UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Camila Peres Nogues

CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Porto Alegre
2013/2

Camila Peres Nogues

CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial e obrigatório para obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Porto Alegre

2013

Camila Peres Nogues

CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial e obrigatório para obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Aprovado em 03 de Dezembro de 2013.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald
Faculdade de Educação – UFRGS

____

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso (Orientador)
Instituto de Matemática – UFRGS

AGRADECIMENTOS

A toda minha família, em especial:

À minha avó Anna Maria, por ser minha amiga, minha confidente e conselheira. Por todo apoio e dedicação, por ser uma pessoa muito especial e uma inspiração de mãe e mulher.

Aos meus irmãos que sei que posso contar em qualquer circunstância e que mesmo de longe mostraram estar disponíveis a me ajudar e preocupados com minha formação.

Aos meus tios e tias da família Peres, por estarem presentes nessa minha trajetória e dispostos a me ajudar no que for preciso, por serem minha base e meus exemplos.

Ao meu namorado Fábio, pelo carinho e paciência, estando ao meu lado nesses últimos semestres da graduação, superando junto comigo os momentos difíceis, me incentivando e apoiando de todas as maneiras possíveis.

Aos meus colegas e amigos que conquistei durante o curso, que me apoiaram e compartilharam comigo experiências, sendo essenciais nessa minha trajetória. Em especial à Natali e à Cândida pela força e companheirismo.

Ao meu orientador, Marcus Basso, pela ajuda na elaboração deste trabalho e por todos os momentos em que ele esteve presente no curso, sendo um exemplo de professor.

Aos professores Francisco Egger e Márcia Notare por aceitarem participar da minha banca e contribuírem para a minha pesquisa.

Ao Colégio de Aplicação da UFRGS e aos professores Simone Cruz e Eduardo Britto, que me ajudaram e apostaram no meu trabalho.

Aos meus alunos, pelas conquistas alcançadas nesta pesquisa.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo propor uma sequência didática que possa contribuir na construção dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo. Para isso, foram utilizados como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e trabalhos correlatos envolvendo o conteúdo de trigonometria. A metodologia de pesquisa foi constituída de duas etapas, sendo a primeira a aplicação de um questionário inicial com o intuito de verificar os conhecimentos prévios dos estudantes, e a segunda etapa a construção do conceito das razões cosseno, seno e tangente no triângulo retângulo. Essas duas etapas foram elaboradas a partir de um conjunto de atividades que foram realizadas com alunos da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental no Colégio de Aplicação da UFRGS, escola federal situada em Porto Alegre, RS. A coleta e a análise dos dados constituíram-se das observações feitas pela pesquisadora e dos registros escritos dos participantes. Com os resultados apresentados foi possível constatar a importância de se verificar, inicialmente, os conceitos precedentes evidenciados pelos alunos, para, posteriormente, aplicar as demais atividades. Esta pesquisa também aborda os esquemas, conceitos e teoremas em ação utilizados pelos participantes na execução das atividades, e finaliza afirmando que a construção de conhecimentos por parte dos alunos depende tanto da influência do professor no papel de mediador, quanto do envolvimento e participação ativa desses alunos.

Palavras-chave: Ensino de Trigonometria; Campos Conceituais; Conhecimentos prévios.

ABSTRACT

This paper has as its objective to propose a didactic sequence that can contribute in the construction of basic concepts of trigonometry in a rectangle triangle. For this, it was used as theoretical foundation the Vergnaud's Conceptual Fields Theory and correlative works on trigonometry. The methodology of research was formed by two steps, being the first an application of an initial questionary with the intention of verifying the students' previous knowledge, and the second step was the construction of the concepts of cosine, sine and tangent in a rectangle triangle. These two steps were prepared from a set of activities that were performed with students of the last year of Elementary School in Colégio de Aplicação da UFRGS, federal school in Porto Alegre, RS. The collection and analysis of data consisted of observations made by the researcher and the written records of the participants. With the results it was possible to verify the importance of knowing initially the previous concepts of students to later apply other activities. This research also takes on the schemes, concepts and theories used by the participants on the execution of the activities, and ends by affirming that the acquiring of knowledge by the students depends as much on the teacher's role as a mediator as on the engagement and active participation of these students.

Keywords: Teaching of Trigonometry; Conceptual Fields; Previous Knowledge.

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo proponer una secuencia didáctica que pueda contribuir en la construcción de los conceptos básicos de trigonometría en el triángulo rectángulo. Para eso, fueron utilizados como fundamentación teórica la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud y trabajos correlativos que contienen la materia de trigonometría. La metodología de pesquisa fue constituida en dos etapas, la primera de aplicación de un cuestionario inicial con el objetivo de diagnosticar los conocimientos previos de los estudiantes, y la segunda etapa la elaboración del concepto de las razones del coseno, seno y tangente en el triángulo rectángulo. Estas dos etapas fueron preparadas desde un conjunto de actividades que fueron realizadas con alumnos del 3er año de Instituto (Liceo) en el *Colégio de Aplicação* de la UFRGS, escuela federal ubicada en Porto Alegre, RS. La recogida y el análisis de los datos consistieron en observaciones realizadas por el investigador y los registros escritos de los participantes. Con los resultados obtenidos se pudo comprobar la importancia de conocer inicialmente los conceptos previos de los estudiantes para aplicar posteriormente otras actividades. Esta pesquisa también aborda los esquemas, conceptos y teoremas en acción utilizados por los partícipes en la ejecución de las actividades, y finaliza presentando que la adquisición de conocimientos por parte de los alumnos depende tanto de la influencia del profesor, en el papel de mediador, como también de la implicación y participación activa de esos alumnos.

Palabras clave: Enseñanza de Trigonometría, Campos Conceptuales, Conocimientos previos.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Através de observações realizadas durante as minhas práticas na graduação, como professora em sala de aula, e em conversas com colegas, pude perceber que um dos assuntos da matemática escolar que provocam dúvidas nos estudantes é a trigonometria. Talvez o pouco interesse pelo conteúdo esteja relacionado à falta de compreensão, ou pelos alunos não perceberem a presença desse assunto em seus cotidianos, ou ainda por não conseguirem resolver exercícios que necessitem de conceitos trigonométricos.

Minha motivação para trabalhar com o conteúdo de trigonometria surgiu a partir de uma atividade realizada no ano de 2012 como bolsista do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência). A atividade, realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio, consistia em quatro encontros que abordavam conceitos básicos de trigonometria, como as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e as leis de seno e cosseno para triângulos quaisquer. Nesses encontros pude perceber que parte dos alunos apresentava dificuldade para entender as razões trigonométricas e que algumas dessas dificuldades estavam relacionadas à ausência de conceitos precedentes, tais como identificação de um triângulo retângulo, noções de ângulos, soma dos ângulos internos de um triângulo e semelhança de triângulos. Acredito que essas dificuldades tenham se originado pelo fato dos conceitos não estarem bem definidos para esses alunos ou talvez por alguns deles não entenderem o conceito que está presente nas razões trigonométricas.

Ao analisar alguns procedimentos realizados pelos estudantes na resolução de questões envolvendo conceitos de trigonometria, posso destacar a falta de compreensão quanto aos conceitos e representações matemáticas. Por exemplo, alguns alunos, que apresentavam dificuldade em perceber que sen 45º corresponde a um valor numérico determinado, equacionavam o exercício e não sabiam como prosseguir. Ou seja, se durante a resolução, esses alunos chegassem em $sen\ 45° = \frac{x}{2}$, eles não sabiam como dar continuidade ao cálculo. Pude perceber, também, que alguns alunos não conseguiam identificar os catetos oposto e adjacente no triângulo retângulo.

Desta forma, pensei em uma sequência didática que abordasse esses conceitos básicos de trigonometria para que fosse possível acompanhar e analisar o desenvolvimento dos alunos com esses conceitos. Com isso, pude definir o problema a ser investigado: de que forma uma sequência didática envolvendo conceitos básicos de trigonometria pode auxiliar no desenvolvimento do conhecimento dos estudantes sobre esse conteúdo?

Portanto, o objetivo deste trabalho consiste na elaboração de uma sequência didática para auxiliar na construção dos conceitos básicos de trigonometria. Para análise dos dados obtidos após a aplicação da sequência didática utilizei a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993).

De acordo com esta teoria, o conhecimento está organizado em campos conceituais, constituindo-se em um conjunto de situações, problemas, conceitos, conteúdos que interferem durante o processo de desenvolvimento e aquisição de um novo conhecimento. Uma proposta do autor é repensar as condições de aprendizagem com o objetivo de que esta se torne relevante para os alunos.

A Teoria dos Campos Conceituais contribui na interpretação dos processos utilizados pelos alunos na resolução dos exercícios e no entendimento das dificuldades apresentadas por eles. Segundo essa teoria, é importante que compreendamos como se dá a construção do conhecimento pelos estudantes, através de suas reflexões, representações e raciocínios. Com isso podemos antever formas eficientes de ensinar os conteúdos.

Portanto para a investigação do problema enunciado anteriormente, propus uma sequência didática, organizada em dois encontros, para alunos da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental no Colégio de Aplicação da UFRGS. Nesta sequência didática são apresentadas questões para perceber os conhecimentos prévios dos alunos e, em seguida, são propostos exercícios para a construção de outros conceitos como seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, que dependem dos conhecimentos prévios analisados anteriormente.

Além disso, procurei em trabalhos correlatos e nos Parâmetros Curriculares Nacionais orientações quanto ao ensino e à aprendizagem de matemática, especificamente de trigonometria. Através dessas leituras pude pensar em estratégias para a realização da sequência didática e maneiras de analisar os resultados obtidos.

A seguir, apresento uma descrição sumária deste trabalho.

Neste primeiro capítulo, estão: a motivação para a realização desta pesquisa, os objetivos e o problema a ser investigado. No segundo capítulo é abordada a fundamentação teórica que deu suporte a este trabalho. Já no terceiro capítulo apresento a metodologia utilizada para esta pesquisa e a organização da sequência didática. Seguindo para o quarto capítulo, nele encontram-se o relato das atividades e a análise dos dados coletados. Por último, apresento minhas reflexões acerca dos pontos abordados na análise.

2. BASE TEÓRICA

Em todas as minhas práticas proporcionadas pela graduação, sempre procurei mostrar aos alunos a importância de dominar os conceitos e saber operar com eles para poder resolver os exercícios. Percebendo a dificuldade que muitos encontram em aprender matemática, juntando com o meu interesse por pesquisas em Educação Matemática, surgiu a vontade em saber como se desenvolve a aprendizagem dos estudantes, e foi assim que iniciei a leitura da Teoria dos Campos Conceituais. Para entender como essa teoria se desenvolve na prática, selecionei para a realização da pesquisa o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo por já possuir uma experiência no ensino com este conteúdo.

2.1. TRABALHOS CORRELATOS

A experiência no ensino de trigonometria através de atividades em sala de aula me fez buscar por leituras de artigos e trabalhos já realizados nesse conteúdo que pudessem contribuir com o desenvolvimento de minha pesquisa. Participando do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, realizado em Curitiba – PR no ano de 2013, encontrei cinco artigos, que julgo interessantes para esta pesquisa.

No artigo de Paim e Santana (2013), o objetivo foi analisar as contribuições que uma sequência de ensino, utilizando materiais manipulativos, pode trazer para a aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Através da utilização de alguns materiais manipulativos como o material dourado, as barras de frações, o papel emborrachado (E.V.A.) e as barras e medidas, os autores investigam as ligações entre diferentes campos do conhecimento matemático, representados pelos campos geométrico, multiplicativo e aditivo, utilizando como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais.

Por se tratar de uma pesquisa em aberto não foi possível verificar as conclusões dos autores, porém eles apresentam uma breve discussão sobre os resultados esperados e afirmam que as questões propostas aos alunos necessitam de uma análise nas suas respostas e estratégias para identificar os campos conceituais que a mesma pode apresentar.

Esse artigo contribuiu na preparação da sequência didática, pois ele confirma a hipótese de se trabalhar primeiramente com os conceitos precedentes àqueles das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Também, por indicar a importância de primeiro fazer uma análise das questões a serem propostas aos alunos identificando os campos conceituais presentes nela.

Outro trabalho que destaco sobre o uso de materiais manipulativos é o de Almeida e Vieira (2013). Trata-se de um relato de uma atividade realizada pelo PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) da Universidade Regional de Blumenau (FURB), no qual as autoras, em um primeiro momento, observam as dificuldades apresentadas por alunos do 1º ano do Ensino Médio e elaboram uma atividade de construção de um teodolito artesanal com o objetivo de facilitar a visualização das funções trigonométricas. Neste sentido, os espaços físicos da escola são explorados e utilizados para contextualizar problemas envolvendo cálculos de medidas. As autoras defendem o uso de materiais concretos no ensino de matemática, afirmando que estes facilitam a compreensão com relação à interpretação, resolução de problemas, conhecimentos matemáticos por meio do trabalho em equipe.

Embora em minha pesquisa não sejam utilizados materiais manipulativos, o relato da atividade descrita pelo estudo recém citado explora aspectos históricos da trigonometria antes de propor a atividade aos estudantes, o que condiz com a sequência didática de minha pesquisa. Esse trabalho também contribuiu para a organização dos problemas que envolveram a aplicação das razões trigonométricas para o cálculo de medidas inacessíveis.

Os demais trabalhos a serem descritos também utilizam a história da trigonometria na elaboração da sequência didática a ser proposta para os alunos. No trabalho de Moura e Pontes (2013), é desenvolvida uma sequência didática com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental utilizando livros paradidáticos de matemática com ênfase no ensino da trigonometria.

O interessante desse trabalho é a abordagem que os autores empregaram sobre o conteúdo de trigonometria, organizando uma sequência didática que se inicia com a apresentação da história da trigonometria, levando os alunos a refletir sobre o desenvolvimento desse conteúdo e aproveitando para identificar os conhecimentos prévios dos alunos. A sequência didática ocorreu durante 24 encontros de um período cada e após a realização de várias atividades envolvendo a noção de ângulo até o estudo da circunferência, os autores puderam avaliar os resultados e verificar uma forma de ensinar esse conteúdo matemático para que este esteja presente no cotidiano do aluno.

A partir deste estudo, identifiquei possibilidades de trabalhar o conteúdo de trigonometria no Ensino Fundamental e acrescentar na sequência didática aspectos históricos desse conteúdo a fim de levar o aluno a refletir sobre o desenvolvimento do mesmo.

Na leitura de Souza e colegas (2013) pude identificar que o objetivo desse trabalho foi investigar como a história da trigonometria pode facilitar a aprendizagem das funções seno e cosseno. Para realizar essa investigação os autores elaboraram uma proposta em três etapas. Na primeira etapa foi realizada uma avaliação diagnóstica com os alunos para verificar seus pré-requisitos. Na segunda foi apresentada a história da trigonometria e, por último, foi aplicado o mesmo teste da primeira etapa para verificar possíveis mudanças no conhecimento dos alunos sobre trigonometria.

Para a elaboração da proposta e a análise dos resultados foi utilizada a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e, como esperado pelos autores, houve um avanço no conhecimento dos alunos durante a realização das atividades. Os autores afirmam que a história da trigonometria é um elemento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno e que a diversidade de estratégias de ensino juntamente com a participação ativa do aluno constituem fatores fundamentais para que haja uma aprendizagem significativa.

O interessante desse trabalho é a sequência das atividades que se parece com a de minha pesquisa, pois os autores separaram a proposta em três etapas para, posteriormente, poder analisar e verificar se suas hipóteses se confirmariam. Esse estudo me auxiliou com a análise dos dados e com a ideia de verificar inicialmente os conhecimentos prévios dos alunos.

Para me auxiliar na elaboração do conjunto de questões da sequência didática de minha pesquisa, destaco Mota e colegas (2013). Esse artigo realiza uma análise dos erros cometidos por alunos ao resolver questões que envolveram as relações seno e cosseno no triângulo retângulo. Para a análise foi preparado um teste com sete questões sobre esse conteúdo e aplicado a alunos do 2º ano do Ensino Médio. Os autores afirmam que os erros identificados no tratamento dessas relações trigonométricas estão relacionados à falta de compreensão na definição e identificação dos elementos de um triângulo retângulo. Os autores também acreditam que as dificuldades na compreensão dos conceitos que antecedem o estudo das relações no triângulo retângulo devem ser superadas para que os alunos tenham o desenvolvimento necessário na aprendizagem da trigonometria.

Esse artigo teve influência para elaborar o questionário inicial proposto na sequência didática de minha pesquisa, pois indica erros frequentes cometidos por alunos quanto à identificação dos elementos de um triângulo retângulo e dos conceitos básicos como cateto e ângulo. O artigo mencionado também auxiliou para a análise das respostas dos alunos.

Dentre outras leituras realizadas posso citar duas dissertações de Mestrado.

Na primeira, Klein (2009) propôs uma metodologia de ensino que pudesse contribuir para uma construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual da trigonometria. Como fundamentação teórica a autora utiliza a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. A sequência de atividades contou inicialmente com a elaboração de um mapa conceitual com o objetivo de organizar a estrutura do objeto de análise.

Na sequência de ensino aplicada em sala de aula contou como primeira atividade o preenchimento de um questionário inicial para conhecer as concepções prévias dos alunos. Em seguida foi proposta aos alunos uma atividade prática de construção de um astrolábio artesanal (objeto para medir ângulos). E assim a autora deu continuidade a sua sequência por mais seis encontros, durante os quais em que estabeleceu a relação entre o grau e o radiano, propôs uma situação em que os alunos puderam dar significado ao raio unitário e à representação das funções trigonométricas no círculo trigonométrico, realizou mais um teste para avaliar a evolução na aprendizagem dos estudantes e elaborou mais três atividades para a construção dos gráficos das funções trigonométricas e análise dos comportamentos dessas funções.

Essa dissertação foi bastante importante para a minha pesquisa, pois além de utilizar uma mesma perspectiva teórica a autora propõe uma metodologia em que, primeiramente, são avaliados os conhecimentos prévios dos alunos para, posteriormente, trabalhar os conceitos necessários e verificar o desenvolvimento dos alunos com o conteúdo de trigonometria. Os procedimentos para a realização de minha pesquisa e a forma de analisar os resultados obtidos foram influenciados pela dissertação da autora Klein.

Já na dissertação de Lindegger (2000) o objetivo foi investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, por meio da introdução dos conceitos referente às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, a partir da manipulação de modelos com duas turmas de 8ª série do Ensino Fundamental. Tais modelos são descritos pelo autor como situações-problema, criadas com questões simples, contextualizadas e concretas, o que serviu como hipótese de pesquisa para o autor.

Para a realização da pesquisa Lindegger (2000) estabeleceu uma das turmas como grupo de referência, para o qual as atividades foram realizadas em sete encontros e de forma, considerada pelo autor como tradicional, adotando inclusive o livro didático. A outra turma foi considerada como grupo experimental, para o qual foram realizadas atividades organizadas em treze encontros que abordaram as situações-problema propostas pelo pesquisador. A sequência de ensino organizada serviu como facilitador para a construção e a apropriação dos conceitos da trigonometria.

A dissertação apresenta como fundamentação teórica as ideias da psicologia cognitiva de Vygotsky, Vergnaud e da didática francesa de Brousseau, apoiando-se no pensamento sócio construtivista, em resoluções de problemas e na teoria das situações.

Essa dissertação auxiliou na estrutura do presente trabalho e na análise dos resultados obtidos, já que o autor realiza uma análise quantitativa e qualitativa. Também incluiu uma proposta de realização de problemas concretos, advindos da realidade, para, logo após, propor problemas formais para os conceitos adquirirem significados abrangentes.

A seguir apresento a Tabela 1, listando os trabalhos correlatos citados anteriormente, elencando, para cada um, a pesquisa desenvolvida e o referencial teórico que a sustenta.

Tabela 1 – Síntese dos trabalhos correlatos.

Autores/Tema	**Base Teórica**	**Métodos e Resultados**
PAIM e SANTANA (2013). Aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo através do uso de materiais manipulativos.	Teoria dos Campos Conceituais.	Sequência de atividades utilizando materiais manipulativos para investigar as relações entre diferentes campos do conhecimento matemático. Pesquisa em aberto, portanto não apresenta resultados.
ALMEIDA e VIEIRA (2013). Ensino de trigonometria através do uso do instrumento teodolito.	Kamii e Declark (1986); Luckesi (2005); Nehring e Pozzobon (2007); dentre outros.	Atividade de construção de teodolito artesanal, na qual foram explorados alguns espaços físicos da escola a fim de contextualizar problemas de medidas e facilitar a visualização das funções trigonométricas. As autoras afirmam que o uso do teodolito facilitou a compreensão, a resolução dos problemas e o trabalho em equipe.
MOURA e PONTES (2013). Ensino da trigonometria através de livros paradidáticos da matemática.	História da Trigonometria.	Sequência didática envolvendo a história da trigonometria, abordando conceitos desde a noção de ângulo até o estudo da circunferência. Através das atividades os autores verificaram uma forma de ensinar a trigonometria relacionando com o cotidiano dos alunos.
SOUZA e colegas (2013). Aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno através da história da trigonometria.	Concepção de ensino e aprendizagem na perspectiva cognitivista ausubeliana.	Primeiramente foi realizado um teste para verificar os conceitos prévios dos alunos, em seguida foi apresentada a história da trigonometria, e por último foi aplicado o mesmo teste inicial para verificar a possível evolução no conhecimento dos alunos sobre trigonometria. Os alunos avaliados mostraram evolução no final da sequência de atividades e os autores puderam afirmar que utilizar a história da trigonometria facilitou na compreensão das funções seno e cosseno.

MOTA e colegas (2013). Análise dos erros cometidos por alunos ao resolver questões sobre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.	Dionizio e Brandt (2011); Fortes, (2012); Silva e Neto (2006); dentre outros.	Pesquisa diagnóstica realizada por meio da aplicação de um teste sobre trigonometria no triângulo retângulo. Os erros identificados pelas respostas dos alunos estão relacionados à falta de compreensão e definição dos conceitos precedentes.
KLEIN (2009). Ensino de trigonometria.	Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.	Sequência de atividades organizada em situações diferentes com o objetivo de contribuir para uma construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual da trigonometria. A metodologia utilizada comtemplou tanto os aspectos conceituais, procedimentais e de atitude, o que enriquece o ensino.
Luiz Roberto de Moura Lindegger. Aprendizagem de trigonometria através da manipulação de modelos.	Psicologia cognitiva de Vygotsky, Vergnaud e a Teoria das Situações Didáticas de Brosseau.	O autor trabalha de maneira diferente com duas turmas de 8ª série do Ensino Fundamental. Uma delas trabalha com o livro didático e resolução de exercícios, enquanto a outra trabalha com situações-problema, de forma contextualizada e concreta. De maneira geral, a primeira turma obteve um aproveitamento final abaixo da segunda turma. Essa diferença comprova a importância de propor situações que requerem mais raciocínio e participação ativa do aluno do que mecanização na sua resolução.

Todos os trabalhos aqui descritos estão relacionados com o tema de minha pesquisa e contribuíram de alguma forma para a sua elaboração, seja na preparação da sequência didática, da estrutura deste trabalho ou para a análise dos resultados obtidos.

2.2. TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), desenvolvida pelo matemático e psicólogo francês Gérard Vergnaud, é uma teoria cognitivista de aprendizagem baseada nas ideias de Jean Piaget[1]. O objetivo da TCC é propiciar um quadro teórico para as pesquisas e os estudos do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, principalmente das que dependem da ciência e da técnica (VERGNAUD, 1993). Essa teoria pode ser utilizada em diversas áreas, mas na matemática ela está bastante desenvolvida nos campos de adição, multiplicação, relações número-espaço e álgebra.

[1] Jean Piaget (1896-1980) é considerado um dos mais importantes pensadores do século XX. Fundou a Epistemologia Genética, teoria do conhecimento com base no estudo da gênese psicológica do pensamento humano.

Para Vergnaud, um conceito não pode ser simplificado apenas à sua definição, especialmente se o que está sendo pesquisado são suas formas de aprendizagem e ensino. Por isso, ele afirma que são as situações e os problemas a resolver que produzem sentido a um conceito para a criança.

A seguir apresento definições da Teoria de Vergnaud, que julgo pertinentes para a realização de minha pesquisa.

2.1.1. Esquema

Vergnaud define esquema como sendo:

> A organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada. É nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória (VERGNAUD, 1993, p.2).

No âmbito da matemática, Vergnaud (1993) exemplifica:

- a enumeração de uma pequena coleção de objetos por parte de uma criança de 5 anos, necessita de um esquema que lhe permita coordenar os movimentos dos olhos e das mãos em relação à posição dos objetos, enunciando a sequência numérica dando destaque tonal ou repetindo o último nome numeral: um, dois, três, quatro, cinco ... cinco!
- a resolução de equações lineares por parte dos alunos de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, iniciantes em álgebra, segue um esquema apoiado em hábitos adquiridos e teoremas do tipo "mantém a igualdade dividindo por b dos dois lados".

As operações utilizadas no método para resolver os exercícios pelos estudantes são automatizadas com o passar do tempo, e a utilização do esquema baseia-se no conhecimento que cada estudante possui, nas decisões conscientes e nas características do exercício a ser resolvido.

Para Vergnaud, um esquema está associado a uma situação. O desenvolvimento do processo de aquisição de conhecimentos de um estudante está relacionado com a diversidade de esquemas que ele possuir. Por isso é importante que a escola e o professor propiciem situações variadas para que seja possível o aprimoramento e o desenvolvimento desses esquemas. (KLEIN, 2009).

Vergnaud (1993, p.1) afirma: “um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se nos interessamos por sua aprendizagem e seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança”.

E assim, podem-se distinguir duas classes de situações:

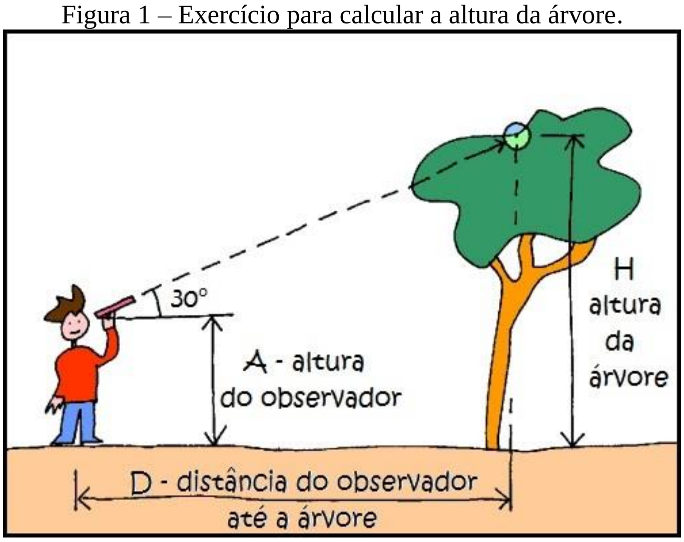
- classes de situações em que o sujeito já dispõe das competências necessárias para o tratamento imediato de determinada situação;
- classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o leva a um momento de reflexão e exploração, realizando tentativas e adquirindo novas competências para alcançar o sucesso nessas situações.

Resumindo, na primeira classe de situações o indivíduo possui comportamentos automatizados, organizados apenas por um esquema. Na segunda classe o indivíduo necessita de vários esquemas que exigem ser combinados, podemos dizer que é um processo acompanhado por descobertas.

Como exemplo, considere os exercícios a seguir e suponha um aluno que já tenha estudado as razões trigonométricas no triângulo retângulo:

- Uma pessoa de 1,64 m de altura observa o topo de uma árvore sob um ângulo de 30° com a horizontal (Fig. 1). Conhecendo a distância de 6 m do observador até a árvore, calcule a altura da árvore.

Figura 1 – Exercício para calcular a altura da árvore.



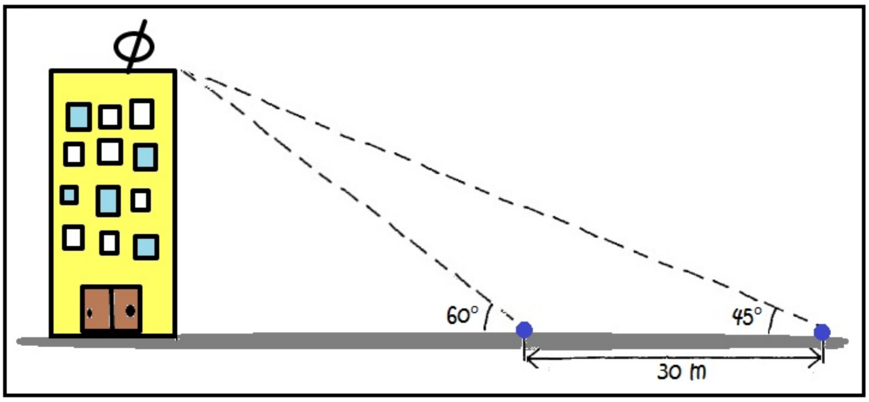
Fonte: Arquivo pessoal.

Para resolver este exercício o estudante deve identificar os dados a serem utilizados para, em seguida, utilizar a razão trigonométrica correspondente e chegar à resposta. Assim, podemos perceber que o esquema a ser utilizado está de acordo com a primeira classe de situações, pois uma vez que o aluno já conhece as razões trigonométricas, ele já detém o esquema necessário para a resolução, bastando aplicá-lo.

Agora, considere o próximo exemplo:

- Um observador deseja saber a altura de um determinado edifício em sua cidade. Para isso ele posiciona seu aparelho de medir ângulos no solo e aponta-o para o topo do edifício marcando um ângulo de 45º com a horizontal (Fig. 2). Em seguida, o observador se aproxima 30 m do edifício e mede um ângulo de 60º com a mesma horizontal. Com esses dados, como ele poderá determinar a altura do edifício?

Figura 2 – Exercício para calcular a altura do edifício.



Fonte: Arquivo pessoal.

A resolução deste exercício se dá com os cálculos da mesma razão trigonométrica para o ângulo de 45º e o ângulo de 60º. Como serão utilizadas duas incógnitas, uma ficará em função da outra e, após, esses valores serão igualados para determinar a altura do edifício. Podemos verificar que esse exercício se encaixa na segunda classe de situações, pois o aluno necessita combinar mais de um esquema para chegar à resposta, exigindo reflexão e raciocínio um pouco mais elaborados do que no exercício anterior.

Através dos esquemas podemos perceber o raciocínio utilizado pelo aluno e analisar quais conhecimentos em ação e teoremas em ação estão sendo utilizados e de que maneira isto está sendo feito para, assim, compreender o funcionamento cognitivo desse aluno.

2.1.2. Invariantes operatórias

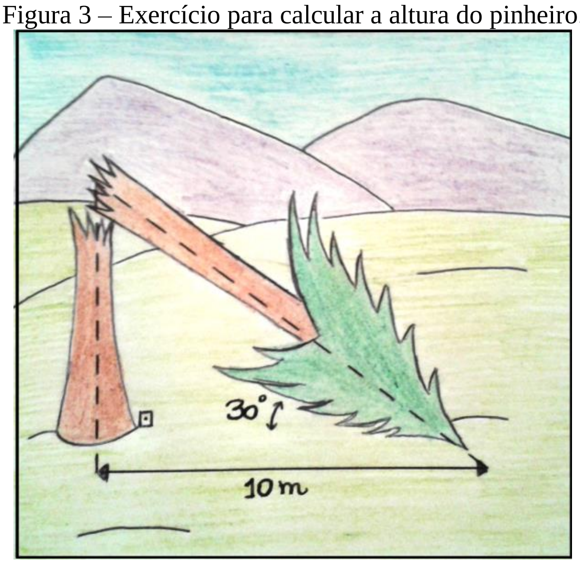
Quando falamos em esquema podemos perceber que ele está sustentado por uma organização de conceitos implícitos e pode haver erros quando esse esquema é utilizado de forma automatizada. Porém, esses erros não se devem necessariamente ao fato do esquema estar sendo mal empregado e sim por não existir o reconhecimento dos conceitos/teoremas em ação do sujeito. Esses últimos são designados por Vergnaud como as “invariantes operatórias”.

Os conceitos em ação são os conceitos considerados pertinentes na ação em situação, isto é, os conceitos utilizados naturalmente pelo sujeito e apropriados para a situação. Os teoremas em ação são as proposições tidas como verdadeiras na ação em situação, ou seja, são teoremas restritos a uma situação que nem sempre são generalizáveis ou provados matematicamente (VERGNAUD, 2009). Assim, é possível afirmar que os conceitos em ação são as informações atribuídas às propriedades de situações, e os teoremas em ação referem-se aos procedimentos que articulam as informações e que constituem as generalizações lógicas do sujeito. Em outras palavras, através dos conceitos em ação é possível identificar os elementos pertinentes para a resolução do problema e a solução deste dependerá da utilização de teoremas em ação. (VERGNAUD, 1993).

Considere o problema a seguir, que exemplifica as invariantes operatórias:

- Analise a figura representativa de um pinheiro após ser quebrado por uma tempestade e determine a altura desse pinheiro antes de ser quebrado (Fig. 3).

Figura 3 – Exercício para calcular a altura do pinheiro.



Fonte: Arquivo pessoal.

Com este exemplo podemos perceber conceitos em ação como noções de ângulo e de medida (30º e 10 m), e teoremas em ação como as razões trigonométricas seno, cosseno ou tangente que serão necessárias no procedimento para resolver a questão.

2.1.3. Conceito e Campo Conceitual

Para Vergnaud é através de situações diversas que um conceito comprova a sua operacionalidade e a conceitualização é o ponto central e mais importante do desenvolvimento cognitivo (CARVALHO, Jr., 2008). Portanto, devemos compreender a definição de conceito na teoria dos campos conceituais. Para Vergnaud um conceito é formado por três conjuntos (S, I, R), em que:

- S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito;
- I é o conjunto das invariantes nas quais se baseia a operacionalidade dos conceitos e esquemas (significado);
- R é o conjunto das representações linguísticas e simbólicas que permitem representar as invariantes, as situações e procedimentos para lidar com elas. (significante).

Segundo Vergnaud (1993, p. 9): "estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, no decurso da aprendizagem ou quando de sua utilização, é necessariamente considerar esses três planos ao mesmo tempo".

Para exemplificar podemos considerar o conceito de razão trigonométrica como o seno, o cosseno e a tangente no triângulo retângulo, conforme a Tabela 2.

Tabela 2 – Exemplo de conceito para Vergnaud.

S	**I**	**R**
Situações onde são utilizadas as razões trigonométricas.	*Invariantes operatórias.*	*Representações simbólicas.*
Cálculo de medidas inacessíveis como a largura de um rio ou a altura de um prédio.	Definição de triângulo retângulo, as razões entre seus lados e a noção de ângulo.	tg 45º = 1 sen 30º = ½

A partir disso, podemos perceber que, para entender como acontece o desenvolvimento e a aprendizagem de uma criança ou adolescente na teoria dos campos conceituais, não é possível considerar apenas um conceito e uma situação, será preciso considerar um conjunto de conceitos e um conjunto de situações, ou seja, um campo conceitual.

Um campo conceitual é definido, então, como um conjunto de situações, cujo domínio depende necessariamente de uma variedade de conceitos, esquemas e representações em estreita conexão e, ao mesmo tempo, um conjunto de conceitos que contribuem para o domínio dessas situações (VERGNAUD, 2009).

2.3. TRIGONOMETRIA

A trigonometria (*trigono* – triângular; *metria* – medida) surgiu diante da necessidade do homem de calcular medidas inacessíveis como, por exemplo: (IMENES e outros, 1979).

- O capitão de um navio, situado nas proximidades do litoral precisa saber a que distância se encontra da costa;
- Um topógrafo situado na praia necessita determinar a distância entre duas ilhas;
- Um engenheiro deve construir uma ponte sobre um rio e para isso deve saber a largura do mesmo (não havendo condições de atravessá-lo);
- Os astrônomos precisaram, no passado, determinar a distância da Terra à Lua;
- Para fazer o mapa de uma região, o cartógrafo necessita de alguns dados que lhe são fornecidos pelo topógrafo, e um dos problemas que ele poderá enfrentar é a determinação da altura de uma montanha, por exemplo.

Com isso, a trigonometria se faz presente para facilitar os cálculos dessas medidas e isso é feito através de relações estabelecidas entre ângulos e triângulos. Mas a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos, ela se constituiu em uma ferramenta importante para a evolução da matemática. Atualmente a trigonometria se estende a outros campos da atividade humana, como a eletricidade, mecânica, música e etc. (RIBEIRO e SOUZA, 2011).

Este trabalho, porém, enfoca os conceitos iniciais de trigonometria, como a definição de triângulo retângulo, a semelhança de triângulos, e algumas razões trigonométricas, inicialmente no triângulo retângulo e, posteriormente, no primeiro quadrante do círculo trigonométrico.

Como pesquisadora e futura professora, acredito que os tópicos básicos de trigonometria ensinados na escola são importantes para os estudantes no desenvolvimento de capacidades para resolver problemas matemáticos que necessitem de conceitos vinculados a tais tópicos. Nas práticas que realizei durante o curso de graduação, pude observar que alguns professores estão preocupados com a memorização das fórmulas, tornando-se “mecânica” essa aprendizagem em trigonometria. Assim, alguns conceitos fundamentais que são importantes em todo o estudo da trigonometria, tais como os de seno, cosseno e tangente de um ângulo, não ficam bem estabelecidos, o que prejudica a aprendizagem matemática dos alunos em termos desse conteúdo. Em outras palavras, a trigonometria apoia-se em conceitos básicos das razões trigonométricas no triângulo retângulo e acredito que com esses conceitos bem estabelecidos, a generalização da trigonometria ocorrerá mais facilmente para os estudantes, melhorando a sua compreensão.

> Apesar de sua importância, tradicionalmente a **trigonometria** é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis [...]. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo. (BRASIL, 2000, p. 121-122).

Até o momento apresentei a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, destacando as definições necessárias para a análise dos dados coletados durante a aplicação da sequência didática. Também abordei a utilização da trigonometria e a importância do ensino deste conteúdo nas escolas.

No próximo capítulo será apresentada a metodologia utilizada para concretizar esta pesquisa e a descrição dos procedimentos usados para a coleta e a análise dos dados.

3. PROCEDIMENTOS E MATERIAIS

Neste capítulo são apresentados a proposta de pesquisa, os sujeitos envolvidos, os recursos, a sequência de ensino a ser aplicada e a forma como foram coletados os dados para posterior reflexão e análise.

A pesquisa consistiu na elaboração de uma sequência didática organizada em dois encontros que envolveram conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo e na análise do conjunto de dados obtidos.

3.1. SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada no Colégio de Aplicação da UFRGS, uma unidade de ensino da Universidade Federal do Rio Grande do Sul responsável por desenvolver o ensino, a extensão e a pesquisa nos níveis fundamental e médio da educação. Os alunos participantes são da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental e foram selecionados de forma voluntária, o professor titular da turma apresentou a proposta didática para toda a turma e aqueles alunos que se sentiram interessados se inscreveram para participar das atividades. Ao todo foram quatro alunos participantes que serão nomeados, na análise dos dados, de acordo com a inicial de seus nomes (F, G, L e N). As atividades foram realizadas em dois encontros em período extraclasse, com duração de duas horas cada encontro. Foi solicitada à Comissão de Pesquisa autorização para a realização deste projeto e aos responsáveis pelos alunos envolvidos permissão de participação dos mesmos através de um Termo Livre e Esclarecido explicitando os objetivos desta pesquisa, incluído no apêndice.

3.2. COLETA DE DADOS

Os instrumentos de coleta e análise de dados foram construídos e utilizados ao longo deste trabalho com fundamentação na Teoria dos Campos Conceituais. Para a coleta de dados e posterior análise foi organizada uma sequência didática aplicada nos dois encontros.

Para a concretização da pesquisa foi proposto um questionário inicial com o objetivo de verificar os conceitos prévios à trigonometria que os alunos possuíam, tais como identificação de triângulos retângulos e semelhança de triângulos. Após, foram propostas atividades envolvendo os conceitos presentes no questionário e introduzidas as razões trigonométricas no triângulo retângulo, sendo estas estendidas, logo em seguida, para o primeiro quadrante do círculo trigonométrico. Por último, foram propostos dois exercícios de generalização e avaliadas as resoluções dos alunos com o intuito de verificar se, depois de realizada a sequência didática, os conceitos ficaram esclarecidos.

Os dados para análise foram constituídos pelos registros escritos dos estudantes envolvidos, por anotações no diário de campo e observações feitas pela pesquisadora. O registro dos estudantes foi composto pelas tarefas resolvidas por eles e por suas respostas ao questionário inicial proposto no primeiro encontro. O diário de campo consistiu de um caderno de anotações que eu, como pesquisadora, mantinha durante a realização das atividades. Nesse caderno eram registrados comentários feitos oralmente pelos estudantes com seus colegas ou comigo e observações feitas a respeito do andamento das tarefas solicitadas. O diário de campo era preenchido à medida que surgiam os comentários ou as observações pertinentes e os dados presentes no diário complementam a análise da prática realizada.

3.3. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

A sequência de atividades foi separada em dois encontros. No primeiro encontro foi aplicado um conjunto de questões (questões 1.1 a 1.8) com o objetivo de realizar um levantamento dos conceitos prévios que os alunos tinham a respeito de triângulo retângulo, identificação dos catetos e hipotenusa, soma dos ângulos internos de um triângulo e semelhança de triângulos. Após recolher os questionários respondidos, foi feita a correção das questões, levantada uma discussão sobre cada conceito nele envolvido, e foram apresentados pela autora aspectos históricos da trigonometria e exercícios contextualizados. Por último, foi proposto aos estudantes um problema para determinar a altura de uma torre de transmissão através da semelhança de triângulos.

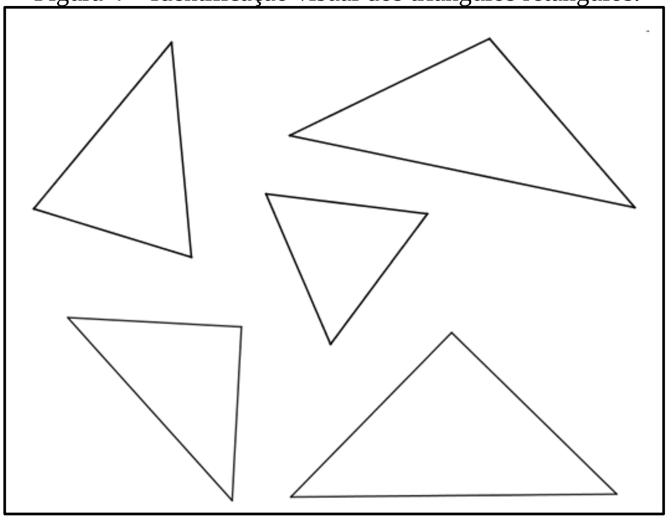
Os quatro alunos participantes já possuíam conhecimento sobre triângulo retângulo, porém ainda não haviam estudado semelhança de triângulos, tampouco as razões trigonométricas.

A seguir apresento as questões propostas no questionário inicial.

- 1.1. Desenhe um triângulo retângulo e explique por que a figura recebe este nome.

- 1.2. Identifique quais das figuras abaixo são triângulos retângulos:

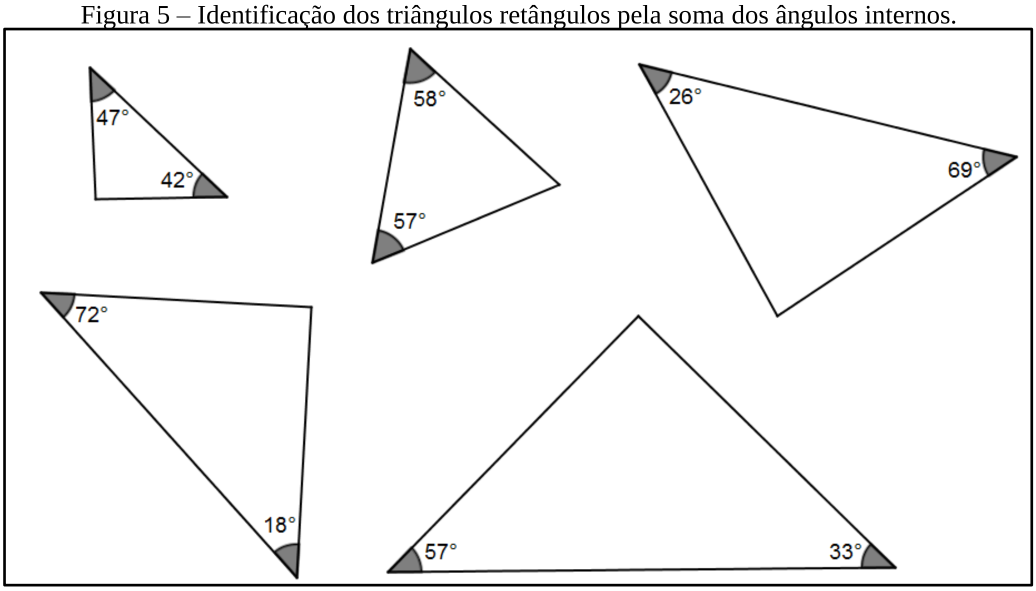
Figura 4 – Identificação visual dos triângulos retângulos.



Fonte: Arquivo pessoal.

- 1.3. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, identifique quais dos triângulos abaixo são retângulos:

Figura 5 – Identificação dos triângulos retângulos pela soma dos ângulos internos.



Fonte: Arquivo pessoal.

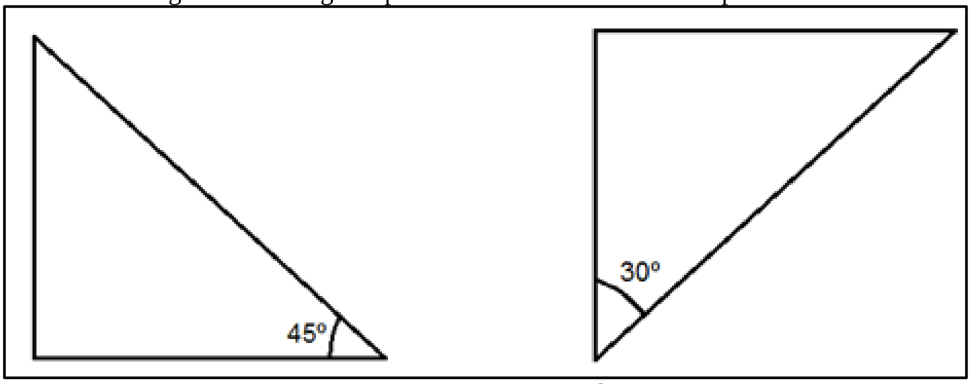
- 1.4. Escreva como tu identificas os catetos e a hipotenusa em um triângulo retângulo?

  - Cateto:

  - Hipotenusa:

- 1.5. Identifique em cada figura a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto adjacente em relação ao ângulo dado.

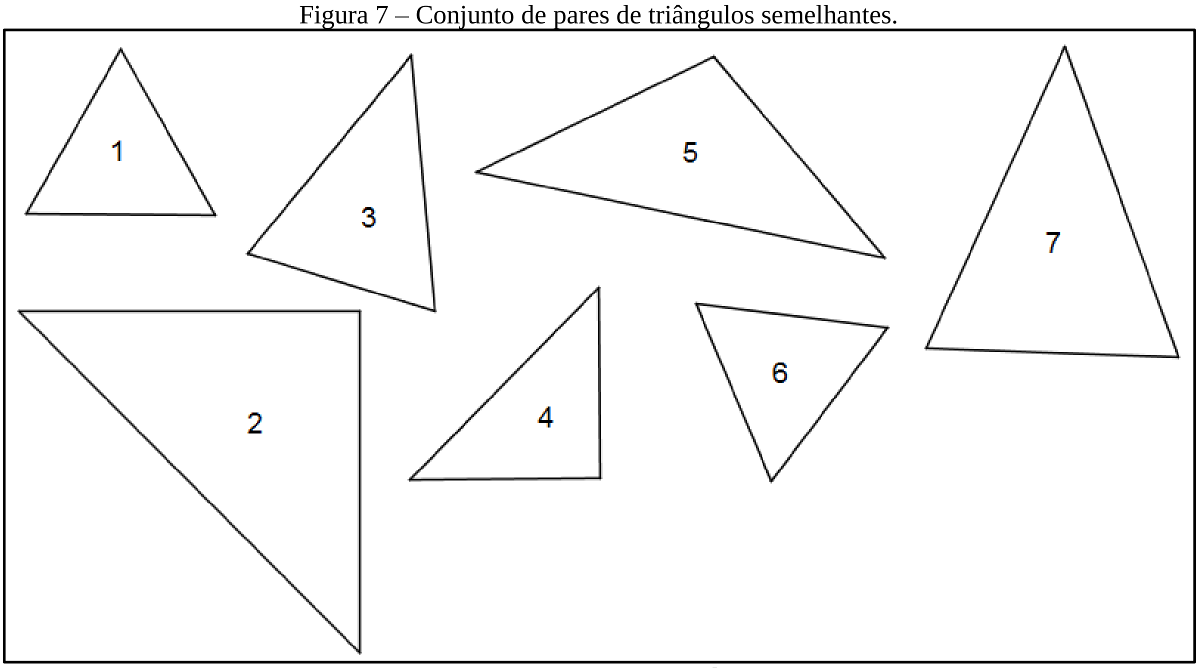
Figura 6 – Triângulos para identificar os catetos e a hipotenusa.



Fonte: Arquivo pessoal.

- 1.6. Observe os triângulos abaixo e indique os pares que são visualmente semelhantes. Tente explicar essa possível semelhança.

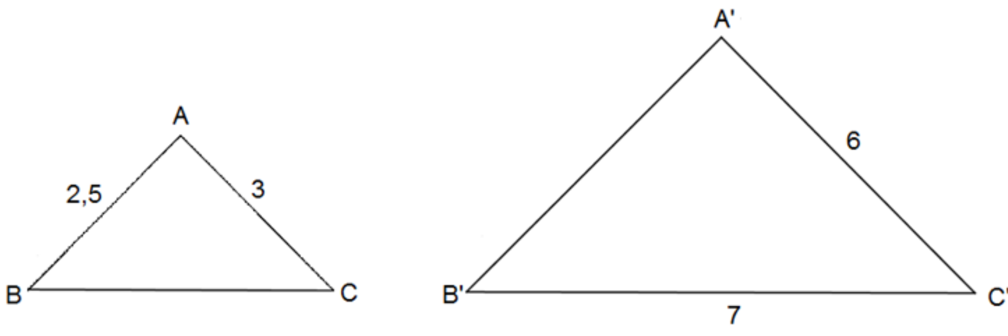
Figura 7 – Conjunto de pares de triângulos semelhantes.



Fonte: Arquivo pessoal.

- 1.7. Observe com atenção os dois triângulos semelhantes abaixo. Neles estão assinaladas algumas de suas medidas. Lembrando que os lados correspondentes de triângulos semelhantes são proporcionais, complete:

Figura 8 – Exercício sobre semelhança de triângulos.



a) $BC =$

b) $B'C' =$

c) $A'C' =$

d) $A'B' =$

e) $\frac{B'C'}{BC} =$

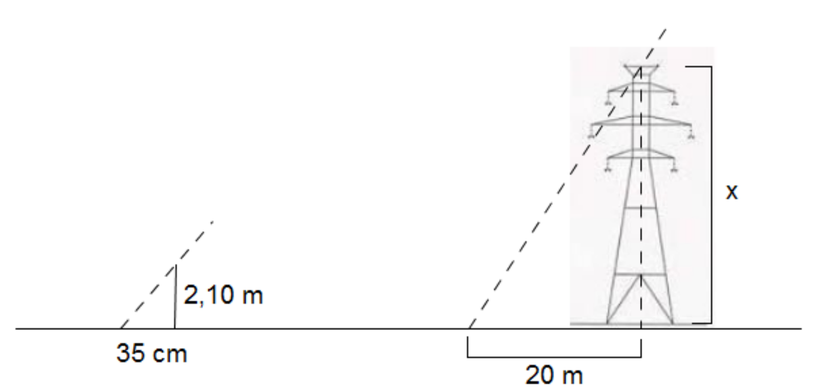
f) $\frac{A'B'}{AB} =$

g) $\frac{A'C'}{AC} =$

Fonte: Adaptado de Mendes (2009).

- 1.8. Para determinar a altura da torre de retransmissão de uma estação de rádio, cravou-se uma estaca de madeira verticalmente ao solo. O comprimento da estaca, fora da terra, é 2,10 m. No mesmo instante em que a sombra da estaca mede 35 cm, observa-se que a sombra da torre mede 20 m. Qual a altura da torre?

Figura 9 – Exercício para calcular a altura de uma torre de transmissão.



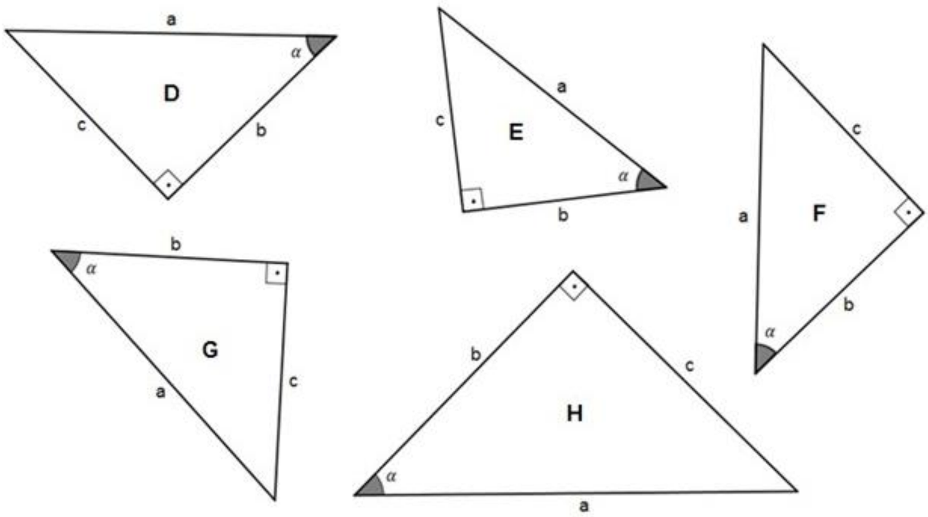
Fonte: Adaptado de Imenes e outros (1979).

No segundo encontro, foram propostos, primeiramente, exercícios para a construção das razões seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Em seguida, essas razões foram estendidas ao 1º quadrante do círculo trigonométrico, e, por último, foi solicitado aos alunos que resolvessem dois exercícios para a generalização desses conceitos no 1º quadrante.

A seguir apresento os exercícios propostos nesse segundo encontro.

- 2.1. Observe os triângulos abaixo:

Figura 10 - Exercício para estabelecer razões entre os lados de triângulos retângulos.



Meça os lados de cada triângulo e complete a tabela

	a(cm)	b(cm)	c(cm)	b/a	c/a	c/b
Triângulo **D**						
Triângulo **E**						
Triângulo **F**						
Triângulo **G**						
Triângulo **H**						

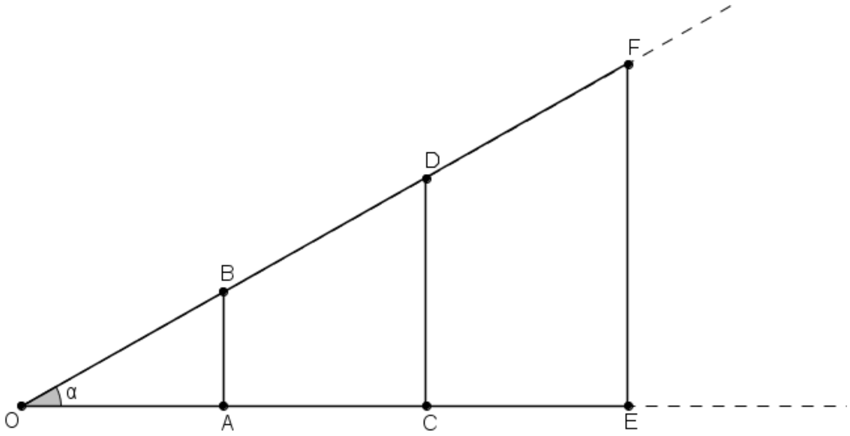
Fonte: Adaptado de Mendes (2009).

- 2.2. Observando os triângulos acima escreva a expressão matemática das razões b/a, c/a e c/b, tomando como referência os catetos, os ângulos agudos e a hipotenusa.

Em seguida, nesse mesmo encontro, iniciou-se o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, determinando-se o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo através da semelhança de triângulos.

- 2.3. Sobrepondo os triângulos da atividade 2.1, temos:

Figura 11 – Construção das razões trigonométricas por semelhança de triângulos.



Assim, podemos escrever as razões trigonométricas:

$$\cos\alpha = cosseno\ de\ \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \cdots = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa}$$

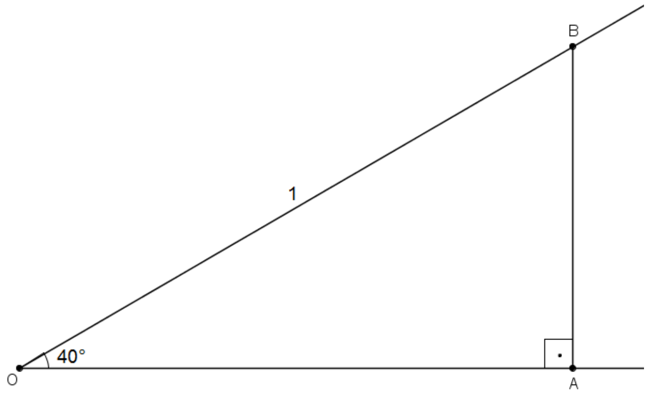
$$\operatorname{sen}\alpha = seno\ de\ \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OC} = \cdots = \frac{cat.oposto}{hipotenusa}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = tangente\ de\ \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \cdots = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente}$$

Fonte: Adaptado de Imenes e outros (1979).

- 2.4. Através das razões trigonométricas podemos obter cosseno, seno e tangente de qualquer ângulo desde que seja conhecida a medida de pelo menos um lado do triângulo. Para obter, por exemplo, $\text{sen } 40°$ e $\cos 40°$, construímos um triângulo retângulo OAB com um ângulo agudo de 40° e com hipotenusa AO = 1 dm (1 dm = 10 cm).

Figura 12 – Determinar a medida de sen 40° e cos de 40°.



Medindo os catetos do triângulo, encontramos $OA \cong 0{,}79\ dm$ e $AB \cong 0{,}61\ dm.$

Daí resulta que:

$$\text{sen } 40° = \frac{AB}{1} \cong 0{,}61$$

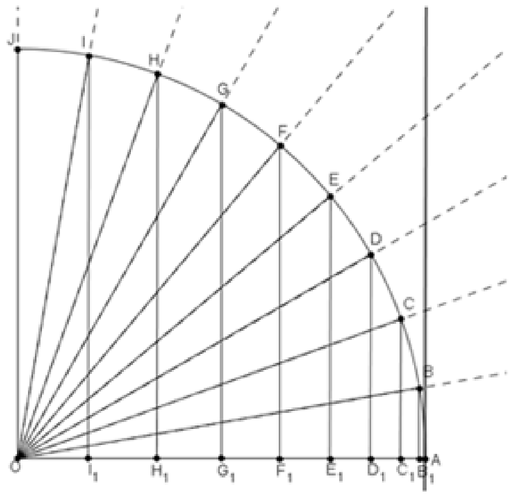
$$\cos 40° = \frac{OB}{1} \cong 0{,}79$$

Fonte: Adaptado de Imenes e outros (1979).

Logo após, para determinar o valor dessas razões para qualquer ângulo, foi pedido aos presentes que desenhassem um quarto de círculo utilizando transferidor e compasso, dividissem-no de 10º em 10º, traçassem retas perpendiculares à reta horizontal, indicada por 0º, medissem os lados dos triângulos encontrados e completassem uma tabela (Fig. 13). Nesse momento foi definido esse um quarto de círculo como sendo o primeiro quadrante de um círculo trigonométrico. Com esta atividade foi possível observar o comportamento de cada razão trigonométrica de 0º a 90º.

- 2.5. Depois de desenhar o primeiro quadrante de um círculo trigonométrico, meça os catetos correspondentes a cada razão trigonométrica e complete a tabela:

Figura 13 - Construção do primeiro quadrante do círculo trigonométrico.



	sen	cos	tg
0°			
10°			
20°			
30°			
40°			
50°			
60°			
70°			
80°			
90°			

Fonte: Arquivo pessoal.

Na sequência foi proposta a atividade[2] 2.6 de generalização desses conceitos, dentro do primeiro quadrante do círculo trigonométrico, com o objetivo de avaliar se houve compreensão dos mesmos por parte dos estudantes. Por último, outro exercício foi proposto, atividade 2.7, para calcular a altura de uma torre utilizando uma das razões trigonométricas, servindo como comparação ao exercício do cálculo da altura de uma torre de transmissão do primeiro encontro (Fig. 9).

- 2.6. De acordo com essas observações e sabendo que todos os ângulos mencionados são agudos, classifique como verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir e justifique sua resposta:

  ( ) Se $\alpha > \beta$ então $\cos\alpha > \cos\beta$.

  ( ) Se $\alpha > \beta$ então $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$.

  ( ) Para todo o ângulo α temos: $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{sen}\alpha$.

  ( ) Quanto maior o ângulo, menor é o valor do seu cosseno.

  ( ) Quanto maior o ângulo, menor é o valor do seu seno.

  ( ) Quanto maior o ângulo, menor a sua tangente.

[2] As atividades 2.6 e 2.7 foram retiradas e adaptadas de Imenes e outros (1979).

- 2.7. Para obter a altura de uma torre, um topógrafo estaciona seu teodolito a 200 m da base da mesma e aponta o instrumento para o ponto mais alto da torre. O ângulo formado entre a semirreta (imaginária) definida pelo teodolito e o ponto mais alto da torre, e a semirreta (imaginária) horizontal, determinada pela distância entre o teodolito e à referida torre, mede 30°. Se a luneta do teodolito está a 1,7 m do solo, qual é, aproximadamente, a altura da torre? Tente representar a situação por meio de um desenho.

No próximo capítulo serão descritas e analisadas as respostas dos alunos referentes à sequência didática aqui citada, apresentados os registros escritos e orais dos participantes e, também, as observações pertinentes realizadas pela pesquisadora.

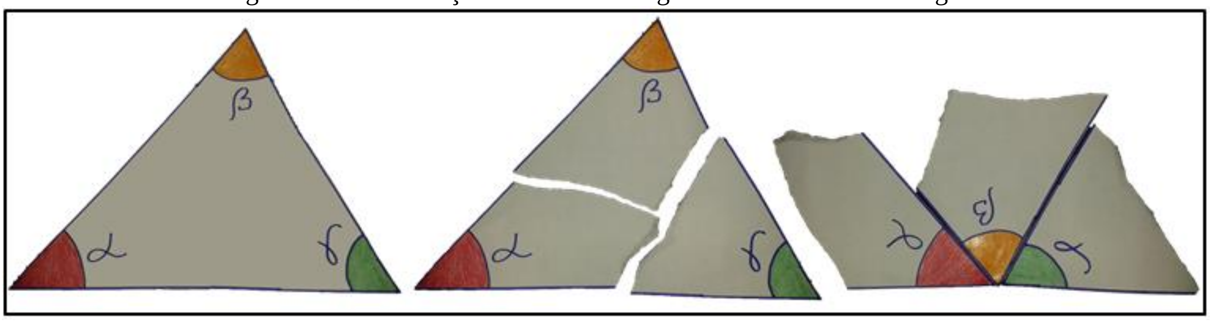
4. ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo é dedicado ao relato e à análise dos registros feitos pelos estudantes envolvidos nas atividades, e às observações feitas pela pesquisadora. Nesta análise enfatizo o uso de invariantes operatórias (conceitos e teoremas em ação) e de esquemas, como definidos pela Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. O capítulo está organizado de maneira a descrever separadamente cada encontro da sequência didática. Primeiramente é apresentado o relato das atividades e posteriormente é feita a análise dos registros dos discentes.

- *Encontro 1:*

Em um primeiro momento, como professora-pesquisadora, apresentei os objetivos do projeto e informei como ocorreriam as atividades. Em seguida distribui os questionários, com o intuito de avaliar os conhecimentos prévios dos alunos, vale ressaltar que os participantes já possuíam conhecimento sobre triângulo retângulo. Após todos devolverem os questionários respondidos, foi iniciada a discussão e a correção de cada questão de forma coletiva. Os alunos foram bastante participativos, foi possível perceber que eles se interessaram pelo assunto e apresentaram curiosidade em saber como seria a continuação das atividades. Também foram apresentados aspectos históricos da trigonometria e onde esse conteúdo pode ser aplicado atualmente. Todos os conceitos presentes no questionário foram apresentados detalhadamente de forma expositiva, com a explicação da pesquisadora. Por exemplo, foi demonstrado, de forma visual, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º e, para isso, levei um triângulo feito de papel com os ângulos indicados, o rasguei em três pedaços e uni os vértices (Fig. 14).

Figura 14 - Visualização da soma dos ângulos internos de um triângulo.

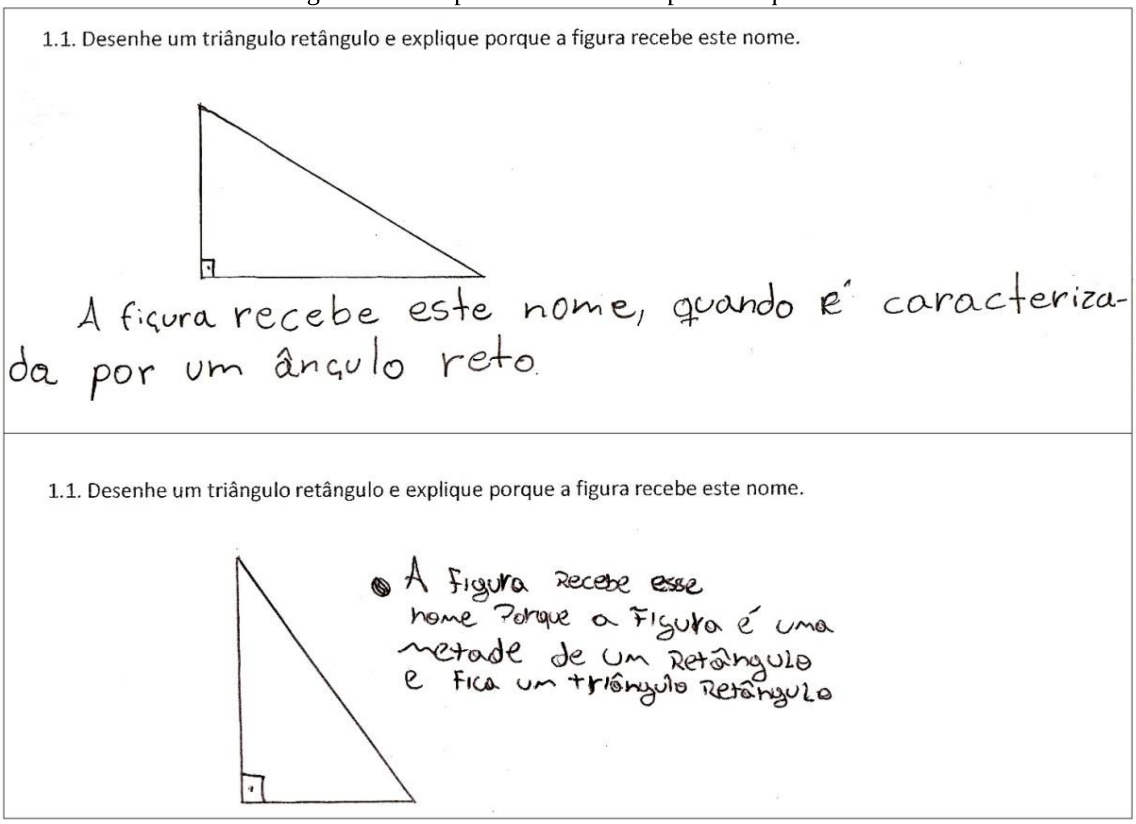


Fonte: Arquivo pessoal.

Por se tratar de uma turma de Ensino Fundamental, o conteúdo de trigonometria não era conhecido dos estudantes e alguns conceitos ainda não haviam sido definidos para eles, como semelhança de triângulos e denominação dos catetos adjacente e oposto. Por isso esse teste inicial foi importante, pois possibilitou à pesquisadora verificar o conhecimento que os alunos tinham com os tópicos básicos de trigonometria que antecedem o estudo das razões no triângulo retângulo. “[...] quanto a Vergnaud, ele considera que o conhecimento prévio é determinante e pode evoluir progressivamente dentro do domínio de um campo conceitual, mas para tanto é necessário que o aluno possa explicitá-lo” (KLEIN, 2009, p. 37). A intenção de realizar essas questões iniciais residia em poder verificar o conhecimento que os alunos tinham e, assim, organizar como seriam explicados os conceitos que estavam por vir.

Na primeira questão foi solicitado aos estudantes que desenhassem um triângulo retângulo e explicassem o motivo da figura receber esse nome. Nesta questão estão presentes os conceitos em ação que são “[...] as certezas alcançadas a partir de experiências anteriores e que são incorporadas como válidas e adequadas para outras situações.” (MARTINS, 2012, p. 32). Nesta questão os conceitos em ação aparecem para definir um triângulo retângulo. Como exemplo, cito a resposta de dois alunos na figura a seguir (Fig. 15).

Figura 15 – Respostas de alunos na primeira questão.



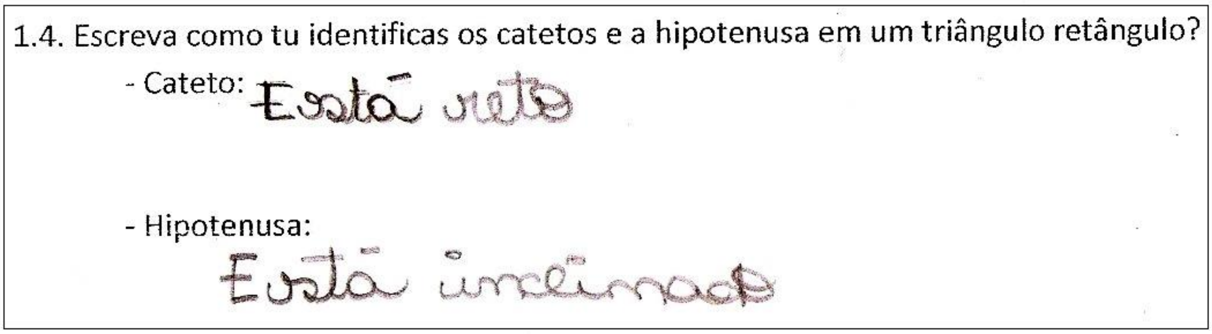
Fonte: Arquivo pessoal.

Esses dois exemplos de respostas já evocam diferentes conceitos em ação, um aluno definiu a figura identificando o ângulo reto e o outro definiu como sendo resultante da divisão de um retângulo. Podemos perceber que, quando o aluno escreve “caracterizada por um ângulo reto”, ele tem conhecimentos implícitos sobre a noção de ângulo e a nomenclatura matemática, já que ângulo reto é uma denominação utilizada na matemática para se referir a um ângulo que tem como medida o valor de 90º.

Esse mesmo conceito em ação, referido ao ângulo de 90º, também aparece nas duas próximas questões, questões 1.2 e 1.3, quando solicitei que os estudantes identificassem visualmente quais das figuras eram triângulos retângulos e, logo após, os triângulos retângulos através da soma dos ângulos internos. Na questão 1.3 também se encontra a propriedade da soma dos ângulos internos ser 180º, o que é estabelecido como um teorema em ação, já que é uma propriedade tida como verdadeira e pode ser demonstrada matematicamente. De modo geral, os participantes indicaram como resposta as figuras corretas, então ficou perceptível que esses alunos tinham conhecimentos em ação bem estabelecidos quanto à definição de triângulo retângulo.

Com a quarta questão, propus que os discentes explicassem a diferença entre os catetos e a hipotenusa. Foram registradas três respostas distintas que são analisadas a seguir (Fig. 16 e Fig. 17).

Figura 16 – Resposta da aluna F na quarta questão.


1.4. Escreva como tu identificas os catetos e a hipotenusa em um triângulo retângulo?

- Cateto: Está reto

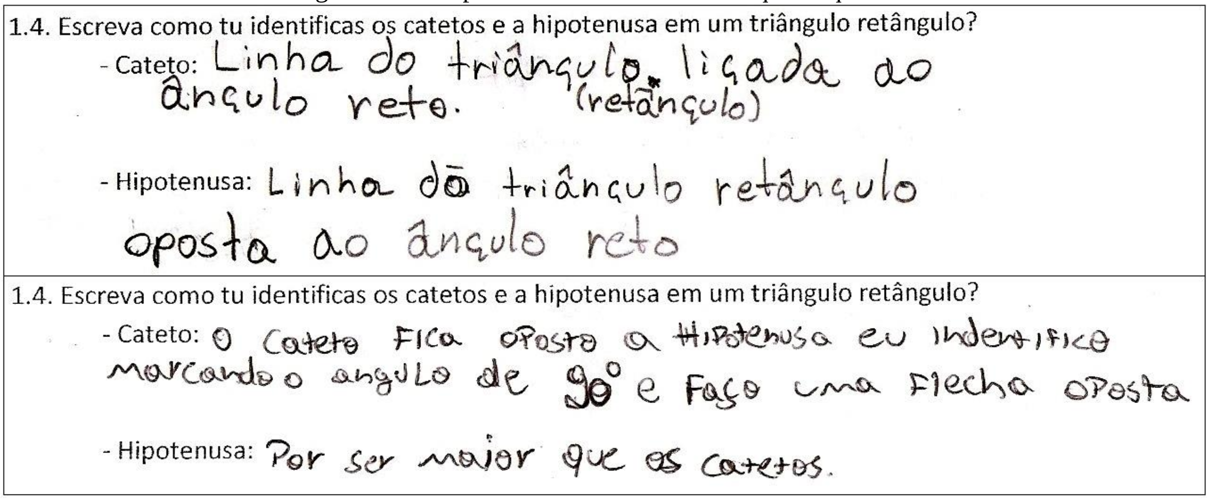
- Hipotenusa: Está inclinado

Fonte: Arquivo pessoal.

Podemos verificar com esta resposta que a aluna F não possui os conceitos em ação que definem um cateto e uma hipotenusa, também podemos perceber que a aluna está restrita à forma como normalmente o triângulo retângulo é apresentado aos alunos, porque podemos girar o triângulo de maneira que a hipotenusa não fique “inclinada”. Embora a aluna não tenha conseguido explicar de maneira precisa, podemos perceber que ela conseguiu estabelecer a diferença de maneira visual e intuitiva.

Agora observe as próximas respostas (Fig. 17).

Figura 17 – Respostas dos alunos L e N na quarta questão.



1.4. Escreva como tu identificas os catetos e a hipotenusa em um triângulo retângulo?

- Cateto: Linha do triângulo ligada ao ângulo reto. (retângulo)

- Hipotenusa: Linha dō triângulo retângulo oposta ao ângulo reto

1.4. Escreva como tu identificas os catetos e a hipotenusa em um triângulo retângulo?

- Cateto: O Cateto FICA OPOSTO a HIPOTENUSA eu INDENTIFICO marcando o angulo de 90° e Faço uma Flecha oposta

- Hipotenusa: Por ser maior que os catetos.

Fonte: Arquivo pessoal.

Estas respostas são exemplos de que os conceitos em ação dos sujeitos foram expostos de maneira consciente e permitiram a percepção das definições na situação descrita. Na primeira resposta o aluno L escreveu “linha do triângulo” se referindo aos catetos e à hipotenusa como lados do triângulo, conseguindo expressar, com suas próprias palavras, o que ele entende por cateto e hipotenusa. Já na segunda resposta temos um modelo de automatização quando o aluno N escreve “faço uma flecha oposta”, pois ele quis dizer que marca o ângulo de 90º e desenha uma flecha indicando o lado oposto a esse ângulo, denominando esse lado de hipotenusa. Segundo Vergnaud (1993, p. 3): “A automatização, evidentemente, é uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação”, para o autor o raciocínio dos alunos envolve conhecimentos e operações que se automatizam gradativamente, como é o caso do aluno que para identificar a hipotenusa desenha uma flecha com origem no ângulo reto.

Já na quinta questão, como as nomenclaturas “cateto oposto” e “cateto adjacente” não eram do conhecimento dos alunos, eles sentiram dificuldade para indicá-los na questão em que isso era solicitado. O que me chamou a atenção durante a execução dessa atividade, foi que um dos alunos explicou em voz alta para os outros: “é só pensar que o cateto oposto deve ser o lado do triângulo que é oposto ao ângulo indicado e *adjacente* é a palavra contrária a *oposto,* então o cateto adjacente deve ser o lado do triângulo que acompanha o ângulo indicado”. Podemos perceber que o aluno recorreu ao significado literal da palavra para poder responder ao que era solicitado, ou seja, o aluno aplicou o que Vergnaud define como *esquema*. Por meio da organização do comportamento e de uma decisão consciente sua que permitiu com que ele percebesse o significado da palavra em uma dada situação. “A confiabilidade do esquema para o sujeito baseia-se, em última análise, no conhecimento que ele possui, explícito ou implícito, das relações entre o algoritmo e o as características do problema a resolver.” (VERGNAUD, 1993, p. 3).

Quanto às três últimas questões, questões 1.6, 1.7 e 1.8, que tratavam da semelhança de triângulos, os estudantes afirmaram não terem aprendido em sala de aula a identificar e explicar a semelhança entre triângulos. Porém, na questão 1.6 era solicitado que eles identificassem os pares de triângulos visualmente semelhantes e, mesmo sem os participantes terem conhecimento dos conceitos envolvidos, foram registradas respostas do tipo: “esses triângulos são semelhantes por terem o mesmo formato”, “são semelhantes porque visualmente os ângulos são parecidos” e “os triângulos são parecidos pela forma, só muda o tamanho”. Tais respostas me surpreenderam como pesquisadora, e com isso posso afirmar que se o professor incentivar seus alunos, eles poderão se apoiar em conhecimentos e esquemas que já possuem e combiná-los de tal forma a obter sucesso na resposta da situação.

> Para Vergnaud, muitas vezes, a escola superestima o conhecimento explícito do aluno e desconsidera o conhecimento implícito, nos quais, por meio de esquemas (conceitos e teoremas em ação), o estudante tem a oportunidade de evoluir seu conhecimento para o conhecimento científico; para tanto, é necessário que o professor oportunize situações onde o aluno tenha chance de manifestar-se e, sobretudo, faça uma análise do desempenho dos alunos nessas situações. (KLEIN, 2009, p. 40).

As demais questões 1.7 e 1.8 foram resolvidas de forma coletiva com a minha explicação e a participação dos alunos. Foi muito gratificante ver o envolvimento deles com a atividade e perceber que eles estavam interessados em entender a resolução das questões envolvendo semelhança de triângulos.

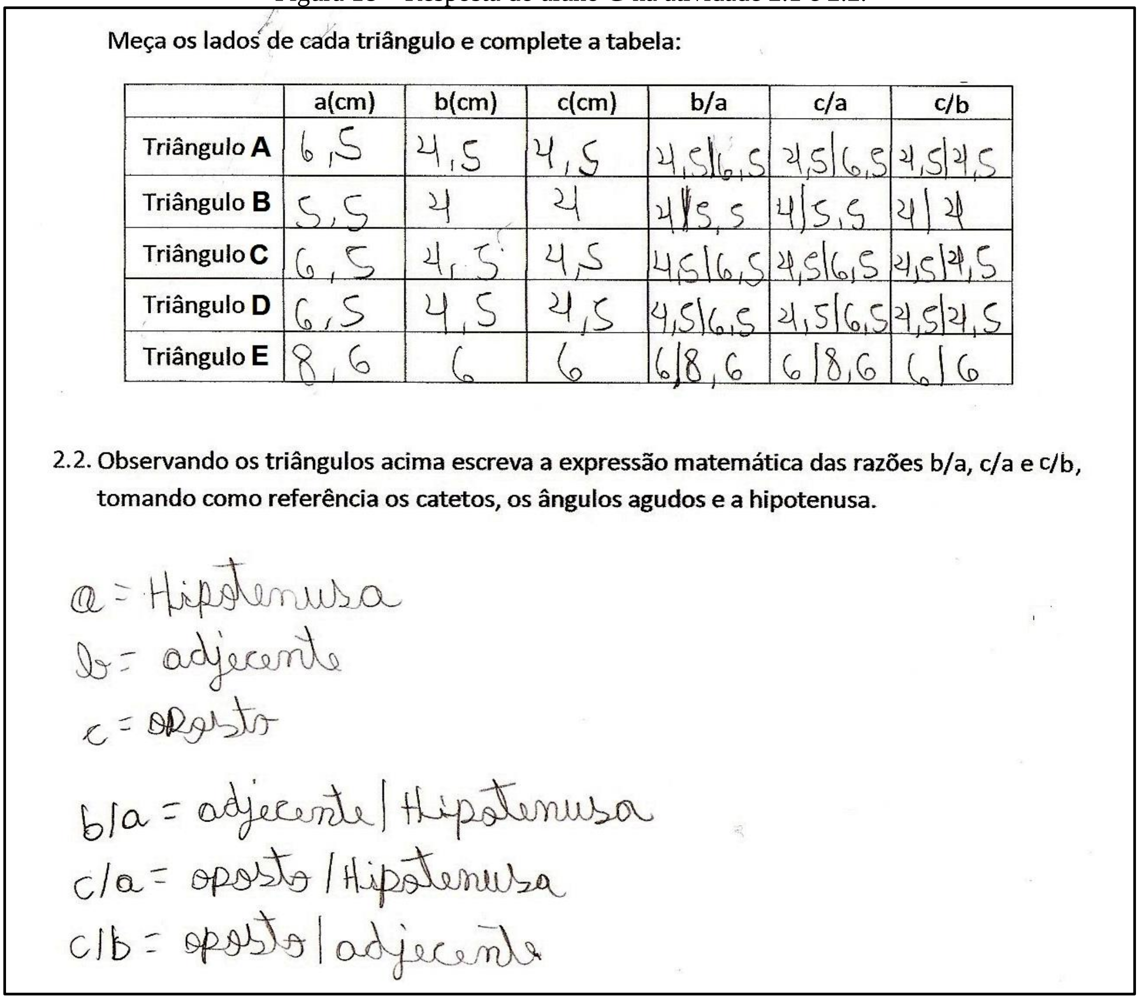
Sobre a primeira etapa da sequência didática, posso destacar a seriedade e o comprometimento dos alunos na execução das atividades. As respostas dos alunos estavam dentro das minhas expectativas. Embora eles não tenham conseguido resolver sozinhos as questões sobre semelhança de triângulos, realizar a atividade de forma coletiva favoreceu a interação entre mim e os alunos, e essa interação, segundo Vergnaud (1993), é uma das formas de promover a explicitação das ideias dos alunos. A verificação dos conhecimentos prévios dos estudantes serviu como uma ponte entre aquilo que os alunos já sabiam e o que eles viriam a aprender, permitindo a conexão entre os conhecimentos, ou seja, entre o novo conhecimento e as informações que os alunos já possuíam sobre o conteúdo.

A seguir, são apresentados o relato e a análise dos dados da segunda etapa da sequência didática.

- *Encontro 2:*

O objetivo era construir o conceito de razão trigonométrica primeiramente no triângulo retângulo e, posteriormente, no primeiro quadrante do círculo trigonométrico. Assim, em um primeiro momento, foi entregue aos alunos o desenho de cinco triângulos retângulos e foi solicitado que eles medissem, com o uso de uma régua, os lados dos triângulos e completassem uma tabela. Em seguida, foi pedido para que eles observassem as razões $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$, $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$ e $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$. Dessa forma, através da semelhança de triângulos, essas razões foram definidas como sendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo, seno, cosseno e tangente. Como exemplo da atividade, mostro a resposta do aluno G (Fig. 18).

Figura 18 – Resposta do aluno G na atividade 2.1 e 2.2.



Meça os lados de cada triângulo e complete a tabela:

	a(cm)	b(cm)	c(cm)	b/a	c/a	c/b
Triângulo **A**	6,5	4,5	4,5	4,5|6,5	4,5|6,5	4,5|4,5
Triângulo **B**	5,5	4	4	4|5,5	4|5,5	4|4
Triângulo **C**	6,5	4,5	4,5	4,5|6,5	4,5|6,5	4,5|4,5
Triângulo **D**	6,5	4,5	4,5	4,5|6,5	4,5|6,5	4,5|4,5
Triângulo **E**	8,6	6	6	6|8,6	6|8,6	6|6

2.2. Observando os triângulos acima escreva a expressão matemática das razões b/a, c/a e c/b, tomando como referência os catetos, os ângulos agudos e a hipotenusa.

a = Hipotenusa
b = adjecente
c = oposto

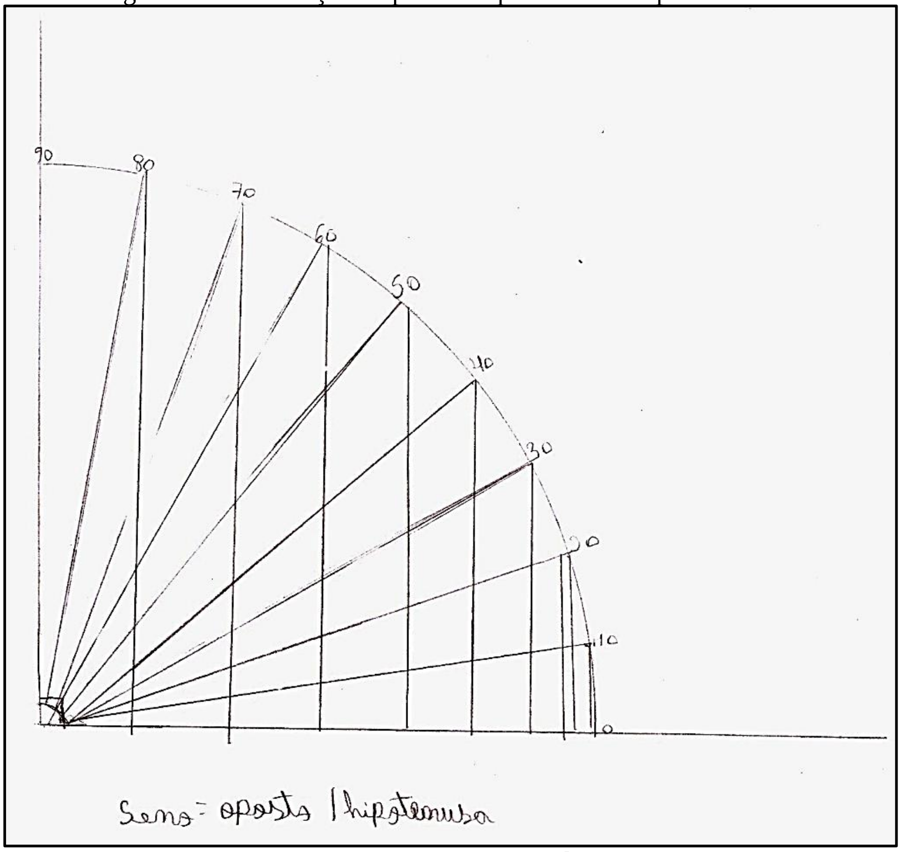
b/a = adjecente|Hipotenusa
c/a = oposto|Hipotenusa
c/b = oposto|adjecente

Fonte: Arquivo pessoal.

Assim como o aluno G, os demais participantes também conseguiram realizar a atividade sem apresentar dificuldades. Como no encontro anterior já haviam sido trabalhadas as nomenclaturas cateto oposto e cateto adjacente, os alunos conseguiram identificar os lados dos triângulos correspondentes a esses catetos e o lado correspondente à hipotenusa, dessa forma os estudantes conseguiram resolver o que estava sendo solicitado.

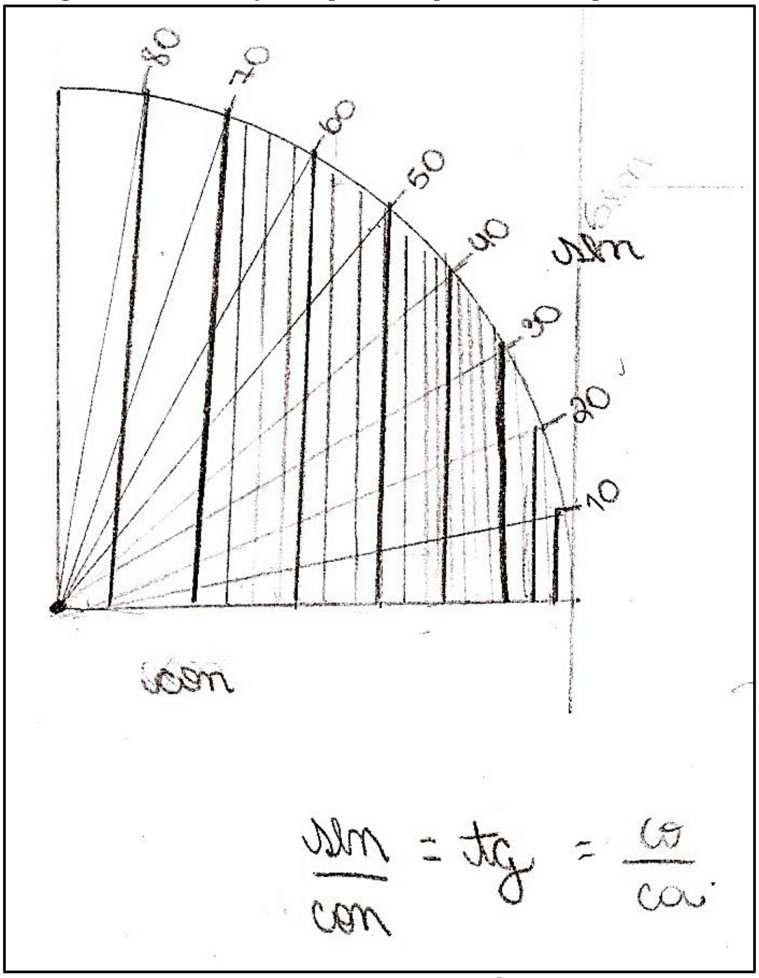
Dando continuidade à atividade, foi explicado que com as razões trigonométricas é possível obter cosseno, seno e tangente de qualquer ângulo, desde que seja conhecida a medida de pelo menos um dos lados do triângulo. Assim, foram distribuídos aos alunos régua, compasso e transferidor e foi solicitado que eles construíssem um quarto de círculo e o dividissem em arcos de 10º em 10º. Apresento, a seguir, algumas das construções feitas pelos estudantes (Fig. 19 e Fig. 20).

Figura 19 – Construção do primeiro quadrante feita pelo aluno G.



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 20 – Construção do primeiro quadrante feita pela aluna F.



Fonte: Arquivo pessoal.

Com o desenho pronto, os alunos observaram que se formaram vários triângulos retângulos no interior da figura. Então, foi pedido para que eles completassem uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente de 0º, 10º, 20º, 30º, 40º, 50º, 60º, 70º, 80º, 90º, através das razões entre os catetos e a hipotenusa. Neste momento os alunos começaram a pensar maneiras de encontrar os valores das razões trigonométricas para os ângulos indicados e verificaram que a medida da hipotenusa se mantinha constante em cada triângulo. A partir disso identificaram o cateto oposto e adjacente de cada triângulo e iniciaram a medir cada um deles com uma régua. A seguir apresento a tabela completada por um dos estudantes (Fig. 21).

Figura 21 – Tabela completada pelo aluno G.

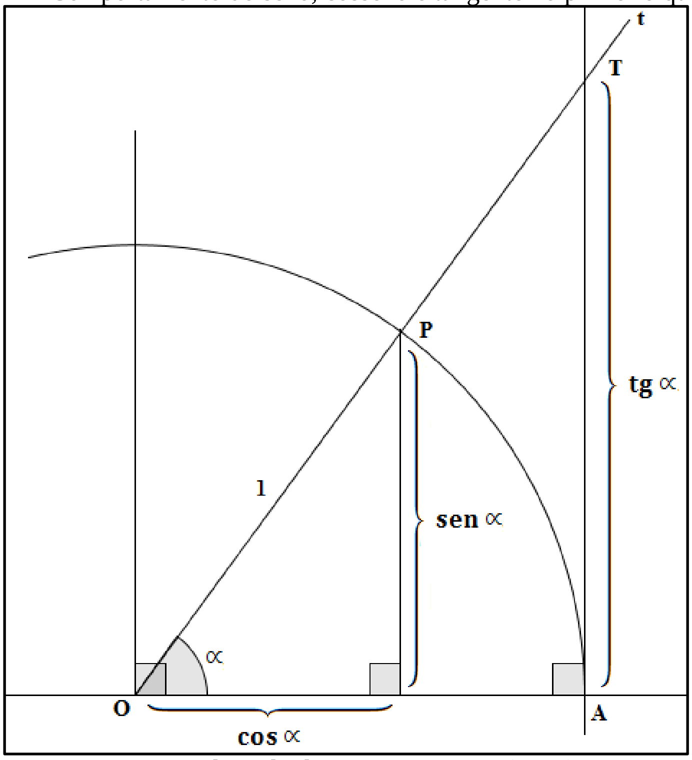
	sen	Cos	tg
0°	0	11/11	0
10°	1,8/11	10,8/11	0.17
20°	3,6/11	10,5/11	0,36
30°	5,5/11	9,6/11	0.57
40°	7/11	8,5/11	0,82
50°	8,5/11	7/11	1,19
60°	9,6/11	5,5/11	1.74
70°	10,5/11	3,6/11	2.74
80°	10,8/11	1,8/11	5.67
90°	11/11	0	NÃO EXISTE

Fonte: Arquivo Pessoal.

Vale ressaltar que todos os alunos preencheram corretamente a tabela e responderam que o ângulo era o responsável pelo resultado das razões trigonométricas, surgindo, com isso, um teorema em ação “as razões trigonométricas dependem do ângulo em questão”. Logo após os alunos completarem a tabela, foi disponibilizada uma calculadora científica para que eles pudessem comparar os valores encontrados a partir das divisões feitas por eles e o valor dado pela calculadora para o seno, o cosseno e a tangente de cada ângulo indicado.

Um dos momentos relevantes dessa atividade foi que os alunos conseguiram entender a ideia de variação dos valores de seno, cosseno e tangente quando aumenta ou diminui o ângulo, ou seja, perceberam que com essa construção pode-se imaginar um ponto P percorrendo um arco de circunferência de raio unitário, enquanto um ponto T percorre a reta tangente à circunferência e, então, quando o ângulo $\propto$ varia, o ponto P muda de posição, e assim observa-se o que acontece com os valores de sen $\propto$, cos $\propto$ e tg $\propto$ (Fig. 22).

Figura 22 – Comportamento do seno, cosseno e tangente no primeiro quadrante.



Fonte: Adaptado de Imenes e outros (1979).

Embora não fizesse parte desta sequência didática, reconheço que, para atividades futuras, seria interessante utilizar a geometria dinâmica para auxiliar na percepção visual dessas razões trigonométricas. Por meio do software Geogebra[3] seria possível que os alunos verificassem a variação simultânea dessas três razões, seno, cosseno e tangente, ao movimentar um único ponto.

Logo após a construção da tabela com os valores de seno, cosseno e tangente para ângulos de 0º a 90º, foi possível resolver os últimos exercícios propostos para a generalização dos conceitos. Foi muito gratificante e válido para esta pesquisa perceber que os estudantes entenderam a variação dos valores das razões trigonométricas conforme varia o ângulo.

Continuando as atividades do segundo encontro, foi proposto aos alunos o exercício 2.6 de generalização dos conceitos das razões trigonométricas para ângulos entre 0º e 90º, no qual era solicitado que eles classificassem cada afirmação como verdadeira ou falsa. Nesse exercício o primeiro questionamento que surgiu foi sobre as letras gregas α e β que não eram conhecidas pelos alunos. Foi explicado, então, que as duas letras gregas foram escritas com a intenção de representar um ângulo qualquer. A partir disso, os alunos discutiram entre eles

[3] Geogebra é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única tela. Sua distribuição é livre e pode ser encontrado para download em: <www.geogebra.org>.

quais das alternativas eram verdadeiras e quais eram falsas e a maioria deles conseguiu classificar corretamente as questões.

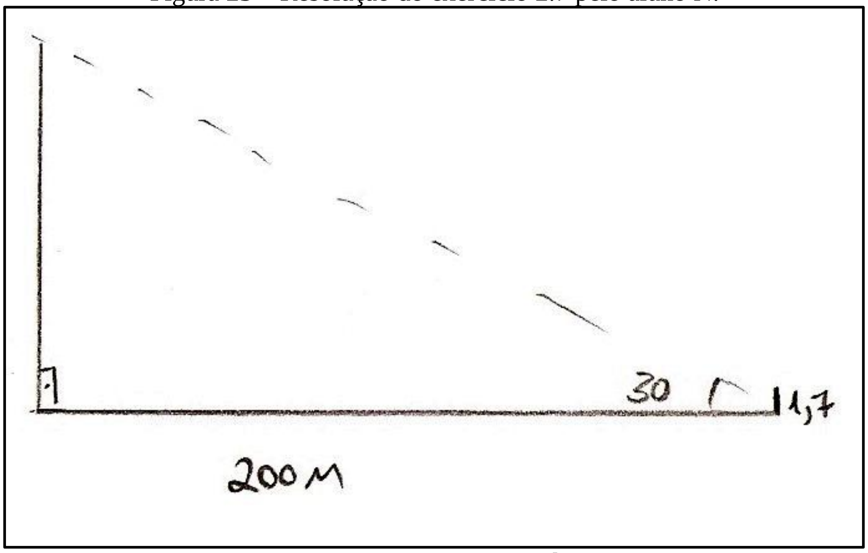
Foi possível verificar no exercício 2.6 que os alunos utilizaram de conceitos e teoremas em ação implícitos em esquemas que foram elaborados de forma consciente por cada um deles para conseguir resolver a questão. E através de reflexão e adequação dos conhecimentos obtidos até então, os estudantes conseguiram utilizar de forma correta o conceito de razão trigonométrica.

Por último, foi proposto o exercício 2.7 que consistia na resolução de um problema envolvendo a aplicação de uma das razões trigonométricas para a sua solução. No problema eram fornecidos alguns dados e solicitado para determinar a altura de uma torre de transmissão. Por falta de tempo, apenas dois alunos tentaram resolver. Iniciaram o desenho para representar a situação proposta, mas não concluíram o cálculo para determinar a altura da torre (Fig. 23 e Fig. 24).

Enunciado do exercício:

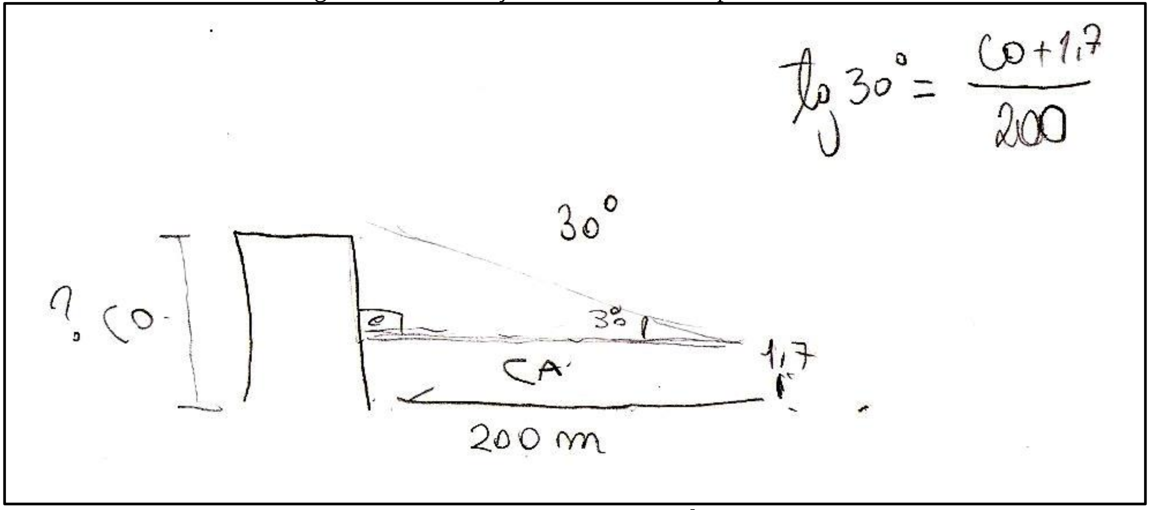
- 2.7. Para obter a altura de uma torre, um topógrafo estaciona seu teodolito a 200 m da base da mesma e aponta o instrumento para o ponto mais alto da torre. O ângulo formado entre a torre, o teodolito e o ponto mais alto da torre mede 30°. Se a luneta do teodolito está a 1,7 m do solo, qual é, aproximadamente, a altura da torre? Tente representar a situação por meio de um desenho.

Figura 23 – Resolução do exercício 2.7 pelo aluno N.



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 24 – Resolução do exercício 2.7 pelo aluno G.



Fonte: Arquivo pessoal.

As conclusões obtidas nas atividades do segundo encontro foram amplamente satisfatórias. Acredito que os alunos que participaram tenham conseguido compreender os conceitos das razões trigonométricas para ângulos agudos, pois foram solicitadas diferentes situações para a verificação dessas razões, o que vai de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, na qual é afirmado que a proposta de situações variadas favorece a conceitualização.

Podemos perceber com a sequência didática proposta que a trigonometria, sob a perspectiva da Teoria de Vergnaud, é um importante campo conceitual da matemática, pois se faz necessário um vasto conjunto de conceitos que contribuem para o domínio das situações que abrangem esse conteúdo. “Um campo conceitual é um conjunto de problemas e situações e, para tratá-los, são necessários conceitos, procedimentos e representações de diferentes tipos, mas em estreita conexão entre si.” (VERGNAUD, 1985 *apud* D’AMORE, 2007, p. 365). Também vale ressaltar que as razões seno, cosseno e tangente são determinadas como conceito para Vergnaud (1993), já que existe o conjunto de situações onde elas são aplicadas, o conjunto das invariantes operatórias (conceitos e teoremas em ação) que elas necessitam para serem definidas e o conjunto das representações simbólicas dessas razões.

Encerra-se aqui a descrição da sequência didática apresentada, bem como o relato da mesma e a análise dos dados coletados. No próximo capítulo seguem as conclusões e perspectivas deste trabalho.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo propor uma sequência didática que, sob a perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, pudesse contribuir na construção dos tópicos básicos de trigonometria.

A metodologia de pesquisa consistiu da elaboração e da aplicação de uma sequência de atividades que envolveu os conceitos iniciais de trigonometria necessários para a compreensão das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Para isso, foi realizado um questionário inicial com os participantes visando diagnosticar os conhecimentos prévios que eles evidenciavam. Através das respostas dos alunos pôde-se constatar que os conhecimentos por eles evidenciados facilitaram na visualização e na percepção dos conceitos que seriam trabalhados posteriormente. De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, são as situações e problemas previamente dominados que moldam a maneira com que adquirimos conhecimento. As concepções prévias dos alunos contêm conceitos e teoremas em ação, que muitas vezes são determinantes no progresso do domínio de um campo conceitual, podendo auxiliar ou prejudicar a aprendizagem desses alunos, cabendo ao professor avaliar as situações e orientar maneiras de melhor aprender. (MOREIRA, 2002).

> No ensino, é necessário desestabilizar cognitivamente o aluno, mas não demais. É preciso identificar sobre quais conhecimentos prévios a criança pode se apoiar para aprender, mas é forçoso também distinguir quais as rupturas necessárias. Quer dizer, é preciso propor também, com cuidado, situações para as quais os alunos não têm onde se apoiar, ou não devem se apoiar, em conhecimentos prévios. (MOREIRA, 2002, p. 20).

A segunda etapa do procedimento desta pesquisa se refere às situações de aprendizagem que introduziram o conceito das razões cosseno, seno e tangente no triângulo retângulo. Nesta etapa foi observado que os alunos utilizaram invariantes operatórias (conceitos e teoremas em ação) percebidas no questionário inicial e desenvolveram esquemas para evoluir dentro do processo de conceitualização, isto é, adquiriram o conhecimento trabalhando com as situações de aprendizagem propostas. (KLEIN, 2009). Nessas situações de aprendizagem foram propostas atividades em que os alunos estabeleceram os conceitos através de suas construções geométricas, ou seja, os estudantes perceberam a variação do valor das razões trigonométricas de acordo com o ângulo indicado, observando e medindo triângulos semelhantes.

"Vergnaud argumenta que [...] o sistema de percepção visual tem um papel preponderante na construção do conhecimento pelos sujeitos". (MOREIRA, 2002, p. 19). Com isso, posso afirmar que as atividades propostas foram relevantes no entendimento dos conceitos trabalhados, pois os participantes conseguiram compreender o conceito – definido por Vergnaud como o conjunto das situações, invariantes e representações – das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Eu desejava, com a aplicação dessa sequência didática, que os estudantes revelassem seus modelos explicativos sobre os conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo, e acredito que esse desejo foi atendido. Durante a realização das atividades foi possível observar o envolvimento e a atenção dos alunos com o que estava sendo proposto, e penso que eles se sentiram participantes do processo de aprendizagem. Acredito que a influência da professora-pesquisadora, assumindo também o papel de mediadora, incentivando a exposição do raciocínio dos discentes, tenha colaborado com esse processo de aquisição de novos conhecimentos.

> O mediador tem, igualmente, como responsabilidade escolher situações para oferecer ao aprendiz que esclareçam o objetivo da atividade, contribuir com a organização da atividade, inclusive com a tomada de informação e de controle, de fazer aparecer, ao menos parcialmente, os teoremas em ação pertinentes, de facilitar as inferências em situação. [...] A comunicação entre o mediador e o aprendiz é marcada pelas mesmas ambiguidades que qualquer outra comunicação: há um salto entre os propósitos do mediador e o significado que ele lhes dá em função de seu sistema de invariantes e o significado compreendido pelo aprendiz que é função de seu próprio sistema de invariantes. (VERGNAUD, 2009, p. 33).

No entanto, a apropriação de conhecimentos por um sujeito depende também de seu próprio empenho na construção e reconstrução dos conceitos, e também depende vigorosamente da qualidade das mediações e da ajuda que ele recebe. (VERGNAUD, 2009).

Penso que uma metodologia subsidiada pela Teoria dos Campos Conceituais provoca uma mudança nas maneiras de ensinar e aprender, contribuindo para uma educação inovadora que desperta nos estudantes o interesse em participar ativamente desse processo, colaborando com o desenvolvimento de sua autonomia e o seu crescimento cognitivo.

Encerro aqui, formalmente, o meu trabalho, porém acrescento que os resultados desta pesquisa projetam outra maneira de se pensar e de se trabalhar a trigonometria em sala de aula. Desta forma, pretendo dar continuidade à minha pesquisa com a intenção de contribuir com a educação e em possibilidades de se ensinar matemática.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Dionara Freire de; VIEIRA, Andrea Cristina. Utilizando o teodolito no ensino da trigonometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013. Curitiba. Anais... Curitiba, 2013, 9 p.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Ministério da Educação, 2000. 144 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 27 out. 2013.

CARVALHO Jr., Gabriel Dias de. Os Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 25, n. 2, p. 207-227, ago. 2008.

D'AMORE, Bruno. **Elementos da didática matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; TROTTA, Fernando; JAKUBOVIC, José. **Matemática Aplicada: 2º grau**. v. 1. São Paulo: Ed. Moderna, 1979.

KLEIN, Marjúnia Édita Zimmer. **O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais**. 2009, 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Faculdade de Física. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), Porto Alegre, 2009.

LINDEGGER, Luiz Roberto de Moura. **Construindo os conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos**. 2000, 203 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), São Paulo, 2000.

MARTINS, Elisa Friedrich. **Robótica na sala de aula de matemática: os estudantes aprendem matemática?** 2012, 168 p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2012.

MENDES, Iran Abreu. Atividades históricas para o ensino da trigonometria. In: BRITO, Arlete de Jesus; CARVALHO, Dione Lucchesi de; MIGUEL, Antonio. **História da Matemática em Atividades Didáticas**. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009, p. 107-178.

MOREIRA, Marco Antônio. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre: Instituto de Física/UFRGS, v. 7, n. 1, jan. 2002. p. 7-29.

MOTA, Thamires de Brito; JUCÁ, Rosineide Sousa; PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. Uma análise de erros nas relações trigonométricas no triângulo retângulo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013. Curitiba. Anais... Curitiba, 2013, 15 p.

MOURA, Francisco Guedes de; PONTES, Mércia de Oliveira. Sequência didática e paradidáticos da matemática: uma abordagem construtiva no ensino da trigonometria para alunos do 9º ano. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013. Curitiba. Anais... Curitiba, 2013, 8 p.

PAIM, Marcio Antonio Souza; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. Conceitos iniciais de necessários para a aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo através do uso de materiais manipuláveis. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013. Curitiba. Anais... Curitiba, 2013, 7 p.

RIBEIRO, Amauri L. S.; SOUZA, Everaldo. **Trigonometria e sua importância na matemática**. Mato Grosso, 2011. Disponível em: <http://cefaprocaceres.com.br/index.php?option=com_content&view=article&id=596&Itemid=76>. Acesso em: 20 maio 2013.

SOUZA, Carlos Antonio de Souza; VICTER, Eline das Flores; LOPES, Jurema Rosa. Fazendo da história da trigonometria um elemento facilitador da aprendizagem. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013. Curitiba. Anais... Curitiba, 2013, 7 p.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos Campos Conceituais. In: 1º SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO. **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (organizadores). **A Aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. – 1. ed. – Curitiba: Editora CRV, 2009, p. 13-35.

APÊNDICE

APÊNDICE A – Termo de consentimento Livre e Esclarecido.

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Solicitamos aos Senhores Pais permissão para realizar a coleta de dados referente ao projeto intitulado “Ensino-aprendizagem de tópicos básicos de trigonometria na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais”, destinado aos alunos das turmas 81 e 82 do Colégio de Aplicação da UFRGS. Este projeto será utilizado como pesquisa da acadêmica Camila Peres Nogues, estudante regularmente matriculada no Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS.

Fui informado(a) ainda, que a pesquisa é coordenada/orientada por Marcus Vinicius de Azevedo Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51)33086198 ou e-mail mbasso@ufrgs.br. Tenho ciência de que a participação de meu/minha filho(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa.

Fui também esclarecido(a) de que as informações oferecidas por meu/minha filho(a) serão utilizadas apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), não sendo identificadas.

A colaboração de meu/minha filho(a) se fará por meio da participação neste projeto, no qual ele(a) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a acadêmica responsável via e-mail camilapnogues@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que posso retirar meu/minha filho(a) dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _______ de ___________ de 2013.

Assinatura da Acadêmica responsável pela pesquisa:__________________________

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____, R.G. ____________________, declaro, por meio deste termo, que concordei na participação de meu/minha filho(a) na pesquisa intitulada “Ensino-aprendizagem de tópicos básicos de trigonometria na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais” desenvolvida pela acadêmica Camila Peres Nogues.

Porto Alegre, _______ de ___________ de 2013.

Assinatura do Responsável: ____

Assinatura da Acadêmica responsável pela pesquisa: __________________________