

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática

**ANÁLISE DE METAESTABILIDADE EM CADEIAS DE MARKOV  
FINITAS ATRAVÉS DE GRAFOS**

SUZI ALVES CAMEY

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de mestre.

Orientação: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Sara Ianda Corrêa Carmona (UFRGS - IM)

Banca examinadora:

Prof. Artur Oscar Lopes  
Prof. Sílvia Regina Costa Lopes  
Prof. Elisabeti Kira

Maio de 1998  
Porto Alegre

## AGRADECIMENTOS

À professora Sara que mais do que simplesmente orientar esta dissertação foi um exemplo de professora, pesquisadora e orientadora.

Ao programa de Pós-graduação, em especial aos Professores que o compõe.

Ao Instituto de Matemática, por ter fornecido toda a infra-estrutura necessária para a realização deste trabalho.

Aos Funcionários pela presteza em colaborar, em especial a Isabel.

A Luciana por todo o apoio.

Aos amigos: Angélica, Silvana, Giovani, Vânia, Gustavo, Patrícia e Flávio pelos momentos de descontração.

Aos meus pais, por acreditarem em mim.

17589

DISSERTACAO/MAT  
C182A  
1998  
E.2

MAT  
1998/219896-9  
1998/09/02  
B063

## RESUMO

Consideramos uma cadeia de Markov  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  com espaço de estados finito e matriz de transição dada por

$$\mathbb{P}^\varepsilon = (1 - \varepsilon)\mathbb{P}^1 + \varepsilon\mathbb{P}^2, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

onde:  $\mathbb{P}^1$  é a matriz de transição de uma cadeia de Markov  $(X_n^1)_{n \geq 0}$  com  $l$  classes ergódicas e  $\mathbb{P}^2$  é a matriz de transição de uma cadeia de Markov  $(X_n^2)_{n \geq 0}$  irreduzível e aperiódica. Provamos, utilizando a técnica de "grafos" de Freidlin e Wentzell [6], alguns resultados sobre o problema do primeiro instante de saída de um domínio contendo várias classes ergódicas. Mostramos que tal cadeia exibe um comportamento metaestável através da análise do limite de  $P(X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x)$ ,  $x, y \in S$ , quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \downarrow 0$  e  $n(\varepsilon) \approx \frac{c}{\varepsilon}$ ,  $c > 0$  no sentido de que  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon n(\varepsilon) = c$ . Para isto analisamos as propriedades de certos domínios chamados "ciclos".

## ABSTRACT

We consider Markov chain  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  with finite state space and transition matrix as follows

$$\mathbb{P}^\varepsilon = (1 - \varepsilon)\mathbb{P}^1 + \varepsilon\mathbb{P}^2, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

where:  $\mathbb{P}^1$  is the transition matrix of a Markov chain  $(X_n^1)_{n \geq 0}$  with  $l$  ergodic classes and  $\mathbb{P}^2$  is the transition matrix of a Markov chain  $(X_n^2)_{n \geq 0}$  irreducible and aperiodic. We prove, using the FW graphical technique, some results on the first exit problem from a domain containing many ergodic classes. We show that these chain exhibit metastable behavior through the analysis of the limit  $P(X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x)$ ,  $x, y \in S$ , when  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \downarrow 0$  and  $n(\varepsilon) \approx \frac{c}{\varepsilon}$ ,  $c > 0$  in the sense that  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon n(\varepsilon) = c$ . For this we analyze the properties of special domains called "cycles".

## ÍNDICE

<b>0 - Introdução</b> .....	1
<b>Capítulo 1 - Grafos em cadeias de Markov finitas</b> .....	5
1.1 - Definição de grafos .....	5
1.2 - Distribuição estacionária .....	8
1.3 - Ponto de saída .....	10
1.4 - Tempo de saída .....	13
1.5 - Número esperado de visitas (ou retornos) .....	17
<b>Capítulo 2 - Resultados assintóticos preliminares</b> .....	20
2.1 - Distribuição limite .....	21
2.2 - Ponto e tempo de saída .....	26
2.3 - Transições entre classes e tempo de saída de uma classe .....	33
2.4 - Tempo de saída de uma união de classes ergódicas .....	35
<b>Capítulo 3 - Renormalização e ciclos</b> .....	43
3.1 - Ciclos de ordem zero .....	43
3.2 - Ciclos de primeira ordem .....	44
3.3 - Renormalização e ciclos de ordem superior .....	59
3.4 - Descrição dos limites metaestáveis .....	63
<b>Apêndice - Resultados de processos estocásticos</b> .....	65
<b>Referências</b> .....	74

## 0 - INTRODUÇÃO

A metaestabilidade consiste basicamente em fenômenos que apresentam “falsos” estados de equilíbrio, ou seja, um fenômeno pode apresentar-se estável por um determinado período e a partir de alguma alteração nas condições em que ele se encontra, fazer uma transição para um outro estado de equilíbrio.

Um exemplo de metaestabilidade (ver Vares [15]) pode ser dado através de uma simples garrafa de cerveja. Muitas pessoas já devem ter presenciado o fenômeno que ocorre quando pegamos uma garrafa de cerveja, que esteve no freezer por um longo período, mas que apesar disso ainda se encontra em seu estado líquido, e que ao ser tocada, quase instantaneamente fica congelada. Isso se deve ao fato de que a cerveja apresentava um “falso” estado de equilíbrio (líquido), mas ao contato das mãos com a garrafa ela alcança outro estado (sólido).

Este fenômeno está relacionado à Mecânica Estatística, que é um ramo da Física Teórica que estuda propriedades macroscópicas de sistemas com muitos subsistemas microscópicos interagindo (sistemas de infinitas partículas: átomos, moléculas, etc) e tenta relacionar estas propriedades com o que é conhecido sobre a interação destas partes microscópicas. Um exemplo de tais teorias macroscópicas é a termodinâmica, que descreve matematicamente sistemas em equilíbrio, como gases e líquidos. As variáveis envolvidas são estados macroscópicos: pressão, densidade, temperatura, etc (ver Martin-Löf[12]).

Neste sentido, várias classes de processos estocásticos markovianos (principalmente sistemas de infinitas partículas) têm sido propostas como modelos para a evolução temporal destes sistemas (ver Ligget [11]), sendo que um dos problemas mais difíceis é entender e modelar o fenômeno da metaestabilidade. Neste contexto, a metaestabilidade pode ser resumida da seguinte maneira: um processo estocástico com uma única medida invariante, sob certas condições iniciais, descreve por um longo período uma medida “estacionária” (estado metaestável) que não é o equilíbrio real, sendo que no final, faz uma abrupta transição para este equilíbrio (ver Galves, Olivieri e Vares [7]). Alguns autores têm se dedicado a modelar tais fenômenos: Cassandro, Galves, Olivieri e Vares [2], Galves, Olivieri e Vares [7], Vares [15] e outros.

A metaestabilidade também pode ser vista em cadeias de Markov finitas cujas probabilidades de transição dependem de um pequeno parâmetro. Nesta dissertação tratamos desta situação e as principais referências são: Freidlin [5], Freidlin e Wentzell [6], Catoni e Cerf [3], Olivieri e Scoppola [13] e Scoppola [14]. Todos estes trabalhos envolvem probabilidades de transição exponencialmente pequenas em relação a um grande parâmetro  $\beta$ . Nestes trabalhos a principal questão é a existência de estados ou classes com um grande poder de atração, de onde o processo só consegue sair depois um longo período. Cada um dos artigos traz uma contribuição especial para esta dissertação: em Freidlin [5] foram introduzidas as idéias de “grafos” e “ciclos” e posteriormente também utilizadas em Catoni e Cerf [3]. Nesta dissertação, grafos,

“renormalização” de uma cadeia e ciclos são ferramentas fundamentais. Um conceito de renormalização encontra-se em Scoppola [14].

O objetivo do nosso estudo é analisar o fenômeno de metaestabilidade num processo estocástico markoviano mais simples possível, isto é, uma cadeia de Markov finita, irredutível e aperiódica. Mais especificamente, partimos de uma cadeia de Markov  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ , com espaço de estados finito  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , com  $l$  classes recorrentes e sem estados transientes. Sabemos, através da teoria de cadeias de Markov, que  $(X_n^1)_{n \geq 0}$  possui  $l$  medidas invariantes extremas (Definição A.16) cada uma com suporte em classes recorrentes distintas (e portanto disjuntas). É bem conhecido que seu comportamento assintótico, quando  $n \rightarrow \infty$ , depende do estado inicial (Observação A.1). Esta cadeia é então “perturbada” por uma nova cadeia de Markov  $(X_n^2)_{n \geq 0}$  irredutível e aperiódica, com o mesmo espaço de estados  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  e portanto, com uma única medida estacionária (ver condições suficientes no Apêndice), da seguinte maneira: introduzimos um “pequeno” parâmetro  $0 < \varepsilon < 1$  e consideramos então a cadeia de Markov  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  com matriz de transição

$$\mathbb{P}^\varepsilon = (1 - \varepsilon)\mathbb{P}^1 + \varepsilon\mathbb{P}^2,$$

onde:

$\mathbb{P}^1 = (b_{xy})_{x,y \in S}$  é a matriz de transição de  $(X_n^1)_{n \geq 0}$  e

$\mathbb{P}^2 = (a_{xy})_{x,y \in S}$  é a matriz de transição de  $(X_n^2)_{n \geq 0}$ .

Podemos pensar que  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  é o resultado de uma “pequena” perturbação em  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ , através de  $(X_n^2)_{n \geq 0}$ , pois, quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , a matriz  $\mathbb{P}^\varepsilon$  converge para a matriz  $\mathbb{P}^1$ . Esta nova cadeia tem também, para cada  $\varepsilon > 0$  fixo, uma única medida invariante.

Para analisar a questão da “estabilidade” da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  vamos estudar o comportamento assintótico de

$$P^\varepsilon(X_n^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x), \quad x, y \in S,$$

quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon \downarrow 0$ . Uma das principais ferramentas nesta análise é a idéia de grafo. No Capítulo 1, definimos alguns tipos de grafos e mostramos sua aplicação numa cadeia de Markov finita genérica. Utilizando grafos é possível expressar de forma explícita as distribuições estacionárias, a probabilidade da cadeia escolher o estado  $y$ ,  $y \in S$ , no primeiro instante em que sai de um conjunto  $W^c$ ,  $W^c \subseteq S$  ( $y$  é um ponto de saída), o tempo médio que a cadeia necessita para sair de  $W^c$  e o número médio de retornos (ou visitas) a um estado  $y$  antes de sair de um conjunto  $W^c$ . A real importância de tal ferramenta está no fato de que as expressões acima citadas são somas com um número finito de parcelas obtidas através de grafos, enquanto que na teoria clássica de Processos Estocásticos, elas muitas vezes recaem em séries (mesmo quando o espaço de estados é finito). Por exemplo, sendo  $V \subseteq S$ , o número médio de retornos (ou visitas) a um estado  $y$  antes de sair de  $V$  é calculado de acordo com (1.5.1), isto é, através de uma série.

No Capítulo 2, mostramos que, fazendo primeiro  $\varepsilon \downarrow 0$  e depois  $n \rightarrow \infty$ , o limite de  $P^\varepsilon(X_n^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x)$  depende do estado inicial  $x$ . Ao invertermos a ordem dos limites,

ou seja, fazendo primeiramente  $n \rightarrow \infty$  e depois  $\varepsilon \downarrow 0$ , a mesma probabilidade acima converge para um valor que não depende do estado inicial. Além disso, provamos que tal limite é, na realidade, uma das distribuições estacionárias de  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ , a qual é dada explicitamente por uma combinação convexa das distribuições extremas de  $(X_n^1)_{n \geq 0}$  (ver Proposição A.3).

Como podemos perceber, trocando a ordem dos limites em  $n$  e  $\varepsilon$  obtém-se resultados diferentes. Isto nos leva a pensar no que aconteceria se introduzíssemos uma dependência entre  $n$  e  $\varepsilon$ . No Capítulo 3, mostramos que se  $n \equiv n(\varepsilon)$  é da ordem de  $\frac{c}{\varepsilon}$  ( $c$  constante positiva), é possível determinar uma constante  $c_1 > 0$  tal que se  $n(\varepsilon) < \frac{c_1}{\varepsilon}$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ , iniciando num estado de uma das classes recorrentes da cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ , permanece nela, quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , com probabilidade 1. A cadeia só sairá da classe inicial quando  $n(\varepsilon) > \frac{c_1}{\varepsilon}$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Mais geralmente, mostraremos que existem constantes  $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ , todas positivas, e conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1} \equiv S$  (os quais são uniões de classes ergódicas), tais que, quando  $\frac{c_i}{\varepsilon} < n(\varepsilon) < \frac{c_{i+1}}{\varepsilon}$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ , iniciando em  $A_{i+1}$ , permanecerá neste conjunto com probabilidade convergindo para 1, quando  $\varepsilon \downarrow 0$ . Estas diferentes faixas de velocidade determinam os limites metaestáveis: mostraremos que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon(X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in A_{i+1} \mid X_0^\varepsilon = x) = 1, \quad \forall x \in A_{i+1}$$

e

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon(X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x), \quad \forall y \in A_{i+1}$$

depende somente de  $y$  para  $\frac{c_i}{\varepsilon} < n(\varepsilon) < \frac{c_{i+1}}{\varepsilon}$ , com  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Podemos dizer então que dependendo da velocidade do tempo  $n(\varepsilon)$  a cadeia apresenta “falsos” estados de equilíbrio (estado metaestável), somente alcançando o equilíbrio real quando

$$n(\varepsilon) > \frac{c_m}{\varepsilon},$$

para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Os conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  são determinados através do conceito de renormalização de cadeias de Markov e de ciclos. Essas idéias foram utilizadas por Freidlin [5] e Scoppola [14]. Ainda no Capítulo 3, definiremos o que é um ciclo e como a renormalização da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  pode nos ajudar na determinação dos ciclos. Além disso, veremos que os conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  são uniões de classes ergódicas correspondente aos diferentes ciclos. Neste mesmo capítulo mostraremos ainda que a velocidade necessária para a cadeia escapar de um ciclo não depende do ponto inicial dentro do ciclo, ou seja, partindo de qualquer ponto do ciclo a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  necessita da mesma velocidade para deixá-lo.

No Apêndice apresentamos alguns resultados de cadeias de Markov os quais podem ser encontrados em bibliografia básica como: Karlin e Taylor [10], Isaacson e Madsen

[8] e muitos outros. A seleção destes resultados foi baseada em sua utilização nesta dissertação. O objetivo do Apêndice é facilitar a leitura deste trabalho para o leitor não familiarizado com cadeias de Markov. No decorrer do texto aparecerão referências ao Apêndice, sempre representadas pela letra A.

Os teoremas apresentados no Capítulo 1 podem ser encontrados em Catoni e Cerf [3], mas sem as correspondentes demonstrações. Neste mesmo capítulo estas demonstrações são feitas em detalhes com base nas provas apresentadas em Freidlin e Wentzell [6] para resultados análogos. Já os resultados apresentados nos Capítulos 2 e 3 são totalmente inéditos.



# CAPÍTULO 1

## GRAFOS EM CADEIAS DE MARKOV FINITAS

### 1.1 - Definição de grafos

Neste capítulo introduzimos a idéia de grafo e mostramos como aplicá-la na análise de uma cadeia de Markov finita.

Podemos definir um “grafo orientado” em  $S \neq \emptyset$ , finito, como um conjunto de pontos de  $S$  ligados aos pares através de setas orientadas: “ $x \rightarrow y$ ”,  $x, y \in S$ . Utilizando a notação  $g$  para um grafo, temos  $g \subseteq \{x \rightarrow y : x, y \in S\}$ . Chamaremos de **caminho** uma seqüência de “ $x_n \rightarrow y_n$ ”, com  $y_n = x_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Por exemplo se

$$g = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2\}$$

então  $2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4$  é um caminho no grafo que leva 2 ao 4. Quando um caminho inicia no ponto  $y$  e em algum momento retorna a este ponto, diremos que é um **caminho fechado**. No exemplo acima,  $2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$  é um caminho fechado no estado 2.

Definiremos a seguir alguns tipos de grafos.

#### **Definição 1.1.1:** (Grafos $G\{W\}$ )

Seja  $W$  um subconjunto arbitrário de  $S$ ,  $S$  finito,  $W \neq \emptyset$ . Um grafo orientado sobre  $S$  é chamado um  $W$  - grafo se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

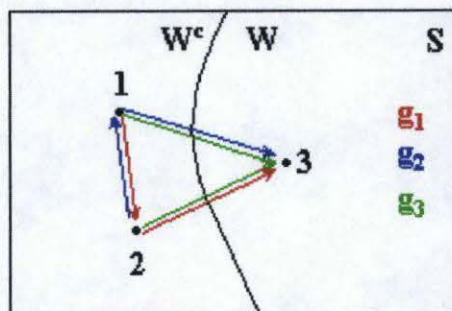
1. não há setas partindo de  $W$ .
2. cada ponto de  $W^c$  é ponto inicial de exatamente uma seta.
3. para cada ponto  $x$  em  $W^c$  existe um caminho (de setas) no grafo levando  $x$  a  $W$ .

**Notação:** O conjunto de todos  $W$  - grafos é denotado por  $G\{W\}$ .

Note que a segunda e terceira condições são equivalentes a dizer que não há caminhos fechados no grafo, isto é, não há caminho no grafo que inicie em um ponto  $x \in W^c$  e retorne ao mesmo ponto.

**Exemplo 1.1.1:** Sejam  $S = \{1, 2, 3\}$  e  $W = \{3\}$ . Neste caso  $G\{W\} = \{g_1, g_2, g_3\}$ , onde:

$$g_1 = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3\}, g_2 = \{2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3\}, g_3 = \{2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3\}.$$



**Figura 1.1.1:** Exemplo de grafos  $g \in G\{W\}$ .

**Definição 1.1.2:** (Grafos  $G_{x,y}\{W\}$ )

Sejam  $W \neq \emptyset, W \subseteq S, x \in S$  e  $y \in W$ . Se  $x \in W^c$  o conjunto  $G_{x,y}\{W\}$  é o conjunto de todos os grafos orientados sobre  $S$ , tais que:

1. não há setas partindo de  $W$ .
2. cada ponto de  $W^c$  é ponto inicial de exatamente uma seta.
3. para cada ponto  $z$  em  $W^c$  existe um caminho no grafo levando  $z$  a  $W$ .
4. existe um caminho no grafo levando  $x$  a  $y$ .

$$\text{Além disso, se } x \in W, G_{x,y}\{W\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } x \neq y \\ G\{W\}, & \text{se } x = y \end{cases}.$$

Note que os grafos  $G_{x,y}\{W\}$  não tem caminhos fechados e  $G_{x,y}\{W\} \subseteq G\{W\}$ ,  $\forall x \in S$  e  $\forall y \in W$ .

**Exemplo 1.1.2:** Sejam  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $W = \{3, 4\}$ . Neste caso  $G_{1,3}(W) = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ , onde:  
 $g_1 = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3\}, g_2 = \{2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3\}, g_3 = \{1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3\}, g_4 = \{1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4\}$ .

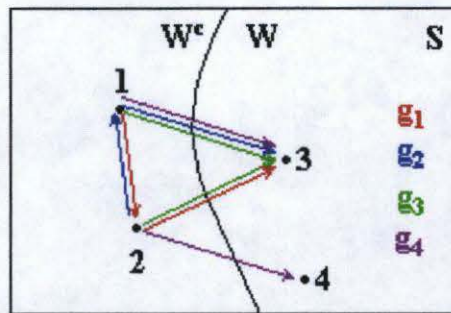


Figura 1.1.2: Exemplo de grafos  $g \in G_{x,y}\{W\}$ .

**Definição 1.1.3:** (Grafos  $G\{x \rightarrow W\}$ )

Sejam  $W \neq \emptyset, W \subseteq S, x \in S$ . Se  $x \in W^c$ , o conjunto  $G\{x \rightarrow W\}$  é o conjunto de todos os grafos orientados sobre  $S$ , tais que:

1. não há setas partindo de  $W$ .
2. cada ponto de  $W^c$ , exceto um, digamos  $y$ , é ponto inicial de exatamente uma seta.
3. não há caminhos fechados no grafo.
4. não há caminho no grafo levando  $x$  a  $W$ .

Além disso, se  $x \in W$ , então  $G\{x \rightarrow W\} = \emptyset$ .

Note que a terceira condição é equivalente a dizer que para cada  $z \in W^c \setminus \{y\}$ , há um caminho no grafo levando  $z$  a  $W \cup \{y\}$ .

**Exemplo 1.1.3:** Sejam  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $W = \{3, 4\}$ . Neste caso  $G(1 \rightarrow W) = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ , onde:

$$g_1 = \{1 \rightarrow 2\}, g_2 = \{2 \rightarrow 1\}, g_3 = \{2 \rightarrow 3\}, g_4 = \{2 \rightarrow 4\}.$$

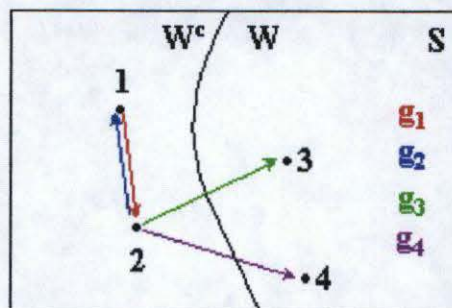


Figura 1.1.3: Exemplo de grafos  $g \in G\{x \rightarrow W\}$ .

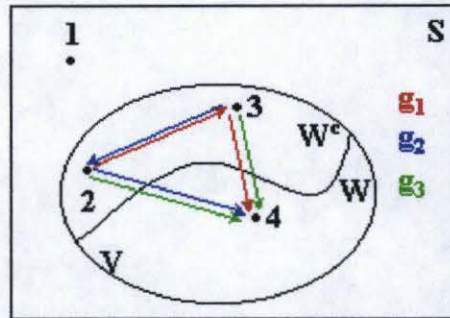
**Definição 1.1.4:** (Grafos  $G_V \{W\}$ )

Sejam  $W \neq \emptyset$ ,  $V \neq \emptyset$  e  $W \subseteq V \subseteq S$ . O conjunto  $G_V \{W\}$  é o conjunto de todos os grafos orientados sobre  $V$ , tais que:

1. não há setas partindo de  $W$ .
2. cada ponto de  $W^c \cap V$  é ponto inicial de exatamente uma seta.
3. para cada ponto  $x$  em  $W^c \cap V$  existe um caminho no grafo levando  $x$  a  $W$ .

**Exemplo 1.1.4:** Sejam  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $V = \{2, 3, 4\}$  e  $W = \{4\}$ . Neste caso  $G_V \{W\} = \{g_1, g_2, g_3\}$ , onde:

$$g_1 = \{2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4\}, g_2 = \{3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4\}, g_3 = \{2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 4\}.$$



**Figura 1.1.4:** Exemplo de grafos  $g \in G_V \{W\}$ .

Definidos estes tipos de grafos vamos relacioná-los com uma cadeia de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$ , com espaço de estados  $S$  finito e matriz de transição  $\mathbb{P} = (p_{xy})_{x,y \in S}$ .

**Definição 1.1.5:** Seja  $g$  um grafo orientado qualquer, sobre  $S$ . Definimos

$$\pi(g) \equiv \prod_{(y \rightarrow z) \in g} P(X_{n+1} = z \mid X_n = y) = \prod_{(y \rightarrow z) \in g} P(y, z) = \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz}. \quad (1.1.1)$$

## 1.2 - Distribuição estacionária

O Teorema 1.2.1 dá uma forma explícita para a distribuição estacionária através de grafos. Este Teorema foi provado por Freidlin e Wentzell [6], no Capítulo 6.

**Teorema 1.2.1:** Consideremos uma cadeia de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  IRREDUTÍVEL, com espaço de estados  $S$  finito e matriz de transição  $\mathbb{P} = (p_{xy})_{x,y \in S}$ . Então a distribuição estacionária (ver Definição A.15) desta cadeia é  $\mu = (\mu_x)_{x \in S}$  dada por

$$\mu_x = \frac{Q_x}{\sum_{z \in S} Q_z}, \quad x \in S \quad (1.2.1)$$

onde:

$$Q_x \equiv \sum_{g \in G\{x\}} \pi(g) = \sum_{g \in G\{x\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz} \quad (1.2.2)$$

e  $G\{x\}$  conforme Definição 1.1.1.

**Prova:** Por ser irredutível e finita, pela Proposição A.2, podemos concluir que todos os estados são recorrentes positivos. Portanto, pelo Teorema A.3, podemos afirmar que ela possui uma única distribuição estacionária  $\mu = (\mu_x)_{x \in S}$  a qual, por (A.1), satisfaz as equações:

$$\mu_x = \sum_{y \in S} \mu_y p_{yx}, \quad \forall x \in S. \quad (1.2.3)$$

Mas, se (1.2.1) é distribuição estacionária, então tem que satisfazer a equação análoga a (1.2.3), isto é,

$$\frac{Q_x}{\sum_{z \in S} Q_z} = \sum_{y \in S} \frac{Q_y}{\sum_{z \in S} Q_z} p_{yx}, \quad \forall x \in S$$

e então

$$Q_x = \sum_{y \in S} Q_y p_{yx}, \quad \forall x \in S. \quad (1.2.4)$$

Então, basta provar que os valores  $Q_x$ ,  $x \in S$ , definidos em (1.2.2) satisfazem (1.2.4). Podemos escrever, para  $x \in S$ ,

$$Q_x = \sum_{y \in S, y \neq x} Q_y p_{yx} + Q_x p_{xx}.$$

Logo

$$(1 - p_{xx}) Q_x = \sum_{y \in S, y \neq x} Q_y p_{yx}$$

sendo  $(1 - p_{xx}) = \sum_{z \in S, z \neq x} p_{xz}$  e, por (1.2.2),  $Q_x = \sum_{g \in G\{x\}} \pi(g)$ . Temos

$$\sum_{z \in S, z \neq x} p_{xz} \sum_{g \in G\{x\}} \pi(g) = \sum_{y \in S, y \neq x} \sum_{g \in G\{y\}} \pi(g) p_{yx}$$

e portanto

$$\sum_{z \in S, z \neq x} \sum_{g \in G\{x\}} \pi(g) p_{xz} = \sum_{y \in S, y \neq x} \sum_{g \in G\{y\}} \pi(g) p_{yx}$$

o que prova a igualdade (1.2.4), já que ambos os lados são idênticos a  $\sum_{g'} \pi(g')$ , onde  $g'$  é um grafo que satisfaz as seguintes condições:

1. todo ponto  $y \in S$  é ponto inicial de exatamente uma seta  $y \rightarrow z$  ( $y \neq z, z \in S$ );
2. no grafo  $g'$  há somente um caminho fechado e este contém o ponto  $x$ .

■

### 1.3 - Ponto de saída

Seja  $W \subseteq S$ ,  $W \neq \emptyset$ . Denotamos por  $\tau(W^c)$  o primeiro instante que a cadeia sai de  $W^c$ . De acordo com a Definição A.9,  $\tau(W^c)$  é um tempo de parada.

Definimos

$$q_W(x, y) \equiv P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = x), \quad \forall x \in W^c, y \in W. \quad (1.3.1)$$

O Teorema 1.3.1 dá uma forma explícita em termos de grafos para a probabilidade acima definida, isto é, para a probabilidade de um estado  $y$  ser alcançado no primeiro instante que a cadeia sai de  $W^c$ , dado que partiu do estado  $x$ . A expressão encontrada para (1.3.1) é extremamente útil, pois é dada pela soma de um número finito de parcelas, o que é bastante conveniente para o cálculo dos limites apresentados no Capítulo 2.

#### **Teorema 1.3.1:** (Ponto de Saída)

Seja  $(X_n)_{n \geq 0}$  uma cadeia de Markov com espaço de estados  $S$  e matriz de transição  $\mathbb{P} = (p_{xy})_{x, y \in S}$ . Para  $W \subseteq S$ ,  $W \neq \emptyset$  temos:

$$q_W(x, y) = \frac{\sum_{g \in G_{x, y}\{W\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}, \quad \forall x, y \in S \quad (1.3.2)$$

desde que o denominador seja positivo.

**Prova:** Vamos provar por indução no número de elementos em  $W^c$ .

Suponhamos  $\#W^c = 1$ . Seja  $W^c = \{x\}$ ,  $W = S \setminus \{x\}$ . Para  $y \in W$ ,

$$\begin{aligned} q_W(x, y) &\equiv P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = x) = \sum_{n \geq 1} P(X_{\tau(W^c)} = y, \tau(W^c) = n \mid X_0 = x) = \\ &= P(X_1 = y \mid X_0 = x) + P(X_2 = y, X_1 = x \mid X_0 = x) + \\ &\quad + P(X_3 = y, X_2 = x, X_1 = x \mid X_0 = x) + \dots = \\ &= p_{xy} \sum_{n \geq 0} p_{xx}^n = \frac{p_{xy}}{1 - p_{xx}} = \\ &= \frac{\sum_{g \in G_{x, y}\{W\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que (1.3.2) é válida para  $\#W^c = r - 1$  (hipótese de indução).

Se  $\#W^c = r$  temos, para  $x \in W^c$  e  $y \in W$ ,

$$\begin{aligned}
 q_W(x, y) &= P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = x) = \\
 &= \sum_{z \in W} P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(\{x\})} = z \mid X_0 = x) + \\
 &\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(\{x\})} = z \mid X_0 = x) = \\
 &= P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(\{x\})} = y \mid X_0 = x) + \\
 &\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(\{x\})} = z, \tau(\{x\}) < \tau(W^c) \mid X_0 = x) = \\
 &= P(X_{\tau(\{x\})} = y \mid X_0 = x) + \\
 &\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = x, X_{\tau(\{x\})} = z) \times \\
 &\quad \times P(X_{\tau(\{x\})} = z \mid X_0 = x).
 \end{aligned}$$

Mas, pela propriedade forte de Markov, temos

$$\begin{aligned}
 q_W(x, y) &= P(X_{\tau(\{x\})} = y \mid X_0 = x) + \\
 &\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = z) P(X_{\tau(\{x\})} = z \mid X_0 = x) = \\
 &= q_{S \setminus \{x\}}(x, y) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) \times \\
 &\quad \times \sum_{z_1 \in W} P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = z_1 \mid X_0 = z) + \\
 &\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_0 = z) = \\
 &= q_{S \setminus \{x\}}(x, y) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) \times \\
 &\quad \times P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = y \mid X_0 = z) + \\
 &\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_0 = z) = \\
 &= q_{S \setminus \{x\}}(x, y) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) P(X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = y \mid X_0 = z) + \\
 &\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_0 = z).
 \end{aligned}$$

Mas, sendo  $P(X_{\tau(W^c)} = y, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_0 = z)$  igual a

$$P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = z, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x) P(X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_0 = z),$$



e, para  $x \in W^c$  e  $y \in W$ ,  $\tau(W^c \setminus \{x\}) < \tau(W^c)$ , a propriedade forte de Markov permite escrever

$$P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = z, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x) = P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = x).$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} q_W(x, y) &= q_{S \setminus \{x\}}(x, y) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, y) + \\ &+ \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = x) \times \\ &\times P(X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_0 = z) = \\ &= q_{S \setminus \{x\}}(x, y) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, y) + \\ &+ P(X_{\tau(W^c)} = y \mid X_0 = x) \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, x) = \\ &= q_{S \setminus \{x\}}(x, y) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, y) + \\ &+ q_W(x, y) \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, x), \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$q_W(x, y) = \frac{q_{S \setminus \{x\}}(x, y) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, y)}{1 - \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, x)}. \quad (1.3.3)$$

Logo, pela hipótese de indução em  $q_{W \cup \{x\}}(z, x)$  e  $q_{W \cup \{x\}}(z, y)$ :

$$\begin{aligned} q_W(x, y) &= \frac{\sum_{g \in G_{x, y \setminus \{x\}}} \pi(g)}{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g)} + \frac{\sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} \frac{\sum_{g \in G_{x, z \setminus \{x\}}} \pi(g)}{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g)} \frac{\sum_{g \in G_{z, y \setminus \{x\}}} \pi(g)}{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g)}}{1 - \frac{\sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} \frac{\sum_{g \in G_{x, z \setminus \{x\}}} \pi(g)}{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g)} \frac{\sum_{g \in G_{z, x \setminus \{x\}}} \pi(g)}{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g)}}} = \\ &= \frac{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g) - \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} \frac{\sum_{g \in G_{x, z \setminus \{x\}}} \pi(g)}{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g)} \frac{\sum_{g \in G_{z, x \setminus \{x\}}} \pi(g)}{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g)}}} = \\ &= \frac{\sum_{g \in G_{x, y \setminus \{x\}}} \pi(g)}{\sum_{g \in G \setminus \{x\}} \pi(g)}, \quad \forall x \in W^c, y \in W. \end{aligned}$$

Mas, se  $x \in W$ , então pela Definição 1.1.2,

$$G_{x,y}\{W\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } x \neq y \\ G\{W\}, & \text{se } x = y \end{cases}$$

e portanto

$$q_W(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq y \\ 1, & \text{se } x = y \end{cases}.$$

Por essa razão,

$$q_W(x,y) = \frac{\sum_{g \in G_{x,y}\{W\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}, \quad \forall x,y \in S.$$

■

#### 1.4 - Tempo de saída

Para  $x \in S$  e  $W \subseteq S$ , definimos

$$m_W(x) \equiv E(\tau(W^c) \mid X_0 = x) = E_x(\tau(W^c)) \quad (1.4.1)$$

onde  $E$  é a esperança correspondente a cadeia  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  e  $E_x$  é a esperança condicional dado  $X_0 = x$ . Portanto  $m_W(x)$  é o tempo médio até a primeira saída do conjunto  $W^c$ , partindo do estado  $x$ .

É bem conhecido (ver James [9]) que se  $X$  é uma variável aleatória, não negativa, em  $\mathbb{N}$ , então

$$E(X) = \sum_{n \geq 0} P(X > n).$$

Em particular,

$$E_x(\tau(W^c)) = \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n \mid X_0 = x). \quad (1.4.2)$$

O Teorema 1.4.1 nos fornece o tempo médio necessário para que a cadeia saia pela primeira vez de um conjunto  $W^c \subseteq S$ .

**Teorema 1.4.1:** (Tempo Médio de Saída)

Seja  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  uma cadeia de Markov com espaço de estados  $S$  finita e matriz de transição  $\mathbb{P} = (p_{xy})_{x,y \in S}$ . Para  $W \subseteq S$ ,  $W \neq \emptyset$  temos

$$m_W(x) = \frac{\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}, \quad \forall x \in S \quad (1.4.3)$$

onde  $G\{W\}$  e  $G\{x \rightarrow W\}$  conforme as definições 1.1.1 e 1.1.3, respectivamente.

**Prova:** Por indução no número de elementos em  $W^c$ , suponha  $\#W^c = 1$ . Seja  $W^c = \{x\}$ . Então

$$\begin{aligned} m_W(x) &= m_{S \setminus \{x\}}(x) = E_x(\tau(\{x\})) = \sum_{n \geq 0} P(\tau(\{x\}) > n \mid X_0 = x) = \\ &= \sum_{n \geq 0} [1 - P(\tau(\{x\}) \leq n \mid X_0 = x)] = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ 1 - \sum_{m=1}^n P(\tau(\{x\}) = m \mid X_0 = x) \right] = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ 1 - \sum_{z \in S, z \neq x} P(X_1 = z \mid X_0 = x) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{z \in S, z \neq x} P(X_2 = z, X_1 = x \mid X_0 = x) - \right. \\ &\quad \left. - \dots - \sum_{z \in S, z \neq x} P(X_n = z, X_{n-1} = x, \dots, X_1 = x \mid X_0 = x) \right] = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ 1 - \sum_{z \in S, z \neq x} (p_{xz} + p_{xz}p_{xx} + \dots + p_{xx}^{n-1}p_{xz}) \right] = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ 1 - \sum_{m=0}^{n-1} p_{xx}^m \sum_{z \in S, z \neq x} p_{xz} \right] = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ 1 - \frac{1 - p_{xx}^n}{1 - p_{xx}} (1 - p_{xx}) \right] = \sum_{n \geq 0} p_{xx}^n = \frac{1}{1 - p_{xx}}. \end{aligned}$$

Como  $W^c = \{x\}$  definimos  $\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi(g) = 1$  e portanto

$$m_W(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}, & \text{se } p_{xx} < 1 \\ +\infty, & \text{se } p_{xx} = 1 \end{cases}.$$

Como hipótese de indução suponhamos que (1.4.3) é válida quando  $W^c$  tem  $r - 1$  elementos. Se  $\#W^c = r$  e  $x \in W^c$ , temos

$$\begin{aligned}
m_W(x) &= \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n \mid X_0 = x) = \\
&= \sum_{n \geq 0} [P(\tau(W^c) > n, \tau(\{x\}) > n \mid X_0 = x) + \\
&\quad + P(\tau(W^c) > n, \tau(\{x\}) \leq n \mid X_0 = x)] = \\
&= \sum_{n \geq 0} P(\tau(\{x\}) > n \mid X_0 = x) + \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n, \tau(\{x\}) \leq n, X_{\tau(\{x\})} \in W^c \setminus \{x\} \mid X_0 = x) + \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n, \tau(\{x\}) \leq n, X_{\tau(\{x\})} \in W \mid X_0 = x).
\end{aligned}$$

Mas,  $P(\tau(W^c) > n, \tau(\{x\}) \leq n, X_{\tau(\{x\})} \in W \mid X_0 = x) = 0$ . Então

$$\begin{aligned}
m_W(x) &= m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n, X_{\tau(\{x\})} \in W^c \setminus \{x\} \mid X_0 = x) = \\
&= m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{n \geq 0} \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} P(\tau(W^c) > n, X_{\tau(\{x\})} = z \mid X_0 = x) = \\
&= m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{n \geq 0} \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} P(\tau(W^c) > n \mid X_0 = x, X_{\tau(\{x\})} = z) \times \\
&\quad \times P(X_{\tau(\{x\})} = z \mid X_0 = x).
\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade forte de Markov, temos

$$\begin{aligned}
m_W(x) &= m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{n \geq 0} \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) P(\tau(W^c) > n \mid X_0 = z) = \\
&= m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) \times \\
&\quad \times \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) > n \mid X_0 = z) + \\
&\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) \leq n \mid X_0 = z) = \\
&= m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c \setminus \{x\}) > n \mid X_0 = z) + \\
&\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) \times \\
&\quad \times \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) \leq n, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_0 = z) + \\
&\quad + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) \times
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) \leq n, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} \in W \mid X_0 = z).$$

Mas,

$$\sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) \leq n, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} \in W \mid X_0 = z) = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} m_W(x) &= m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) m_{W \cup \{x\}}(z) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) \times \\ &\times \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n \mid X_0 = z, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x) \times \\ &\times P(X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_0 = z). \end{aligned}$$

Novamente, aplicando a propriedade forte de Markov, temos

$$\begin{aligned} m_W(x) &= m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) m_{W \cup \{x\}}(z) + \\ &+ \sum_{n \geq 0} P(\tau(W^c) > n \mid X_0 = x) \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, x) = \\ &= m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) m_{W \cup \{x\}}(z) + \\ &+ m_W(x) \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$m_W(x) = \frac{m_{S \setminus \{x\}}(x) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) m_{W \cup \{x\}}(z)}{1 - \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}(x, z) q_{W \cup \{x\}}(z, x)}.$$

Logo, pela hipótese de indução e pelo Teorema 1.3.1:

$$\begin{aligned} m_W(x) &= \frac{\frac{\sum_{g \in G\{x \rightarrow S \setminus \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g)} + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} \frac{\frac{\sum_{g \in G_{x,z}\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g)} \frac{\sum_{g \in G\{z \rightarrow W \cup \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)}}{1 - \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} \frac{\frac{\sum_{g \in G_{x,z}\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g)} \frac{\sum_{g \in G_{z,x}\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)}}} = \\ &= \frac{\sum_{g \in G\{W \cup \{x\}\}} \pi(g) \sum_{g \in G\{x \rightarrow S \setminus \{x\}\}} \pi(g) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} \sum_{g \in G_{x,z}\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g) \sum_{g \in G\{z \rightarrow W \cup \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g) \sum_{g \in G\{W \cup \{x\}\}} \pi(g) - \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} \sum_{g \in G_{x,z}\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g) \sum_{g \in G_{z,x}\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)} = \\ &= \frac{\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}, \quad \forall x \in W^c. \end{aligned}$$

Mas, se  $x \in W$ , então pela Definição 1.1.3,  $G\{x \rightarrow W\} = \emptyset$  e portanto

$$m_W(x) = 0.$$

Por essa razão,

$$m_W(x) = \frac{\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}, \quad \forall x \in S.$$

■

### 1.5 - Número esperado de visitas (ou retornos)

Sejam  $V \subseteq S$  e  $y \in V$ . Denotamos por  $N_y^V$  o número de visitas ao estado  $y$  antes de sair de  $V$ . Então

$$N_y^V = \sum_{n \geq 1} I_{\{y\}}(X_n) I(\tau(V) > n),$$

e portanto

$$E_x(N_y^V) = \sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(V) > n \mid X_0 = x) \quad (1.5.1)$$

onde  $\tau(V)$  é o primeiro instante de saída de  $V$ .

O Teorema 1.5.1 nos dá o número esperado de visitas (ou retornos) a um estado antes da cadeia sair de  $W^c$ .

**Teorema 1.5.1:** *Seja  $(X_n)_{n \geq 0}$  uma cadeia de Markov com espaço de estados  $S$  finito e matriz de transição  $\mathbb{P} = (p_{xy})_{x,y \in S}$ . Se  $x, y \in W^c$ , então*

$$E_x(N_y^{W^c}) = \frac{\sum_{g \in G_{x,y}\{W \cup \{y\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}. \quad (1.5.2)$$

**Prova:** Vamos provar utilizando a indução no número de elementos em  $W^c$ .

Suponha que  $\#W^c = 1$ , digamos  $W^c = \{x\}$ . Então

$$\begin{aligned} E_x(N_x^{\{x\}}) &= \sum_{n \geq 1} P(X_n = x, \tau(\{x\}) > n \mid X_0 = x) = \\ &= \sum_{n \geq 1} P(\tau(\{x\}) > n \mid X_0 = x) = m_{S \setminus \{x\}}(x) = \\ &= \frac{\sum_{g \in G\{x \rightarrow S \setminus \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g)} = \frac{1}{\sum_{g \in G\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g)}. \end{aligned}$$

Como  $W^c = \{x\}$  definimos  $\sum_{g \in G_{x,x}\{W \cup \{x\}\}} \pi(g) = 1$  e portanto

$$E_x(N_x^{\{x\}}) = \frac{\sum_{g \in G_{x,x}\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{S \setminus \{x\}\}} \pi(g)}.$$

Como hipótese de indução suponhamos que (1.5.2) é válida quando  $W^c$  tem  $r - 1$  elementos.

Se  $\#W^c = r$ , temos para  $x, y \in W^c$ ,

$$\begin{aligned} E_x(N_y^{W^c}) &= \\ &= \sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(W^c) > n \mid X_0 = x) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} P(X_n = y, X_1 = z, \tau(W^c) > n \mid X_0 = x) = \\ &= \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} \left[ P(X_1 = z \mid X_0 = x) \sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(W^c) > n \mid X_1 = z) \right] = \\ &= \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \left[ \sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) > n \mid X_1 = z) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) \leq n \mid X_1 = z) \right] = \\ &= \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \left[ \sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(W^c \setminus \{x\}) > n \mid X_1 = z) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) \leq n, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_1 = z) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) \leq n, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} \in W \mid X_1 = z) \right]. \end{aligned}$$

Mas,

$$\sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus \{x\}) \leq n, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} \in W \mid X_1 = z) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} E_x(N_y^{W^c}) &= \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \left[ E_z(N_y^{W^c \setminus \{x\}}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \geq 1} P(X_n = y, \tau(W^c) > n, X_{\tau(W^c \setminus \{x\})} = x \mid X_1 = z) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \left[ E_z \left( N_y^{W^c \setminus \{x\}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n \geq 1} P \left( X_n = y, \tau(W^c) > n \mid X_1 = z, X_{\tau\{W^c \setminus \{x\}\}} = x \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times P \left( X_{\tau\{W^c \setminus \{x\}\}} = x \mid X_1 = z \right) \right].
\end{aligned}$$

Pela propriedade forte de Markov, temos que

$$\begin{aligned}
E_x \left( N_y^{W^c} \right) &= \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \left[ E_z \left( N_y^{W^c \setminus \{x\}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + q_{W \cup \{x\}}(z, x) \sum_{n \geq 1} P \left( X_n = y, \tau(W^c) > n \mid X_0 = x \right) \right] = \\
&= \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \left[ E_z \left( N_y^{W^c \setminus \{x\}} \right) + q_{W \cup \{x\}}(z, x) E_x \left( N_y^{W^c} \right) \right] = \\
&= \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} E_z \left( N_y^{W^c \setminus \{x\}} \right) + \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} q_{W \cup \{x\}}(z, x) E_x \left( N_y^{W^c} \right).
\end{aligned}$$

Então,

$$E_x \left( N_y^{W^c} \right) = \frac{\sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} E_z \left( N_y^{W^c \setminus \{x\}} \right)}{1 - \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} q_{W \cup \{x\}}(z, x)}. \quad (1.5.3)$$

Logo, usando a hipótese de indução

$$\begin{aligned}
E_x \left( N_y^{W^c} \right) &= \frac{\sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \frac{\sum_{g \in G_{z,y}\{W \cup \{x,y\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)}}{1 - \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \frac{\sum_{g \in G_{z,x}\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)}} = \\
&= \frac{\sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \sum_{g \in G_{z,y}\{W \cup \{x,y\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W \cup \{x\}\}} \pi(g) - \sum_{z \in W^c \setminus \{x\}} p_{xz} \sum_{g \in G_{z,x}\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)} = \\
&= \frac{\sum_{g \in G_{x,y}\{W \cup \{y\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$E_x \left( N_x^{W^c} \right) = \frac{\sum_{g \in G\{W \cup \{x\}\}} \pi(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi(g)}.$$



## CAPÍTULO 2

### RESULTADOS ASSINTÓTICOS PRELIMINARES

Neste capítulo iniciamos a análise assintótica da cadeia de Markov  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  apresentada na introdução. O que nos interessa é descrever o comportamento desta cadeia quanto a estabilidade.

Relembrando, a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  possui espaço de estados  $S$  finito e matriz de transição

$$\mathbb{P}^\varepsilon = (1 - \varepsilon)\mathbb{P}^1 + \varepsilon\mathbb{P}^2, \quad \forall \varepsilon > 0$$

onde:

$\mathbb{P}^1 = (b_{xy})_{x,y \in S}$  é a matriz de transição de  $(X_n^1)_{n \geq 0}$  uma cadeia de Markov com espaço de estados  $S$  finito e com  $l$  classes ergódicas e,

$\mathbb{P}^2 = (a_{xy})_{x,y \in S}$  é a matriz de transição de  $(X_n^2)_{n \geq 0}$  uma cadeia de Markov com espaço de estados  $S$  finito, irredutível e aperiódica. Neste caso  $\mathbb{P}^\varepsilon = (p_{xy}^\varepsilon)_{x,y \in S}$ , onde

$$p_{yz}^\varepsilon = \begin{cases} (1 - \varepsilon)b_{yz} + \varepsilon a_{yz}, & \text{se } y \text{ e } z \text{ pertencem a mesma classe ergódica} \\ \varepsilon a_{yz}, & \text{se } y \text{ e } z \text{ pertencem a classes ergódicas diferentes.} \end{cases} \quad (2.1)$$

É fácil notar que para um  $0 < \varepsilon < 1$  fixo, a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  possui uma única distribuição estacionária  $\mu^\varepsilon$  (ver Teorema A.3), ou seja, se a distribuição inicial é a distribuição estacionária então o processo é estacionário (estável). Note que, para  $\varepsilon > 0$  fixo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^\varepsilon(X_n^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x) = \mu^\varepsilon(y), \quad \forall x, y \in S.$$

Como  $P^\varepsilon(X_n^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x)$  depende de  $n$  e  $\varepsilon$  é natural nos perguntarmos o que acontece quando  $\varepsilon \downarrow 0$  e  $n \rightarrow \infty$ ? A "estabilidade" se mantém?

O que nos interessa é analisar o comportamento desta cadeia de Markov em situações limites, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon(X_n^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x); \quad (2.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P^\varepsilon(X_n^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x) \quad (2.3)$$

e

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon(X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x)$$

onde  $n(\varepsilon)$  é uma certa função de  $\varepsilon$  tal que  $n(\varepsilon) \rightarrow +\infty$  quando  $\varepsilon \downarrow 0$ . O tipo de dependência entre  $n$  e  $\varepsilon$  será caracterizado no Capítulo 3.

Se os resultados de (2.2) e (2.3) fossem idênticos não haveria necessidade de calcularmos o terceiro limite, pois isto indicaria que qualquer subsequência de  $X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon$  teria o mesmo limite, mas na realidade estes limites são distintos.

## 2.1 Distribuição limite

Neste parágrafo mostramos as diferenças entre os limites (2.2) e (2.3). O limite (2.4) será tratado no Capítulo 3.

Quando primeiramente aplicamos o limite quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , retornamos a cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ , pois

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [(1 - \varepsilon)\mathbb{P}^1 + \varepsilon\mathbb{P}^2] = \mathbb{P}^1.$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon(X_n^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n^1 = y \mid X_0^1 = x).$$

Logo, o limite existe mas depende do estado inicial  $x \in S$  (ver Observação A.2).

Para determinação do limite (2.3) utilizaremos subconjuntos dos grafos  $G$  definidos no capítulo anterior. A seguir definimos tais subconjuntos.

**Definição 2.1.1:** *Seja  $x \in S$ . Definimos*

$$H\{x\} = \{g \in G\{x\} : \text{no grafo } g \text{ há somente uma seta saindo de cada classe ergódica}\}.$$

**Definição 2.1.2:** *Sejam  $x, y \in S$  e  $W \subseteq S$ . Definimos*

$$H_{x,y}\{W\} = \{g \in G_{x,y}\{W\} : \text{no grafo } g \text{ há somente uma seta saindo de cada classe ergódica}\}.$$

**Definição 2.1.3:** *Sejam  $x \in S$  e  $W \subseteq S$ . Definimos*

$$H\{x \rightarrow W\} = \{g \in G\{x \rightarrow W\} : \text{no grafo } g \text{ há somente uma seta saindo de cada classe ergódica}\}.$$

**Definição 2.1.4:** *Sejam  $W \subseteq V \subseteq S$ . Definimos*

$$H_V\{W\} = \{g \in G_V\{W\} : \text{no grafo } g \text{ há somente uma seta saindo de cada classe ergódica}\}.$$

Portanto, os grafos  $H$  são análogos aos grafos  $G$  do Capítulo 1 com a condição adicional de que há somente uma seta saindo de cada classe ergódica.

Como um grafo  $g$  é um conjunto de pares de pontos de  $S$ , podemos separar esses pares em dois conjuntos:

$$E_g = \{(y \rightarrow z) \in g : y \text{ e } z \text{ pertencem a mesma classe ergódica}\} \quad (2.1.1)$$

e

$$E_{\bar{g}} = \{(y \rightarrow z) \in g : y \text{ e } z \text{ pertencem a classes ergódicas diferentes}\} \quad (2.1.2)$$

e portanto  $g = E_g \cup E_{\bar{g}}$ . Utilizaremos a notação  $\#g$  para o número de pares de pontos de  $S$  no grafo  $g$ .

Seja

$$\pi^\varepsilon(g) \equiv \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz}^\varepsilon,$$

com  $p_{yz}^\varepsilon$  definido em (2.1). Os conjuntos  $E_g$  e  $E_{\bar{g}}$  nos permitem escrever  $\pi^\varepsilon(g)$  de forma mais conveniente:

$$\pi^\varepsilon(g) = \prod_{(y \rightarrow z) \in E_g} [(1 - \varepsilon)b_{yz} + \varepsilon a_{yz}] \prod_{(y \rightarrow z) \in E_{\bar{g}}} \varepsilon a_{yz}. \quad (2.1.3)$$

**Observação 2.1.1:** Convém destacar que  $\pi^\varepsilon(g) = 0$  se e somente se existe um par  $(y \rightarrow z)$  no grafo  $g$  tal que  $p_{yz}^\varepsilon = 0$ . Por (2.1) podemos perceber que  $p_{yz}^\varepsilon = 0$  se existem  $y$  e  $z$  pertencentes a classes ergódicas diferentes tais que  $a_{yz} = 0$ , ou se existem  $y$  e  $z$  pertencentes a mesma classe ergódica tais que  $b_{yz} = a_{yz} = 0$ . Daqui em diante vamos considerar somente grafos  $g$  tais que  $\pi^\varepsilon(g) \neq 0$ .

A partir de (2.1.3) vemos que o grau do polinômio  $\pi^\varepsilon(g)$  depende do número de pares em  $g$ . Por exemplo, se  $\#g = r$ , então o polinômio tem grau  $r$ , pois cada par em  $g$  aumenta em um grau o polinômio  $\pi^\varepsilon(g)$ .

Nos próximos teoremas vamos utilizar outro tipo de produtório:

$$\pi^*(g) = \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz}^* \quad (2.1.4)$$

onde:

$$p_{yz}^* = \begin{cases} b_{yz}, & \text{se } y \text{ e } z \text{ pertencem a mesma classe ergódica} \\ a_{yz}, & \text{se } y \text{ e } z \text{ pertencem a classes ergódicas diferentes.} \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Convém ressaltar que  $(p_{yz}^*)_{y,z \in S}$  não é uma matriz estocástica.

No seguinte teorema, Teorema 2.1.1, provamos que o limite (2.3) existe e não depende do estado inicial.

**Teorema 2.1.1:** Sejam  $\mathbb{P}^1$  e  $\mathbb{P}^2$  como definidas anteriormente e  $S$  espaço de estados finito comum. Se  $\mathbb{P}^\varepsilon = (1 - \varepsilon)\mathbb{P}^1 + \varepsilon\mathbb{P}^2$ ,  $\forall 0 < \varepsilon < 1$ , então:

a) Existe  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu^\varepsilon$ , sendo  $\mu^\varepsilon = (\mu_x^\varepsilon)_{x \in S}$  a única distribuição estacionária de  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  e

$$b) \mu_x \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_x^\varepsilon = \frac{A_x}{\sum_{z \in S} A_z}, \quad \forall x \in S,$$

sendo  $\mu = (\mu_x)_{x \in S}$  uma distribuição de probabilidades,  $A_x = \sum_{g \in H\{x\}} \pi^*(g)$  com  $\pi^*(g)$  conforme (2.1.4) e  $H\{x\}$  conforme a Definição 2.1.1.

**Prova:** Pelo Teorema A.3, sendo  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  uma cadeia irredutível e finita, ela possui uma única distribuição estacionária, a qual, de acordo com o Teorema 1.2.1, é dada por:

$$\mu_x^\varepsilon = \frac{Q_x^\varepsilon}{\sum_{z \in S} Q_z^\varepsilon}, \quad x \in S,$$

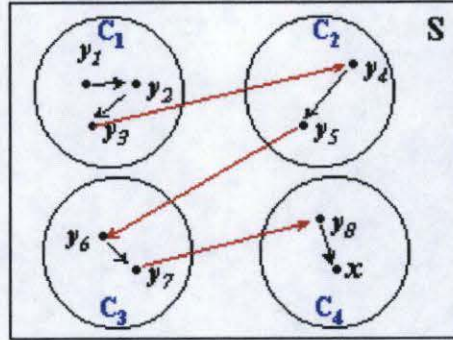
onde  $Q_x^\varepsilon = \sum_{g \in G\{x\}} \pi^\varepsilon(g)$  com  $\pi^\varepsilon(g)$  conforme (2.1.3).

Suponhamos que  $\#S = n$ . Assim para cada  $g \in G\{x\}$  teremos que  $\#g = n - 1$ , isto é, o grafo  $g$  é composto por  $n - 1$  pares. Portanto, se  $\pi^\varepsilon(g) \neq 0$  (ver Observação 2.1.1) então  $\pi^\varepsilon(g)$  é um polinômio em  $\varepsilon$  de grau  $n - 1$ . A partir deste fato e da expressão (2.1.3), podemos concluir que se  $\#E_{\bar{g}} = r$ , ou seja, foram feitas  $r$  transições entre classes ergódicas diferentes no grafo  $g$ , então  $\prod_{(y \rightarrow z) \in E_{\bar{g}}} \varepsilon a_{yz}$  tem grau  $r$  e podemos escrever

$$\pi^\varepsilon(g) = \alpha_{n-1}^g \varepsilon^{n-1} + \alpha_{n-2}^g \varepsilon^{n-2} + \dots + \alpha_r^g \varepsilon^r$$

onde  $\alpha_r^g, \dots, \alpha_{n-1}^g$  são constantes que dependem de  $g$ , com  $\alpha_{n-1}^g$  e  $\alpha_r^g$  positivos.

Podemos verificar que o menor valor que  $r$  pode assumir é  $(l - 1)$  ( $l$  é o número de classes ergódicas), pois o valor de  $r$  depende do número de transições entre classes ergódicas. Portanto, o menor valor que  $r$  assume é quando cada classe ergódica fizer apenas uma transição para outra classe ergódica; neste caso  $\#E_{\bar{g}} = l - 1$  (ver Figura 2.1.1).



**Figura 2.1.1:** Exemplo de um grafo  $g \in H\{x\}$ .

Então, existem constantes  $c_j^x$ ,  $j = l-1, l, \dots, n-1$ , com  $c_{n-1}^x$  e  $c_{l-1}^x$  positivas, tais que:

$$Q_x^\varepsilon = \sum_{g \in H\{x\}} \pi^\varepsilon(g) = c_{n-1}^x \varepsilon^{n-1} + c_{n-2}^x \varepsilon^{n-2} + \dots + c_l^x \varepsilon^l + c_{l-1}^x \varepsilon^{l-1}$$

onde

$$\begin{aligned} c_{l-1}^x &= \sum_{g \in H\{x\}} \alpha_{l-1}^g = \sum_{g \in H\{x\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in E_g} b_{yz} \prod_{(y \rightarrow z) \in E_{\bar{g}}} a_{yz} = \\ &= \sum_{g \in H\{x\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz}^* = \sum_{g \in H\{x\}} \pi^*(g). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Como  $\alpha_{l-1}^g > 0$ ,  $\forall g \in H\{x\}$  com  $\pi^\varepsilon(g) \neq 0$ , podemos dizer que  $c_{l-1}^x > 0$ .

A partir disto podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} \mu_x^\varepsilon &= \frac{Q_x^\varepsilon}{\sum_{m \in S} Q_m^\varepsilon} = \frac{c_{n-1}^x \varepsilon^{n-1} + c_{n-2}^x \varepsilon^{n-2} + \dots + c_l^x \varepsilon^l + c_{l-1}^x \varepsilon^{l-1}}{\sum_{m \in S} [c_{n-1}^m \varepsilon^{n-1} + c_{n-2}^m \varepsilon^{n-2} + \dots + c_l^m \varepsilon^l + c_{l-1}^m \varepsilon^{l-1}]} = \\ &= \frac{\varepsilon^{l-1} (c_{n-1}^x \varepsilon^{n-l} + c_{n-2}^x \varepsilon^{n-l-1} + \dots + c_l^x \varepsilon + c_{l-1}^x)}{\varepsilon^{l-1} \sum_{m \in S} (c_{n-1}^m \varepsilon^{n-l} + c_{n-2}^m \varepsilon^{n-l-1} + \dots + c_l^m \varepsilon + c_{l-1}^m)} = \\ &= \frac{c_{n-1}^x \varepsilon^{n-l} + c_{n-2}^x \varepsilon^{n-l-1} + \dots + c_l^x \varepsilon + c_{l-1}^x}{\sum_{m \in S} (c_{n-1}^m \varepsilon^{n-l} + c_{n-2}^m \varepsilon^{n-l-1} + \dots + c_l^m \varepsilon) + \sum_{m \in S} c_{l-1}^m}. \end{aligned}$$

Logo, aplicando o limite quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , e utilizando (2.1.6) temos que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_x^\varepsilon = \frac{c_{l-1}^x}{\sum_{m \in S} c_{l-1}^m} = \frac{\sum_{g \in H\{x\}} \pi^*(g)}{\sum_{m \in S} \sum_{g \in H\{m\}} \pi^*(g)} = \frac{A_x}{\sum_{z \in S} A_z}. \quad (2.1.7)$$

■

Sejam  $C_m$ ,  $m \in \{1, 2, \dots, l\}$  as classes ergódicas da cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ . Se aplicarmos o Teorema 1.2.1 a cada uma destas classes teremos que:

$$\pi_m(x) = \begin{cases} \frac{Q_x^m}{\sum_{z \in C_m} Q_z^m}, & \text{se } x \in C_m \\ 0, & \text{se } x \notin C_m \end{cases} \quad (2.1.8)$$

onde  $(\pi_m(x))_{x \in S}$  é a distribuição extremal com suporte na classe  $C_m$  (ver Definição A.16).

No próximo teorema mostramos que a distribuição estacionária obtida no Teorema 2.1.1 é uma das combinações convexas das distribuições extremas da cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ .

**Teorema 2.1.2:** *Sejam  $\pi_1(\cdot), \pi_2(\cdot), \dots, \pi_l(\cdot)$  as distribuições extremas da cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ . Seja  $\mu$  a distribuição limite de  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ , obtida no Teorema 2.1.1. Então*

$$\mu = \beta_1 \pi_1 + \beta_2 \pi_2 + \dots + \beta_l \pi_l \quad (2.1.9)$$

onde  $\beta_m = \frac{\mu_y}{\pi_m(y)}$ ,  $\forall y \in C_m$ ,  $m = 1, \dots, l$  e  $\sum_{m=1}^l \beta_m = 1$  com  $\beta_m > 0$ , para todo  $m = 1, \dots, l$ .

**Prova:** Seja  $\mu^\varepsilon$  a distribuição estacionária de  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ . Logo

$$\begin{aligned} \mu^\varepsilon &= \mu^\varepsilon \times \mathbb{P}^\varepsilon \\ &= \mu^\varepsilon \times [(1 - \varepsilon)\mathbb{P}^1 + \varepsilon\mathbb{P}^2]. \end{aligned}$$

Mas,  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu^\varepsilon = \mu$ , e portanto  $\mu = \mu \times \mathbb{P}^1$ . Então, pelo Teorema A.3,  $\mu$  é uma distribuição estacionária de  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ , que é combinação convexa das distribuições extremas de  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ . Então basta provar que os coeficientes da combinação convexa são dados por

$$\beta_m \equiv \beta_m^y = \frac{\mu_y}{\pi_m(y)}, \quad \forall y \in C_m, \quad m = 1, \dots, l$$

e

$$\sum_{m=1}^l \beta_m^y = 1.$$

Inicialmente vamos mostrar que  $\beta_m^y \equiv \beta_m$  não depende de  $y$ , mas somente da classe  $C_m$ . Seja  $y \in C_m$ ,

$$\beta_m^y = \frac{\mu_y}{\pi_m(y)} = \frac{\sum_{x \in S} A_x}{\sum_{x \in C_m} Q_x^m} = \frac{A_y}{Q_y^m} \frac{\sum_{x \in C_m} Q_x^m}{\sum_{x \in S} A_x}.$$

Mas  $\sum_{x \in S} A_x$  e  $\sum_{x \in C_m} Q_x^m$  não dependem de  $y$  e portanto é suficiente provar que  $\frac{A_y}{Q_y^m}$  é constante para todo  $y$ , isto é, só depende da classe  $C_m$ . Temos

$$\begin{aligned} \frac{A_y}{Q_y^m} &= \frac{\sum_{g \in H\{y\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in G_{C_m}\{y\}} \pi(g)} = \frac{\sum_{g \in H\{C_m\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H_{C_m}\{y\}} \pi^*(g)} = \\ &= \sum_{g \in H\{C_m\}} \pi^*(g), \quad \forall y \in C_m \end{aligned}$$

com  $G_{C_m}\{y\}$  e  $H_{C_m}\{y\}$  conforme Definições 1.1.4 e 2.1.4, respectivamente. Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^l \beta_m &= \sum_{m=1}^l \frac{A_y \sum_{x \in C_m} Q_x^m}{Q_y^m \sum_{x \in S} A_x} = \\ &= \frac{1}{\sum_{x \in S} A_x} \sum_{m=1}^l \left( \sum_{g \in H\{C_m\}} \pi^*(g) \sum_{x \in C_m} \sum_{g \in H_{C_m}\{x\}} \pi^*(g) \right) = \\ &= \frac{1}{\sum_{x \in S} A_x} \sum_{m=1}^l \sum_{x \in C_m} \left( \sum_{g \in H\{C_m\}} \pi^*(g) \sum_{g \in H_{C_m}\{x\}} \pi^*(g) \right) = \\ &= \frac{\sum_{m=1}^l \sum_{x \in C_m} A_x}{\sum_{x \in S} A_x} = \frac{\sum_{x \in S} A_x}{\sum_{x \in S} A_x} = 1. \end{aligned}$$

■

Com estes dois teoremas fica evidenciada a diferença entre os limites (2.2) e (2.3).

## 2.2 - Ponto e tempo de saída

Neste parágrafo apresentamos alguns resultados assintóticos envolvendo variáveis aleatórias e probabilidades de certos eventos já utilizadas no Capítulo 2. Ressaltamos que a cadeia de Markov aqui considerada será sempre  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  e, portanto, às notações já introduzidas no Capítulo 1, acrescentamos um sobrescrito  $\varepsilon$ .

Os teoremas a seguir ajudarão a determinar o tipo de dependência entre  $n$  e  $\varepsilon$  e analisar o comportamento da cadeia em cada uma das classes ergódicas.

O Teorema 2.2.1 nos dá o limite, quando  $\varepsilon$  tende a zero, da probabilidade da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  alcançar o estado  $y$  no primeiro instante que sai de  $W^c$ , dado que o estado inicial é  $x$ . Utilizaremos a notação  $q_W(x, y)$  para tal limite, isto é,

$$q_W(x, y) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_W^\varepsilon(x, y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(W^c)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x \right).$$

**Teorema 2.2.1:** Sejam  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  como definido anteriormente,  $W \subseteq S$ ,  $W \neq \emptyset$ . Seja  $x \in C$ ,  $C$  uma classe ergódica. Então, para  $x \in W^c$  e  $y \in W$ ,

$$q_W(x, y) \equiv \begin{cases} \frac{\sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{W\}} \pi^*(g)}, & \text{se } y \in C \text{ ou } C \cap W = \emptyset \\ 0, & \text{se } y \notin C \text{ e } C \cap W \neq \emptyset \end{cases} \quad (2.2.1)$$

com  $\pi^*(g)$  como em (2.1.4). Em particular, se  $C = \{x\}$  e  $W^c = C$  então

$$q_W(x, y) = \frac{a_{xy}}{1 - a_{xx}}, \quad \forall y \neq x.$$

**Prova:** Sejam  $W \subseteq S$ ,  $W \neq \emptyset$ ,  $l$  o número de classes ergódicas da cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ ,  $l'$  o número de classes ergódicas que interceptam  $W$  e  $t = l - l'$ .

Vamos supor que  $\#W^c = r$ . Sabemos pelo Teorema 1.3.1 que

$$q_W^\varepsilon(x, y) = \frac{\sum_{g \in G_{x,y}\{W\}} \pi^\varepsilon(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi^\varepsilon(g)}, \quad \forall x \in W^c \text{ e } \forall y \in W.$$

Sendo  $\#W^c = r$ , cada  $g \in G\{W\}$  ou  $g \in G_{x,y}\{W\}$  é tal que  $\#g = r$ , pois pelas Definições 1.1.1 e 1.1.2, respectivamente, sabemos que cada elemento em  $W^c$  é ponto inicial de exatamente uma seta. Levando em conta (2.1.3) e o fato de  $\#g = r$ , podemos dizer que o grau do polinômio  $\pi^\varepsilon(g)$  é  $r$ , a não ser quando  $\pi^\varepsilon(g) = 0$  (Observação 2.1.1). Em toda a prova só estamos interessados nos grafos  $g$  tais que  $\pi^\varepsilon(g) \neq 0$ .

Para  $g \in G\{W\}$ , existe  $s$  com  $t \leq s \leq r$  e existem constantes  $d_j^g$ ,  $j = s, \dots, r-1, r$ , com  $d_r^g > 0$ , tais que:

$$\pi^\varepsilon(g) = d_r^g \varepsilon^r + d_{r-1}^g \varepsilon^{r-1} + \dots + d_{s+1}^g \varepsilon^{s+1} + d_s^g \varepsilon^s.$$

Podemos também afirmar que o menor valor que  $s$  pode assumir é  $t$  ( $t = l - l'$ ), pois o valor de  $s$  depende do número de transições entre classes ergódicas e portanto  $s$  assume o menor valor quando cada classe ergódica contida em  $W^c$  fizer apenas uma transição para outra classe ergódica qualquer; neste caso  $\#E_{\bar{g}} = t$  e  $g \in H\{W\}$ . Então

$$\sum_{g \in G\{W\}} \pi^\varepsilon(g) = d_r \varepsilon^r + d_{r-1} \varepsilon^{r-1} + \dots + d_{t+1} \varepsilon^{t+1} + d_t \varepsilon^t,$$

onde  $d_j = \sum_{g \in G\{W\}} d_j^g$ ,  $\forall t < j \leq r$  e

$$\begin{aligned} d_t &= \sum_{g \in H\{W\}} d_t^g = \sum_{g \in H\{W\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in E_g} b_{yz} \prod_{(y \rightarrow z) \in E_{\bar{g}}} a_{yz} = \\ &= \sum_{g \in H\{W\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz}^* = \sum_{g \in H\{W\}} \pi^*(g). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$



Agora, vamos considerar  $g \in G_{x,y}\{W\}$  com  $x, y$  fixos,  $x \in W^c$  e  $y \in W$ . Para calcular  $\sum_{g \in G_{x,y}\{W\}} \pi^\varepsilon(g)$ , temos que dividir em dois casos:

**1º Caso:**  $x, y \in C$  ou  $C \cap W = \emptyset$ .

Existe  $s$  com  $t \leq s \leq r$  e existem constantes  $c_j^g, j = s, \dots, r-1, r; s \geq t$ , com  $c_r^g > 0$ , tais que:

$$\pi^\varepsilon(g) = c_r^g \varepsilon^r + c_{r-1}^g \varepsilon^{r-1} + \dots + c_{s+1}^g \varepsilon^{s+1} + c_s^g \varepsilon^s.$$

Podemos afirmar que o menor valor que  $s$  pode assumir é  $t$  ( $t = l - l'$ ), pois o valor de  $s$  depende do número de transições entre classes ergódicas e portanto o menor valor que  $s$  assume é quando cada classe ergódica contida em  $W^c$  fizer apenas uma transição para outra classe ergódica qualquer; neste caso  $\#E_{\bar{g}} = t$  e  $g \in H_{x,y}\{W\}$  (ver Figura 2.2.1).

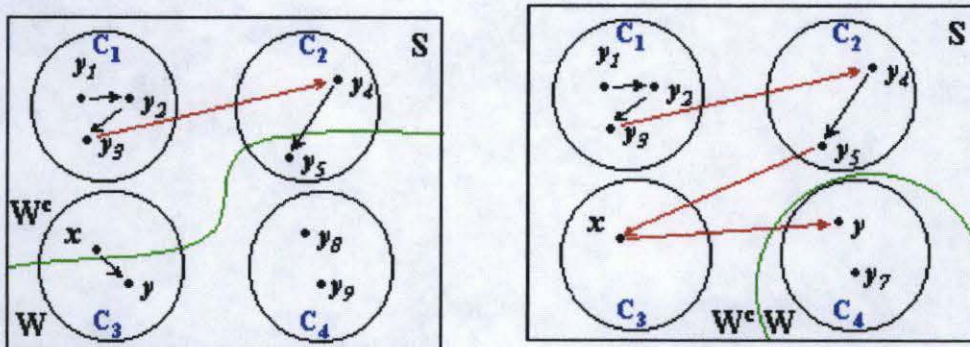


Figura 2.2.1: Exemplo de grafos  $g \in H_{x,y}\{W\}$ , com  $x, y \in C_3$  ou  $C_3 \cap W = \emptyset$ .

Então

$$\sum_{g \in G_{x,y}\{W\}} \pi^\varepsilon(g) = c_r \varepsilon^r + c_{r-1} \varepsilon^{r-1} + \dots + c_{t+1} \varepsilon^{t+1} + c_t \varepsilon^t,$$

onde

$$c_j = \sum_{g \in G_{x,y}\{W\}} c_j^g, \quad \forall t < j \leq r$$

e

$$\begin{aligned} c_t &= \sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} c_t^g \sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in E_g} b_{yz} \prod_{(y \rightarrow z) \in E_{\bar{g}}} a_{yz} = \\ &= \sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz}^* = \sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} \pi^*(g). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_W^\varepsilon(x, y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{c_r \varepsilon^r + c_{r-1} \varepsilon^{r-1} + \dots + c_{t+1} \varepsilon^{t+1} + c_t \varepsilon^t}{d_r \varepsilon^r + d_{r-1} \varepsilon^{r-1} + \dots + d_{t+1} \varepsilon^{t+1} + d_t \varepsilon^t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^t (c_r \varepsilon^{r-t} + c_{r-1} \varepsilon^{r-t-1} + \dots + c_{t+1} \varepsilon + c_t)}{\varepsilon^t (d_r \varepsilon^{r-t} + d_{r-1} \varepsilon^{r-t-1} + \dots + d_{t+1} \varepsilon + d_t)} = \\
&= \frac{c_t}{d_t}.
\end{aligned}$$

Substituindo (2.2.2) e (2.2.3) na expressão anterior, temos

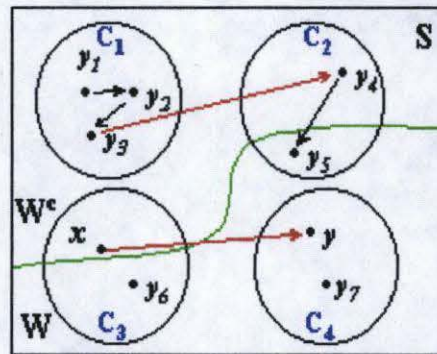
$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_W^\varepsilon(x, y) = \frac{\sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{W\}} \pi^*(g)}.$$

**2º Caso:**  $y \notin C$  e  $C \cap W \neq \emptyset$ .

Para  $g \in G_{x,y}\{W\}$ , existe  $s$  com  $t \leq s \leq r$  e existem constantes  $c_j^g, j = s, \dots, r - 1, r$ , com  $c_r^g > 0$ , tais que:

$$\pi^\varepsilon(g) = c_r^g \varepsilon^r + c_{r-1}^g \varepsilon^{r-1} + \dots + c_{s+1}^g \varepsilon^{s+1} + c_s^g \varepsilon^s.$$

Podemos também afirmar que o menor valor que  $s$  pode assumir é  $t+1$  ( $t = l - l'$ ), pois o valor de  $s$  depende do número de transições entre classes ergódicas e portanto o menor valor que  $s$  assume é quando cada classe ergódica contida em  $W^c$  fizer apenas uma transição para outra classe ergódica em  $S$ ; neste caso  $\#E_{\bar{g}} = t+1$  e  $g \in H_{x,y}\{W\}$  (ver Figura 2.2.2).



**Figura 2.2.2:** Exemplo de um grafo  $g \in H_{x,y}\{W\}$ , com  $y \notin C_3$  e  $C_3 \cap W \neq \emptyset$ .

Então

$$\sum_{g \in G_{x,y}\{W\}} \pi^\varepsilon(g) = c_r \varepsilon^r + c_{r-1} \varepsilon^{r-1} + \dots + c_{t+1} \varepsilon^{t+1},$$

onde

$$c_j = \sum_{g \in G_{x,y}\{W\}} c_j^g, \quad \forall t < j \leq r$$

e

$$\begin{aligned} c_{t+1} &= \sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} c_{t+1}^g \sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in E_g} b_{yz} \prod_{(y \rightarrow z) \in E_{\bar{g}}} a_{yz} = \\ &= \sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz}^* = \sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} \pi^*(g). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_W^\varepsilon(x, y) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{c_r \varepsilon^r + c_{r-1} \varepsilon^{r-1} + \dots + c_{t+1} \varepsilon^{t+1}}{d_r \varepsilon^r + d_{r-1} \varepsilon^{r-1} + \dots + d_{t+1} \varepsilon^{t+1} + d_t \varepsilon^t} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^t (c_r \varepsilon^{r-t} + c_{r-1} \varepsilon^{r-t-1} + \dots + c_{t+1} \varepsilon)}{\varepsilon^t (d_r \varepsilon^{r-t} + d_{r-1} \varepsilon^{r-t-1} + \dots + d_{t+1} \varepsilon + d_t)} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

O Teorema 2.2.2 nos fornece o tempo médio assintótico que a cadeia leva para sair pela primeira vez do conjunto  $W^c$ .

Seja  $m_W^\varepsilon(x)$  como definido em (1.4.1), mas correspondente a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ , isto é,  $m_W^\varepsilon(x) = E_x^\varepsilon(\tau(W^c))$ , onde  $E_x^\varepsilon$  é a esperança condicional dado  $X_0^\varepsilon = x$  em relação a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ .

**Teorema 2.2.2:** *Sejam  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  como definido anteriormente,  $W \subseteq S$  e  $x \in W^c$ . Seja  $C$  pertencente a uma classe ergódica  $C$ . Então*

$$m_W(x) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon m_W^\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{g \in H_{\{x \notin W\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H_{\{W\}} \pi^*(g)}, & \text{se } C \subseteq W^c \\ 0, & \text{se } C \not\subseteq W^c \end{cases} \quad (2.2.4)$$

onde  $\pi^*(g)$  está definido em (2.1.4).

**Prova:** Como antes, estamos interessados somente nos grafos  $g$  tais que  $\pi^\varepsilon(g) \neq 0$ .

Seja  $W \subseteq S$ ,  $W \neq \emptyset$ . Sejam  $l$  o número de classes ergódicas da cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ ,  $l'$  o número de classes ergódicas com elementos pertencentes a  $W$  e  $t = l - l'$ . Vamos supor que  $\#W^c = r \geq 1$ .

Pela prova do Teorema 2.2.1 sabemos que existem constantes  $d_j$ ,  $j = t, \dots, r-1, r$ , com tais que:

$$\sum_{g \in G\{W\}} \pi^\varepsilon(g) = d_r \varepsilon^r + d_{r-1} \varepsilon^{r-1} + \dots + d_{t+1} \varepsilon^{t+1} + d_t \varepsilon^t,$$

onde

$$d_j = \sum_{g \in G\{W\}} d_j^g, \quad \forall t < j \leq r$$

e

$$d_t = \sum_{g \in H\{W\}} \pi^*(g)$$

como em (2.2.2). Sabemos pelo Teorema 1.4.1 que

$$m_W^\varepsilon(x) = \frac{\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi^\varepsilon(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi^\varepsilon(g)}, \quad \forall x \in S, \forall W \subseteq S.$$

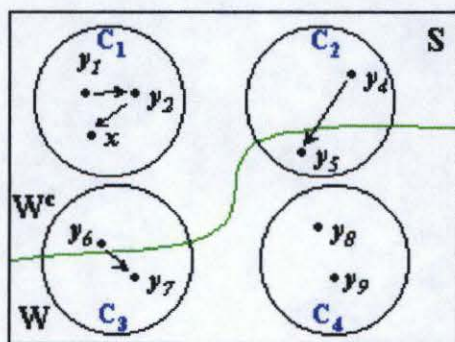
Se  $\#W^c = r$ , então para cada  $g \in G\{x \rightarrow W\}$  temos que  $\#g = r - 1$ , pois pela Definição 1.1.3, sabemos que cada elemento em  $W^c$ , exceto um, é ponto inicial de exatamente uma seta. Então por (2.1.3), podemos dizer que o grau de  $\pi^\varepsilon(g)$  é  $r - 1$ . Portanto, existem  $s$  e constantes  $e_j^g$ ,  $j = s, \dots, r, r - 1$ , com  $e_{r-1}^g > 0$ , tais que:

$$\pi^\varepsilon(g) = e_{r-1}^g \varepsilon^{r-1} + e_{r-2}^g \varepsilon^{r-2} + \dots + e_{s+1}^g \varepsilon^{s+1} + e_s^g \varepsilon^s. \quad (2.2.5)$$

Para calcular  $\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi^\varepsilon(g)$ , vamos considerar dois casos:

**1º Caso:** Seja  $x \in C \subseteq W^c$  (ver Figura 2.2.3).

Neste caso, podemos afirmar que o menor valor que  $s$  pode assumir é  $t - 1$  ( $t = l - l'$ ), isto é, existe  $g \in G\{x \rightarrow W\}$  com  $\pi^\varepsilon(g)$  dado por (2.2.5) com  $s = t - 1$ . Basta ver que o valor de  $s$  depende do número de transições entre classes ergódicas e portanto  $s$  assume o menor valor quando cada classe ergódica contida em  $W^c$  fizer apenas uma transição para outra classe ergódica qualquer; neste caso  $\#E_{\bar{g}} = t - 1$  e  $g \in H\{x \rightarrow W\}$  (ver Figura 2.2.3).



**Figura 2.2.3:** Exemplo de um grafo  $g \in H\{x \rightarrow W\}$  com  $x \in C_1 \subseteq W^c$ .

Então

$$\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi^\varepsilon(g) = e_{r-1} \varepsilon^{r-1} + e_{r-2} \varepsilon^{r-2} + \dots + e_t \varepsilon^t + e_{t-1} \varepsilon^{t-1},$$

onde

$$e_z = \sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} e_z^g, \quad \forall t-1 < z \leq r-1$$

e

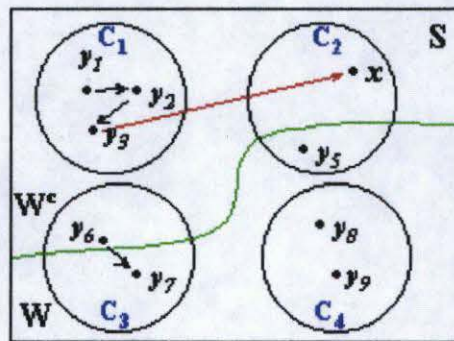
$$e_{t-1} = \sum_{g \in H\{x \rightarrow W\}} e_{t-1}^g = \sum_{g \in H\{x \rightarrow W\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz}^* = \sum_{g \in H\{x \rightarrow W\}} \pi^*(g). \quad (2.2.6)$$

Usando (2.2.2) e (2.2.6), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon m_W^\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \frac{\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi^\varepsilon(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi^\varepsilon(g)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \frac{e_{r-1}\varepsilon^{r-1} + e_{r-2}\varepsilon^{r-2} + \dots + e_t\varepsilon^t + e_{t-1}\varepsilon^{t-1}}{d_r\varepsilon^r + d_{r-1}\varepsilon^{r-1} + \dots + d_{t+1}\varepsilon^{t+1} + d_t\varepsilon^t} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \frac{\varepsilon^{t-1}(e_{r-1}\varepsilon^{r-t} + e_{r-2}\varepsilon^{r-t-1} + \dots + e_t\varepsilon + e_{t-1})}{\varepsilon^t(d_r\varepsilon^{r-t} + d_{r-1}\varepsilon^{r-t-1} + \dots + d_{t+1}\varepsilon + d_t)} = \\ &= \frac{e_{t-1}}{d_t} = \frac{\sum_{g \in H\{x \rightarrow W\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{W\}} \pi^*(g)}. \end{aligned}$$

**2º Caso:** Seja  $x \in C \not\subseteq W^c$  (ver Figura 2.2.4).

Neste caso, podemos afirmar que o menor valor que  $s$  (em (2.2.5)) pode assumir é  $t$  ( $t = l - l'$ ), pois o valor de  $s$  depende do número de transições entre classes ergódicas e portanto o menor valor que  $s$  assume é quando cada classe ergódica contida em  $W^c$  fizer apenas uma transição para outra classe ergódica em  $S$ ; neste caso  $\#E_g = t$  e  $g \in H\{x \rightarrow W\}$  (ver Figura 2.2.4).



**Figura 2.2.4:** Exemplo de um grafo  $g \in H\{x \rightarrow W\}$  com  $x \in C_2 \not\subseteq W^c$ .

Então

$$\sum_{g \in G\{x \rightarrow W\}} \pi^\varepsilon(g) = e_{r-1}\varepsilon^{r-1} + e_{r-2}\varepsilon^{r-2} + \dots + e_t\varepsilon^t,$$

onde

$$e_z = \sum_{g \in G\{x \neq W\}} e_z^g, \quad \forall t < z \leq r-1$$

e

$$e_t = \sum_{g \in H\{x \neq W\}} e_t^g = \sum_{g \in H\{x \neq W\}} \prod_{(y \rightarrow z) \in g} p_{yz}^* = \sum_{g \in H\{x \neq W\}} \pi^*(g).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon m_W^\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \frac{\sum_{g \in G\{x \neq W\}} \pi^\varepsilon(g)}{\sum_{g \in G\{W\}} \pi^\varepsilon(g)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \frac{e_{r-1}\varepsilon^{r-1} + e_{r-2}\varepsilon^{r-2} + \dots + e_t\varepsilon^t}{d_r\varepsilon^r + d_{r-1}\varepsilon^{r-1} + \dots + d_{t+1}\varepsilon^{t+1} + d_t\varepsilon^t} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \frac{\varepsilon^t(e_{r-1}\varepsilon^{r-t-1} + e_{r-2}\varepsilon^{r-t-2} + \dots + e_t)}{\varepsilon^t(d_r\varepsilon^{r-t} + d_{r-1}\varepsilon^{r-t-1} + \dots + d_{t+1}\varepsilon + d_t)} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

### 2.3 - Transições entre classes e tempo de saída de uma classe

Os Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 são bem gerais, não fazendo restrições nem ao estado de chegada,  $y$ , nem ao conjunto  $W$ . A partir de agora estaremos interessados somente nas transições entre as classes ergódicas e no tempo médio em que a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  permanece em cada uma delas.

Como antes,  $C_1, C_2, \dots, C_l$  são classes ergódicas e  $L = \{1, 2, \dots, l\}$  o conjunto dos índices das classes ergódicas. Os conjuntos  $W$  e  $W^c$ , a partir de agora, também serão utilizados como subconjuntos de  $L$  e seus elementos indicados por  $i, j, k$ , etc.

No próximo teorema obtemos as probabilidades assintóticas de transição entre as classes ergódicas, ou melhor, o limite, quando  $\varepsilon$  tende a zero, destas probabilidades. Mostraremos que estes limites dependem apenas da classe ergódica onde a cadeia inicia, isto é, ele não depende do ponto inicial dentro da classe.

**Teorema 2.3.1:** *Seja  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ , como definido anteriormente. Então, para  $x \in C_i$ ,*

$$\begin{aligned} q_{ij} &\equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_j)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \\ &= \begin{cases} \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{x,y}\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

com  $\pi^*(g)$  definido em (2.1.4).

**Prova:** Seja  $x \in C_i$ . Temos que

$$P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \sum_{y \in C_j} P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x \right).$$

Pelo Teorema 1.5.1

$$P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \sum_{y \in C_j} q_{C_i}^\varepsilon(x, y).$$

Então, Teorema 2.2.1 implica em

$$\begin{aligned} q_{ij} &\equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{y \in C_j} q_{C_i}^\varepsilon(x, y) = \sum_{y \in C_j} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{C_i}^\varepsilon(x, y) = \\ &= \sum_{y \in C_j} q_{C_i}^\varepsilon(x, y) = \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{x,y}\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)}, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Basta provar agora que o resultado acima é constante para todo  $x \in C_i$ .

Seja  $x' \in C_i$ ,  $x' \neq x$ . Neste caso

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{C_i}^\varepsilon(x', C_j) = \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{x',y}\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)}, \quad i \neq j.$$

Mas, pela definição de  $H_{x,y}\{W\}$ , temos que  $H_{x',y}\{C_i^c\} = H_{x,y}\{C_i^c\}$ . Logo,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{C_i}^\varepsilon(x', C_j) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{C_i}^\varepsilon(x, C_j).$$

É fácil ver também que  $q_{ii} = 0$ , pois neste caso  $H_{x,y}\{C_i^c\} = \emptyset$ . ■

**Corolário 2.3.1:** *Sejam  $W^c = \bigcup_{k \in V} C_k$  onde  $V$  é um subconjunto de índices. Então, para  $x \in C_i$ ,  $i \in V$  e  $j \notin V$*

$$q_{W^c}(i, j) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(W^c)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{x,y}\{W\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{W\}} \pi^*(g)}, \quad (2.3.2)$$

com  $\pi^*(g)$  definido em (2.1.4).

**Prova:** Conseqüência imediata dos Teoremas 2.2.1 e 2.3.1. ■

O Teorema 2.3.2 fornece um resultado assintótico para o tempo médio de saída de  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  de uma classe ergódica.

**Teorema 2.3.2:** *Seja  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  como definido anteriormente. Então*

$$m_i \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon (\tau(C_i)) = \frac{\sum_{g \in H\{x' \nrightarrow C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)}, \quad \forall x \in C_i, \quad (2.3.3)$$

com  $\pi^*(g)$  definido em (2.1.4).

**Prova:** A prova deste teorema é uma conseqüência imediata do Teorema 2.2.2, bastando apenas provar agora que o resultado acima é constante para todo  $x \in C_i$ .

Sejam  $x, x' \in C_i$ , neste caso

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_{x'}^\varepsilon (\tau(C_i)) = \frac{\sum_{g \in H\{x' \nrightarrow C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)}.$$

Mas, pela definição de  $H\{x' \nrightarrow W\}$ , temos que  $H\{x' \nrightarrow C_i^c\} = H\{x \nrightarrow C_i^c\}$ . ■

## 2.4 - Tempo de saída de uma união de classes ergódicas

Seja  $q_{ij}$  como definido em (2.3.1). Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in L \setminus \{i\}} q_{ij} &= \sum_{j \in L \setminus \{i\}} \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{x,y}\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)} = \\ &= \sum_{y \in S \setminus C_i} \frac{\sum_{g \in H_{x,y}\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)} = \\ &= \frac{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)} = 1, \quad \forall i \in L. \end{aligned}$$



Vemos então que  $(q_{ij})_{i,j \in L}$  é uma matriz estocástica com  $q_{ii} = 0, \forall i \in L$ .

Como vimos,  $Q = (q_{ij})_{i,j \in L}$  é uma matriz estocástica e fornece as probabilidades assintóticas de transição entre classes. Esta matriz determina uma nova cadeia de Markov,  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , com espaço de estados  $S_Y = L = \{1, 2, \dots, l\}$ . Este fato introduz a idéia de renormalização, isto é, partindo da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  e observando  $X_n^\varepsilon$  somente nos instantes de saída de cada classe ergódica, determinamos uma nova cadeia cujos estados são os índices das classes ergódicas de  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ . No próximo capítulo faremos uma generalização desta idéia.

No próximo teorema trabalhamos simultaneamente com as cadeias  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  e  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , pois ele envolve o número médio de passos que a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  dá antes de sair de uma classe ergódica, cálculo este, baseado nas probabilidades de transição da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ , e o número médio assintótico de visitas (ou retornos) feitas a uma determinada classe, a qual é calculada pelas probabilidades de transição da cadeia  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

Seja  $N_j^V$  = número de visitas da cadeia  $(Y_n)_{n \geq 0}$  ao estado  $j$  antes de sair de  $V \subseteq S_Y$  e  $E_i(N_j^V)$  dado pelo Teorema 1.5.1. Daqui em diante, até o final do capítulo,  $E$  é a esperança e  $E_i$  será a esperança condicional dado  $Y_0 = i$ , correspondente a cadeia  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

**Teorema 2.4.1:** *Seja  $W^c = \bigcup C_j$ ,  $C_j$  classe ergódica da cadeia  $\{X_n^1\}_{n \geq 0}$ ,  $V = \{k \in S_Y : C_k \subseteq W^c\}$ . Então para  $C_i \subseteq W^c$*

$$m_i(V) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) = \sum_{j \in V} m_j E_i(N_j^V), \quad \forall x \in C_i, \quad (2.4.1)$$

onde  $m_j$  é dado pelo Teorema 2.3.2.

**Prova:** Provaremos por indução no número de classes em  $W^c$ . Para  $W^c = C_i$ , temos  $V = \{i\}$  e  $m_i(V) = m_i$ . Portanto, retornamos a situação do Teorema 2.3.2.

Começamos então com  $W^c = C_i \cup C_j$ . Temos  $V = \{i, j\}$  e  $\#V = 2$ . Para  $x \in C_i$ ,

$$\begin{aligned} E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i \cup C_j)) = \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(C_i \cup C_j) > n \mid X_0^\varepsilon = x) = \\ &= \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(C_i \cup C_j) > n, \tau(C_i) > n \mid X_0^\varepsilon = x) + \\ &\quad + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(C_i \cup C_j) > n, \tau(C_i) \leq n \mid X_0^\varepsilon = x) = \\ &= \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(C_i) > n \mid X_0^\varepsilon = x) + \\ &\quad + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(C_i \cup C_j) > n, \tau(C_i) \leq n \mid X_0^\varepsilon = x) = \\ &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n, \tau(C_i) \leq n, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) + \\
& + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n, \tau(C_i) \leq n, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in W \mid X_0^\varepsilon = x \right).
\end{aligned}$$

Como o segundo somatório é zero temos

$$\begin{aligned}
E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \\
&= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{n \geq 0} \sum_{y \in C_j} P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n \mid X_0^\varepsilon = x, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y \right) \times \\
&\quad \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x \right).
\end{aligned}$$

Pela propriedade forte de Markov e por (1.3.1),

$$\begin{aligned}
E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} \left[ q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n \mid X_0^\varepsilon = y \right) \right] = \\
&= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} \left[ q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \times \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n, \tau(C_j) > n \mid X_0^\varepsilon = y \right) \right] + \\
&\quad + \sum_{y \in C_j} \left[ q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n, \tau(C_j) \leq n \mid X_0^\varepsilon = y \right) \right] = \\
&= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} \left[ q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon \left( \tau(C_j) > n \mid X_0^\varepsilon = y \right) \right] + \\
&\quad + \sum_{y \in C_j} \left[ q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \times \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n, \tau(C_j) \leq n, X_{\tau(C_j)}^\varepsilon \in C_i \mid X_0^\varepsilon = y \right) \right].
\end{aligned}$$

Novamente, pela propriedade forte de Markov e por (1.3.1) e (1.4.2), temos

$$\begin{aligned}
E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} \left\{ q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \left[ E_y^\varepsilon(\tau(C_j)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{n \geq 0} \sum_{x_1 \in C_i} P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n, X_{\tau(C_j)}^\varepsilon = x_1 \mid X_0^\varepsilon = y \right) \right] \right\} = \\
&= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon(\tau(C_j)) + \\
&\quad + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{n \geq 0} \sum_{x_1 \in C_i} P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_j)}^\varepsilon = x_1 \mid X_0^\varepsilon = y \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times P^\varepsilon \left( \tau(C_i \cup C_j) > n \mid X_0^\varepsilon = y, X_{\tau(C_j)}^\varepsilon = x_1 \right) = \\
& = E_x^\varepsilon (\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon (\tau(C_j)) + \\
& + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} q_{S \setminus C_j}^\varepsilon(y, x_1) \times \\
& \times \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon (\tau(C_i \cup C_j) > n \mid X_0^\varepsilon = x_1) = \\
& = E_x^\varepsilon (\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon (\tau(C_j)) + \\
& + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} q_{S \setminus C_j}^\varepsilon(y, x_1) E_{x_1}^\varepsilon (\tau(C_i \cup C_j)) = \\
& = E_x^\varepsilon (\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon (\tau(C_j)) + \\
& + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} q_{S \setminus C_j}^\varepsilon(y, x_1) E_{x_1}^\varepsilon (\tau(W^c)).
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
m_i(\{i, j\}) & = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon (\tau(W^c)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon (\tau(C_i \cup C_j)) = \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \left[ E_x^\varepsilon (\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon (\tau(C_j)) + \right. \\
& \left. + \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} q_{S \setminus C_j}^\varepsilon(y, x_1) E_{x_1}^\varepsilon (\tau(C_i \cup C_j)) \right] = \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon (\tau(C_i)) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon (\tau(C_j)) + \\
& + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} q_{S \setminus C_j}^\varepsilon(y, x_1) E_{x_1}^\varepsilon (\tau(C_i \cup C_j)) = \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon (\tau(C_i)) + \sum_{y \in C_j} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon (\tau(C_j)) + \\
& + \sum_{y \in C_j} \sum_{x_1 \in C_i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) q_{S \setminus C_j}^\varepsilon(y, x_1) E_{x_1}^\varepsilon (\tau(C_i \cup C_j)).
\end{aligned}$$

Applicando o Teorema 2.3.2,

$$\begin{aligned}
m_i(\{i, j\}) & = m_i + \sum_{y \in C_j} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_y^\varepsilon (\tau(C_j)) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) + \\
& + \sum_{y \in C_j} \sum_{x_1 \in C_i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_{x_1}^\varepsilon (\tau(C_i \cup C_j)) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) q_{S \setminus C_j}^\varepsilon(y, x_1)] = \\
& = m_i + \sum_{y \in C_j} m_j \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{y \in C_j, x_1 \in C_i} m_i(\{i, j\}) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) q_{S \setminus C_j}^\varepsilon(y, x_1) \right] = \\
= & m_i + m_j \sum_{y \in C_j} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) + \\
& + m_i(\{i, j\}) \sum_{y \in C_j} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_j}^\varepsilon(y, x_1).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.3.1, temos que

$$m_i(\{i, j\}) = m_i + m_j q_{ij} + m_i(\{i, j\}) q_{ij} q_{ji}.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}
m_i(\{i, j\}) &= \frac{m_i + q_{ij} m_j}{1 - q_{ij} q_{ji}} = \\
&= \frac{1}{1 - q_{ij} q_{ji}} m_i + \frac{q_{ij}}{1 - q_{ij} q_{ji}} m_j.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.5.1,

$$\begin{aligned}
m_i(\{i, j\}) &= E_i(N_i^{\{i, j\}}) m_i + E_i(N_j^{\{i, j\}}) m_j = \\
&= \sum_{k \in \{i, j\}} m_k E_i(N_k^{\{i, j\}}).
\end{aligned}$$

Agora supondo que

$$m_i(V) = \sum_{k \in V} m_k E_i(N_k^V), \text{ para } \#V = n - 1,$$

vamos provar que a expressão acima vale para  $\#V = n$ . Seja  $W^c = \bigcup_{j \in V} C_j$  e  $C_i \subseteq W^c$ .

Para  $x \in C_i$ ,

$$\begin{aligned}
E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) &= \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n \mid X_0^\varepsilon = x) = \\
&= \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, \tau(C_i) > n \mid X_0^\varepsilon = x) + \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, \tau(C_i) \leq n \mid X_0^\varepsilon = x) = \\
&= \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(C_i) > n \mid X_0^\varepsilon = x) + \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, \tau(C_i) \leq n \mid X_0^\varepsilon = x) = \\
&= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, \tau(C_i) \leq n, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in W^c \setminus C_i \mid X_0^\varepsilon = x) + \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, \tau(C_i) \leq n, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in W \mid X_0^\varepsilon = x).
\end{aligned}$$

Como o segundo somatório é zero, temos

$$\begin{aligned} E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in W^c \setminus C_i \mid X_0^\varepsilon = x) = \\ &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{n \geq 0} \sum_{y \in W^c \setminus C_i} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n \mid X_0^\varepsilon = x, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y) \times \\ &\quad \times P^\varepsilon(X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x). \end{aligned}$$

Pela propriedade forte de Markov e por (1.3.1) e (1.4.2), temos

$$\begin{aligned} E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n \mid X_0^\varepsilon = y) = \\ &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \times \\ &\quad \times \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus C_i) > n \mid X_0^\varepsilon = y) + \\ &\quad + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \times \\ &\quad \times \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus C_i) \leq n \mid X_0^\varepsilon = y) = \\ &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i) > n \mid X_0^\varepsilon = y) + \\ &\quad + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \times \\ &\quad \times \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, \tau(W^c \setminus C_i) \leq n, X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon \in C_i \mid X_0^\varepsilon = y) = \\ &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i)) + \\ &\quad + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \times \\ &\quad \times \sum_{n \geq 0} \sum_{x_1 \in C_i} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n, X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = x_1 \mid X_0^\varepsilon = y) = \\ &= E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i)) + \\ &\quad + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{n \geq 0} \sum_{x_1 \in C_i} P^\varepsilon(X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = x_1 \mid X_0^\varepsilon = y) \times \\ &\quad \times P^\varepsilon(\tau(W^c) > n \mid X_0^\varepsilon = y, X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = x_1). \end{aligned}$$

Novamente, aplicando a propriedade forte de Markov, temos

$$E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) = E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} q_{W \cup C_i}^\varepsilon(y, x_1) \times \\
& \times \sum_{n \geq 0} P^\varepsilon(\tau(W^c) > n \mid X_0^\varepsilon = x_1) = \\
& = E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i)) + \\
& + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} q_{W \cup C_i}^\varepsilon(y, x_1) E_{x_1}^\varepsilon(\tau(W^c)).
\end{aligned}$$

Mas,  $\forall x \in C_i$ ,

$$\begin{aligned}
m_i(V) & = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(W^c)) = \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \left[ E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i)) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} q_{W \cup C_i}^\varepsilon(y, x_1) E_{x_1}^\varepsilon(\tau(W^c)) \right] = \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i)) + \\
& + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \sum_{y \in W^c \setminus C_i} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \sum_{x_1 \in C_i} q_{W \cup C_i}^\varepsilon(y, x_1) E_{x_1}^\varepsilon(\tau(W^c)) = \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(C_i)) + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) E_y^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i)) + \\
& + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} \sum_{x_1 \in C_i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) q_{W \cup C_i}^\varepsilon(y, x_1) E_{x_1}^\varepsilon(\tau(W^c)).
\end{aligned}$$

Com o resultado do Teorema 2.3.2, obtemos

$$\begin{aligned}
m_i(V) & = m_i + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_y^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i)) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) + \\
& + \sum_{y \in W^c \setminus C_i} \sum_{x_1 \in C_i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_{x_1}^\varepsilon(\tau(W^c)) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) q_{W \cup C_i}^\varepsilon(y, x_1) = \\
& = m_i + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} \sum_{y \in C_j} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_y^\varepsilon(\tau(W^c \setminus C_i)) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) + \\
& + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} \sum_{y \in C_j} \sum_{x_1 \in C_i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_{x_1}^\varepsilon(\tau(W^c)) \times \\
& \times \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) q_{W \cup C_i}^\varepsilon(y, x_1) = \\
& = m_i + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} \sum_{y \in C_j} m_j(V \setminus \{i\}) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) + \\
& + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} \sum_{y \in C_j} \sum_{x_1 \in C_i} m_i(V) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) q_{W \cup C_i}^\varepsilon(y, x_1) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_i + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} m_j(V \setminus \{i\}) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) + \\
&\quad + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} m_i(V) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{y \in C_j} q_{S \setminus C_i}^\varepsilon(x, y) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{x_1 \in C_i} q_{W \cup C_i}^\varepsilon(y, x_1).
\end{aligned}$$

Usando o Teorema 2.3.1, temos que

$$m_i(V) = m_i + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} m_j(V \setminus \{i\}) q_{ij} + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} m_i(V) q_{ij} q_{Q^c \cup i}(j, i).$$

Pela hipótese de indução,

$$m_i(V) = m_i + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} q_{ij} \sum_{k \in V \setminus \{i\}} m_k E_j(N_k^{V \setminus \{i\}}) + m_i(V) \sum_{j \in V \setminus \{i\}} q_{ij} q_{Q^c \cup i}(j, i).$$

Então,

$$\begin{aligned}
m_i(V) &= \frac{m_i + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} q_{ij} \sum_{k \in V \setminus \{i\}} m_k E_j(N_k^{V \setminus \{i\}})}{1 - \sum_{j \in V \setminus \{i\}} q_{ij} q_{Q^c \cup i}(j, i)} = \\
&= \frac{m_i}{1 - \sum_{j \in V \setminus \{i\}} q_{ij} q_{Q^c \cup i}(j, i)} + \frac{\sum_{k \in V \setminus \{i\}} m_k \sum_{j \in V \setminus \{i\}} q_{ij} E_j(N_k^{V \setminus \{i\}})}{1 - \sum_{j \in V \setminus \{i\}} q_{ij} q_{Q^c \cup i}(j, i)}.
\end{aligned}$$

Mas, por (1.5.3)

$$\frac{\sum_{j \in V \setminus \{i\}} q_{ij} E_j(N_k^{V \setminus \{i\}})}{1 - \sum_{j \in V \setminus \{i\}} q_{ij} q_{Q^c \cup i}(j, i)} = E_i(N_k^V).$$

Então,

$$m_i(V) = m_i E_i(N_i^V) + \sum_{k \in V \setminus \{i\}} m_k E_i(N_k^V) = \sum_{k \in V} m_k E_i(N_k^V).$$

■

## CAPÍTULO 3

### RENORMALIZAÇÃO E CICLOS

No capítulo anterior introduzimos a cadeia de Markov  $(Y_n)_{n \geq 0}$  que descreve as transições assintóticas entre as classes ergódicas da cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ . Também calculamos o tempo médio assintótico que a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  necessita para escapar de cada uma destas classes. Neste capítulo vamos definir certos domínios especiais denominados ciclos.

Aqui, construímos outras cadeias cujas matrizes de transição representam as transições assintóticas da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  entre os ciclos. Estudamos também os seus respectivos “tempos de saída”.

A partir destas novas cadeias vamos mostrar o que acontece com o limite (2.4)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon (X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x).$$

Vamos ver que as constantes  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , citadas na introdução dependem diretamente do “tempo de saída” de cada ciclo e os conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  são uniões de classes ergódicas correspondente aos diferentes ciclos.

Primeiramente, vamos definir o que são ciclos.

#### 3.1 - Ciclos de ordem zero

**Definição 3.1.1:** (*Ciclo de ordem zero*)

Diz-se que  $\pi_i^0 = \{i\}$  é um ciclo de ordem zero se a classe  $C_i$  tem mais de um elemento. Neste caso pelo Teorema 2.2.1, se  $x, y \in C_i$ ,  $y \neq x$ , então

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon (X_{\tau(C_i \setminus \{y\})}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x) = 1, \quad \forall y \in C_i, y \neq x.$$

Neste capítulo assumimos que todas as classes ergódicas correspondem a um ciclo de ordem zero, isto é,  $\#C_i > 1$ ,  $\forall i \in L$ .



### 3.2 - Ciclos de primeira ordem

**Definição 3.2.1:** (*Ciclo de primeira ordem*)

Seja  $\pi \subseteq S_Y \equiv L$ ,  $\#\pi > 1$ . Diz-se que  $\pi$  é um ciclo de primeira ordem que contém  $i$  se e somente se  $\pi$  é o **menor** subconjunto de  $S_Y$  satisfazendo:

- a)  $i \in \pi$  e
- b)  $\forall j, k \in \pi, j \neq k$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X^\varepsilon_{\tau \left( \bigcup_{m \in \pi} C_m \setminus C_j \right)} \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 1, \quad \forall x \in C_k.$$

**Observação 3.2.1:**

a) Se existe um único  $\pi$  que satisfaça a Definição 3.2.1, então  $\pi = L$  ou existe  $j$  tal que  $j \notin \pi$ , e neste caso dizemos que  $\pi' = \{j\}$  é um ciclo de primeira ordem. Da mesma forma, se existem mais de um ciclo de primeira ordem, conforme Definição 3.2.1, então  $\forall j$  tal que  $j$  não pertence a nenhum destes ciclos, dizemos que  $\pi' = \{j\}$  é um ciclo de primeira ordem.

b) Convém ressaltar que não é possível que todo ciclo de primeira ordem tenha cardinalidade 1, isto é, corresponda a um única classe ergódica. Por exemplo, se a matriz  $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}}$  é dada por

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então  $\pi_1 = \{1, 3\}$  e  $\pi_2 = \{2\}$  são os ciclos de primeira ordem.

Se  $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}}$  é dada por

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

então existe um único ciclo de primeira ordem que é  $\pi = S_Y \equiv L$ .

c) Outro fato importante é que um ciclo  $\pi$  sempre corresponde a uma união de classes ergódicas da cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$  a qual será denotada por  $W(\pi)$ .

d) Dois ciclos de primeira ordem distintos são disjuntos.

**Teorema 3.2.1:** Sejam  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  como definido anteriormente,  $C_m$ ,  $m \in L$ , classes ergódicas da cadeia  $\{X_n^1\}_{n \geq 0}$ ,  $\pi$  um ciclo conforme a Definição 3.2.1 e  $W^c = \bigcup_{k \in \pi} C_k$ . Então para  $i, j \in \pi$  e  $x \in C_i$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(W^c \setminus C_j)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) &= P \left( Y_{\tau(\pi \setminus \{j\})} = j \mid Y_0 = i \right) \equiv \\ &\equiv q_{\pi^c \cup \{j\}}(i, j). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

**Prova:** Vamos provar utilizando a indução no número de elementos em  $\pi$ .

Seja  $\pi = \{i, j\}$ . Portanto  $\#\pi = 2$ . Temos que, se  $x \in C_i$

$$P(Y_n = j \mid Y_{n-1} = i) = P(Y_1 = j \mid Y_0 = i) \equiv q_{ij}.$$

Mas como  $q_{ii} = 0$ ,  $\forall i \in L$ , podemos dizer que

$$q_{ij} = P(Y_{\tau(\{i\})} = j \mid Y_0 = i).$$

Portanto, pelo Teorema 2.3.1,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x \right) = q_{ij} = P(Y_{\tau(\{i\})} = j \mid Y_0 = i).$$

Agora, como hipótese de indução, suponhamos que (3.2.1) é válida para  $\#\pi = r-1$ . Se  $\#\pi = r$  e  $i \in \pi$ , temos por (1.3.1) e (1.3.3) que

$$\begin{aligned} P(Y_{\tau(\pi \setminus \{j\})} = j \mid Y_0 = i) &\equiv q_{\pi^c \cup \{j\}}(i, j) = \\ &= \frac{q_{ij} + \sum_{k \in \pi \setminus \{i, j\}} q_{ik} q_{(\pi \setminus \{i, j\})^c}(k, j)}{1 - \sum_{k \in \pi \setminus \{i, j\}} q_{ik} q_{(\pi \setminus \{i, j\})^c}(k, i)} = \\ &= \frac{A + B}{1 - C}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Mas pela hipótese de indução, para  $\pi' = \pi \setminus \{i\}$ ,  $\#\pi' = r-1$ ,

$$q_{(\pi' \setminus \{j\})^c}(k, j) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(W^c \setminus (C_i \cup C_j))}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = z \right), \quad \forall z \in C_k$$

e por (2.3.2)

$$q_{(\pi' \setminus \{j\})^c}(k, j) = \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{z, y} \setminus \{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H \setminus \{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g)}, \quad \forall z \in C_k. \quad (3.2.3)$$

Por (2.3.1)

$$A \equiv \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{x,y}\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)}, \quad x \in C_i \quad (3.2.4)$$

e podemos escrever

$$A = \frac{\sum_{g \in H\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g) \sum_{y \in C_j} \sum_{g \in H_{x,y}\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g) \sum_{g \in H\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g)}.$$

Substituindo (3.1.3) e (3.1.4) em  $B$  de (3.1.2), temos para  $x \in C_i$ ,

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k \in \pi \setminus \{i,j\}} \left[ \sum_{z \in C_k} \frac{\sum_{g \in H_{x,z}\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)} \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{z,y}\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g)} \right] = \\ &= \frac{\sum_{k \in \pi \setminus \{i,j\}} \left[ \sum_{z \in C_k} \sum_{g \in H_{x,z}\{C_i^c\}} \pi^*(g) \sum_{y \in C_j} \sum_{g \in H_{z,y}\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g) \right]}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g) \sum_{g \in H\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g)}. \end{aligned}$$

Substituindo (3.1.3) e (3.1.4) em  $C$  de (3.1.2), temos para  $x \in C_i$ ,

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k \in \pi \setminus \{i,j\}} \left[ \sum_{z \in C_k} \frac{\sum_{g \in H_{x,z}\{C_i^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g)} \sum_{x \in C_i} \frac{\sum_{g \in H_{z,x}\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g)} \right] = \\ &= \frac{\sum_{k \in \pi \setminus \{i,j\}} \left[ \sum_{z \in C_k} \sum_{g \in H_{x,z}\{C_i^c\}} \pi^*(g) \sum_{x \in C_i} \sum_{g \in H_{z,x}\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g) \right]}{\sum_{g \in H\{C_i^c\}} \pi^*(g) \sum_{g \in H\{(W^c \setminus (C_i \cup C_j))^c\}} \pi^*(g)}. \end{aligned}$$

Vemos que  $A, B$  e  $C$  têm o mesmo denominador. Além disso o numerador de  $A+B$  é

$$\sum_{y \in C_j} \sum_{g \in H_{x,y}\{(W^c \setminus C_j)^c\}} \pi^*(g)$$

e o de  $1 - C$  é

$$\sum_{g \in H\{(W^c \setminus C_j)^c\}} \pi^*(g).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 P(Y_{\tau(\pi \setminus \{j\})} = j \mid Y_0 = i) &= \frac{A+B}{1-C} = \\
 &= \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{x,y}\{(W^c \setminus C_j)^c\}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H\{(W^c \setminus C_j)^c\}} \pi^*(g)} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon(X_{\tau(W^c \setminus C_j)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x).
 \end{aligned}$$

■

O Teorema 3.2.1, nos permite reescrever a Definição 3.2.1 em função da cadeia  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

**Definição 3.2.1':** (Ciclo de primeira ordem)

Seja  $\pi \subseteq S_Y \equiv L$ ,  $\#\pi > 1$ . Diz-se que  $\pi$  é um ciclo de primeira ordem que contém  $i$  se e somente se  $\pi$  é o **menor** subconjunto de  $S_Y$  satisfazendo:

- a)  $i \in \pi$  e
- b)  $\forall j, k \in \pi, j \neq k$

$$P(Y_{\tau(\pi \setminus \{j\})} = j \mid Y_0 = k) = 1.$$

No caso de haver mais de um ciclo de primeira ordem podemos formar ciclos de ciclos. Surge então a idéia de ciclos de diferentes ordens. Para que esta idéia seja definida rigorosamente, é necessária a renormalização da cadeia, o que definimos a seguir.

Seja  $\pi$  um ciclo de primeira ordem. Para  $i \in \pi$  definimos o tempo médio assintótico necessário para a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  sair do ciclo  $\pi$ , tendo partido do estado  $x \in C_i$ , por

$$m_i(\pi) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(W(\pi))) \quad (3.2.5)$$

onde  $W(\pi)$  é a união das classes ergódicas que compõem o ciclo  $\pi$ .

A Proposição 3.2.1 mostra que este tempo médio assintótico não depende da classe onde a cadeia inicia, mas somente do ciclo, ou seja, este tempo é constante para todo  $i \in \pi$ . Este resultado nos permite definir

$$m(\pi) \equiv \begin{cases} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(W(\pi))), & \forall x \in C_i, \forall i \in \pi \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(C_i)), & \forall x \in C_i, \pi = \{i\} \end{cases} \quad (3.2.6)$$

**Proposição 3.2.1:** *Sejam  $i, j \in \pi$ ,  $\pi$  conforme Definição 3.2.1'. Então*

$$m_i(\pi) = m_j(\pi), \quad \forall i, j \in \pi, i \neq j.$$

**Prova:** Se  $i, j \in \pi$  então, pela Definição 3.2.1',

$$q_{\pi^c \cup \{j\}}(i, j) = P(Y_{\tau(\pi \setminus \{j\})} = j \mid Y_0 = x) = 1.$$

Mas pelo Teorema 1.3.1 aplicado a cadeia  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , temos

$$q_{\pi^c \cup \{j\}}(i, j) = \frac{\sum_{g \in G_{i,j}(\pi^c \cup \{j\})} \pi(g)}{\sum_{g \in G(\pi^c \cup \{j\})} \pi(g)} = 1,$$

onde  $\pi(g) = \prod_{(k \rightarrow l) \in g} q_{kl}$ . Logo

$$\sum_{g \in G_{i,j}(\pi^c \cup \{j\})} \pi(g) = \sum_{g \in G(\pi^c \cup \{j\})} \pi(g), \quad \forall i, j \in \pi,$$

o que implica em

$$q_{\pi^c \cup \{k\}}(i, k) = q_{\pi^c \cup \{k\}}(j, k), \quad \forall i, j, k \in \pi.$$

Portanto

$$\sum_{g \in G_{i,k}(\pi^c \cup \{k\})} \pi(g) = \sum_{g \in G_{j,k}(\pi^c \cup \{k\})} \pi(g), \quad \forall i, j, k \in \pi.$$

Os dois resultados anteriores nos permite concluir que

$$E_i(N_k^\pi) = E_j(N_k^\pi), \quad \forall i, j, k \in \pi,$$

já que, pelo Teorema 1.5.1, temos que

$$E_i(N_k^\pi) = \frac{\sum_{g \in G_{i,k}(\pi^c \cup \{k\})} \pi(g)}{\sum_{g \in G(\pi^c)} \pi(g)}.$$

Como, pelo Teorema 2.4.1,

$$m_i(\pi) = \sum_{j \in \pi} m_j E_i N_j^\pi,$$

concluimos que

$$m_i(\pi) = m_j(\pi) \equiv m(\pi), \quad \forall i, j \in \pi.$$

**Proposição 3.2.2:** *Seja  $\pi$  um ciclo de primeira ordem com  $m(\pi)$  como em (3.2.6). Então  $\forall \gamma > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} < \tau(W(\pi)) < \frac{m(\pi) + \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 1, \quad \forall x \in W(\pi),$$

onde  $W(\pi)$  é a união das classes ergódicas que compõem o ciclo  $\pi$ .

**Prova:** Vamos provar que para  $x \in W(\pi)$  e  $\gamma > 0$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \geq \frac{m(\pi) + \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 0 \quad (3.2.7)$$

e

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 0, \quad (3.2.8)$$

pois se (3.2.7) e (3.2.8) se verificam é imediato que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} < \tau(W(\pi)) < \frac{m(\pi) + \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 1$$

Primeiro vamos provar que (3.2.7) vale. Para  $x \in W(\pi)$  e  $\gamma > 0$ , pela desigualdade de Tchebychev, temos

$$P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \geq \frac{m(\pi) + \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) \leq \frac{\varepsilon}{m(\pi) + \gamma} E_x^\varepsilon(\tau(W(\pi))).$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(W(\pi))) \geq (m(\pi) + \gamma) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \geq \frac{m(\pi) + \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right).$$

Supondo que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \geq \frac{m(\pi) + \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) > 0,$$

temos que existe  $\gamma_0 > 0$  tal que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(W(\pi))) \geq m(\pi) + \gamma_0$$

o que é absurdo, pois

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(W(\pi))) = m(\pi),$$

logo (3.2.7) vale.

Agora provaremos a validade de (3.2.8). Seja  $x \in W(\pi)$  e  $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}
& P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \\
& = P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, \tau(x) < \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \\
& = P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, \tau(x) < \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, X_{\tau(x)}^\varepsilon \in W(\pi) \setminus \{x\} \mid X_0^\varepsilon = x \right) + \\
& \quad + P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, \tau(x) < \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, X_{\tau(x)}^\varepsilon \in [W(\pi)]^c \mid X_0^\varepsilon = x \right).
\end{aligned}$$

Mas, a segunda parcela converge para zero quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , pois

$$\begin{aligned}
& P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, \tau(x) < \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, X_{\tau(x)}^\varepsilon \in [W(\pi)]^c \mid X_0^\varepsilon = x \right) \leq \\
& \leq P^\varepsilon \left( X_{\tau(x)}^\varepsilon \in [W(\pi)]^c \mid X_0^\varepsilon = x \right)
\end{aligned}$$

e pelo Teorema 2.2.1 esta probabilidade converge para zero quando  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Por outro lado

$$\begin{aligned}
& P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, \tau(\{x\}) < \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, X_{\tau(\{x\})}^\varepsilon \in W(\pi) \setminus \{x\} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \\
& = \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, X_{\tau(\{x\})}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \\
& = \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x, X_{\tau(\{x\})}^\varepsilon = y \right) \times \\
& \quad \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(\{x\})}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x \right).
\end{aligned}$$

Usando (1.3.1) e aplicando a propriedade forte de Markov, a probabilidade acima é igual a

$$\begin{aligned}
& \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = y \right) q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) = \\
& = \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) \times \\
& \quad \times P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, \tau(W(\pi) \setminus \{x\}) < \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = y \right) = \\
& = \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) \times \\
& \quad \times \left[ P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, \tau(W(\pi) \setminus \{x\}) < \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, X_{\tau(W(\pi) \setminus \{x\})}^\varepsilon = x \mid X_0^\varepsilon = y \right) + \right. \\
& \quad \left. + P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, \tau(W(\pi) \setminus \{x\}) < \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, X_{\tau(W(\pi) \setminus \{x\})}^\varepsilon \in W^c(\pi) \mid X_0^\varepsilon = y \right) \right].
\end{aligned}$$

Novamente, pelo Teorema 2.2.1, a segunda parcela converge para zero quando  $\varepsilon \downarrow 0$ . Logo

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon}, X_{\tau(W(\pi) \setminus \{x\})}^\varepsilon = x \mid X_0^\varepsilon = y \right) = \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) \times \\
& \times P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = y, X_{\tau(W(\pi) \setminus \{x\})}^\varepsilon = x \right) \times \\
& \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(W(\pi) \setminus \{x\})}^\varepsilon = x \mid X_0^\varepsilon = y \right).
\end{aligned}$$

Usando (1.3.1) e aplicando a propriedade forte de Markov, temos

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) q_{W^c(\pi) \cup \{x\}}^\varepsilon(y, x) \times \\
& \times P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) \times \right. \\
& \left. \times \left[ 1 - \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) q_{W^c(\pi) \cup \{x\}}^\varepsilon(y, x) \right] \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, se

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) > 0$$

temos que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ 1 - \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) q_{W^c(\pi) \cup \{x\}}^\varepsilon(y, x) \right] = 0.$$

Mas

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ 1 - \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) q_{W^c(\pi) \cup \{x\}}^\varepsilon(y, x) \right] = \\
& = 1 - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} q_{S \setminus \{x\}}^\varepsilon(x, y) q_{W^c(\pi) \cup \{x\}}^\varepsilon(y, x).
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 2.2.1, temos

$$\sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} \frac{\sum_{g \in H_{x,y}(S \setminus \{x\})} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H(S \setminus \{x\})} \pi^*(g)} \frac{\sum_{g \in H_{y,x}(W^c(\pi) \cup \{x\})} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H(W^c(\pi) \cup \{x\})} \pi^*(g)} = 1,$$



o que é absurdo, pois

$$\sum_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} \sum_{g \in H_{x,y}(S \setminus \{x\})} \pi^*(g) \sum_{g \in H_{y,x}(W^c(\pi) \cup \{x\})} \pi^*(g) < \sum_{g \in H(S \setminus \{x\})} \pi^*(g) \sum_{g \in H(W^c(\pi) \cup \{x\})} \pi^*(g), \quad \forall x \in W(\pi),$$

já que

$$\left[ \bigcup_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} H_{x,y}(S \setminus \{x\}) \right] \subset [H(S \setminus \{x\})]$$

e

$$\left[ \bigcup_{y \in W(\pi) \setminus \{x\}} H_{y,x}(W^c(\pi) \cup \{x\}) \right] \subset [H(W^c(\pi) \cup \{x\})].$$

Logo,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 0, \quad \forall x \in W(\pi), \forall \gamma > 0.$$

■

Em particular, se  $\pi = \{i\}$ , pela Proposição 3.2.1, temos que  $\forall \gamma > 0$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_i) < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 1, \quad \forall x \in C_i.$$

Convém ressaltar que este resultado não é válido se a classe ergódica contém um único elemento, isto é, não é um ciclo de ordem zero, pois neste caso verifica-se facilmente que  $P^\varepsilon \left( \tau(W(\pi)) \leq \frac{m(\pi) - \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right)$  não converge para zero, quando  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Consideremos  $m_1, m_2, \dots, m_l$  já ordenados, isto é,  $m_1 < m_2 < \dots < m_l$ ,

$$m_i = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(C_i)),$$

com  $x \in C_i$ . Seja  $n(\varepsilon)$  uma função de  $\varepsilon$  tal que  $n(\varepsilon) \rightarrow \infty$  quando  $\varepsilon \downarrow 0$  e tal que  $\varepsilon n(\varepsilon)$  converge. Seja  $a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon n(\varepsilon) > 0$ .

**Teorema 3.2.2:** *Supondo que  $a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon n(\varepsilon) < m_j$ , então, para  $k \geq j$  e  $x \in C_k$*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 1.$$

**Prova:** Sabemos que, para  $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \\ & = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, \frac{m_k - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_k) < \frac{m_k + \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) + \right. \\ & \quad \left. + P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, |\varepsilon \tau(C_k) - m_k| \geq \gamma \mid X_0^\varepsilon = x \right) \right]. \end{aligned}$$

No entanto, pela Proposição 3.1.2.

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, |\varepsilon \tau(C_k) - m_k| \geq \gamma | X_0^\varepsilon = x \right) \leq \\ & \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon (|\varepsilon \tau(C_k) - m_k| \geq \gamma | X_0^\varepsilon = x) = 0, \quad \forall x \in C_k. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x \right) = \\ & = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, \frac{m_k - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_k) < \frac{m_k + \gamma}{\varepsilon} | X_0^\varepsilon = x \right). \end{aligned}$$

Sendo  $a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon n(\varepsilon)$ , temos que  $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$  tal que

$$\frac{a - \delta}{\varepsilon} < n(\varepsilon) < \frac{a + \delta}{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (3.2.9)$$

Escolhendo  $\delta$  e  $\gamma$  suficientemente pequenos tais que  $\delta < m_j - a - \gamma$ , temos que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que

$$n(\varepsilon) < \frac{a + m_j - a - \gamma}{\varepsilon} = \frac{m_j - \gamma}{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Deste modo,

$$n(\varepsilon) < \frac{m_j - \gamma}{\varepsilon} \leq \frac{m_k - \gamma}{\varepsilon}, \quad \forall k \geq j.$$

Logo, dado que  $X_0 = x \in C_k$ ,

$$\left[ \frac{m_k - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_k) < \frac{m_k + \gamma}{\varepsilon} \right] \subseteq \left[ X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k \right], \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

e então

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, \frac{m_k - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_k) < \frac{m_k + \gamma}{\varepsilon} | X_0^\varepsilon = x \right) = \\ & = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \frac{m_k - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_k) < \frac{m_k + \gamma}{\varepsilon} | X_0^\varepsilon = x \right) = 1, \end{aligned}$$

pela Proposição 3.2.2. Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x \right) = 1, \quad \forall k \geq j.$$

■

**Teorema 3.2.3:** Suponha que  $m_j < \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon n(\varepsilon) < m_{j+1}$  e seja  $x \in C_i$  tal que  $m_i < m_j$ .

Então

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in \bigcup_{k=j+1}^l C_k | X_0^\varepsilon = x \right) = 1, \quad \forall x \in \bigcup_{m=1}^j C_m.$$

**Prova:** Seja  $j$  fixo e  $i$  tal que  $m_i < m_j$ . Seja  $x \in C_i$ . Como as classes ergódicas são mutuamente disjuntas, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in \bigcup_{k=j+1}^l C_k | X_0^\varepsilon = x \right) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{k=j+1}^l P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x \right) = \\ &= \sum_{k=j+1}^l \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x \right). \end{aligned}$$

Seja  $k$  fixo e  $k \geq j+1$ . Então

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x \right) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{s \neq i} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s | X_0^\varepsilon = x \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ \sum_{1 \leq s \leq j, s \neq i} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s | X_0^\varepsilon = x \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=j+1, s \neq k} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s | X_0^\varepsilon = x \right) + \right. \\ &\quad \left. + P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x \right) \right] = \\ &\equiv L_1 + L_2 + L_3. \end{aligned}$$

Primeiro vamos mostrar que  $L_2 = 0$ . Para isto basta mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s | X_0^\varepsilon = x \right) = 0,$$

$\forall s \in \{j+1, j+2, \dots, l\}$  e  $s \neq k$ . Pela Proposição 3.2.2,  $\forall \gamma > 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s | X_0^\varepsilon = x \right) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s, \frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_i) < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon} | X_0^\varepsilon = x \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} \sum_{y \in C_s} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y, \tau(C_i) = n | X_0^\varepsilon = x \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} \sum_{y \in C_s} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y, \tau(C_i) = n \right) \times \\ &\quad \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y, \tau(C_i) = n | X_0^\varepsilon = x \right). \end{aligned}$$

Seendo  $a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon n(\varepsilon)$ , como na prova da Teorema 3.2.2, temos (3.2.9). Escolhendo  $\delta$  e  $\gamma$  suficientemente pequenos tais que  $0 < \gamma + \delta < a - m_i$ , temos que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que

$$n(\varepsilon) > \frac{a - \delta}{\varepsilon} > \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Logo,  $n(\varepsilon) > n$  se  $\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}$ . Utilizando a propriedade forte de Markov em

$$P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y, \tau(C_i) = n \right),$$

temos

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s | X_0^\varepsilon = x \right) = \\ & = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} \sum_{y \in C_s} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon) - n}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = y \right) \times \\ & \quad \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y, \tau(C_i) = n | X_0^\varepsilon = x \right). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Agora tomando  $\delta$  e  $\gamma_0$  suficientemente pequenos tais que

$$0 < \delta + \gamma_0 < m_{j+1} - a$$

temos que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que

$$n(\varepsilon) < \frac{a + m_{j+1} - a - \gamma_0}{\varepsilon} = \frac{m_{j+1} - \gamma_0}{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Deste modo, levando em conta que  $n > \frac{m_i - \gamma}{\varepsilon}$ , para  $\gamma$  já escolhido de modo que  $\gamma + \delta < a - m_i$ , temos

$$\begin{aligned} n(\varepsilon) - n & < \frac{m_{j+1} - \gamma_0}{\varepsilon} - \frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} = \frac{m_{j+1} - m_i - \gamma_0 + \gamma}{\varepsilon} \leq \\ & \leq \frac{m_s - (m_i - \gamma + \gamma_0)}{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \forall s \geq j + 1. \end{aligned}$$

Escolhendo  $\gamma$  e  $\gamma_0$  suficientemente pequenos tais que  $\gamma - \gamma_0 > 0$  e  $m_s - m_i > \gamma_0 - \gamma$  temos

$$m_i - \gamma + \gamma_0 \equiv \gamma^* > 0$$

e existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que

$$n(\varepsilon) - n \leq \frac{m_s - \gamma^*}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \forall s \geq j + 1.$$

Então, pela Proposição 3.2.2, para  $y \in C_s$

$$P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon) - n}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = y \right) = P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon) - n}^\varepsilon \in C_k, \frac{m_s - \gamma^*}{\varepsilon} < \tau(C_s) < \frac{m_s + \gamma^*}{\varepsilon} | X_0^\varepsilon = y \right).$$

Logo, como  $n(\varepsilon) - n \leq \frac{m_s - \gamma^*}{\varepsilon}$  para  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , o limite acima é igual a zero, isto é,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)-n}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = y \right) = 0, \quad y \in C_s.$$

Portanto, retornando a (3.2.10)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s | X_0^\varepsilon = x \right) = 0, \quad \forall s \geq j+1, s \neq k.$$

Logo podemos concluir que

$$L_2 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{s=j+1, s \neq k}^l P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s | X_0^\varepsilon = x \right) = 0. \quad (3.2.11)$$

Agora vamos calcular  $L_1 + L_3$ . Primeiramente vamos definir  $Q_j = \{j+1, \dots, l\}$  tal que  $L = Q_j \cup Q_j^c$ ,  $i \in Q_j^c$ ,  $k \in Q_j$  e  $W^c = \bigcup_{s=1}^j C_s$ , com  $C_i \subseteq W^c$ . Pela Proposição 3.2.2, podemos escrever,  $\forall \gamma > 0$ ,  $x \in C_i$

$$\begin{aligned} L_3 + L_1 &= \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s, \frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_i) < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon} | X_0^\varepsilon = x \right) + \right. \\ &\quad \left. + P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_k, \frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_i) < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon} | X_0^\varepsilon = x \right) \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{y \in C_k} \left[ \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} \sum_{z \in C_s} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x, X_n^\varepsilon = z, \tau(C_i) = n \right) \times \right. \\ &\quad \times P^\varepsilon \left( X_n^\varepsilon = z, \tau(C_i) = n | X_0^\varepsilon = x \right) + \\ &\quad \left. + \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = x, X_n^\varepsilon = y, \tau(C_i) = n \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times P^\varepsilon \left( X_n^\varepsilon = y, \tau(C_i) = n | X_0^\varepsilon = x \right) \right]. \end{aligned}$$

Sendo  $\tau(C_i)$  um tempo de parada e  $n(\varepsilon) > n \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , se  $\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}$  a propriedade forte de Markov, permite escrever

$$\begin{aligned} L_3 + L_1 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ \sum_{y \in C_k} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)-n}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = y \right) \times \right. \\ &\quad \times P^\varepsilon \left( X_n^\varepsilon = y, \tau(C_i) = n | X_0^\varepsilon = x \right) + \\ &\quad \left. + \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} \sum_{z \in C_s} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)-n}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = z \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times P^\varepsilon \left( X_n^\varepsilon = z, \tau(C_i) = n | X_0^\varepsilon = x \right) \right]. \quad (3.2.12) \end{aligned}$$

Mas, utilizando  $\delta, \gamma_0$  e  $\gamma^*$  escolhidos anteriormente temos que existe  $\varepsilon_0 > 0$ , tal que

$$n(\varepsilon) - n < \frac{m_s - \gamma^*}{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad \forall s \geq j + 1. \quad (3.2.13)$$

Logo,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)-n}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = y \right) = 1, \quad \forall y \in C_k.$$

Então, o limite, quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , da primeira parcela de (3.2.12) pode ser escrita como,

$$\sum_{y \in C_k} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y, \frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < \tau(C_i) < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon} | X_0^\varepsilon = x \right),$$

a qual, pela Proposição 3.2.2, é igual a

$$\sum_{y \in C_k} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y | X_0^\varepsilon = x \right),$$

e pelo Teorema 2.3.1,

$$\sum_{y \in C_k} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(C_i)}^\varepsilon = y | X_0^\varepsilon = x \right) = q_{ik}, \quad \forall x \in C_i.$$

Para obtermos o limite, quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , da segunda parcela de (3.2.12) fixamos  $s \in Q_j^c \setminus \{i\}$  e  $z \in C_s$ . Utilizando (3.2.11) e lembrando que  $W^c = \bigcup_{s=1}^j C_s$ , temos

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} \left[ P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)-n}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = z \right) + \right. \\ & \left. + P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)-n}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon \in C_i | X_0^\varepsilon = z \right) \right] \times \\ & \times P^\varepsilon \left( X_n^\varepsilon = z, \tau(C_i) = n | X_0^\varepsilon = x \right) = \\ & = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} \left[ \sum_{y_1 \in C_k} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)-n}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = z, X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = y_1 \right) \times \right. \\ & \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = y_1 | X_0^\varepsilon = z \right) + \\ & \left. + \sum_{x_1 \in C_i} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)-n}^\varepsilon \in C_k | X_0^\varepsilon = z, X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = x_1 \right) \times \right. \\ & \left. \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = x_1 | X_0^\varepsilon = z \right) \right] P^\varepsilon \left( X_n^\varepsilon = z, \tau(C_i) = n | X_0^\varepsilon = x \right). \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade forte de Markov, podemos escrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} \left[ \sum_{y_1 \in C_k} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon) - n - \tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon \in C_k \mid X_0^\varepsilon = y_1 \right) \times \right. \\ & \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = y_1 \mid X_0^\varepsilon = z \right) + \sum_{x_1 \in C_i} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon) - n - \tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon \in C_k \mid X_0^\varepsilon = x_1 \right) \times \\ & \left. \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = x_1 \mid X_0^\varepsilon = z \right) \right] P^\varepsilon \left( X_n^\varepsilon = z, \tau(C_i) = n \mid X_0^\varepsilon = x \right). \end{aligned}$$

Mas, já vimos por (3.2.13) que existe  $\varepsilon_0 > 0, \delta, \gamma_0$  e  $\gamma^*$  tais que

$$n(\varepsilon) - n < \frac{m_s - \gamma^*}{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad \forall s \geq j + 1,$$

portanto pela Teorema 3.2.2

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon) - n - \tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon \in C_k \mid X_0^\varepsilon = y_1 \right) = 1, \quad \forall y_1 \in C_k.$$

Se além deste fato utilizarmos os resultados do Teorema 2.3.1 e Corolário 2.3.1, chegamos a conclusão que a segunda parcela de (3.2.12) é dada por

$$\begin{aligned} & \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} \left\{ q_{is} q_{Q_j \cup \{i\}}(s, k) + \right. \\ & + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{z \in C_s} \sum_{\frac{m_i - \gamma}{\varepsilon} < n < \frac{m_i + \gamma}{\varepsilon}} \sum_{x_1 \in C_i} \left[ P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon) - n - \tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_k \mid X_0^\varepsilon = x_1 \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{s_1 \in Q_j^c \setminus \{i\}} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon) - n - \tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon \in C_k, X_{\tau(C_i)}^\varepsilon \in C_s \mid X_0^\varepsilon = x_1 \right) \right] \left. \right\} \times \\ & \times P^\varepsilon \left( X_{\tau(W^c \setminus C_i)}^\varepsilon = x_1 \mid X_0^\varepsilon = z \right) P^\varepsilon \left( X_n^\varepsilon = z, \tau(C_i) = n \mid X_0^\varepsilon = x \right) \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo argumento, temos que

$$\begin{aligned} L_3 + L_1 &= q_{ik} + \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{Q_j \cup \{i\}}(s, k) + \sum_{s \in Q^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{QU\{i\}}(s, i) q_{i,k} + \\ &+ \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{Q_j \cup \{i\}}(s, i) \sum_{s_1 \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is_1} q_{Q_j \cup \{i\}}(s_1, k) + \dots = \\ &= q_{ik} \left[ 1 + \sum_{s \in Q^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{QU\{i\}}(s, i) + \left( \sum_{s \in Q^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{QU\{i\}}(s, i) \right)^2 + \dots \right] + \\ &+ \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{QU\{i\}}(s, k) \left[ 1 + \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{i,s} q_{QU\{i\}}(s, i) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{i,s} q_{QU\{i\}}(s, i) \right)^2 + \dots \Big] = \\
& = \left( \frac{q_{ik} + \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{QU\{i\}}(s, k)}{1 - \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{QU\{i\}}(s, i)} \right) = q_{Q_j}(i, k),
\end{aligned}$$

como já foi visto na prova do Teorema 1.3.1.

Falta mostrar que  $\sum_{r=k}^l q_Q(i, k) = 1$ . Mas,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=k}^l q_{Q_j}(i, k) &= \sum_{r=k}^l \left( \frac{q_{ir} + \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{Q_j \cup \{i\}}(s, r)}{1 - \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{Q_j \cup \{i\}}(s, i)} \right) = \\
&= \frac{1}{1 - \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{Q_j \cup \{i\}}(s, i)} \left( \sum_{r=k}^l q_{ir} + \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} \sum_{r=k}^l q_{Q_j \cup \{i\}}(s, r) \right) = \\
&= \frac{1 - \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{QU\{i\}}(s, i)}{1 - \sum_{s \in Q_j^c \setminus \{i\}} q_{is} q_{QU\{i\}}(s, i)} = 1.
\end{aligned}$$

■

### 3.3 - Renormalização e ciclos de ordem superior

A primeira idéia de renormalização, no sentido em que é usada nesta dissertação, já apareceu no Capítulo 2 com a cadeia  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , com espaço de estados  $S_Y = \{1, 2, \dots, l\}$  e matriz de transição  $Q = (q_{i,j})$ . Esta cadeia representa a primeira renormalização. Com os ciclos de primeira ordem formados a partir dela construímos a segunda cadeia  $(Y_n^{(1)})_{n \geq 0}$ , cujo espaço de estados  $S_Y^{(1)}$  é formado pelos índices que representam os ciclos de primeira ordem,  $S_Y^{(1)} = \{1, 2, \dots, l_1\}$ . A matriz de transição é dada por  $Q^{(1)} = (q_{ij}^{(1)})$ , onde

$$q_{ij}^{(1)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(W(\pi_i))}^\varepsilon \in W(\pi_j) \mid X_0^\varepsilon = x \right), \quad x \in W(\pi_i),$$

com  $W(\pi_i)$  é a união das classes ergódicas que compõem o ciclo  $\pi_i$ .

A cadeia  $(Y_n^{(1)})_{n \geq 0}$  determina os ciclos de ordem 2; de modo geral, definimos a cadeia de Markov  $(Y_n^{(s)})_{n \geq 0}$ , com espaço de estados  $S_Y^{(s)}$  formado pelos índices que



representam os ciclos de ordem  $s$ , isto é,  $S_Y^{(s)} = \{1, 2, \dots, l_s\}$  se  $\pi_1^s, \pi_2^s, \dots, \pi_{l_s}^s$  são os ciclos de ordem  $s$ . A matriz de transição é denotada por  $Q^{(s)} = (q_{ij}^{(s)})$ , onde

$$q_{ij}^{(s)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(W(\pi_i^s))}^\varepsilon \in W(\pi_j^s) \mid X_0^\varepsilon = x \right), \quad x \in W(\pi_i^s), \quad i \neq j$$

com  $W(\pi_i^s)$  é a união das classes ergódicas que compõem o ciclo  $\pi_i^s$ . Claramente

$$q_{ii}^{(s)} = 0, \quad \forall i \in S_Y^{(s)}.$$

Para provar que  $Q^{(s)} = (q_{ij}^{(s)})$  é uma matriz estocástica para todo  $s$ , usaremos o Corolário 2.3.1: para  $x \in W(\pi_i^s)$

$$q_{ij}^{(s)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{\tau(W(\pi_i^s))}^\varepsilon \in W(\pi_j^s) \mid X_0^\varepsilon = x \right) = \sum_{y \in W(\pi_j^s)} \frac{\sum_{g \in H_{x,y} \{ (W(\pi_i^s))^c \}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H \{ (W(\pi_i^s))^c \}} \pi^*(g)}$$

e, fazendo a soma para todo  $j \in S_Y^{(s)} \setminus \{i\}$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S_Y^{(s)} \setminus \{i\}} \sum_{y \in C_j} \frac{\sum_{g \in H_{x,y} \{ (W(\pi_i^s))^c \}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H \{ (W(\pi_i^s))^c \}} \pi^*(g)} &= \sum_{y \in W \left( \bigcup_{j \in S_Y^{(s)}} \pi_j^s \setminus \pi_i^s \right)} \frac{\sum_{g \in H_{x,y} \{ (W(\pi_i^s))^c \}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H \{ (W(\pi_i^s))^c \}} \pi^*(g)} = \\ &= \frac{\sum_{g \in H \{ (W(\pi_i^s))^c \}} \pi^*(g)}{\sum_{g \in H \{ (W(\pi_i^s))^c \}} \pi^*(g)} = 1. \end{aligned}$$

**Definição 3.3.1:** (Ciclos de ordem  $s$ )

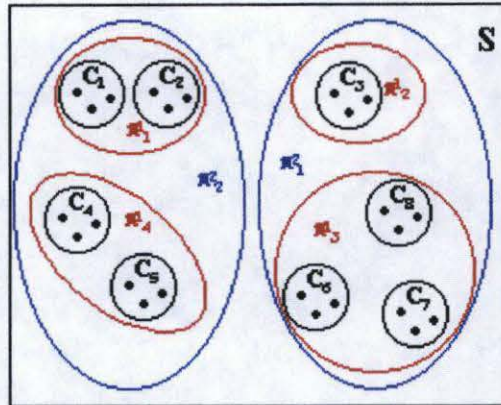
Sejam  $\pi_1^{s-1}, \pi_2^{s-1}, \dots, \pi_{l_{s-1}}^{s-1}$  ciclos de ordem  $s-1$ . Seja  $\pi^s \subseteq S_Y^{(s-1)}$ ,  $\#\pi^s > 1$ . Diz-se que  $\pi^s$  é um ciclo de ordem  $s$  que contém  $i$  se e somente se  $\pi^s$  é o **menor** subconjunto de  $S_Y^{(s-1)}$  satisfazendo:

- a)  $i \in \pi^s$  e
- b)  $\forall j, k \in \pi^s, j \neq k$

$$q_{(\pi^s \setminus \{j\})^c}^{(s-1)}(i, j) = P \left( Y_{\tau(\pi^s \setminus \{j\})}^{(s-1)} = j \mid Y_0^{(s-1)} = i \right) = 1,$$

onde  $\tau(\pi^s \setminus \{j\})$  é o primeiro instante que a cadeia  $(Y_n^{(s-1)})_{n \geq 0}$  sai de  $\pi^s \setminus \{j\}$ .

A Observação 3.2.1 é análoga para ciclos de ordem  $s$ .



**Figura 3.3.1:** Exemplo de ciclos de primeira (em vermelho) e segunda ordem (em azul).

**Definição 3.3.2:** Definimos  $m_{(1)} < m_{(2)} < \dots < m_{(K)}$  como os valores de  $m(\pi_n^s)$ ,  $n \in S_Y^{(s)}$ ,  $\forall s$ , ordenados.

Note que se  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$  então existe pelo menos um  $s$  e um  $n \in S_Y^{(s)}$  tal que

$$m_{(k)} \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon (\tau(W(\pi_n^s))) \equiv m(\pi_n^s). \quad (3.3.1)$$

Se usarmos a Definição 3.3.1 podemos estender os resultados das Proposições 3.2.1 e 3.2.2, e Teoremas 3.2.1 e 3.2.3 para os ciclos de ordem  $s$ , pois todas as provas são feitas com base nas classes ergódicas que compõem os ciclos de primeira ordem,  $\pi$ , e os ciclos de ordem  $s$ ,  $\pi^s$ , os quais também representam uniões de classes ergódicas.

Então podemos concluir que o conjunto dos valores  $m_{(i)}$ , definem as faixas de velocidade que determinam onde a cadeia se concentra. Isto é, se a cadeia encontra-se, assintoticamente, numa velocidade entre  $\frac{m_{(j)}}{\varepsilon}$  e  $\frac{m_{(j+1)}}{\varepsilon}$ , então a cadeia ficará concentrada na união das classes que compõem  $\pi_n^s$ , tal que

$$m_{(j+1)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon (\tau(W(\pi_n^s))).$$

Para que isto fique mais claro enunciaremos as próximas proposições e teoremas cujas provas são análogas àquelas feitas para ciclos de primeira ordem.

**Teorema 3.3.1:** Sejam  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  como definido anteriormente,  $W(\pi^s)$  união das classes ergódicas que compõem o ciclo  $\pi^s$ ,  $\pi^s$  conforme a Definição 3.2.1. Então para  $C_i, C_j \subseteq W(\pi^s)$  e  $x \in C_i$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon (X_{\tau(W(\pi^s) \setminus C_j)}^\varepsilon \in C_j \mid X_0^\varepsilon = x) &= P(Y_{\tau(\pi^s \setminus \{j\})}^{(s)} = j \mid Y_0^s = i) \equiv \\ &\equiv q_{\pi^s \cup \{j\}}^s(i, j). \end{aligned}$$

Seja  $\pi^s$  um ciclo de ordem  $s$ . Definimos o tempo médio assintótico necessário para a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  sair do ciclo  $\pi^s$ , tendo partido do estado  $x \in C_k \subseteq W(\pi^s)$ , por

$$m_k(\pi^s) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(W(\pi^s)))$$

onde  $W(\pi^s)$  é a união das classes que compõem o ciclo  $\pi^s$ .

A Proposição 3.3.1 mostra que este tempo médio assintótico não depende da classe onde a cadeia inicia, mas somente do ciclo, ou seja, este tempo é constante para todo  $k$  tal que  $C_k \subseteq W(\pi^s)$ . Este resultado nos permite definir

$$m(\pi^s) \equiv \begin{cases} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(W(\pi^s))), & \forall x \in C_k, \forall k \text{ tal que } C_k \subseteq W(\pi^s) \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E_x^\varepsilon(\tau(C_k)), & \forall x \in C_k, \text{ se } W(\pi^s) = C_k. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

**Proposição 3.3.1:** *Sejam  $C_i$  e  $C_j \subseteq W(\pi^s)$ ,  $\pi^s$  conforme Definição 3.3.1. Então*

$$m_i(\pi^s) = m_j(\pi^s), \quad \forall i, j.$$

**Proposição 3.3.2:** *Seja  $\pi^s$  um ciclo de ordem  $s$ , com  $m(\pi^s)$  como em (3.3.2). Então  $\forall \gamma > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( \frac{m(\pi^s) - \gamma}{\varepsilon} < \tau(W(\pi^s)) < \frac{m(\pi^s) + \gamma}{\varepsilon} \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 1, \quad \forall x \in W(\pi^s),$$

onde  $W(\pi^s)$  é a união das classes que compõem o ciclo  $\pi^s$ .

Consideremos  $m_{(1)}, m_{(2)}, \dots, m_{(K)}$  conforme a Definição 3.3.2.

**Teorema 3.3.2:** *Suponha que  $m_{(j)} < \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon n(\varepsilon) < m_{(j+1)}$  e seja  $x \in C_m \subseteq W(\pi_{(i)}^s)$ , tal que  $m_{(i)} < m_{(j)}$  onde  $m_{(i)} = m(\pi_{(i)}^s)$ . Então*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in \bigcup_{n=j+1}^{i_s} W(\pi_n^s) \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 1, \quad \forall x \in C_m \subseteq \bigcup_{n=1}^j W(\pi_n^s).$$

onde  $\pi_n^s$  conforme (3.3.1).

### 3.4 - Descrição dos limites metaestáveis

Pelos resultados da Proposição 3.3.2 e Teorema 3.3.2 apresentados neste capítulo podemos concluir que  $n(\varepsilon)$  é da ordem de  $\frac{c_i}{\varepsilon}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$  onde as constantes  $c_i$ , mencionadas na introdução, são os valores  $m_{(i)}$  da Definição 3.3.2. Logo estas constantes determinam faixas de velocidade para a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ . Se fixarmos  $K = 4$ , podemos visualizar tais faixas na Figura 3.4.1.

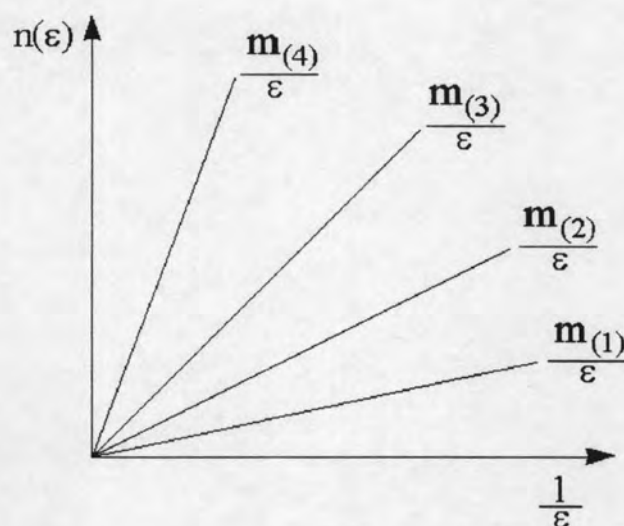


Figura 3.4.1: Exemplo de faixas de velocidade com  $K = 4$ .

Neste caso, se a velocidade da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  é inferior a  $\frac{m_{(1)}}{\varepsilon}$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, partindo de qualquer classe ergódica ela permanece na classe até alcançar velocidade necessária para partir, ou seja, quando a velocidade for muito baixa a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  comporta-se como a cadeia  $(X_n^1)_{n \geq 0}$ , ficando restrita a classe ergódica na qual iniciou. Então, nesta faixa de velocidade o limite (2.4) é análogo ao limite (2.2), isto é,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon (X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon = y | X_0^\varepsilon = x)$$

depende de  $x$ , sendo que este limite só será positivo se  $y$  pertencer a mesma classe ergódica que  $x$ . Além disso, pelo Teorema 3.2.2 sabemos que  $\forall j \in L$ ,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon (X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in C_j | X_0^\varepsilon = x) = 1, \quad \forall x \in C_j.$$

Então, este limite, bem como o anterior, não dependem de  $x$ , mas da classe  $C_j$ . Portanto o suporte da distribuição condicional da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  dado  $X_0^\varepsilon = x$  é

apenas uma das classes ergódicas. Neste momento a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  descreve um "falso" equilíbrio ou equilíbrio metaestável, pois uma variação na faixa de velocidade permite que a cadeia escape desta classe ergódica.

Por exemplo, se a velocidade estiver entre  $\frac{m(1)}{\varepsilon}$  e  $\frac{m(2)}{\varepsilon}$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, existe um conjunto  $A$  (que como já foi dito inicialmente é uma união de classes ergódicas) tal que, pelo Teorema 3.3.2

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon \in A \mid X_0^\varepsilon = x \right) = 1, \quad \forall x \in A$$

e  $\forall x, y \in A$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P^\varepsilon \left( X_{n(\varepsilon)}^\varepsilon = y \mid X_0^\varepsilon = x \right) > 0$$

Neste caso, este limite e o anterior não dependem de  $x$ , mas de  $A$ , portanto o suporte da distribuição condicional da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  dado  $X_0^\varepsilon = x$  deixa de ser apenas uma das classes ergódicas para ser uma união de classes ergódicas, ou seja, com uma variação na faixa de velocidade o suporte da distribuição condicional é ampliado. Aqui a cadeia apresenta um outro equilíbrio metaestável.

Nota-se, então, que a medida que a ordem da velocidade aumenta, maior é o suporte da distribuição condicional da cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  dado  $X_0^\varepsilon = x$ . Sendo que quando a velocidade for superior a  $\frac{m(K)}{\varepsilon}$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a cadeia consegue alcançar todos os estados, o limite (2.4) não depende de  $x$ ,  $\forall x \in S$ , e finalmente a cadeia  $(X_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  atinge o real equilíbrio, onde o suporte da distribuição é todo o conjunto  $S$ . Quando isto ocorre o limite (2.4) coincide com o limite (2.3).

## APÊNDICE

### RESULTADOS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Este Apêndice visa facilitar o entendimento desta dissertação, contendo alguns resultados básicos da teoria de Processos Estocásticos. Sendo assim, algumas definições foram suprimidas, pois assumimos um conhecimento básico de Probabilidade.

Seja  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  um espaço de probabilidade, isto é,  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A}$  uma  $\sigma$ -álgebra e  $\mathbf{P}$  uma medida de probabilidade.

**Definição A.1:** Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias  $X_t$ ,  $t \in T$ ,  $T \neq \emptyset$  todas definidas no mesmo espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

Um modelo probabilístico para um processo estocástico  $\{X_t, t \in T\}$  envolve:

\*  $T$ : conjunto de índices.

\*  $S$ : espaço de estados. (conjunto dos possíveis valores que a variável aleatória  $X_t$  pode assumir).

\* Para cada  $t \in T$ ,  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade comum.

Num processo estocástico  $\{X_t, t \in T\}$ , as distribuições de

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}), \quad \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n,$$

são ditas distribuições finito-dimensionais.

**Definição A.2:**  $\{X_t, t \in T\}$  é dito um processo estocástico estacionário se

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \text{ e } (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

têm a mesma distribuição,  $\forall h > 0$ ,  $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$ .

**Definição A.3:** (Propriedade Fraca de Markov)

Dizemos que  $\{X_t, t \in T\}$  satisfaz a propriedade fraca de Markov, se para todo  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ ,  $\forall x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in S$  e  $A \in \mathcal{A}$

$$P(X_t \in A \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n) = P(X_t \in A \mid X_{t_n} = x_n).$$

Se o processo estocástico  $\{X_t, t \in T\}$  satisfaz a Definição A.3 e possui espaço de estados  $S$  finito ou enumerável, dizemos que é uma cadeia de Markov e denotamos por  $(X_n)_{n \geq 0}$ .

Em particular, para cadeias de Markov, a propriedade fraca de Markov pode ser definida por

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

$\forall i_0, i_1, \dots, i, j \in S, \forall n \in \mathbb{N}$ .

As probabilidades  $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ,  $i, j \in S$ ,  $n \geq 0$  são ditas probabilidades de transição. Dizemos que a cadeia tem probabilidade de transição estacionária quando  $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \equiv p_{ij}$ , não depende de  $n$ . Consideraremos somente este tipo de transição.

**Definição A.4:** Distribuição inicial de uma cadeia de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  é a distribuição da variável aleatória  $X_0$ .

Notação:  $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_i)_{i \in S}$ , onde  $\bar{\mu}_i \equiv P(X_0 = i)$ ,  $\bar{\mu}_i \geq 0, \forall i \in S$  e  $\sum_{i \in S} \bar{\mu}_i = 1$ .

É fácil ver que as distribuições finito-dimensionais da cadeia de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  são determinadas pela distribuição inicial  $\mu$  e a matriz de transição  $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i, j \in S}$ , pois utilizando a propriedade fraca de Markov, temos

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \bar{\mu}_{i_0} p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{n-1}, i_n}$$

$\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n \in S, \forall n \in \mathbb{N}$ .

A partir deste momento todas as definições dadas serão baseadas na cadeia de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  com matriz de transição  $\mathbb{P}$ , distribuição inicial  $\mu$  e espaço de estados  $S$  finito ou enumerável.

**Definição A.5:** As probabilidades de transição de ordem superior são dadas por

$$p_{ij}^n \equiv P(X_n = j \mid X_0 = i), \quad \forall n \geq 1 \text{ e } \forall i, j \in S.$$

**Definição A.6:** Seja  $C \subseteq S$ . Dizemos que  $C$  é fechado se  $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1, \forall i \in C$ .

**Definição A.7:** O estado  $i$  "conduz" ao estado  $j$  se  $\exists n \geq 0$  tal que  $p_{ij}^n > 0$ .

Notação:  $i \rightarrow j$ .

**Definição A.8:** Os estados  $i$  e  $j$  "se comunicam" se e só se  $i$  "conduz" a  $j$  e  $j$  "conduz" a  $i$ , isto é,  $\exists m, n \geq 0$  tais que  $p_{ij}^m > 0$  e  $p_{ji}^n > 0$ .

Notação:  $i \leftrightarrow j$ .

É fácil ver que a relação " $\leftrightarrow$ " é uma relação de equivalência. Portanto todos os estados de uma mesma classe comunicam-se entre si.

Quando todos os estados de uma cadeia de Markov se comunicam, ou seja,  $i \leftrightarrow j$ ,  $\forall i, j \in S$ , dizemos que a cadeia é IRREDUTÍVEL.

**Definição A.9:** Uma variável aleatória a valores inteiros  $\tau$  é dita um tempo de parada (ou tempo de Markov) para a seqüência  $(X_n)_{n \geq 0}$  se toma valores em  $\{0, 1, \dots\} \cup \{+\infty\}$  e se o evento  $[\tau = n]$  é determinado por  $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$ , no sentido de pertencer a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas variáveis  $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$  (ver Billingsley [1]).

**Definição A.10:** (Propriedade Forte de Markov)

Seja  $\tau$  um tempo de parada para uma cadeia de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  e sejam os eventos  $A$ , determinado por  $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_{\tau-1})$ , e  $B$  determinado por  $(X_{\tau+1}, X_{\tau+2}, \dots)$ . Dizemos que  $(X_n)_{n \geq 0}$  satisfaz a propriedade forte de Markov se

$$P(B | X_\tau = i, A) = P(B | X_\tau = i)$$

(ou equivalentemente

$$P(X_{\tau+t} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i) = P(X_t = j | X_0 = i), \forall t > 0, \forall i, j \in S).$$

**Proposição A.1:** Se  $(X_n)_{n \geq 0}$  é uma cadeia de Markov homogênea no tempo e  $\tau$  é um tempo de parada então

$$P(X_{\tau+t} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i) = P(X_t = j | X_0 = i),$$

$\forall t \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $\forall i, j \in S$ . Ou seja, toda cadeia de Markov satisfaz a propriedade forte de Markov.

**Prova:** Sejam  $\tau$  um tempo de parada,  $t > 0$  e  $i_0, i_1, \dots, i, j \in S$ . Então,

$$\begin{aligned} & P(X_{\tau+t} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i) = \\ &= \sum_{n \geq 0} P(X_{\tau+t} = j, \tau = n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i) = \\ &= \sum_{n \geq 0} P(X_{\tau+t} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i, \tau = n) \times \\ & \quad \times P(\tau = n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i) = \\ &= \sum_{n \geq 0} P(X_{t+n} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i) \times \\ & \quad \times P(\tau = n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i), \end{aligned}$$



mas pela propriedade fraca de Markov

$$\begin{aligned}
 & P(X_{\tau+t} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i) = \\
 &= \sum_{n \geq 0} P(X_t = j \mid X_0 = i) P(\tau = n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i) = \\
 &= P(X_t = j \mid X_0 = i) \sum_{n \geq 0} P(\tau = n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\tau = i) = \\
 &= P(X_t = j \mid X_0 = i).
 \end{aligned}$$

■

**Definição A.11:** Para  $A \subseteq S$  define-se o instante da primeira visita ao conjunto  $A$  como,

$$T_A(\omega) = \begin{cases} \min \{n \geq 1, X_n(\omega) \in A\}, & \text{se } \{n \geq 1, X_n(\omega) \in A\} \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{se } \{n \geq 1, X_n(\omega) \in A\} = \emptyset \end{cases}$$

Note que  $T_A$  é um tempo de parada. Em particular, se  $A = \{i\}$ , usamos a notação  $T_i$ .

Para  $i, j \in S$ , sejam

$$f_{ij}^n \equiv P(T_j = n \mid X_0 = i)$$

e

$$f_{ij}^* \equiv \sum_{n \geq 1} P(T_j = n \mid X_0 = i) = \sum_{n \geq 1} f_{ij}^n.$$

Então:

a)  $f_{ij}^n$  é a probabilidade de que a primeira visita ao estado  $j$  iniciando em  $i$ , ocorra no  $n$ -ésimo passo.

b)  $f_{ij}^*$  representa a probabilidade de visitar pela primeira vez o estado  $j$ , num tempo finito, iniciando em  $i$ . Se  $i = j$ ,  $f_{ii}^*$  denota a probabilidade de retornar pela primeira vez, ao estado  $i$ , num tempo finito.

**Definição A.12:** Dizemos que o estado  $i$  é recorrente se  $f_{ii}^* = 1$  e  $i$  é transiente se  $f_{ii}^* < 1$ .

Note que se  $i$  é recorrente,  $P(T_i = +\infty \mid X_0 = i) = 0$ . Portanto, podemos definir  $E_i(T_i) = \sum_{n \geq 1} n f_{ii}^n$ .

Se  $i$  é transiente,  $f_{ii}^* = P(T_i < +\infty \mid X_0 = i) < 1$  e portanto

$$P(T_i = +\infty \mid X_0 = i) > 0.$$

Logo  $E_i(T_i) = +\infty, \forall i$  transiente.

**Definição A.13:** Seja  $i$  recorrente. Se  $E_i(T_i) < +\infty$ , dizemos que  $i$  é recorrente positivo; se  $E_i(T_i) = +\infty$ ,  $i$  é recorrente nulo.

**Proposição A.2:** Se  $S$  é finito e irredutível, então todos os estados são recorrentes positivos.

**Prova:** Isaacson e Madsen [8].

**Definição A.14:** Definiremos o período do estado  $i$ ,  $d(i)$ , por

$$d(i) = \begin{cases} \text{m.d.c. } \{n \geq 1 : p_{ii}^n > 0\}, & \text{se } \{n \geq 1 : p_{ii}^n > 0\} \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } \{n \geq 1 : p_{ii}^n > 0\} = \emptyset \end{cases}$$

Em particular, se  $d(i) = 1, \forall i \in S$ , dizemos que a cadeia é aperiódica.

**Definição A.15:** Uma distribuição de probabilidade  $\mu = \{\mu_j\}_{j \in S}$  é chamada estacionária (ou invariante) para uma cadeia de Markov com matriz de transição  $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ , se

$$\mu_j = \sum_{k \in S} \mu_k p_{kj}, \quad \forall j \in S. \quad (\text{A.1})$$

**Teorema A.1:** (Teorema da Renovação em  $\mathbb{R}$ )

Sejam  $(a_k)_{k \geq 0}, (b_k)_{k \geq 0}, (u_k)_{k \geq 0}$ , seqüência de números reais tais que:

a)  $a_k \geq 0, \sum_{k \geq 0} a_k = 1, \sum_{k \geq 0} |b_k| < +\infty$

b)  $\text{m.d.c. } \{k \geq 1 : a_k > 0\} = 1$

Se a equação,

$$u_n - \sum_{k=0}^n a_{n-k} u_k = b_n, \quad \forall n \geq 0$$

tem solução  $(u_k)_{k \geq 0}$  limitada em  $\mathbb{R}$  (isto é,  $\sup_{k \geq 0} |u_k| < +\infty$ ) então:

1) Existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  (em  $\mathbb{R}$ )

2) Se  $\sum_{k \geq 0} k a_k < +\infty$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\sum_{k \geq 0} b_k}{\sum_{k \geq 0} k a_k}$

3) Se  $\sum_{k \geq 0} k a_k = +\infty$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**Prova:** Karlin e Taylor [10].

**Teorema A.2:** Se  $(X_n)_{n \geq 0}$  é uma cadeia de Markov com matriz de transição  $\mathbb{P}$  e é irredutível, aperiódica e recorrente, então:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^n = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{k \geq 0} k f_{ii}^k} = \frac{1}{E_i(T_i)}, & \text{se } \sum_{k \geq 0} k f_{ii}^k < +\infty \text{ (} E_i(T_i) < +\infty \text{)} \\ 0, & \text{se } \sum_{k \geq 0} k f_{ii}^k = +\infty \text{ (} E_i(T_i) = +\infty \text{)} \end{cases}$$

Note que  $E_i(T_i) = \sum_{k \geq 0} k f_{ii}^k$ , se  $i$  é recorrente.

$$b) \forall i, j \in S, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ji}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^n.$$

**Prova:** Decorre do teorema da renovação. (ver Karlin e Taylor [10]).

**Teorema A.3:** Seja  $(X_n)_{n \geq 0}$  uma cadeia de Markov com matriz de transição  $\mathbb{P}$  e é irredutível, aperiódica e recorrente positiva. Então,

$$\mu_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^n > 0, \quad \forall j \in S, \quad \sum_{j \in S} \mu_j = 1$$

e

$$\mu = \mu \times \mathbb{P}.$$

Reciprocamente, se existe  $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_j)_{j \in S}$  tais que  $\bar{\mu}_j > 0, \forall j \in S, \sum_{j \in S} \bar{\mu}_j = 1$  e  $\bar{\mu} = \bar{\mu} \times \mathbb{P}$  e além disso a cadeia é irredutível e aperiódica, então a cadeia é recorrente positiva.

**Prova:**

(a) Como a cadeia é recorrente positiva, pelo teorema A.2, temos que

$$p_{jj}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{E_j(T_j)} > 0.$$

Seja  $\mu_j = \frac{1}{E_j(T_j)}$ . Sabemos que

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_{k \in S} p_{ik}^n p_{kj}^m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_j, \quad \forall m \geq 1,$$

fixo. Mas,  $\forall M > 0$ ,

$$\sum_{k=0}^M p_{ik}^n p_{kj}^m \leq \sum_{k \in S} p_{ik}^n p_{kj}^m = p_{ij}^{n+m}.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , a desigualdade fica da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^M \mu_k p_{kj}^m \leq \mu_j, \quad \forall j \in S, \quad \forall m \geq 1 \text{ e } \forall M > 0.$$

Então,

$$\sum_{k \in S} \mu_k p_{kj}^m \leq \mu_j, \quad \forall j \in S, \forall m \geq 1.$$

Agora suponha que existe  $j \in S$  tal que

$$\mu_j > \sum_{k \in S} \mu_k p_{kj}^m > \sum_{k \in S} \mu_k \sum_{j \in S} p_{kj}^m,$$

ou seja,

$$\sum_{j \in S} \mu_j > \sum_{k \in S} \mu_k,$$

que é um absurdo!

Portanto,

$$\mu_j = \sum_{k \in S} \mu_k p_{kj}^m, \quad \forall j \in S, \forall m \geq 1.$$

Logo, vale para  $m = 1$ , ou seja,  $\mu = \mu \times \mathbb{P}$ .

Fazendo  $m \rightarrow \infty$ , temos

$$\mu_j = \sum_{k \in S} \mu_k \mu_j$$

e portanto

$$\sum_{k \in S} \mu_k = 1.$$

(b)

$$\bar{\mu} = \bar{\mu} \times \mathbb{P}$$

Então

$$0 < \bar{\mu}_j = \sum_{k \in S} \bar{\mu}_k p_{kj}^m, \quad \forall m \geq 1.$$

Se a cadeia de Markov fosse transiente ou recorrente positiva teríamos que

$$p_{kj}^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

e neste caso  $\bar{\mu}_j = 0, \forall j \in S$  e portanto, não seria uma distribuição de probabilidade. Logo, a cadeia de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  é recorrente positiva. Então, pela parte (a),

$$p_{kj}^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{E_j(T_j)} = \mu_j$$

portanto,

$$\bar{\mu}_j = \sum_{k \in S} \bar{\mu}_k \mu_j$$

logo,

$$\frac{\bar{\mu}_j}{\mu_j} = \sum_{k \in S} \bar{\mu}_k = 1$$

de onde concluímos que

$$\bar{\mu}_j = \mu_j, \quad \forall j \in S.$$

■

**Observação A.1:** O Teorema A.3 vale para classes irredutíveis e fechadas, isto é, seja  $C \subseteq S$ , fechada e irredutível. Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ji}^n = \begin{cases} \mu_i = \frac{1}{E_i(T_i)}, & \text{se } i, j \in C \\ 0, & \text{se } i, j \notin C \end{cases}$$

onde  $\mu_i = \sum_{k \in C} \mu_k p_{ki}$ ,  $\forall i \in C$ . Para ver isto basta aplicar o Teorema A.3 para uma cadeia de Markov  $(X_n^*)_{n \geq 0}$  com espaço de estados  $C$ . Vemos que  $(\mu_i)_{i \in S}$ , com  $\mu_i = 0$ ,  $\forall i \notin C$ , é uma distribuição estacionária da cadeia original  $(X_n)_{n \geq 0}$ . Esta distribuição estacionária tem suporte em  $C$ .

Com base na Observação A.1 podemos definir as distribuições estacionárias extremas (ou ergódicas).

**Definição A.16:** Sejam  $C_1, C_2, \dots, C_l$ , classes recorrentes positivas da cadeia de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$ . Uma distribuição  $(\mu_i)_{i \in S}$  é dita distribuição extremal (ou ergódica) da cadeia  $(X_n)_{n \geq 0}$  se tem suporte em alguma das classes recorrente positiva. Se o suporte é  $C_m$  denotaremos

$$(\mu_i^{(m)})_{i \in S}$$

como a correspondente distribuição estacionária ergódica (ver Doob [3]). Então

$$\mu_i^{(m)} = \begin{cases} \sum_{k \in C_m} \mu_k^{(m)} p_{ki}, & \forall i \in C_m \\ 0, & \forall i \notin C_m \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

Além disso, chamaremos  $C_1, C_2, \dots, C_l$  de classes ergódicas.

**Proposição A.3:** Sejam  $(X_n)_{n \geq 0}$  uma cadeia de Markov com  $l$  classes ergódicas e  $(\mu_i)_{i \in S}$  uma distribuição estacionária desta cadeia. Então, existem  $\alpha_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, l$ , tais que

$$\mu_i = \alpha_1 \mu_i^{(1)} + \alpha_2 \mu_i^{(2)} + \dots + \alpha_l \mu_i^{(l)}, \quad \forall i \in S \quad (\text{A.3})$$

onde  $\sum_{m=1}^l \alpha_m = 1$ ,  $\alpha_m \geq 0$ .

**Prova:** Para provar que  $\mu_i$  é distribuição estacionária de  $(X_n)_{n \geq 0}$  basta mostrar que (A.3) satisfaz (A.1).

Sejam  $i \in S$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  tais que  $\sum_{m=1}^l \alpha_m = 1$  e  $\alpha_m \geq 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, l$ . Substituindo (A.3) em (A.1), temos

$$\alpha_1 \mu_j^{(1)} + \alpha_2 \mu_j^{(2)} + \dots + \alpha_l \mu_j^{(l)} = \sum_{k \in S} (\alpha_1 \mu_k^{(1)} + \alpha_2 \mu_k^{(2)} + \dots + \alpha_l \mu_k^{(l)}) p_{kj}.$$

Mas,  $p_{kj} = 0$  se  $k$  e  $j$  pertencem a classes ergódicas diferentes. Portanto, supondo que  $j \in C_i$ , temos

$$\alpha_i \mu_j^{(i)} = \sum_{k \in C_i} \alpha_i \mu_k^{(i)} p_{kj}$$

logo

$$\mu_j^{(i)} = \sum_{k \in C_i} \mu_k^{(i)} p_{kj}, \quad \forall j \in C_i$$

que é válida por (A.2). ■

## REFERÊNCIAS

- [1] Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, 2nd edition, New York.
- [2] Cassandro, M., Galves, A., Olivieri, E., Vares, M. E. (1984). Metastable behavior of stochastic dynamics: A pathwise approach. *J. Statist. Phys.* 35, 603-634.
- [3] Catoni, O. e Cerf, R. (1995). *The Exit Path of a Markov Chain with Rare Transitions*. Laboratoire de Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure. Paris.
- [4] Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes*. John Wiley, New York.
- [5] Freidlin M. I. (1978). Sublimiting Distributions and Stabilization of Solutions of Parabolic Equations with a Small Parameter. *American Mathematical Society*, 1114-1118.
- [6] Freidlin, M. I. e Wentzell, A. D. (1984). *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer - Verlag, Berlin.
- [7] Galves, A., Olivieri, E., Vares, M. E. (1987). Metastability for a Class of Dynamical Systems Subject to Small Random Perturbations. *The Annals of Probability*, Vol. 15, Nº 4, 1288-1305.
- [8] Isaacson, D. L. & Madsen, R. W. (1941). *Markov Chains, Theory and Applications*. Wiley, New York.
- [9] James, B. R. (1981). *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. IMPA, Rio de Janeiro.
- [10] Karlin, S. & Taylor, (1968). *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York. Vol. 1.
- [11] Liggett, T.M. *Interacting Particles Systems*. Springer - Verlag, Berlin.
- [12] Martin-Löf, A. (1940). *Statistical Mechanics and the Foundation of Thermodynamics*. Springer - Verlag, Berlin.
- [13] Olivieri, E. & Scoppola, E. (1995). Markov Chains with Exponentially Small Transition Probabilities: First Exit Problem from a General Domain. I. The Reversible Case. *J. Statist. Phys.* 79, nº3/4.
- [14] Scoppola, E. (1993). Renormalization Group for Markov Chains and Application to Metastability. *J. Statist. Phys.* 73, 83-121.
- [15] Vares, M.E. (1996). Large Deviations and Metastability. *Collection travaux en cours*, 53. Hermann editores Disordered Systems. Editores R. Bamon, Jean-Marc Ganbaudo e S. Martinez.