que os realizaram. Destes, foram escolhidos sete alunos que mostraram evidentes melhorias do primeiro para o segundo teste. Esta análise situará os pontos específicos destas melhorias supracitadas.

Por último, encontram-se as considerações finais da pesquisa, assim como uma análise feita sobre a Linguagem Logo e suas potencialidades.

2. Fundamentação Teórica

Para a realização deste trabalho, foi importante conhecer a linguagem Logo e seu papel para a Educação Matemática, a partir de leituras que deram o suporte teórico necessário. Em Papert (1988), o prefácio busca explicar porque as ideias de Papert, que serão relatadas na próxima seção, ainda não podiam ser perfeitamente introduzidas na realidade da educação brasileira daquela época e nomeia a falta de computadores como principal causa para isto. Hoje, mais de vinte anos depois da tradução do livro, vemos que este empecilho já não é mais algo que deva nos preocupar, visto que grande parte das escolas do Brasil possui acesso a computadores. Papert, inclusive, é um grande apoiador do projeto *OLPC* (*One Laptop Per Child – Um Computador por Criança*), que visa à criação e distribuição de computadores educacionais de custos baixos para crianças de países em desenvolvimento.

Mas cabe agora nos perguntarmos: por que Papert defende a ideia de um computador por aluno? Por que tanta ênfase na educação matemática através de computadores? Para tentar responder a estas perguntas, busquei referências nas recomendações dadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006, p. 52) para com a aprendizagem dos alunos, que, apesar de extenso, mostra os atributos que o computador pode vir a proporcionar ao aluno:

> Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, (...), dando ao aluno a oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições, criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar, valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes.

Assim como Valente (2003), Basso e Gravina (2012), acredito que o computador é uma ferramenta essencial nos dias de hoje em nossas vidas. Porém, a atual capacidade deste acesso rápido à informação, possibilitado pelo computador e pela Internet, nos faz refletir sobre o real papel que a Educação passou a ter e, consequentemente, sobre o seu futuro, ou seja, refletir sobre qual tipo de professor se faz necessário: aquele que só repassa os conteúdos que os alunos devem aprender, ou aquele que sabe que seu papel vai muito além de ensinar os conteúdos, aquele que ajuda os alunos a pensarem sobre tais conteúdos e também a saberem questionar e problematizá-los? Assim como afirmam Basso e Gravina (2012, p. 12):

> Nossas rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influenciam nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir.

A tecnologia tornou-se parte da nossa rotina e, por conseguinte, a Educação não pode ficar à margem destes avanços tecnológicos. Os telefones celulares nos põem em contato direto e instantâneo com pessoas que estão a enormes distâncias; a Internet nos proporciona conexão mundial com todo tipo de informação em tempo real.

Assim, acredito que o computador pode ser utilizado como um importante recurso para a Educação tanto de jovens quanto de adultos, em qualquer área do conhecimento e, particularmente, na Matemática. Papert (2002), em uma entrevista, compara o aprendizado da língua francesa com o aprendizado de Matemática. Ele diz que um aluno que não aprende Francês nas aulas não pode ser rotulado como inapto para o Francês e que, se este aluno tivesse crescido na França, com certeza conheceria a língua francesa. O mesmo pode ser dito sobre a Matemática. Ele acredita que se aprendêssemos em uma “Terra da Matemática”, aprenderíamos Matemática perfeitamente bem. A questão que ele aponta é: como criar uma Terra da Matemática? E uma possível resposta poderia ser encontrada nos computadores, pois, segundo Valente (2003, p. 2):

> As facilidades técnicas oferecidas pelos computadores possibilitam a exploração de um leque ilimitado de ações pedagógicas, permitindo uma ampla diversidade de atividades que professores e alunos podem realizar.

Podemos ver na Educação da atualidade, como relataremos na seção a seguir, que não basta o conhecimento ser “transmitido”, mas sim construído; não basta os alunos saberem apenas o básico de tudo, eles precisam saber mais que este básico, precisam saber aplicar seus conhecimentos, precisam aprender a pensar sobre aquilo que estão aprendendo, “aprender a aprender de forma autônoma, criativa e crítica” (COELHO, 1997, p. 48). Então “de que modo desenvolver uma educação matemática como parte das nossas preocupações com a democracia numa sociedade estruturada por tecnologias que incluem a matemática como um elemento estruturante?" (SKOVSMOSE, 2000, p. 19). E mais: segundo Hernández (1998, p. 18):

> (...) estamos ajudando nossos alunos a globalizar, a estabelecer relações entre as diferentes matérias, a partir do que fazemos na sala de aula? (...) tentar responder a essa pergunta nos levou a (...) organização dos conhecimentos escolares no currículo e as concepções do ensino e da aprendizagem em aula.

Até agora afirmamos que o computador pode ser utilizado de modo extremamente benéfico para a Educação Matemática, mas ainda não dissemos como isto é possível. Pois bem, o objetivo a partir de agora é argumentar que é através de *softwares* voltados para o ensino de Matemática que o computador irá nos beneficiar e o porquê disso.

Hoje em dia, são diversos os softwares livres (ou seja, softwares que podem ser instalados gratuitamente no computador) que ajudam na fase do aprendizado em que se estabelecem relações entre as diferentes áreas do conhecimento. Estes softwares colocam à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que permitem o estabelecimento de relações, onde geralmente os alunos apresentam dificuldade. Por exemplo, esboçar os gráficos de posição em função do tempo que modelam o Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), em Física, aos olhos dos alunos, geralmente não tem relação com as funções e seus respectivos gráficos estudados em Matemática usualmente em paralelo, ou seja, no primeiro ano do Ensino Médio. Neste exemplo, podemos observar que ao utilizar um software no qual seria possível se comparar as equações do MRU, usualmente apresentadas como $s = s_0 + vt$, com as equações de primeiro grau, usualmente apresentadas como $y = ax + b$, e estabelecer conexões entre as variáveis no primeiro (como velocidade, posição e tempo) com as do segundo (x e y), poderíamos dinamicamente entender o que cada uma destas variáveis representa e qual sua influência na representação gráfica destas funções.

Estes softwares geralmente configuram-se como um espaço de exploração e aprendizagem, pois nem sempre é necessário que o professor dite as "regras" aos alunos, ou seja, eles são livres para explorarem e aprenderem a partir das atividades propostas. Tomamos como exemplo o software *GeoGebra*, que é considerado, na minha opinião, um dos melhores softwares de Geometria Dinâmica existentes. Denominamos Geometria Dinâmica uma Geometria em que há a possibilidade de se construir objetos geométricos a partir das propriedades que o definem, de maneira dinâmica. Nele, o aluno pode aprender como construir estes objetos geométricos usando, como dito anteriormente, suas definições; procedimento que, se feito em sala de aula, utilizando o quadro negro, tomaria muito mais tempo, sem mencionar que se perderia todo o dinamismo que há no programa, que é o principal objetivo de sua utilização. Segundo Gravina *et al*. (2012, p. 39):

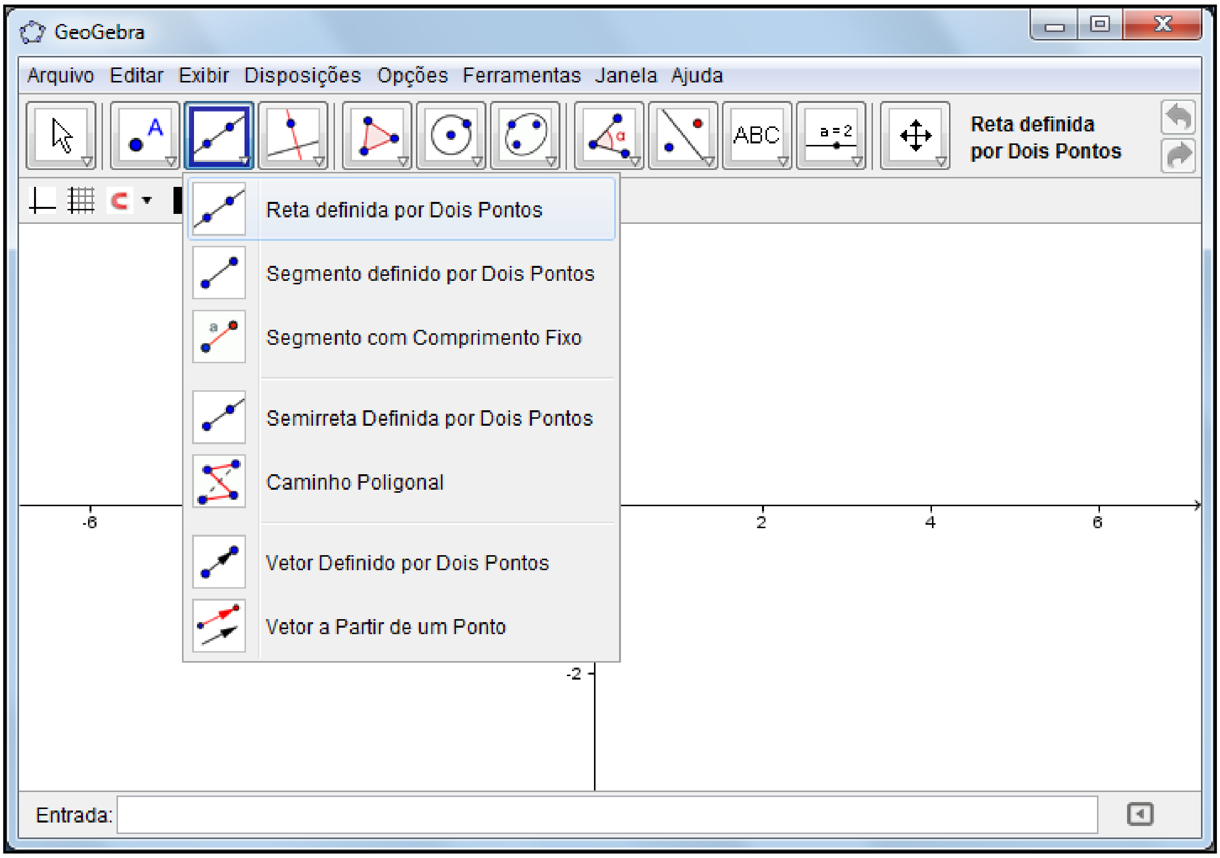
> "(...) feita uma construção, mediante movimento aplicado aos pontos que dão início à construção, a figura que está na tela do computador se transforma quanto ao tamanho e posição mas preserva as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, bem como as propriedades dela decorrentes. Ou seja, a "figura em movimento" guarda as regularidades que são importante sob o ponto de visto da geometria. São figuras que não se deformam".

Neste momento os procedimentos a serem realizados levam em conta, principalmente, o princípio da problematização, que consiste: em criar uma lógica para o problema através de representações mentais; na análise dos procedimentos a serem realizados e com isto a dedução de procedimentos; e na generalização da dedução correta, pois segundo Vianna (2002, p. 1) "Para que eu possa pensar em uma situação como problemática eu preciso ter consciência dela, preciso ter a necessidade de responder às questões... eu preciso saber*"* e não há como construir qualquer objeto e assim resolver problemas, sem entender como ele funciona e quais são suas definições de construção.

Então vamos utilizar exemplos que nos mostrem o quanto os softwares podem ajudar na atribuição de significados matemáticos aos sistemas de representação dos alunos, ajudando na compreensão de diferentes áreas da Matemática, fornecendo um vasto domínio destes sistemas de representação que se fazem necessários, pois, segundo Coelho (1997, p. 49), "só entendemos aquilo que podemos construir".

Vejamos o software GeoGebra como exemplo do que foi dito no parágrafo anterior. Suponhamos que o professor peça para os alunos descobrirem como se constrói uma reta no programa. Consequentemente eles irão navegar pelos menus do programa, até achar o ícone que abre o menu mostrado na Figura 1:

Figura 1 - Interface do GeoGebra com o menu de construção de reta

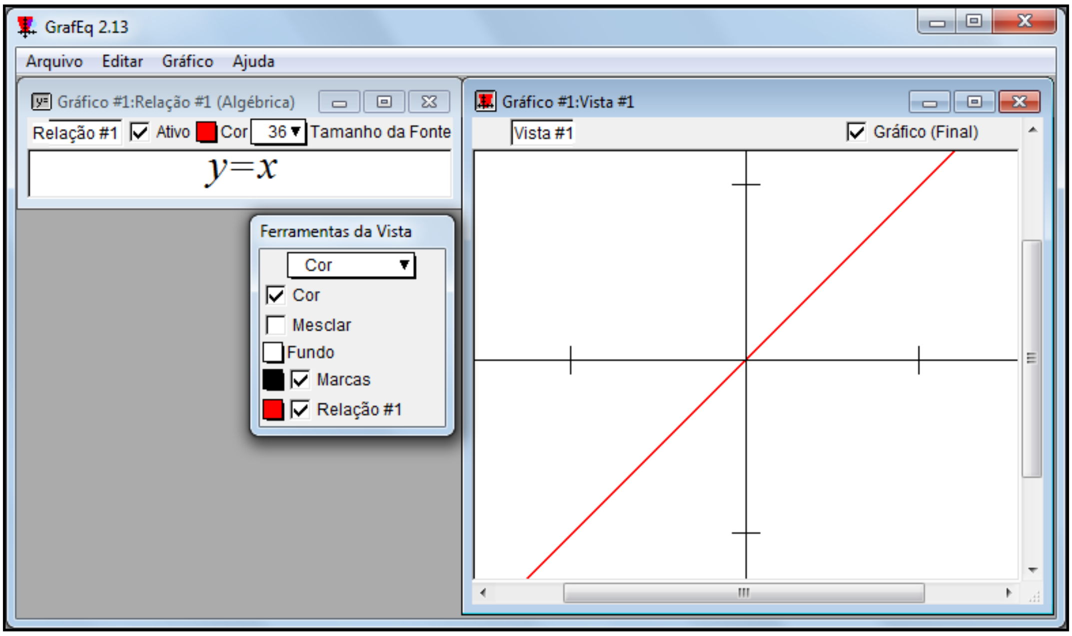


Fonte: Acervo pessoal

Podemos notar que, como indica o programa, se o aluno quiser construir uma reta, ele deverá fazê-la a partir de dois pontos dados. E assim ele terá que conjecturar, até mesmo sem saber, que uma reta só pode ser construída a partir de dois pontos, que é na verdade a definição geométrica de uma reta, ou seja, dados dois pontos distintos no espaço passa por eles uma, e somente uma, reta. Neste momento o aluno tem a oportunidade de, como citado anteriormente pelos PCNs (Ibid. 2006, p. 52) “construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições”, pois se antes ele não sabia como se construía uma reta, agora ele tem um modelo na tela do computador que o mostra que para construí-la ele precisa de dois pontos dados.

Vejamos agora como exemplo o caso do software Grafeq, que utiliza de forma expressiva a relação entre a representação algébrica e a representação geométrica de objetos matemáticos. Digamos que, por exemplo, o professor peça para que os alunos esbocem, no programa, uma reta. Então neste momento o aluno precisaria saber que a equação $y = x$, por exemplo, é representada graficamente por uma reta, e ao escrever esta equação na janela algébrica, o programa irá desenhar a reta na janela gráfica (geométrica), como mostra a Figura 2:

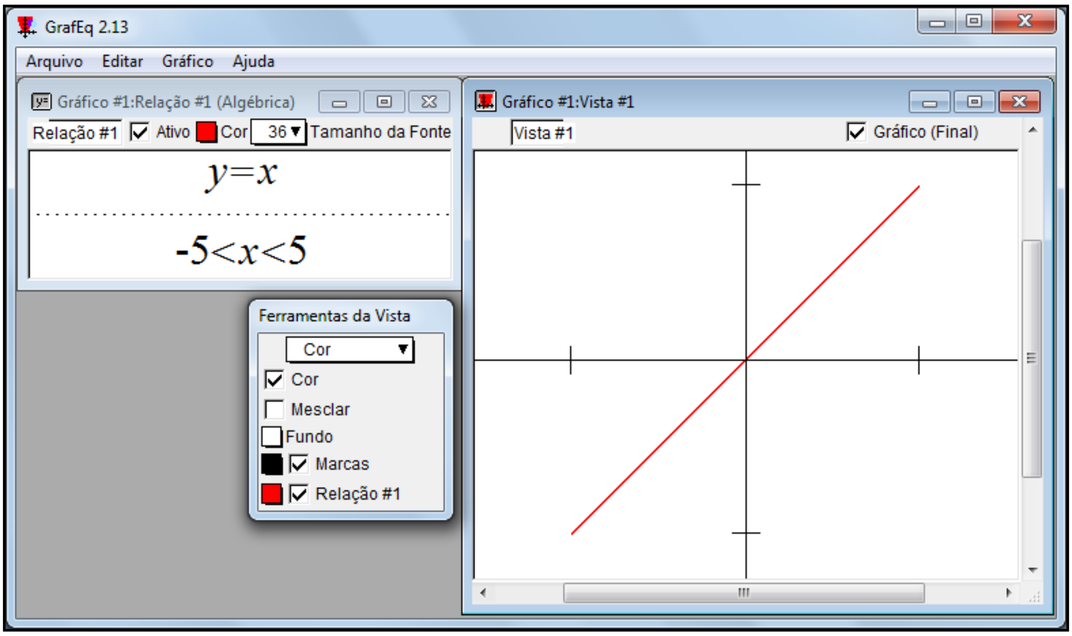
Figura 2 - Interface do Grafeq com a representação da equação y=x



Fonte: Acervo pessoal

Mas e se o professor quiser um segmento de reta restrito ao intervalo de -5 até 5, no eixo das abscissas? Para isto, o aluno deverá ter compreendido o conceito de intervalo, linguagem mais acessível ao programa, e entender que isto é, na verdade, o domínio da função supracitada. Incluindo-se a restrição aos valores de x (Figura 3), vemos graficamente a alteração da reta para um segmento de reta.

Figura 3 - Interface do Grafeq com equação e restrição aos valores de x



Fonte: Acervo pessoal

E então, o professor pede para os alunos fazerem no programa uma reta mais inclinada. Neste momento o aluno, que ainda não aprendeu que, em uma equação do tipo $y = ax$ o responsável pelo ângulo da reta com o eixo das abscissas é o valor de a, deverá navegar no programa, formulando então conjecturas e deduções, até conseguir acertar os diferentes valores. Podemos perceber que, além do aluno possivelmente sentir-se desafiado a encontrar a resposta, ele produzirá seu próprio conhecimento, dando muito mais sentido a este significado do que se o fizesse de outra maneira como, por exemplo, recebesse resultados prontos de um professor através de um quadro.

Nestes exemplos, podemos ver a diversidade de trabalhos que podem ser realizados com os alunos em sala de aula com softwares que podem ser manuseados facilmente por qualquer aluno em computadores, pois, segundo Basso e Gravina (2012, p. 23, acréscimos do autor), “o dinamismo do sistema de representação [que foram mostrados e comentados nos exemplos anteriores] pode provocar raciocínios que levam à compreensão de conteúdos de Matemática que usualmente não são trabalhados na escola” e que, conforme Ferreira (1997, p. 37) afirma, “o aluno melhor aprende qualquer conteúdo quando é capaz de atribuir-lhe significado, ou seja, quando é capaz de estabelecer relações reais, substantivas, entre o que já está aprendendo e o que já conhece”. E, à medida que o aluno constrói seu próprio conhecimento, ele atribui sentido e significado aos conteúdos já vistos.

2.1. A linguagem Logo

Vemos na atualidade a crescente produção de softwares que ajudam na compreensão de complexos conteúdos de Matemática, como o *GeoGebra*, *Grafeq*, como mostrado na seção anterior, entre outros. Ao mesmo tempo, vemos uma demanda cada vez maior sobre os conhecimentos que o aluno deve construir em sua experiência escolar. Por que então trabalhar com a linguagem Logo, criada em 1970, tão antiga e aparentemente obsoleta? A reposta não é tão simples e esta pergunta necessita de uma visão aprofundada dos programas que utilizam a linguagem Logo para ser respondida.

Na tentativa de facilitar o acesso ao aluno, os softwares de aprendizagem matemática atuais vêm com ferramentas pré-programadas, que permitem ao usuário um contato direto com os objetos na tela do computador. Embora esta manipulação direta de tais objetos seja incrível e possa ser muito adequada para o trabalho em sala de aula, creio que eles não apresentam uma característica importante para o aprendizado de Matemática que o Logo oferece: a programação, pois nela, concordando com o que Valente no prefácio de Papert (1988, p. 9) escreveu: "Segundo a filosofia Logo, o aprendizado acontece através *de a criança inteligente "ensinar" o computador burro, ao invés de o computador inteligente ensinar a criança burra*".

Quando se fala em programação, logo se imaginam códigos extensos e complexos, em línguas estrangeiras, que somente usuários experientes conseguem entender. Desta forma não se considera a possibilidade de uma linguagem de programação simples, que pode ser utilizada por crianças e jovens. Porém o Logo é exatamente isto: uma programação simples. Alguns podem interpretar isto como "limitada" ou, como mencionado anteriormente, "obsoleta", mas eu vejo a linguagem Logo como, apenas, "simples". A palavra "simples" não deve carregar consigo uma conotação negativa, pois é na simplicidade que se encontra a beleza da linguagem Logo.

Visando criar um espaço de aprendizado utilizando programação e robótica na sala de aula, Seymour Papert, Wally Feurzeig e sua equipe desenvolveram a linguagem de programação Logo, que trabalha com a chamada Geometria de Tartaruga para ensinar conceitos matemáticos a alunos da escola básica de maneira espontânea e natural, que é o que Papert (1988, p. 188) chama de "aprendizagem piagetiana (...) da pessoa interagindo com o seu ambiente em contraste com a aprendizagem dirigida por currículos característicos da escola tradicional”. A ideia inicial, ao criar-se esta linguagem, era de se criar um mundo matemático onde a criança programaria uma Tartaruga de chão (um robô formado por uma cúpula com rodas, com uma caneta acoplada para traçar as linhas, que originou o apelido “Tartaruga” devido ao formato de seu “casco”) que respondia a comandos simples para movimentar-se pelo solo. Estes movimentos eram dados pelos comandos:

- **PARAFRENTE *n*** – a Tartaruga anda para frente *n* “passos”.
- **PARATRÁS *n*** – a Tartaruga anda para trás *n* “passos”.
- **PARADIREITA *n*** – a Tartaruga vira para a direita *n* graus.
- **PARAESQUERDA *n*** – a Tartaruga vira para a esquerda *n* graus.

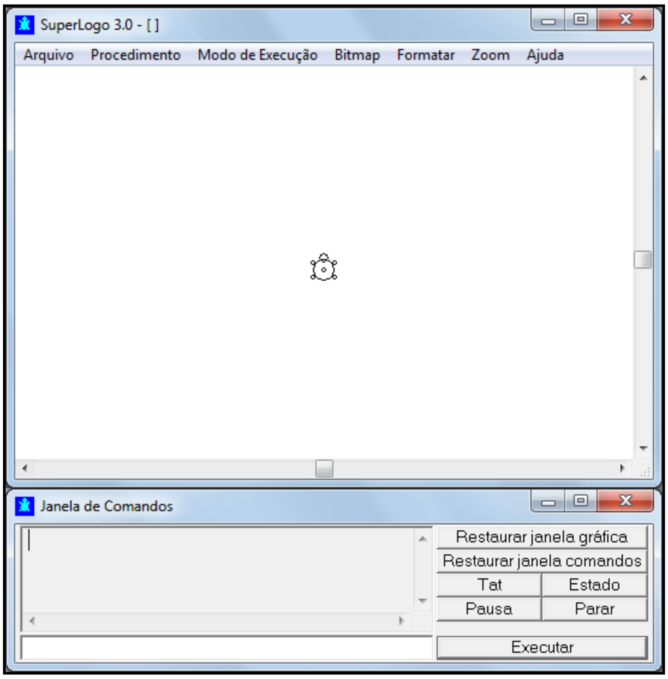
A partir destes comandos, o aluno podia criar formas geométricas e produzir desenhos com o intuito de estudar Geometria praticando com a Tartaruga e assim construindo de maneira autônoma seu próprio conhecimento. E como Valente (2003, p. 4), tradutor do livro de Papert, afirma sobre o que é o conhecimento:

> “O conhecimento é o que cada indivíduo constrói como produto do processamento, da interpretação, da compreensão da informação. É o significado que atribuímos e representamos em nossa mente sobre a nossa realidade. É algo construído por cada um, muito próprio e impossível de ser passado (...)”

Um exemplo disto é o estudo de ângulos: a programação aplicada com crianças nos anos iniciais do Ensino Fundamental possibilita às crianças um contato manipulável com ângulos. A criança que movimenta a Tartaruga não precisa conhecer o conceito exato de ângulo ou a forma de medi-los para descobrir, através de tentativa e erro, os números necessários nos comandos PARAESQUERDA e PARADIREITA para que a Tartaruga complete a figura desejada. Para alunos que já têm o conceito formado de ângulo e suas medidas não é necessário o trabalho de descoberta dos ângulos, bastando dizer-lhes que o número necessário nestes comandos é a medida em graus do ângulo que se deseja virar.

A Tartaruga de chão do conceito original da programação acabou sendo trocada por sua versão virtual: um ponto na tela de um computador. Este ponto é normalmente representado por um cursor em formato de Tartaruga – como no programa SuperLogo 3.0, usado no curso da UFRGS – como vemos na Figura 4. A interface do programa apresenta uma Janela Gráfica onde se encontra a Tartaruga e uma Janela de Comandos onde se escrevem os comandos e procedimentos para comandá-la. A Janela de Comandos também serve para informar ao usuário problemas na programação como falta de informação necessária para um comando ou erros de escrita nos comandos ou nas informações adicionais necessárias para cada comando.

Figura 4 - Interface do programa SuperLogo 3.0



Fonte: Acervo pessoal

A chamada Geometria de Tartaruga é uma geometria *computacional*, assim como a Geometria Euclidiana é uma geometria *lógica* (PAPERT, 1988, p. 77). Na geometria Euclidiana, o ponto é um ente conceitual que não possui característica alguma a não ser sua posição: ele está ali, mas não possui tamanho, cor ou qualquer outra característica que o identifique. Este conceito abstrato pode ser muito difícil para uma pessoa não iniciada em Matemática entender. Na Geometria de Tartaruga, a própria Tartaruga é um ente como o ponto de Euclides, porém muito mais associável a algo real e conhecido para as crianças. A Tartaruga, assim como o ponto, possui uma posição e, além disso, possui outras características; uma delas – e possivelmente a mais importante delas – é sua orientação. Ela representa a direção para onde a Tartaruga está voltada e para onde ela vai andar quando, por exemplo, o usuário usa o comando PARAFRENTE. Papert afirma que esta ideia facilita a identificação do nosso ente com algo palpável como um barco ou avião, que possuem posição e orientação, ou o próprio corpo do aluno.

> As crianças podem *identificar-se* com a Tartaruga e, no processo de aprender geometria formal, são assim capazes de usar

> o conhecimento sobre seu próprio corpo e de como ele se move. (PAPERT, 1988, p. 78)

Assim, para construir um quadrado, por exemplo, o aluno pode imaginar-se caminhando sobre os lados de um quadrado e transcrever para a Tartaruga, com a linguagem apropriada, exatamente o que ele faria com seu corpo. Uma possível construção em Logo para um quadrado é:

PARAFRENTE 100

PARADIREITA 90

PARAFRENTE 100

PARADIREITA 90

PARAFRENTE 100

PARADIREITA 90

PARAFRENTE 100

PARADIREITA 90

Programas que usam a linguagem Logo possuem comandos que facilitam a programação e possibilitam diversos recursos mais elaborados. Um exemplo simples e que serve ao propósito de deixar a programação para a construção do quadrado mais enxuta é o comando REPITA. Tal comando exige como informação adicional um número – que representa o número de repetições – e uma lista de comandos a serem repetidos. Assim, a programação de um quadrado poderia ser também feita da seguinte forma:

REPITA 4 [PARAFRENTE 100 PARADIREITA 90]

Esta construção pode ser salva pelo usuário para ser usada na construção de outras figuras. Assim, cria-se um *procedimento*. Programas que usam Logo permitem ao usuário abrir janelas de edição de procedimentos para criar novos procedimentos ou alterar procedimentos já existentes. Para ensinar para a Tartaruga um novo procedimento, usa-se o comando APRENDA seguido de um nome para o procedimento. Seguindo o exemplo do quadrado, podemos ensinar o procedimento QUADRADO para a Tartaruga da seguinte forma:

APRENDA QUADRADO

REPITA 4 [PARAFRENTE 100 PARADIREITA 90]

FIM

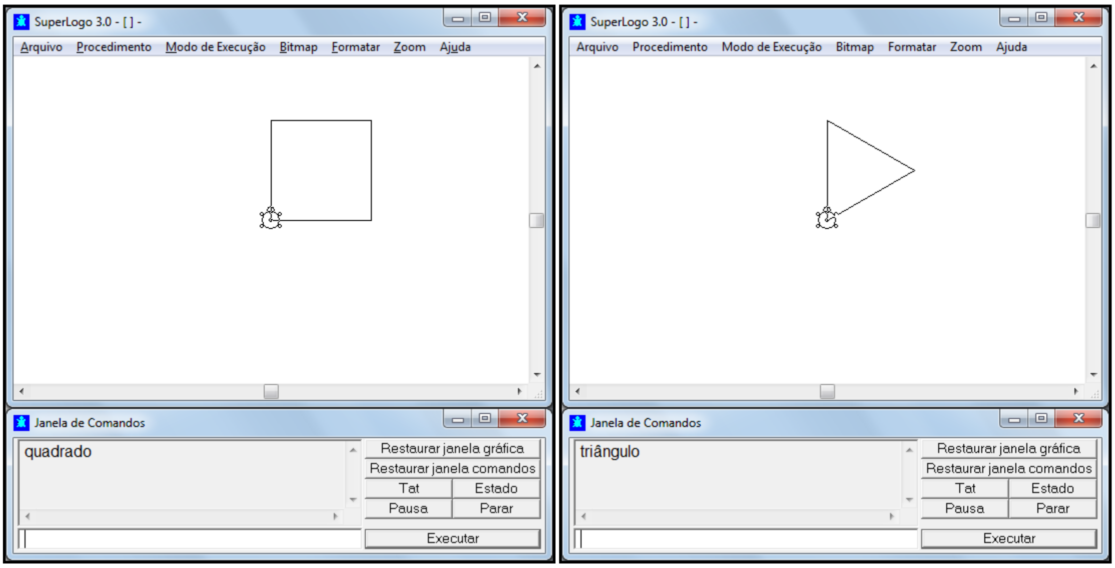
A partir da criação do procedimento QUADRADO, pode-se usar na Janela de Comandos a palavra QUADRADO e a Tartaruga automaticamente realiza todos os comandos contidos dentro de QUADRADO, como mostra a Figura 5. A criação de procedimentos permite ao aluno dividir seus projetos em partes menores – subprocedimentos – para alcançar o objetivo final desejado. Por exemplo, uma criança que desejasse ensinar a Tartaruga a desenhar uma casa, após tê-la ensinado o procedimento QUADRADO, poderia criar um procedimento TRIÂNGULO que desenhasse um triângulo equilátero para representar o teto desta casa.

APRENDA TRIÂNGULO

REPITA 3 [PARAFRENTE 100 PARADIREITA 120]

FIM

Figura 5 - Procedimentos QUADRADO e TRIÂNGULO



Fonte: Acervo pessoal

A criação desta casa então poderia ser ensinada para a Tartaruga através do procedimento CASA.

APRENDA CASA

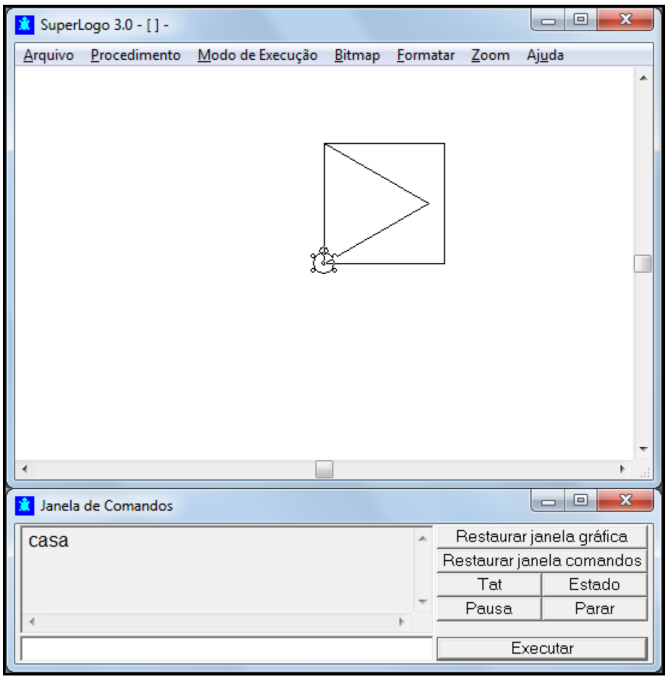
QUADRADO

TRIÂNGULO

FIM

Ao realizar este procedimento CASA o aluno, no entanto, repara que o triângulo está sobreposto ao quadrado, como mostra a Figura 6. Como consertar isto? A reposta para esta pergunta é o que Papert (1988, p. 82) chama de “brincar de Tartaruga": o aluno põe-se no lugar da Tartaruga e percorre a sequência de comandos que deveria fazer com seu próprio corpo para desenhar uma casa, comparando esta sequência com o que foi ensinado à Tartaruga, procurando identificar o erro e corrigi-lo. Papert vê este processo com um benefício ao estudante: errar não é algo a se condenar e sim um ponto para evoluir. O autor diz (1988, p. 85) que "numa aula de matemática típica, a reação da criança a uma resposta errada é tentar *esquecê-la* o mais rápido possível. No ambiente LOGO ela não é criticada por ter feito um erro ao desenhar". Pelo contrário, partindo de um erro, o aluno deve avaliar sua construção e por em prática seus conhecimentos matemáticos para encontrar e solucionar este erro na programação, testando e evoluindo este conhecimento a cada erro encontrado.

Figura 6 - Procedimento CASA, errado



Fonte: Acervo pessoal

Quando o aluno pensa na solução do problema, o método de tentativa, erro e reflexão sobre o erro é encorajado, propiciando cada vez mais o uso do conhecimento matemático do aluno para consertar cada pequeno erro até o resultado ser o desejado. Ao brincar de Tartaruga, o aluno eventualmente percebe que o triângulo deve ser posicionado "em cima" do quadrado, e levemente inclinado para a direita. Esta "virada para a direita" deve ser encontrada pelo aluno, usando e testando seus conhecimentos matemáticos. O aluno, por exemplo, percebendo que o ângulo interno do triângulo regular é $60°$, percebe que a virada necessária para a resolução do problema é o ângulo que completa um ângulo de 90° com este ângulo interno: 30°. Uma maneira então de corrigir o procedimento CASA é:

APRENDA CASA

QUADRADO

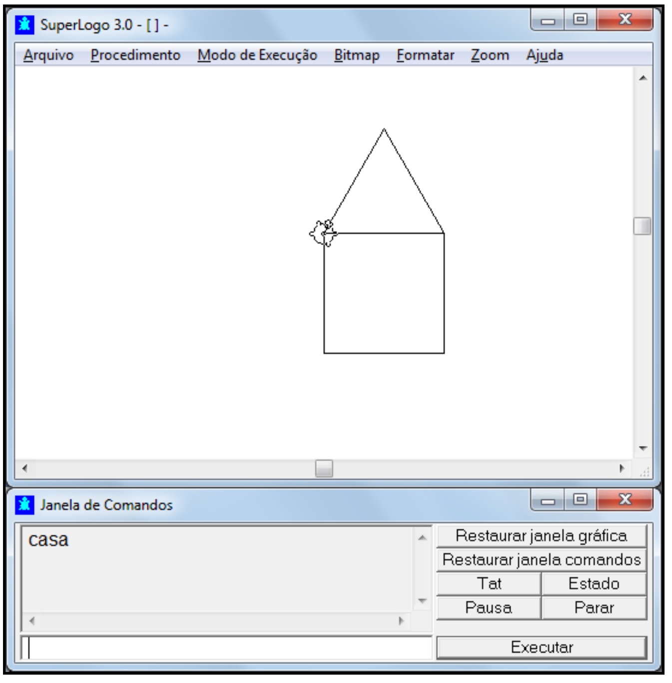
PARAFRENTE 100

PARADIREITA 30

TRIÂNGULO

FIM

Figura 7 - Procedimento CASA, corrigido



Fonte: Acervo pessoal

Outro recurso que a programação nos permite é o trabalho com variáveis. O que aconteceria se a criança quisesse fazer uma casa maior? Simples, ela poderia abrir a janela de edição de procedimentos e trocar todas as ocorrências de 100 – que indica o tamanho dos lados do quadrado e do triângulo equilátero – nos procedimentos QUADRADO, TRIÂNGULO e CASA por 200. Mas e se 200 fosse grande demais? Trocaríamos de novo o número 200 em todos os procedimentos por um número menor? Uma solução mais prática para este problema é o uso de variáveis. Ao criar-se um procedimento, o usuário pode escolher variáveis para este procedimento, representadas por uma palavra precedida pelo sinal gráfico de dois pontos. Esta variável pode então ser usada nos comandos dentro do procedimento e, quando o procedimento é utilizado na Janela de Comandos com um valor apropriado para esta variável, a Tartaruga automaticamente toma este valor para cada ocorrência desta variável. Vejamos como alteraríamos os procedimentos do exemplo para que funcionem com uma variável ":TAMANHO":

APRENDA QUADRADO :TAMANHO

REPITA 4 [PARAFRENTE :TAMANHO PARADIREITA 90]

FIM

APRENDA TRIÂNGULO :TAMANHO

REPITA 3 [PARAFRENTE :TAMANHO PARADIREITA 120]

FIM

APRENDA CASA :TAMANHO

QUADRADO :TAMANHO

PARAFRENTE :TAMANHO

PARADIREITA 30

TRIÂNGULO :TAMANHO

FIM

A partir desta edição, quando o aluno utiliza o procedimento CASA na Janela de Comandos, deve incluir ao lado da palavra CASA um valor apropriado para a variável :TAMANHO, ou seja, um número. Ao digitar então, por exemplo, CASA 150, a Tartaruga entende que todas as ocorrências de :TAMANHO devem ser tratadas como o número 150, implicando em um quadrado e um triângulo com lados de tamanho 150 (já que os procedimentos QUADRADO 150 e TRIÂNGULO 150 também substituirão cada ocorrência de :TAMANHO por 150).

A implementação de variáveis na programação Logo abre um leque de opções que permitem ao aluno trabalhar com diferentes áreas do conhecimento matemático. Acima de tudo, o aluno deve lembrar-se que muitas das variações no procedimento agora dependem desta variável. Uma porta poderia ser introduzida no desenho desta casa como um simples retângulo, mas as medidas desta porta deveriam depender da variável :TAMANHO, assim como as medidas da casa como um todo.

Até agora falamos da programação Logo usada para crianças, trabalhando com conceitos simples de geometria como medidas e ângulos, usando o exemplo de construir uma casa. Papert (1988, p. 87) afirma que “A geometria da Tartaruga foi especialmente projetada para ser algo que fizesse sentido às crianças, que tivesse alguma ressonância com o que elas acham que é importante”. No entanto, a programação Logo inclui elementos que vão muito além dos simples PARAFRENTE e PARATRÁS e que permitem o estudo de diversas áreas da Matemática, inclusive áreas reconhecidas pelos PCN como conhecimento a ser aprendido no Ensino Médio, como trigonometria num triângulo retângulo, semelhança e congruência na geometria plana, geometria espacial e até mesmo o estudo de funções.

A disciplina Computador na Matemática Elementar trabalha intensamente com polígonos regulares, relações trigonométricas e conceitos matemáticos muito utilizados em computação: processos iterativos e recursivos. Faz parte também do Plano de Ensino da disciplina o trabalho com Geometria Espacial, Lógica, Progressões Aritméticas e Geométricas, Lei dos Senos e Lei dos Cossenos e Recursão Múltipla para a construção de árvores binárias e fractais. Nesta análise, nos reteremos ao conhecimento dos alunos sobre relações trigonométricas no triângulo retângulo, Geometria de polígonos regulares e uso de variáveis para resolução de problemas, assuntos abordados nas primeiras semanas da disciplina.

2.2. Breve relato sobre o ensino de Geometria na Escola

Se pararmos para relembrar o que aprendemos sobre Geometria Plana na escola e como a aprendemos, veremos que esta parte da Matemática está praticamente banida do currículo escolar. Utilizamos como referência Barbosa (2003, p. 1), que, ao realizar uma pesquisa nas escolas, evidenciou exatamente este contexto supracitado:

> "fiz um levantamento do ensino da Geometria em nossos dias, da pré-escola até a 4ª série do ensino fundamental e pude verificar que os conteúdos de Geometria sempre são trabalhados no último bimestre do ano letivo. Existindo uma acumulação de matérias a serem dadas, os professores abandonam o ensino desta parte da Matemática, abrindo com isso uma grande lacuna no aprendizado do aluno, trazendo-lhe conseqüentemente grandes dificuldades posteriores"

Então, como foi ressaltado anteriormente, geralmente este conteúdo é trabalhado no final de cada ano com os alunos, isto quando sobra tempo para eles. Acreditamos que isto acontece porque os professores desconhecem tudo que o pensamento geométrico pode possibilitar aos alunos, isto é, uma visão mais abrangente de conceitos matemáticos que, por muitas vezes, são complexos, oferecendo uma visão mental sobre todo um mundo matemático. Como, por exemplo, segundo Barbosa (2003, p.1), o aprendizado da Geometria Plana pode desenvolver no aluno:

> - O entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição e seu raciocínio espaciais;
> - Desenvolver no aluno a capacidade de ler e interpretar argumentos matemáticos, utilizando a Geometria como meio para representar conceitos e as relações Matemáticas;
> - Proporcionar ao aluno meios de estabelecer o conhecimento necessário para auxiliá-lo no estudo de outros ramos da Matemática e de outras disciplinas, visando uma interdisciplinaridade dinâmica e efetiva;
> - Desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade.

Acreditamos também que um possível outro aspecto para o não ensino da Geometria deve-se aos professores sentirem-se despreparados, assim como afirma Barbosa (2003, p. 1): "(...) sentem-se inseguros, porque, às vezes, falta-lhes o preparo necessário e o desejo de tentar uma mudança para enfrentar um novo desafio: a reciclagem da sua postura didático-pedagógica".

E então, por exemplo, quando o aluno chega ao terceiro ano do Ensino Médio para trabalhar Geometria Espacial, conteúdo muito importante para a sua formação acadêmica, encontra muitas dificuldades em aprender; e não são dificuldades encontradas neste novo conteúdo, mas sim de todo antecedente a este conhecimento novo, pois como entender a Geometria Espacial sem ter uma boa base da Geometria Plana?

Muitos professores desconhecem o software SuperLogo e por isso não sabem todas as possibilidades de se trabalhar Geometria Plana e até Espacial com ele. Ao longo deste trabalho serão mostrados vários aspectos que são trabalhados na disciplina Computador na Matemática Elementar I, que utiliza este software não apenas como recurso, mas como ambiente de aprendizado, aspectos estes que poderiam ser facilmente aplicados no Ensino Básico a partir de uma nova perspectiva.

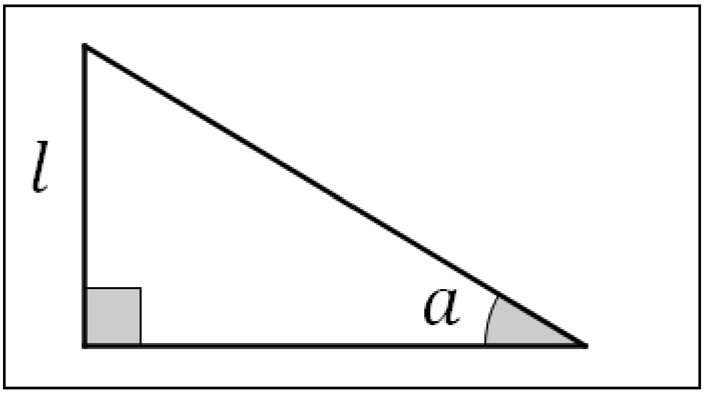
3. Procedimentos Metodológicos

Com o intuito de analisar a influência da linguagem Logo no conhecimento matemático dos alunos da disciplina de Computador na Matemática Elementar do segundo período letivo do ano de 2013, foi proposto a eles que resolvessem exercícios envolvendo conteúdos de Geometria e Trigonometria em dois momentos: no começo do período letivo – e, consequentemente, no início da vida acadêmica da grande maioria dos alunos – no dia 15 de Agosto, e aproximadamente no meio deste período, no dia 17 de Outubro, depois de terem contato com a linguagem durante dois meses.

Os exercícios nos dois momentos eram da mesma natureza – isto é, envolviam os mesmos conteúdos questão por questão, sendo a primeira questão do primeiro teste análoga à primeira questão do segundo teste em termos de conteúdo e assim por diante – e visavam testar o conhecimento matemático dos alunos nas áreas mencionadas acima antes e depois do contato com a linguagem Logo. Em ambos os momentos, os alunos foram apresentados a quatro problemas que focavam no raciocínio matemático trabalhado em sala de aula durante as aulas da disciplina.

A linguagem Logo permite ao usuário trabalhar com valores variáveis para poder generalizar uma construção de diversas maneiras. Durante as aulas de Computador na Matemática Elementar, os alunos são levados a trabalhar com esta generalização ao construírem figuras com qualquer tamanho, polígonos regulares com qualquer número de lados, triângulos retângulos com qualquer ângulo agudo, etc. Por exemplo, em um exercício de aula os alunos deveriam criar um procedimento que construísse um triângulo retângulo com um lado de tamanho variável (l) e um ângulo também variável (a), como na Figura 8.

Figura 8 - Exercício em aula com elementos variáveis



Fonte: Acervo pessoal

Os alunos devem perceber que, sendo a um ângulo variável livre, o terceiro ângulo no triângulo deve variar de acordo com ele, fazendo dele uma variável dependente cuja "fórmula" é $90° - a$.

O mesmo exemplo também serve para trabalhar com outro conceito matemático muito enfatizado na disciplina: a relação trigonométrica entre os lados de um triângulo retângulo. Neste exercício, o cateto oposto ao ângulo dado é também uma variável livre e o cateto adjacente a este ângulo e a hipotenusa do triângulo possuem tamanhos desconhecidos que variam de acordo com o tamanho l e o ângulo a. Partindo da definição das relações trigonométricas, os alunos devem encontrar as relações $\frac{l}{\operatorname{tg} a}$ e $\frac{l}{\operatorname{sen} a}$ para o cateto e para a hipotenusa, respectivamente. O programa calcula automaticamente o valor de $\operatorname{sen} a$ (ou qualquer outra função trigonométrica) para qualquer valor a (em graus), exigindo dos alunos apenas o conhecimento da relação entre os lados.

Partindo destes princípios de generalização, os alunos trabalham constantemente com polígonos regulares de n lados de tamanho genérico l, nos quais aprendem a generalizar itens como ângulo interno, ângulo externo, raio de uma circunferência inscrita e raio de uma circunferência circunscrita para quaisquer valores numéricos de n e l.

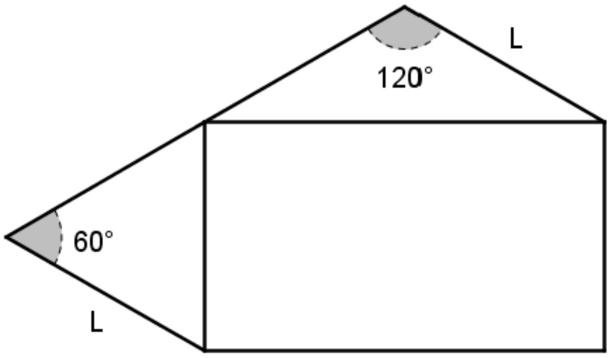
As questões propostas nos dois testes (Apêndices A e B) aos alunos nos momentos inicial e final desta análise envolviam estes três conceitos fortemente trabalhados na disciplina: generalização com variáveis, relações trigonométricas em triângulos retângulos e a geometria dos polígonos regulares. Além disso, os alunos deveriam perceber quando era possível aplicar tais conhecimentos e, nos casos em que faltavam dados para tanto, identificar o que era necessário para a continuação do raciocínio, encontrando um resultado final em função desta(s) informação(ões) adicional(is).

Analisemos cada uma das questões dos dois testes apresentados à turma:

3.1. Teste 1

Figura 9 - Exercício 1 do primeiro teste

Na figura ao lado, os segmentos indicados têm uma medida L. Com os dados fornecidos, é possível calcular a área do retângulo? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



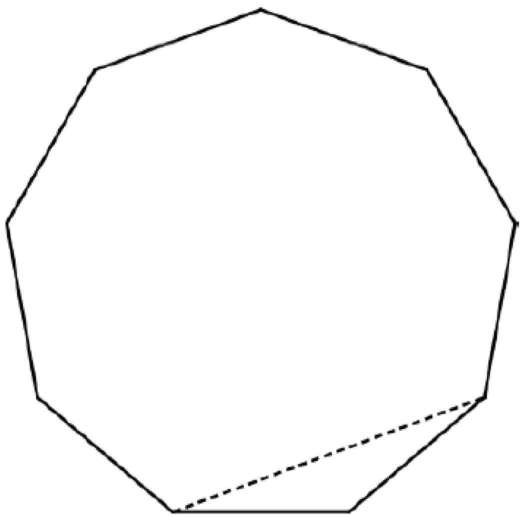
Fonte: Acervo pessoal

No primeiro teste, a primeira questão (Figura 9) envolvia o uso de trigonometria para determinar a área de um quadrilátero definido como um retângulo. No entanto, as informações contidas no enunciado e/ou na figura não eram suficientes para a resolução do problema. Para que se pudesse ser utilizado o raciocínio trigonométrico, um triângulo retângulo deveria ser identificado na situação. A maneira mais previsível e esperada era que os alunos presumissem que ambos os triângulos na figura fossem isósceles. Assim, teríamos triângulos retângulos ao dividirmos tais triângulos isósceles ao longo de suas alturas, podendo relacionar os lados do retângulo com o lado de medida L dado via seno ou cosseno dos ângulos $30°$ ou $60°$.

A resposta esperada, usando este raciocínio, era $L^2\sqrt{3}$.

Figura 10 - Exercício 2 do primeiro teste

A figura ao lado representa um polígono regular de 9 lados, cujos lados medem L, e uma de suas menores diagonais, pontilhada. Com os dados fornecidos, é possível calcular o comprimento dessa diagonal? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

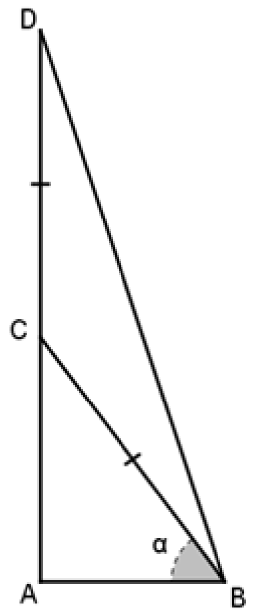


Fonte: Acervo pessoal

Na questão 2 (Figura 10), os alunos eram instigados a trabalhar com um polígono regular de 9 lados. Este era então apenas o caso para $n = 9$ dos polígonos generalizados com os quais os alunos viriam a trabalhar durante a disciplina. Para encontrarem o comprimento da menor diagonal deste polígono, os alunos deveriam perceber que seu ângulo interno é $140°$ e encontrar um triângulo retângulo ao dividir o triângulo isósceles criado por dois lados do polígono e esta diagonal. Tal triângulo retângulo teria ângulos internos de $20°$ e $70°$, os quais os alunos poderiam utilizar para relacionar o comprimento do ângulo para com a diagonal, utilizando a relação trigonométrica apropriada. Não era esperado dos alunos que soubessem o valor de $\operatorname{sen} 70°$ ou $\cos 20°$, apenas deixando-o indicado.

Figura 11 - Exercício 3 do primeiro teste

Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



Fonte: Acervo pessoal

A terceira questão do teste (Figura 11) exigia que os alunos generalizassem um ângulo de um triângulo partindo de certas informações e um ângulo a dado. No entanto, nenhuma informação era dada sobre o ângulo $\hat{A}$, mesmo que o raciocínio mais esperado era de que os alunos presumissem que tal ângulo era reto. Seguindo esta linha de raciocínio podemos encontrar os valores de todos os ângulos da figura em função de a e o ângulo $A\hat{B}D$ é dado por $45° + \frac{a}{2}$. Esta suposição, no entanto, não era necessária, podendo o aluno tratar o ângulo $\hat{A}$ como uma variável livre, chegando ao resultado $90° + \frac{a}{2} - \frac{\hat{A}}{2}$.

Figura 12 - Exercício 4 do primeiro teste

Seja uma circunferência de raio R. Qual a razão entre o lado de um triângulo regular inscrito nessa circunferência e o lado de um quadrado inscrito nessa circunferência?

Fonte: Acervo pessoal

A quarta e última questão (Figura 12), desprovida de figura, visava estimular o raciocínio geométrico dos alunos sem se basear num desenho previamente estabelecido, deixando-os visualizar a imagem como lhes vinha à cabeça. Como seria trabalhado mais adiante com eles, em um polígono regular é sempre possível construir um triângulo retângulo unindo-se o centro deste polígono, um de seus vértices e o ponto médio de um lado adjacente a este vértice. Com este triângulo pode-se então relacionar o lado do polígono com o raio de uma circunferência inscrita ou circunscrita a ele, usando relações trigonométricas com a metade do ângulo interno do polígono ou metade do ângulo central.

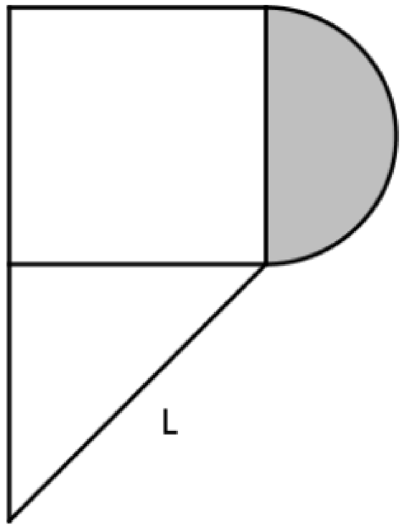
Assim, usando este raciocínio no caso do triângulo, encontramos $L_3 = 2R * \cos 30° = 2R * \operatorname{sen} 60° = R\sqrt{3}$ e, no caso do quadrado, encontramos $L_4 = 2R * \cos 45° = 2R * \operatorname{sen} 45° = R\sqrt{2}$, onde L_3 e L_4 representam os lados do triângulo e do quadrado, respectivamente. Temos então a razão $\frac{L_3}{L_4} = \frac{R\sqrt{3}}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3.2. Teste 2

As questões do segundo teste, aplicado dois meses após o primeiro, envolviam o mesmo conteúdo deste com questões similares às dele. Analisemos cada questão do segundo teste a seguir:

Figura 13 - Exercício 1 do segundo teste

Na figura ao lado, o segmento indicado tem uma medida L. Com os dados fornecidos, é possível calcular a área da semicircunferência? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



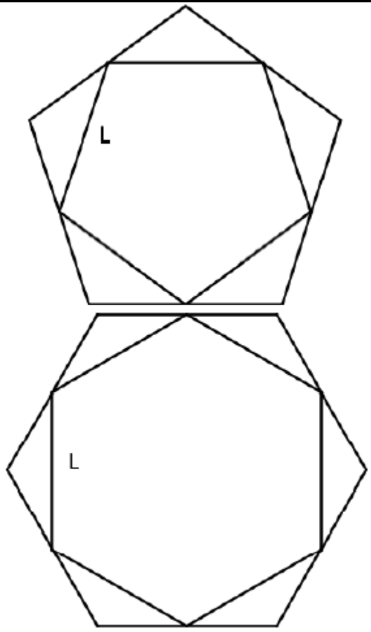
Fonte: Acervo pessoal

A primeira questão (Figura 13) apresentava uma figura e algumas informações contidas nesta figura ou no enunciado do exercício que, assim como as informações na questão análoga a esta no primeiro teste, não eram suficientes para resolver o exercício. Os alunos eram instigados a informar que tipo de informação adicional era necessária para a resolução deste e encontrar a solução em função destas informações.

A forma mais esperada de resolução era que os alunos presumissem que o quadrilátero na figura era de fato um quadrado (implicando que o triângulo é reângulo) e que o triângulo ali representado era isóscele. Tal presunção nos levaria a um cálculo relativamente fácil usando a trigonometria com o ângulo de $45°$ ou o Teorema de Pitágoras. A resposta esperada assim era então $A = \frac{\pi L^2}{16}$ ou $A = \frac{\pi (L * \text{sen } 45°)^2}{8}$, onde A representa a área da semicircunferência.

Figura 14 - Exercício 2 do segundo teste

A figura ao lado representa um pentágono e um hexágono regulares cujos lados medem L, inscritos em um pentágono e um hexágono regulares, respectivamente. Com os dados fornecidos, é possível calcular a razão entre o lado do pentágono circunscrito e do hexágono circunscrito? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

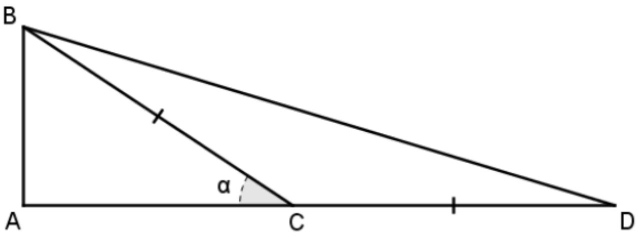


Fonte: Acervo pessoal

Na segunda questão deste teste (Figura 14), os alunos deviam novamente trabalhar com a geometria dos polígonos regulares, desta vez os casos específicos para $n = 5$ e $n = 6$, pentágono e hexágono, respectivamente, onde n representa o número de lados do polígono regular. Novamente um triângulo isóscele podia ser encontrado na figura de cada polígono unindo-se um vértice deste e o ponto médio de cada lado adjacente a este vértice. Consequentemente, um triângulo retângulo podia ser encontrado em cada polígono para encontrar a relação trigonométrica $L_5 = \frac{L}{\text{sen } 54°}$ e $L_6 = \frac{L}{\text{sen } 60°} = \frac{2L}{\sqrt{3}}$, onde L_5 e L_6 representam os lados do pentágono circunscrito e do hexágono circunscrito, respectivamente. Temos então a razão $\frac{L_5}{L_6} = \frac{\sqrt{3}}{2 * \text{sen } 54°}$. A única informação necessária para os alunos, agora, seria o valor de $\text{sen}\, 54°$, que, embora calculável, tal cálculo é extremamente inviável, e deveria ser deixado indicado.

Figura 15 - Exercício 3 do segundo teste

Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



Fonte: Acervo pessoal

A questão 3 deste teste (Figura 15) envolve uma analogia direta da questão 3 do primeiro teste (Figura 11), ambas exigindo o mesmo conhecimento para achar o valor de um ângulo $A\hat{B}D$ em figuras pouco diferentes uma da outra. Assim como esta, aquela não dá ao aluno informações sobre o ângulo $\hat{A}$, e este deve então presumir que a medida de tal ângulo é uma variável desconhecida ou um ângulo reto. Presumindo $\hat{A} = 90°$ temos então $A\hat{B}D = 90° - \frac{a}{2}$ e, da outra maneira, temos $A\hat{B}D = 180° - \hat{A} - \frac{a}{2}$.

Figura 16 - Exercício 4 do segundo teste

Seja uma circunferência de raio R e um polígono regular de 18 lados inscrito nessa circunferência. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do tamanho do lado desse polígono? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

A quarta e última questão deste teste (Figura 16) não apresenta figura, assim como sua análoga no primeiro teste. Partindo apenas da descrição no enunciado, os alunos devem visualizar mentalmente o problema e achar a melhor maneira de solucioná-lo sem se basear na figura previamente dada, que pode nos levar a erros se não for analisada com cuidado.

Assim como na última questão do primeiro teste, os alunos deveriam perceber que o triângulo formado unindo-se o centro do polígono, um de seus vértices e o ponto médio de um lado adjacente a este vértice é retângulo e pode ser usado para relacionar trigonometricamente o lado do polígono com o raio da circunferência circunscrita a ele (caso que nos interessa aqui). Usando-se metade do ângulo interno do polígono ou metade do ângulo central do polígono, chegamos à relação $L = 2R * \cos 80°$ ou $L = 2R * \operatorname{sen} 10°$, onde L representa o lado do polígono regular. Como em outras questões de ambos os testes, a única informação adicional necessária para os alunos seria a do valor de $\cos 80°$ ou $\operatorname{sen} 10°$, que poderia ser perfeitamente indicado assim.

4. Análise e Discussão dos dados

No dia 15 de Agosto, quarenta e um alunos da disciplina de Computador na Matemática Elementar do período letivo de 2013/2 realizaram o primeiro teste proposto à turma por mim e, dois meses mais tarde, no dia 17 de Outubro, trinta e dois alunos desta mesma turma realizaram o segundo dos testes nesta prática. Destes, cinco não haviam comparecido no primeiro teste e, daqueles, catorze não estavam presentes no dia do segundo teste. Assim, para análise dos resultados obtidos nesta pesquisa, foram considerados os testes dos vinte e sete alunos que responderam aos dois testes propostos.

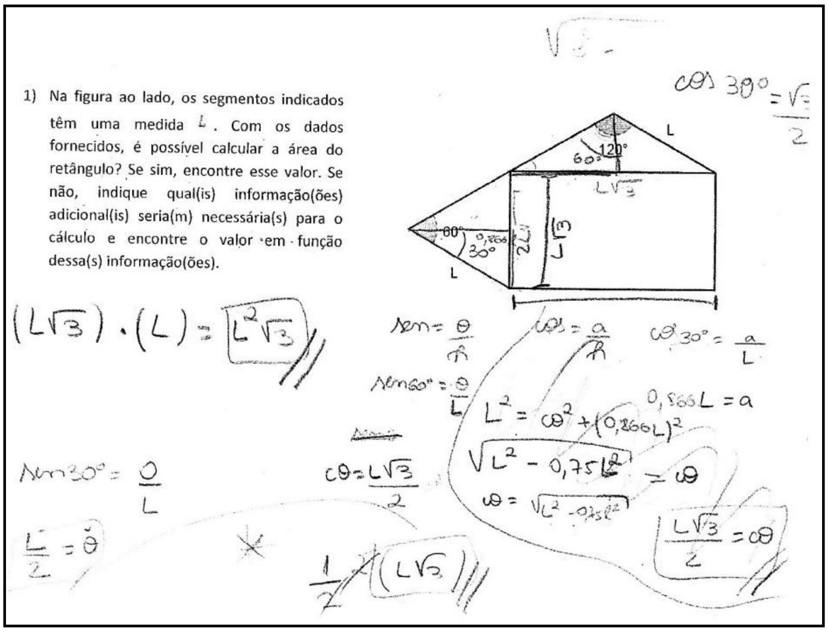
Para análise qualitativa dos resultados obtidos, sete alunos foram escolhidos devido ao desempenho apresentado em cada um dos testes. Estes alunos serão doravante referidos por alunos A, B, C, D, E, F e G. Estes sete indivíduos foram escolhidos por apresentarem melhorias significativas no segundo teste em relação ao primeiro, como veremos a seguir, relativas aos assuntos estudados em sala de aula durante estes dois meses de contato com a linguagem de programação Logo.

Analisaremos, simultaneamente, as soluções das questões do primeiro e segundo teste de cada aluno, realçando seu desempenho nos dois testes, através da análise das estratégias de solução utilizadas, intercalando alunos para mostrar os diferentes métodos de desenvolvimento, os diferentes conceitos matemáticos abordados e os avanços de cada aluno, mostrando como diferentes conceitos matemáticos podem ser utilizados para resolver um mesmo problema.

4.1. Questão 1

Comecemos então pela primeira questão do primeiro teste do aluno A.

Figura 17 - Teste 1, Questão 1, Aluno A



Fonte: Acervo pessoal

Podemos ver, a partir do desenvolvimento da questão (Figura 17), que o conceito de relações trigonométricas em triângulos retângulos, normalmente introduzido no Ensino Médio foi utilizado pelo aluno A que, embora tenha se confundido durante o desenvolvimento de seu raciocínio, chegou à solução esperada para o problema. Notemos que o aluno A usou uma aproximação para o valor de $\cos 30° \cong 0{,}866$ possivelmente retirada de alguma calculadora. O mesmo valor também foi registrado como $\frac{\sqrt{3}}{2}$, conhecimento usual– e correto – normalmente trabalhado no Ensino Médio.

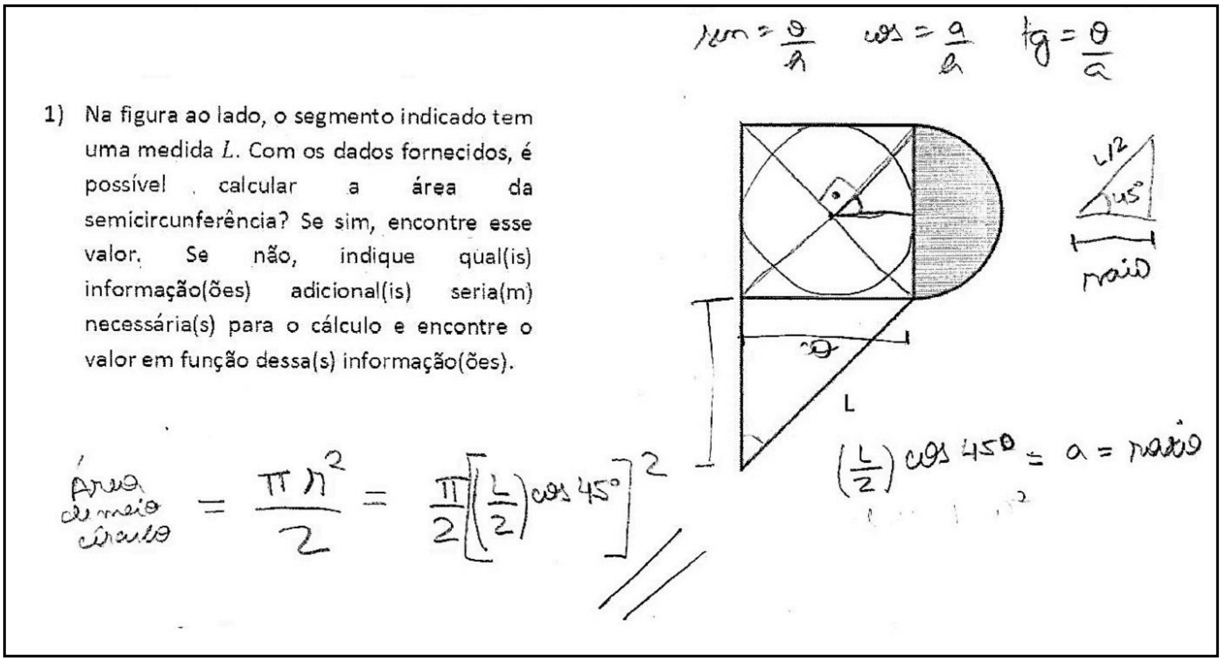
Podemos perceber que o aluno A, durante o desenvolvimento da questão, não percebeu que $0{,}866$ não é realmente o valor de $\cos 30°$, usando-o como se a igualdade $\cos 30° = 0{,}866$ fosse válida, sem indicar, em momento algum, que esta é apenas uma aproximação da função trigonométrica cosseno de $30°$. Este erro pode decorrer do ensino básico do aluno, pois, segundo Lopes (2007, p. 24):

> “Baseados nas idéias de Bakhtin podemos dizer que uma das razões que podem justificar as dificuldades de compreensão dos textos dos problemas pelos alunos é a falta de domínio de um determinado gênero discursivo - e de seu contexto de circulação por não terem tido muito contato com ele ou, mesmo, por desconhecê-lo.”

Quanto às informações omitidas no enunciado do problema, podemos perceber que, embora não tenham sido explicitadas em momento algum pelo aluno

A, todas as suposições necessárias para o desenvolvimento da questão foram feitas: presumiu que as alturas relativas de ambos os triângulos coincidiam com as bissetrizes dos ângulos indicados, implicando na decomposição dos triângulo da figura em dois triângulos congruentes, garantindo que ambos são isósceles.

Figura 18 - Teste 2, Questão 1, Aluno A



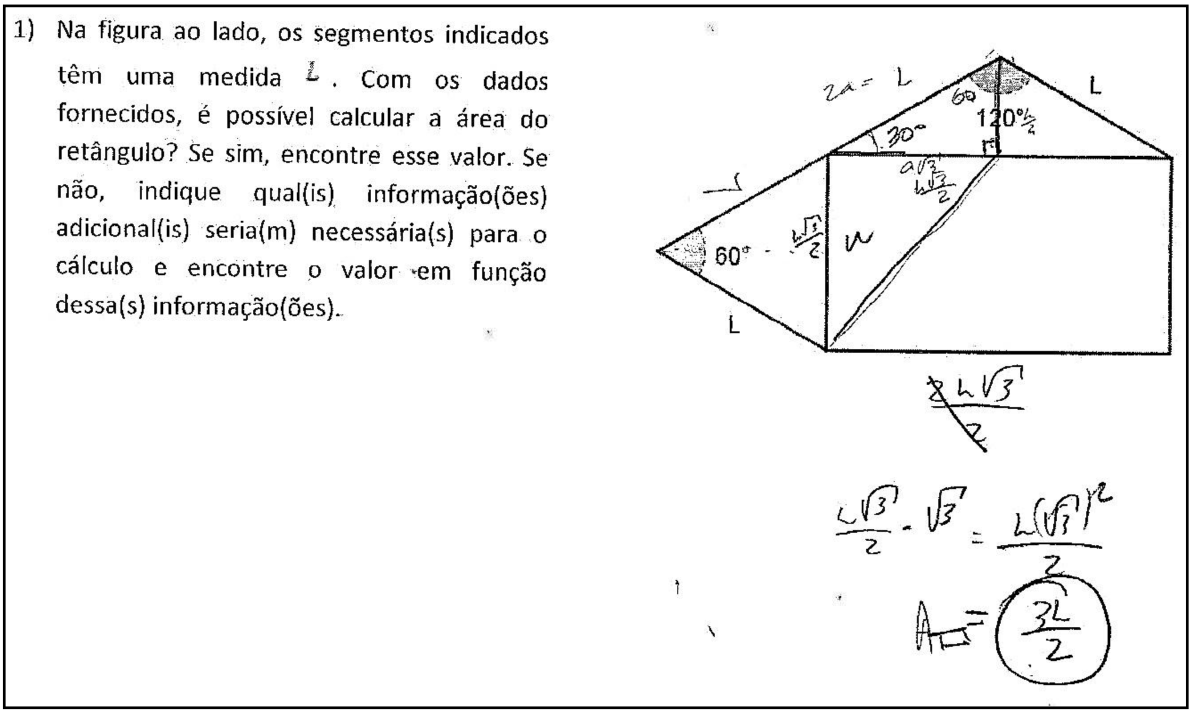
Fonte: Acervo pessoal

Embora o aluno A tenha apresentado um raciocínio correto e solucionado o problema, podemos notar uma significativa melhoria na aplicação dos conceitos matemáticos, se comparados com a solução da primeira questão do segundo teste (Figura 18). Novamente as suposições foram feitas implicitamente pelo aluno. Percebendo que o lado indicado de comprimento L era congruente à diagonal do quadrado, o aluno A identificou um triângulo retângulo isóscele e calculou o raio da circunferência em função de L, usando a relação $\cos 45°$. Note que este raciocínio só é possível se admitirmos que o quadrilátero da figura é, de fato, um quadrado e o triângulo é isóscele e retângulo.

A melhoria supracitada pode ser percebida, principalmente, pelo cálculo sucinto apresentado ao lado da figura pelo aluno, diferente do ocorrido no primeiro teste. Isto reflete segurança no momento de solucionar o problema, dando indícios de que os conceitos matemáticos utilizados foram mais bem compreendidos pelo aluno A.

Analisemos, agora, as soluções do aluno B, apresentadas na Figura 19:

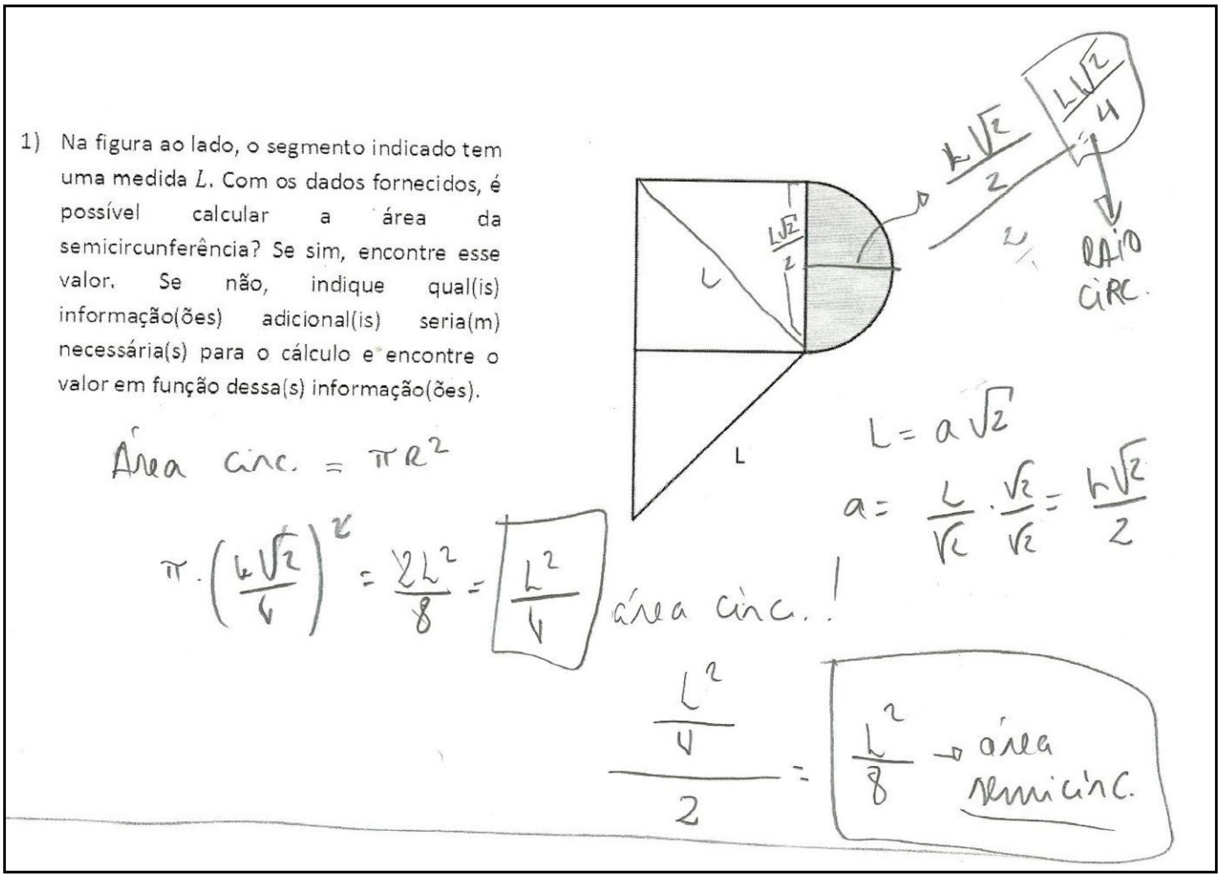
Figura 19 - Teste 1, Questão 1, Aluno B



Fonte: Acervo pessoal

Notemos que as mesmas suposições acerca dos triângulos da figura foram tomadas: a altura relativa coincidindo com a bissetriz de cada triângulo e este sendo então isóscele. No entanto, o aluno B aparentemente encontra relações entre L e os lados do retângulo usando trigonometria, mas sem mencionar e explicitar as relações trigonométricas utilizadas. Um leve erro foi cometido no cálculo, que acarretou no resultado final diferente do esperado: no triângulo com ângulo indicado $60°$, suposto isóscele, o terceiro lado deveria também medir L, já que, com estas suposições, tal triângulo seria de fato equilátero. No entanto, o aluno B, possivelmente trocando a relação trigonométrica seno pela relação cosseno, chegou erroneamente à conclusão de que o lado desconhecido media $\frac{L\sqrt{3}}{2}$. O erro na resposta final é coerente com este pequeno descuido.

Figura 20 - Teste 2, Questão 1, Aluno B

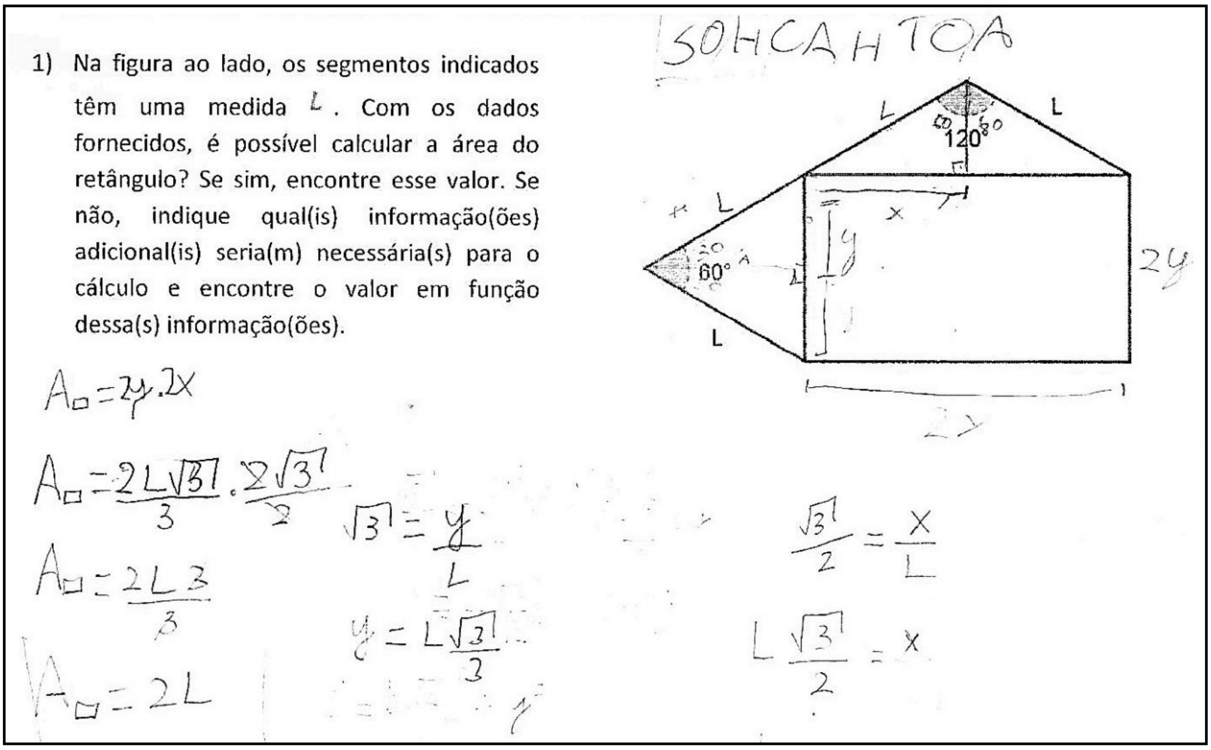


Fonte: Acervo pessoal

Na solução da primeira questão do teste 2 (Figura 20), o aluno B, assim como o aluno A, identificou uma congruência entre o segmento de comprimento L e a diagonal do quadrilátero e chegou à conclusão correta de que o raio da circunferência mede $\frac{L\sqrt{2}}{4}$. Entretanto, o processo utilizado pelo aluno para chegar à tal conclusão é um método utilizado por muitos alunos desde o Ensino Médio: decora-se que, num quadrado, a relação da diagonal d deste quadrado com seu lado l é sempre $d = l\sqrt{2}$. O aluno B cometeu erro no cálculo da área da semicircunferência, embora tenha usado a fórmula correta. Estes erros serão desconsiderados, pois fogem do propósito desta análise.

Não podemos, contudo, afirmar que houve uma melhora no conhecimento trabalhado na disciplina durante estes dois meses, visto que o aluno B não utilizou o raciocínio esperado com as relações trigonométricas na solução desta questão.

Figura 21 - Teste 1, Questão 1, Aluno C



1) Na figura ao lado, os segmentos indicados têm uma medida L. Com os dados fornecidos, é possível calcular a área do retângulo? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

SOHCAHTOA

$A_{\square} = 2y \cdot 2x$

$A_{\square} = \frac{2L\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$A_{\square} = \frac{2L3}{3}$

$A_{\square} = 2L$

$\sqrt{3} = \frac{y}{L}$

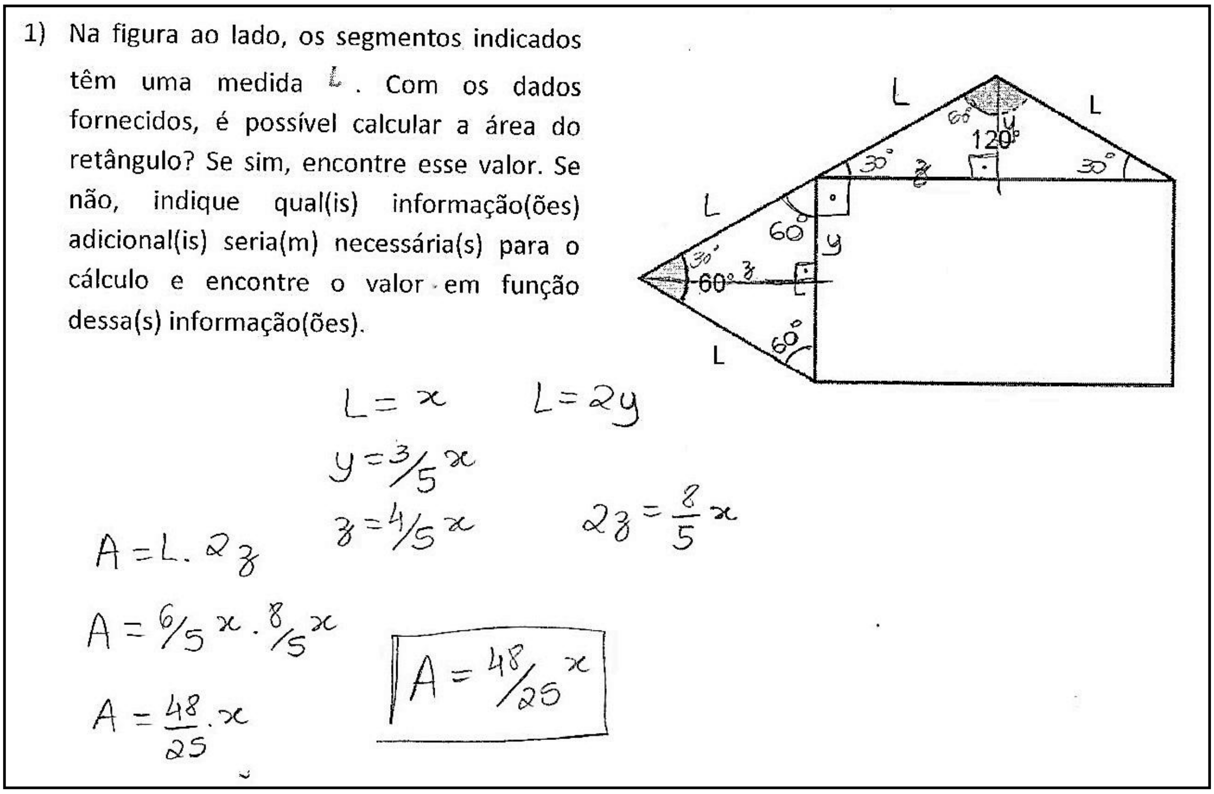
$y = \frac{L\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{L}$

$L\frac{\sqrt{3}}{2} = x$

Fonte: Acervo pessoal

Figura 22 - Teste 1, Questão 1, Aluno D



1) Na figura ao lado, os segmentos indicados têm uma medida L. Com os dados fornecidos, é possível calcular a área do retângulo? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

$L = x \qquad L = 2y$

$y = 3/5\,x$

$z = 4/5\,x \qquad 2z = \frac{8}{5}x$

$A = L \cdot 2z$

$A = 6/5\,x \cdot 8/5\,x$

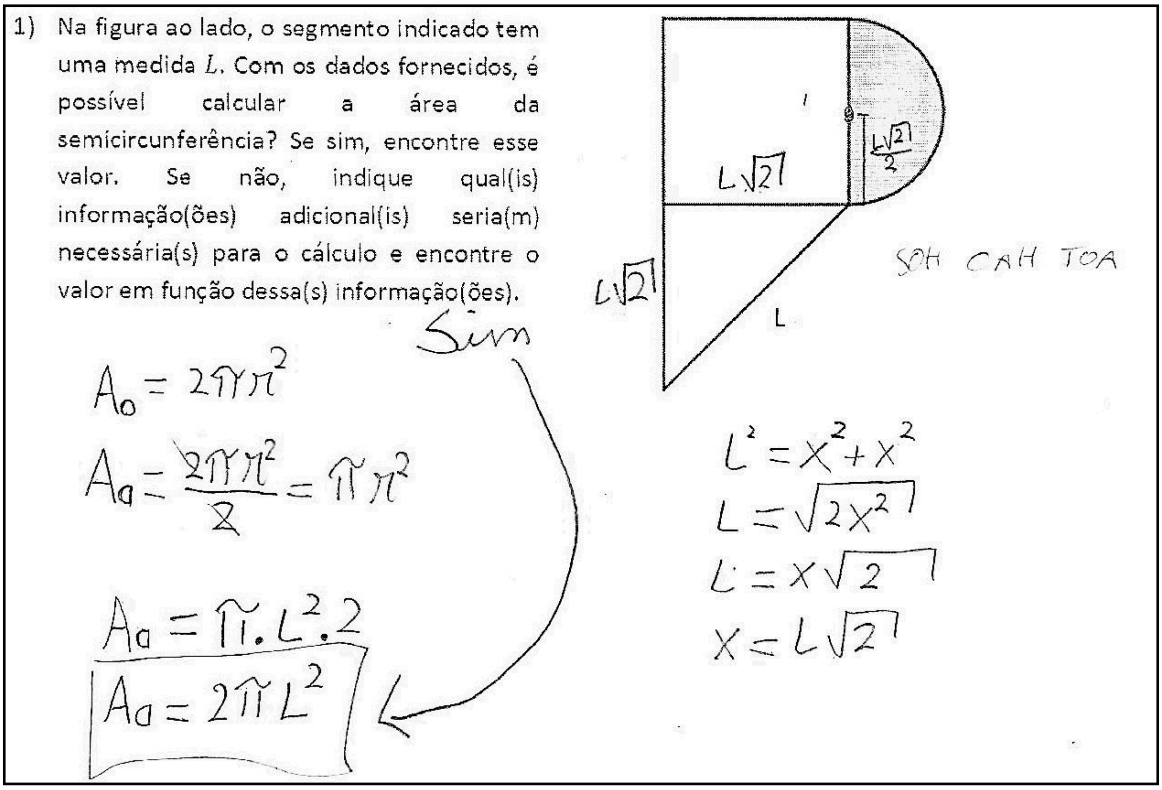
$A = \frac{48}{25} \cdot x$

$\boxed{A = 48/25\,x}$

Fonte: Acervo pessoal

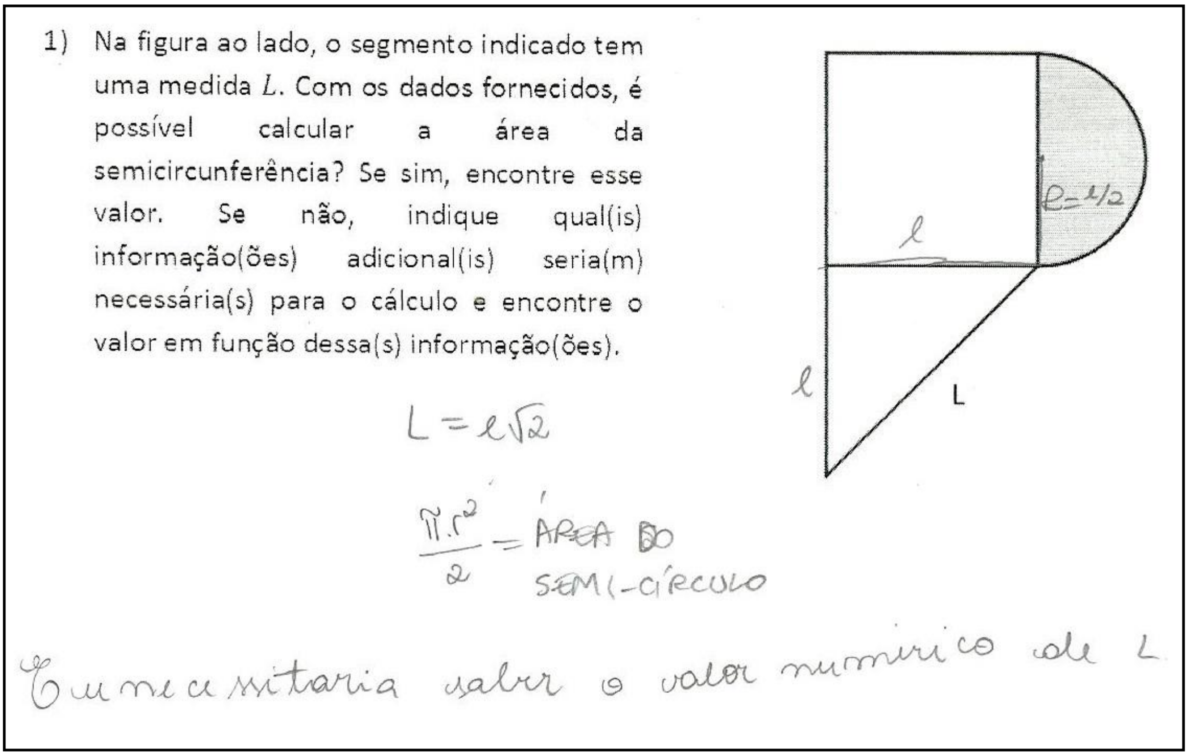
Analisando simultaneamente as resoluções da questão 1 do primeiro teste dos alunos C e D (Figuras 21 e 22, respectivamente), percebemos que ambos usaram as mesmas hipóteses (esperadas), sem mencioná-las diretamente, e ambos cometeram erros na relação entre L e os lados procurados: o aluno C (Figura 21) errou na equação $\sqrt{3} = \frac{y}{L}$ ao considerar $sen\,30° = \sqrt{3}$, tendo sua resposta final coerente com este erro. O aluno D (Figura 22) apresentou confusão em seus cálculos, que derivaram do uso de frações para as relações entre os lados dos triângulos retângulos. Estas frações não têm fundamento aparente: não foi possível identificar o raciocínio que as originou, sendo uma possibilidade o triângulo retângulo pitagórico de lados com medidas 3, 4 e 5.

Figura 23 - Teste 2, Questão 1, Aluno C



Fonte: Acervo pessoal

Figura 24 - Teste 2, Questão 1, Aluno D



1) Na figura ao lado, o segmento indicado tem uma medida L. Com os dados fornecidos, é possível calcular a área da semicircunferência? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

$L = \ell\sqrt{2}$

$\frac{\pi . r^2}{2}$ = ÁREA DO SEMI-CÍRCULO

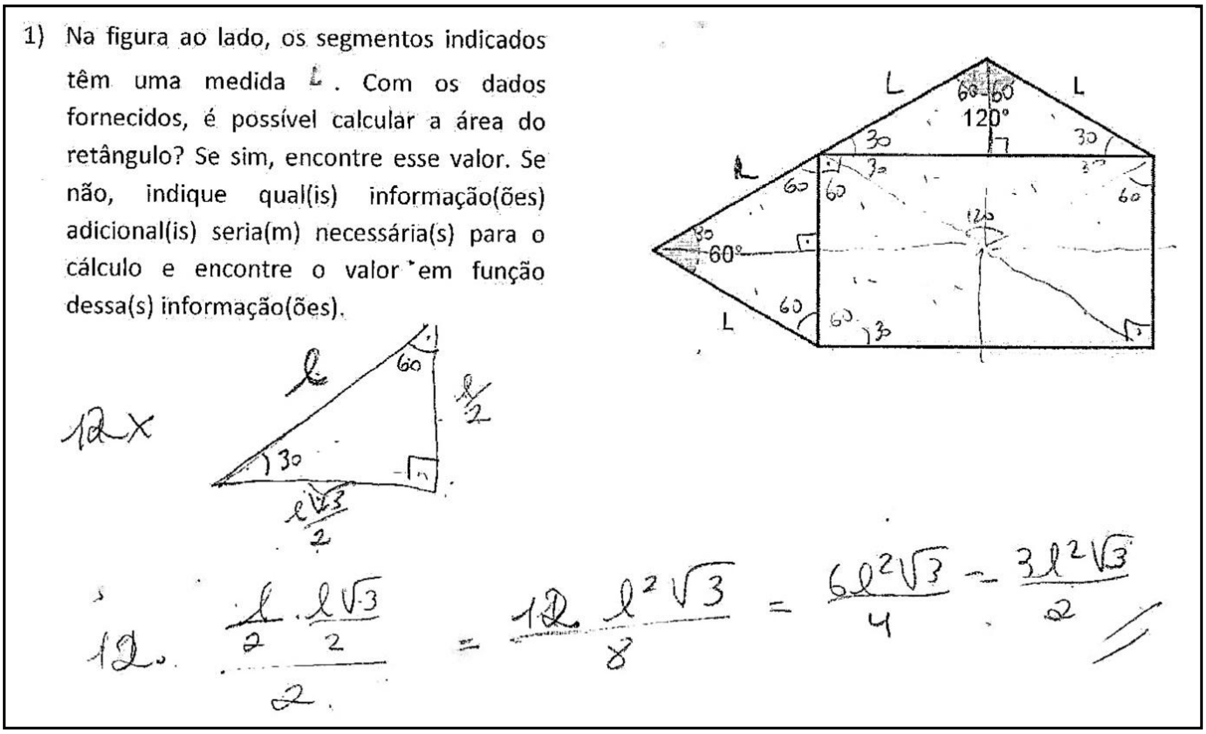
Eu necessitaria saber o valor numérico de L

Fonte: Acervo pessoal

Com uma mesma análise da questão 1 do segundo teste destes dois alunos (Figuras 23 e 24, respectivamente), notamos que o mesmo método usado pelo aluno B (de memorizar a relação entre o lado de um quadrado e a diagonal deste) é usado pelo aluno D. Desconsiderando-se os pequenos erros nos cálculos do aluno C, temos resultados coerentes com as hipóteses tomadas por ambos os alunos.

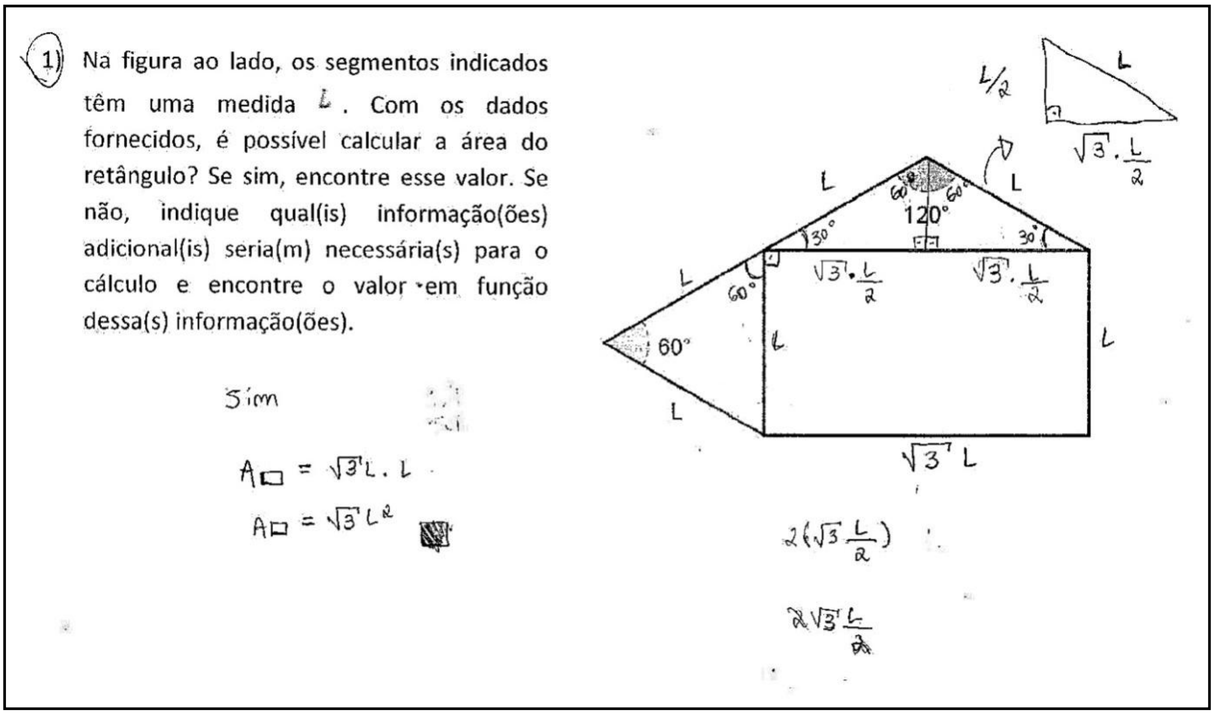
No segundo teste, os alunos C e D optaram por usar o Teorema de Pitágoras para encontrar a relação entre L e a medida do lado do triângulo retângulo isóscele – e consequentemente o raio da semicircunferência – e, por isso, não podemos verificar uma influência do conteúdo matemático trabalhado na disciplina durante estes dois meses.

Figura 25 - Teste 1, Questão 1, Aluno E



Fonte: Acervo pessoal

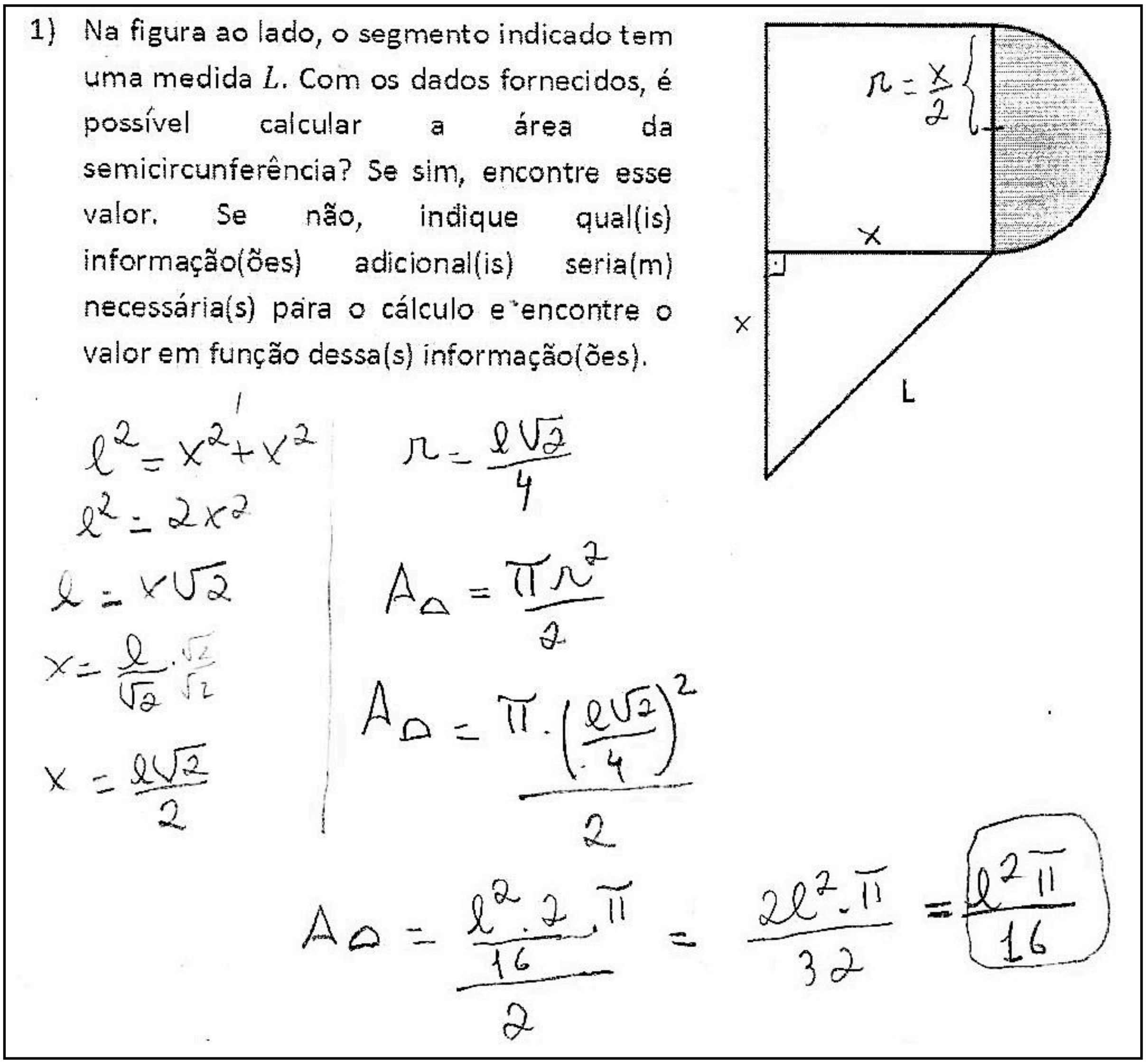
Figura 26 - Teste 1, Questão 1, Aluno F



Fonte: Acervo pessoal

Os alunos E e F, assim como os demais aqui analisados, presumiram todas as hipóteses necessárias para o uso de trigonometria no primeiro exercício do teste 1 (Figuras 25 e 26, respectivamente). No entanto, vale notar que ambos usaram a imagem de um triângulo retângulo com os ângulos $30°$ e $60°$ e as relações da hipotenusa de tamanho L com os catetos corretas, mas sem nunca mencionar qualquer função trigonométrica. Este triângulo contém ângulos muito trabalhados durante o Ensino Médio e é fonte de uma estratégia usada por alguns alunos em que, assim como o caso da diagonal do quadrado, memoriza-se a relação proporcional dos lados do triângulo sem usar propriamente alguma relação trigonométrica. Desconsiderando-se um pequeno equívoco do aluno E – que calculou a área de toda a figura ao invés da área do retângulo – ambos os alunos chegaram ao resultado esperado para esta questão.

Figura 27 - Teste 2, Questão 1, Aluno E

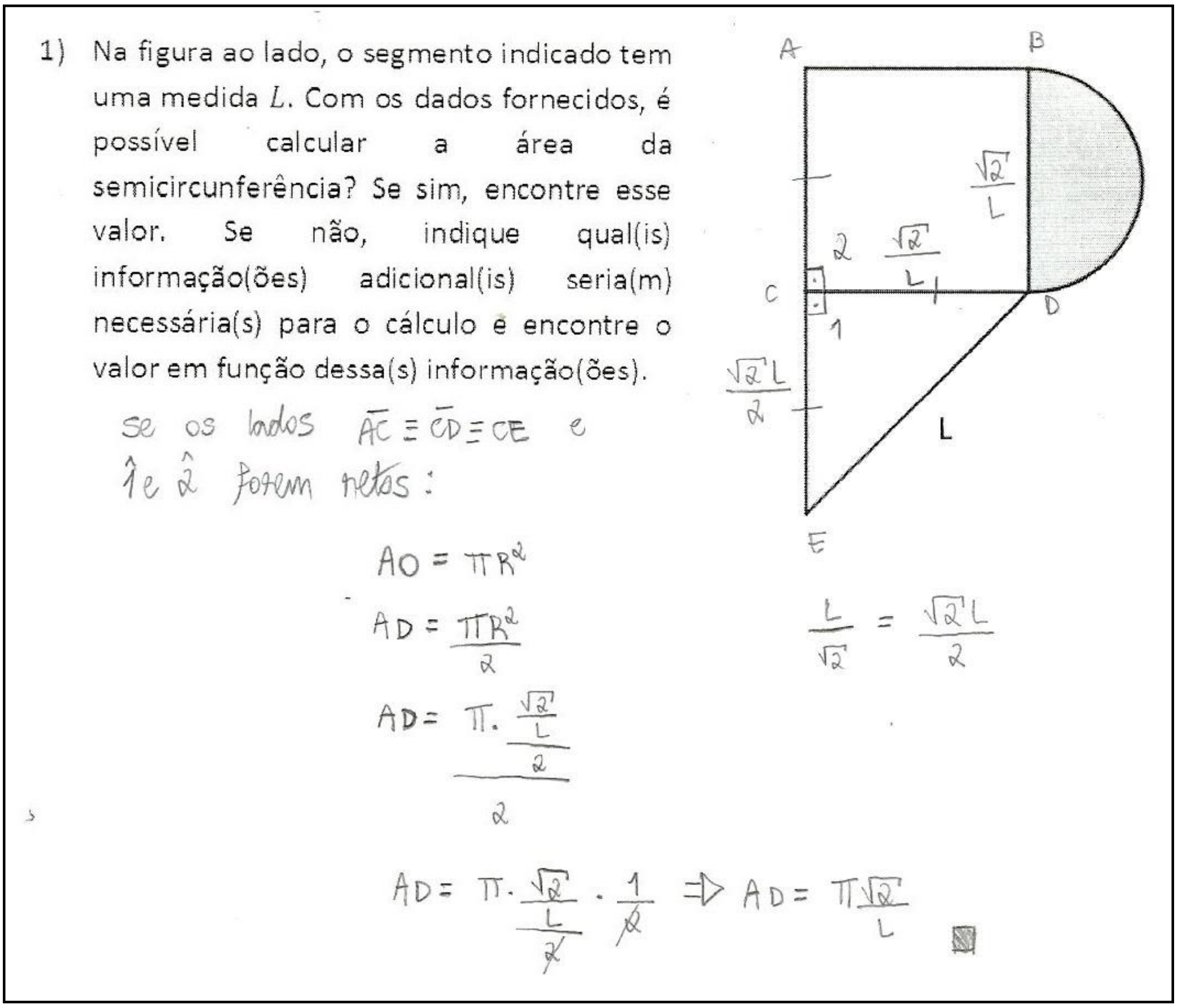


Fonte: Acervo pessoal

Na questão 1 do segundo teste (Figura 27), podemos perceber que o aluno E, partindo das mesmas hipóteses esperadas, usou o Teorema de Pitágoras ao invés de uma relação trigonométrica para encontrar a medida do raio da semicircunferência em função de L. O resultado final, evidentemente, não foi alterado por este raciocínio.

Esta opção, assim como com os alunos C e D, não nos permite avaliar uma melhoria no conhecimento matemático analisado no teste do aluno E.

Figura 28 - Teste 2, Questão 1, Aluno F

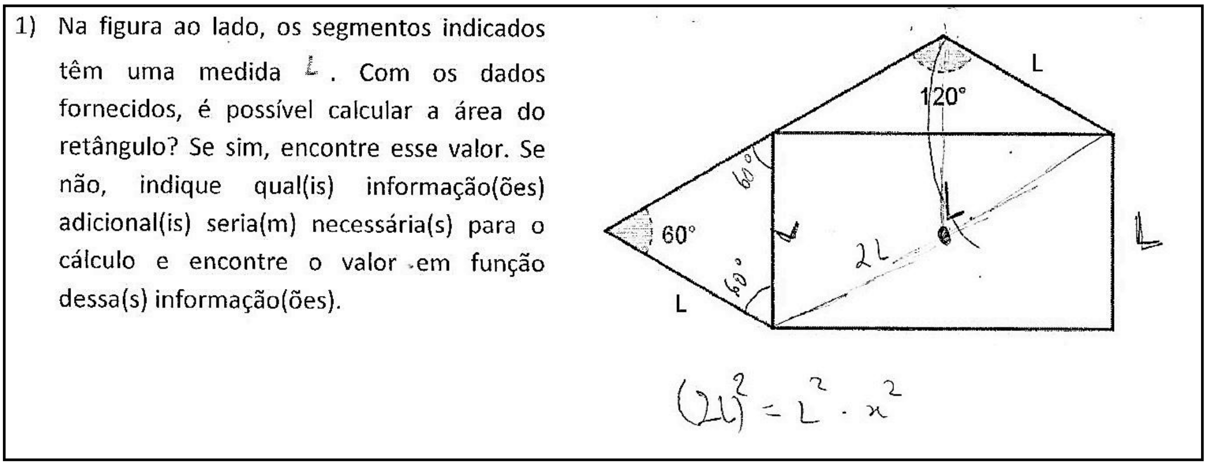


Fonte: Acervo pessoal

A resolução desta mesma questão pelo aluno F apresenta, pela primeira vez de forma explícita, as hipóteses consideradas, como mostra a Figura 28. O aluno, diferentemente do primeiro teste, nomeou os vértices da figura e os ângulos de interesse e conjecturou hipóteses necessárias sobre segmentos e ângulos para posteriormente realizar o cálculo e encontrar a relação entre L e o raio procurado.

Embora não tenha utilizado explicitamente relações trigonométricas, podemos identificar como um avanço do aluno F o uso de hipóteses necessárias para que o problema pudesse ser solucionado. Este raciocínio matemático não é, porém, foco principal da disciplina de Computador na Matemática Elementar e não pode ser completamente atribuído à experiência do aluno nesta disciplina.

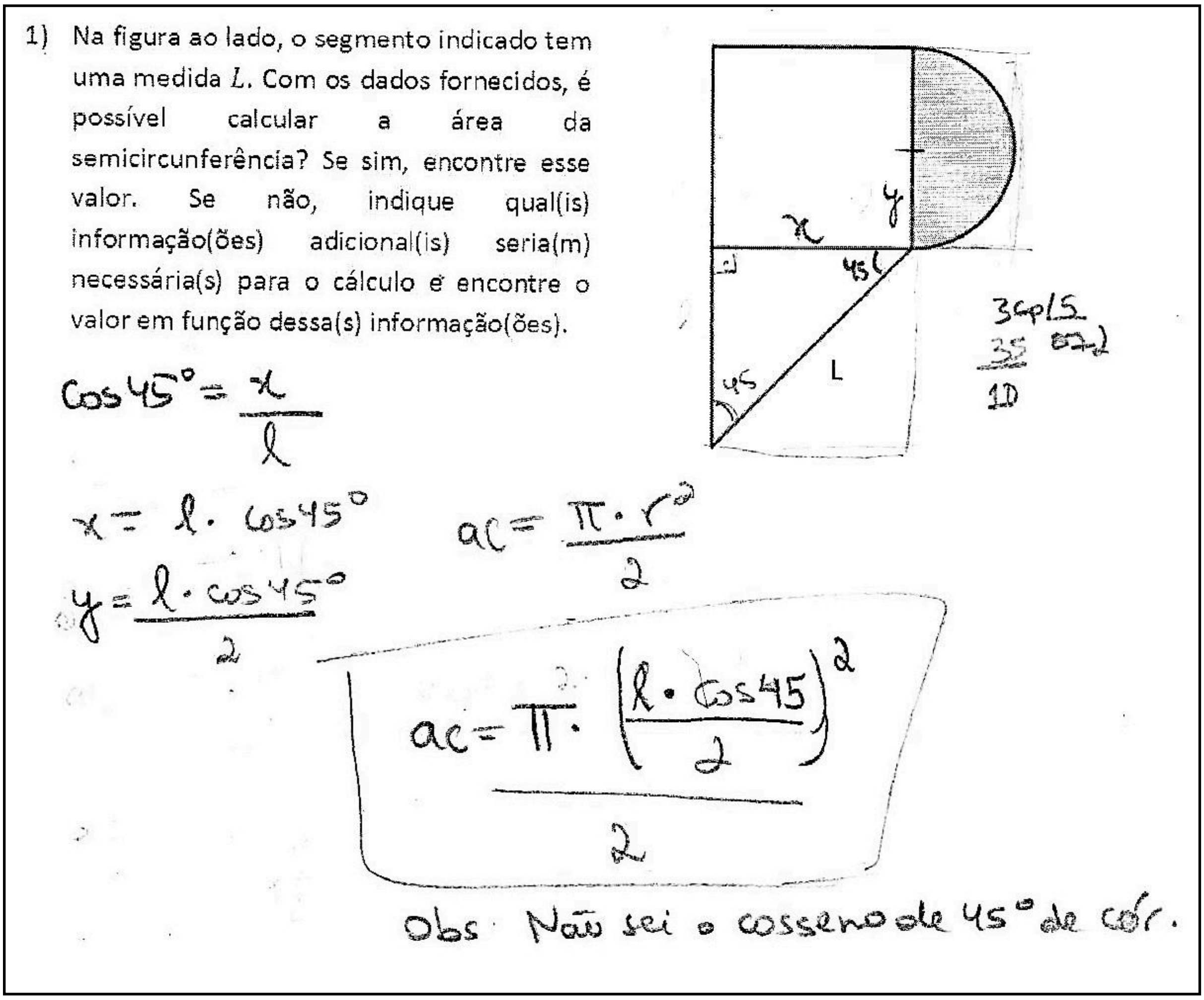
Figura 29 - Teste 1, Questão 1, Aluno G


1) Na figura ao lado, os segmentos indicados têm uma medida L. Com os dados fornecidos, é possível calcular a área do retângulo? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

$(2L)^2 = L^2 \cdot x^2$

Fonte: Acervo pessoal

Figura 30 - Teste 2, Questão 1, Aluno G


1) Na figura ao lado, o segmento indicado tem uma medida L. Com os dados fornecidos, é possível calcular a área da semicircunferência? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

$\cos 45^\circ = \frac{x}{l}$

$x = l \cdot \cos 45^\circ$

$y = \frac{l \cdot \cos 45^\circ}{2}$

$ac = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

$ac = \frac{\pi \cdot \left(\frac{l \cdot \cos 45}{2}\right)^2}{2}$

Obs. Não sei o cosseno de 45° de cór.

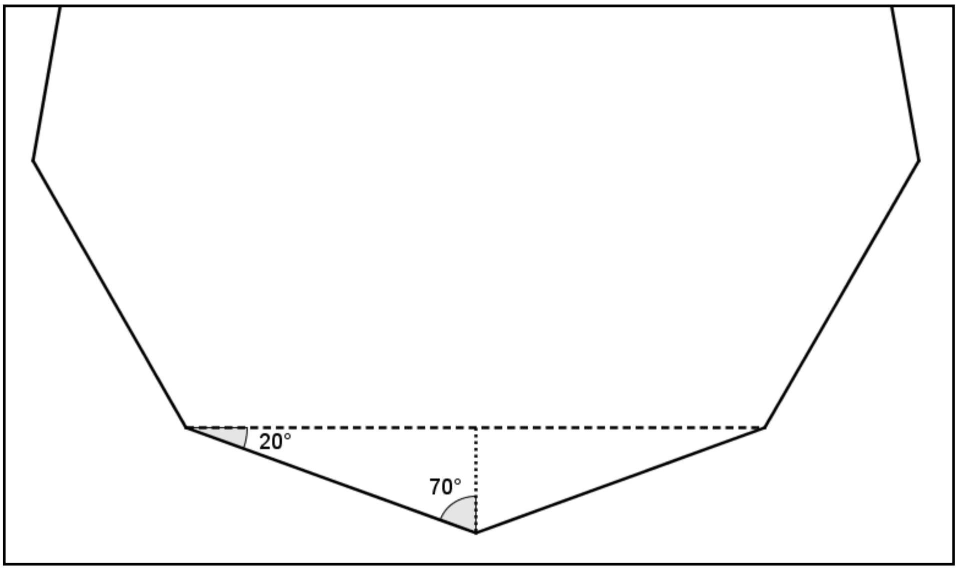
Fonte: Acervo pessoal

O primeiro teste do aluno G foi entregue sem solução, como mostra, no caso da primeira questão, a Figura 29. Suas poucas tentativas de solução para os problemas não avançaram. Entretanto, é importante destacar a evolução desse aluno nesses dois meses de experiência com a linguagem Logo. Sua resolução da questão 1 do teste 2 é impecável, como mostra a Figura 30. Presumindo que o triângulo na figura é isóscele e retângulo, ele encontrou a relação entre L e o comprimento dos lados congruentes desse triângulo usando o valor de $\cos 45°$, deixando explícito não lembrar deste valor, o que é coerente com sua experiência na disciplina já que, ao utilizarmos a linguagem Logo, os cálculos de funções trigonométricas são automaticamente calculados pelo programa, cabendo aos alunos apenas o esforço de estabelecer as relações trigonométricas, como o aluno G fez nesse problema. Desta forma, parece que as experiências vivenciadas na disciplina refletiram no desenvolvimento da questão proposta.

4.2. Questão 2

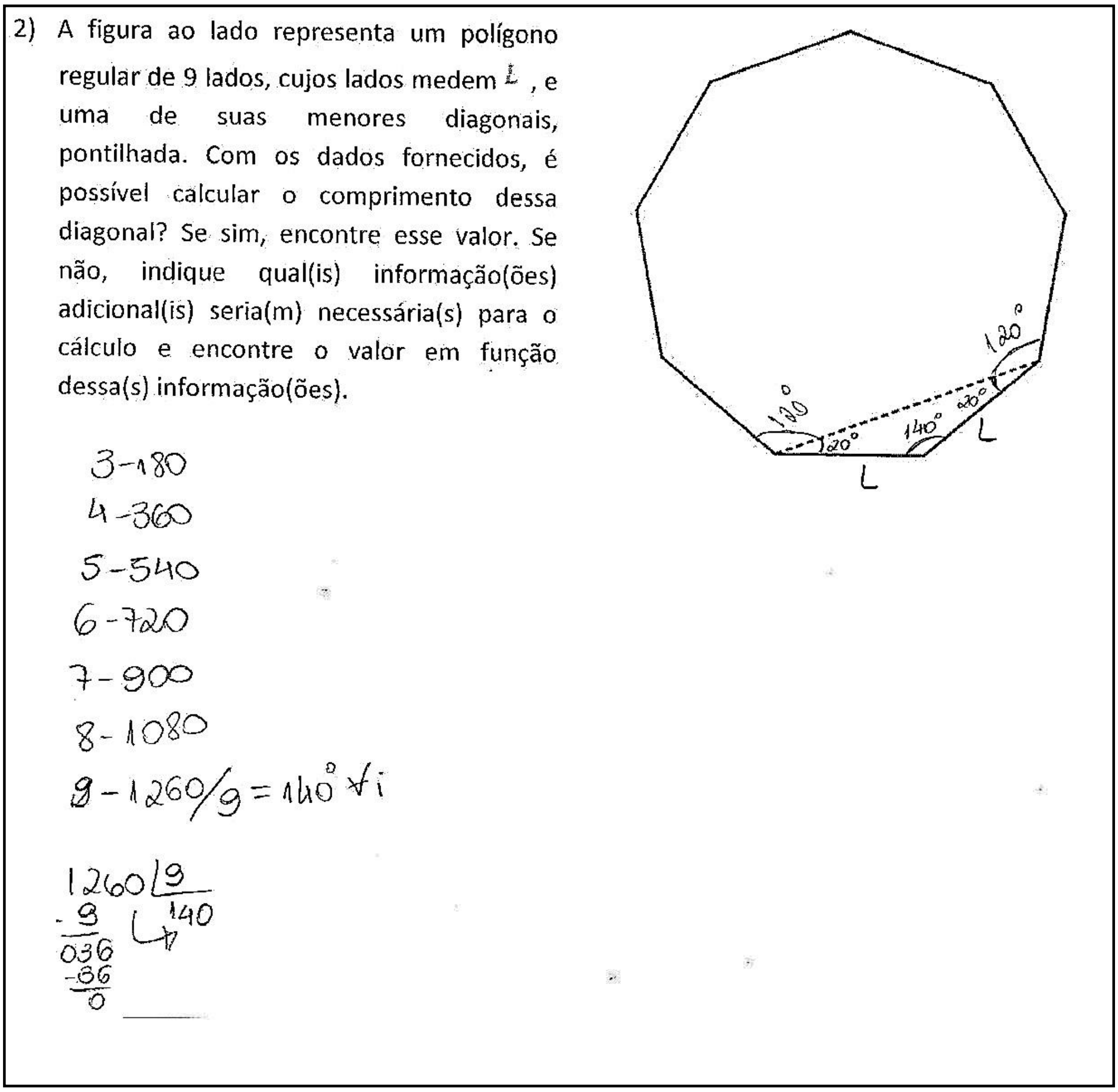
A questão 2, em ambos os testes, exigia dos alunos conhecimentos sobre a geometria de polígonos regulares de maneira geral, sabendo identificar triângulos retângulos em suas decomposições para aplicar relações trigonométricas que permitem encontrar as medidas procuradas em função do valor dado. Era importante também que os alunos soubessem identificar e trabalhar com os ângulos de um polígono regular, tais como ângulo externo, interno, central, etc. O primeiro teste abordava apenas o eneágono regular – polígono regular de nove lados –, apresentado no enunciado e na figura do problema. Esta questão exigia que os alunos, primeiramente, encontrassem um dos ângulos necessário para o cálculo, para então usá-lo em um triângulo retângulo que relacionasse o lado dado com a diagonal procurada ou, nesse caso, a metade dela. Este ângulo poderia ser metade do ângulo interno do eneágono regular – de medida $70°$ – ou seu complementar – de medida $20°$ – para ser usado no triângulo retângulo formado por dois vértices do polígono e a projeção ortogonal de um desses vértices sobre a diagonal que une os vértices adjacentes a ele. A Figura 31 ilustra esta situação.

Figura 31 - Resolução do exercício 2 do teste 1



Fonte: Acervo pessoal

Figura 32 - Teste 1, Questão 2, Aluno D



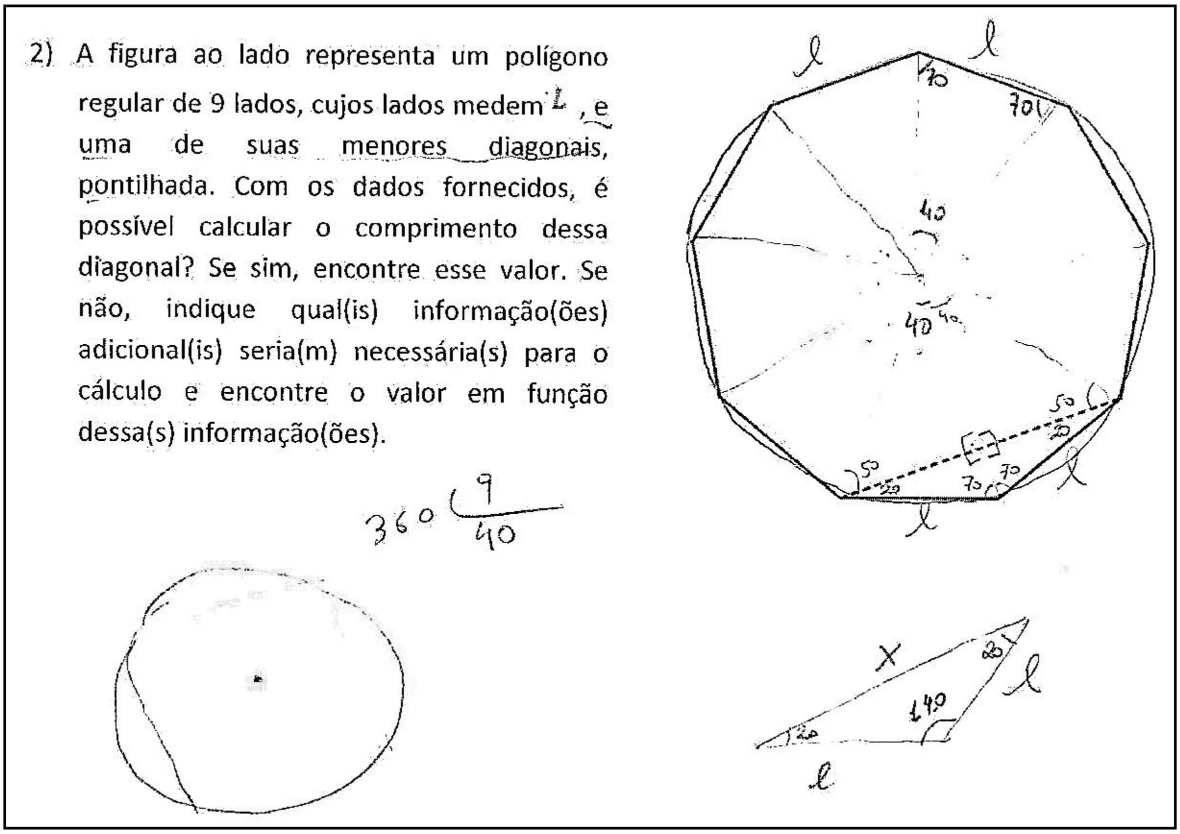
2) A figura ao lado representa um polígono regular de 9 lados, cujos lados medem L, e uma de suas menores diagonais, pontilhada. Com os dados fornecidos, é possível calcular o comprimento dessa diagonal? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

3-180
4-360
5-540
6-720
7-900
8-1080
9-1260/9=140° ∀i

1260 | 9
-9   140
036
-36
0

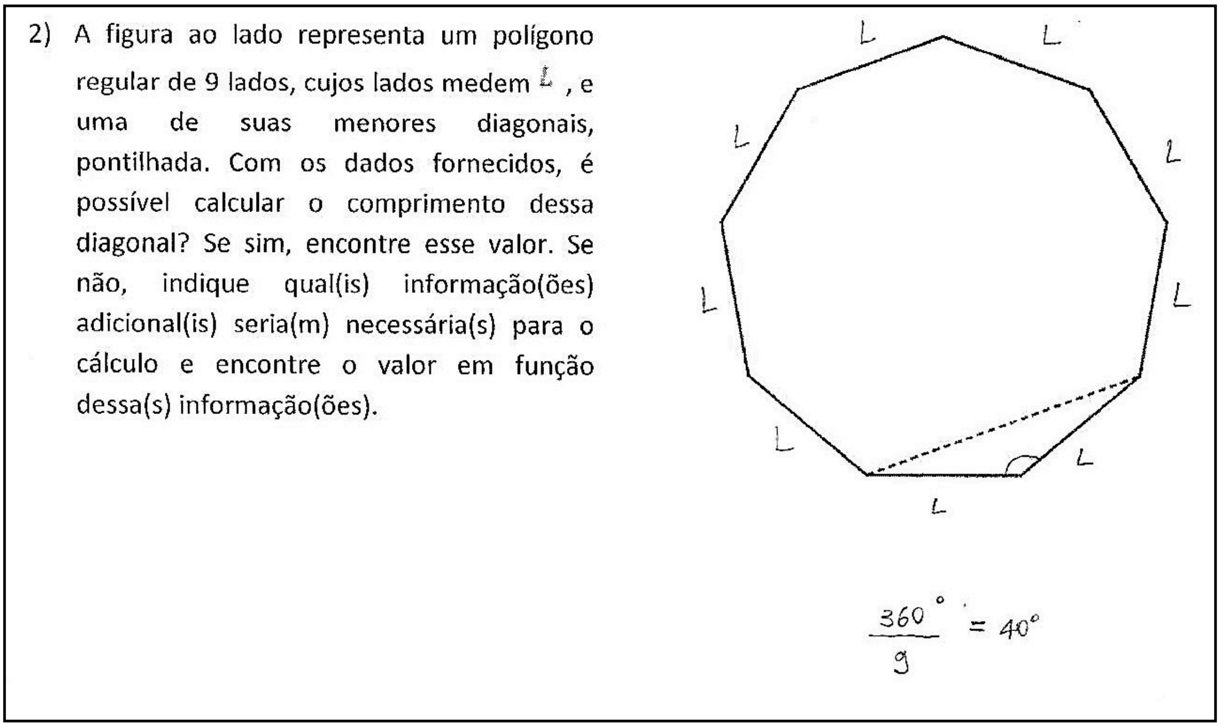
Fonte: Acervo pessoal

Figura 33 - Teste 1, Questão 2, Aluno E


2) A figura ao lado representa um polígono regular de 9 lados, cujos lados medem L, e uma de suas menores diagonais, pontilhada. Com os dados fornecidos, é possível calcular o comprimento dessa diagonal? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

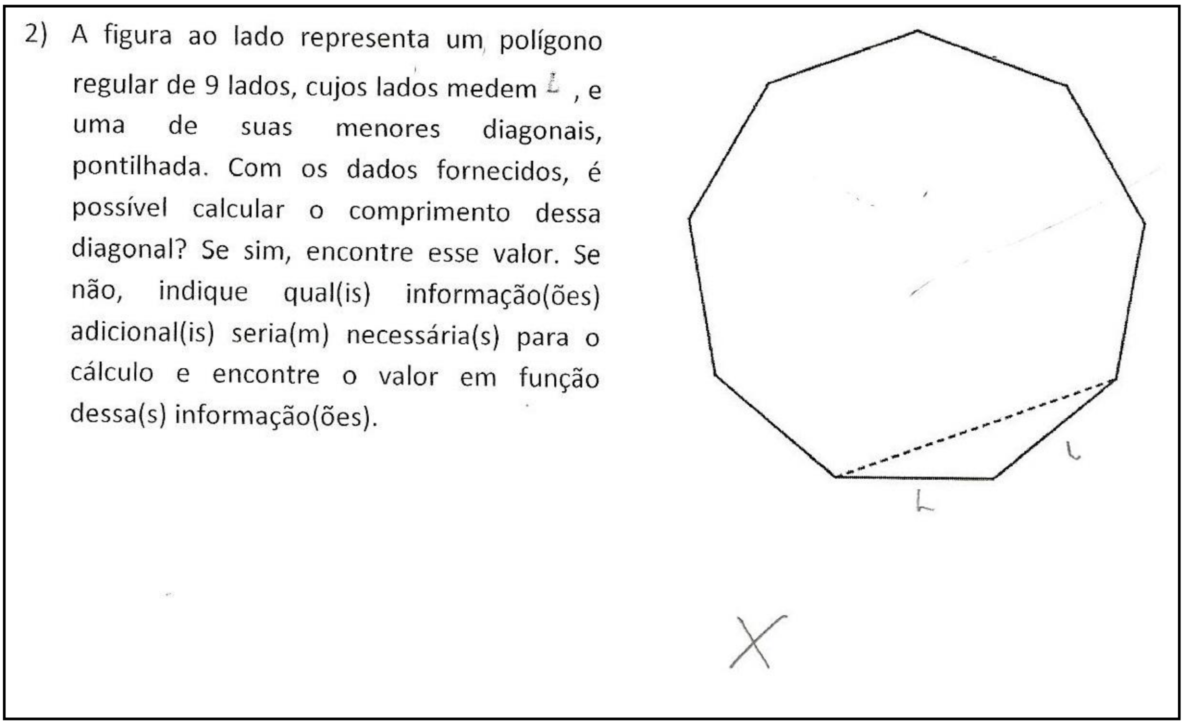
Figura 34 - Teste 1, Questão 2, Aluno F


2) A figura ao lado representa um polígono regular de 9 lados, cujos lados medem L, e uma de suas menores diagonais, pontilhada. Com os dados fornecidos, é possível calcular o comprimento dessa diagonal? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

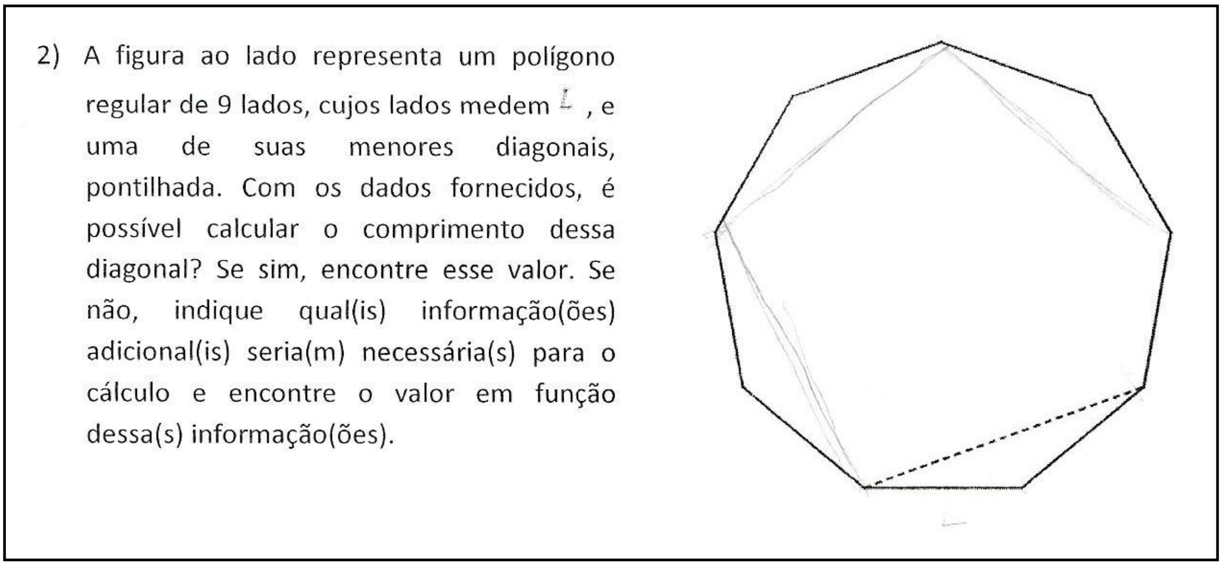
Os alunos D e E, nesse primeiro teste (Figuras 32 e 33, respectivamente), encontraram os ângulos necessários, mas não conseguiram evoluir na solução da questão, que necessitava da utilização das relações trigonométricas. O aluno F, também no primeiro teste (Figura 34), notou a necessidade de utilizar ângulos na resolução do problema, mas não conseguiu representar graficamente o ângulo $\frac{360°}{9} = 40°$ que calculou. Isto revela que, neste momento, este aluno ainda não havia compreendido os polígonos regulares e suas relações em suas diferentes representações.

Figura 35 - Teste 1, Questão 2, Aluno B


2) A figura ao lado representa um polígono regular de 9 lados, cujos lados medem L , e uma de suas menores diagonais, pontilhada. Com os dados fornecidos, é possível calcular o comprimento dessa diagonal? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

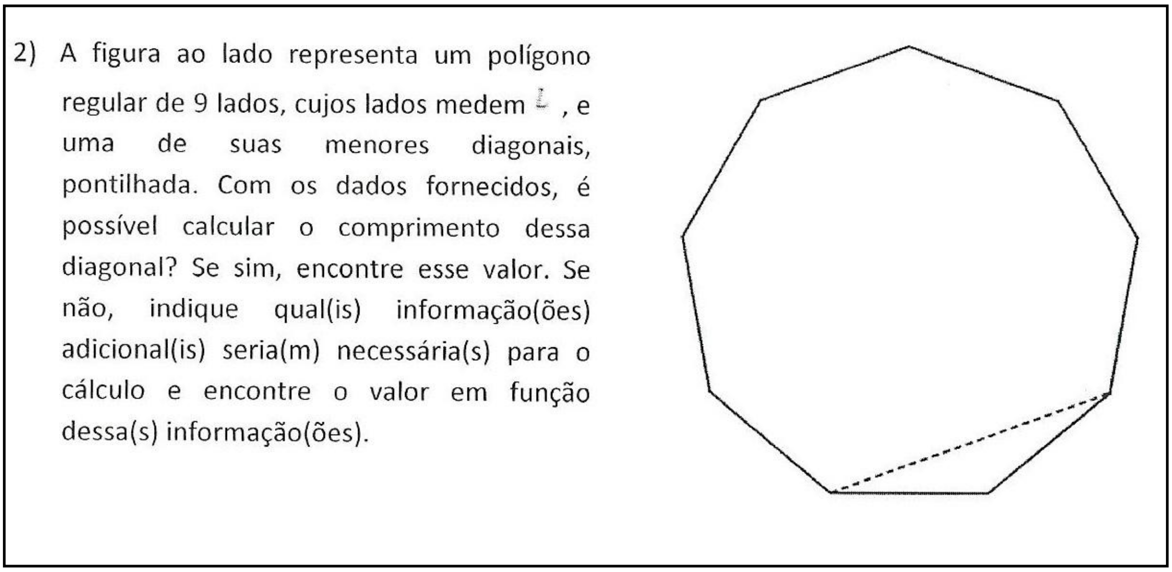
Figura 36 - Teste 1, Questão 2, Aluno C



2) A figura ao lado representa um polígono regular de 9 lados, cujos lados medem L, e uma de suas menores diagonais, pontilhada. Com os dados fornecidos, é possível calcular o comprimento dessa diagonal? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

Figura 37 - Teste 1, Questão 2, Aluno G

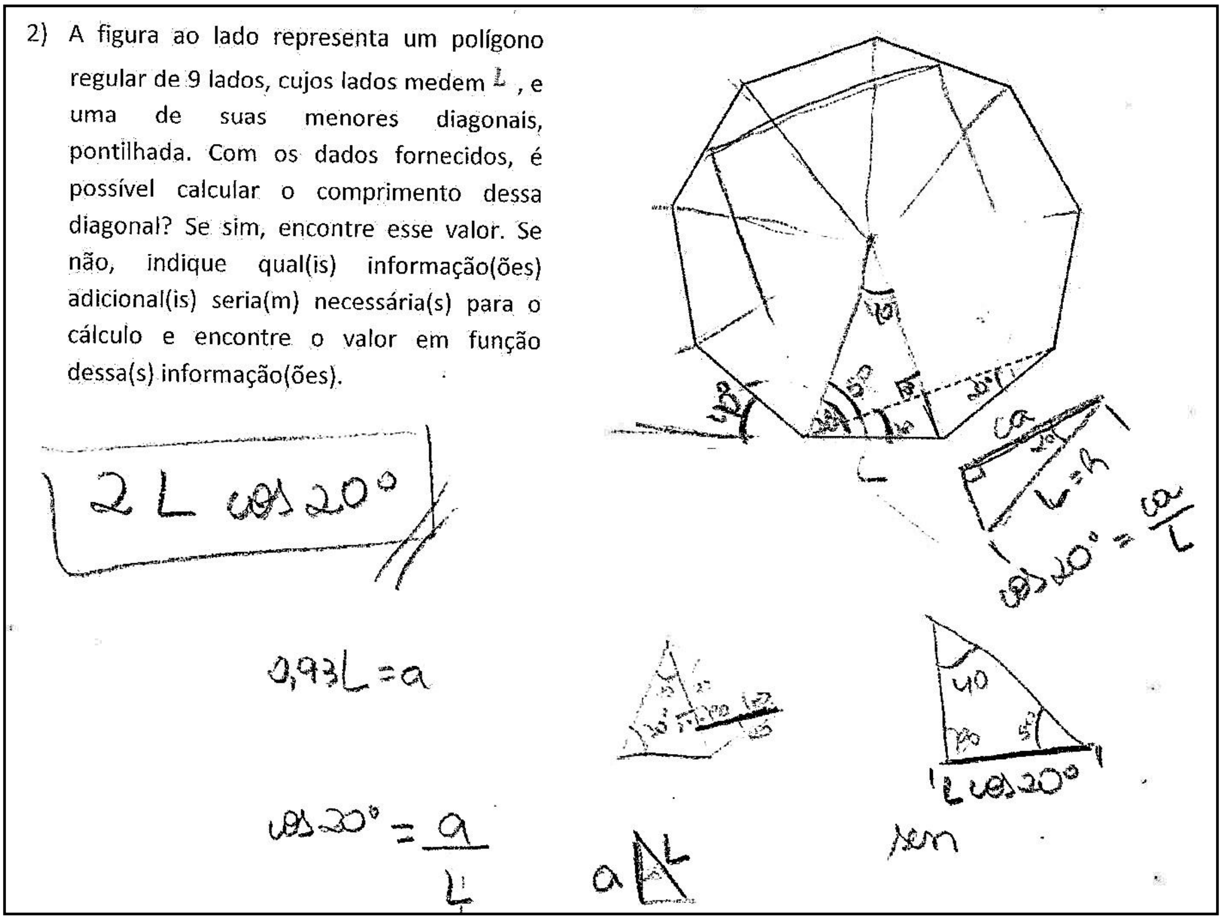


2) A figura ao lado representa um polígono regular de 9 lados, cujos lados medem L, e uma de suas menores diagonais, pontilhada. Com os dados fornecidos, é possível calcular o comprimento dessa diagonal? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

Infelizmente, vemos nas Figuras 35, 36 e 37, que os alunos B, C e G, respectivamente, não apresentaram desenvolvimento para esta questão, apenas riscando a figura na tentativa de encontrar algum padrão ou lógica conhecida por eles.

Figura 38 - Teste 1, Questão 2, Aluno A

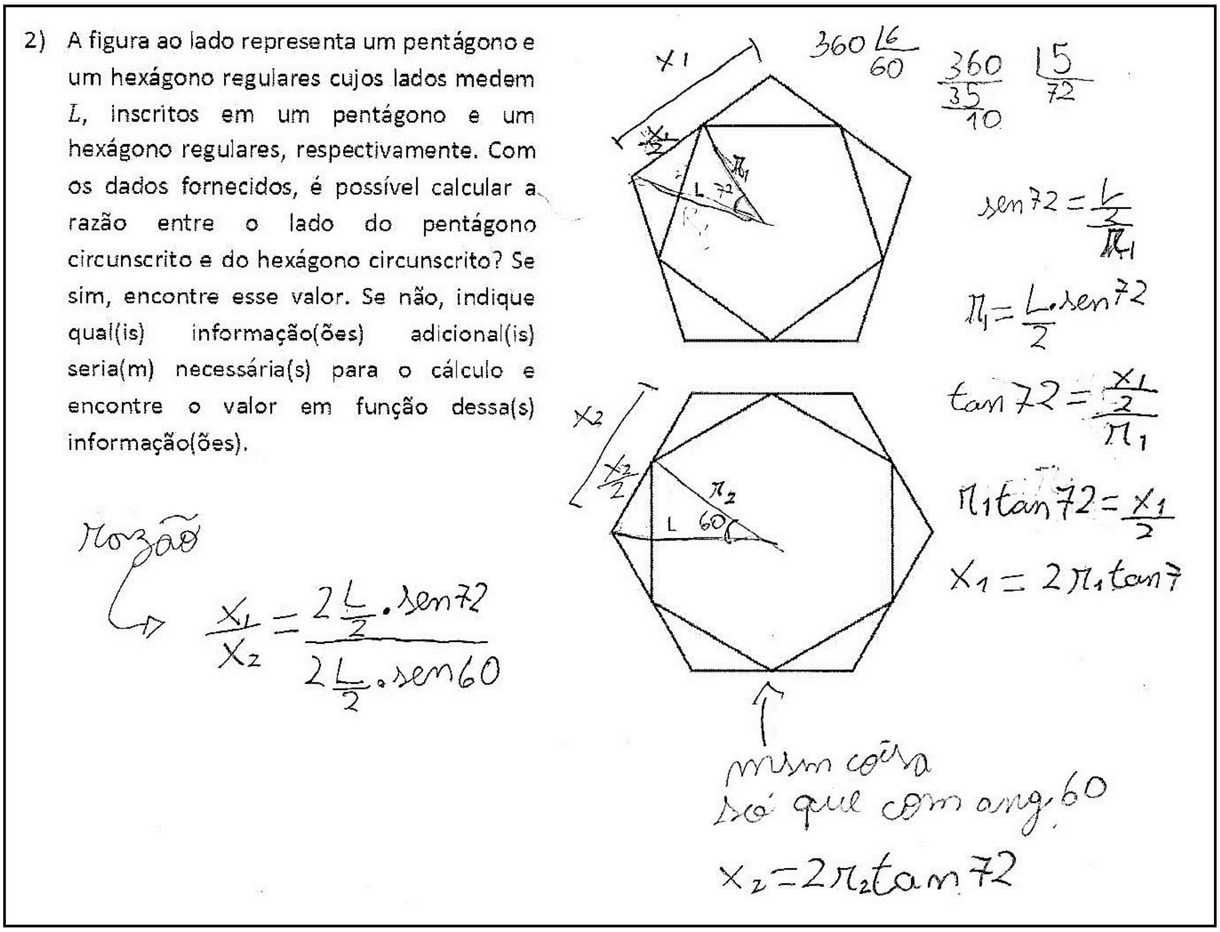


Fonte: Acervo pessoal

Dos sete alunos aqui analisados, percebemos que o que melhor demonstrou conhecimento matemático para a resolução desse problema no momento do primeiro teste foi o aluno A. Podemos notar semelhanças da resolução deste problema, na Figura 38, com sua resolução no teste 1 (Figura 17), como a grande área da página utilizada para expressar seu raciocínio e cálculos e a tentativa de utilizar um valor aproximado para o desconhecido $\cos 20°$, optando no final por deixá-lo indicado. Vemos, em seus rabiscos, a tentativa de utilizar outros triângulos retângulos e outras relações trigonométricas.

A evolução nesse conhecimento da geometria de polígonos regulares pode ser identificada a partir do desempenho destes mesmos alunos na questão do segundo teste. Nesta, os polígonos regulares trabalhados eram os de cinco e seis lados – pentágono e hexágono, respectivamente – e os conhecimentos necessários para a resolução do exercício eram os mesmos vistos na questão 2 do teste 1: encontrar ângulos favoráveis e triângulos retângulos com estes ângulos que permitissem relacionar os lados dados com os lados procurados.

Figura 39 - Teste 2, Questão 2, Aluno C

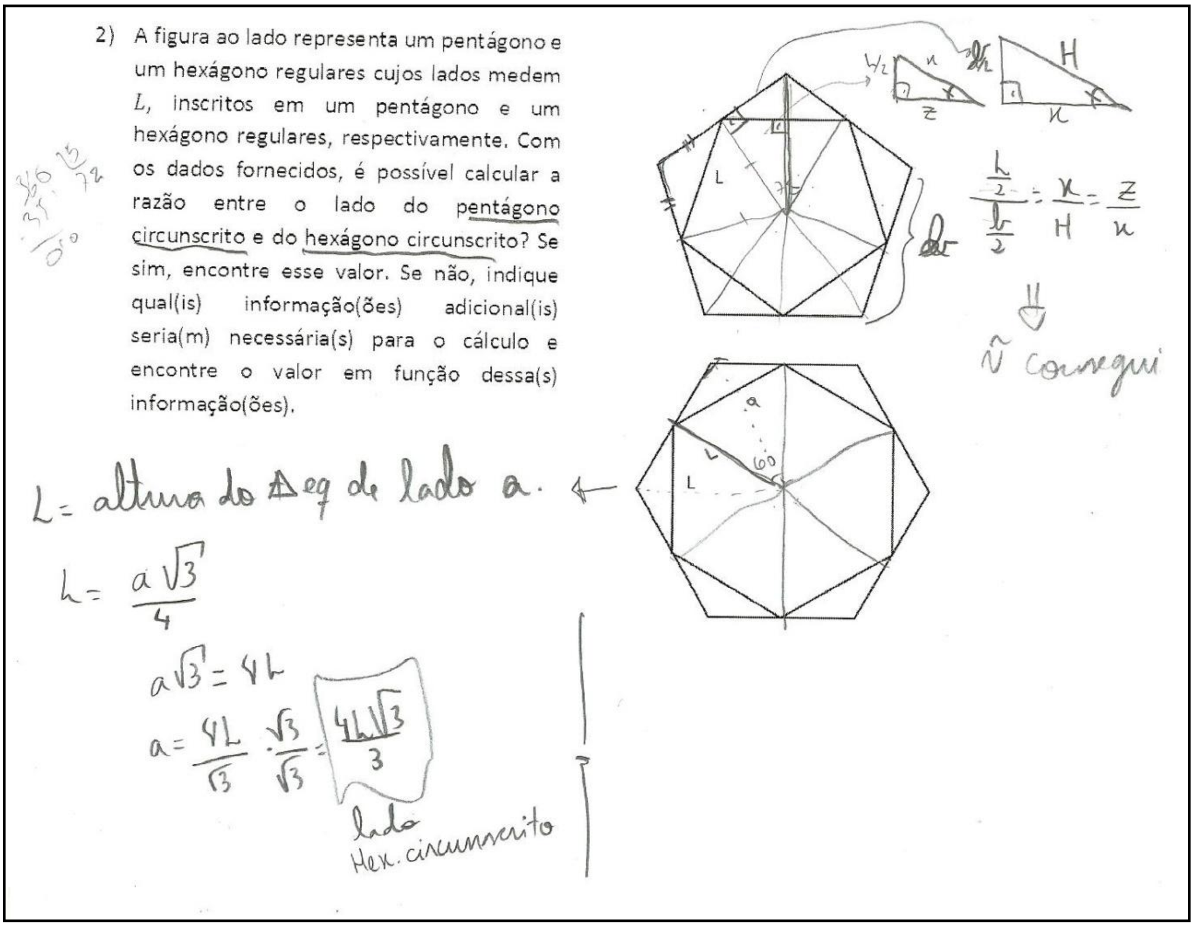


Fonte: Acervo pessoal

O aluno C, embora tenha calculado os ângulos $\frac{360°}{5} = 72°$ e $\frac{360°}{6} = 60°$ corretamente, errou ao representá-los graficamente, como mostra a Figura 39. Usando estes ângulos, o aluno C encontrou uma relação entre o lado do polígono de tamanho L com o raio da circunferência inscrita nesse polígono e, então, encontrou uma relação entre este raio e o lado procurado do polígono circunscrito ao polígono regular de lado L. Este raciocínio, embora apenas errado pelo ângulo usado, não o levou à resposta correta.

Levando em consideração que o aluno C não havia apresentado solução para a segunda questão do teste 1, este desenvolvimento indica uma melhoria considerável. O aluno identificou ângulos e usou corretamente as relações trigonométricas seno e tangente. Este avanço pode ser atribuído ao constante uso de relações trigonométricas para resolver exercícios no ambiente Logo, proporcionado aos alunos pela disciplina.

Figura 40 - Teste 2, Questão 2, Aluno B

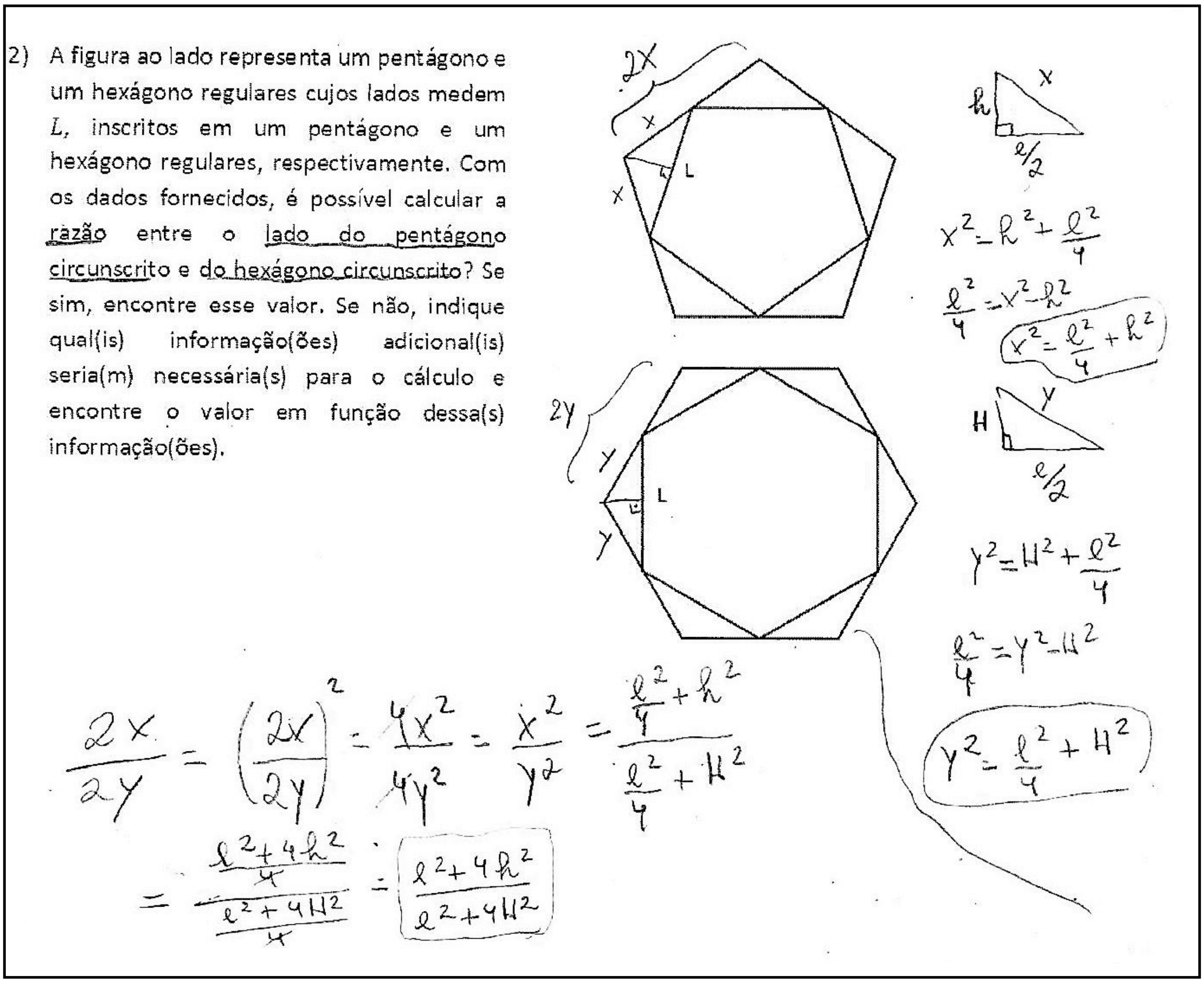


Fonte: Acervo pessoal

O aluno B tentou encontrar relações no pentágono através da semelhança entre dois triângulos (Figura 40), mas, provavelmente por falta de informações, não conseguiu terminar o cálculo. No caso do hexágono regular, o aluno B, percebendo que o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros justapostos, utilizou uma fórmula frequentemente estudada no Ensino Médio para a altura do triângulo equilátero de lado l como $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Esta fórmula foi utilizada de maneira incorreta pelo aluno B. Desconsiderando este pequeno erro, a relação encontrada está correta mas, sem a relação do pentágono, não chegou à resposta final.

Semelhança de triângulos não é um conteúdo abordado com a programação Logo em Computador na Matemática Elementar, e também não o é o uso de fórmulas para relacionar elementos como lados, alturas e diagonais de polígonos. Por isso, não podemos afirmar que a linguagem Logo usada em sala de aula implicou em uma melhoria no conhecimento matemático do aluno B nesta área.

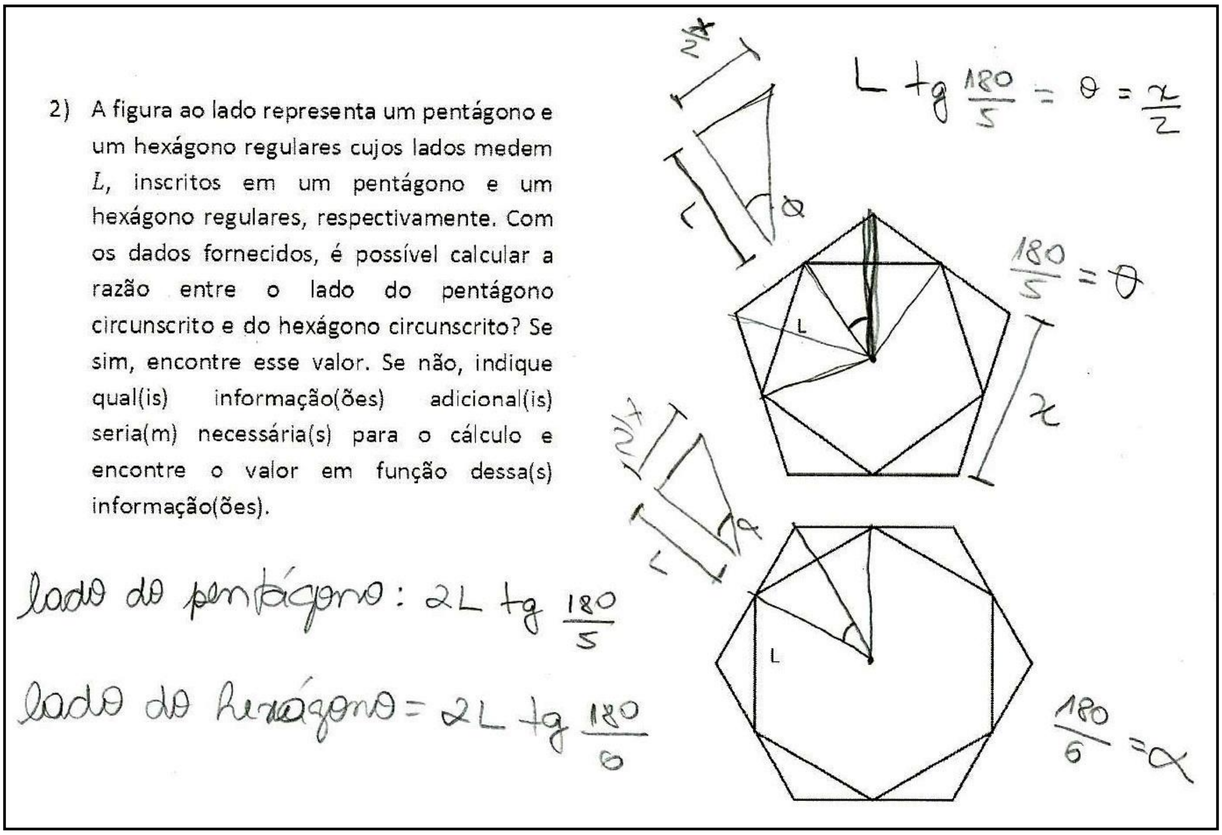
Figura 41 - Teste 2, Questão 2, Aluno E



Fonte: Acervo pessoal

Assim como o aluno B, o aluno E não utilizou relações trigonométricas para encontrar as medidas procuradas (Figura 41). Ao invés disso, escolhendo os triângulos retângulos esperados, optou por utilizar o Teorema de Pitágoras. No entanto, o Teorema de Pitágoras não seria a melhor opção, pois se conhecia apenas um dos lados do triângulo retângulo. Em função do raciocínio utilizado, esta incógnita foi encontrada pelo aluno E em função de L, o lado dado, e de outra variável – nomeada h no pentágono e H no hexágono pelo aluno E – que representava o lado desconhecido e não procurado do triângulo retângulo. A resposta final, em função de L, h e H, só está errada pelo fato de h e H não serem variáveis livres. Comparando seu desempenho na segunda questão dos dois testes, não podemos afirmar que o aluno E apresentou melhorias, visto que não utilizou um raciocínio trabalhado na disciplina durante estes dois meses.

Figura 42 - Teste 2, Questão 2, Aluno A

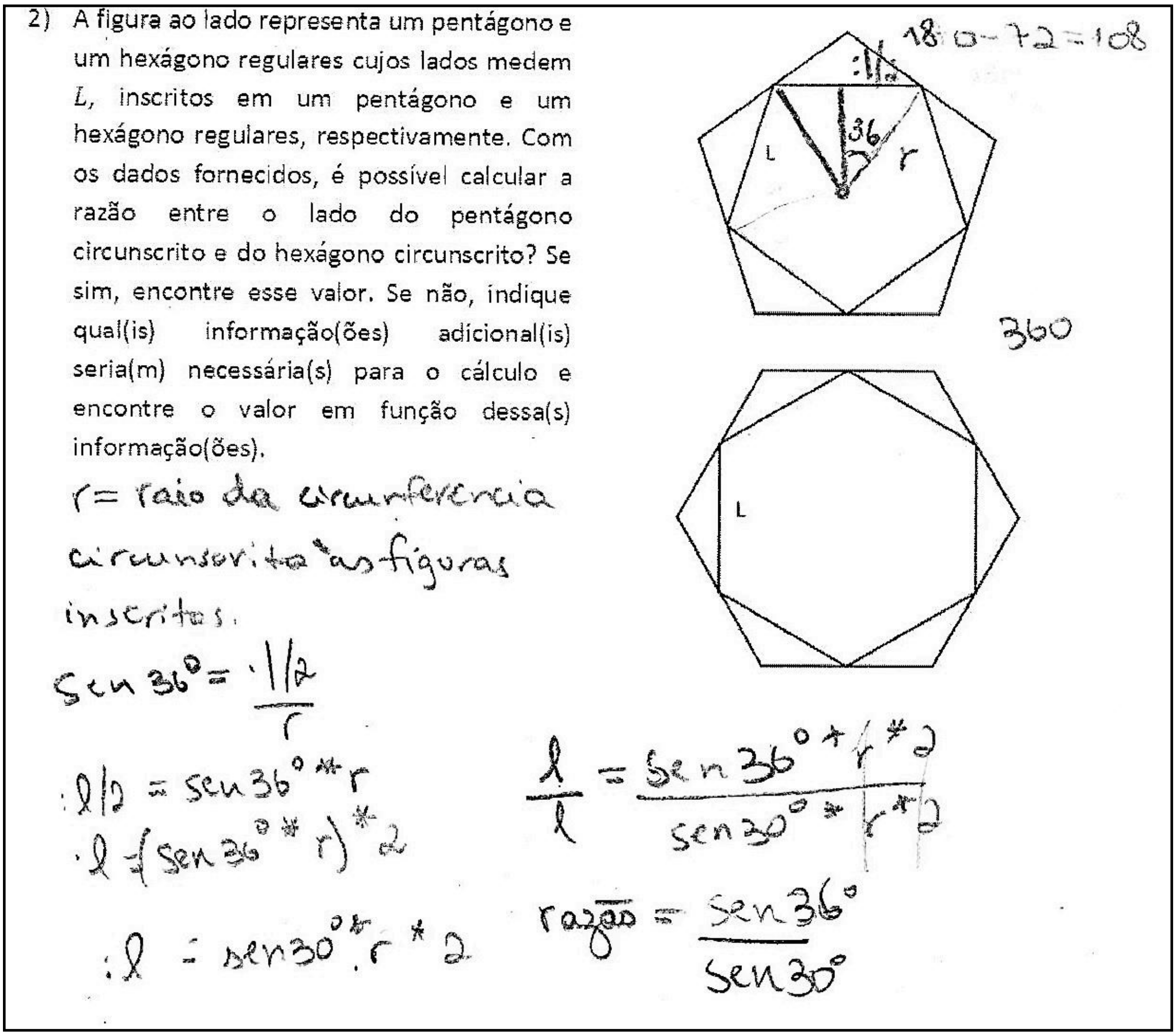


Fonte: Acervo pessoal

Os alunos A e G apresentaram raciocínios interessantes, mas com pequenos erros que acarretaram em uma resposta final coerente, mas incorreta.

O aluno A (Figura 42) encontrou corretamente um ângulo favorável ao desenvolvimento de seus cálculos, análogo nos dois casos: $\frac{180°}{5}$ para o pentágono e $\frac{180°}{6}$ para o hexágono (sem calcular os valores exatos, mas ainda assim corretos). No entanto, este aluno usou um conceito que só é válido para o hexágono regular: no triângulo retângulo cujos vértices coincidem com o centro dos polígonos, com um vértice do polígono circunscrito e com o ponto médio de um lado adjacente a este vértice, o aluno A indicou o lado adjacente ao ângulo encontrado como tendo comprimento L. Este resultado, no entanto, vale apenas para hexágonos regulares. Achando os dois lados, a razão, embora não explicitada pelo aluno A, fica implícita.

Figura 43 - Teste 2, Questão 2, Aluno G


2) A figura ao lado representa um pentágono e um hexágono regulares cujos lados medem L, inscritos em um pentágono e um hexágono regulares, respectivamente. Com os dados fornecidos, é possível calcular a razão entre o lado do pentágono circunscrito e do hexágono circunscrito? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

r= raio da circunferencia circunscrita às figuras inscritas.

$\operatorname{sen} 36° = \dfrac{l/2}{r}$

$l/2 = \operatorname{sen}36° * r$

$l = (\operatorname{sen} 36° * r) * 2$

$l = \operatorname{sen}30° * r * 2$

$\dfrac{l}{l} = \dfrac{\operatorname{sen} 36° * r * 2}{\operatorname{sen} 30° * r * 2}$

razão $= \dfrac{\operatorname{sen}36°}{\operatorname{sen}30°}$

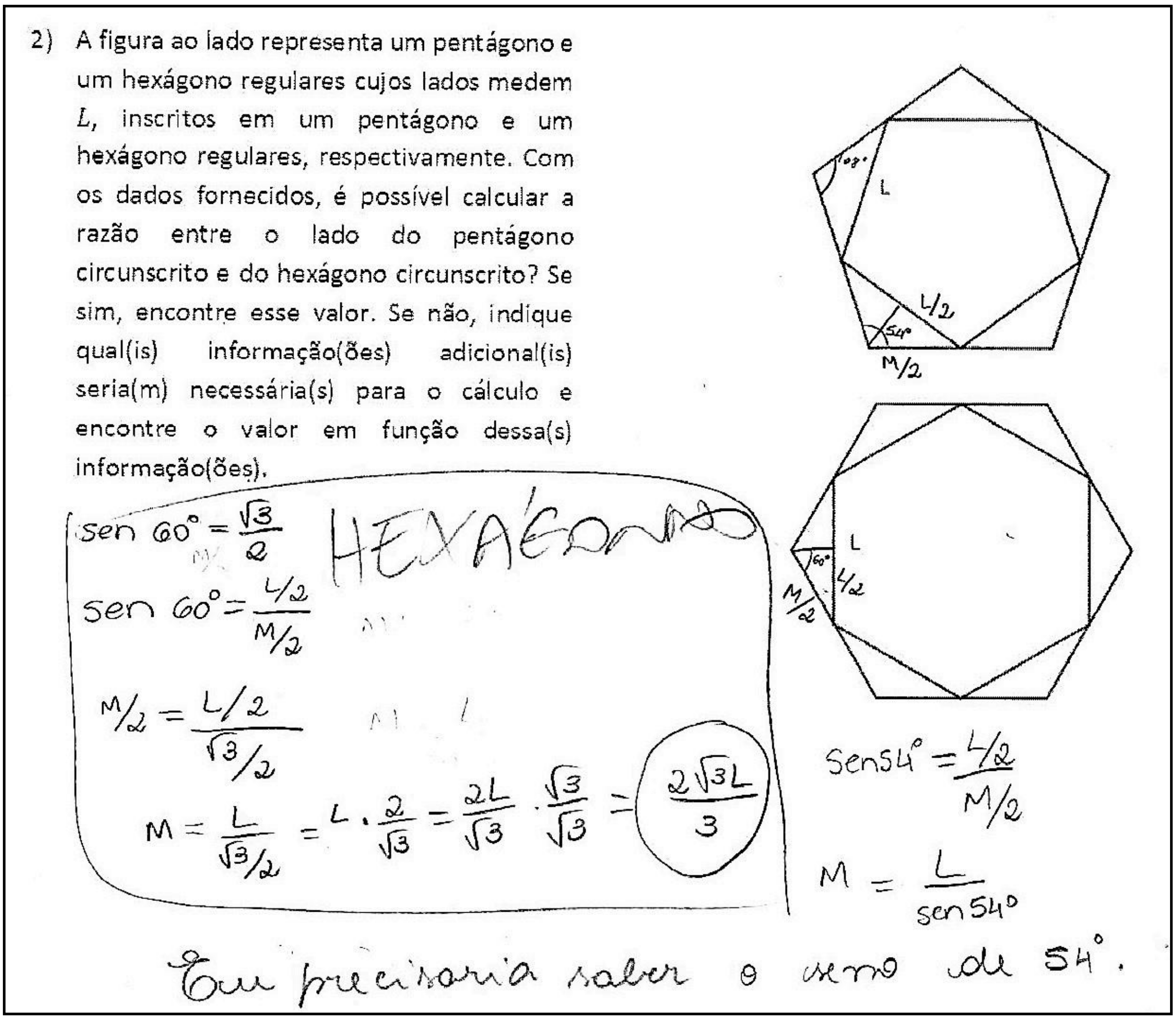
Fonte: Acervo pessoal

O aluno G também encontrou os ângulos $36°$ e $30°$ como o aluno A – aqui calculados ao invés de deixados indicados – e os utilizou em outro triângulo retângulo, com vértices no centro dos polígonos, num vértice do polígono de lado L e no ponto médio de um lado adjacente a este vértice, como mostra a Figura 43. Neste triângulo, o aluno G relacionou o lado de tamanho L com o raio da circunferência inscrita nos polígonos inscritos, usando $\operatorname{sen} 36°$ e $\operatorname{sen} 30°$. No entanto, o aluno G errou ao considerar que os raios apresentavam mesma medida.

Embora a solução da questão não esteja correta, considero importante observar que o aluno G, que dois meses antes não soube nem iniciar a resolução de um problema parecido, neste momento teve êxito em identificar os ângulos, os triângulos retângulos e as relações trigonométricas envolvidas na solução. Isto mostra um avanço considerável em relação a estes conhecimentos.

Os alunos D e F, que no primeiro teste apenas chegaram a breves considerações quanto aos lados e ângulos na figura, apresentaram avanço no conhecimento de polígonos regulares e as possíveis relações entre seus lados e seus ângulos.

Figura 44 - Teste 2, Questão 2, Aluno D

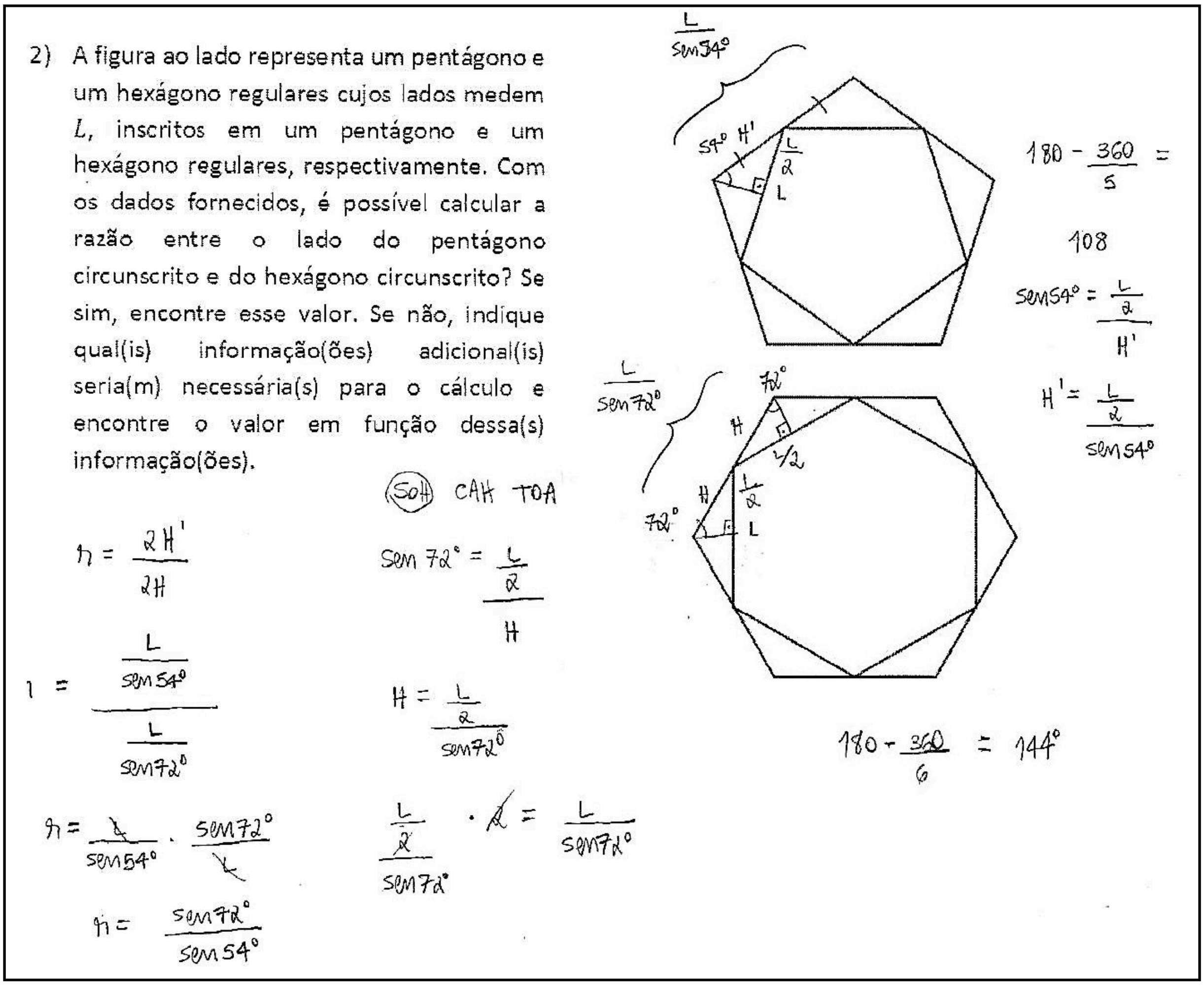


Fonte: Acervo pessoal

O aluno D (Figura 44) percebeu e calculou diretamente a relação entre o lado procurado no hexágono regular e o lado de tamanho dado através do seno do ângulo $60°$ no triângulo retângulo formado pelo vértice do polígono circunscrito, um ponto médio que coincide com um vértice do polígono inscrito e o ponto médio do lado adjacente a este vértice que é a projeção ortogonal daquele vértice sobre o lado do polígono inscrito. Conhecendo o valor de $\operatorname{sen} 60°$, encontrou um valor para a medida do lado procurado apenas em função de L. Em seguida, o aluno D utilizou um raciocínio análogo para encontrar o tamanho do lado procurado no pentágono regular. No entanto, como o valor de $\operatorname{sen} 54°$ não é um valor usual, o aluno D deixou a medida encontrada em função de L e de $\operatorname{sen} 54°$. A razão procurada no exercício não foi explicitada pelo aluno, mas o desenvolvimento da questão está impecável.

Lembrando que, no primeiro teste, o aluno D apenas encontrou os valores dos ângulos internos do eneágono regular, mas não soube onde aplicá-los. Agora, com dois meses de contato com a linguagem Logo as atividades que envolvem constantemente relações trigonométricas, o aluno teve êxito em encontrar tais relações usando corretamente as relações trigonométricas necessárias no problema.

Figura 45 - Teste 2, Questão 2, Aluno F



Fonte: Acervo pessoal

O aluno F utilizou o mesmo raciocínio que o aluno D (Figura 45), porém iniciando sua solução pelo pentágono regular: calculando o valor de seu ângulo interno como $108°$, utilizou o seno de $54°$ para encontrar a medida do lado procurado. Ao aplicar este raciocínio para o hexágono regular, o aluno F cometeu um pequeno equívoco, ao calcular o ângulo interno deste polígono como $180° - \frac{360°}{6} = 144°$, e o correto seria $120°$. Desconsiderando-se este erro, o aluno usou coerentemente o seno do ângulo $72°$ para encontrar o valor procurado. A razão procurada no final foi encontrada como $\frac{\text{sen } 72°}{\text{sen } 54°}$ ao invés do valor $\frac{\text{sen } 60°}{\text{sen } 54°}$ esperado. Como pequenos erros de cálculo não são o foco desta análise, considerando apenas o raciocínio do aluno, percebemos que o aluno F apresentou uma ótima solução para o problema e uma grande melhoria desde a segunda questão do primeiro teste, quando não chegou nem a conclusões palpáveis sobre os ângulos do polígono regular apresentado.

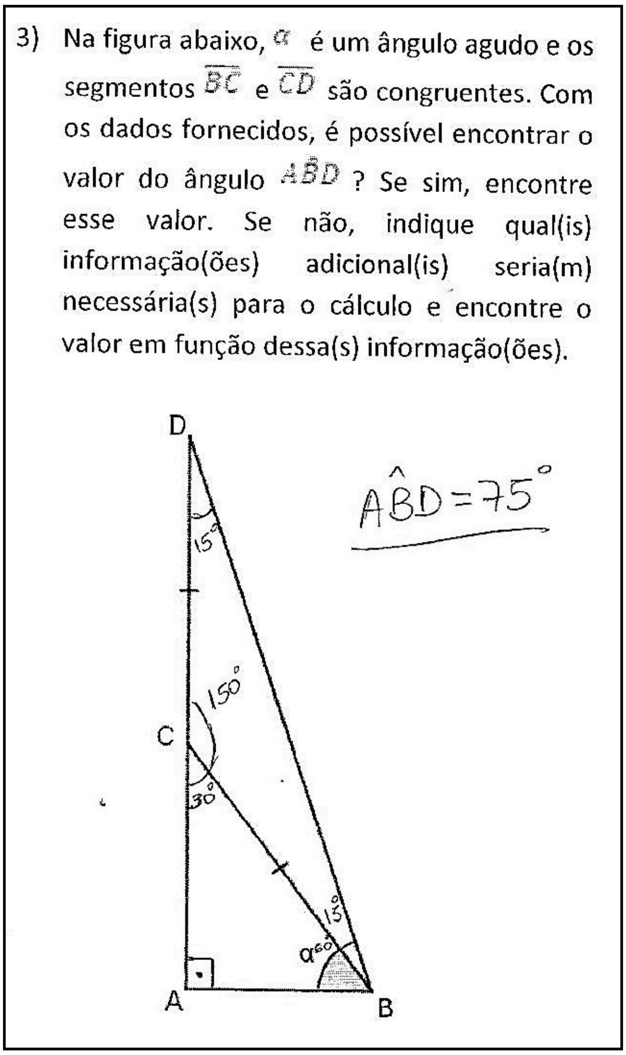
4.3. Questão 3

A terceira questão de ambos os testes focava na desenvoltura dos alunos em trabalhar com variáveis. A análise dos desenvolvimentos dos sete alunos escolhidos mostra resultados de naturezas distintas.

O trabalho com a programação Logo exige do aluno imaginar o que faria se estivesse no lugar da Tartaruga. Papert (1988, p. 93) afirma que “Um (...) conceito chave da matemática, cuja compreensão é facilitada pela Tartaruga, é a ideia de *variável*: a ideia de usar um símbolo para dar nome a uma entidade desconhecida”.

Comecemos esta análise pelo aluno D.

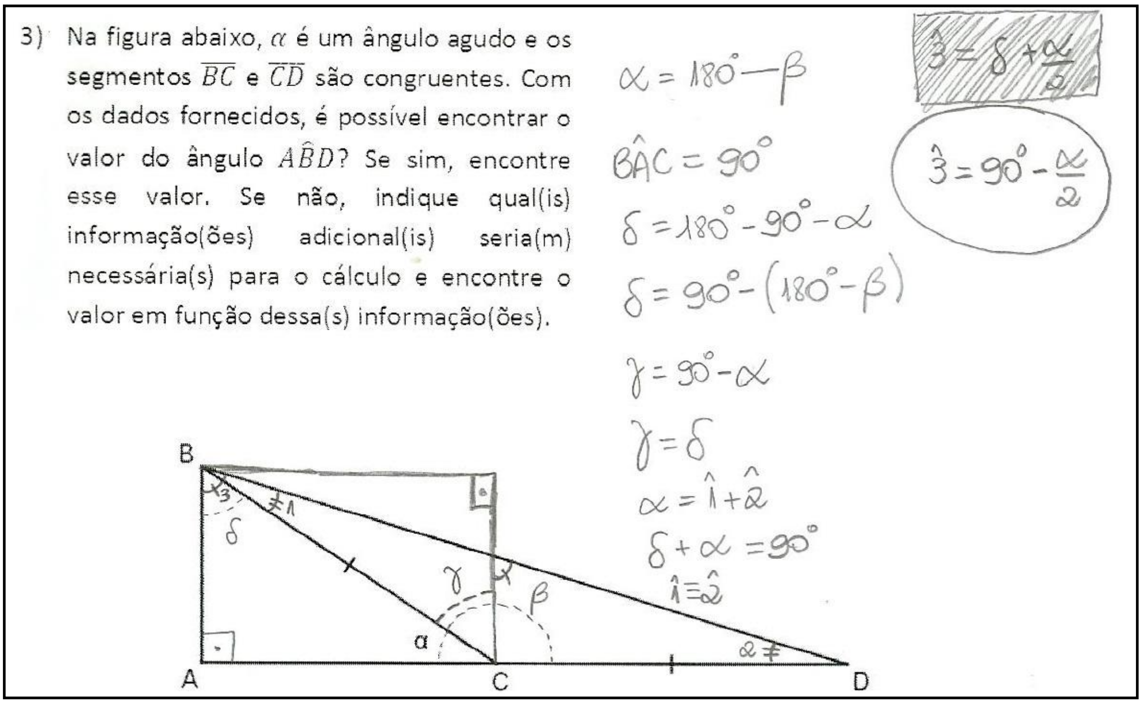
Figura 46 - Teste 1, Questão 3, Aluno D


3) Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

Vemos aqui, na resolução do primeiro teste, um exemplo de uma estratégia utilizada por mais de um aluno. O aluno D, na falta de desenvoltura para trabalhar com variáveis, fixa um valor numérico $\alpha = 60°$, como mostra a Figura 46. A partir de então, aplica o raciocínio esperado para encontrar todos os valores em função deste. Ele usa o conhecimento de ângulos complementares para encontrar o ângulo $A\hat{C}B = 90° - 60° = 30°$ e o conhecimento de ângulos suplementares para encontrar o ângulo $B\hat{C}D = 180° - 30° = 150°$. Tendo este último ângulo, usa propriedade de um triângulo isóscele para determinar o valor dos ângulos congruentes $B\widehat{D}C = C\hat{B}D = \frac{180°-150°}{2} = 15°$. Finalmente, tendo os valores de $A\hat{B}C$ e $C\hat{B}D$, encontra $A\hat{B}D = 75°$. Notemos que esta linha de raciocínio usando α como uma variável nos levaria ao resultado esperado, em função de α.

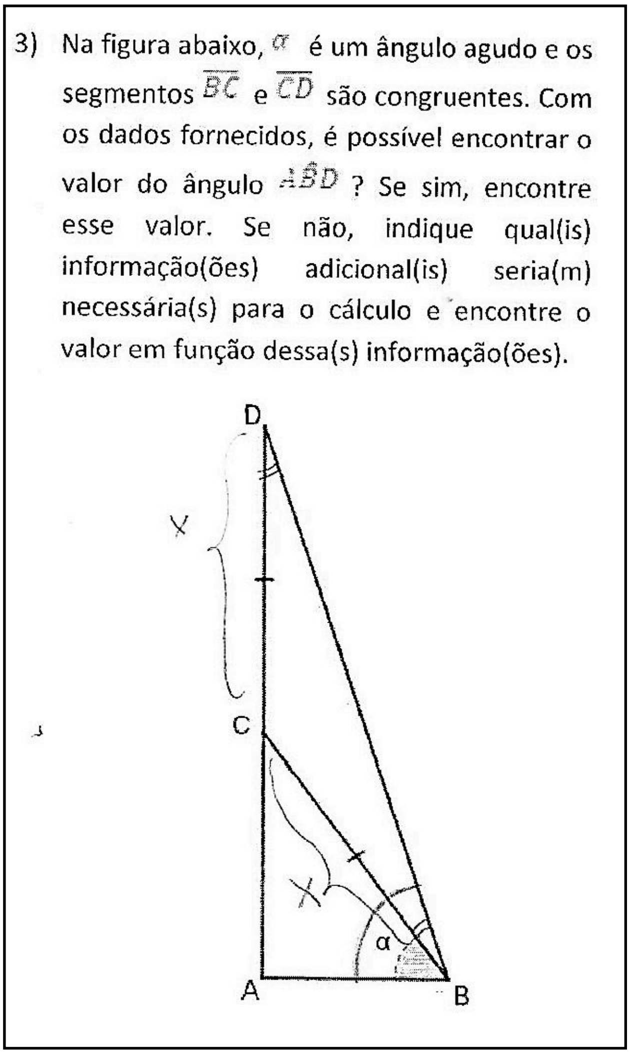
Figura 47 - Teste 2, Questão 3, Aluno D



Fonte: Acervo pessoal

É importante notar que, quanto às informações adicionais necessárias nesta questão, o aluno D implicitamente admite que o ângulo $B\hat{A}C$ é um ângulo reto, representando-o graficamente. Na resolução da questão 3 do segundo teste (Figura 47), o aluno D mostra evolução ao trabalhar com os mesmos conhecimentos de ângulos suplementares e complementares, agora utilizando realmente variáveis. Todo o seu raciocínio encontra-se explicitado na página, inclusive considerações desnecessárias para a solução final, como o ângulo determinado pelo aluno por γ. A solução do problema é dada por $\hat{3} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Esta evolução no desempenho do aluno pode ser atribuída ao constante uso de variáveis no ambiente Logo no qual ele foi introduzido, indicando uma maior aptidão para a generalização de elementos geométricos como ângulos.

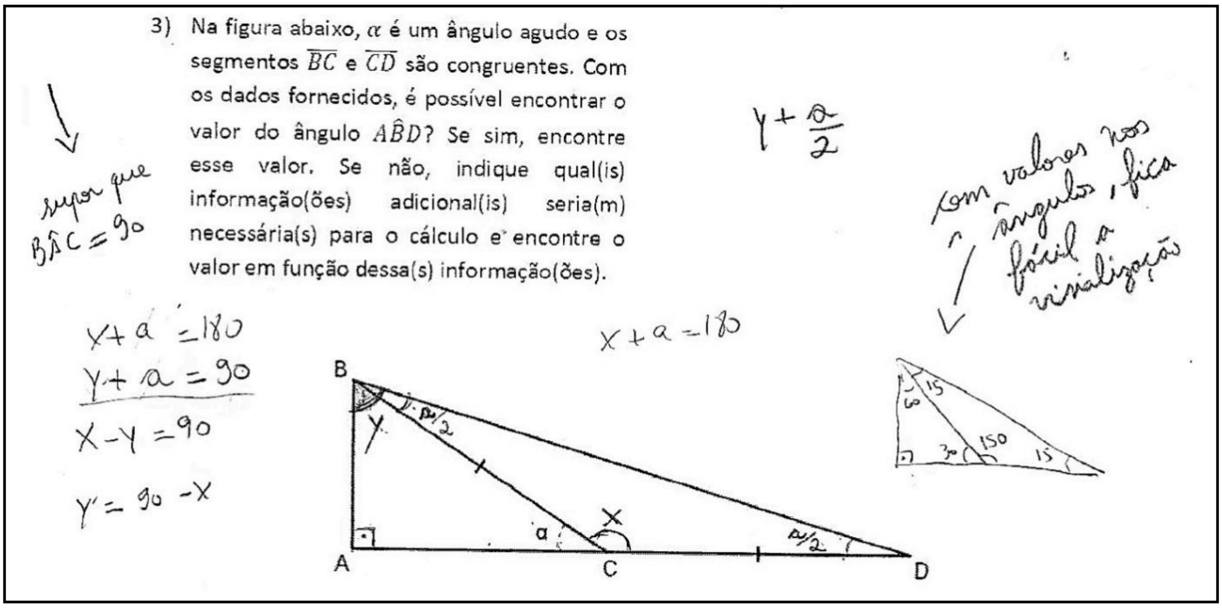
Figura 48 - Teste 1, Questão 3, Aluno E



3) Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

Figura 49 - Teste 2, Questão 3, Aluno E



3) Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

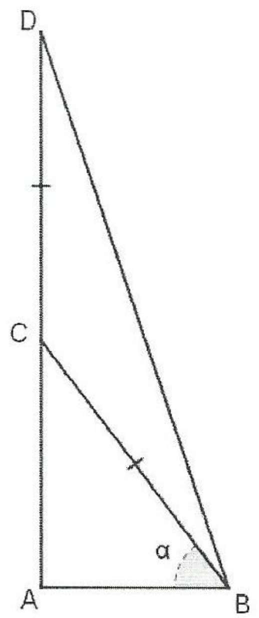
Analisemos a evolução do aluno E que, no primeiro teste, não conseguiu iniciar a solução do problema. Podemos ver, no primeiro teste (Figura 48), que o aluno E percebeu que os ângulos $B\widehat{D}C$ e $C\widehat{B}D$ eram congruentes devido ao triângulo BCD ser isóscele. Porém, o restante da solução não foi apresentada pelo aluno E.

Dois meses mais tarde, trabalhando constantemente com variáveis no ambiente Logo, vemos uma evolução no desempenho do aluno E. Presumindo que o ângulo $B\widehat{A}C$ era reto, o aluno prosseguiu a encontrar os valores de $B\widehat{C}D$ (denotado x pelo aluno), $C\widehat{B}D$, $B\widehat{D}C$ e $A\widehat{B}C$ (denotado y pelo aluno), todos em função de α. A resposta final foi dada implicitamente por $y + \frac{\alpha}{2}$, onde y também é dado implicitamente por $y + \alpha = 90°$.

Um fato interessante na resolução do aluno E, foi a necessidade de confirmar tal resultado com valores numéricos. Vemos na sua folha (Figura 49) o mesmo desenho com $\alpha = 30°$ e, consequentemente, $A\widehat{B}D = 90° - \frac{30°}{2} = 75°$.

Figura 50 - Teste 1, Questão 3, Aluno G

3) Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



Fonte: Acervo pessoal

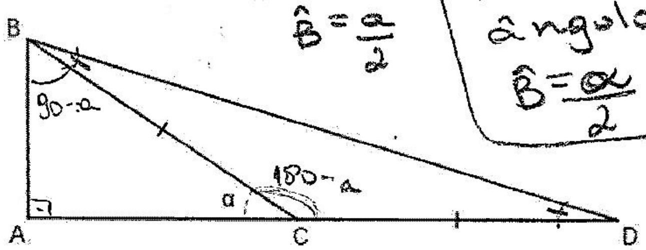
Figura 51 - Teste 2, Questão 3, Aluno G

3) Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

$180 = 90 + 90 - a + 2\hat{B}$
$0 = -a + 2\hat{B}$
$a = 2\hat{B}$
$\hat{B} = \frac{a}{2}$

Falta o valor do ângulo α
$\hat{B} = \frac{\alpha}{2}$

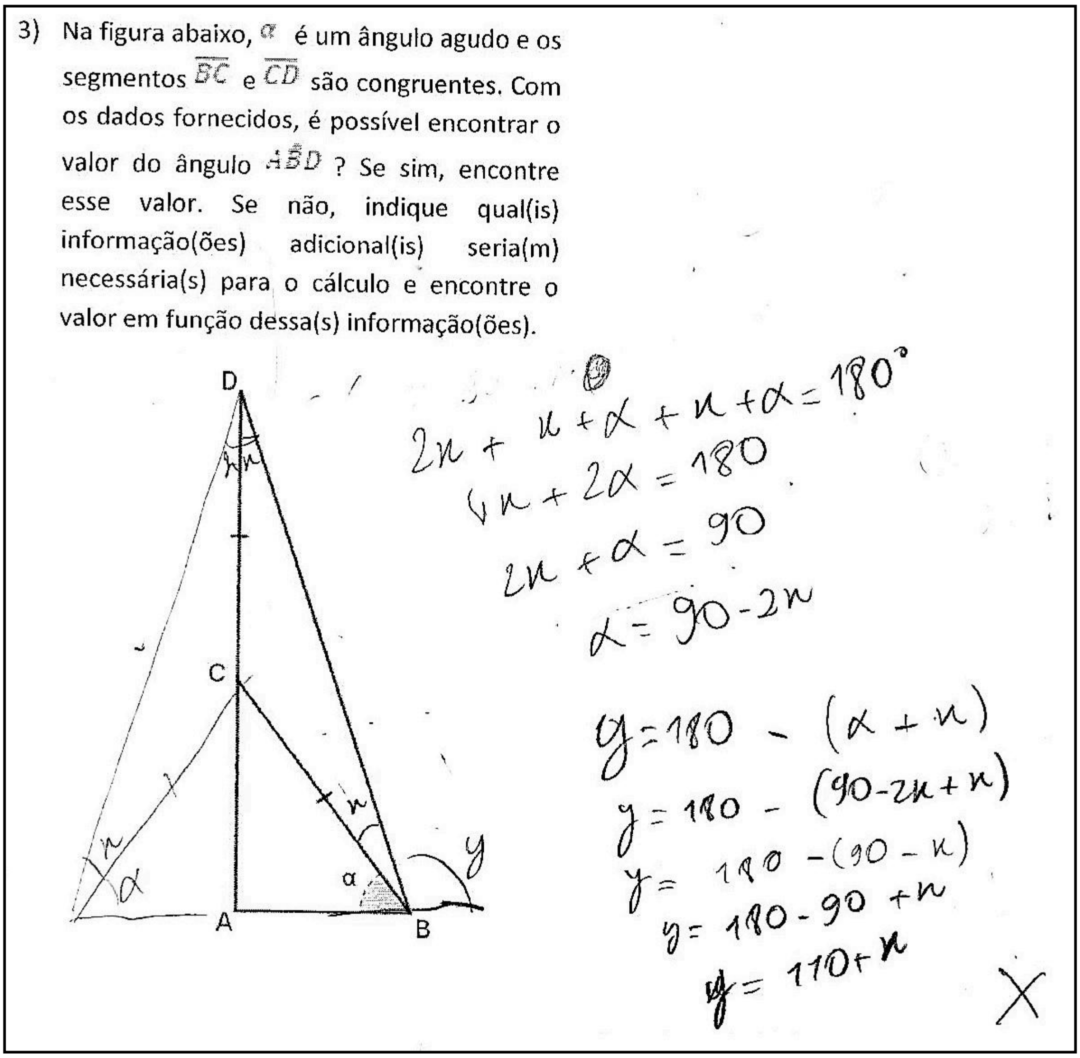
$180 = 90 + a + y$
$90 = a + y$
$y = 90 - a$



Fonte: Acervo pessoal

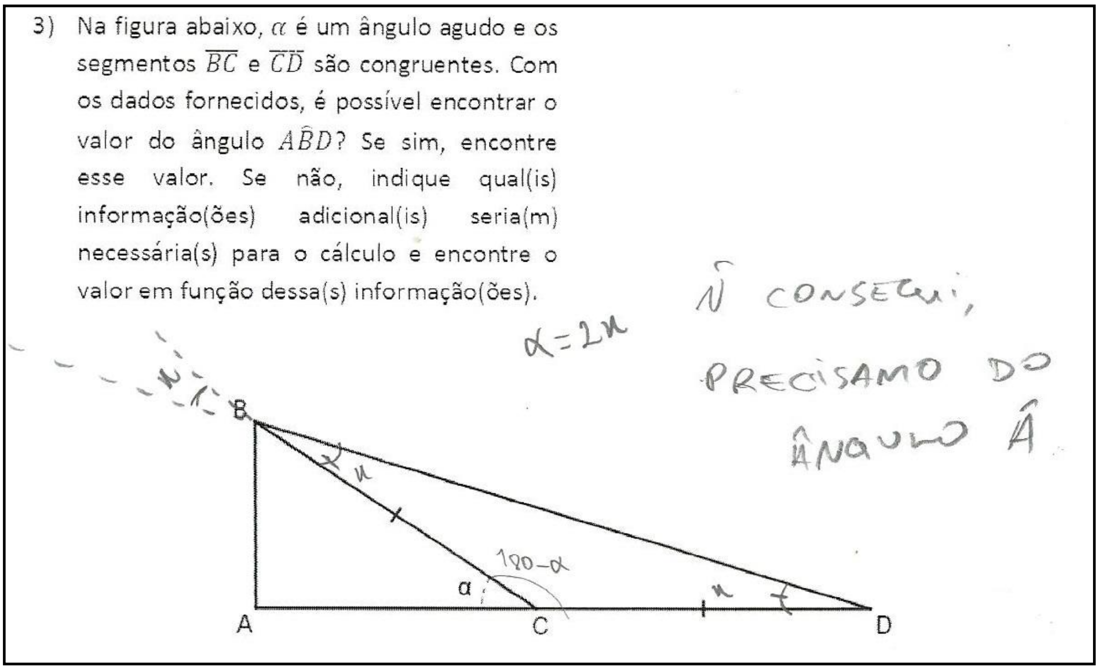
Analisemos agora o aluno G. Notemos que, como nas questões anteriores, o desempenho do aluno G no primeiro teste (Figura 50) é nulo, o que é muito importante para evidenciarmos a sua evolução nestes dois meses. No segundo teste (Figura 51), o aluno usou todos os conceitos matemáticos esperados – ângulos suplementares, ângulo complementares e propriedade de triângulo isóscele – para encontrar os valores de $A\hat{B}C$ e $C\hat{B}D$ em função de α. Um pequeno equívoco parece ter acontecido, já que o aluno parece ter considerado o ângulo $C\hat{B}D$ como resposta final. No entanto, tendo descoberto os dois ângulos mencionados, o raciocínio está completo e podemos desconsiderar este erro. Notemos que o aluno G registrou a falta de um valor numérico para α como se esta fosse uma informação necessária para continuar o cálculo. O avanço no conhecimento matemático do aluno G é notório visto que as variáveis agora não mais se apresentaram como uma barreira, e o problema que antes não possuía solução é agora facilmente resolvido.

Figura 52 - Teste 1, Questão 3, Aluno B



Fonte: Acervo pessoal

Figura 53 - Teste 2, Questão 3, Aluno B

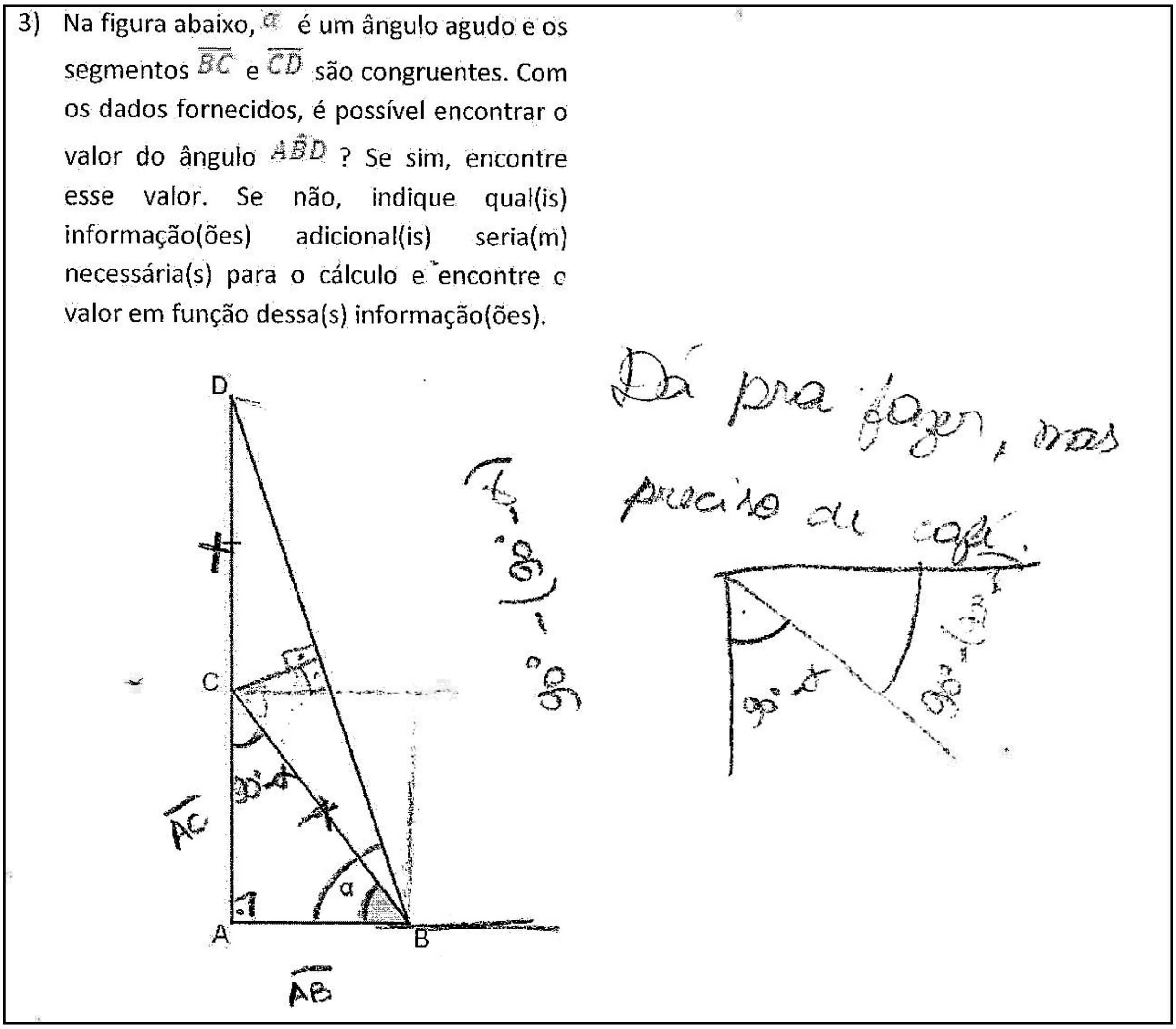


Fonte: Acervo pessoal

O aluno B, em sua resolução da terceira questão do primeiro teste (Figura 52), utilizou uma linha de raciocínio que não foi apresentada por nenhum outro colega: refletindo o ponto B em torno da reta $\overleftrightarrow{AC}$, o aluno B criou um novo ponto B' que nos leva a um triângulo isóscele BDB'. O aluno B parece ter optado por esta linha de raciocínio por não ter informações sobre o ângulo $B\hat{A}C$, não presumindo que este era reto, como a maioria de seus colegas. No entanto, o que aluno parece não ter percebido é que esta suposição foi tomada, visto que BDB' só é um triângulo se B e B' são colineares, que depende unicamente de tal ângulo ser de fato reto. Assim, o aluno encontrou o valor de $C\hat{B}D$ (denominado x pelo aluno B) implicitamente por $\alpha = 90° - 2x$. É interessante notar que o cálculo poderia ter terminado aqui, apenas somando-se este valor x a α para encontrar o ângulo $A\hat{B}D$. No entanto, o aluno B continuou o cálculo – a partir daqui desnecessário – do ângulo suplementar a $A\hat{B}D$. Notemos que o cálculo só está errado por um descuido ao realizar $180° - 90° = 110°$.

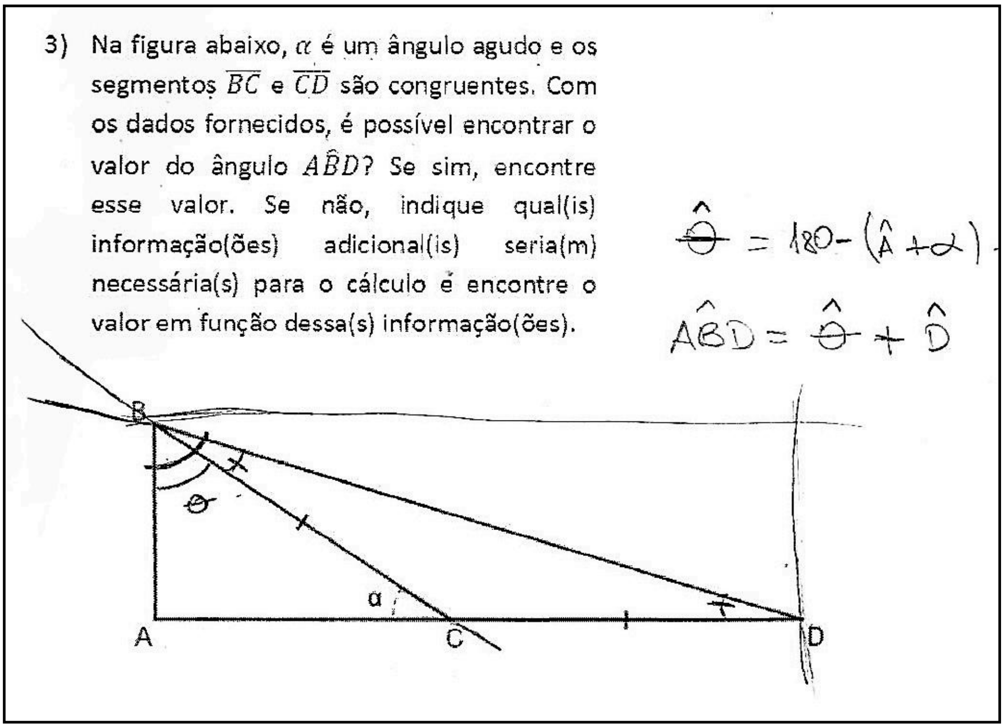
Na tentativa de resolver a questão análoga no segundo teste (Figura 53), o aluno B novamente notou a falta de informações sobre o ângulo $B\hat{A}C$, sem presumir que tal ângulo era reto. Ele desta vez não tentou seguir um raciocínio envolvendo reflexão como anteriormente e apenas indicou que só poderia completar o cálculo tendo algum valor para tal ângulo. Embora correto, o aluno B não encontrou uma resposta final em função de α e $\hat{A}$ (como indicou o ângulo $B\hat{A}C$). Os ângulos congruentes $C\hat{B}D$ e $C\hat{D}B$ (com abertura x, denominada pelo aluno) foram encontrados implicitamente por $\alpha = 2x$, mas esta informação não foi usada mais adiante visto que o aluno julgou não haver informações suficientes no problema.

Figura 54 - Teste 1, Questão 3, Aluno A



Fonte: Acervo pessoal

Figura 55 - Teste 2, Questão 3, Aluno A



Fonte: Acervo pessoal

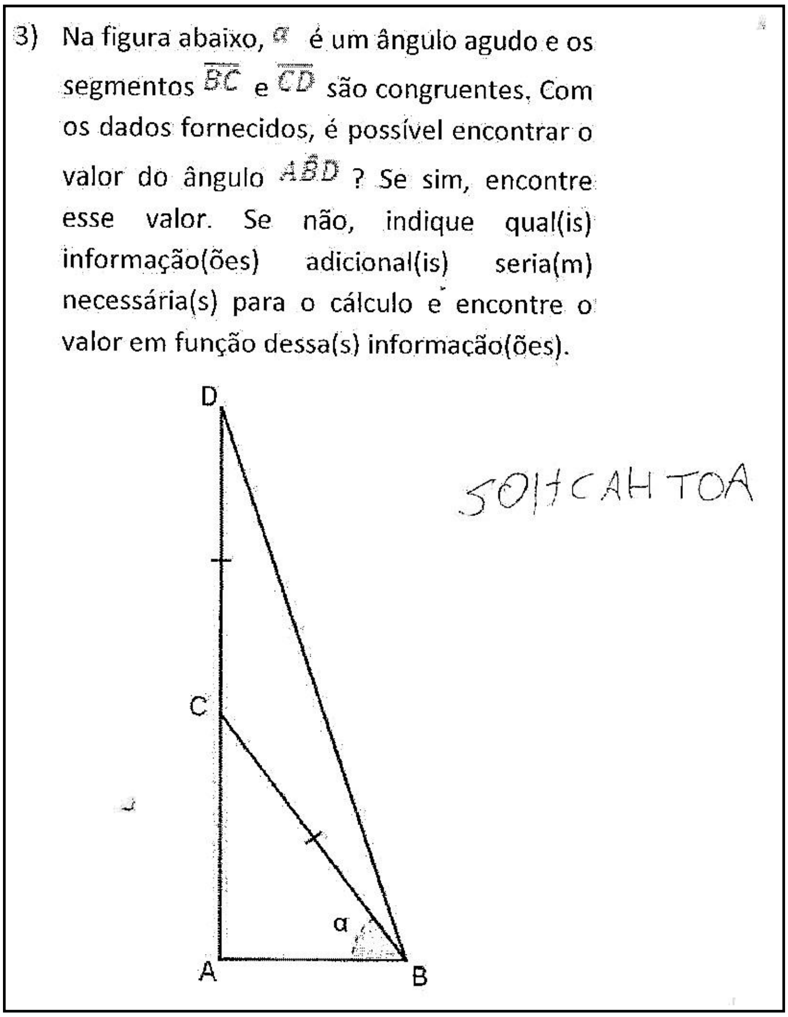
O aluno A mostra uma diferença entre os dois testes pouco comum, mas que pode ser explicada: no primeiro teste (Figura 54), o ângulo $B\hat{A}C$ foi presumido reto como representado graficamente, mas no segundo (Figura 55), tal ângulo foi considerado como uma incógnita. Esta diferença pode ser explicada devido ao fato de que o desenho pode levar o aluno a admitir informações equivocadas, como se presume que aconteceu com o aluno A no primeiro teste. No segundo teste, depois de um conhecimento matemático construído por dois meses no Ensino Superior, o aluno A percebe que não pode se basear na figura apenas pelo ângulo parecer ser reto e, por isso, trata-o como uma variável. Este raciocínio, no entanto, não pode ser exclusivamente atribuído à sua experiência na disciplina de Computador na Matemática Elementar.

No primeiro teste, presumindo $B\hat{A}C$ reto, o aluno A usa o conhecimento de ângulos suplementares para encontrar o ângulo $A\hat{C}B = 90° - \alpha$, mas não conseguiu ir além, apenas rabiscando a folha em busca de alguma informação relevante que lhe permitisse continuar.

No segundo teste, como mencionado anteriormente, o aluno A toma o ângulo $C\hat{A}B$ como uma variável e encontra o ângulo $A\hat{B}C = 180° - (\hat{A} + \alpha)$ usando o fato de que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é $180°$. O aluno A, mesmo percebendo a congruência dos ângulos $C\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$, não teve êxito em encontrar tal abertura em função de α, tratando-a como uma variável na resposta final.

O conteúdo matemático esperado na solução desta questão, no entanto, não apresentou evolução visto que o mesmo raciocínio (soma de ângulos internos de um triângulo) usado no último teste para encontrar o ângulo $A\hat{B}C$ também foi utilizado no primeiro teste para encontrar $A\hat{C}B$.

Figura 56 - Teste 1, Questão 3, Aluno C

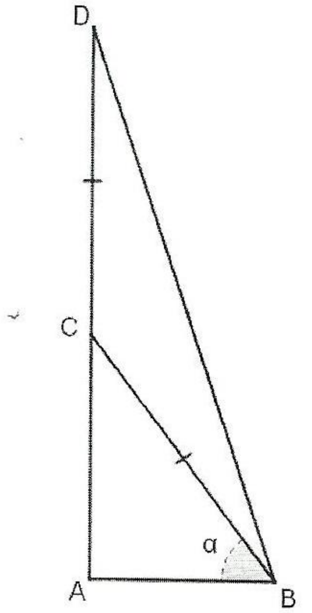


3) Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

Figura 57 - Teste 1, Questão 3, Aluno F

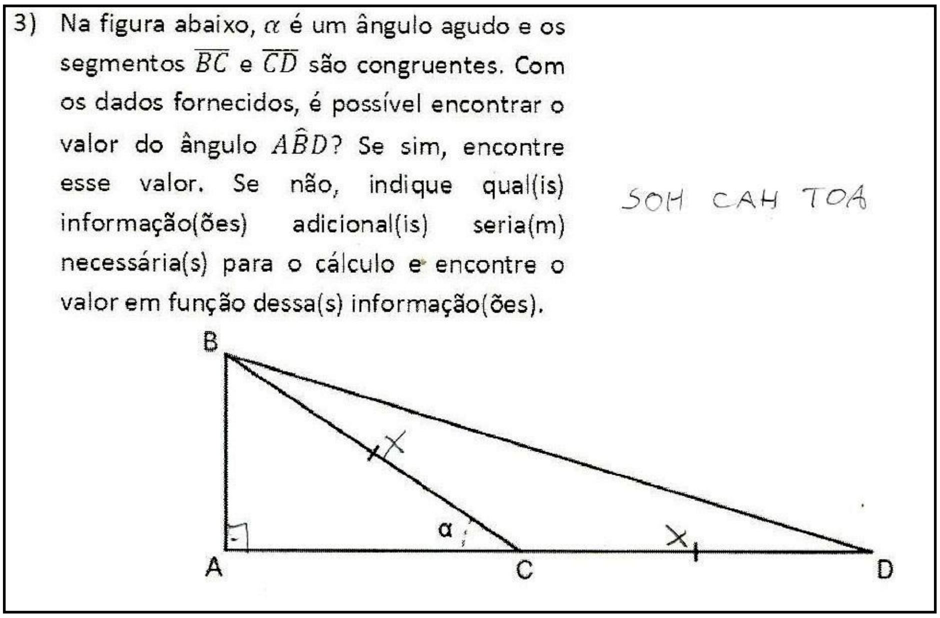
3) Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



Fonte: Acervo pessoal

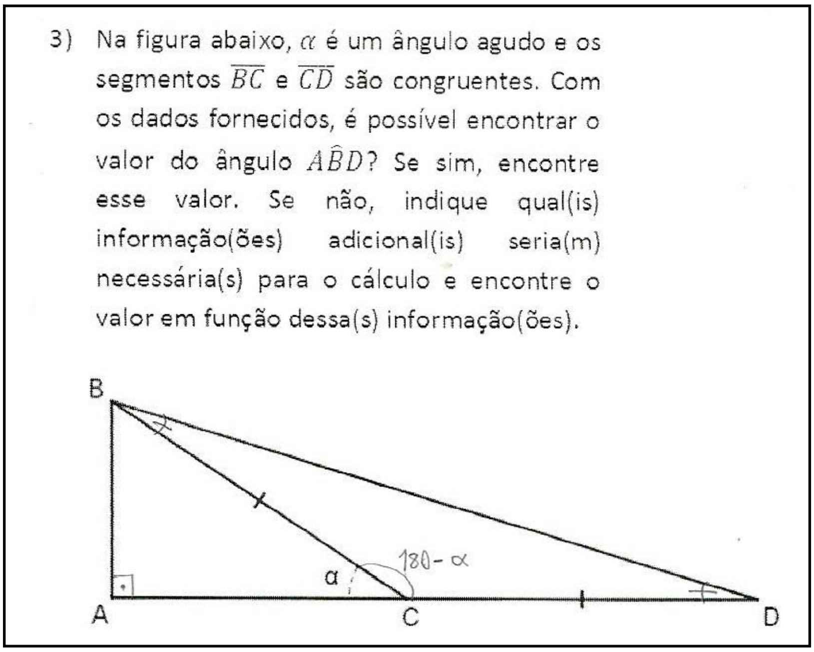
Nem todos os alunos mostraram evolução em seu desempenho na terceira questão dos testes. Os alunos C e F, que haviam deixado esta questão do primeiro teste em branco (Figuras 56 e 57, respectivamente), não evoluíram o conhecimento esperado, visto que suas questões 3 do segundo teste também encontram-se praticamente em branco. Notamos que, neste segundo momento, ambos fizeram a presunção esperada de que o ângulo $B\hat{A}C$ era reto. O único desempenho, além disso, foi por parte do aluno F (Figura 59), que notou a congruência dos ângulos $C\hat{B}D$ e $B\widehat{D}C$ – sem encontrar um valor para eles – e encontrou o ângulo $B\hat{C}D = 180° - \alpha$ utilizando seu conhecimento de ângulos complementares. Mesmo assim, nenhum dos dois alunos apresentou desenvolvimento considerável para a solução da questão.

Figura 58 - Teste 2, Questão 3, Aluno C



Fonte: Acervo pessoal

Figura 59 - Teste 2, Questão 3, Aluno F

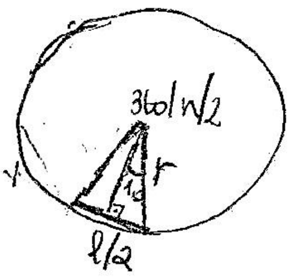


Fonte: Acervo pessoal

4.4. Questão 4

A última questão dos testes voltava aos polígonos regulares, desta vez inscritos em uma circunferência. No primeiro teste, os polígonos trabalhados eram um triângulo equilátero e um quadrado. Ambos possuem ângulos que podem ser facilmente encontrados, cujos valores de seno e cosseno são normalmente conhecidos pelos alunos, e mesmo se não fossem não seria errado deixá-los apenas indicados. Surpreendentemente, nenhum dos alunos aqui apresentados utilizou as relações trigonométricas, e os que apresentaram algum desenvolvimento para a questão, o fizeram com a utilização de relações aprendidas no Ensino Médio, como altura do triângulo equilátero e diagonal do quadrado. No segundo teste, o único polígono regular envolvido era o octadecágono – polígono de 18 lados – regular. Por ser uma figura menos comum e o problema não apresentar figura, esperava-se que os alunos apresentassem maior dificuldade na sua solução, mas a habilidade de generalização mostrou-se presente e o resultado surpreendeu, como veremos nas soluções a seguir.

Figura 60 – Teste 2, Questão 4, Aluno G


4) Seja uma circunferência de raio R e um polígono regular de 18 lados inscrito nessa circunferência. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do tamanho do lado desse polígono? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

$\frac{360}{18} = \frac{20}{2} = 10°$

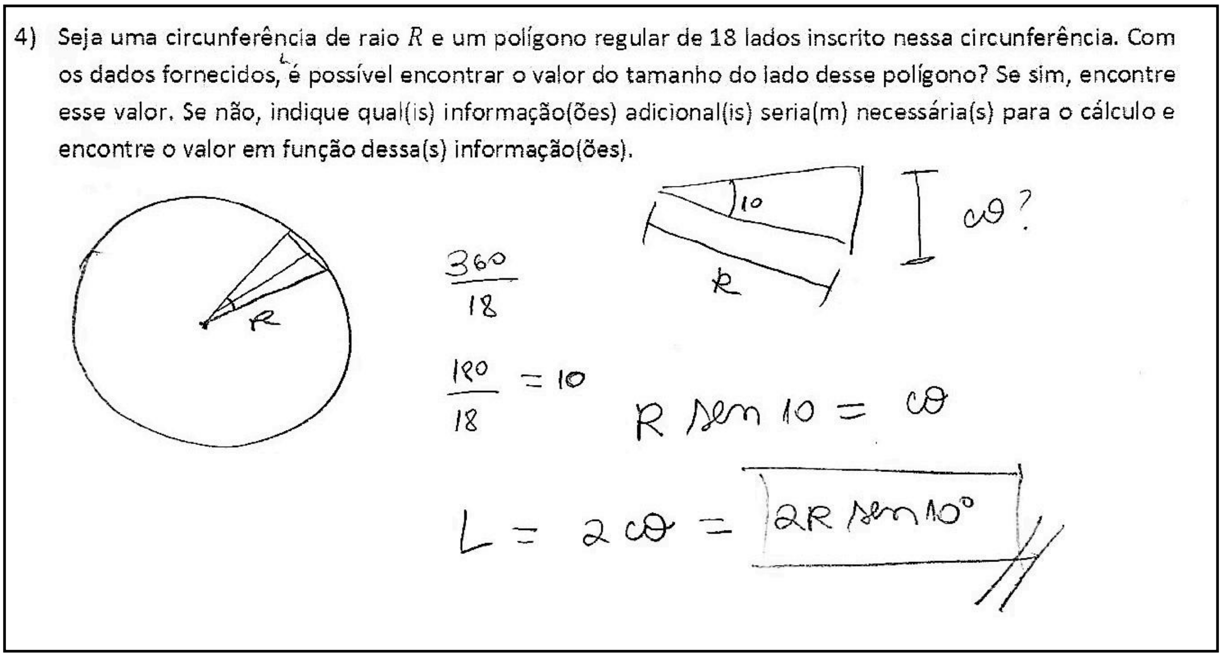
$sen\ 10° = \frac{l/2}{r}$

$\boxed{l = 2 * ((sen\ 10°) * r)}$

Obs: Não sei o seno de 10° de cór.

Fonte: Acervo pessoal

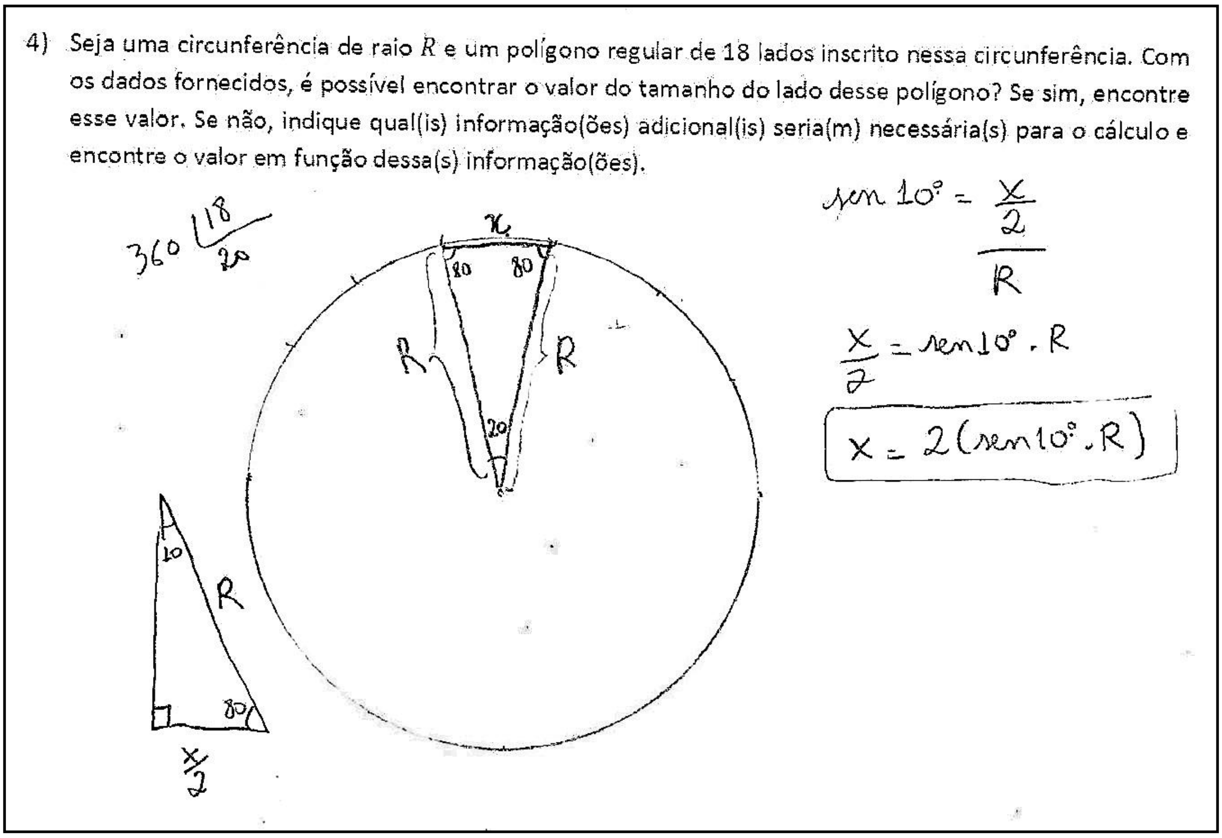
Figura 61 – Teste 2, Questão 4, Aluno A



4) Seja uma circunferência de raio R e um polígono regular de 18 lados inscrito nessa circunferência. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do tamanho do lado desse polígono? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

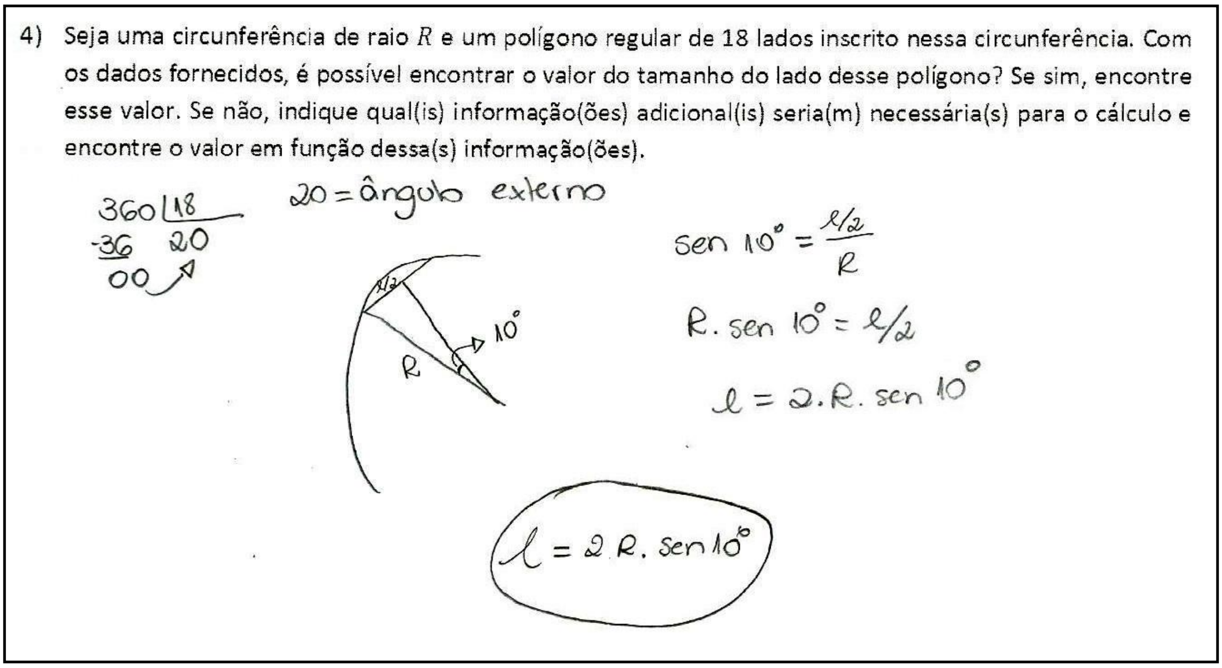
Figura 62 – Teste 2, Questão 4, Aluno E



4) Seja uma circunferência de raio R e um polígono regular de 18 lados inscrito nessa circunferência. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do tamanho do lado desse polígono? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

Figura 63 – Teste 2, Questão 4, Aluno D


4) Seja uma circunferência de raio R e um polígono regular de 18 lados inscrito nessa circunferência. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do tamanho do lado desse polígono? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

$360 \div 18 = 20$

20 = ângulo externo

$\text{sen } 10^\circ = \frac{l/2}{R}$

$R \cdot \text{sen } 10^\circ = l/2$

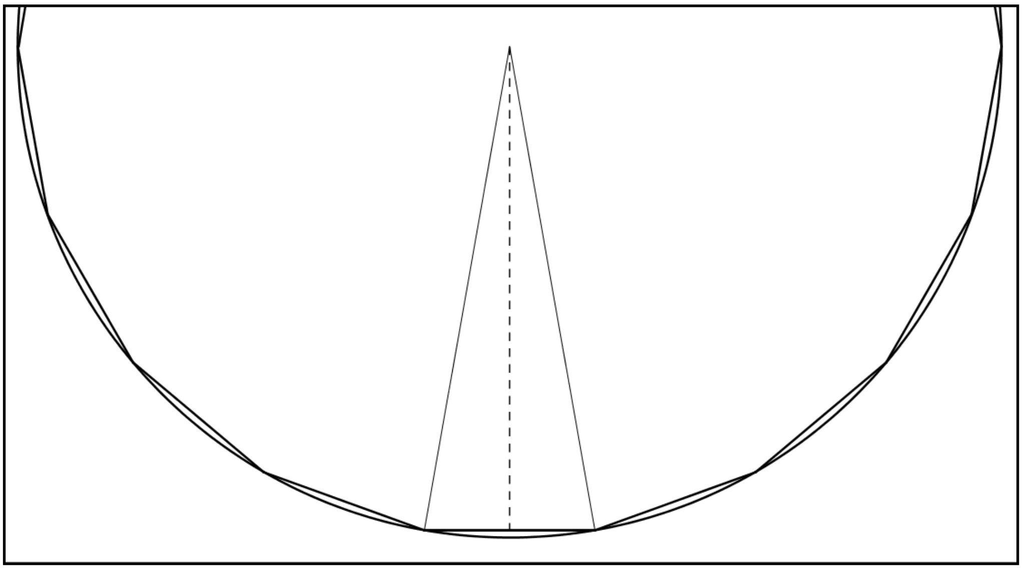
$l = 2 \cdot R \cdot \text{sen } 10^\circ$

$l = 2R \cdot \text{sen } 10^\circ$

Fonte: Acervo pessoal

Podemos notar nas Figuras 60, 61, 62 e 63 que quatro dos sete alunos – G, A, E e D, respectivamente – apresentaram raciocínio correto, rápido e eficiente, sem utilizar o desenho completo (e desnecessário) do polígono, focando-se apenas no triângulo isóscele formado por dois vértices adjacentes e seu centro e, consequentemente, o triângulo retângulo formado ao decompor este triângulo isóscele em dois triângulos a partir de sua altura, como mostra a Figura 64.

Figura 64 - Triângulo isóscele no octadecágono regular



Fonte: Acervo pessoal

Os quatro alunos encontraram o ângulo central do polígono como $\frac{360°}{18} = 20°$ e trabalharam com a relação seno de metade deste ângulo para encontrar a relação do raio dado com o lado procurado. Destes, destaca-se o avanço do aluno G, que dois meses antes não havia solucionado a última questão do teste (Figura 65), assim como as demais, sem qualquer tentativa de resolução. O aluno A, nesta questão em particular, também não apresentou desenvolvimento que o levasse a uma solução para o problema, como mostra a Figura 66.

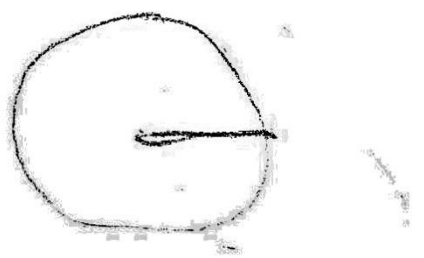
Figura 65 - Teste 1, Questão 4, Aluno G

4) Seja uma circunferência de raio R . Qual a razão entre o lado de um triângulo regular inscrito nessa circunferência e o lado de um quadrado inscrito nessa circunferência?

Fonte: Acervo pessoal

Figura 66 – Teste 1, Questão 4, Aluno A

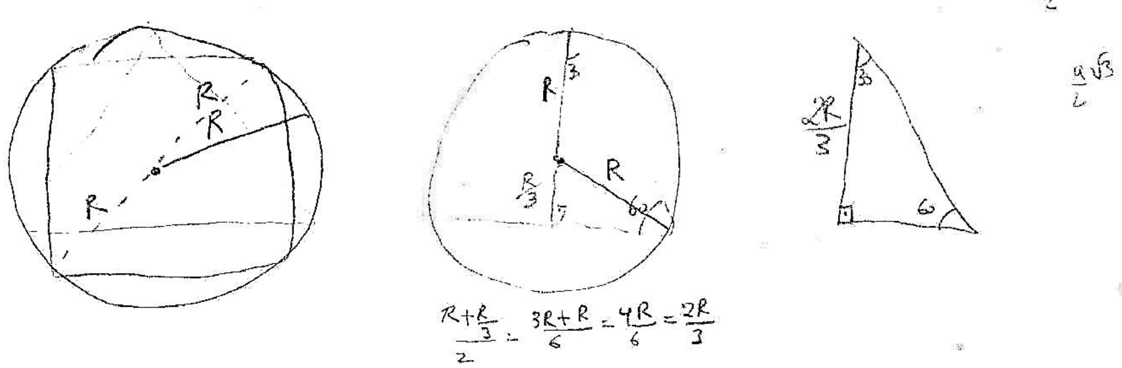
4) Seja uma circunferência de raio R . Qual a razão entre o lado de um triângulo regular inscrito nessa circunferência e o lado de um quadrado inscrito nessa circunferência?



Fonte: Acervo pessoal

Figura 67 – Teste 1, Questão 4, Aluno E

4) Seja uma circunferência de raio R . Qual a razão entre o lado de um triângulo regular inscrito nessa circunferência e o lado de um quadrado inscrito nessa circunferência?

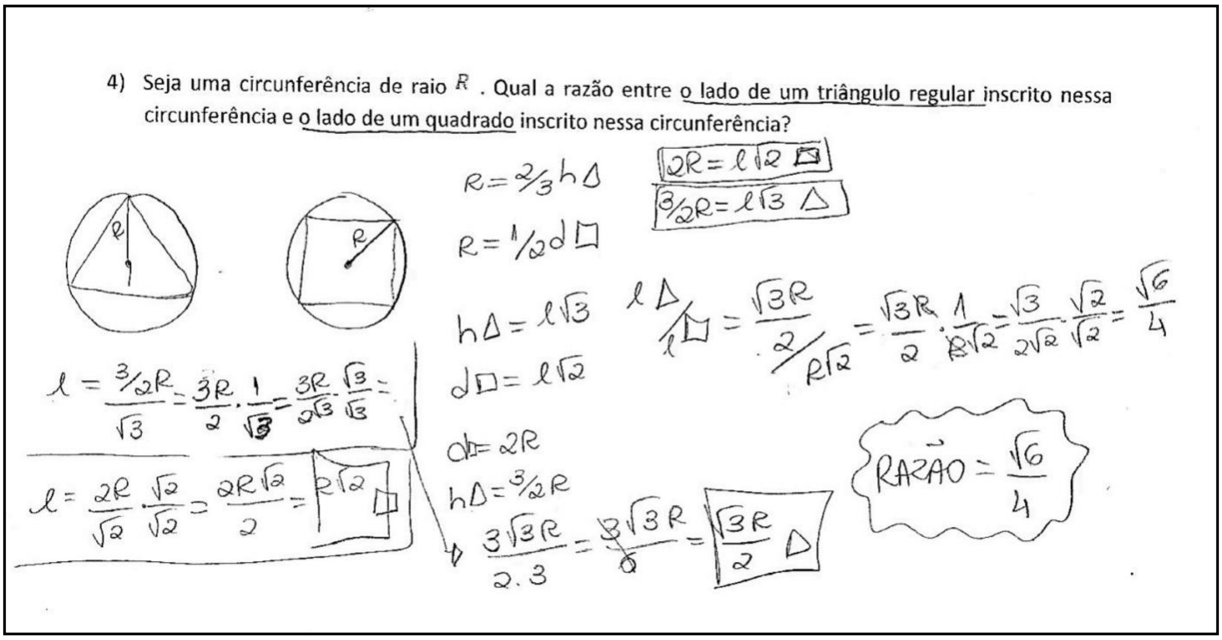


Fonte: Acervo pessoal

O aluno E apresentou cálculos confusos no caso do triângulo (Figura 67) e seu raciocínio parece confuso e pouco organizado. Embora tenha encontrado um triângulo retângulo favorável ao uso de relações trigonométricas, o aluno E indicou o lado que deveria medir R por $\frac{2R}{3}$, relação que, provavelmente, decorreu do fato de que o raio de uma circunferência circunscrita a um triângulo equilátero mede $\frac{2}{3}$ da *altura* deste triângulo.

O aluno E mostra então grande melhoria no seu raciocínio quando comparados os cálculos confusos do primeiro teste e a solução impecável do segundo (Figuras 62 e 67, respectivamente).

Figura 68 – Teste 1, Questão 4, Aluno D



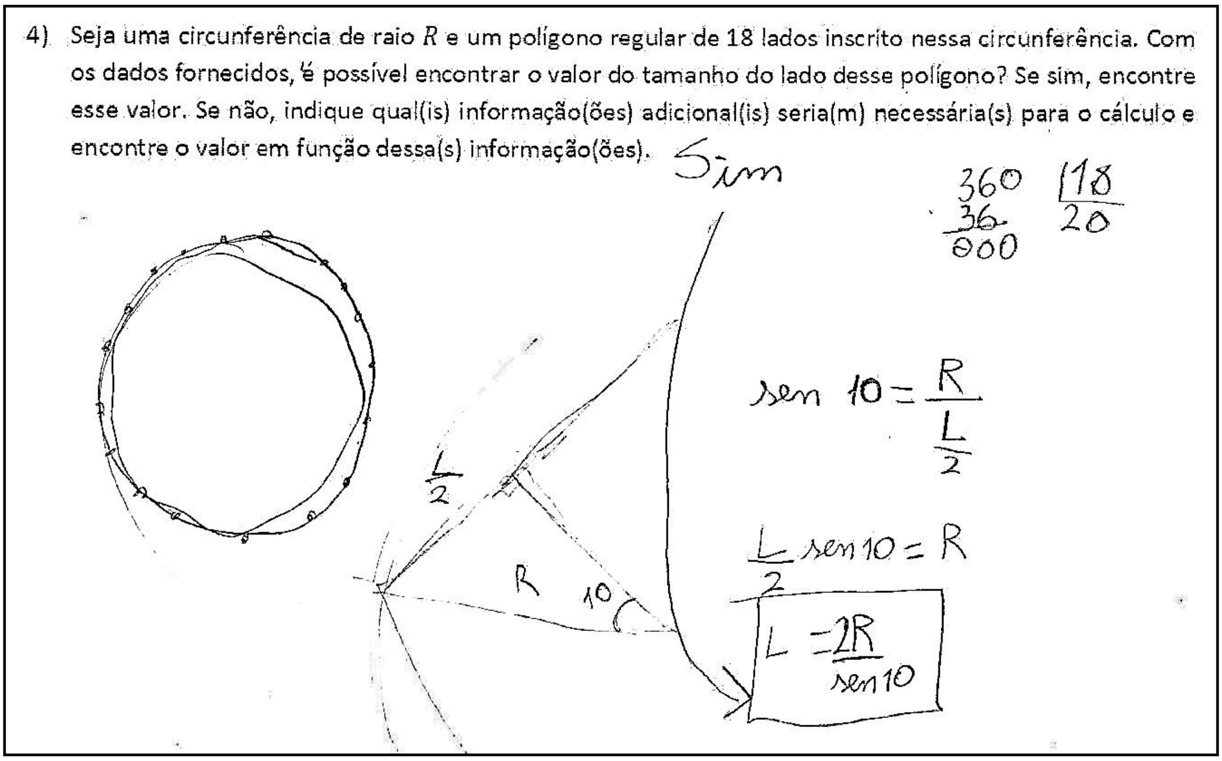
Fonte: Acervo pessoal

O aluno D baseou-se fortemente nas relações mencionadas anteriormente, indicando-as na folha (Figura 68). Ele usou $R = \frac{2}{3}h$, onde h indica a altura do triângulo, e $R = \frac{1}{2}d$, onde d indica a diagonal do quadrado, e para relacionar esta altura e esta diagonal com os lados, ele usou $h = l_3\sqrt{3}$ e $d = l_4\sqrt{2}$, onde l_3 e l_4 indicam o lado do triângulo e do quadrado, respectivamente. O único erro cometido pelo aluno D é que a correta relação da altura de um triângulo equilátero com o lado deste triângulo é $h = \frac{l_3\sqrt{3}}{2}$. A resposta final está coerente, sem usar conhecimentos que, futuramente, seriam trabalhados ao longo da disciplina.

Nota-se então uma grande evolução na aplicação de relações trigonométricas por parte do aluno D que inicialmente se baseava em fórmulas memorizadas para as relações entre os lados de polígonos regulares conhecidos.

Podemos notar que os alunos C, B e F (Figuras 69, 70 e 71, respectivamente) também apresentaram o raciocínio esperado para resolver a questão 4 do segundo teste, embora cada um com um pequeno erro ou confusão.

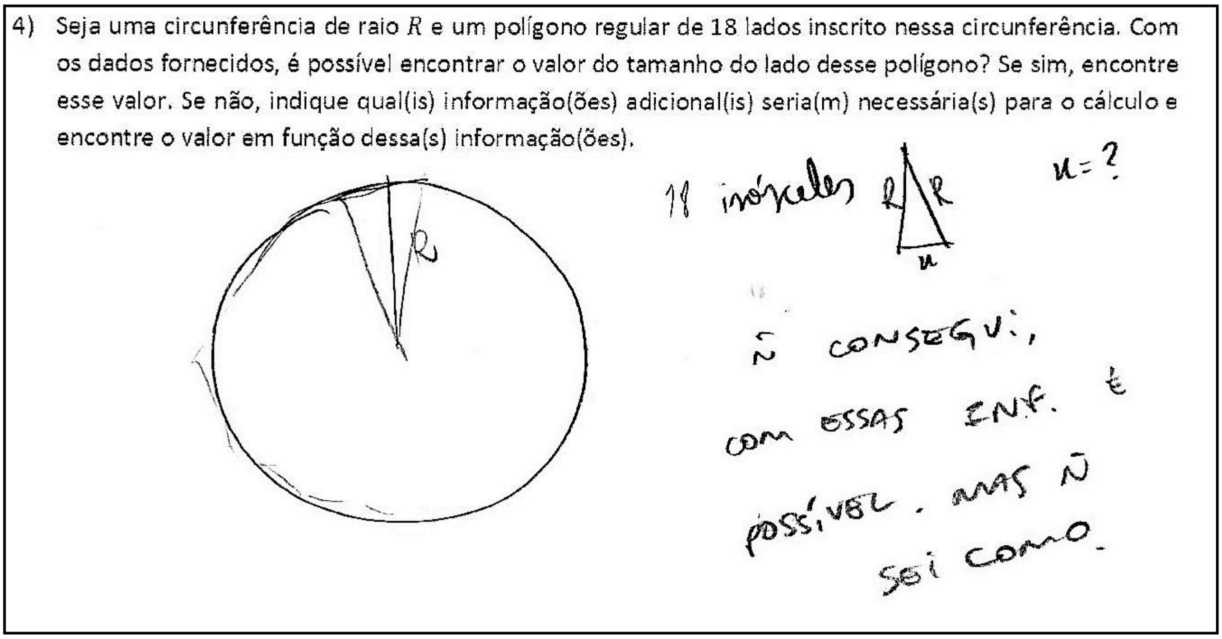
Figura 69 – Teste 2, Questão 4, Aluno C



Fonte: Acervo pessoal

O aluno C utilizou o triângulo retângulo esperado, porém enganou-se ao usar a relação trigonométrica seno como a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto ao ângulo analisado ao contrário da correta razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, como podemos perceber na Figura 69. A resposta final é coerente com este erro.

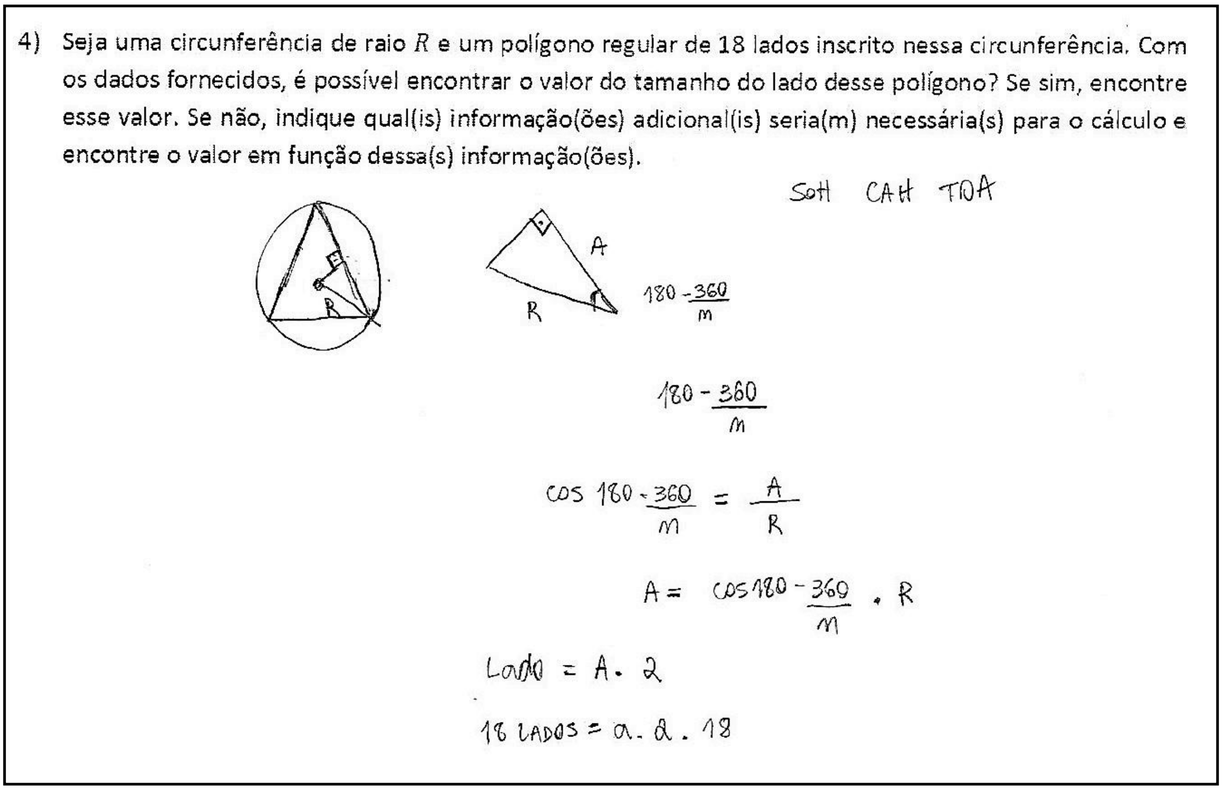
Figura 70 – Teste 2, Questão 4, Aluno B


4) Seja uma circunferência de raio R e um polígono regular de 18 lados inscrito nessa circunferência. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do tamanho do lado desse polígono? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

O aluno B notou a existência do triângulo isóscele como os demais colegas, mas não conseguiu encontrar algum ângulo que pudesse ser utilizado para prosseguir o cálculo (Figura 70).

Figura 71 – Teste 2, Questão 4, Aluno F

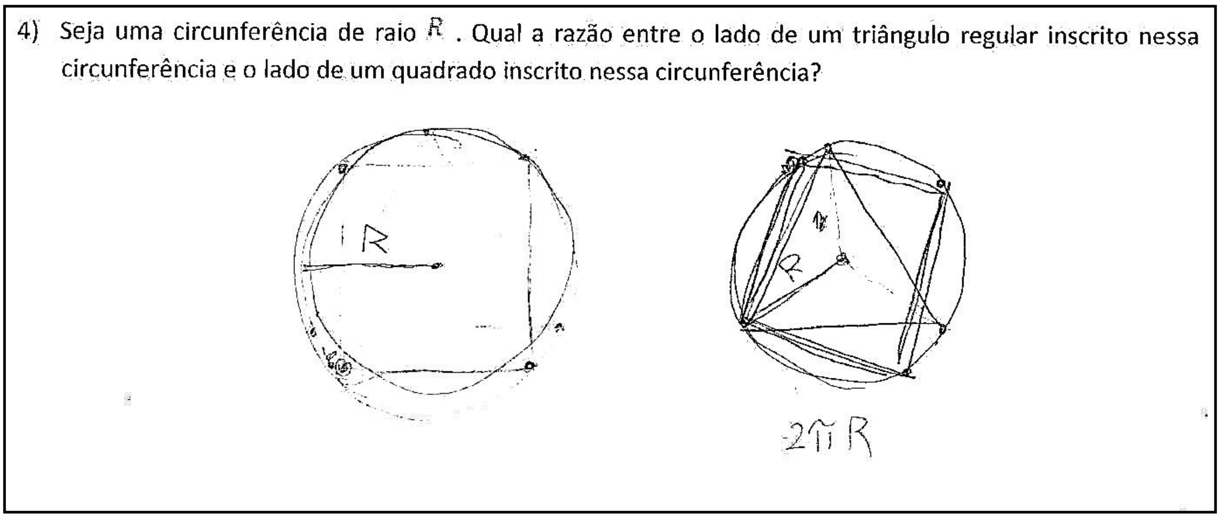

4) Seja uma circunferência de raio R e um polígono regular de 18 lados inscrito nessa circunferência. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do tamanho do lado desse polígono? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

Fonte: Acervo pessoal

Por último, o aluno F utilizou um triângulo equilátero – caso para $n = 3$ – para tomar como referência para o raciocínio no octadecágono (Figura 71). O aluno F identificou o triângulo retângulo e um ângulo generalizado para uma variável n que representa o número de lados do polígono. Este ângulo genérico, no entanto, não está correto já que $180° - \frac{360°}{n}$ representa o ângulo interno de um polígono regular e o que deveria ser usado na solução era metade deste ângulo. Ainda assim, o aluno F encontrou a relação correta do lado usando a relação trigonométrica cosseno.

O desempenho dos alunos B, C e F no primeiro teste mostra que houve uma evolução em seus raciocínios, mesmo que tenham cometido pequenos erros no segundo teste.

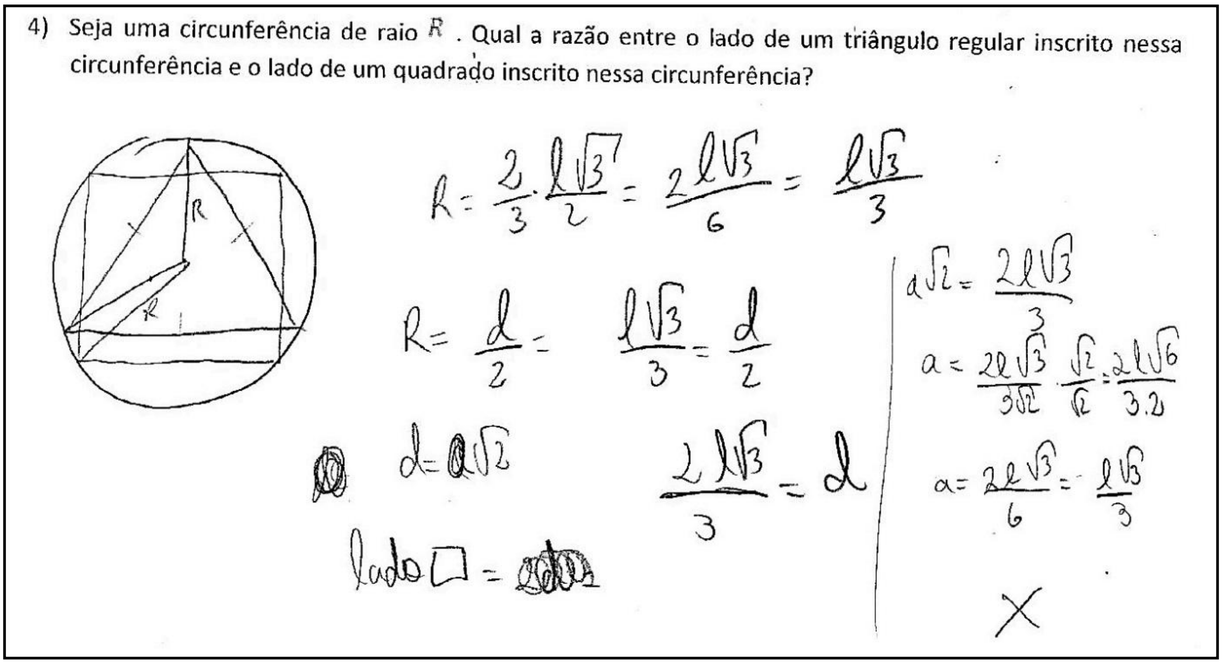
Figura 72 – Teste 1, Questão 4, Aluno C



Fonte: Acervo pessoal

No primeiro teste, o aluno C não teve desempenho considerável e apenas preencheu o espaço da folha com desenhos tentando encontrar uma relação gráfica para o problema, como mostra a Figura 72. Talvez se a questão apresentasse uma figura o aluno C pudesse ter evoluído para chegar a uma solução.

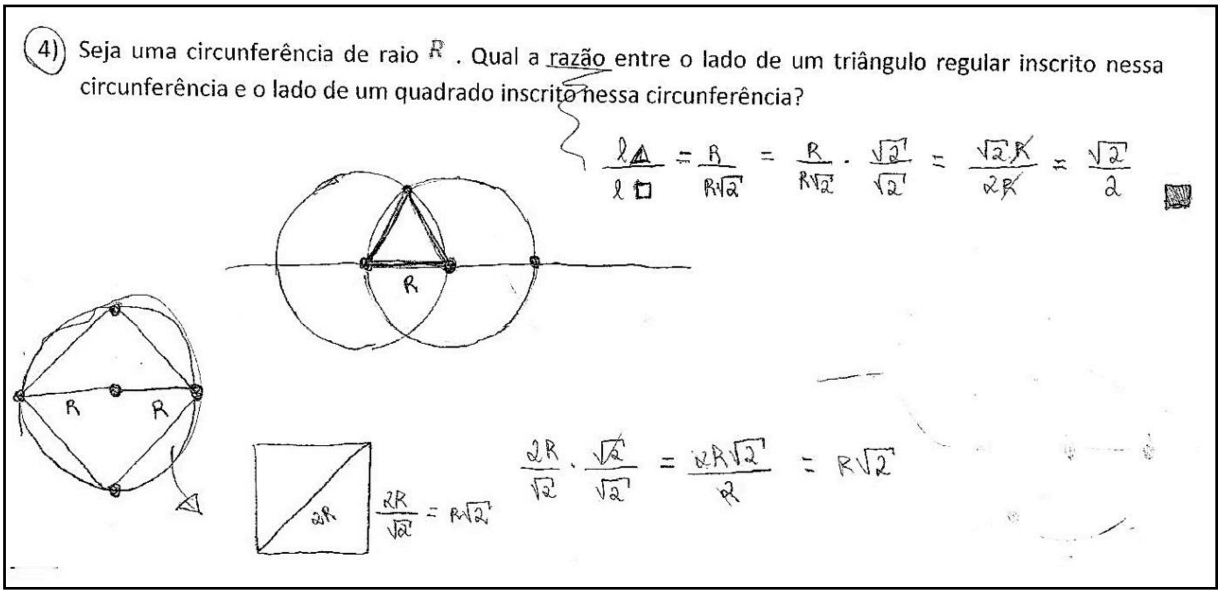
Figura 73 – Teste 1, Questão 4, Aluno B



Fonte: Acervo pessoal

O aluno B (Figura 73), assim como o aluno D, utilizou as relações entre o raio da circunferência circunscrita com a altura do triângulo equilátero e a diagonal do quadrado. Seus cálculos, no entanto, não avançaram para a solução do problema.

Figura 74 - Teste 1, Questão 4, Aluno F



Fonte: Acervo pessoal

Na última questão do primeiro teste, o aluno F mostrou uma confusão com o conceito de circunferência circunscrita, como mostra a Figura 74. No caso do quadrado, o conceito foi utilizado corretamente, com os vértices do quadrado sobre a circunferência. Para achar a relação entre o raio e o lado do polígono, o aluno F utilizou a diagonal do quadrado. No caso do triângulo, no entanto, o triângulo equilátero encontra-se entre duas circunferências de mesmo raio onde o centro de cada uma é um ponto da outra. Neste caso, embora errada, a relação entre o raio e o lado do triângulo foi encontrada coerentemente e a reposta final segue coerente.

A análise dos testes destes sete alunos mostra-nos raciocínios e soluções de diversas origens, tanto no primeiro quanto no segundo teste. Embora não possamos afirmar para todos os alunos, podemos notar uma convergência dos raciocínios dos alunos nas questões dos testes para os métodos trabalhados em aula durante estes dois meses de contato com a linguagem de programação Logo. Estes exemplos de melhorias proporcionadas pela linguagem confirmam minha ideia de que o Logo pode ser usado em salas de aula como um ambiente de aprendizado na formação de professores e profissionais no Ensino Superior.

5. Considerações Finais

Os sete alunos aqui apresentados foram escolhidos dentre vinte e sete que realizaram os dois testes. A escolha destes alunos levou em consideração seus desempenhos, visando analisar os que apresentaram melhorias aparentes em algumas (ou todas) as questões dos testes. Nesta análise seleta, foi possível perceber como a linguagem Logo pôde influenciar o raciocínio dos alunos para a solução dos problemas apresentados. É importante notar que nem todas as melhorias aqui apresentadas podem ser atribuídas ao contato com a linguagem Logo, visto que os participantes da pesquisa, como alunos do curso de Licenciatura em Matemática, também eram alunos concomitantemente de outras disciplinas na faculdade. As melhorias proporcionadas pela linguagem Logo são as melhorias no raciocínio estudado na disciplina Computador na Matemática Elementar: generalização com uso de variáveis, o trabalho com relações trigonométricas em um triângulo retângulo e o trabalho com a geometria de polígonos regulares.

Quando olhamos para os vinte e sete alunos que realizaram o teste, no entanto, não podemos confirmar esta influência. Uma análise estatística de todos os alunos que realizaram os testes mostra que 60% mostraram avanço em pelo menos uma questão. Esta análise foi feita comparando-se o desempenho de cada aluno no primeiro teste com o seu desempenho no segundo teste. Cada questão de cada aluno foi classificada como uma das seguintes categorias: “Apresenta evolução”, “Não apresenta evolução” ou “Nulo”, nos casos em que o aluno optou por não apresentar desenvolvimento para a questão em nenhuma das provas. De acordo com esta análise, apenas $18{,}4\%$ dos alunos apresentaram avanço na Questão 1 dos testes, que tratava de relações trigonométricas em triângulos retângulos para encontrar áreas pré determinadas, e $14{,}8\%$ na Questão 2, que tratava da geometria do polígonos regulares. As Questões 3 e 4, cujos conteúdos matemáticos eram o de generalização de um ângulo em um triângulo e polígonos regulares inscritos ou circunscritos a uma circunferência, respectivamente, apresentaram índices melhores, com $44{,}45\%$ e $40{,}75\%$ dos alunos apresentando evolução no raciocínio esperado para a solução destas questões, respectivamente.

No entanto, esta análise estatística é falha, pois rotula os alunos em grupos ignorando suas individualidades. Nela, vários alunos foram classificados na categoria “Nulo” em algumas questões (ou todas) por optarem não fazer o teste;

estes alunos simplesmente entregaram o teste em branco, sem se preocupar com o resultado final. Embora tenham aceitado participar desta pesquisa (ver Anexo A), nem todos os alunos participantes apresentaram uma postura comprometida no momento da realização dos testes. Outro caso que está presente nesta análise quantitativa é o de alunos que, já no primeiro teste, tinham conhecimento necessário para resolver alguma (ou todas) questão e, consequentemente, também o tinham no momento de resolver o segundo teste. Estes alunos foram classificados na categoria "Não apresenta evolução" em uma ou mais de suas questões, justamente por não apresentarem evolução em seu desempenho. Estatisticamente, porém, a categoria "Não apresenta evolução" parece contar apenas os alunos que não possuíam conhecimento suficiente para solucionar as questões previamente ao contato com a linguagem Logo e continuaram sem este conhecimento, mesmo depois deste contato de dois meses. Por motivos como este, optamos por realizar uma análise qualitativa de alguns alunos, em lugar de realizar uma análise quantitativa do todo.

Partindo então da análise dos sete escolhidos, cheguei a uma conclusão que vai ao encontro da ideia inicial: a linguagem Logo pode influenciar e, de fato, melhorar o aprendizado de Matemática dos alunos. Se esta melhoria pôde ser vista em alunos do Ensino Superior, que já têm um conhecimento matemático construído do Ensino Fundamental e Médio, creio que ela pode ser ainda mais bem aproveitada no aprendizado de alunos destas fases do Ensino. O uso da linguagem na formação de futuros professores de Matemática, na disciplina Computador na Matemática Elementar, pode levar-nos a, futuramente professores, resgatar a linguagem Logo como método de aprendizado na escola.

No entanto, é importante um bom planejamento para a construção de conceitos matemáticos para que não haja equívocos de compreensão. Para exemplificar, aponto um problema de nomenclatura que é apresentado por alguns dos alunos aqui analisados (Figuras 33, 39, 42, 49, 51, 52, 69 e 71): ao calcular o valor da abertura dos ângulos necessários nos triângulos, os alunos indicam todos os ângulos com um valor numérico como 180, ao invés de um ângulo medido em graus, como $180°$. Este equívoco é uma característica negativa que pode ter origem do uso da linguagem Logo quando não bem planejada. No software SuperLogo 3.0 (e na grande maioria de softwares que utilizam a linguagem Logo de programação), os alunos não precisam indicar que o número dado é um ângulo quando o comando usado necessita obrigatoriamente de um ângulo. Por exemplo, o comando

PARADIREITA acompanhado do número 90, automaticamente interpreta este número como sendo um ângulo e por isso faz a Tartaruga realizar uma virada de $90°$ para a direita. No computador, então, os alunos trabalham apenas com números nunca utilizando o símbolo "°" para representar um ângulo e, no papel, este costume permaneceu.

Para o intuito desta análise, isto não foi considerado como um erro, mas na construção matemática de um indivíduo, é importante notar a diferença entre um número e uma medida de ângulo, principalmente ao se estudar Trigonometria. Por exemplo, a equação utilizada por alunos nos testes aqui apresentados, $\operatorname{sen} 30 = \frac{1}{2}$, só é válida quando este 30 representa $30°$. Ao se introduzir o conceito de medidas em radianos, é muito importante que os alunos saibam diferenciar $\operatorname{sen} 30$ e $\operatorname{sen} 30°$.

Finalizo este trabalho reafirmando a ideia mencionada no começo: a linguagem Logo é perfeitamente aplicável no ensino matemático dos alunos de Ensino Superior, bastando ter um bom planejamento e ser bem aplicado.

Deixo minha esperança de que estes alunos, futuros professores, venham a utilizar a linguagem Logo como ambiente de aprendizado para seus alunos nos Ensinos Fundamental e Médio no futuro. Eu, como professor, com certeza o farei.

6. Referências

BARBOSA, P. M. O estudo da geometria. **Revista Benjamin Constant**, v. 25, p. 14-22, Ago. 2003.

BASSO, M. V. A. ; GRAVINA, M. A. **Mídias Digitais na Educação Matemática.** In: GRAVINA, M. A. et al. **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática.** 1ª Ed. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

BRASIL, Secretaria da Educação Básica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC-SEB. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em 9 Nov. 2013.

FERREIRA, R. B. J. Afinal, o que quer esta escola plural? **Rev. Educação EM FOCO**, v.1, n.1, p.37-43, Jul. 1997.

GRAVINA, M. A et al. **Geometria Dinâmica na Escola.** In: GRAVINA, M. A. et al. **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática.** 1ª Ed. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

HERNÁNDEZ, F. **Transgressão e mudança na educação: Os projetos de trabalho.** 1ª Ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

LOPES, S. E. **Alunos do Ensino Fundamental e Problemas Escolares: Leitura e Interpretação de Enunciados e Procedimentos de Resolução.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2007. Disponível em < http://cienciaematematica.vivawebinternet.com.br/media/dissertacoes/0c6078cfbd0d293.pdf> Acesso em 9 Nov. 2013.

PAPERT, S. A. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PAPERT, S. A. **Logo: computadores e educação.** 3ª Ed. São Paulo: Brasiliense, 1988.

SKOVSMOSE, O. Cenários Para Investigação. **Rev. Bolema – Boletim de Educação Matemática.** n.14. p.66-91. Disponível em < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose%28Cenarios%2900.pdf>. Acesso em: 11 Nov. 2013.

VALENTE, J. A. Por quê o computador na educação. **Computadores e Conhecimento: repensando a educação.** Campinas: Gráfica da UNICAMP, p. 24-44, 1993.

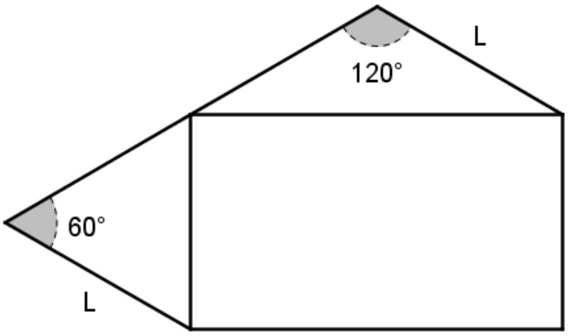
VALENTE, José Armando. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador. **O papel**, 2005. Disponível em: < http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1HXFXQKSB-23XMNVQ-M9/VALENTE_2005.pdf> Acesso em: 23 Out. 2013.

VIANNA, C. R. **Resolução de Problemas.** 2002. Disponível em < http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Carlos8.pdf> Acesso em: 11 Nov. 2013

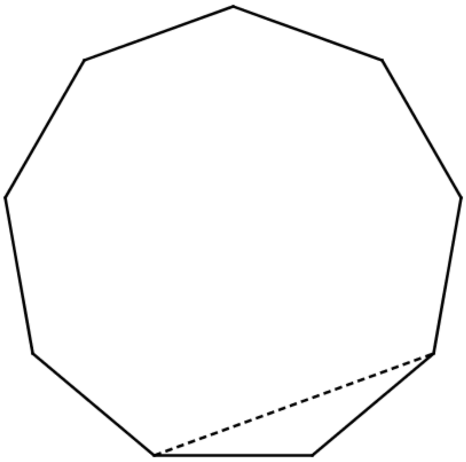
7. Apêndices

APÊNDICE A – Teste 1

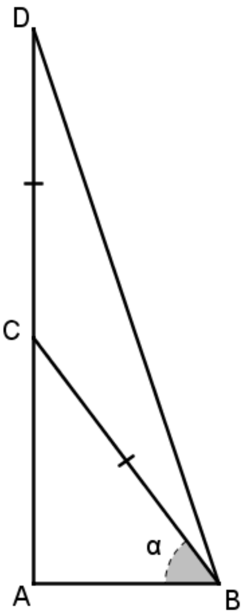
1) Na figura ao lado, os segmentos indicados têm uma medida L. Com os dados fornecidos, é possível calcular a área do retângulo? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



2) A figura ao lado representa um polígono regular de 9 lados, cujos lados medem L, e uma de suas menores diagonais, pontilhada. Com os dados fornecidos, é possível calcular o comprimento dessa diagonal? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



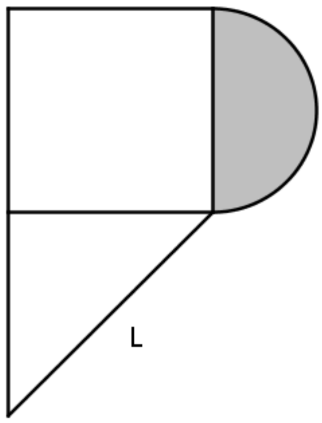
3) Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



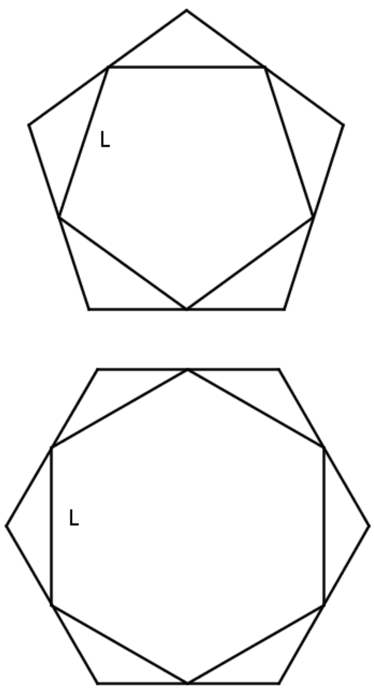
4) Seja uma circunferência de raio R. Qual a razão entre o lado de um triângulo regular inscrito nessa circunferência e o lado de um quadrado inscrito nessa circunferência?

APÊNDICE B – Teste 2

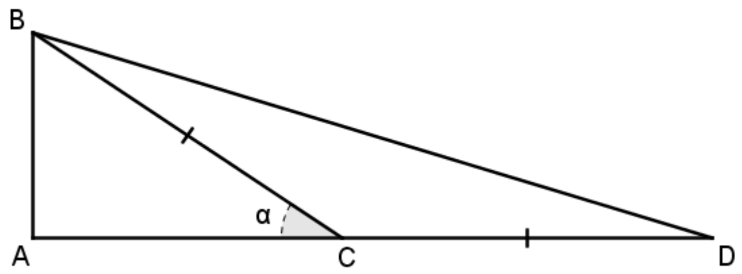
1) Na figura ao lado, o segmento indicado tem uma medida L. Com os dados fornecidos, é possível calcular a área da semicircunferência? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



2) A figura ao lado representa um pentágono e um hexágono regulares cujos lados medem L, inscritos em um pentágono e um hexágono regulares, respectivamente. Com os dados fornecidos, é possível calcular a razão entre o lado do pentágono circunscrito e do hexágono circunscrito? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



3) Na figura abaixo, α é um ângulo agudo e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}D$? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).



4) Seja uma circunferência de raio R e um polígono regular de 18 lados inscrito nessa circunferência. Com os dados fornecidos, é possível encontrar o valor do tamanho do lado desse polígono? Se sim, encontre esse valor. Se não, indique qual(is) informação(ões) adicional(is) seria(m) necessária(s) para o cálculo e encontre o valor em função dessa(s) informação(ões).

APÊNDICE C – Termo de Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ___________________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa desenvolvida pelo pesquisador Francisco Wagner de Moura. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pela Prof. Dra. Márcia Rodrigues Notare Menghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51) 33086198 ou e-mail marcia.notare@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmicos do estudo:

- Determinar a influência da linguagem Logo no aprendizado de Matemática.

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações oferecidas será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), sem identificação.

A colaboração se fará por meio de questionário escrito, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no telefone (51)81126763 ou e-mail chicofwm@hotmail.com.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

8. Anexos

ANEXO A – Plano de Ensino da Disciplina Computador na Matemática Elementar

Instituto de Matemática
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Dados de identificação

Período Letivo: **2013/2**

Professor Responsável pelo Plano de Ensino: **MARCIA RODRIGUES NOTARE MENEGHETTI**

Disciplina: **COMPUTADOR NA MATEMÁTICA ELEMENTAR I**

Sigla: **MAT01343** Créditos: 4 Carga Horária: 60

Súmula Desenvolvimento de conceitos e relações matemáticas dentro do ambiente LOGO. Polígonos regulares convexos e não-convexos, círculos, curvatura e raio de curvatura, mosaicos, espirais, processos recursivos, árvores binárias, fractais.

Currículos

Currículos	**Etapa Aconselhada**	**Natureza**
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - (032.00)	1	Obrigatória
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - NOTURNA - (033.00)	1	Obrigatória
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	1	Obrigatória
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - NOTURNO	1	Obrigatória

Objetivos - Exploração e consolidação de conteúdos matemáticos de Educação Básica em ambiente Logo;
- Aprendizagem da linguagem Logo;
- Desenvolvimento do raciocínio lógico;
- Formação de uma postura investigadora para construção de conhecimentos em Matemática;
- Propiciar que os alunos façam conexões entre a teoria (conteúdos programáticos) e a prática (criação de atividades voltadas à sala de aula).

Conteúdo Programático

Semana	**Título**	**Conteúdo**
1 a 9	Área	Comandos básicos, construções geométricas – polígonos regulares convexos,

Semana	Título	Conteúdo
	1	arcos de circunferência e circunferências, Logo gráfico e recursão de cauda. Processos iterativos.
10 a 18	Área 2	Progressões aritméticas e geométricas, processos recursivos gerais e mensurações, visitando árvores e fractais, curvatura e raio de curvatura, mosaicos, espirais.

Metodologia Aulas práticas no Laboratório de Informática. Alunos organizados em duplas ou trios: exploração, interpretação e elaboração de problemas matemáticos na linguagem de programação Logo. Desenvolvimento de um projeto, com ênfase na criação de atividades voltadas ao Ensino Médio ou Fundamental, no qual as duplas farão uso dos conhecimentos apreendidos e trabalhados no decorrer da disciplina.
Como recursos de apoio serão utilizados:
- material didático produzido para cada aula;
- software SlogoW 3.0 - Super Logo para plataforma Windows

Carga Horária Teórica: 60 horas
Prática: 0 horas

Experiências de Aprendizagem Criando Procedimentos (o comando aprenda);
Trabalho 1 – Polígonos Regulares
Regularidades
Trigonometria (sen a=cat op / hip, cos a= cat. adj / hip, ...)

Trabalho 2 – Triângulo isósceles e base média (trigonometria)
Polígonos inscritos e circunscritos (trigonometria)

Trabalho 3 – Polígonos inscritos e circunscritos
Programação: “loop” – Parte 1 (o comando atribua)

Trabalho 4 – Utilizando o comando repita e atribua para montar um “loop”
Programação: “loop” – Parte 2 (utilizando um “contador i”)
Utilizando comandos iterativos e recursivos para obter um “loop”
(comando se)

Trabalho 5 – Área de polígonos regulares e Volume de prismas regulares
Construção de Prismas regulares e de Pirâmides regulares

PROVA 1

Comandos lógicos(Se, Senão, Ou, E, Não...)
Lei dos Cossenos
Trabalho 6 – Classificação dos triângulos

Lei dos senos
Trabalho 7 – Construção de triângulos

Mosaicos e estrelas.
Trabalho 8 – Mosaico

Progressões no Logo (soma da P.A. e da P.G.)
Trabalho 9– Espirais e comprimento/perímetro

Árvores no Logo – árvores binárias, ternárias e n-árias
Exemplos de Fractais – algumas aproximações de fractais no logo
Trabalho 10 – História, conceitos e aplicações dos Fractais nas ciências; árvore ternária de "n-níveis"

PROVA 2

Aprimoramento dos projetos

Recuperações

Apresentação dos projetos(*) e prazo final para sua entrega

(*) Os projetos são apresentações em duplas na qual o aluno tem liberdade para mostrar o que aprendeu ao longo do semestre relacionando com a aplicação à sala de aula. Nos projetos os alunos deverão salientar os conteúdos de Matemática envolvidos na sua atividade criada para sala de aula, assim como seus objetivos e como irão realizá-la.

Critérios de Avaliação Para obter a aprovação, o aluno deverá:
- ter frequência igual ou superior a setenta e cinco por cento do total de horas letivas;
- ter nota final igual ou superior a 6,0;
- ter nota de cada área igual ou superior a 5,0.
- ter nota do projeto igual ou superior a 5,0.
- ter nota em cada prova igual ou superior a 3,0.

A nota de cada área será determinada pela média ponderada entre a prova da área (com peso 2) e a média aritmética de quatro trabalhos (com peso 1).
Serão feitos cinco trabalhos para cada área, dos quais quatro deles - escolhidos aqueles com as notas mais altas - serão utilizados para o cálculo da média. No cômputo da média aritmética desses quatro trabalhos será atribuída nota zero para os não realizados. A nota final será determinada pela média aritmética entre as notas de cada área e do projeto.
O conceito final será atribuído de acordo com os seguintes intervalos:
Conceito A para nota final >= 9,0;
Conceito B para 7,5 <= nota final < 9,0;
Conceito C para 6,0 <= nota final < 7,5;
Os alunos que não atingiram as notas mínimas para aprovação terão direito a recuperar as notas das provas se a média aritmética das duas provas (prova 1 e prova 2) for superior ou igual a 3,0, assim como as notas de trabalhos e projetos entregues no prazo.
Os alunos não aprovados, mas que cumpriram a exigência de frequência mínima receberão conceito final D e os demais FF.

Atividades de Recuperação Previstas Os dez trabalhos realizados ao longo do semestre são feitos e entregues durante as aulas e será oportunizado que os trabalhos sejam refeitos desde que originalmente tenham sido entregues nas datas previstas no cronograma.
Já os alunos com frequência mínima exigida e média aritmética das duas provas maior ou

igual a 3,0, que não forem aprovados na disciplina por qualquer um dos critérios anteriormente enunciados, poderão prestar:
- prova de recuperação para uma das provas de área, substituindo a nota da prova, com o conteúdo desenvolvido na respectiva prova. O aluno será aprovado caso a média recalculada seja igual ou superior a 6,0, valendo a atribuição de conceitos descrita nos critérios de avaliação.
- exame, no qual o conteúdo será o que foi desenvolvido durante todo o semestre. O aluno será aprovado caso a nota do exame seja igual ou superior a 6,0, sendo atribuído conceito C se a nota da recuperação for inferior a 9,0 e conceito B se a nota do exame for superior ou igual a 9,0.

Ainda, o aluno poderá refazer o projeto, caso seja entregue no prazo, a fim de atingir os critérios exigidos para aprovação. Os alunos que tiverem interesse também podem prestar as provas de recuperação com a finalidade de elevar o conceito.

Bibliografia

Básica Essencial

PAPERT, SEYMOUR - A Máquina das Crianças - Repensando A Escola na Era da Informatica - Editora Artmed (ISBN: 8536310588)

Básica

ZENI, Loiva Cardoso de - Explorando Matemática no ambiente Super Logo Windows. Cadernos de Matemática e Estatística ? Série B: Trabalho de apoio didático. - Editora IM/UFRGS

Complementar

Abelson, Harold; DiSessa, Andrea - Turtle geometry :the computer as a medium for exploring mathematics - Editora Mit (ISBN: 0262510375)

Outras Referências
Não existem outras referências para este plano de ensino.

Observações Alunos de doutorado vinculados aos programas de pós-graduação em Matemática ou em Matemática Aplicada poderão realizar seu estágio de docência nesta disciplina.