

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Otimização de Forma Utilizando o
Método dos Elementos de Contorno e Cálculo de Sensibilidade por Variáveis
Complexas**

por

Daniel Contreras Mundstock
Engenheiro Mecânico

Dissertação para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Porto Alegre, agosto de 2006

Otimização de Forma Utilizando o Método dos Elementos de Contorno e Cálculo de Sensibilidade por Variáveis Complexas

por

Daniel Contreras Mundstock
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Prof. Dr. Jun Ono Fonseca

Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas

Prof. Dr. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 16 de novembro de 2006.

RESUMO

Este trabalho envolve o estudo de uma metodologia de otimização de forma utilizando o método dos elementos de contorno em estruturas bidimensionais. Propõe-se uma nova metodologia de cálculo de sensibilidade em problemas de otimização. A abordagem proposta utiliza variável complexa na obtenção de derivadas da função custo do problema de otimização. As sensibilidades nodais são obtidas diretamente separando-se a parte imaginária da solução, evitando assim dificuldades numéricas comumente associadas a diferenças finitas e métodos adjuntos.

O cálculo de tensão sobre o contorno é implementado com a finalidade de ser utilizado como função custo. Esta implementação é avaliada analisando alguns casos encontrados na literatura a seus resultados comparados com soluções analíticas. Um método iterativo é então proposto para otimização de forma de estruturas bidimensionais. Elementos quadráticos descontínuos são utilizados na implementação numérica do método. Alguns problemas de otimização de forma são resolvidos a fim de mostrar a eficácia desta metodologia. As hipóteses de estado plano de tensão e estado plano de deformação são adotadas para os casos analisados no trabalho. Os resultados obtidos com o processo de otimização são comparados com outras soluções, quando disponíveis.

São abordados problemas e características inerentes ao processo de otimização de forma, tais como a obtenção de contornos irregulares e distorção dos elementos. A solução adotada para problemas de contornos irregulares é baseada na suavização da geometria através de splines e remalhamento localizado subsequente.

ABSTRACT

This work deals with a shape optimization methodology using the boundary element method applied to two-dimensional structures. A new methodology of sensibility evaluation in optimization problems is proposed. The proposed approach uses complex variable to obtain the objective function derivatives of the optimization problem. The nodal sensibilities are obtained taking the imaginary part of the solution, avoiding numerical drawbacks that are common in finite differences and adjoint methods.

The stress evaluation on the boundary of the domain is implemented to be used in objective function. This implementation is evaluated analyzing some cases found in literature and the results are compared with analytical solutions. An iterative method is then proposed for shape optimization of two-dimensional structures. Quadratic discontinuous elements are used in the numerical implementation of the method. Some shape optimization problems are solved to show the efficiency of this methodology. The plane stress and plane strain state hypothesis are used in all cases analyzed. Shape optimization results are compared with others solutions, whenever available.

Problems and characteristics inherent to shape optimization procedures like irregular contours and distorted elements are discussed. The solution adopted for irregular contours is based on geometry smoothing using splines and subsequent local remeshing.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	12
1.1.	Objetivos	15
1.2.	Estrutura do trabalho	15
2.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE ELASTICIDADE	17
2.1.	Mecânica dos meios contínuos	17
2.2.	Estado Plano de Tensões (EPT)	19
2.3.	Estado Plano de Deformações (EPD)	20
3.	OTIMIZAÇÃO	22
3.1.	Introdução	22
3.2.	Conceitos básicos	23
3.2.1.	Função objetivo	23
3.2.2.	Variáveis de projeto	23
3.2.3.	Restrições	24
3.2.4.	Máximos e mínimos	25
3.3.	Formulação do problema de otimização	26
3.3.1.	Funcionais sem restrição	26
3.3.2.	Funcionais com restrições	27
3.3.3.	Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)	27
3.4.	Tipos de otimização	28
3.4.1.	Tipos de otimização estrutural	28
3.4.2.	Métodos de otimização de forma	31
4.	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	33
4.1.	Revisão do MEC	33
4.2.	Cálculo de tensões em pontos internos	38
4.3.	Cálculo de tensões sobre contorno	38
4.3.1.	Elemento linear	42
4.3.2.	Elemento quadrático	44
4.4.	Avaliação do cálculo de tensão no contorno	45
4.4.1.	Placa com furo circular	45
4.4.2.	Barra com deslocamento prescrito na ponta	54
5.	UM MÉTODO DE VARIÁVEL COMPLEXA PARA CÁLCULO DE SENSIBILIDADE ATRAVÉS DO MEC	56
5.1.	Estimativa de derivadas através de variável complexa	56
5.2.	Implementação da variável complexa no método dos elementos de contorno	59
5.3.	Metodologia do processo de otimização	60
5.4.	Remalhamento e suavização do contorno	61
6.	RESULTADOS	66
6.1.	Avaliação preliminar da estabilidade do cálculo de sensibilidade	66
6.2.	Resultados para o cálculo de sensibilidade	67
6.2.1.	Tubo com pressão interna	68
6.2.2.	Barra carregada axialmente	71
6.2.3.	Placa com furo circular	73
6.3.	Resultados de otimização de forma	75
6.3.1.	Placa com furo quadrado no centro	75
6.3.2.	Problema da concordância em um canto vivo	79
6.3.3.	Viga em balanço	81
7.	CONCLUSÕES	85
8.	REFERÊNCIAS	87

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres romanos

a, b	Deslocamento dos nós dos extremos no elemento descontínuo.
A	Área da seção transversal da barra.
\mathbf{A}	Vetor de condições de contorno conhecidas no MEC.
$B(u)$	Funções que definem a B-Spline cúbica.
b_i	Força de corpo na direção i .
C	Tensor constitutivo de 4º ordem das propriedades elásticas.
c_{lk}^i	Matriz de coeficientes que depende da geometria do contorno.
E	Módulo de Young.
$g(x)$	Restrição de desigualdade do problema de otimização.
\mathbf{G}, \mathbf{H}	Matrizes de coeficientes do método dos elementos de contorno.
G	Módulo de elasticidade transversal.
G	Jacobiano da transformação.
h	Perturbação inserida no modelo.
$h(x)$	Restrição de igualdade do problema de otimização.
$H(x)$	Matriz Hessiana.
K	Conjunto de pontos viáveis da solução de otimização.
l	Comprimento da barra.
L	Número de pontos de integração utilizados por quadraturas.
$L(x, \lambda, \mu)$	Função auxiliar de Lagrange.
n_i	Vetor normal na direção i .
p_{lk}^*	Solução fundamental de tração.
p	Pressão interna do tubo.
P	Carga aplicada na barra.
\mathbf{P}	Vetor das incógnitas de tração.
$[\mathbf{Q}]$	Matriz que modifica a matriz de funções de forma quadráticas.
R	Matriz de rotação do sistema global para o sistema local.
r_i	Raio interno do tubo.
r_e	Raio externo do tubo.
r	Distância do ponto fonte ao ponto campo.
\mathfrak{R}	Conjunto dos números reais.

$S(x)$	Função objetivo.
\bar{t}	Tração prescrita no contorno Γ_t .
\mathbf{t}	Vetor tração na superfície.
t_i	Vetor tangencial.
u_i	Deslocamento na direção i .
\bar{u}	Deslocamento prescrito no contorno Γ_u .
\mathbf{U}	Vetor das incógnitas de deslocamento.
w_i	Peso utilizado na integração por quadratura para o ponto i .
x_i	Sistema de coordenadas cartesiano global.
x	Ponto campo.
y	Ponto fonte.
Y	Ponto interno.
\mathbf{Y}	Vetor de incógnitas da formulação do MEC.
EPT	Estado Plano de Tensões.
EPD	Estado Plano de Deformações.
MEC	Método dos Elementos de Contorno.
MEF	Método dos Elementos Finitos.

Caracteres gregos

σ_r	Tensão radial.
σ_θ	Tensão tangencial.
σ_{ij}	Tensor de tensões. Tensão na direção j referido à normal i .
ε_{ij}	Tensor de deformações infinitesimais.
μ	Módulo de cisalhamento.
ξ	Espaço normalizado.
Ω	Domínio do problema.
Γ	Contorno do problema.
Γ_t	Parcela do contorno sobre a qual são prescritas as tensões.
Γ_u	Parcela do contorno sobre a qual são prescritos os deslocamentos.
ν	Coefficiente de Poisson.
φ	Funções de interpolação Lagrangeanas.

ϕ	Matriz de correção da posição dos nós físicos.
Φ	Funções de interpolação do elemento.
θ	Variável angular.
Φ	Função objetivo.

Símbolos e operadores matemáticos

$[\cdot]$	Vetor linha.
$\{\cdot\}$	Vetor coluna.
\cup	União de conjuntos.
\cap	Interseção de conjuntos.
δ_{ij}	Operador delta de Kronecker.
Im	Parte imaginária de um número.
$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$	Operador produto aberto entre dois tensores (contração).

Sub-índices e super-índices

i, j Índices variam de 1 a 2.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplos de malhas empregadas pelo MEF (a) e pelo MEC (b).	13
Figura 1.2 - Exemplos de manipulação de malhas com o (a) MEF e com o (b) MEC.	13
Figura 1.3 - (a) Projeto desenvolvido e otimizado intuitivamente; (b) projeto otimizado para reduzir concentrações de tensões utilizando métodos numéricos.	14
Figura 2.1 – Deformação e deslocamento de um corpo.	18
Figura 2.2 – Estado plano de tensões.	20
Figura 3.1 – Mínimos e máximos de uma função objetivo.	26
Figura 3.2 – Função convexa.	26
Figura 3.3 – Tipos de otimização: (a) Paramétrica; (b) Forma; (c) Topológica.	29
Figura 3.4 – Representação do contorno pela função de interpolação.	30
Figura 3.5 – Comparação do processo de otimização usando MEC e MEF.	31
Figura 4.1 – Corpo definido por $\Omega + \Gamma$	33
Figura 4.2 – Transformação do sistema de coordenadas.	36
Figura 4.3 – Sistemas de coordenadas no contorno.	39
Figura 4.4 – Detalhe dos nós geométricos e físicos do elemento descontínuo.	41
Figura 4.5 – (a) Normais de um canto, Soluções para canto vivo no MEC: (b) elemento de transição, (c) nó duplo, (d) elemento descontínuo.	41
Figura 4.6 - Nós físicos e geométricos para elemento (a) linear e (b) quadrático.	42
Figura 4.7 – Geometria e condições de contorno da placa.	46
Figura 4.8 – Detalhe da malha utilizada para elementos lineares (nós geométricos).	46
Figura 4.9 – Distribuição de tensão ao longo do furo – elementos lineares.	47
Figura 4.10 - Distribuição de tensão ao longo do furo – elementos lineares.	47
Figura 4.11 – Detalhe da malha utilizada para elementos quadráticos.	48
Figura 4.12 - Distribuição de tensão ao longo do furo – elementos quadráticos.	48
Figura 4.13 - Distribuição de tensão ao longo do furo – elementos quadráticos.	49
Figura 4.14 – Malha de elementos finitos da placa com furo circular.	49
Figura 4.15 – Geometria e condições de contorno da placa com furo circular.	50
Figura 4.16 - Posição e numeração dos pontos internos – elemento linear.	51
Figura 4.17 - Tensão nos pontos internos do modelo com elementos lineares da placa com furo – sem auxílio da simetria.	51
Figura 4.18 - Tensão nos pontos internos do modelo com elementos lineares da placa com furo – sem auxílio da simetria.	52
Figura 4.19 – Posição e numeração dos pontos internos – elemento quadrático.	52
Figura 4.20 - Tensão nos pontos internos do modelo com elementos quadráticos da placa com furo – sem auxílio da simetria.	53
Figura 4.21 - Tensão nos pontos internos do modelo com elementos quadráticos da placa com furo – sem auxílio da simetria.	53
Figura 4.22 – Geometria e condições de contorno da barra.	54
Figura 4.23 - Malha de elementos de contorno da viga.	54
Figura 4.24 - Deslocamento e deformação ao longo da barra.	55
Figura 5.1 – Processo de alteração do contorno. (a) Contorno original; (b) Contorno ao final da iteração de otimização; (c) Contorno suavizado; (d) Remalhamento.	62
Figura 5.2 – Esquema iterativo da metodologia proposta.	65
Figura 6.1 – (a) Geometria, condições de contorno e posição do nó perturbado e (b) malha de elementos de contorno quadráticos utilizada.	66
Figura 6.2 – (a) Dimensões, condições de contorno e propriedades do caso do tubo com pressão interna e (b) malha de elementos de contorno utilizada.	68
Figura 6.3 - Variação do erro do deslocamento e sensibilidade ao longo da parede interna do tubo.	70
Figura 6.4 – Malha refinada do caso do tubo com pressão interna.	71

Figura 6.5 – Condições de contorno e dimensões da barra.....	72
Figura 6.6 – (a) Geometria e condições de contorno do caso da placa com furo circular e (b) malha de elementos de contorno utilizada.	73
Figura 6.7 - Parâmetros da solução analítica de uma placa infinita com furo circular.	74
Figura 6.10 – (a) Geometria e condições de contorno da placa com furo quadrado e (b) malha de elementos de contorno utilizada.	76
Figura 6.11 – Alteração do contorno da placa com furo quadrado para selecionadas iterações...	77
Figura 6.12 - Detalhe da malha utilizada e posição dos pontos otimizados no contorno.	78
Figura 6.13 – Variação de tensão durante a variação da geometria.	78
Figura 6.14 – Geometria e condições de contorno do problema da concordância.....	79
Figura 6.15 – Evolução da geometria do problema da concordância.	80
Figura 6.16 – Distribuição de tensão do segmento ABC do problema da concordância.	81
Figura 6.17 – (a) Geometria e condições de contorno da viga em balanço e (b) malha de elementos de contorno utilizada.	82
Figura 6.18 – Otimização da geometria da viga em balanço.	83
Figura 6.19 – Distribuição da tensão de von-Mises ao longo da viga em balanço.	84
Figura 8.1 - (a) Componentes de deslocamento da solução fundamental (carregamento unitário na direção x_1), (b) componentes de tração da solução fundamental (carregamento unitário na direção x_2).....	91

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1 – Resultados de σ_{rr} para placa com furo circular com elementos lineares – modelo com simetria.	49
Tabela 4.2 - Resultados de σ_{rr} para placa com furo circular com elementos quadráticos – modelo sem simetria.....	53
Tabela 5.1 – Valores de derivadas para diferentes perturbações.	59
Tabela 6.1 – Valores de perturbação e sensibilidade do deslocamento para o caso de concordância.....	67
Tabela 6.2 – Resultados sensibilidade para o tubo com pressão interna.....	69
Tabela 6.3 – Variação do número de pontos de integração e tamanho de malha.	70
Tabela 6.4 – Resultados de sensibilidade da barra.....	72
Tabela 6.5 – Resultados de deslocamento da barra.....	72
Tabela 6.6 – Deslocamento radial da placa com furo.	75
Tabela 6.7 – Sensibilidade do deslocamento à variação do raio do furo.	75

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de projetos de engenharia em indústrias sempre se baseou em forma de cálculos estruturais rudimentares e experiência com projetos anteriores. Os motivos para adoção deste tipo de desenvolvimento variam e vão desde a falta de conhecimento de técnicas mais sofisticadas, recursos escassos para investimentos em equipamentos, necessidade de rapidez na apresentação de resultados (prejudicando a qualidade), ou simplesmente, desinteresse em novas tecnologias causado muitas vezes pela falta de concorrência. Mas esta situação tem se alterado nas últimas décadas especialmente utilizando-se simulação computacional na etapa de tentativa e erro em protótipos, que quase sempre, é mais barata e mais rápida.

Uma concepção mais moderna em engenharia se baseia naquilo que a natureza e os seres humanos intuitivamente buscam: o ótimo. Tratando-se especificamente de engenharia, busca-se o ótimo através de ferramentas adequadas, no caso, métodos numéricos.

Este trabalho consiste no estudo e desenvolvimento de uma ferramenta de otimização estrutural. Entretanto, neste desenvolvimento as equações de equilíbrio de um problema estrutural de grande porte são usualmente resolvidas de forma discreta. Nas últimas duas décadas, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) se consolidou como uma alternativa ao popular Método dos Elementos Finitos (MEF), particularmente em situações onde o segundo não desempenha bem. A formulação do MEC a partir de uma forma integral do problema inverso governante confere ao método uma excepcional precisão, e dadas as propriedades distributivas da solução fundamental é possível transferir o problema interior para sua forma equivalente sobre o contorno (problema de valores no contorno associado), reduzindo em uma unidade a dimensão do problema.

É nesta redução que reside uma das características mais interessantes do MEC, pois exige apenas discretização do contorno do domínio. Além de simplificar sobremaneira tarefas como geração de malha, esta característica do MEC permite uma integração mais simples com sistemas CAD porque faz uso da própria definição geométrica do problema. A Figura 1.1 ilustra uma comparação entre discretizações típicas para o MEC e para o MEF.

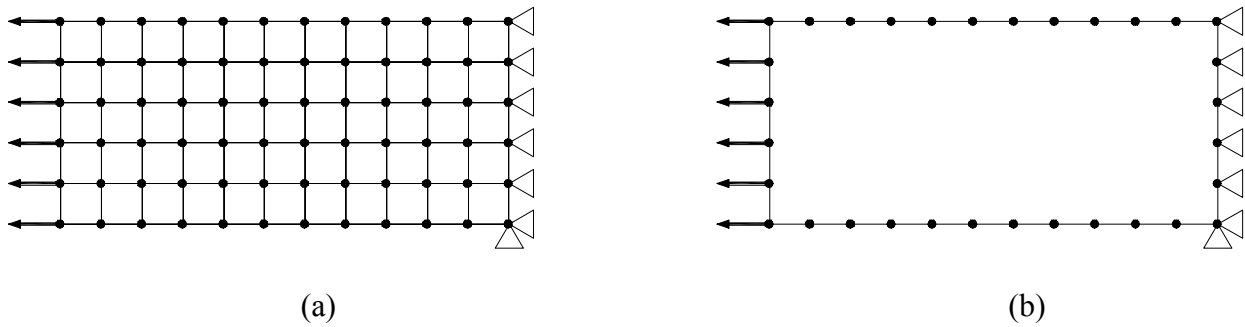


Figura 1.1 - Exemplos de malhas empregadas pelo MEF (a) e pelo MEC (b).

A grande precisão do método e a facilidade de remalhamento trazem diversas vantagens durante as fases de concepção/modificação do produto. A título de ilustração, a Figura 1.2 exemplifica uma situação em que uma peça perfurada tem a posição do furo modificada. No caso do MEC, esta alteração é realizada apenas com a translação da parte da malha referente ao contorno do furo, enquanto o MEF necessita de remalhamento.

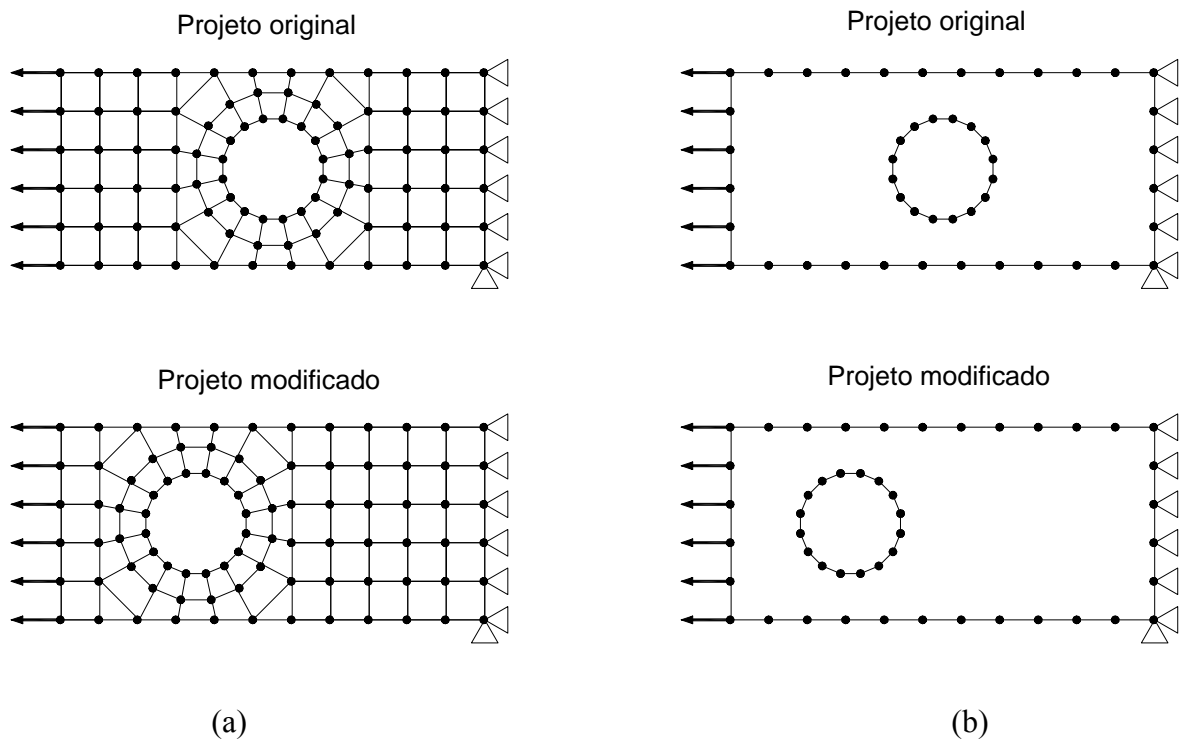


Figura 1.2 - Exemplos de manipulação de malhas com o (a) MEF e com o (b) MEC.

Outro aspecto que merece destaque diz respeito à facilidade com que o MEC se apresenta como alternativa numérica ao MEF para solução de problemas de otimização. Tendo em vista que problemas de otimização de forma e otimização da topologia estão normalmente associados à correta obtenção da geometria otimizada, o MEC se insere como um método particularmente

adaptado a esses problemas, uma vez que não há necessidade de geração e gerenciamento de malhas internas. Mesmo no âmbito dos problemas não lineares – que requerem integração de variáveis dentro do domínio – o método permite transformações para o contorno, ou o emprego de malhas disjuntas, apesar de suas equações se tornarem mais complicadas. Esta característica é particularmente atrativa por reduzir de forma muito significativa o custo computacional desta classe de problemas e, se somada à grande precisão do método no cálculo de variáveis duais, se reveste de grande potencial como tema de investigação científica.

Na engenharia moderna, otimização demanda cada vez mais atenção pela necessidade de desenvolvimento de projetos com menor custo, mais eficientes e etc. Na busca pelo extremo (máximo ou mínimo) de uma característica específica de um componente, as ferramentas matemáticas de otimização se mostram mais eficientes que a busca intuitiva do ótimo (por exemplo, Figura 1.3). Em algumas áreas da engenharia de ponta já não é mais aceitável um componente não otimizado.

Neste contexto, a otimização de forma não tem sido desenvolvida igualmente a outros tipos de otimização devido ao fato de não ser muito adaptada ao MEF, que é o método mais difundido na atualidade. Mas a facilidade com a qual o MEC se adapta à otimização de forma deve ser mais explorada, aproveitando-se as vantagens que o uso destas duas técnicas juntas pode proporcionar.

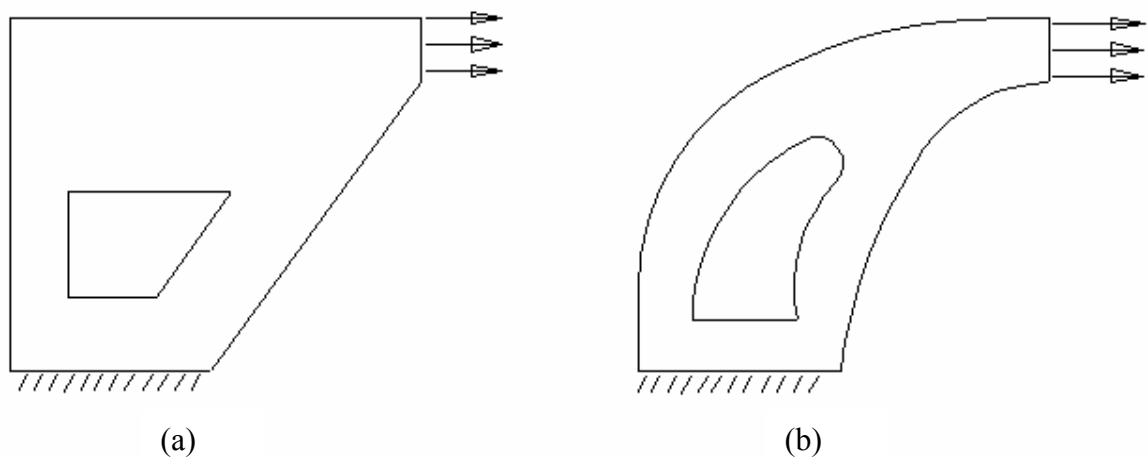


Figura 1.3 - (a) Projeto desenvolvido e otimizado intuitivamente; (b) projeto otimizado para reduzir concentrações de tensões utilizando métodos numéricos.

1.1. Objetivos

O trabalho tem como principal objetivo implementar uma nova técnica de avaliação de sensibilidade aliada a elementos de contorno. Para isso se fez necessário o cálculo de tensões no contorno e o estudo de problemas clássicos a fim de testar as ferramentas implementadas no trabalho.

Neste sentido, fez-se necessário o estudo desde os fundamentos teóricos que envolvem a mecânica dos sólidos até o tema otimização propriamente dito. No contexto acima descrito, foram estabelecidos os seguintes objetivos:

1. Realizar um estudo dos fundamentos de mecânica dos sólidos, elementos de contorno e otimização.
2. Implementar o cálculo de tensões no contorno para o elemento linear e quadrático.
3. Analisar problemas clássicos a fim de testar o cálculo implementado.
4. Implementar a avaliação de derivadas pelo método da variável complexa.
5. Analisar problemas com solução analítica a fim de testar o método implementado.
6. Desenvolver uma técnica de otimização de forma para elasticidade 2D utilizando o método implementado.
7. Testar a técnica desenvolvida em diversas estruturas, comprovando a eficiência da metodologia proposta.

O desenvolvimento de uma técnica eficiente de otimização de forma para elasticidade bidimensional, pode estender todos os conceitos a problemas tridimensionais. Com isto também é possível estender a técnica para problemas não-lineares para que esta metodologia possibilite o estudo de um campo mais amplo de estruturas.

1.2. Estrutura do trabalho

Dessa forma, o trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo inicial estão resumidos o conteúdo e os objetivos do trabalho. No segundo capítulo estão expostos os fundamentos teóricos da mecânica dos sólidos necessários para este trabalho. No terceiro capítulo são estudados aspectos gerais do problema de otimização, tais como função objetivo, variáveis de projeto, restrições, sensibilidade, formulação do problema e também é tratado o assunto dos tipos de otimização, dando uma breve introdução aos tipos existentes e uma maior explicação ao método utilizado nesse trabalho. Neste capítulo, é feita uma revisão bibliográfica

na introdução de cada assunto separadamente. O quarto capítulo contém uma revisão sobre o método dos elementos de contorno, cálculo de tensões no contorno e uma avaliação dos resultados da implementação do cálculo de tensões no contorno. No quinto capítulo é abordada a diferenciação por variável complexa, sua implementação no método dos elementos de contorno e a técnica utilizada para suavização do contorno e remalhamento. Os capítulos restantes apresentam resultados obtidos, bem como as conclusões e sugestões de novos trabalhos.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE ELASTICIDADE

2.1. Mecânica dos meios contínuos

Na formulação do problema de otimização as variáveis de projeto e função objetivo dependem de forma direta ou indireta das equações de equilíbrio da elasticidade. Assim, é feita uma revisão para esse trabalho da teoria clássica da elasticidade infinitesimal linear [Boresi et al, 1978].

As equações de equilíbrio são escritas em função das forças de corpo e das forças de superfície. Assim, se o corpo está em equilíbrio, para o caso estático, tem-se:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (1)$$

onde \mathbf{b} representa as forças de corpo e \mathbf{t} as de superfície. As tensões de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}$) são relacionadas com as trações no contorno por:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal ao contorno do corpo. Logo:

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (3)$$

Partindo-se da condição de que a quantidade de força que está entrando em toda a superfície é igual à variação força interna, tem-se através do teorema da divergência:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) d\Omega = 0 \quad (5)$$

Portanto para que o corpo esteja em equilíbrio, cada parte do mesmo deve obedecer à relação:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (6)$$

O campo de deslocamentos u (Figura 2.1) e as deformações possuem uma relação linear conhecida [Boresi et al, 1978].

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

onde ε_{ij} refere-se à componente do tensor de deformações infinitesimais na direção j , ortogonal ao eixo i .

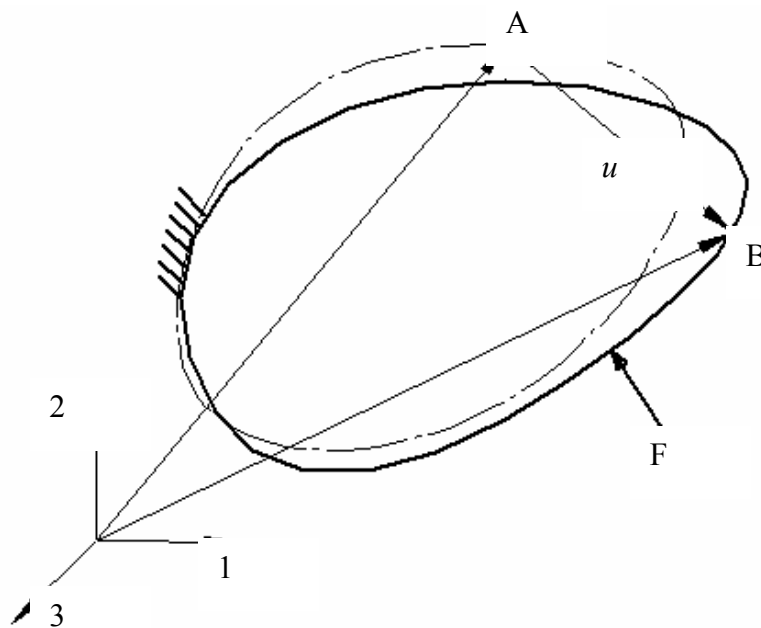


Figura 2.1 – Deformação e deslocamento de um corpo.

As tensões apresentadas na Equação (2) e as deformações da Equação (7) estão relacionadas por uma relação constitutiva adequada:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8)$$

onde C é o tensor constitutivo de 4º ordem das propriedades elásticas, neste caso representa a relação constitutiva isotrópica linear que relaciona as tensões σ às deformações ε , e pode ser reduzido a [Boresi et al, 1978]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé.

As hipóteses clássicas de Estado Plano de Tensões e Estado Plano de Deformações foram adotadas pois os exemplos analisados podem ser considerados bidimensionais [Shames, 1965].

2.2. Estado Plano de Tensões (EPT)

Para que se possa considerar a formulação de EPT são necessárias basicamente duas condições: uma das dimensões deve ser bastante inferior às demais, as quais formarão um plano (Figura 2.2); as cargas devem necessariamente estar contidas no plano mencionado (Figura 2.2).

Logo, as tensões fora do plano são nulas e as deformações fora do plano podem ser calculadas como um pós-processamento.

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0 \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2G} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{aligned} \quad (10)$$

Simplificando a expressão (9) para este caso, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & 0 \\ \mu & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

As constantes de Lamé para este caso passam a ser:

$$\lambda = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (12)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (13)$$

onde E e ν são respectivamente o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson e G corresponde ao módulo de elasticidade transversal.

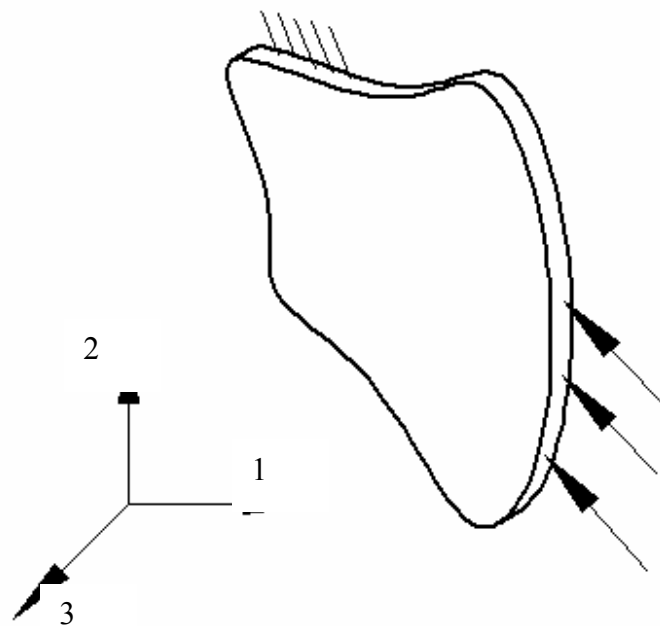


Figura 2.2 – Estado plano de tensões.

2.3. Estado Plano de Deformações (EPD)

O EPD é definido como um estado onde as deformações fora do plano de análise sejam nulas. Porções de um corpo prismático longe das restrições podem ser consideradas em um EPD se: as trações e forças de corpo estiverem normais ao eixo do prisma (aqui considerado eixo 3); as trações e forças de corpo devem ser funções apenas dos eixos restantes e ter resultante zero para evitar flexão. As tensões no eixo do prisma devem ser calculadas como um pós-processamento.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \\ \sigma_{33} &= \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\end{aligned}\quad (14)$$

Desta forma, o tensor de deformações passa a ser:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (15)$$

A relação entre tensão e deformação é semelhante ao caso obtido no EPT

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & 0 \\ \mu & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}\quad (16)$$

E as constantes de Lamé são:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\quad (17)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}\quad (18)$$

As hipóteses de EPT e EPD devem sempre ser utilizadas separadamente. A tentativa de impor EPT e EPD simultaneamente leva a equações inconsistentes.

3. OTIMIZAÇÃO

3.1. Introdução

A otimização sempre esteve, mesmo que inconscientemente, presente na vida do homem, através de palavras como “melhor”, “mínimo”, “máximo”. Conceitos de otimização são encontrados em diversos campos da ciência, como biologia, química, física, estatística, economia, etc. Na evolução animal, uma espécie que não se adapta ao seu meio ambiente se extingue, e, segundo Darwin sobreviveram apenas as espécies que melhor se adaptaram às mudanças ocorridas na geologia e clima da Terra [Ronan, 1991]. Critérios de mínima energia estão presentes também em diversas teorias fundamentais da física e química, como no caso dos modelos atômicos atualmente aceitos.

O conceito de aplicação de otimização pode ser estendido para diversos níveis dentro de uma empresa (gerencial, projeto e produção) [Secchi, 2001]. O presente trabalho estuda basicamente o problema que envolve o nível de projeto. Entretanto, a concepção de um produto de diferentes formas irá, sem dúvida, influenciar outras esferas da organização de uma empresa. Por exemplo, um mesmo produto, injetado sob pressão, poderia ter sua massa minimizada com diferentes topologias, ou seja, poderia ter diferentes formas geométricas (diferentes furos de alívio ou diferentes formas para os furos) com similar quantidade de material. O fato de uma peça ter mais ou menos furos internos implica no custo de ferramental, facilidade (portanto tempo) de produção, etc. Nota-se portanto que a otimização de massa, por exemplo, não necessariamente otimiza o maior objetivo de uma empresa (maximização do lucro). Logo, deve-se ter em mente, antes de qualquer concepção de projeto, como a condução do mesmo irá influenciar todo o ciclo da empresa.

Como observado no parágrafo anterior, o controle da complexidade de uma estrutura otimizada pode, em determinadas circunstâncias, ser mais importante que a otimização de uma única grandeza (no exemplo citado, minimização da massa). Um resumo sobre o controle de complexidade encontra-se feito por Cardoso [2000].

3.2. Conceitos básicos

Os componentes básicos do problema de otimização estão descritos por Herskovits [2002]:

- Função objetivo: representa o objeto, quantificado matematicamente, a ser maximizado ou minimizado.
- Modelo do processo: representa a forma como serão tratadas (equacionadas) a função objetivo e as variáveis de projeto, bem como as restrições (igualdades e desigualdades).
- Restrições: representam os limites impostos para o sistema.

3.2.1. Função objetivo

Função objetivo é um escalar que representa o lucro, custo, energia, produção, distância, etc., em termos das variáveis de decisão do processo ou sistema em análise. Em outras palavras, é a função matemática cujo máximo ou mínimo deseja-se encontrar.

Em um determinado processo, podem existir inúmeras funções de variáveis de projeto. O equacionamento destas, ou seja, formulação da função objetivo, pode ser feito considerando-se uma função de variável de projeto, ou mais delas, denominadas respectivamente por $f(x)$ ou

$$S(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)] \quad .(19)$$

As funções objetivo presentes nesse trabalho envolvem tensão no contorno e em pontos internos.

3.2.2. Variáveis de projeto

São as variáveis independentes (parâmetros) da função objetivo e, portanto, passíveis de alteração. Para que o projeto seja tido como admissível, é necessário que os valores assumidos como variáveis de projeto satisfaçam todas as restrições impostas.

As variáveis de projeto podem ser do tipo discreta, assumindo apenas alguns valores dentro de um conjunto; ou contínua, assumindo valores dentro de um intervalo.

$$\{x \in X \mid x = (k_1, k_2, \dots, k_N)\} \quad (20)$$

$$\{x \in X \mid k_{\min} < x < k_{\max}\} \quad (21)$$

Caso haja mais de uma variável de projeto, é interessante que as mesmas sejam escolhidas de forma independente umas das outras, para que não se criem dificuldades de mau condicionamento para a solução do problema [Arora, 1989].

3.2.3. Restrições

São os limites impostos às variáveis de projetos (restrições laterais) ou às funções das variáveis de projeto (restrições gerais). As restrições podem se dar na forma de igualdade ou desigualdade.

O problema de otimização sujeito a restrições de igualdade e desigualdade pode ser escrito por:

$$\begin{aligned} & \text{Extremizar } S(x) \\ & \text{Sujeito a : } h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, m \\ & \quad g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad x \in X \subseteq \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (22)$$

onde $h_j(x)$ representa as restrições de igualdade e $g_j(x)$ as restrições de desigualdade.

Uma restrição de desigualdade é chamada ativa em um ponto viável x se $g_j(x) = 0$. Caso contrário, esta restrição é chamada inativa. O conjunto dos pontos viáveis é definido pela expressão [Arora, 1989]:

$$K = \{x \in X \subseteq \mathfrak{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\} \quad (23)$$

A solução de um problema pode se encontrar sobre uma restrição de desigualdade (restrição ativa). As restrições de um problema de otimização devem ser impostas com o cuidado de que sempre exista uma região viável de solução. Problemas mal propostos não possuem região viável e não têm solução.

3.2.4. Máximos e mínimos

Os máximos e mínimos de uma função objetivo descrita por $S : X \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ podem ser basicamente de dois tipos (Figura 3.1):

- Mínimo/máximo global: também chamado de absoluto. Pode-se dizer que x^* é um mínimo global de S se $S(x^*) \leq S(x) \forall x \in X$;
- Mínimo/máximo local: também chamado de mínimo/máximo relativo. Pode-se dizer que x^* é um ponto mínimo local de S se existe $\varepsilon > 0$, tal que $S(x^*) \leq S(x) \forall x$ e que $\|x - x^*\| < \varepsilon$.

Existem problemas nos quais as condições de Karush-Kuhn-Tucker são suficientes para assegurar que o ponto é um mínimo/máximo global. Estes são chamados de problemas convexas. Uma função é dita convexa, [Rockafellar,1997], quando:

$$\begin{aligned} S(\alpha x_2 + (1 - \alpha)x_1) &\leq \alpha S(x_2) + (1 - \alpha)S(x_1) \\ 0 < \alpha < 1 \end{aligned} \quad (24)$$

onde x_1 e x_2 são pontos do domínio. A Equação (24) diz que uma reta que une dois pontos de uma função deve ter todos os seus pontos acima do gráfico dessa função, no intervalo de x_1 a x_2 , como mostra a Figura 3.2.

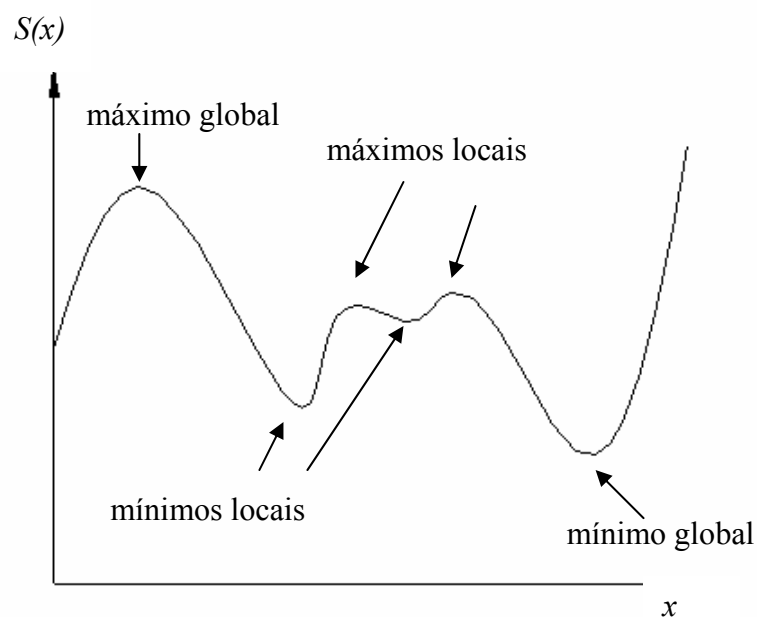


Figura 3.1 – Mínimos e máximos de uma função objetivo.

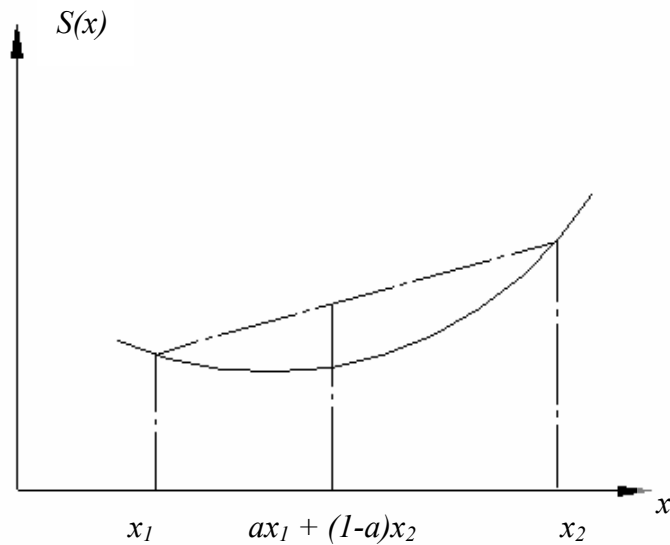


Figura 3.2 – Função convexa.

As funções não convexas ocorrem quando há diferentes pontos de mínimo ou máximo (mínimos e/ou máximos locais). Cada ponto de extremo representa uma solução diferente para a função. Pode ser mostrado que uma função é convexa se a matriz da sua derivada segunda for positiva semi-definida.

3.3. Formulação do problema de otimização

3.3.1. Funcionais sem restrição

Para uma função $S(x)$ ter um máximo ou um mínimo local (ou global) é necessário que algumas condições sejam atendidas [Secchi, 2001].

- Condição necessária de primeira ordem:

A função $S(x)$ deve ser diferenciável e igual a zero em x^* .

$$\nabla S(x^*) = 0 \quad (25)$$

- Condição necessária de segunda ordem:

Para que x^* seja um ponto de máximo ou mínimo da função $S(x)$ é necessário que a função, duas vezes diferenciável em x^* , tenha:

$$H(x^*) = \nabla^2 S(x^*) \quad (26)$$

onde $H(x^*)$ é a matriz Hessiana e deve ser positiva (ou negativa) semi-definida.

- Condição suficiente:

Para que x^* seja um ponto de máximo (ou mínimo) local de $S(x)$, é necessário que a matriz Hessiana $H(x^*)$ seja negativa (positiva) definida.

3.3.2. Funcionais com restrições

Um artifício para gerar condições necessárias e suficientes no problema de otimização com restrições, é transformá-lo em um problema sem restrições, utilizando-se a função auxiliar de Lagrange, $L(x, \lambda, \mu)$, definida por:

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= S(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x) \\ \mu &\geq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Se a função de Lagrange é estacionária em x^* , significa dizer que:

$$\nabla_{x^*} L = \nabla_{\lambda} L = \nabla_{\mu} L = 0 \quad (28)$$

3.3.3. Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

O problema de otimização pode ter diversos pontos de mínimo/máximo locais. A condição de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) é necessária para que o ponto seja de máximo ou mínimo de um problema com restrição [Haftka e Gürdal, 1992]. Existem condições de KKT de

primeira e segunda ordem. Quando o número de restrições ativas é igual ao número de variáveis de projeto a condição de primeira ordem é suficiente. A condição de segunda ordem é necessária quando o número de restrições ativas não é igual ao número de variáveis de projeto. Para que um ponto seja mínimo/máximo local os gradientes das restrições de desigualdade ativas e das restrições de igualdade devem ser linearmente independentes. As condições de KKT são amplamente utilizadas utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Este assunto não será desenvolvido, pois não foi utilizado no trabalho.

3.4. Tipos de otimização

3.4.1. Tipos de otimização estrutural

No campo da engenharia, otimização estrutural é uma importante área devido a sua contribuição na redução de custos, material e tempo nos projetos, especialmente para componentes e sistemas que requerem uma relação crucial entre peso e performance, segurança e confiabilidade. Dentro da otimização estrutural, podemos definir três grandes sub-áreas (Figura 3.3). A primeira delas é a otimização paramétrica (Figura 3.3(a)), que trabalha alterando os parâmetros discretos de uma estrutura (essa pode ser considerada uma otimização topológica). A segunda é a otimização de forma (Figura 3.3(b)), que otimiza o contorno da estrutura, e que será tratada neste trabalho. A terceira é a otimização topológica (Figura 3.3(b)), no qual se altera a topologia de estruturas contínuas.

Otimização topológica é uma área da otimização estrutural onde o desempenho da estrutura é otimizado através da variação da sua topologia. No caso de estruturas discretas como pórticos, a topologia é descrita pelo número de barras e juntas e a conectividade delas. Para estruturas contínuas como placas ou peças tridimensionais, as variáveis topológicas podem ser o número e forma de furos/orifícios na peça [Tai e Fenner, 1999]. Em ambos os casos, as variáveis envolvidas são intrinsecamente discretas, e a otimização topológica é basicamente um problema de rearranjo de material. Otimização topológica é uma área dominada por decisões discretas, e é essa natureza discreta do problema que a torna mais complexa que otimização de forma. A otimização topológica utilizada em conjunto com a otimização de forma produz uma ferramenta mais completa. O uso da otimização de forma no final de uma otimização topológica suaviza os contornos e deixa a geometria mais próxima do desenho de engenharia.

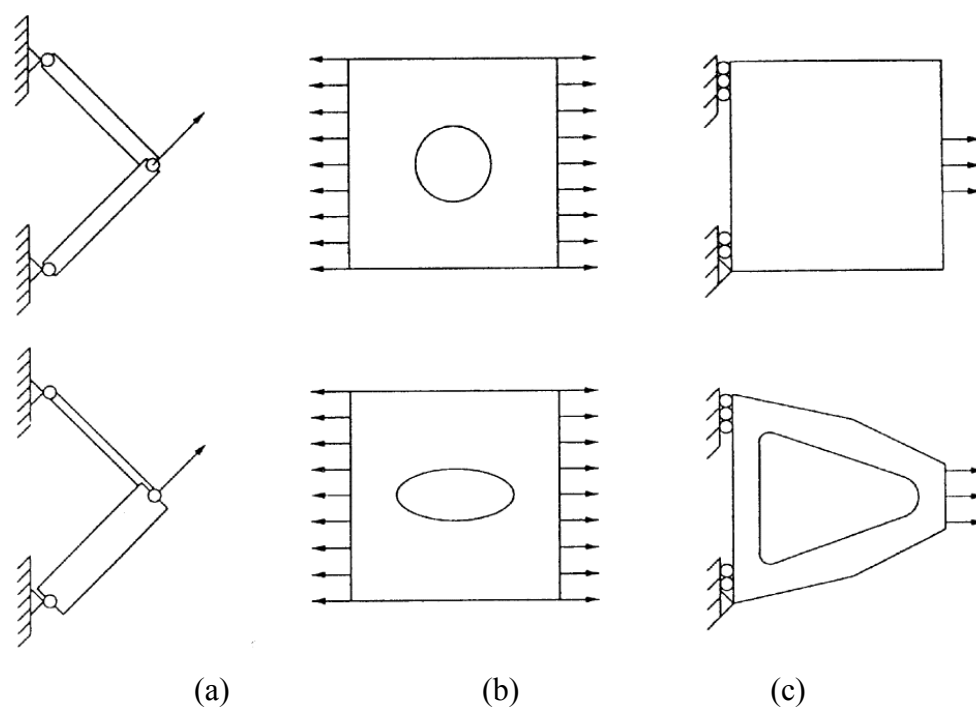


Figura 3.3 – Tipos de otimização: (a) Paramétrica; (b) Forma; (c) Topológica.

Já otimização de forma demanda uma grande atenção de pesquisadores da área numérica devido à sua proximidade da configuração do projeto final [Annicchiarico e Cerrolaza, 2001]. O problema consiste em achar a melhor configuração de uma estrutura a qual melhore seu comportamento mecânico e extremize uma ou mais variáveis de projeto, como por exemplo o peso da peça ou concentrações de tensão. As variáveis de projeto mudam de acordo com o tipo de otimização utilizada e muitos autores clássicos como Zienkiewicz e Campbell [1973], entre outros, já definiram as coordenadas nodais do modelo de elementos finitos como a escolha natural para variáveis a serem otimizadas. Esta escolha resulta um grande número de variáveis de projeto, tem como resultado um contorno irregular e dificulta a manutenção de uma malha de elementos finitos adequada durante as iterações do processo de otimização. Os contornos irregulares são comumente obtidos na otimização de forma devido à dificuldade das funções de interpolação de representar os resultados com a mesma homogeneidade nos extremos e na parte central dos elementos (Figura 3.4). Este problema pode ser minimizado com o uso de procedimentos de suavização dos resultados nas regiões otimizadas. A utilização do MEC em substituição ao MEF minimiza sobremaneira o problema de remalhamento, já que dispensa o uso de malhas internas.

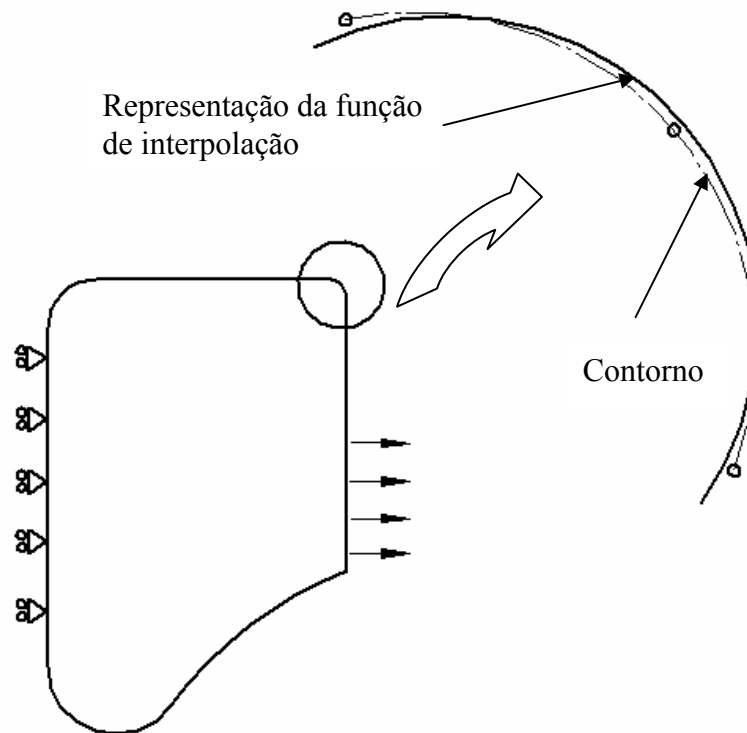


Figura 3.4 – Representação do contorno pela função de interpolação.

Considerando-se todos os aspectos presentes e a fim de produzir uma ferramenta de otimização de forma eficiente e confiável devem ser observados três requisitos importantes. Primeiro: um sistema de representação geométrica capaz de lidar com a geometria em constante mudança durante o processo de otimização [Kumar et al., 1989]; [Finnigan et al., 1989]. Segundo: uma técnica de análise estrutural adequada às mudanças no contorno, que permita um fácil remalhamento e possua resultados precisos de deslocamentos e tensões no contorno [Parviziane e Fenner, 1997]. Terceiro: uma técnica robusta de otimização que alcance a solução ótima ou quase-ótima. No caso da otimização estrutural, o MEC apresenta uma excelente alternativa (ao MEF por exemplo) se enquadrando muito bem no segundo requisito acima, pois como a mudança da geometria se dá apenas no contorno existente, o método é particularmente atrativo para este tipo de otimização. A Figura 3.5 ilustra um exemplo no qual o MEC se torna mais atrativo que o MEF. Este caso enfatiza dois importantes fatores: o modelo do MEC possui muito menos graus de liberdade para o mesmo problema e isto significa em menor custo computacional; o MEF possui uma limitação a grandes alterações da geometria pois a sua malha começa a ter elementos demasiadamente distorcidos. No exemplo da Figura 3.5 a etapa (c) do MEF possui elementos grandes e distorcidos em uma região da peça e elementos muito pequenos em outra região. A maior desvantagem do MEC com relação ao MEF é possuir as matrizes do

seu sistema cheias e assimétricas, não possibilitando o uso de técnicas de armazenamento mais eficientes.

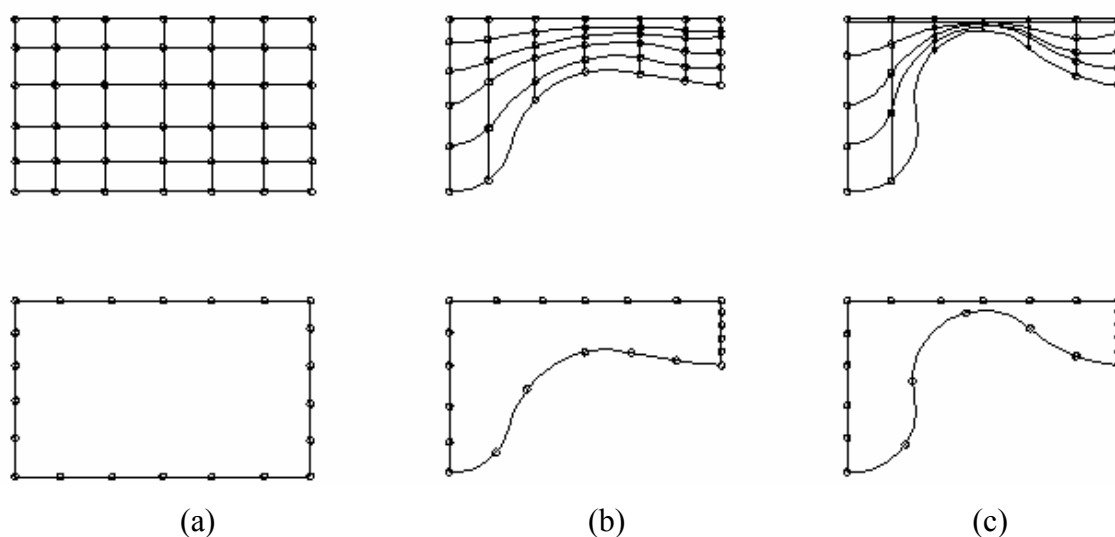


Figura 3.5 – Comparação do processo de otimização usando MEC e MEF.

Dentro deste contexto, é válido citar o trabalho de Shi e Mukherjee [1999] no qual uma metodologia de otimização de forma é implementada na solução de problemas tridimensionais. Aplicações de otimização da forma da interface de implantes dentários para homogeneização de tensões utilizando o MEC podem ser encontrada no trabalho de Choi et al [2001]. Choi e Kwak [1990] desenvolveram um trabalho em otimização de forma com elementos de contorno utilizando uma diferenciação analítica. Otimização de forma utilizando algoritmos genéticos é tratada no trabalho de Zhang et al [2005]. Grande parte dos trabalhos desenvolvidos em otimização de forma empregam o MEC como alternativa ao MEF, como pode ser visto nos trabalhos citados.

3.4.2. Métodos de otimização de forma

As opções de abordagem de otimização de forma encontradas na literatura são várias independentemente do método de análise estrutural empregado (MEC, MEF, etc). Tendo definido otimização de forma como mudança de posição de um número de pontos do contorno, as coordenadas destes são as candidatas naturais a variáveis de projeto. Uma vez estipulada uma função objetivo, o método de otimização determinará a maneira pela qual se obtém a sensibilidade do domínio à mudança de forma. Sensibilidade é entendida como sendo a avaliação da derivada da função custo do problema com relação à variável de projeto [Hafka, 1990].

Os métodos de obtenção da sensibilidade podem ser divididos em vários grupos. A primeira divisão que deve ser feita é entre a diferenciação da função custo antes e depois da discretização do problema. Os casos em que se obtém a sensibilidade antes da discretização são denominados de “abordagem contínua”. Dentro desse primeiro grupo, o método de variável adjunta é empregado derivando expressões analíticas e, posteriormente, essas expressões para sensibilidade são calculadas numericamente utilizando um método numérico adequado. Estas expressões analíticas possuem a forma de integrais no contorno com integrandos que dependem das variáveis de estado do problema primário e do problema adjunto [Burczynki et al, 1997]. Este método foi utilizado em otimização estrutural estática, vibrações e problemas térmicos empregando elementos de contorno (por exemplo, Aithal e Saigal, [1995]).

O segundo grupo é composto por métodos que se baseiam na diferenciação das equações algébricas discretizadas. O primeiro método deste grupo é baseado em diferenças finitas, onde a análise é feita em um modelo perturbado e num modelo não perturbado, e a diferença entre os resultados é dividida pelo valor da perturbação para se obter a sensibilidade desejada. Esta é uma abordagem bem geral e fácil de ser implementada, mas muito propensa a erros já que o sistema é altamente não linear e um valor de perturbação adequado nem sempre é facilmente encontrado [Zhao e Lie, 2000]. Como este método envolve a diferença entre duas funções, o resultado depende fortemente da magnitude da perturbação utilizada. O segundo método é o da diferenciação implícita, onde as equações matriciais governantes do MEC ou MEF são derivadas implicitamente a fim de obter a sensibilidade. Este método é considerado o mais preciso, mas também o mais complexo devido à necessidade de se calcular as derivadas analíticas das equações matriciais envolvidas [Burczynki et al, 1997]. O terceiro método é o semi-analítico, que se situa entre as duas citadas anteriormente, e utiliza tanto a diferenciação analítica quanto diferenças finitas na formulação da sensibilidade [Tai e Fenner, 1996].

Um quarto método é o proposto neste trabalho. O método de diferenciação por variável complexa [Lyness e Moler, 1967] possui propriedades interessantes que podem ser usadas no cálculo de sensibilidade utilizando MEC. Esta é justamente a maior contribuição do presente trabalho. Este método é de implementação (ou adaptação) muito fácil quando o código existente suporta álgebra com números complexos. O fato da derivada de uma função ser obtida apenas com a avaliação desta função num espaço complexo faz com que o método seja bastante eficiente do ponto de vista computacional. O método é pouco sensível à variação do tamanho da perturbação utilizada, o que traz uma grande vantagem quando comparado com métodos como diferenças finitas.

4. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1. Revisão do MEC

O MEC vem se consolidando como alternativa a outros métodos numéricos devido a sua grande precisão, facilidade de geração de malha e remalhamento, facilitando análises de concentração de tensões e domínios infinitos. Esta seção apresenta uma breve revisão do MEC com vistas ao cálculo de sensibilidade por variável complexa no método.

Tradicionalmente, parte-se da identidade de Somigliana para descrever as equações de contorno que desejamos, considerando um corpo definido por $\Omega + \Gamma$ (domínio e contorno respectivamente, Figura 4.1) [Brebbia e Dominguez, 1992].

$$u_l^i(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{y}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_k(\mathbf{y}) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) b_k(\mathbf{Y}) d\Omega \quad (29)$$

onde os tensores p_{lk}^* e u_{lk}^* são as chamadas soluções fundamentais do problema para tração e deslocamento respectivamente (Apêndice I). Estas são soluções de problemas elásticos de domínios infinitos com uma carga unitária pontual aplicada. Define-se como ponto fonte (x_i) o local de aplicação da carga e como ponto campo (y_i) o local onde se calcula os deslocamento e as trações (Figura 4.1).

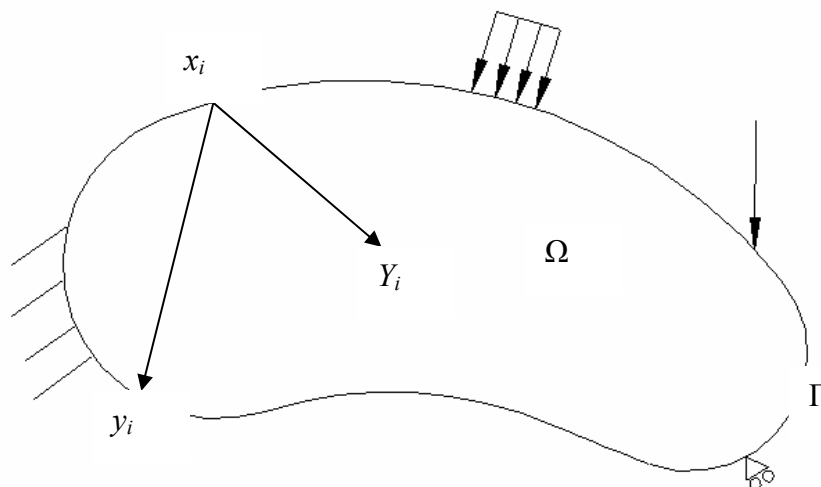


Figura 4.1 – Corpo definido por $\Omega + \Gamma$.

A identidade de Somigliana fornece os deslocamentos em qualquer ponto interno desde que as trações e deslocamentos no contorno sejam conhecidos. Como a identidade vale para qualquer ponto do corpo, essa expressão deve ser levada toda para o contorno através de um processo de limite [Brebbia e Dominguez, 1992] resultando:

$$c_{lk}^i u_k^i(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{y}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_k(\mathbf{y}) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) b_k(\mathbf{Y}) d\Omega \quad (30)$$

onde $c_{lk}^i = \frac{1}{2} \delta_{lk}$ quando o contorno em i for suave.

A Equação (30) é a forma integral do Problema de Valores no Contorno (PVC) associado. Conhecendo-se as condições de contorno do problema:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \text{sobre } \Gamma_u \\ t &= \bar{t} \quad \text{sobre } \Gamma_t \end{aligned} \quad (31)$$

onde $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_t = 0$, indicando que uma das condições de contorno da Equação (30) deve ser conhecida sobre Γ . A Equação (30) nos fornece os deslocamentos ou trações no contorno da peça desde que uma das variáveis seja conhecida.

Rearranjando p_{lk}^* e u_{lk}^* na forma matricial:

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad (32)$$

e os deslocamentos, trações e forças de corpo:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

A Equação (30) pode então ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{c} \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \mathbf{b}(\mathbf{Y}) d\Omega \quad (34)$$

Como é tradicional no MEC, o contorno Γ é dividido em N elementos de contorno que terão nos seus nós as incógnitas de tração ou deslocamento. Estes são os pontos onde deve-se calcular as variáveis remanescentes.

Os valores de \mathbf{u} e \mathbf{p} de cada elemento podem ser aproximados usando funções de interpolação Lagrangeanas usuais Φ [Brebbia e Dominguez, 1992].

$$\mathbf{u} = \Phi^T \mathbf{u}^i \quad (35)$$

$$\mathbf{p} = \Phi^T \mathbf{p}^i \quad (36)$$

Substituindo as expressões (35) e (36) na Equação (34) e desconsiderando as forças de corpo ($b=0$) obtém-se a forma discretizada da Equação (34):

$$\mathbf{c} \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi^T d\Gamma \right) \mathbf{u}^i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi^T d\Gamma \right) \mathbf{p}^i(\mathbf{y}) \quad (37)$$

onde a soma de $j = 1$ até N indica a superposição das contribuições dos N elementos do contorno e Γ_j é a parcela de Γ correspondente do elemento j .

As funções Φ são expressas em um sistema de coordenadas normalizado $\xi=[-1,1]$ (Figura 4.2). Assim, as integrais na Equação (37) precisam ser escritas em termos do sistema normalizado e deve-se fazer a transformação de coordenadas:

$$d\Gamma = |\mathbf{G}| d\xi \quad (38)$$

onde $|\mathbf{G}|$ é o Jacobiano de transformação $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$.

O Jacobiano é escrito como:

$$|\mathbf{G}| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (39)$$

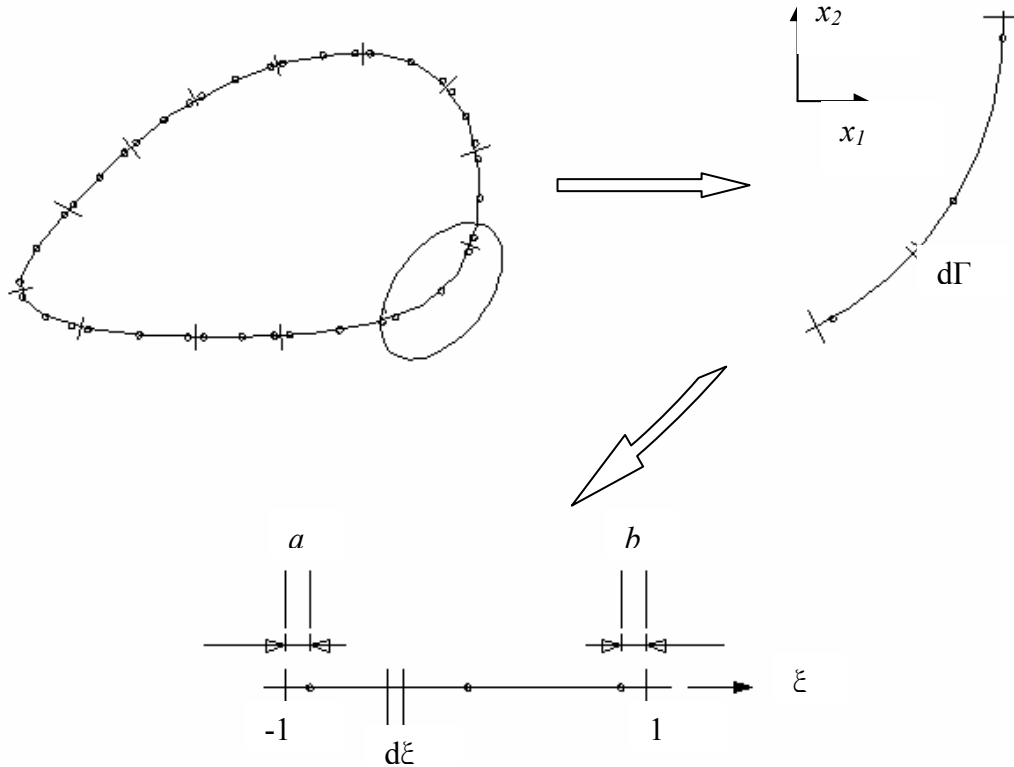


Figura 4.2 – Transformação do sistema de coordenadas.

Para integrar a Equação (37) um esquema numérico é normalmente empregado. Assim a Equação (37) é escrita como:

$$c \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{l=1}^L |\mathbf{G}|_l w_l (\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi))_l \right) \mathbf{u}^i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{l=1}^L |\mathbf{G}|_l w_l (\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi))_l \right) \mathbf{p}^i(\mathbf{y}) \quad (40)$$

onde w_l é o coeficiente-peso da integração numérica; L é o número de pontos de integração.

A tradicional quadratura de Gauss [Stroud e Secrest, 1966] é normalmente empregada no esquema de integração. Porém, quando o ponto a ser calculado está muito próximo ao ponto fonte, as integrais possuem uma singularidade que deve ser analisada a parte. Quando o elemento a ser integrado contiver o ponto fonte, uma técnica de integração diferente deve ser utilizada pois a quadratura de Gauss não apresenta resultados satisfatórios para estas integrais singulares. O nível de singularidade varia com a solução fundamental utilizada. A solução fundamental de deslocamento (\mathbf{u}^*) é fracamente singular e neste trabalho foi integrada utilizando a técnica proposta por Telles [1987]. Já a solução fundamental para tração (\mathbf{p}^*) é fortemente singular e a técnica de movimento de corpo rígido descrito por Brebbia e Dominguez [1992] foi utilizada.

Deve-se fazer a integração de todos os elementos para cada ponto fonte de colocação. A Equação (40) gera uma equação para cada nó i que é escrita como:

$$c_i \mathbf{u}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{i1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) & \mathbf{h}_{i2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) & \cdots & \mathbf{h}_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) & \cdots & \mathbf{h}_{ir}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{i1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) & \mathbf{g}_{i2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) & \cdots & \mathbf{g}_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) & \cdots & \mathbf{g}_{ir}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} \quad (41)$$

onde \mathbf{u}_j e \mathbf{p}_j devem ser determinados nos nós j . \mathbf{h}_{ij} e \mathbf{g}_{ij} são os coeficientes de influência relacionando o nó de colocação i aos demais nós de Γ . Faz-se a colocação em todos os pontos nodais de Γ e integra-se todos os elementos para cada ponto e escrevendo a Equação (41) para todos os nós tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} & \cdots & \mathbf{h}_{1i} & \cdots & \mathbf{h}_{1r} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \cdots & \mathbf{h}_{2i} & \cdots & \mathbf{h}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{h}_{i1} & \mathbf{h}_{i2} & & \mathbf{h}_{ii} & & \mathbf{h}_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{h}_{r1} & \mathbf{h}_{r2} & & \mathbf{h}_{ri} & & \mathbf{h}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \cdots & \mathbf{g}_{1i} & \cdots & \mathbf{g}_{1r} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \cdots & \mathbf{g}_{2i} & \cdots & \mathbf{g}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{g}_{i1} & \mathbf{g}_{i2} & & \mathbf{g}_{ii} & & \mathbf{g}_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{g}_{r1} & \mathbf{g}_{r2} & & \mathbf{g}_{ri} & & \mathbf{g}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} \quad (42)$$

ou

$$\mathbf{HU} = \mathbf{GP} \quad (43)$$

Aplicando-se as condições de contorno na Equação (43), pode-se descobrir as trações onde os deslocamentos são conhecidos e vice-versa. Isso implica que o sistema de equações pode ser reordenado de forma que todas as variáveis desconhecidas fiquem do lado esquerdo da equação no vetor \mathbf{Y} .

$$AY = F \quad (44)$$

A desvantagem do MEC em relação ao MEF (por exemplo) encontra-se nesse ponto. A matriz A da Equação (44) é tipicamente densa e não simétrica, não possibilitando a utilização de esquemas de armazenamento e solução mais sofisticados e eficientes. Deve ser citado também que esta matriz envolve termos de grandezas diferentes e acaba sendo mal-condicionada.

4.2. Cálculo de tensões em pontos internos

A identidade de Somigliana (Equação 29) fornece os deslocamentos em qualquer ponto interno do corpo em consideração ($y \in \Omega$). Conseqüentemente, pode-se obter as tensões derivando a identidade de Somigliana em relação às coordenadas (x) para obter-se o tensor de deformação e então substituir na lei de Hooke. Obtém-se então [Brebbia et al, 1984]:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_k(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_k(\mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{y}) \quad (45)$$

Os tensores u_{ijk}^* e p_{ijk}^* das soluções fundamentais de Kelvin são descritos por Brebbia et al [1984].

4.3. Cálculo de tensões sobre contorno

De posse dos deslocamentos e trações no contorno, pode-se obter as tensões resultantes no contorno da peça. O sistema da Equação (44) fornece as trações e os deslocamentos no sistema global de coordenadas (x_1, x_2). Um esquema com os sistemas de coordenadas pode ser visto na Figura 4.3.

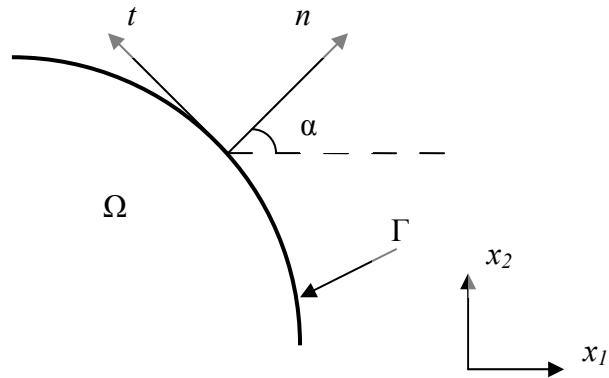


Figura 4.3 – Sistemas de coordenadas no contorno.

A componente normal (σ_{nn}) e a cisalhante (σ_{nt}) das tensões sobre contorno são iguais às trações no contorno no sistema local (t_n, t_t) [Aliabadi, 1991].

$$\sigma_{nn} = t_n \quad , \quad \sigma_{nt} = t_t \quad (46)$$

As trações no sistema local podem ser obtidas multiplicando as trações no sistema global pela matriz de rotação R .

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (47)$$

Isto é:

$$\begin{bmatrix} t_n \\ t_t \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} t_{x_1} \\ t_{x_2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

onde α é o ângulo entre o sistema de coordenada global e o local (Figura 4.3).

A componente tangencial de tensão pode ser obtida da lei de Hooke para estado plano de deformação.

$$\sigma_{tt} = \frac{1}{1-\nu} [\nu t_n + 2\mu \varepsilon_{tt}] \quad (49)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, μ é o módulo de elasticidade transversal e ε_{tt} é a deformação tangencial no sistema de coordenadas local. A componente tangencial para estado plano de tensão é aproximada pela Equação (49) mas com as constantes de Lamé ajustadas conforme seção (2.2).

Usando a forma interpolatória da Equação (7), a deformação tangencial é então aproximada por:

$$\varepsilon_{tt} = \frac{\partial u_t}{\partial x_2} = \frac{du_t}{d\xi} \frac{d\xi}{\partial x_2} \quad (50)$$

O elemento utilizado neste trabalho é descontínuo. Isso implica que os nós físicos e os nós geométricos dos extremos do elemento não estão necessariamente no mesmo lugar (Figura 4.4). Conseqüentemente, o termo $\frac{du_t}{d\xi}$ será a derivada das funções de interpolação físicas, que podem ser obtidas multiplicando a matriz das funções de interpolação geométricas pela matriz de correção para nós deslocados. O termo $\frac{d\xi}{dx_2}$ é obtido através do Jacobiano:

$$\frac{d\xi}{dx_2} = \frac{1}{G} \quad (51)$$

A utilização de elementos descontínuos resolve o problema de cantos vivos, onde se tem duas normais em um mesmo ponto (Figura 4.5 (a)). Existem outras possíveis soluções para a modelagem de cantos vivos no MEC. Uma delas é utilizar um pequeno elemento no canto vivo para fazer a transição entre as normais (Figura 4.5 (b)). Mas o fato de se ter elementos com tamanhos muito diferentes não é interessante em uma discretização por implicar em erros na integração. Outra solução é a utilização de um nó duplo nos elementos dos cantos vivos (Figura 4.5 (c)). Esta é uma técnica pouco geral, complexa de ser implementada e propensa a erros de integração.

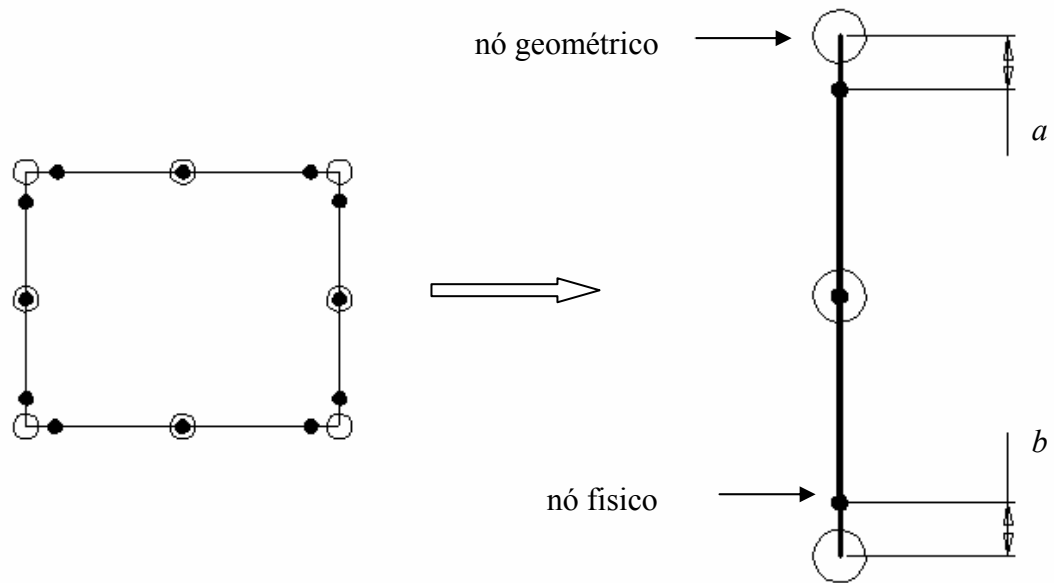


Figura 4.4 – Detalhe dos nós geométricos e físicos do elemento descontínuo.

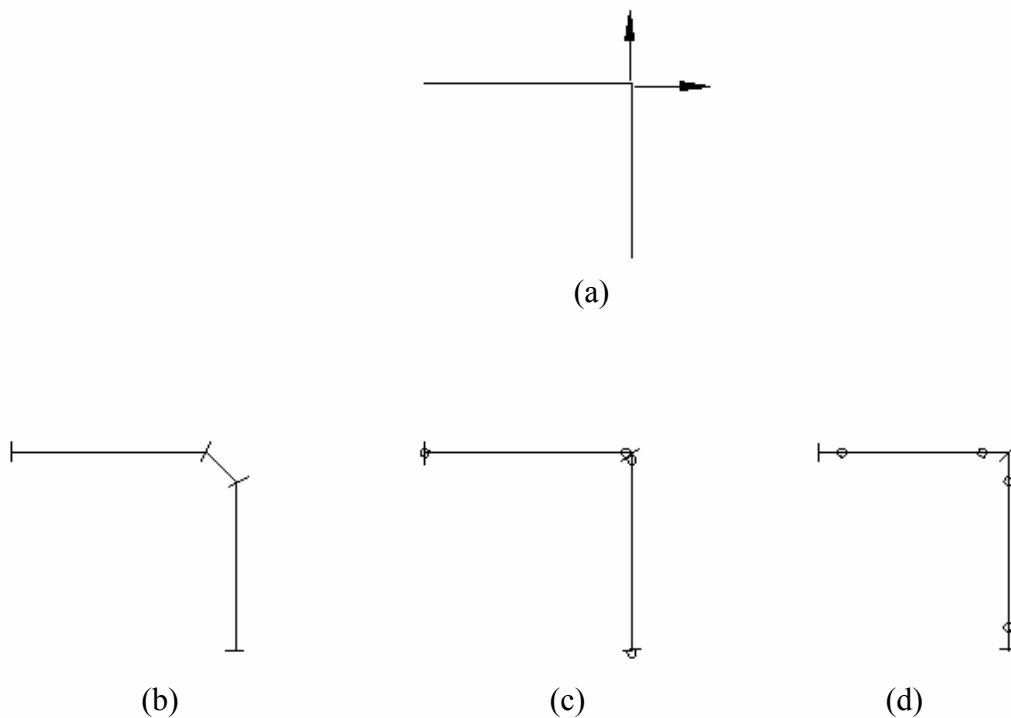


Figura 4.5 – (a) Normais de um canto, Soluções para canto vivo no MEC: (b) elemento de transição, (c) nó duplo, (d) elemento descontínuo.

A solução utilizada nesse trabalho é o elemento descontínuo (Figura 4.5 (d)). Mas essa solução faz com que as funções de interpolação utilizadas para os nós geométricos necessitem de

uma correção para que sejam válidas para os nós físicos. Ou seja, o elemento quadrático descontínuo é formado por três nós físicos e três nós geométricos (Figura 4.6). Os nós físicos e geométricos centrais serão sempre coincidentes, mas os nós dos extremos podem estar em posições diferentes, sendo que as distâncias entre os nós físicos e geométricos são representadas por a e b (Figura 4.4). O elemento linear possui as mesmas características mas apenas sem os nós centrais dos elementos.

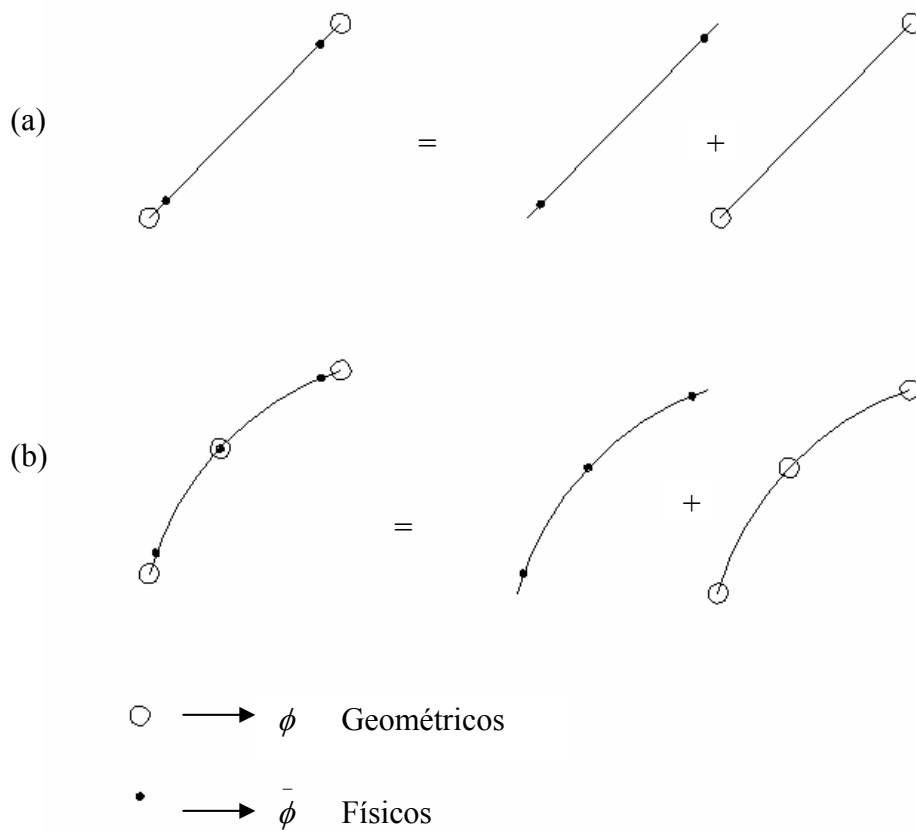


Figura 4.6 - Nós físicos e geométricos para elemento (a) linear e (b) quadrático.

4.3.1. Elemento linear

As funções de interpolação lineares geométrica são:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi \quad (52)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi \quad (53)$$

Deve-se montar uma matriz que corrija a posição dos nós físicos [Brebbia et al, 1984]. Pode-se escrever a matriz de correção para os nós deslocados do elemento descontínuo como:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2-b}{2-a-b} & 0 & -\frac{a}{2-a-b} & 0 \\ 0 & \frac{2-b}{2-a-b} & 0 & -\frac{a}{2-a-b} \\ -\frac{b}{2-a-b} & 0 & \frac{2-a}{2-a-b} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2-a-b} & 0 & \frac{2-a}{2-a-b} \end{bmatrix} \quad (54)$$

onde a e b são as distâncias que os nós estão deslocados das extremidades do elemento como ilustrado na Figura 4.4. Para fazer a multiplicação das funções de interpolação pelas correções para os nós deslocados monta-se a matriz ϕ :

$$\phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Multiplicando ϕ por Q e diferenciando o resultado em relação a ξ tem-se:

$$\bar{\phi} = \phi Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2+a+b} & 0 & \frac{1}{2+a+b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2+a+b} & 0 & \frac{1}{2+a+b} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Logo, o termo $\frac{du_2}{d\xi}$ pode ser escrito, para este elemento:

$$\frac{du_2}{d\xi} = -\frac{1}{2+a+b}u_2^1 + \frac{1}{2+a+b}u_2^2 \quad (57)$$

De posse dessa expressão, podemos calcular σ_n da Equação (49). As tensões no sistema global são obtidas utilizando a matriz de rotação:

$$[\sigma_G] = [R]^T [\sigma_L] [R] \quad (58)$$

4.3.2. Elemento quadrático

As funções de interpolação utilizadas para o elemento quadrático são:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (59)$$

$$\varphi_2 = (1 - \xi^2) \quad (60)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (61)$$

Que são arranjadas em uma matriz ϕ :

$$\phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (62)$$

A matriz de correção para os nós deslocados do elemento quadrático faz com que as funções de interpolação dos nós geométricos sejam válidas para os nós físicos, e é escrita como:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{b-1}{2+a^2-b+ab-3a} & 0 & 1 & 0 & \frac{a-1}{2+b^2-a+ab-3b} & 0 \\ 0 & \frac{b-1}{2+a^2-b+ab-3a} & 0 & 1 & 0 & \frac{a-1}{2+b^2-a+ab-3b} \\ \frac{b-1}{2+a^2-b+ab-3a} & 0 & 1 & 0 & \frac{a-1}{2+b^2-a+ab-3b} & 0 \\ 0 & \frac{b-1}{2+a^2-b+ab-3a} & 0 & 1 & 0 & \frac{a-1}{2+b^2-a+ab-3b} \\ \frac{b-1}{2+a^2-b+ab-3a} & 0 & 1 & 0 & \frac{a-1}{2+b^2-a+ab-3b} & 0 \\ 0 & \frac{b-1}{2+a^2-b+ab-3a} & 0 & 1 & 0 & \frac{a-1}{2+b^2-a+ab-3b} \end{bmatrix} \quad (63)$$

Aplicando-se um procedimento semelhante ao utilizado para elemento linear, ou seja, multiplicando ϕ por Q e diferenciando o resultado em relação a ξ , chega-se a uma expressão para o termo $\frac{du_2}{d\xi}$ para elemento quadrático:

$$\frac{du_2}{d\xi} = \frac{2\xi - 1 + b}{2 + a^2 - b + ab - 3a} u_2^1 + \frac{-2\xi - b + a}{-a + ab + 1 - b} u_2^2 - \frac{2\xi - 1 + a}{2 + b^2 - a + ab - 3b} u_2^3 \quad (64)$$

4.4. Avaliação do cálculo de tensão no contorno

Foram resolvidos alguns casos encontrados na literatura para avaliar o procedimento de cálculo de tensões sobre o contorno descrito (seção 4.3) com elementos lineares e quadráticos. Os casos foram analisados em função de deformação (necessária no cálculo de tensão) e tensão equivalente de von Mises [Popov, 1978]. As dimensões, propriedades dos materiais e outras quantidades então indicadas sem unidades, assim podem assumir qualquer sistema de unidades compatível. As propriedades empregadas são $E = 210000$ e $\nu = 0.3$ para todos os casos.

4.4.1. Placa com furo circular

Uma placa com um furo circular no centro foi analisada por possuir solução analítica para o resultado de concentração de tensão. O caso foi analisado com um modelo completo e com um modelo aproveitando a simetria do problema (modelando apenas um quadrante). Para cada um deles foram utilizados elementos lineares e quadráticos. O fator de concentração de tensão esperado para placas infinitas é igual a três no ponto B e a um no ponto A (Figura 4.7).

4.4.1.1. Placa modelada com simetria

A Figura 4.7 mostra as dimensões do modelo gerado para um quadrante da placa, com condições de contorno empregadas.

O primeiro modelo foi gerado utilizando elementos lineares. Como o elemento utilizado é descontínuo, deve-se fazer uma extrapolação para o ponto em cima do arco, já que os nós físicos estão deslocados. A extrapolação linear é feita somente nos elementos e1 e e4. A Figura 4.8 representa os nós geométricos da região do arco da malha utilizada na análise.

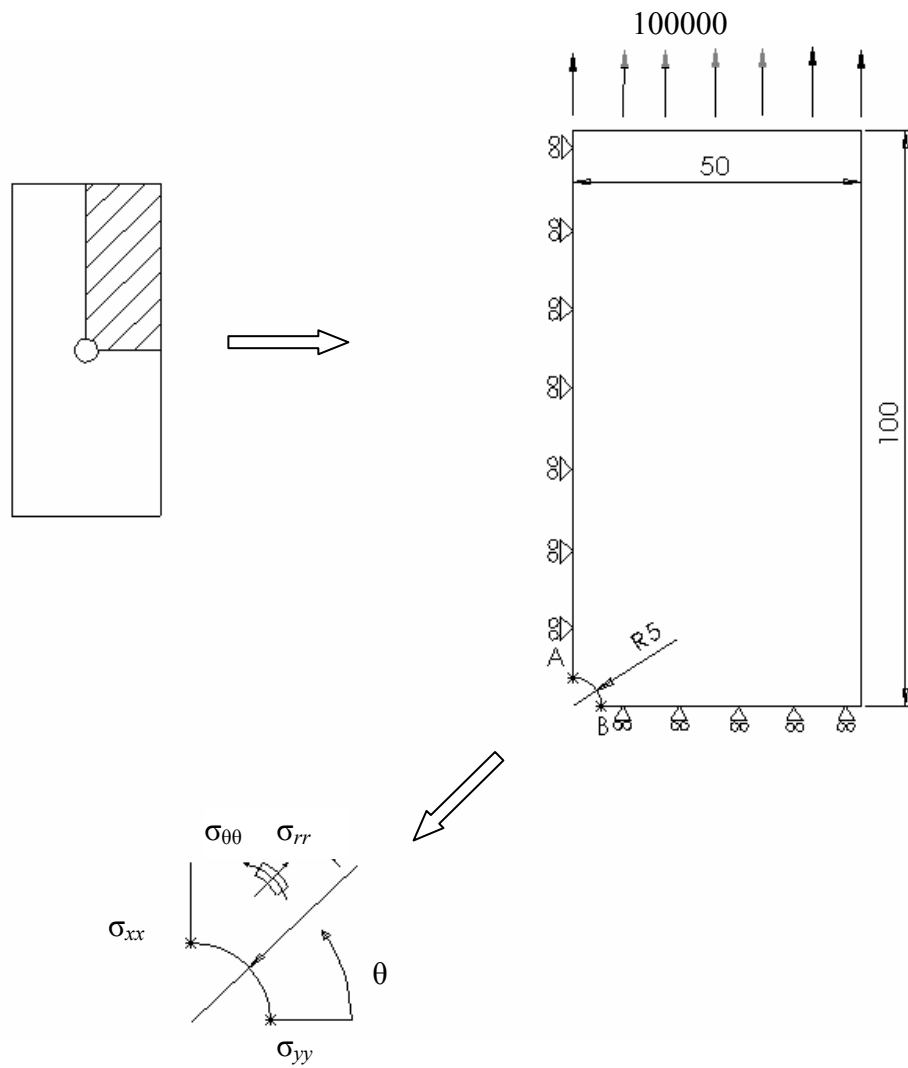


Figura 4.7 – Geometria e condições de contorno da placa.

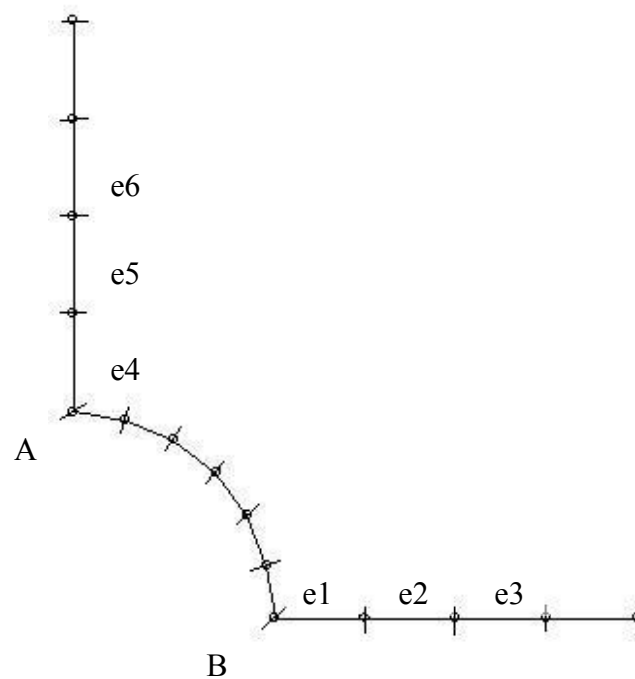


Figura 4.8 – Detalhe da malha utilizada para elementos lineares (nós geométricos).

Os gráficos representados na Figura 4.9 e Figura 4.10 mostram os valores de tensão normal obtidos para cada elemento.

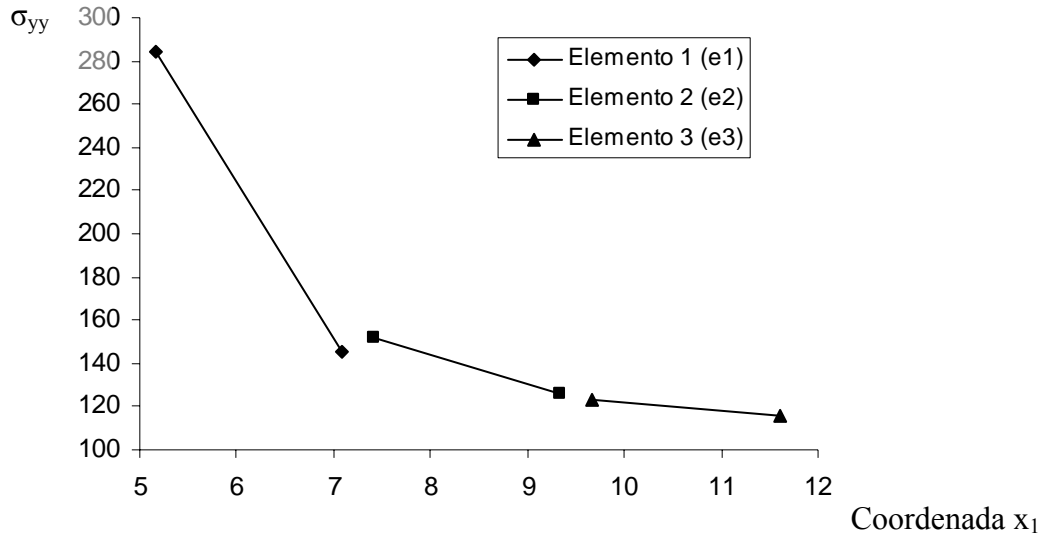


Figura 4.9 – Distribuição de tensão ao longo do furo – elementos lineares.

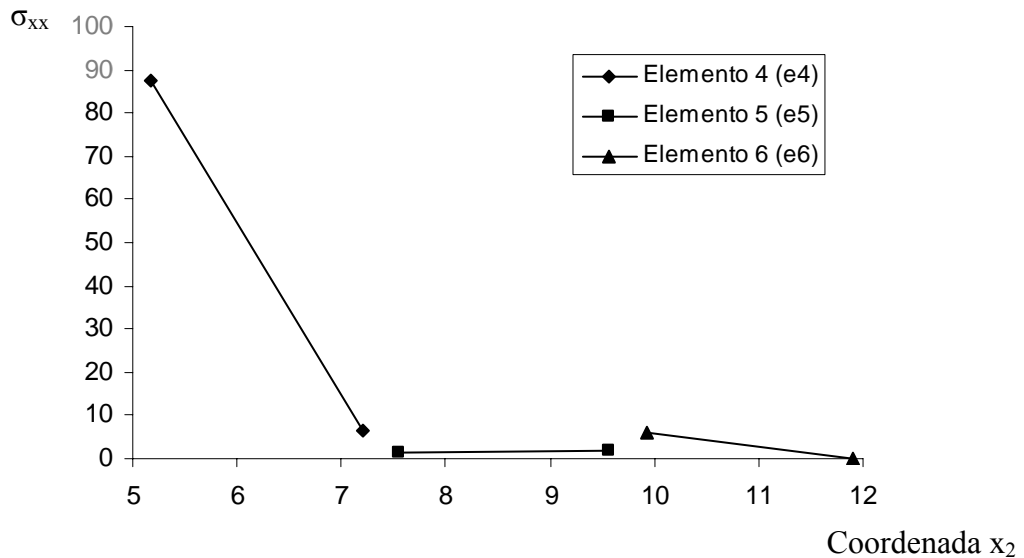


Figura 4.10 - Distribuição de tensão ao longo do furo – elementos lineares.

Este mesmo caso foi re-analisado com elementos quadráticos. A malha utilizada possui o mesmo número de elementos. A Figura 4.11 ilustra a malha de elementos de contorno utilizada com elementos quadráticos.

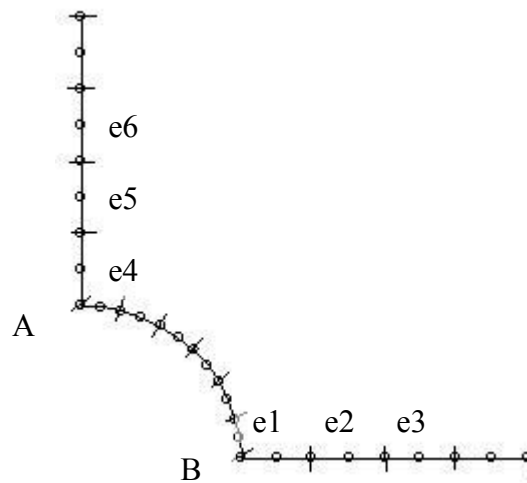


Figura 4.11 – Detalhe da malha utilizada para elementos quadráticos.

Os gráficos representados na Figura 4.12 e Figura 4.13 mostram os valores de tensão equivalente de von-Mises nos nós físicos dos elementos. Os valores da Tabela 4.1 são valores extrapolados para os nós geométricos, comparando os resultados analíticos com os resultados numéricos com elementos lineares e quadráticos no MEC e uma análise utilizando o MEF. O modelo de elementos finitos foi gerado com elementos triangulares quadráticos de seis nós, assim espera-se bons resultados na análise mesmo com a malha ilustrada (Figura 4.14).

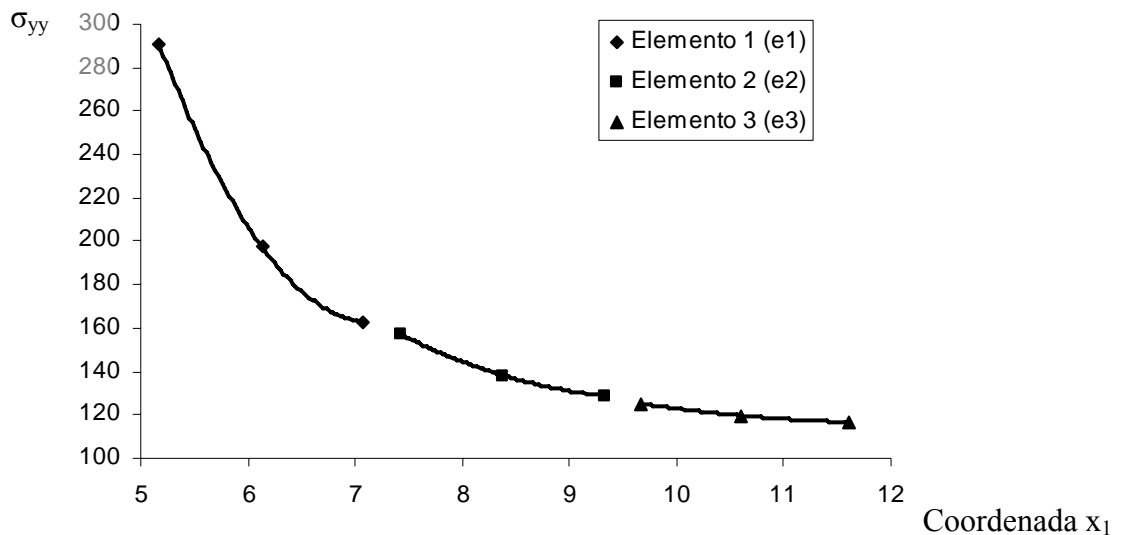


Figura 4.12 - Distribuição de tensão ao longo do furo – elementos quadráticos.

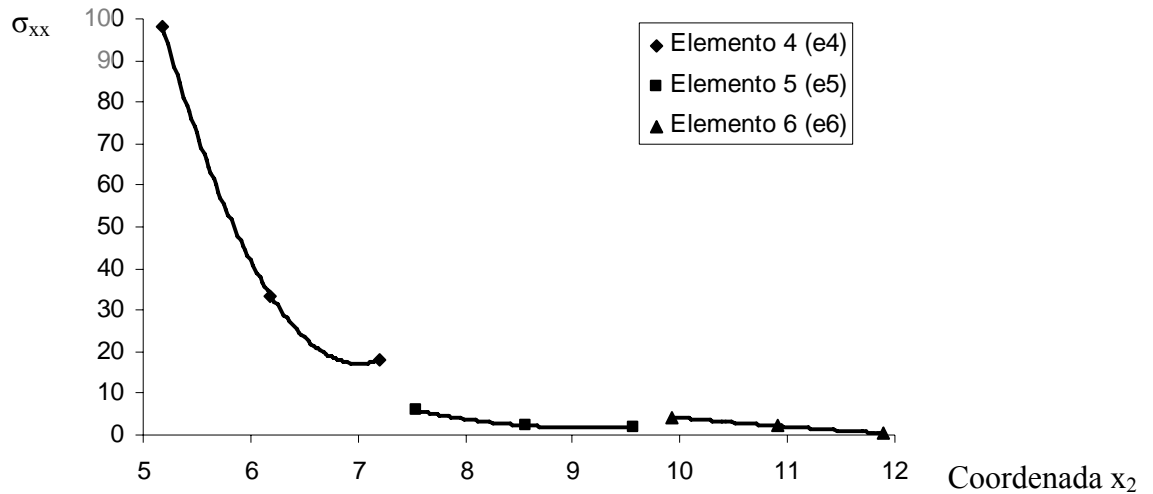


Figura 4.13 - Distribuição de tensão ao longo do furo – elementos quadráticos.

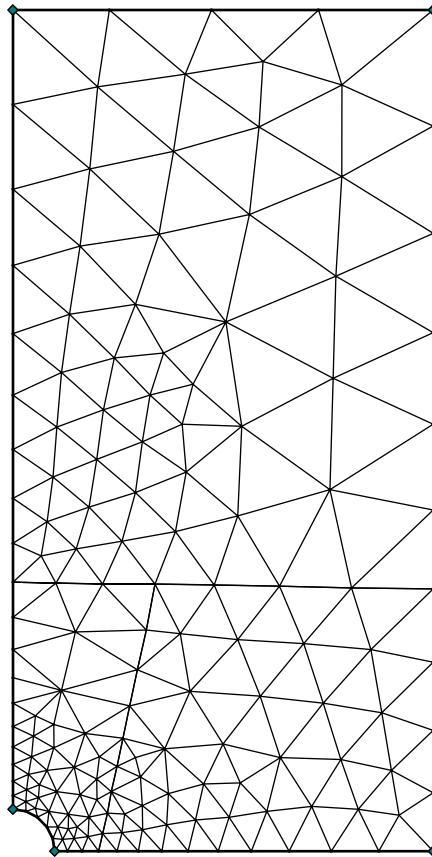


Figura 4.14 – Malha de elementos finitos da placa com furo circular.

	Resultado Analítico	Elemento Linear	Diferença (%)	Elemento Quadrático	Diferença (%)	MEF	Diferença (%)
Ponto A	$\sigma = -100$	$\sigma = -94.73$	5.27	$\sigma = -114.86$	14.86	$\sigma = -69.47$	30.53
Ponto B	$\sigma = 300$	$\sigma = 296.34$	1.22	$\sigma = 313.97$	4.65	$\sigma = 261.85$	12.71

Tabela 4.1 – Resultados de σ_{rr} para placa com furo circular com elementos lineares – modelo com simetria.

4.4.1.2. Modelagem sem auxílio da simetria

A placa com furo circular foi analisada também sem o auxílio da simetria do problema. Neste caso para obter os resultados são utilizados pontos internos do modelo os quais foram adicionados nas mesmas posições dos nós físicos no modelo com simetria. Espera-se maior precisão nos resultados com a utilização de pontos internos. A Figura 4.15 ilustra a geometria e as condições de contorno da placa com furo.

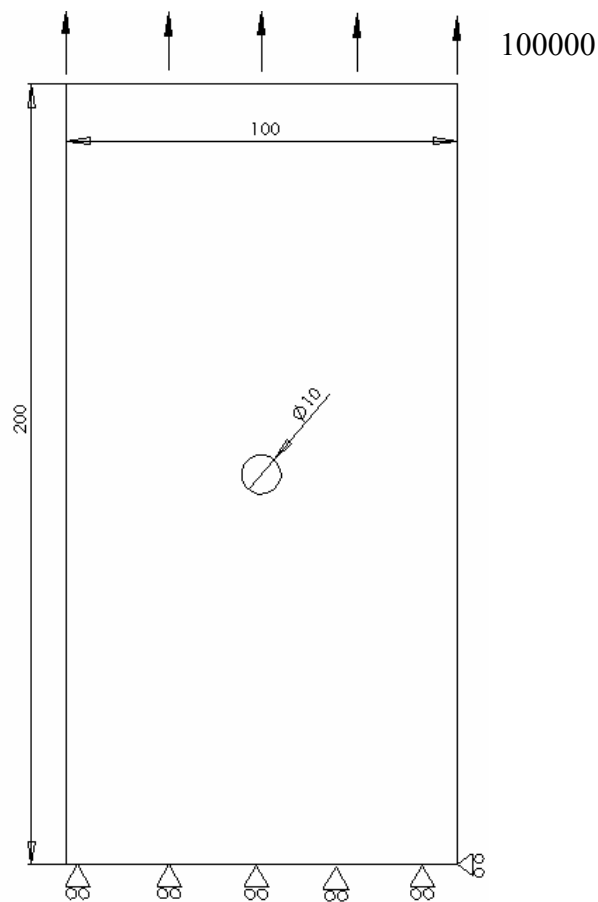


Figura 4.15 – Geometria e condições de contorno da placa com furo circular.

Este caso, assim como o anterior, foi analisado utilizando elementos lineares e quadráticos. Apesar de os pontos internos não possuírem uma relação entre si como os nós dos elementos, foi usado o mesmo tipo de extrapolação dos elementos lineares e quadráticos para uma comparação com o modelo com simetria.

Um primeiro modelo foi gerado utilizando elementos lineares. A posição e a numeração dos pontos internos do modelo estão ilustrados na Figura 4.16.

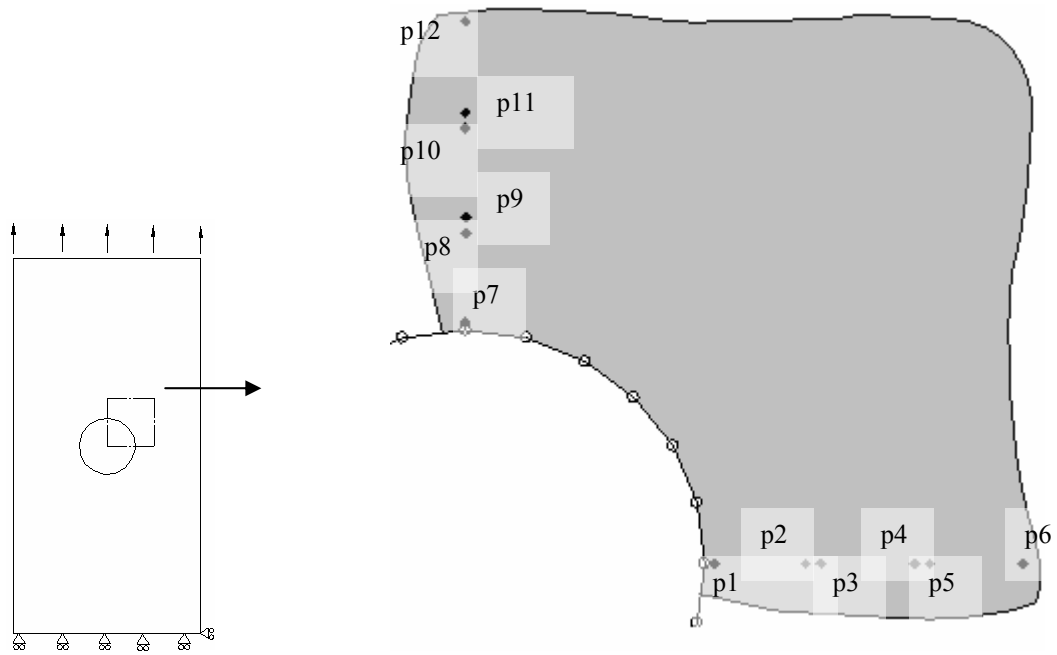


Figura 4.16 - Posição e numeração dos pontos internos – elemento linear.

A Figura 4.17 e a Figura 4.18 mostram os valores de tensão nos pontos internos do modelo.

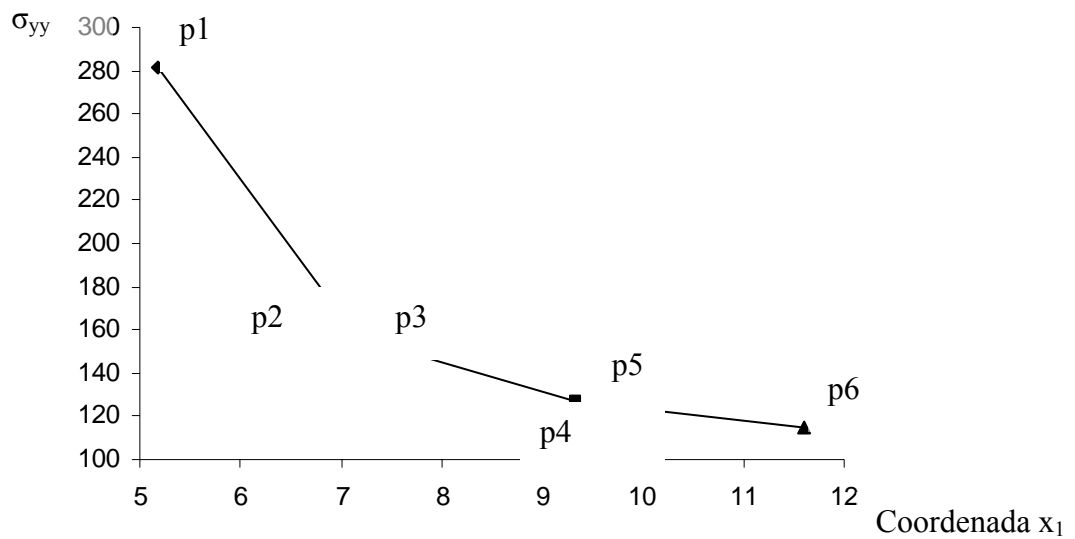


Figura 4.17 - Tensão nos pontos internos do modelo com elementos lineares da placa com furo – sem auxílio da simetria.

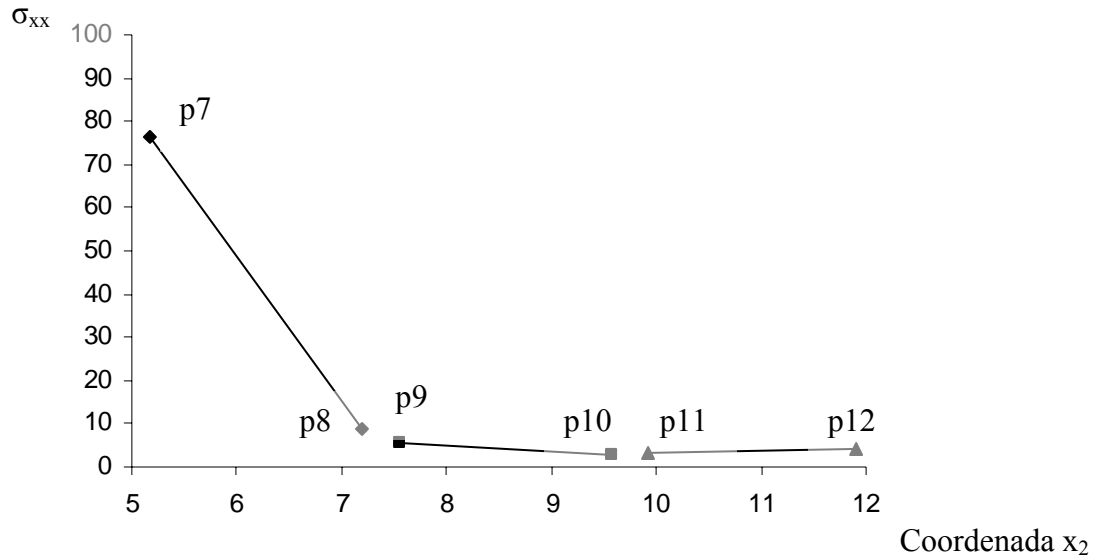


Figura 4.18 - Tensão nos pontos internos do modelo com elementos lineares da placa com furo – sem auxílio da simetria.

Um segundo modelo foi gerado utilizando elementos quadráticos. A posição e a numeração dos pontos internos do modelo podem ser vistos na Figura 4.19.

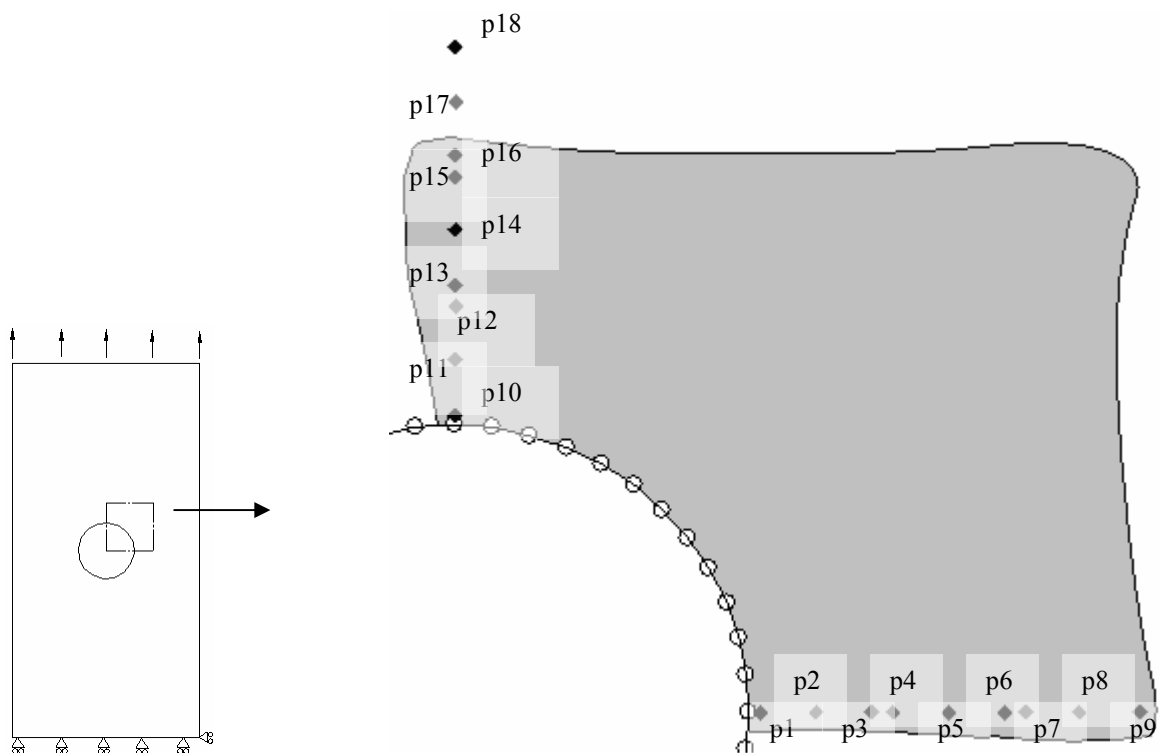


Figura 4.19 – Posição e numeração dos pontos internos – elemento quadrático.

A Figura 4.20 e a Figura 4.21 ilustram os valores obtidos nos pontos internos para tensão.

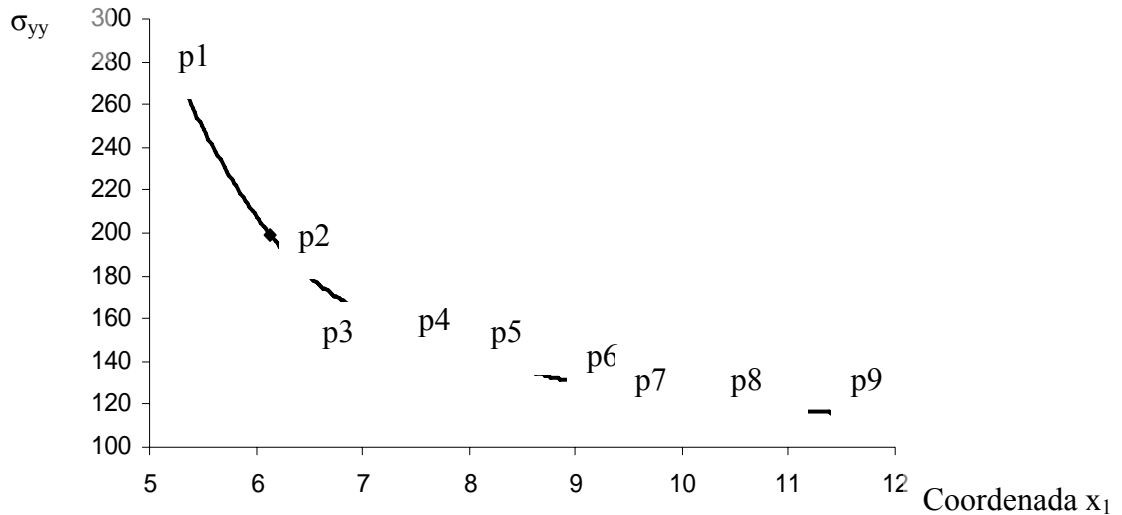


Figura 4.20 - Tensão nos pontos internos do modelo com elementos quadráticos da placa com furo – sem auxílio da simetria.

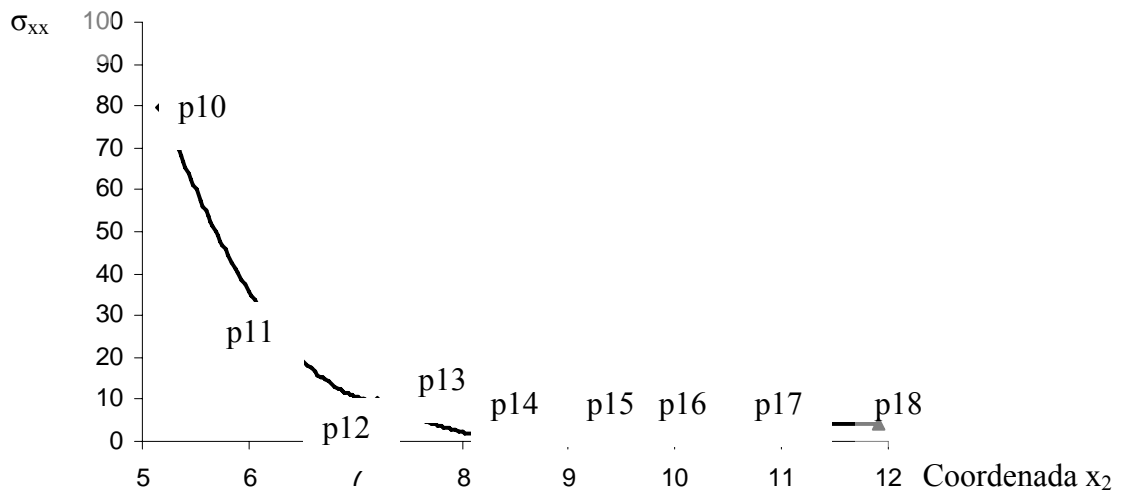


Figura 4.21 - Tensão nos pontos internos do modelo com elementos quadráticos da placa com furo – sem auxílio da simetria.

A Tabela 4.2 apresenta uma comparação dos resultados analíticos e numéricos para tensão na placa.

	Resultado Analítico	Elemento Linear	Diferença (%)	Elemento Quadrático	Diferença (%)	MEF	Diferença (%)
Ponto A	$\sigma = -100$	$\sigma = -82.24$	6.00	$\sigma = -92.083$	7.92	$\sigma = -69.47$	30.53
Ponto B	$\sigma = 300$	$\sigma = 291.87$	2.71	$\sigma = 303.072$	1.02	$\sigma = 261.85$	12.71

Tabela 4.2 - Resultados de σ_{rr} para placa com furo circular com elementos quadráticos – modelo sem simetria.

4.4.2. Barra com deslocamento prescrito na ponta

Com o intuito de testar o segmento que calcula deformação, o problema da barra com um deslocamento prescrito em uma das pontas e engastada na outra foi analisado. Para evitar efeitos indesejáveis de modelagem, gerou-se um modelo aproveitando a simetria com relação ao eixo x_1 , como pode ser visto na Figura 4.22, e apenas metade da barra foi modelada. Foram utilizados elementos quadráticos descontínuos.

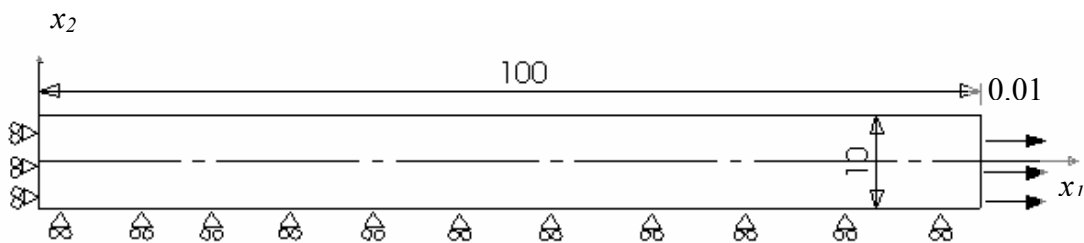


Figura 4.22 – Geometria e condições de contorno da barra.

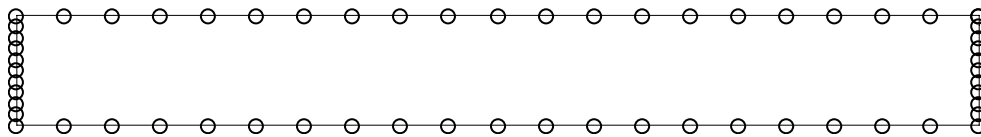


Figura 4.23 - Malha de elementos de contorno da viga.

Um deslocamento foi imposto em uma das extremidades e a deformação tangencial dos elementos foi obtida no mesmo ponto onde foi imposto o deslocamento. O resultado numérico foi comparado com o resultado analítico do problema considerando a teoria de barra [Shigley e Mischke, 2001] e não houve diferença entre os valores encontrados.

O gráfico da Figura 4.24 mostra os valores de deslocamento e deformação ao longo da barra.

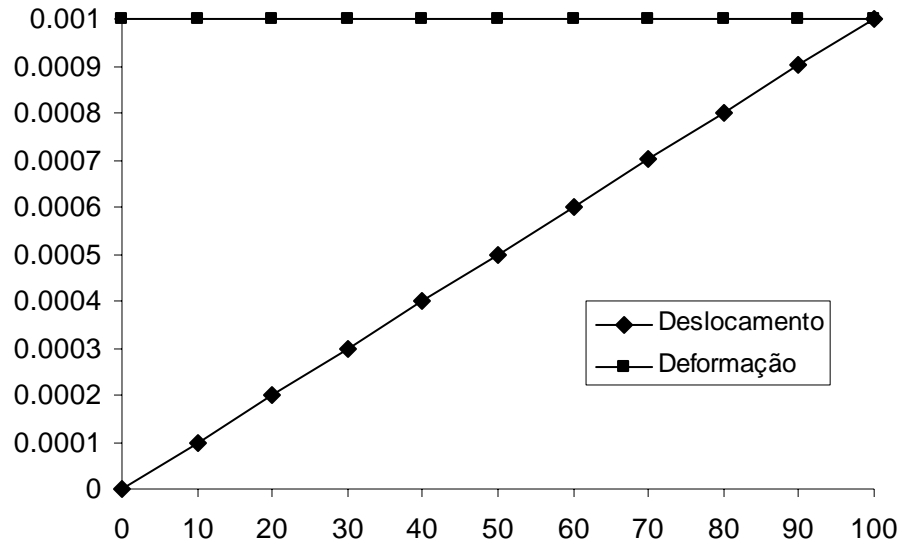


Figura 4.24 - Deslocamento e deformação ao longo da barra.

Esse resultado com excelente precisão já era esperado por este caso apresentar uma geometria simples e reta que favorece a utilização da integração por corpo rígido.

5. UM MÉTODO DE VARIÁVEL COMPLEXA PARA CÁLCULO DE SENSIBILIDADE ATRAVÉS DO MEC

5.1. Estimativa de derivadas através de variável complexa

Lyness e Moler [1967] demonstraram que a derivada de uma função pode ser obtida apenas através da avaliação dessa função. Isto é possível utilizando variável complexa e expansão em série de Taylor. A demonstração dessa propriedade pode ser feita da seguinte maneira:

Expandindo uma função $f(x)$ qualquer em série de Taylor tem-se:

$$f(x+k) = f(x) + f'(x)k + \frac{1}{2}f''(x)k^2 + \frac{1}{6}f'''(x)k^3 \dots \quad (65)$$

Logo, no caso de uma função com uma parte complexa tem-se a expansão como:

$$f(x+ih) = f(x) + f'(x)(ih) + \frac{1}{2}f''(x)(ih)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(ih)^3 \dots \quad (66)$$

onde a variável x de uma função real $f(x)$ é substituída por uma complexa $x+ih$.

Reescrevendo:

$$f(x+ih) = f(x) + if'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + i\frac{1}{6}f'''(x)h^3 \dots \quad (67)$$

Se $f(x)$ e $f'(x)$ são reais, então pode-se escrever:

$$\text{Im } f(x+ih) = f'(x)h - \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + \dots \quad (68)$$

$$f'(x)h = \text{Im } f(x+ih) + \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + \dots \quad (69)$$

Pode-se escrever a primeira derivada de $f(x)$ como:

$$f'(x) = \frac{\text{Im} f(x + ih)}{h} + O(h^2) \quad (70)$$

onde o símbolo Im significa a parte imaginária.

A principal idéia proposta por este trabalho é empregar a Equação (70) para calcular a sensibilidade de uma função custo Φ qualquer à mudança de uma variável x ($\partial\Phi/\partial x$). Não se tem conhecimento da aplicação deste método para cálculo de sensibilidade, mesmo no contexto do MEF. Neste aspecto, o presente trabalho se reveste de algum grau de originalidade.

O cálculo da sensibilidade por variável complexa no sistema de equações montado torna-se assim bastante simples e de baixo custo computacional quando a implementação numérica suportar números complexos. Isso ocorre pelo fato de não necessitar um pós-processamento como em outros métodos. No caso de otimização de forma, deve-se inserir uma perturbação complexa nas coordenadas dos pontos do contorno a ser otimizado, já que a sensibilidade será calculada sempre de alguma função em relação à posição dos mesmos. O valor da derivada de uma função custo qualquer Φ será, portanto dado pela parte complexa do resultado calculado dividido pelo valor da perturbação.

$$\frac{\text{Im}(\Phi(x + ih))}{h} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad (71)$$

O caso mais direto é o cálculo da sensibilidade do deslocamento ou tração no contorno em relação à posição nodal, já que esses são resultados primais. Funções mais complexas podem ser escritas sem a preocupação de uma avaliação posterior de suas derivadas como, por exemplo, tensões, deformações e volume. A parte imaginária das trações no contorno será a sensibilidade da tração no contorno em relação à posição nodal, a parte imaginária das tensões no contorno será a sensibilidade da tensão no contorno em relação à posição nodal, podendo-se estender esse raciocínio para outros resultados desejados. O cálculo da derivada do deslocamento e da tensão por variável complexa são exemplificados por:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Im}(u(x + ih))}{h} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\text{Im}(\sigma(x + ih))}{h} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \end{aligned} \quad (72)$$

No caso do MEC, quando usadas outras técnicas o cálculo de sensibilidade em relação à posição nodal implica no cálculo de derivadas das soluções fundamentais, o que faz aumentar a singularidade das equações causando detrimento de precisão na solução e aumento do custo computacional. O método da variável complexa evita esses inconvenientes já que, como pode ser visto na Equação (70), requer apenas a avaliação da variável desejada na coordenada $x + ih$. Este é justamente o aspecto que se reveste de maior originalidade no presente trabalho: a possibilidade de se calcular derivadas de variáveis fundamentais sem o ônus de desenvolver as novas equações integrais correspondentes (e sua implementação). Embora a idéia já tenha sido usada no MEC para cálculo de taxas de tensão [Gao et al, 2002], não se tem conhecimento de desenvolvimentos similares para cálculo de sensibilidade, seja no MEC ou no MEF. Diferentemente do Método de Diferenças Finitas, onde a precisão da solução depende do passo (ou perturbação) empregado, a Equação (70) mostra que o cálculo da derivada não envolve a diferença entre duas funções. Sendo assim, não existem erros de cancelamento nesse método, fazendo com que ele seja independente do passo utilizado.

Uma análise comparativa da influência do passo nos resultados pode ser facilmente realizada com funções ordinárias. A título de ilustração, seja a função:

$$f(x) = \frac{1}{(x - x_p)^3} \quad (73)$$

As derivadas numéricas da Equação (73) foram então avaliadas pelo método de diferenças finitas e pelo método de variável complexa utilizando um simples código escrita em linguagem MATLAB [2002]:

```
function []=inicio()
x = 1;      xp = 1.0005;
dexact = 3/(x - xp)^4;
h = [ 1e-2 1e-3 1e-4 1e-5 1e-6 1e-7 1e-8 1e-10 1e-12 1e-14 1e-16];
for j = 1:11
    fcomplex(j) = (imag(1/(x - xp+h(j)*i)^3))/h(j);
    fdiff(j) = ((1/(x - (xp+h(j))))^3) - (1/(x - (xp-h(j))))^3) / (2*h(j));
end
```

A derivada exata é facilmente obtida da Equação (73):

$$\frac{df}{dx} = \frac{-3}{(x - x_p)^4} \quad (74)$$

A Tabela 5.1 resume os resultados obtidos neste exemplo para $x_p = 1.0005$, para as derivadas avaliadas em $x=1$ e para um segundo exemplo de uma função logarítmica para $x_p = 0.0001$. O método de diferenças finitas centrais apresenta resultados satisfatórios para perturbações restritas à uma faixa bem definida, de 10^{-5} a 10^{-8} . Para valores fora desta faixa, o método se torna muito impreciso. Já o método de variável complexa tende a ser mais independente do tamanho da perturbação, particularmente quando ela atinge valores bastante pequenos.

Tamanho da perturbação	$f(x) = \frac{1}{(x-x_p)^3}$		$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x_p}\right)$	
	Variável Complexa	Diferenças Finitas	Variável Complexa	Diferenças Finitas
1×10^{-2}	9.85093×10^7	-1.01509×10^8	0.10000×10^{-4}	0.09999×10^{-4}
1×10^{-3}	1.28000×10^{11}	-4.14815×10^{12}	0.10000×10^{-4}	0.09999×10^{-4}
1×10^{-4}	-4.21029×10^{13}	5.49769×10^{13}	0.10000×10^{-4}	0.10000×10^{-4}
1×10^{-5}	-4.79361×10^{13}	4.80641×10^{13}	0.10000×10^{-4}	0.10000×10^{-4}
1×10^{-6}	-4.79994×10^{13}	4.80006×10^{13}	0.10000×10^{-4}	0.10000×10^{-4}
1×10^{-7}	-4.80000×10^{13}	4.80000×10^{13}	0.10000×10^{-4}	0.10000×10^{-4}
1×10^{-8}	-4.80000×10^{13}	4.80000×10^{13}	0.10000×10^{-4}	0.09947×10^{-4}
1×10^{-10}	-4.80000×10^{13}	4.80000×10^{13}	0.10000×10^{-4}	0.08881×10^{-4}
1×10^{-12}	-4.80000×10^{13}	4.80043×10^{13}	0.10000×10^{-4}	0.
1×10^{-14}	-4.80000×10^{13}	4.79618×10^{13}	0.10000×10^{-4}	0.
1×10^{-16}	-4.80000×10^{13}	0.	0.10000×10^{-4}	0.
Exato	-4.8×10^{13}		0.10000×10^{-4}	

Tabela 5.1 – Valores de derivadas para diferentes perturbações.

5.2. Implementação da variável complexa no método dos elementos de contorno

A alteração necessária para se obter as derivadas de interesse (sensibilidades) no MEC é declarar a variável (no caso, posição nodal) como complexa. Não é necessário fazer-se alterações nas expressões já escritas anteriormente. Escrevendo essas equações na forma complexa, resulta:

$$\mathbf{c} \mathbf{u} + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*(\mathbf{x} + i\mathbf{h}) \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(\mathbf{x} + i\mathbf{h}) \mathbf{p} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^*(\mathbf{x} + i\mathbf{h}) \mathbf{b} \, d\Omega \quad (75)$$

com partes complexas nas soluções fundamentais, pois envolvem distância entre ponto de aplicação de carga e ponto calculado (esses envolvem a posição geométrica dos nós). O sistema de equações montado pode ser escrito na forma complexa como

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{c}_i \mathbf{u}_i + \left[\hat{\mathbf{h}}_{i1}(x+ih) \quad \hat{\mathbf{h}}_{i2}(x+ih) \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{h}}_{ii}(x+ih) \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{h}}_{ir}(x+ih) \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{array} \right\} \\
 & = \left[\mathbf{g}_{i1}(x+ih) \quad \mathbf{g}_{i2}(x+ih) \quad \cdots \quad \mathbf{g}_{ii}(x+ih) \quad \cdots \quad \mathbf{g}_{ir}(x+ih) \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_r \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{76}$$

ou

$$\mathbf{H}(x+ih)\mathbf{U} = \mathbf{G}(x+ih)\mathbf{P} \tag{77}$$

Ou seja, o sistema da Equação (41) é agora complexo, e portanto todas as variáveis sobre o contorno ou domínio passam a incluir uma parte real e outra imaginária. Mesmo as variáveis pós-processadas (como tensões no contorno) possuirão uma parte imaginária. Assim, qualquer função custo Φ nos moldes da Equação (72) são facilmente avaliadas tomando-se $\text{Im}(u)$ ou $\text{Im}(\sigma)$, de acordo com a Equação (71). Este procedimento é extremamente simples, e dispensa o cálculo dos valores de u e σ em duas posições próximas, como ocorreria com o método das diferenças finitas.

5.3. Metodologia do processo de otimização

A implementação numérica empregada neste trabalho possui uma seção inicial de leitura de dados e identificação dos pontos no contorno que terão suas posições modificadas. Os elementos que contém estes pontos são chamados *elementos de projeto*. O passo seguinte é

inserir uma perturbação complexa em cada uma das direções (x_1 e x_2) separadamente para cada ponto a ser otimizado no contorno e realizar uma análise para cada perturbação inserida. Obtêm-se as trações e deslocamentos no contorno (e pontos internos, caso existam) e as tensões no contorno são calculadas seguindo o procedimento já descrito na seção (4.3). Os valores de sensibilidade obtidos de cada ponto são armazenados em um vetor que irá definir o percentual do passo que cada ponto será deslocado. Este procedimento é repetido o número de vezes necessário para que todos os pontos sejam perturbados na direção x_1 e na direção x_2 . Como a perturbação é inserida na componente x_i da geometria separadamente, têm-se um vetor de sensibilidade para a coordenada x_1 e outro para x_2 . O vetor é normalizado dividindo todos seus termos pelo valor mais alto encontrado nele. O tamanho do passo é definido por uma fração da maior dimensão da peça para cada direção, ou seja, o passo no qual os nós serão deslocados em x_1 é uma fração da maior dimensão em x_1 da peça analisada (repetido o procedimento para a coordenada x_2). Esta fração varia com o caso analisado, mas nos exemplos deste trabalho seu valor situou-se entre 0.1% e 2% da maior dimensão do domínio. Este esquema de definição do tamanho do passo foi utilizado pois não se empregou um algoritmo de programação matemática.

Após a realocação dos pontos, os elementos formados por eles estarão deformados, sem os nós igualmente espaçados e tenderão a formar um contorno irregular. Contornos irregulares são gerados devido à dificuldade da função de interpolação de representar o resultado, fazendo com que valores centrais dos elementos sejam maiores que os valores dos extremos. Este efeito indesejável é intrínseco aos métodos numéricos, tanto ao MEC quanto ao MEF. As dificuldades surgidas devido à realocação dos nós são corrigidas por uma suavização feita utilizando B-Splines. Um esquema do processo de alteração do contorno está ilustrado na Figura 5.1. O processo iterativo é repetido até que um critério de parada seja satisfeito. Neste ponto, uma forma ótima é esperada. A Figura 5.2 mostra o fluxograma básico do processo de otimização empregado na implementação numérica do presente trabalho.

5.4. Remalhamento e suavização do contorno

A alteração da posição dos pontos do contorno produz contornos irregulares (Figura 5.1). Uma suavização é feita a fim de corrigir esse efeito surgido devido a realocação dos nós. Após a suavização do contorno, um remalhamento na região de projeto deve ser feito para reposicionar os nós.

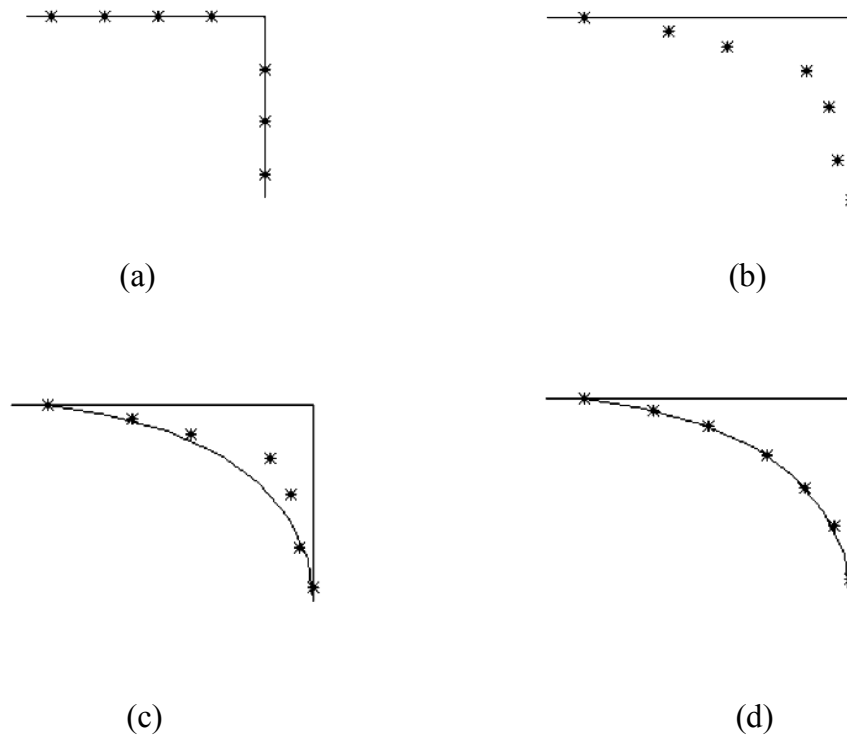


Figura 5.1 – Processo de alteração do contorno. (a) Contorno original; (b) Contorno ao final da iteração de otimização; (c) Contorno suavizado; (d) Remalhamento.

Poder-se-ia utilizar diversos tipos de funções de interpolação para suavizar o contorno, mas um ajuste de B-Spline cúbica foi escolhida por apresentar algumas propriedades convenientes. Como a curva não é forçada a passar pelos pontos realocados na iteração, um comportamento mais natural é obtido com a curva seguindo um contorno geral indicado pelos pontos [Harrington, 1983]. A formulação utilizada para B-Spline trabalha criando segmentos da curva de cada vez. De posse dos nós do contorno já reposicionados de acordo com suas sensibilidades, a rotina separa grupos de quatro pontos para criar os segmentos da curva. Os dois primeiros e os dois últimos segmentos da curva utilizam funções diferentes dos segmentos intermediários. Ou seja, deve-se iniciar a curva com dois segmentos que utilizam funções especiais, adicionar tantos segmentos intermediários quanto forem desejados ou necessários (dependendo da quantidade de elementos de projeto utilizados) e finalizar a curva com dois segmentos que usam funções especiais também. As funções da B-Spline cúbica utilizam quatro pontos para interpolação e para trechos intermediários da curva pode-se escrever [Harrington, 1983]:

$$B_1(u) = \frac{(1-u)^3}{6} \quad (78)$$

$$B_2(u) = \frac{u^3}{2} - u^2 + \frac{2}{3} \quad (79)$$

$$B_3(u) = -\frac{u^3}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{2} + \frac{1}{6} \quad (80)$$

$$B_4(u) = \frac{u^3}{6} \quad (81)$$

Iniciar ou finalizar a B-Spline requer duas funções especiais. O primeiro trecho deve ser descrito com as funções:

$$B_1'(u) = (1-u)^3 \quad (82)$$

$$B_2'(u) = \frac{21u^3}{12} - \frac{9u^2}{2} + 3u \quad (83)$$

$$B_3'(u) = -\frac{11u^3}{12} + \frac{3u^2}{2} \quad (84)$$

$$B_4'(u) = \frac{u^3}{6} \quad (85)$$

Enquanto o segundo trecho requer as funções:

$$B_1''(u) = \frac{(1-u)^3}{4} \quad (86)$$

$$B_2''(u) = \frac{7u^3}{12} - \frac{5u^2}{4} + \frac{u}{4} + \frac{7}{12} \quad (87)$$

$$B_3''(u) = -\frac{u^3}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{2} + \frac{1}{6} \quad (88)$$

$$B_4''(u) = \frac{u^3}{6} \quad (89)$$

O último e o penúltimo trecho da curva são o inverso dos trechos iniciais. Desse modo as funções do ultimo trecho são:

$$B_{1R}'(u) = B_4'(1-u) \quad (90)$$

$$B_{2R}'(u) = B_3'(1-u) \quad (91)$$

$$B_{3R}'(u) = B_2'(1-u) \quad (92)$$

$$B_{4R}'(u) = B_1'(1-u) \quad (93)$$

E as funções do penúltimo trecho são:

$$B_{1R}''(u) = B_4''(1-u) \quad (94)$$

$$B_{2R}''(u) = B_3''(1-u) \quad (95)$$

$$B_{3R}''(u) = B_2''(1-u) \quad (96)$$

$$B_{4R}''(u) = B_1''(1-u) \quad (97)$$

Para cada trecho intermediário extra adicional, deve-se utilizar as equações (78), (79), (80), (81).

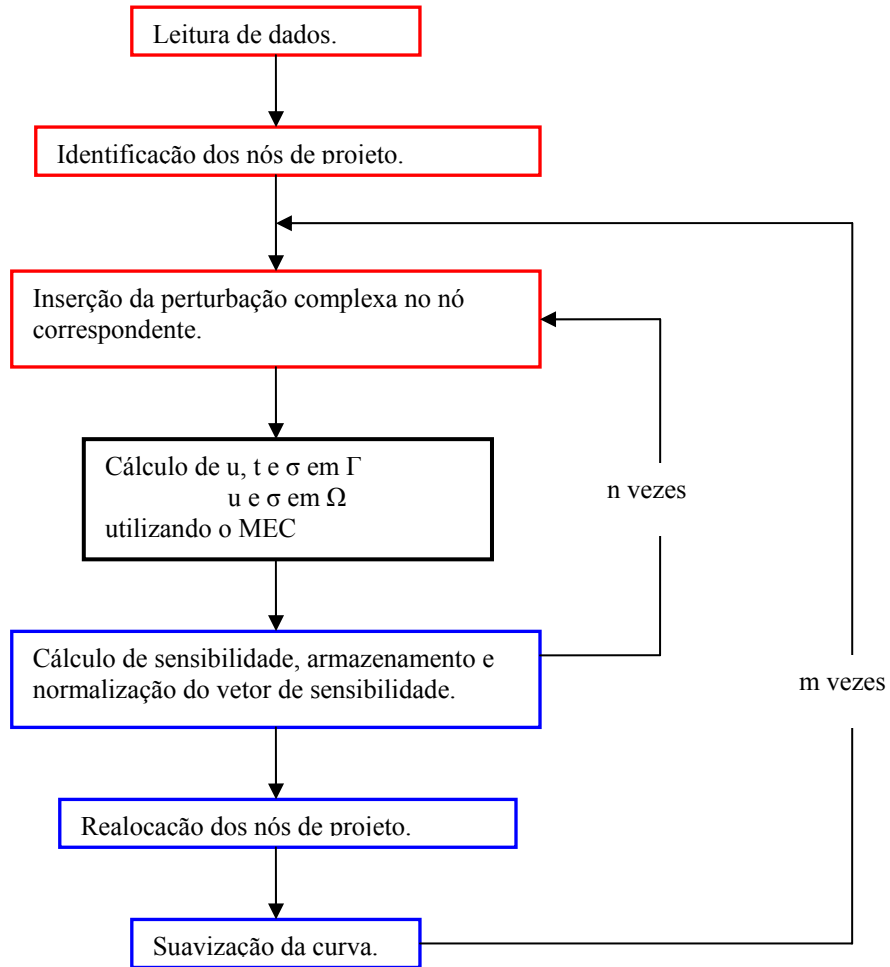


Figura 5.2 – Esquema iterativo da metodologia proposta.

6. RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a metodologia proposta de otimização. Essa metodologia teve sua implementação numérica feita no MATLAB [2002]. Todos os modelos gerados neste capítulo utilizam elementos quadráticos descontínuos. O número de pontos de integração utilizados é igual a dezesseis quando não informado. As dimensões, propriedades dos materiais e outras quantidades estão indicadas sem unidades, assim podem assumir qualquer sistema de unidades compatível. As propriedades dos materiais são $E = 210000$ e $\nu = 0.3$ para todos os modelos.

6.1. Avaliação preliminar da estabilidade do cálculo de sensibilidade

A dependência do resultado do cálculo de sensibilidade com o tamanho da perturbação h , foi verificada utilizando o modelo da Figura 6.1 (a). A malha utilizada está ilustrada na Figura 6.1 (b). Diversos valores de perturbação foram inseridos na componente x_2 do ponto A e a sensibilidade do deslocamento foi obtida no mesmo ponto.

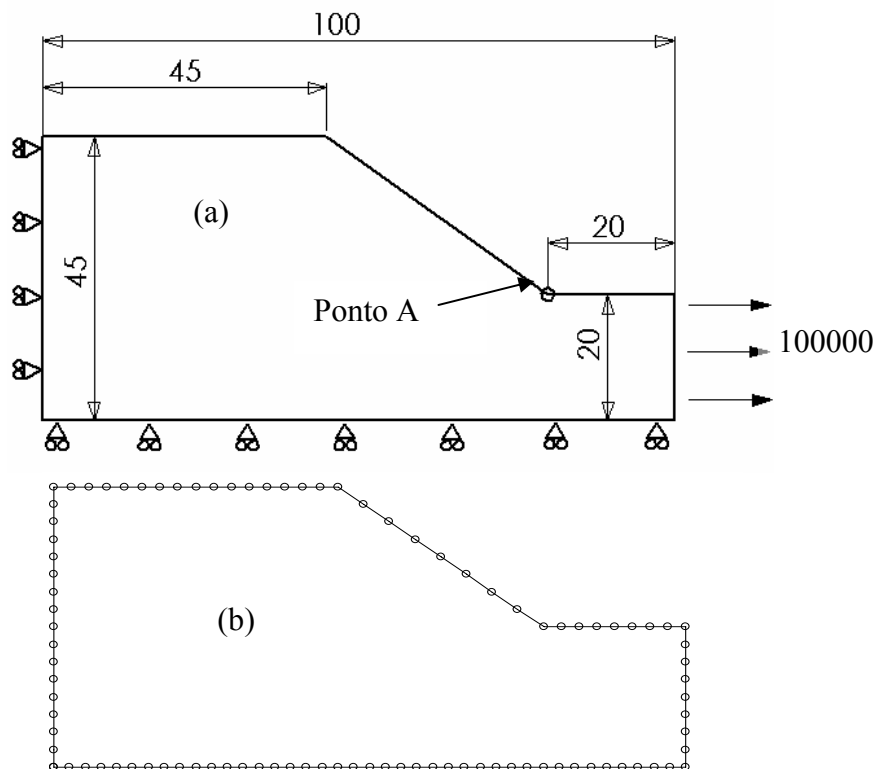


Figura 6.1 – (a) Geometria, condições de contorno e posição do nó perturbado e (b) malha de elementos de contorno quadráticos utilizada.

A Tabela 6.1 mostra os valores das perturbações inseridas e os resultados de sensibilidade obtidos no modelo utilizado.

Valor da perturbação h	Sensibilidade
1	-0.06206989351554 10^7
10^{-1}	-0.06261064067547 10^7
10^{-2}	-0.06261365204107 10^7
10^{-3}	-0.06261368198196 10^7
10^{-4}	-0.06261368228136 10^7
10^{-5}	-0.06261368228435 10^7
10^{-6}	-0.06261368228438 10^7
10^{-7}	-0.06261368228438 10^7
10^{-8}	-0.06261368228438 10^7
10^{-10}	-0.06261368228438 10^7
10^{-12}	-0.06261368228438 10^7
10^{-16}	-0.06261368228438 10^7
10^{-24}	-0.06261368228438 10^7
10^{-32}	-0.06261368228438 10^7

Tabela 6.1 – Valores de perturbação e sensibilidade do deslocamento para o caso de concordância.

Os resultados na Tabela 6.1 demonstram a grande estabilidade que este método de cálculo de sensibilidade possui. Mesmo para valores de perturbação considerados elevados para outros métodos (10^{-2}) só existe diferença significativa no sétimo dígito significativo para este método. Pode ser visto que este método apresenta ótimos resultados para valores muito pequenos de perturbações (10^{-32}), onde outros métodos simplesmente não são capazes de ser utilizados. Estes resultados são muito encorajadores para a utilização deste método.

6.2. Resultados para o cálculo de sensibilidade

A verificação dos resultados do cálculo de sensibilidade por variável complexa foi feita com três exemplos, comparando-se os resultados numéricos com resultados analíticos e resultados calculados por diferenças finitas, quando disponível.

6.2.1. Tubo com pressão interna

O primeiro caso estudado foi um tubo com pressão interna, onde apenas um quarto foi modelado, levando-se em conta a simetria do problema. As condições de contorno, dimensões e propriedades utilizadas nesse caso estão ilustradas na Figura 6.2 (a). O modelo foi gerado com oito elementos em cada parede (interna e externa) como pode ser visto na Figura 6.2 (b).

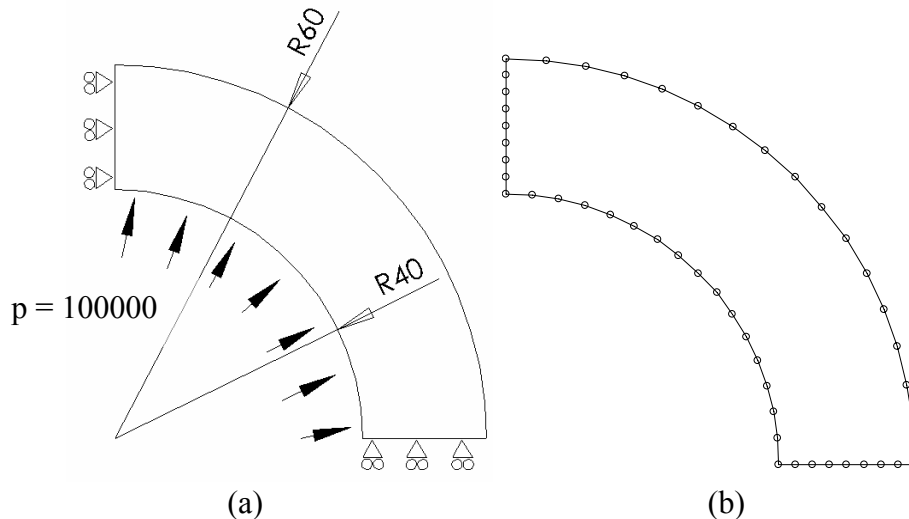


Figura 6.2 – (a) Dimensões, condições de contorno e propriedades do caso do tubo com pressão interna e (b) malha de elementos de contorno utilizada.

Foi calculada a sensibilidade do deslocamento na parede interna devido à variação do raio externo de três maneiras distintas: analiticamente, por diferenças finitas à frente e por variável complexa. O resultado de sensibilidade analítica foi obtido através da derivação da equação do deslocamento para um tubo com pressão interna em relação ao raio externo [Shigley e Mishke, 2001].

$$u = \frac{(\sigma_{\theta} - \nu \sigma_r)r}{E} \quad (98)$$

As componentes de tensão da Equação (98) são:

$$\sigma_{\theta} = \frac{r_i^2 p}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad (99)$$

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 p}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad (100)$$

A derivada do deslocamento em relação ao raio externo é escrita então como:

$$\frac{du}{dr_e} = \frac{-2 r_i^2 p r_e (r^2 + r_i^2 - \nu r^2 + \nu r_i^2)}{r(-r_e^2 + r_i^2)^2 E} \quad (101)$$

onde u é o deslocamento na direção radial; r_i é o raio interno; r_e é o raio externo; r é o raio que se deseja o resultado e p é a pressão interna.

O valor da perturbação foi variado de 10^{-4} até 10^{-8} no cálculo por diferenças finitas para fornecer resultados que não oscilassem com o valor da perturbação. O valor da perturbação utilizado para comparação com outros métodos foi $h=10^{-6}$. A perturbação utilizada na variável complexa foi $h=10^{-8}$ por essa se mostrar bastante estável e pouco sensível à variação da perturbação. A fim de se obter uma melhor forma de comparação fez-se uma média dos resultados de deslocamento e sensibilidade obtidos dos nós sobre r_i . Uma comparação dos resultados de sensibilidade é apresentada na Tabela 6.2.

Método de cálculo	Sensibilidade
Analítico	0.003840
Diferenças finitas	0.003977
Variável complexa	0.003977

Tabela 6.2 – Resultados sensibilidade para o tubo com pressão interna.

O resultado numérico apresentado na Tabela 6.2 é uma média dos valores de sensibilidade em todos os pontos da parede interna do tubo. O gráfico da Figura 6.3 mostra a variação do erro do deslocamento e sensibilidade ao longo da parede interna do tubo. O efeito de formação de contornos irregulares devido à dificuldade da função de interpolação em representar corretamente os resultados e um detrimento na precisão da sensibilidade ficam evidentes.

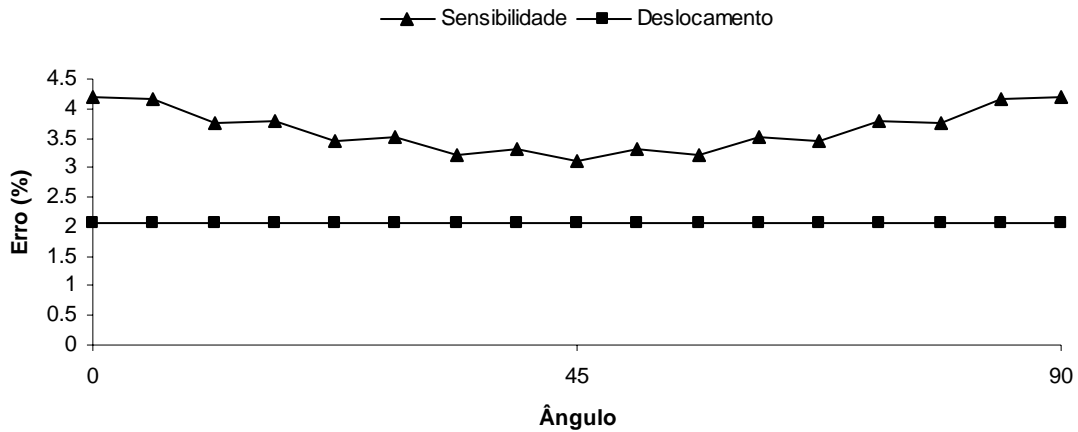


Figura 6.3 - Variação do erro do deslocamento e sensibilidade ao longo da parede interna do tubo.

Fez-se uma investigação dos motivos pelos quais os resultados da Tabela 6.2 apresentaram uma variação no segundo dígito significativo. Variou-se o número de pontos de Gauss de integração do elemento e realizou-se um refino da malha utilizada para verificar a influência desses parâmetros sobre os resultados. A malha refinada possui o dobro de elementos em cada segmento (Figura 6.4). Os resultados dessa investigação estão apresentados na Tabela 6.3, onde o deslocamento está no sistema de coordenadas local.

	Malha 1 (Figura 6.2 (b))			Malha 2 (Figura 6.4)
	Pontos de Gauss (L)			Pontos de Gauss (L)
	8	16	32	16
Deslocamento	-0.000122405	-0.000122308	-0.000122298	-0.000121545

Tabela 6.3 – Variação do número de pontos de integração e tamanho de malha.

Os resultados apresentados na Tabela 6.3 mostram que a variação do número de pontos de integração do elemento (L) não tem influência significativa no deslocamento. O refino da malha também não apresentou uma alteração expressiva nos resultados. Esse comportamento pode ser atribuído a integração de elementos que contenham o ponto fonte através da imposição de movimento de corpo rígido [Brebbia e Dominguez, 1992]. Esta técnica de integração não apresenta resultados satisfatórios para contornos curvos, como o do caso do tubo com pressão interna. É importante salientar que apesar de ter-se interesse no cálculo de sensibilidades, pode-se realizar-se este tipo de análise com deslocamento (por exemplo). Isso é possível devido ao fato de a sensibilidade ser obtida através do próprio cálculo do deslocamento. Ou seja, a

qualidade dos resultados obtidos para uma função Φ qualquer, e a sua sensibilidade estará sempre relacionada diretamente.

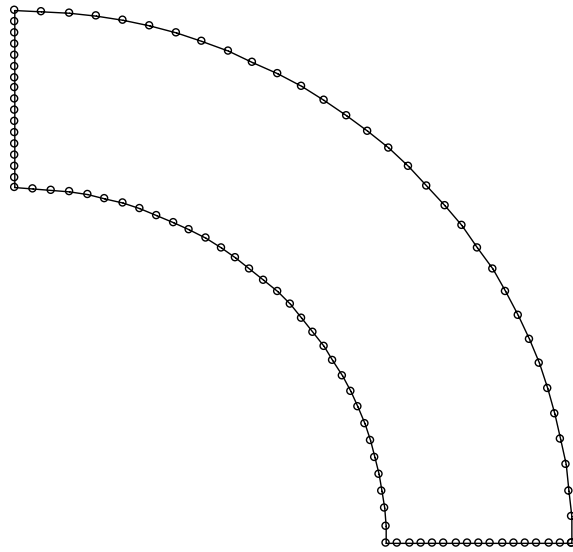


Figura 6.4 – Malha refinada do caso do tubo com pressão interna.

6.2.2. Barra carregada axialmente

O segundo caso estudado foi uma barra submetida a uma carga em uma extremidade e teve o deslocamento restrito na outra, como pode ser visto na Figura 6.5(a) junto com as dimensões do problema. No caso da barra, foi calculada a sensibilidade do deslocamento axial devido à variação do comprimento da barra de duas maneiras: analítica e por variável complexa. A malha utilizada nesse modelo pode ser vista na Figura 6.5(b).

O cálculo analítico foi feito derivando a equação do deslocamento normal da barra em relação ao comprimento [Popov, 1978].

$$u = \frac{Pl}{EA} \quad (102)$$

Derivando-se em relação ao comprimento, obtém-se:

$$\frac{du}{dl} = \frac{P}{EA} \quad (103)$$

onde u é o deslocamento axial; P é a carga aplicada e A é a área da seção transversal.

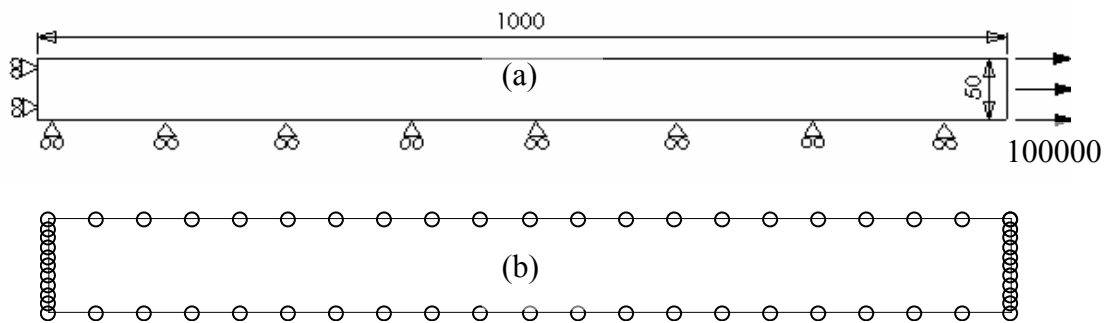


Figura 6.5 – Condições de contorno e dimensões da barra.

Da mesma maneira que no caso do tubo, o valor da perturbação complexa utilizada foi de 10^{-8} , aplicada nos nós da extremidade onde foi aplicada a força, e a sensibilidade calculada nos mesmos nós. A Tabela 6.4 e a Tabela 6.5 contém os resultados obtidos nos cálculos.

Método de cálculo	Sensibilidade
Analítico	0.00047619
Variável complexa	0.00049777

Tabela 6.4 – Resultados de sensibilidade da barra.

Método de cálculo	Deslocamento
Analítico	0.00047619
MEC	0.00047984

Tabela 6.5 – Resultados de deslocamento da barra.

O caso da barra apresentou um resultado muito preciso para deslocamento e um resultado bom para sensibilidade. Esta variação pode estar relacionada ao fato de ter-se um modelo com uma perturbação complexa pequena para o cálculo de sensibilidade. Isto poderia ocasionar algum efeito no condicionamento das matrizes do sistema e deve ser tema de investigação em futuros trabalhos.

6.2.3. Placa com furo circular

O terceiro caso estudado foi uma placa submetida a uma tração uniforme com um furo circular no centro. Assim como o caso do tubo, foi modelado somente um quarto da placa, aproveitando a simetria do problema. Utilizou-se um refino de malha próximo à região do furo a fim de aumentar a precisão dos resultados. Neste problema, foi calculada a sensibilidade do deslocamento radial de r à variação do raio do furo. A sensibilidade foi calculada analiticamente e por variável complexa. A Figura 6.6(a) ilustra o problema modelado com as variáveis utilizadas enquanto a Figura 6.6(b) mostra a malha utilizada.

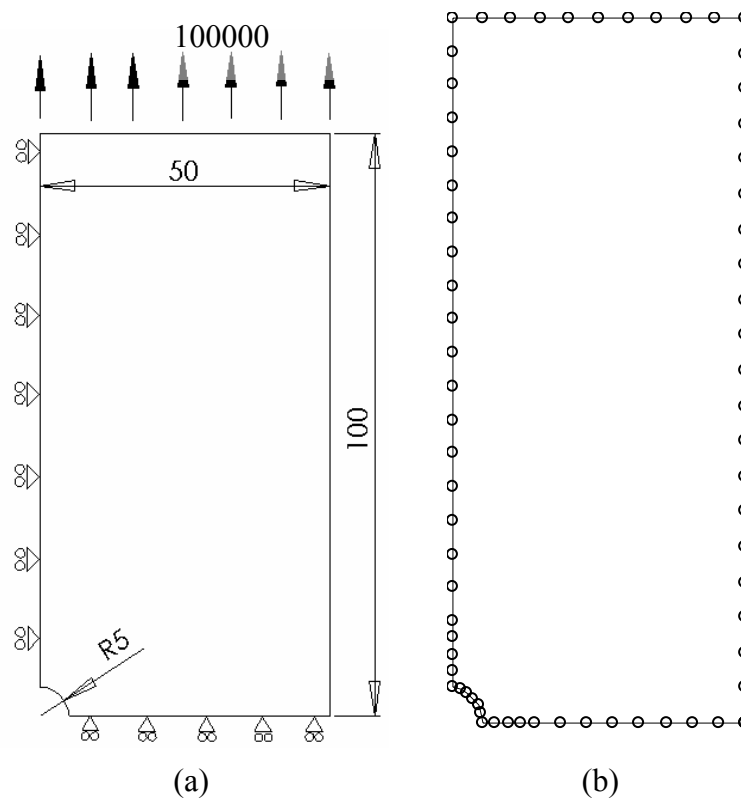


Figura 6.6 – (a) Geometria e condições de contorno do caso da placa com furo circular e (b) malha de elementos de contorno utilizada.

Utilizou-se a solução analítica de uma placa infinita com um carregamento S e um furo circular para a comparação com os resultados numéricos (Figura 6.7).

As componentes radial e tangencial de tensão

$$\sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (104)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (105)$$

são utilizadas para calcular as deformações radial e tangencial através da lei de Hooke:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r - \nu \sigma_{\theta}}{E} \quad (106)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta} - \nu \sigma_r}{E} \quad (107)$$

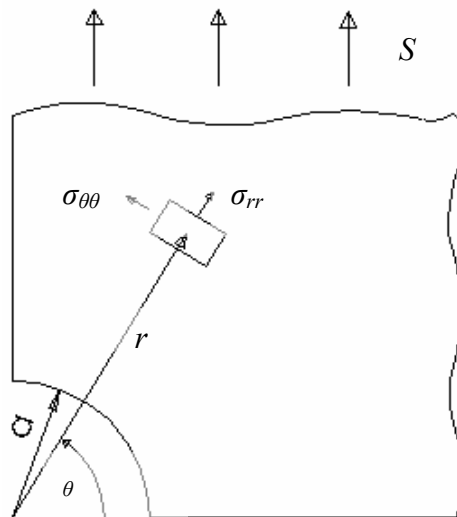


Figura 6.7 - Parâmetros da solução analítica de uma placa infinita com furo circular.

Pode-se considerar a deformação radial como sendo a derivada do deslocamento em relação ao raio do furo. Assim pode-se obter os valores analíticos de deslocamento e sensibilidade através da Equação (106). Ou seja, a deformação radial é a sensibilidade que se deseja.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (108)$$

onde u é o deslocamento; S é a tensão aplicada; a é o raio do furo e r é a posição a ser calculada.

Os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 6.6 e na Tabela 6.7 para deslocamento e sensibilidade respectivamente.

Método de cálculo	Deslocamento
Analítico	0.002380
MEC	0.002600

Tabela 6.6 – Deslocamento radial da placa com furo.

Método de cálculo	Sensibilidade
Analítico	0.0004285
Variável complexa	0.0004256

Tabela 6.7 – Sensibilidade do deslocamento à variação do raio do furo.

Os valores obtidos na análise apresentaram boa precisão. Os resultados de sensibilidade possuem diferença no terceiro dígito significativo enquanto o deslocamento apresenta essa variação no segundo dígito significativo. Estes resultados são considerados de boa precisão, já que a solução analítica utilizada descreve o comportamento de uma placa infinita e o modelo numérico não representa exatamente esta situação. A utilização de integração por movimento de corpo rígido em um contorno curvo contribui para diminuição da precisão dos resultados.

6.3. Resultados de otimização de forma

Nesta seção, três problemas são apresentados a fim de demonstrar a aplicação da metodologia proposta em problemas de otimização de forma. Reproduziram-se problemas com solução analítica e problemas já estudados anteriormente na literatura. A hipótese de estado plano de tensões foi considerada quando não especificado. As funções objetivo utilizadas se baseiam em distribuições de tensão na peça e estão indicadas para cada caso analisado.

6.3.1. Placa com furo quadrado no centro

O primeiro caso estudado é uma placa com furo quadrado inserido no centro. As dimensões e condições de contorno estão mostradas na Figura 6.8(a). Para diminuir o tamanho do modelo e tempo computacional, modelou-se apenas um quarto da geometria aproveitando a simetria do problema. A região a ser otimizada é o contorno do furo. Para o modelo gerado com

simetria, a região a ser otimizada passa a ser a reta situada entre os pontos A e B (Figura 6.8(a)). A malha utilizada neste modelo está ilustrada na Figura 6.8(b).

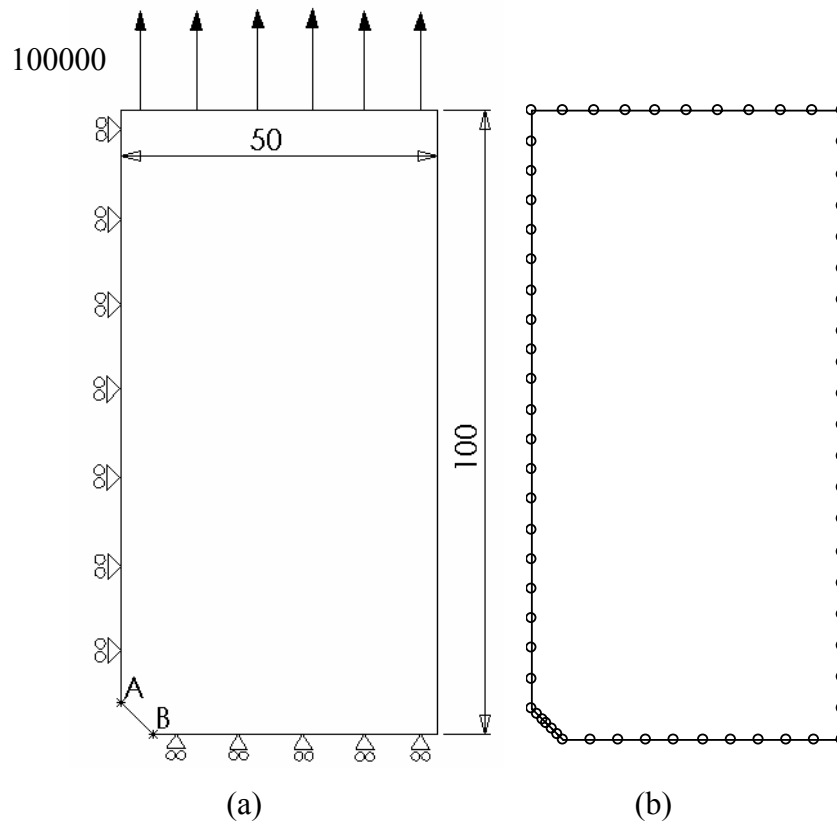


Figura 6.8 – (a) Geometria e condições de contorno da placa com furo quadrado e (b) malha de elementos de contorno utilizada.

Deseja-se minimizar a tensão σ_{yy} no ponto B do contorno do furo. A função objetivo para este caso pode ser escrita como:

$$\Phi = \sum_1^{n^{\circ} \text{ nos projeto}} \min \sigma_{yy}^B \quad (109)$$

A Figura 6.9 ilustra a alteração da geometria durante o processo de otimização para algumas iterações selecionadas.

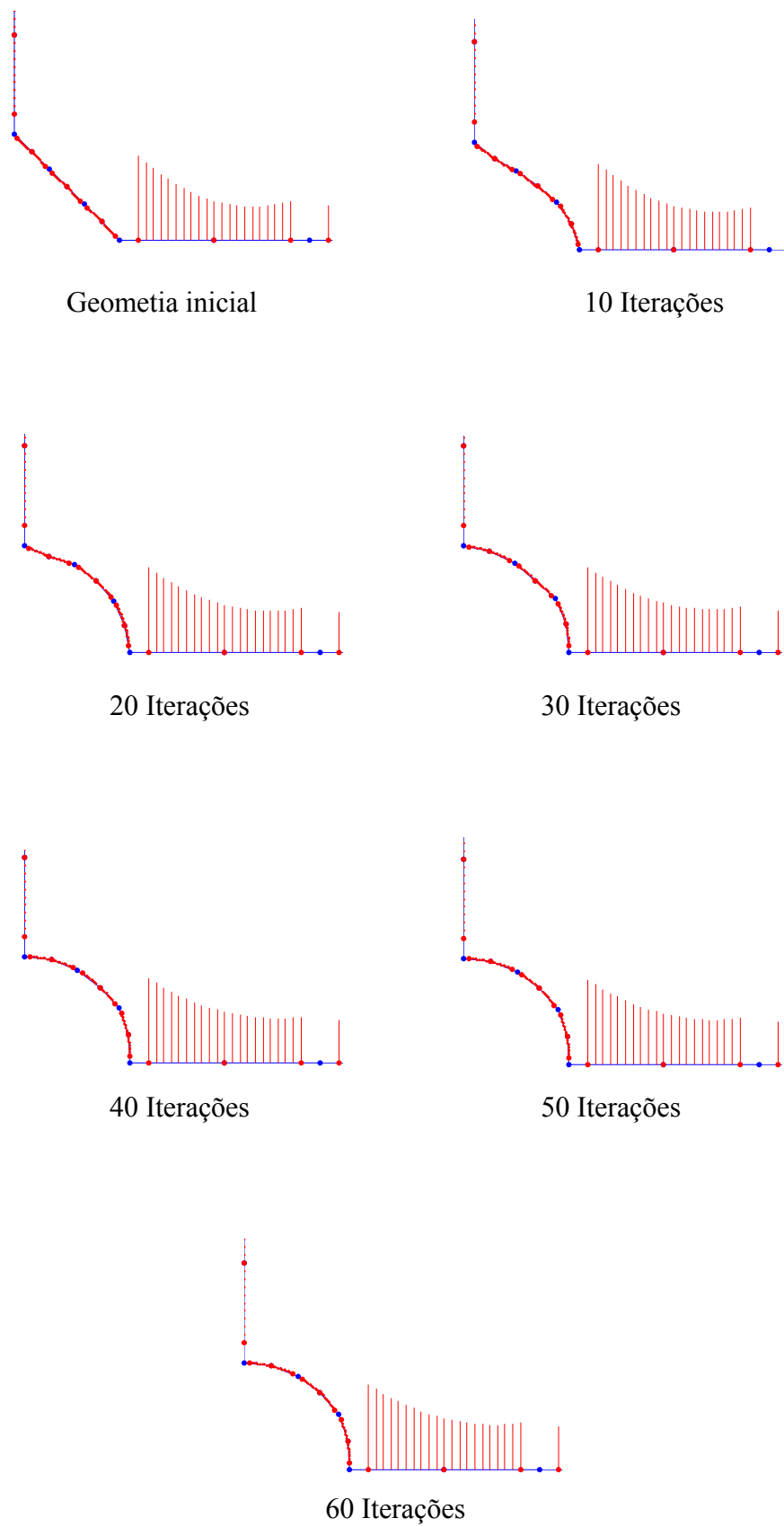


Figura 6.9 – Alteração do contorno da placa com furo quadrado para selecionadas iterações.

Pode-se observar no gráfico da Figura 6.11 que o fator de concentração de tensão no canto B do furo diminui rapidamente a medida que o furo toma a forma circular e possui uma queda mais suave nas iterações finais com a tentativa de formar uma elipse. O gráfico da Figura 6.11 mostra os valores do fator de concentração de tensão no ponto B.

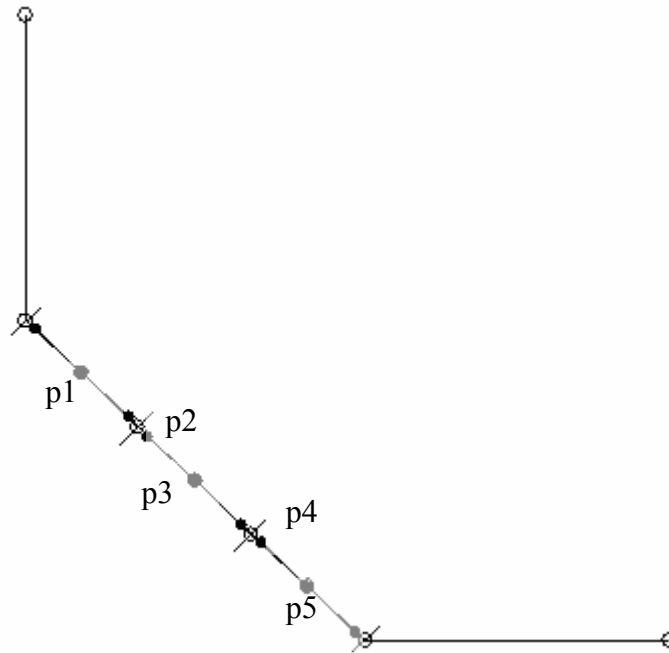


Figura 6.10 - Detalhe da malha utilizada e posição dos pontos otimizados no contorno.

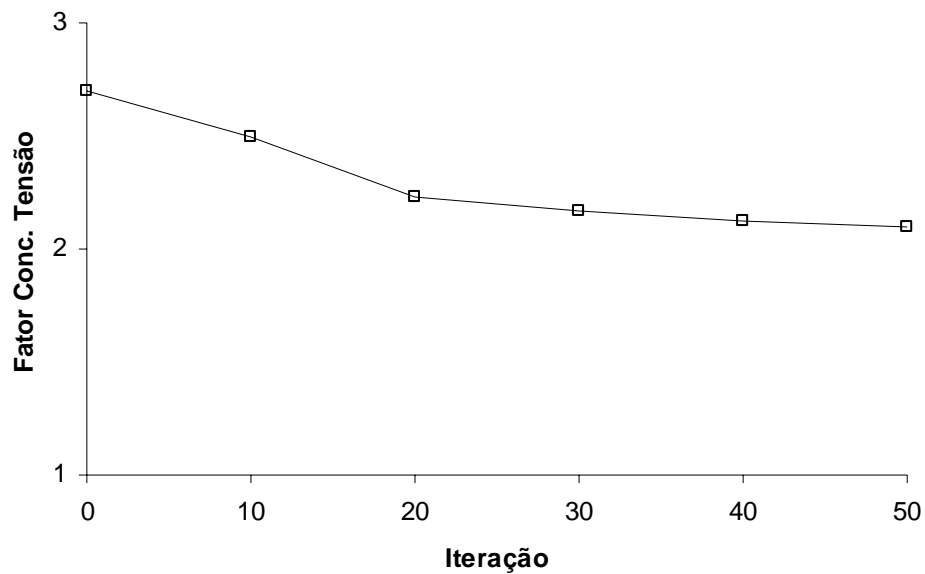


Figura 6.11 – Variação de tensão durante a variação da geometria.

6.3.2. Problema da concordância em um canto vivo

O tradicional problema da concordância [Tafreshi e Fenner, 1995; Wu, 2005] foi analisado neste trabalho. A geometria inicial e as condições de contorno podem ser vistas na Figura 6.12(a) enquanto a malha utilizada é o que mostra a Figura 6.12(b). A região a ser otimizada é o contorno compreendido entre os pontos A, B e C.

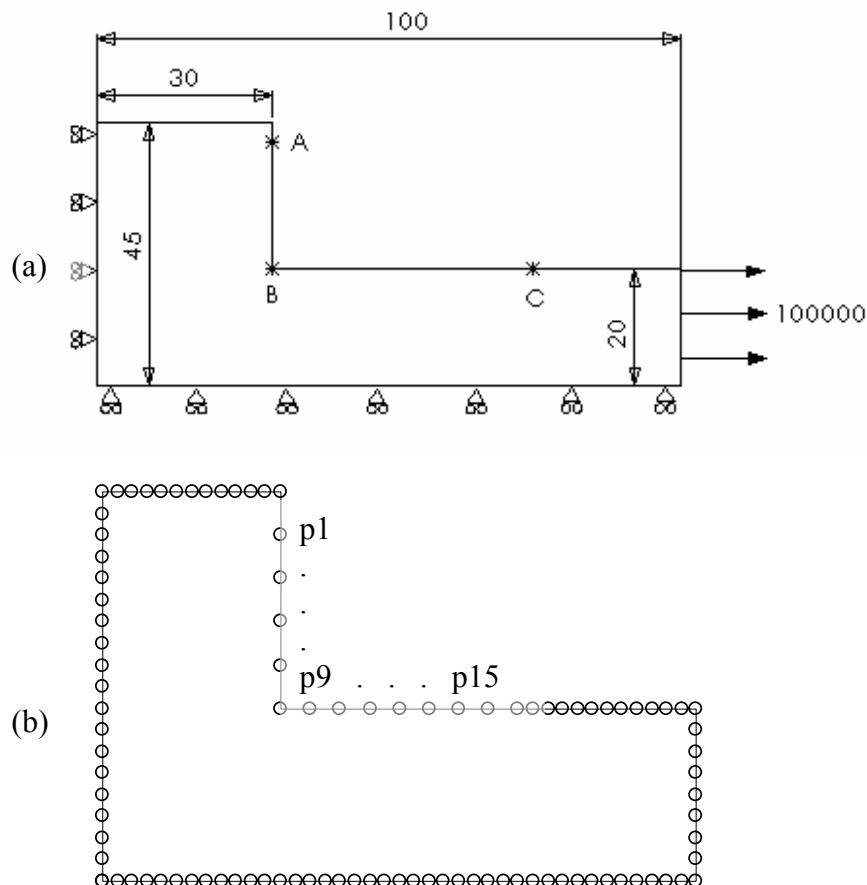


Figura 6.12 – Geometria e condições de contorno do problema da concordância.

Tem-se como objetivo minimizar picos e tornar os valores de tensão nos pontos do contorno do segmento ABC mais próximos a fim de obter-se uma distribuição uniforme de tensões no contorno. A função objetivo para este caso pode ser escrita como:

$$\Phi = \sum_1^{n^{\circ} \text{ nos projeto}} \min \sigma_{eq} \quad (110)$$

A mudança do contorno da peça pode ser observada na Figura 6.13.

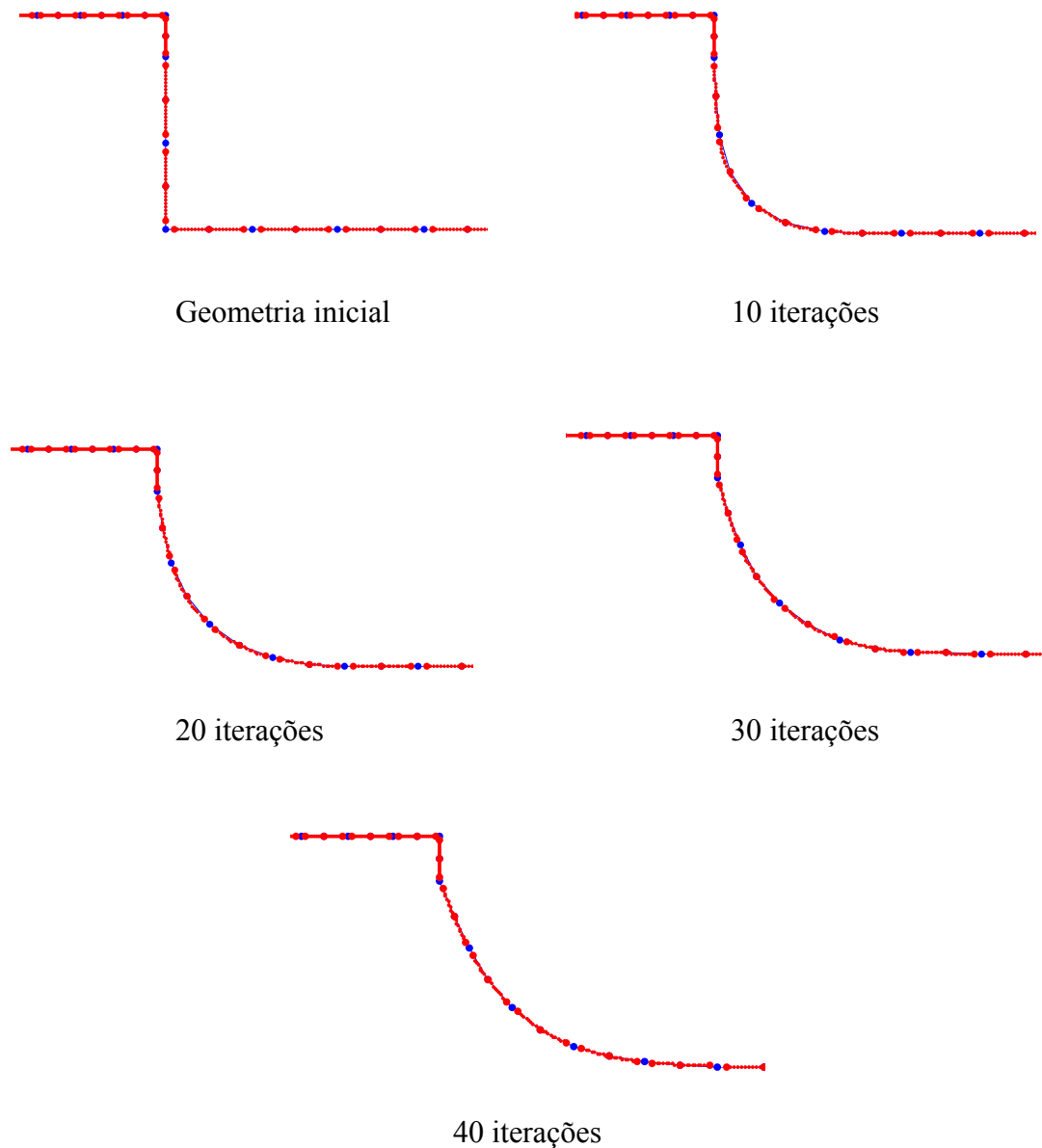


Figura 6.13 – Evolução da geometria do problema da concordância.

A Figura 6.14 apresenta as tensões sobre o contorno, no segmento ABC da Figura 6.12(a). Verifica-se que a concentração de tensão existente no canto vivo decresce em aproximadamente 33% com o aumento do número de iterações. Esta alteração se deve à forma mais suave que o contorno toma. O resultado obtido é o esperado para este tipo de problema, como pode-se verificar em outros trabalhos (por exemplo [Tafreshi e Fenner, 1995; Wu, 2005]). Pode-se ver também que com o aumento do número de iterações, um aumento na tensão na região do ponto A acontece. Este fato está relacionado ao aparecimento de outro canto vivo no ponto A devido à incapacidade da implementação de spline utilizada de manter tangência com a geometria não otimizada. Esse efeito pode ser observado em diversos outros trabalhos.

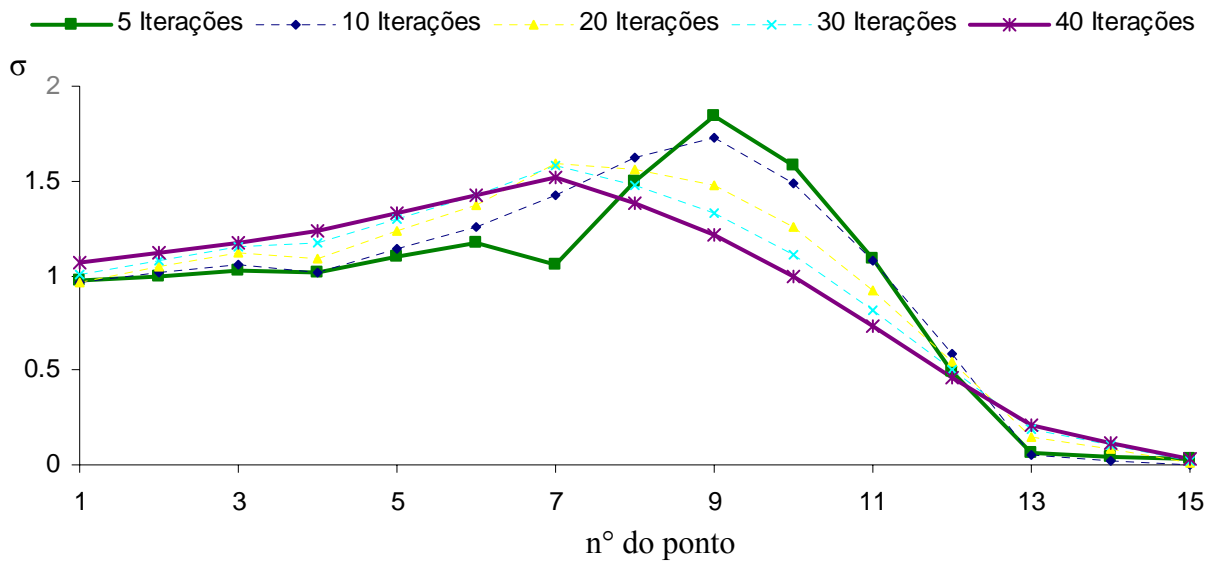


Figura 6.14 – Distribuição de tensão do segmento ABC do problema da concordância.

O resultado alcançado para este caso é considerado excelente. O contorno otimizado obteve uma forma mais suave como se esperava baseado em outros trabalhos. A concentração de tensão existente no canto vivo da geometria inicial foi amenizada e a distribuição de tensão ao longo da peça se homogeneizou, alcançando o objetivo de interesse.

6.3.3. Viga em balanço

A otimização de uma viga em balanço é apresentada a fim de demonstrar mais um exemplo de homogeneização de tensão no contorno. Um caso semelhante foi analisado por Annicciarico e Cerrolaza [2001] sendo que geometria, condições de contorno, constantes e função objetivo não possuem exatamente os mesmo valores, mas uma comparação qualitativa pode ser feita entre os dois casos. As dimensões da viga em balanço com uma carga na ponta estão ilustradas na Figura 6.15(a) e a malha utilizada pode ser vista na Figura 6.15(b).

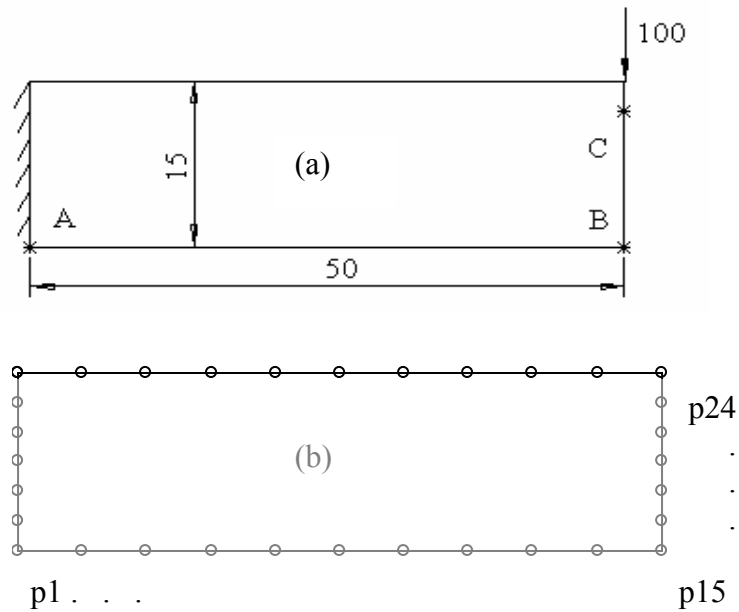
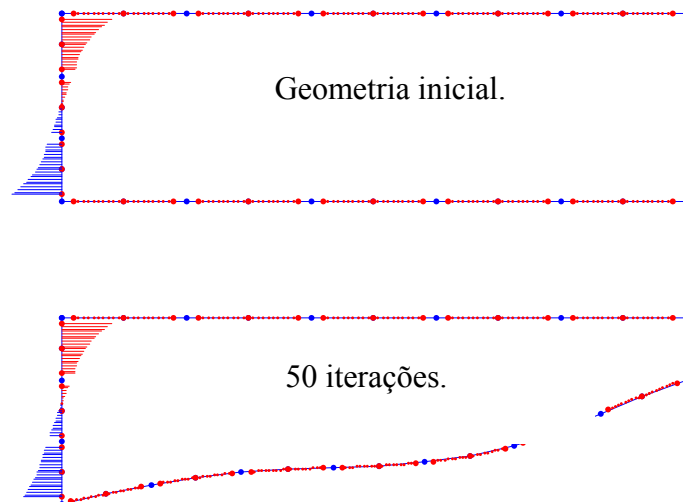


Figura 6.15 – (a) Geometria e condições de contorno da viga em balanço e (b) malha de elementos de contorno utilizada.

O objetivo é diminuir as concentrações de tensão existentes na viga e se obter uma distribuição mais homogênea. Assim, a função objetivo pode ser escrita como:

$$\Phi = \sum_1^{n^{\circ} \text{ nos projeto}} \min \sigma_{eq} \quad (111)$$

A região de projeto é o trecho ABC da Figura 6.15(a) até o ponto onde a carga foi aplicada. A Figura 6.16 mostra a alteração da geometria no processo de otimização.



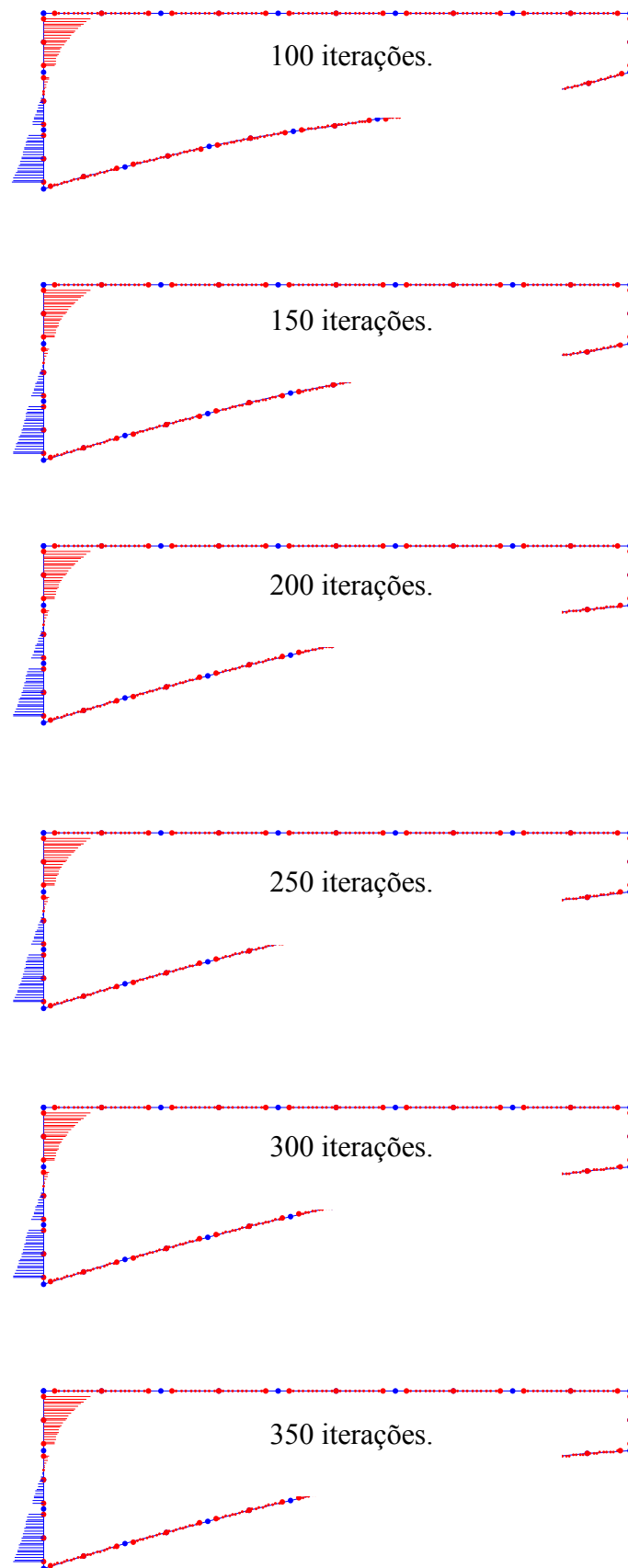


Figura 6.16 – Otimização da geometria da viga em balanço.

O comportamento da tensão de von-Mises na região otimizada da viga pode ser visto no gráfico da Figura 6.17. As posições dos pontos do gráfico na viga estão ilustradas na Figura 6.15(b). A região próxima ao ponto A possui pequena variação no valor da tensão, sendo quase impossível distinguir os pontos das diferentes iterações no gráfico abaixo. A maior variação ocorre próximo à extremidade da viga, onde inicialmente existia um canto vivo. Nessa região é possível reparar variações de quase sete vezes no valor da tensão a medida que a geometria é alterada passando a ser uma curva côncava. Este é o comportamento esperado para este tipo de estrutura conforme verificado por Annicciarico e Cerrolaza [2002]. As tensões na região próxima ao ponto A teriam uma variação maior e tenderiam a ficar no mesmo intervalo de valores da região próxima ao ponto B caso a suavização do contorno fosse feita com a curva passando pelos pontos realocados na otimização.

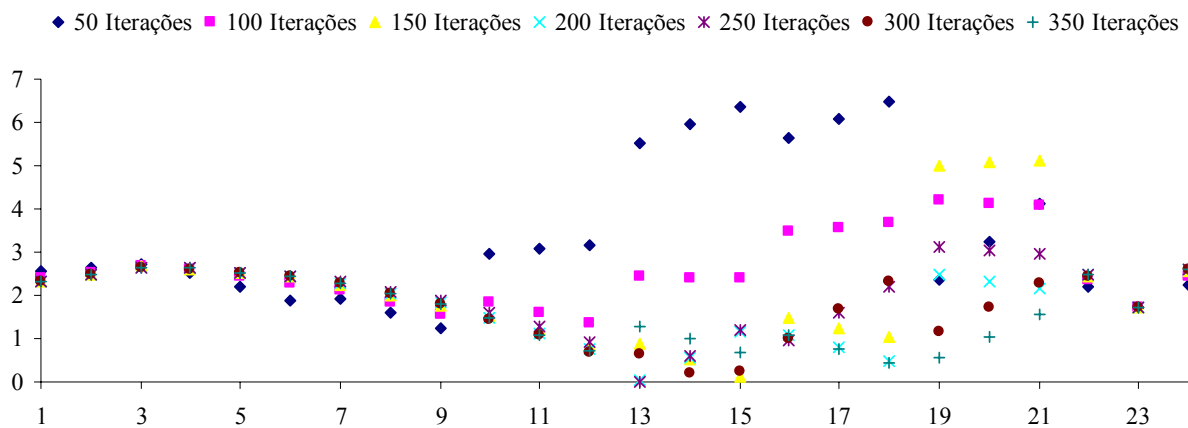


Figura 6.17 – Distribuição da tensão de von-Mises ao longo da viga em balanço.

O resultado de otimização de forma da viga em balanço é considerado excelente pois apresenta uma geometria final condizente com a geometria obtida em outros trabalhos e condizente com a forma final no qual se espera intuitivamente. Esta forma é conhecida popularmente como “mão francesa” e é amplamente utilizada na indústria.

7. CONCLUSÕES

Uma estratégia de otimização de forma para estruturas elásticas bidimensionais utilizando o MEC foi apresentada neste trabalho. Uma revisão das expressões relevantes do MEC e dos fundamentos de otimização foi feita. O cálculo de tensões no contorno implementado para elementos lineares e quadráticos é testado analisando-se casos encontrados na literatura e seus resultados considerados de ótima precisão, especialmente quando comparados com o MEF. A técnica de diferenciação por variável complexa é revista e suas vantagens em relação a outras técnicas explicitadas. Utilizando a metodologia de obtenção de derivadas através de variável complexa, uma formulação para o cálculo de sensibilidade é proposta. A formulação para cálculo de sensibilidade é testada analisando-se alguns casos que possuem soluções analíticas para sensibilidade da tensão encontradas na literatura. Os resultados obtidos possuem boa precisão e independência do tamanho da perturbação utilizada, mostrando que essa formulação possui uma grande vantagem sobre métodos como diferenças finitas. A implementação desta formulação é bastante simples, tornando-se atrativa para adaptação de rotinas já existentes. Alguns casos de otimização de forma encontrados na literatura foram analisados com a formulação proposta a fim de testar a metodologia. Os resultados foram comparados e em todas as situações obteve-se uma forma ótima similar às encontradas em outros trabalhos. Foram utilizadas funções objetivo de homogeneização das tensões no contorno, mas qualquer tipo de função Φ mais complexa deve ser explorada aproveitando a vantagem dessa formulação não necessitar cálculos posteriores de derivadas.

Os resultados obtidos provam que esta formulação é uma excelente alternativa no cálculo de sensibilidade, evitando vários inconvenientes de outros métodos. A simplicidade de implementação e obtenção de derivadas a torna muito propícia para desenvolvimentos de futuros trabalhos em outras áreas de otimização. É interessante notar ainda, o potencial deste método de cálculo de sensibilidade com outros métodos numéricos, incluindo o MEF.

Alguns pontos da atual implementação numérica ainda devem ser melhor explorados. Deve-se fazer um estudo do número de condição do sistema de equações complexas a fim de verificar sua influência nos resultados. A utilização de outros processos de integração e a avaliação de integrais quase singulares são importantes melhorias para a precisão dos resultados. A utilização de um otimizador para o cálculo automático do incremento de mudança da geometria reduziria de forma significativa o custo da análise, pois esta decisão foi aqui feita de forma manual. A capacidade de se ter mais de uma região de projeto bem como regiões de

projetos fechadas possibilitaria a conexão desta metodologia com casos de otimização topológica.

A evolução natural deste trabalho é a implementação de recursos que possibilitem a análise de outros casos mais complexos. Capacidade de análise de problemas multi-região e problemas de contato também aumentam a abrangência desta metodologia. Deve-se citar ainda a extensão para problemas tridimensionais como importante prioridade junto com os recursos já mencionados.

8. REFERÊNCIAS

- [1] Aithal, R., Saigal, S., “Shape Sensitivity Analysis in Thermal Problems using BEM”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15, 1995, 115-120.
- [2] Aliabadi, M. H., Rooke, D. P., “Numerical Fracture Mechanics”, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [3] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., “An Evolutionary Approach for the Shape Optimization of General Boundary Elements Models”, *Electronic Journal of Boundary Elements*, Vol BETEQ 2001, N° 2, 251-266, 2002.
- [4] Arora, J. S., “Introduction to Optimum Design”, McGraw-Hill, 1989.
- [5] Boresi, A. P., Sidebotton, O. M., Seely, F. B e Smith, “Advanced Mechanics of Materials”, John Wiley & Sons, 3ª edição, 1978.
- [6] Brebbia, C.A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C., “Boundary Element Techniques – Theory and Applications in Engineering”, Springer-Verlas, 1984.
- [7] Brebbia, C. A., Dominguez, J., “Boundary Elements – An Introductory Course”, McGraw-Hill, 2ª edição, 1992.
- [8] Burczynski, T., Kane, J. H., Balakrishna, C., “Comparision of Shape Design Sensitivity Analysis Formulations via Material Derivative-Adjoint Variable and Implicit Differentiation Techniques for 3-D and 2-D Curved Boundary Element”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142, 89-109, 1997.
- [9] Cardoso, E. L., “Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas”, *Dissertação de Mestrado*, UFRGS, 2000.
- [10] Choi, J., Lee, B., Han, J. S., “Boundary Integral Method for Shape Optimization of Interface Problems and its Applications to Implant Design in Dentistry”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 6909-6926, 2001.
- [11] Choi, J., Kwak, B., “A unified approach for adjoint and direct method in shape design sensitivity analysis using boundary integral formulation”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 7, no 1, 1990.
- [12] Finnigan, P.M., Kela, A., Davis, J. E., “Geometry as a Basis for Finite Element Automation”, *Engineering with Computers*, Vol 5, N° 5, 147-160, 1989.
- [13] Gao, X.W., Liu, D.D., Chen, P.C., "Internal Stresses in Inelastic BEM Using Complex-Variable Differentiation", *Computational Mechanics* 28, pp.40-46, 2002
- [14] Haftka, R. T., Gürdal, Z., “Elements of Structural Optimization”, Kluwel Academic Publishers, 3ª edição, 1992.

- [15] Harrington, S., "Computer Graphics – A Programming Approach", McGraw-Hill, 1983.
- [16] Herskovits, J., "Advances in Structural Optimization (Solid Mechanics and its Applications)", Springer, 2002.
- [17] Kumar, V., German, M. D., Lee, S. J., "A Geometry-Based 2 Dimensional Shape Optimization Methodology and a Software System with Applications", Proceeding of the 3^o International Conference on CAD/CAM Robotics and Factories of the Future, Edited by B. Praasad, Vol 2, Springer-Verlag, New York, 5-10, 1989.
- [18] Lyness, J. N., Moler, C. B., "Numerical Differentiation of Analytic Functions, SIAM Journal of Numerical, 4, 202-210, 1967.
- [19] Matlab User's Guide, rev.6.5, The MathWorks Inc., Massachusetts, USA, 2002.
- [20] Nocedal, J., Wright, S., "Numerical Optimization", Springer Series in Operations Research, 2000.
- [21] Parvizian, J., Fenner, R. T., "Shape Optimization by the Boundary Element Method: A Comparison Between Mathematical Programming and Normal Movement Approaches", Engineering Analysis with Boundary Element, 19, 137-145, 1997.
- [22] Pilkey, W.D., "Peterson's Stress Concentration Factors" John Wiley & Sons, 1997.
- [23] Popov, E. P., "Introdução à mecânica dos sólidos", Edgard Blucher, 1978.
- [24] Rockafellar, R. T., "Convex Analysis", Princeton Landmarks in Mathematics, New Jersey, 1997.
- [25] Ronan, C. A., "História Ilustrada da Ciência da Universidade de Cambridge", Vol IV, Ed. Jorge Zahar, Círculo do Livro, São Paulo, 1991.
- [26] Secchi, A. R., "Otimização de Processos", Curso de Pós-Graduação em Engenharia Química, UFRGS, 2001.
- [27] Shames, I. H., "Mechanics of Deformable Solids", Prentice-Hall, 1965.
- [28] Shi, X., Mukherjee, S., "Shape optimization in three-dimensional linear elasticity by the boundary contour method", Engineering Analysis with Boundary Elements, 23, 627-637, 1999
- [29] Shigley, J. E., Mischke, C. R., "Mechanical Engineering Design", McGraw-Hill, 6^a edição, 2001.
- [30] Stroud, A. H., Secrest, D., "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, 1966.
- [31] Tafreshi, A., Fenner, R. T., "General-Purpose Computer Program for Shape Optimization of Engineering Structures Using the Boundary Element Method", Computers & Structures, Vol 56, No 5, pp 713-720, 1995.
- [32] Tai, K., Fenner, R. T., "Numerical Study of Some Approaches to Shape Design Sensitivity Analysis Using Boundary Elements", Journal of Strain Analysis, Vol 31 N^o 5, 1996.

- [33] Tai, K., Fenner, R. T., “Optimum Shape and Topology Design Using the Boundary Element Method”, *International Journal of Solids and Structures*, 36, 2021-2040, 1999.
- [34] Telles, J.C.F., “A Self-Adaptative Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Elements Integrals”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 24, 959-973, 1987.
- [35] Zhang, Z.Q., Zhou, J.X., Zhou, N., Wang, X.M., Zhang, L., “Shape optimization using reproducing kernel particle method and an enriched genetic algorithm”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 4048-4070, 2005.
- [36] Zhao, Z., Lie, S. T., “Design Sensitivity Analysis with Hypersingular Boundary Elements”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, 2000, 485-490.
- [37] Zienkiewicz, O. C., Campbell, J. C., “Shape Optimization and Sequential Linear Programming” in: Gallagher, R. A., Zienkiewicz, O. E., (EDS), “Optimum Structural Design”, Wiley, New York, 1973.
- [38] Wu, Z., “An efficient approach for shape optimization of components”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, pp 1595-1610, 2005.

APÊNDICE I

Soluções fundamentais de elasticidade bidimensional:

Soluções fundamentais são necessárias na formulação do MEC. Elas geralmente representam a solução de um corpo infinito carregado com uma força concentrada unitária. Estas soluções de trações e deslocamentos para problemas elásticos com as mesmas propriedades do material que o corpo em consideração são chamadas de soluções fundamentais de Kelvin. Aplicando uma carga unitária em um corpo infinito elástico e calculando os deslocamentos e trações resultantes desse carregamento, obtém-se estas soluções. As soluções fundamentais de Kelvin para problemas bidimensionais são [Brebbia et al, 1984]:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (112)$$

para deslocamento e

$$p_{lk}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,k} r_{,l}) - (1-2\nu)(r_{,l} n_k - r_{,k} n_l) \right] \quad (113)$$

para tração. Onde p_{lk}^* e u_{lk}^* representam as trações e deslocamentos na direção k devido a uma força unitária na direção l ; r é a distância entre o ponto fonte e o ponto calculado; ν é o coeficiente de Poisson e G é módulo de cisalhamento. A Figura 8.1 ilustra o ponto de aplicação do carregamento (ponto fonte) e o ponto que se obtém os resultados de tração e deslocamento (ponto campo) e seus respectivos eixos.

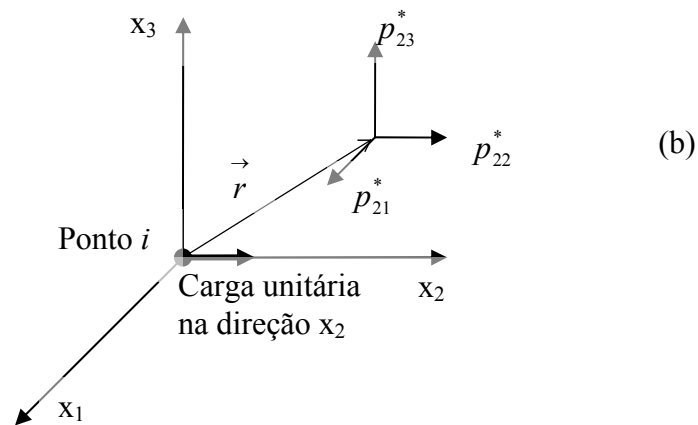
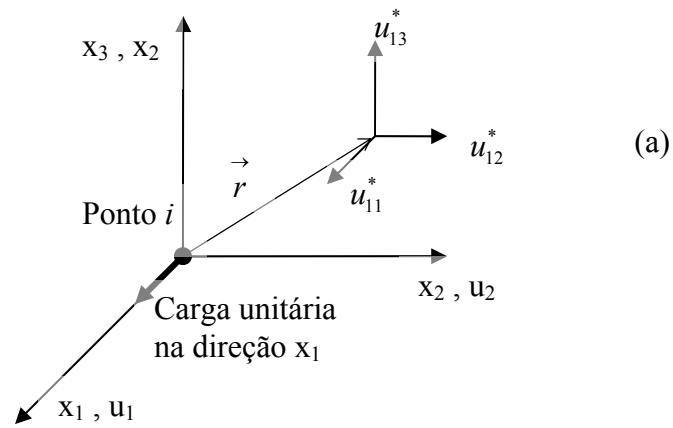


Figura 8.1 - (a) Componentes de deslocamento da solução fundamental (carregamento unitário na direção x_1), (b) componentes de tração da solução fundamental (carregamento unitário na direção x_2).