

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Representação Analítica da Solução da Equação de Cinética Pontual para a
Reatividade Variável no Tempo Livre de Rigidez**

por

Milena Wollmann da Silva

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, 24 Janeiro de 2013

**Representação Analítica da Solução da Equação de Cinética Pontual para a
Reatividade Variável no Tempo Livre de Rigidez**

por

Milena Wollmann da Silva

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Sérgio Bogado Leite

Aprovada por:

Prof. Dr. Aquilino Senra Martinez (COPPE/UFRJ/RJ)

Prof. Dr. Antonio Carlos Marques Alvim (COPPE/UFRJ/RJ)

Prof. Dr. Bardo Ernst Bodmann (UFRGS/PROMEC/RS)

Prof. Dr. Rogério José Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 24 de Janeiro de 2013

RESUMO

Representação Analítica da Solução da Equação de Cinética Pontual para a Reatividade Variável no Tempo Livre de Rigidez

Neste trabalho, descreve-se uma solução analítica para equação de cinética pontual de nêutrons livre de rigidez, assumindo que a reatividade é um função contínua e seccionalmente contínua no tempo. Para este fim, inicialmente reformula-se a equação de cinética pontual sob a forma de um sistema matricial de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Em seguida, dividi-se a matriz correspondente como a soma de uma matriz diagonal com uma matriz, cujos componentes são os elementos fora da diagonal. A seguir, expande-se a densidade de nêutrons e as concentrações de precursores de nêutrons atrasados em uma série truncada, e substitui-se essas expansões na equação matricial, obtém-se uma equação, que permite a construção de um sistema recursivo, constituído por uma equação diferencial linear de primeira ordem matricial com fonte. A característica fundamental deste sistema baseia-se no fato de que a matriz correspondente é diagonal. Por sua vez o termo fonte é escrito em termos da matriz com os componentes fora da diagonal. Além disso, a primeira equação do sistema recursivo não possui fonte, e satisfaz as condições iniciais. Por outro lado, as equações restantes satisfazem a condição inicial nula. Devido à característica da matriz diagonal, pode-se alcançar diretamente soluções analíticas para estas equações recursivas. Também deve-se mencionar que foram avaliados os resultados para qualquer valor de tempo, sem o uso de continuidade analítica, porque a solução proposta é livre de rigidez. Por fim, apresentam se simulações numéricas e comparações com resultados da literatura, especializando-se as aplicações para as reatividades seguintes: constante, degrau, rampa, e seno.

Autor: Milena Wollmann da Silva

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Sérgio Bogado Leite

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Dissertação de Mestrado em Engenharia

Porto Alegre, 24 Janeiro de 2013.

ABSTRACT

Analytical Representation for Solution of the Neutron Point Kinetics Equation with time-dependent Reactivity and Free of the Stiffness Character

In this work, we report a genuine analytical representation for the solution of the neutron point kinetics equation free of the stiffness character, assuming that the reactivity is a continuous and sectionally continuous function of time. To this end, we initially cast the point kinetics equation in a first order linear differential equation. Next, we split the corresponding matrix as a sum of a diagonal matrix with a matrix, whose components contain the off-diagonal elements. Next, expanding the neutron density and the delayed neutron precursors concentrations in a truncated series, and replacing these expansions in the matrix equation, we come out with an equation, which allows to construct a recursive system, a first order matrix differential equation with source. The fundamental characteristic of this system relies on the fact that the corresponding matrix is diagonal, meanwhile the source term is written in terms of the matrix with the off-diagonal components. Further, the first equation of the recursive system has no source and satisfies the initial conditions. On the other hand, the remaining equations satisfy the null initial condition. Due to the diagonal feature of the matrix, we attain analytical solutions for these recursive equations. We also mention that we evaluate the results for any time value, without the analytical continuity because the purposed solution is free on the stiffness character. Finally, we present numerical simulations and comparisons against literature results, considering specific the applications for the following reactivity functions: constant, step, ramp, and sine.

Author: Milena Wollmann da Silva

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Sérgio Bogado Leite

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Dissertação de Mestrado em Engenharia

Porto Alegre, 24 Janeiro de 2013.

ÍNDICE

1	Introdução	1
2	As Equações da Cinética Pontual de Nêutrons	4
2.1	Equação multigrupo de energia de difusão de nêutrons	4
2.1.1	Cálculo de Criticalidade	7
2.2	Cinética de reatores nucleares	8
2.2.1	A relevância dos nêutrons atrasados nas equações da cinética	9
3	Metodologia Proposta e Desenvolvida	17
3.1	A Metodologia Proposta - O Método de Adomian	17
3.1.1	Aplicação do Método de Adomian	18
3.1.2	Um Problema Não Linear de Cinética Pontual	19
3.2	Solução das equações de cinética pontual pelo método da Decomposição com Diagonalização	23
3.3	Convergência do Método	28
3.3.1	CrITÉrio de Convergência de Lyapunov	28
4	Resultados Numéricos	30
4.1	Caso A - Reatividade Constante	30
4.1.1	Exemplo 1	31
4.1.2	Exemplo 2	32
4.1.3	Exemplo 3 - Reatividade do tipo Degrau	33
4.2	Caso B - Reatividades com dependência temporal	34
4.2.1	Reatividade Linear	34
4.2.2	Reatividade quadrática	36
4.2.3	Reatividade tipo senoidal	38
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	41
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	41
	APÊNDICES	45
I	Dedução da Equação de Cinética Pontual	45
II	Representações Matriciais	48
II.1	Representação da Equação	48
II.2	Representação da Equação 3.23	50
II.3	Representação da Equação 3.30	52

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

<i>AEM</i>	Analytical Exponential Method
<i>DM</i>	Decomposition Method
<i>CNEN</i>	Comissão Nacional de Energia Nuclear
<i>GAEM</i>	Generalized Analytical Exponential Method
<i>GRK</i>	Generalized Runge-Kutta Method
<i>MDD</i>	Método da Decomposição com Diagonalização
<i>PROMECA</i>	Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica
<i>PWS</i>	Power Series Solution
<i>SCM</i>	Stiff Confinement Method
<i>UFRGS</i>	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Caracteres Arábicos

A	Matriz com entradas constantes e variáveis
A_{dec}	Decomposição da matriz na soma de duas matrizes
A_{kj}	Polinômios de Adomian
B²	“Buckling” material, cm^{-2}
$C(t)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados no tempo t , cm^{-3}
$C_i(\mathbf{r}, t)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados na posição \mathbf{r} para o grupo i de precursores no tempo t , cm^{-3}
$C_i(\mathbf{r}, 0)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados na posição \mathbf{r} para o grupo i de precursores no tempo $t=0s$, cm^{-3}
D	Matriz diagonal de entradas constantes
$D_g(\mathbf{r}, t)$	representa o coeficiente de difusão de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t
f	Funções não lineares
F	Operador diferencial ordinário não linear
g	Função conhecida
G	Número de grupo de energia
g	Grupos de energia
l	Tempo médio de vida do nêutron, s
L	Comprimento de difusão do nêutron, cm
\mathcal{L}	Operador diferencial de segunda ordem
\mathcal{L}	Operador associado a o problema de Sturm-Liouville
\mathcal{L}	Operador linear qualquer
k_{eff}	Coefficiente de multiplicação efetivo
k_∞	Coefficiente de multiplicação infinito
M	Matriz de coeficientes, com entradas constantes e variáveis
$n(t)$	Densidade de nêutrons no tempo t , cm^{-3}
$n(0)$	Densidade de nêutrons no tempo $t = 0$, cm^{-3}
\mathcal{N}	Operador não linear

$Q_g(\mathbf{r}, t)$	Fonte de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo de energia g no tempo t , $cm^{-3} \cdot s^{-1}$
Q_g^{ext}	Fonte externa de nêutrons, $cm^{-3} \cdot s^{-1}$
\mathcal{R}	Operador linear
R	Ordem de truncamento do problema transformado
t	Tempo, s
T	Período, s
v	Velocidade do nêutron, $\frac{cm}{s}$
v_g	Velocidade do nêutron do grupo g , $\frac{cm}{s}$
U_{92}^{233}	Elemento Urânio 233
U_{92}^{235}	Elemento Urânio 235
\mathbf{Y}	Vetor solução desconhecido

2. Caracteres Gregos

β	Fração de nêutrons atrasados
β_i	Fração de nêutrons atrasados para o grupo i de precursores
Λ	Tempo médio de geração entre o “nascimento” do nêutron e posterior absorção, s
λ	Constante de decaimento, s^{-1}
λ_i	Constante de decaimento para o grupo i de precursores de nêutrons atrasados, s^{-1}
ν	Número médio de nêutrons produzidos na fissão
ν_g	Número médio de nêutrons produzidos na fissão do grupo g de energia
$\nu_{g'}$	Número médio de nêutron produzidos na fissão do grupo g' de energia
ρ	Reatividade
Σ_a	Seção de choque macroscópica de absorção, cm^{-1}
$\Sigma_a(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de absorção na posição \mathbf{r} no tempo t , cm^{-1}
$\Sigma_{ag}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g de energia no tempo t
$\Sigma_{ag'}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' de energia no tempo t
Σ_f	Seção de choque macroscópica de fissão, cm^{-1}
$\Sigma_f(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de fissão na posição \mathbf{r} no tempo t , cm^{-1}
$\Sigma_{fg}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g de energia no tempo t
$\Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' de energia no tempo t
Σ_s	Seção de choque macroscópica de espalhamento, cm^{-1}
$\Sigma_s(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de espalhamento na posição \mathbf{r} no tempo t , cm^{-1}
$\Sigma_{sg}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g de energia no tempo t

$\Sigma_{sg'g}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' de energia para o grupo g de energia no tempo t
Σ_T	Seção de choque macroscópica total, cm^{-1}
$\Phi(\mathbf{r})$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} , $cm^{-2} \cdot s^{-1}$
$\Phi(\mathbf{r}, t)$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} no tempo t , $cm^{-2} \cdot s^{-1}$
$\Phi_g(\mathbf{r}, t)$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g de energia no tempo t , $cm^{-2} \cdot s^{-1}$
$\Phi_g(\mathbf{r}, 0)$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g de energia no tempo $t = 0$, $cm^{-2} \cdot s^{-1}$
χ_g	Espectro de fissão para o grupo g de energia
∇	Gradiente
$\nabla \cdot$	Divergente
∇^2	Laplaciano
$\ \cdot\ $	Norma do Máximo

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Varição da energia para um grupo g de energia	4
2.2	Esquema multigrupo de energia	5
4.1	Densidade de nêutrons para $\rho(t) = at$	36
4.2	Densidade de nêutrons para $\rho(t) = at^2 + bt$	37
4.3	Densidade de nêutrons para $\rho(t) = \rho_0 \sin(t)$	39

ÍNDICE DE TABELAS

2.1	Pârametros nucleares dos precursores de nêutrons atrasados para alguns núcleos	10
4.1	Parâmetros nucleares para um reator térmico	30
4.2	Densidade de nêutrons entre diferentes Λ para reatividade constante, $\rho(t) = \rho_0$	31
4.3	Comparação de resultados numéricos com $\Lambda = 0,00002$	32
4.4	Densidade de nêutrons para uma inserção de reatividade tipo degrau com $\rho = 0,0015$ pelos métodos Hermite, Taylor, Gear e MDD.	34
4.5	Densidade de nêutrons para uma inserção de reatividade tipo degrau com $\rho = 0,0032$ pelos métodos Hermite, Taylor, Gear e MDD.	34
4.6	Parâmetros nucleares para um reator térmico	35
4.7	Densidade de Nêutrons	35
4.8	Número de Sistemas Recursivos para Convergência segundo o Critério de Lyapunov	36
4.9	Parâmetros nucleares para um reator térmico	37
4.10	Número de Sistemas Recursivos para Convergência segundo o Critério de Lyapunov	38
4.11	Parâmetros nucleares para um reator térmico	38
4.12	Comparação dos resultados numéricos para densidade de nêutrons com reatividade senoidal $\rho(t) = \rho_0 \sin(t)$	39
4.13	Número de Sistemas Recursivos para Convergência segundo o Critério de Lyapunov	40

1 Introdução

O estudo dos processos transientes em um reator nuclear, sejam esses lineares ou não, é objeto de interesse tanto da cinética quanto da dinâmica de reatores nucleares.

Neste trabalho, foca-se a atenção na equação de cinética de reatores, em particular no caso da cinética pontual de nêutrons, que modela a variação da densidade de nêutrons no tempo. Essa equação possui, quando com reatividade constante, solução analítica conhecida [Aboander, 2004], [Li, 2010]. Contudo para reatividade dependente do tempo requer procedimentos apropriados de solução, porque trata-se de um problema do tipo rígido, também conhecido como *Stiff*, onde o tamanho do passo de tempo precisa ser rigorosamente controlado para que a estabilidade numérica da solução seja assegurada. Esse tipo de problema demanda métodos apropriados de solução conhecidos como A-estáveis [Petersen, 2011].

Existem diversas investigações sobre a eliminação do problema de rigidez em questão, como métodos numéricos citamos: o de integração usando a regra de Simpson [Keepin e C.W., 1960], o método dos elementos finitos [Kang e K.F., 1973], [Zhiyuan, 1981], o método de Runge Kutta [Allerd e Carter, 1958], [Sánchez, 1989], o método quase-estático [Ott e Meneley, 1969], [Koclas et al., 1997], [Dahmani et al., 2011] o método singular de perturbação [Goldstein e L.M., 1969], [Bienski et al., 1978] e o método de diferenças finitas [Brown, 1967]. A maioria destes métodos funcionam com sucesso em alguns problemas específicos, mas possuem desvantagens segundo [Vigil, 1967]. Tais limitações concentram-se no passo de tempo máximo permitido para assegurar a estabilidade computacional. Em transientes lentos em reatores rápidos, mesmo a continuação analítica mostrado como em [Vigil, 1967] pede modificações em relação a seu procedimento original a fim de alcançar a computação eficiente. Devido a esse problema, [Chao e Attard, 1985] desenvolveram o método de confinamento da rigidez (SCM). [Basken e Lewis, 1996], [Aboander e Hamada, 2002, 2003] determinam a solução das equações da cinética pontual por meio de uma série de potências com a reatividade dependente o tempo. [Haofeng et al, 2007] apresenta uma solução aproximada para um processo supercrítico com realimentação de temperatura e inserindo um pequeno reatividade

tipo degrau, utilizando continuação analítica. [Nahla, 2011] introduziu uma técnica para solução do sistema de equações da cinética pontual considerando realimentação de temperatura, tal técnica faz uso de séries de potência generalizadas, [Hamada, 2011] estendeu o método proposto por [Nahla,2011] para diversos tipos de reatividades considerando realimentação e temperatura. Diversos outros métodos têm sido implementados por diversos pesquisadores tais como [Nóbrega, 1971], [Lawrence e Doring, 1976].

Isso posto, cabe ressaltar que até este ponto foram apontadas apenas soluções obtidas por meio de técnicas numéricas, para o tratamento da equação de cinética pontual, bem como o problema de rigidez. Diferentemente da vasta literatura sobre a abordagem numérica de tais equações, existe uma quantidade menor, mas não menos importante sobre o tratamento analítico dessas equações. Pode-se destacar [Bodmann et al., 2010], [Ceolin, 2010], [Chen et al., 2006,2007], [Petersen et al, 2009,2011], [Seliverstov e Shvedov, 1998],e [Vilhena et al., 2008], que fazem uso de integrais,[Ganapol,2011] utilizando aproximações analíticas.

Dentro desse contexto, esta dissertação enquadra-se no objetivo de resolver em forma analítica as equações da cinética pontual com reatividade variável a seis grupos de precursores de nêutrons atrasados com dependência temporal dos parâmetros nucleares. Na solução as equações da cinética pontual para uma reatividade variável com o tempo, aplicam-se ideias similares ao do método de Adomian [Adomian, 1988; Adomian, 1996; Adomian, 1994; Adomian, 1989; Eugene, 1993]. O desenvolvimento da solução encerra os seguintes passos: inicialmente descreve-se uma solução analítica para equação de cinética pontual de nêutrons livre de rigidez, assumindo que a reatividade é um função contínua e seccionalmente contínua no tempo. Para este fim, reformula-se a equação de cinética pontual sob a forma de um sistema matricial de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Em seguida, dividi-se a matriz correspondente como a soma de uma matriz diagonal com uma matriz, cujos componentes são os elementos fora da diagonal e um elemento adicional correspondente a parte da reatividade que depende do tempo, sendo que esse último elemento ocupa a posição (1,1) na matriz. A seguir, expandem-se a densidade de nêutrons e as concentrações de precursores de nêutrons atrasados em uma série truncada, e substituem-se essas expansões na equação matricial, obtendo-se uma equação, que permite a construção de um sistema recursivo, constituído por uma equação diferencial linear de primeira ordem matricial com fonte. A característica fundamental deste sistema baseia-se no fato que a matriz correspondente é

diagonal. Por sua vez o termo fonte é escrito em termos da matriz com componentes fora da diagonal. Além disso, a primeira equação do sistema recursivo não possui fonte, e satisfaz às condições iniciais. Por outro lado, as equações restantes satisfazem à condição inicial nula. Devido à característica da matriz diagonal, pode-se alcançar diretamente soluções analíticas para estas equações recursivas. Procedimento similar foi utilizado por [Petersen, 2011]. Uma vez encontrada as soluções para as equações da cinética pontual, os resultados são comparados com algumas metodologias encontradas da literatura para a validação do método. Alguns casos teste são elaborados para verificação e análise do comportamento da solução obtida. A convergência é determinada a partir do critério de Lyapunov [Petersen, 2011; Mello, 2010; Zhong-Ping, 2002].

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: no segundo capítulo, apresentam-se alguns conceitos sobre a física de reatores, bem como a derivação das principais equações de interesse nesta dissertação. No terceiro capítulo, mostra-se a solução analítica acompanhada de todo o recurso matemático utilizado para a sua obtenção. No quarto capítulo são apresentados resultados numéricos para as equações da cinética pontual para seis grupos de precursores de nêutrons atrasados considerando uma reatividade constante e variável com o tempo. No quinto capítulo, são apresentadas as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

2 As Equações da Cinética Pontual de Nêutrons

Neste capítulo mostra-se uma derivação, feita de forma heurística da equação de cinética pontual a partir da equação da difusão de nêutrons. É importante destacar que os parâmetros físicos utilizados nessa dissertação não são obtidos a partir dessa dedução, e sim da dedução constante nos apêndices deste trabalho.

2.1 Equação multigrupo de energia de difusão de nêutrons

Analisando-se o balanço de nêutrons para um dado grupo de energia, grupo no qual os nêutrons podem entrar ou sair, pode-se obter a equação multigrupo de energia da teoria de difusão de nêutrons. Considerando-se um grupo de energia g , tal como na Figura 2.1.

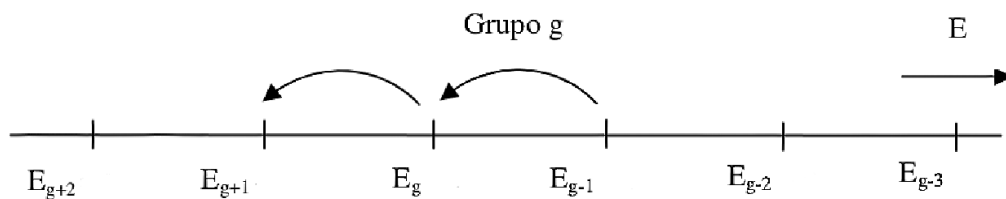


Figura 2.1 – Variação da energia para um grupo g de energia

Na Figura 2.1, correspondendo à realidade física, os índices estão ordenados de forma decrescente, uma vez que os nêutrons, em geral, perdem energia na migração através do meio. Dessa forma, pode-se concluir que nêutrons de altas energias passam a grupos de menor energia, à medida que colidem com núcleos mais leves.

No caso de interesse no presente trabalho, o fluxo de nêutrons dependerá também da energia, mas, ao invés de tratar-se a energia E do nêutron como variável contínua, discretiza-se o domínio energético em intervalos ou grupos contíguos. Isto é, divide-se o domínio energético em G grupos de energia, conforme a Figura 2.2.

Dessa maneira, o seguinte balanço é formulado :

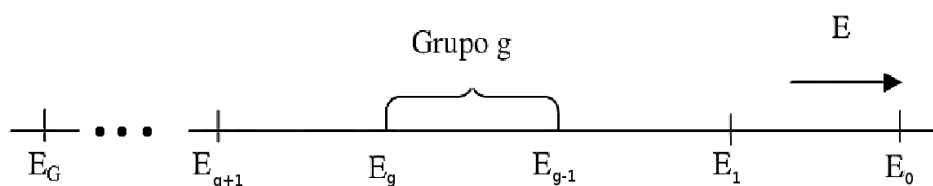


Figura 2.2 – Esquema multigrupo de energia

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{l} \text{Taxa de variação} \\ \text{do fluxo de nêutrons} \\ \text{no grupo de energia } g \end{array} \right) &\equiv \left(\begin{array}{l} \text{Perda devido} \\ \text{à fuga} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Perda devido} \\ \text{à absorção} \end{array} \right) \\
 + \left(\begin{array}{l} \text{Fonte de nêutrons} \\ \text{no grupo } g \\ \text{de energia} \end{array} \right) &- \left(\begin{array}{l} \text{Espalhamento de nêutrons} \\ \text{para fora do grupo} \\ \text{g de energia} \end{array} \right) \\
 + \left(\begin{array}{l} \text{Espalhamento de nêutrons} \\ \text{para dentro do grupo} \\ \text{g de energia} \end{array} \right) & \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Esse balanço pode ser representado como

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v_g} \frac{\partial \Phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \nabla \cdot D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \Phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{ag}(\mathbf{r}, t) \Phi_g(\mathbf{r}, t) + Q_g(\mathbf{r}, t) \\
 - \Sigma_{sg}(\mathbf{r}, t) \Phi_g(\mathbf{r}, t) &+ \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{sg'g}(\mathbf{r}, t) \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

com $g = 1$ até $g = G$, na qual:

- $\Phi_g(\mathbf{r}, t)$ representa o fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t ;
- v_g representa a velocidade média dos nêutrons no grupo g de energia;
- $D_g(\mathbf{r}, t)$ representa o coeficiente de difusão na posição \mathbf{r} do grupo g de energia no tempo t ;
- $\Sigma_{a,g}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g de energia no tempo t ;
- $Q_g(\mathbf{r}, t)$ representa a fonte de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g de energia no tempo t ;
- $\Sigma_{s,g}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g de energia no tempo t ;
- $\Sigma_{s,g'}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' de energia para o grupo g de energia no tempo t .

Pode-se ainda considerar a possibilidade de uma fonte externa, além da fonte de fissão, dessa maneira o termo de fonte poderá ser decomposto, como abaixo:

$$Q_g(\mathbf{r}, t) = \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + Q_g^{ext}, \quad (2.3)$$

na qual:

- χ_g representa a fração de nêutrons que aparece, via fissão, no grupo g de energia;
- $\nu_{g'}$ representa o número médio de nêutrons emitidos na fissão no grupo g' de energia;
- $\Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' de energia no tempo t ;
- Q_g^{ext} representa a fonte externa de nêutrons;
- G representa o número de grupos de energia.

Considerando-se o modelo monoenergético, ou seja, com apenas um grupo de ener-

gia, e, na ausência de fonte externa, a equação (2.2) torna-se:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot D(\mathbf{r}, t) \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}, t) \Phi(\mathbf{r}, t) + \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, t) \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

na qual

$\Phi(\mathbf{r}, t)$ representa o fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} e no tempo t ;

v representa a velocidade do nêutron;

$D(\mathbf{r}, t)$ representa o coeficiente de difusão na posição \mathbf{r} e no tempo t ;

$\Sigma_a(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque de absorção na posição \mathbf{r} e no tempo t ;

ν representa o número médio de nêutron emitidos na fissão;

$\Sigma_f(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque de fissão na posição \mathbf{r} e no tempo t ;

É importante destacar que a principal limitação do modelo monoenergético é assumir que todos os nêutrons possuem a mesma energia cinética, logo, este modelo simplificado também recebe a denominação de modelo a uma velocidade.

2.1.1 Cálculo de Criticalidade

Em um processo de fissão é emitido um número médio de nêutrons ν por fissão nuclear. Dos ν nêutrons emitidos, alguns são absorvidos no meio material não combustível do reator, alguns são absorvidos por captura no próprio combustível e outros escapam pelo contorno do reator. Após essas perdas serem contabilizadas, ainda espera-se que exista pelo menos um nêutron capaz causar uma nova fissão, caso contrário, não se manterá uma reação em cadeia. Deseja-se manter a distribuição de nêutrons em um reator na ausência de fontes externas, e, apenas na presença de uma fonte físsil. Essa fonte é dada pelo produto da taxa de fissão $\Sigma_f(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$ pelo número de nêutrons emitidos por fissão, na qual Σ_f é a seção de choque macroscópica de fissão. Tal fonte pode ser descrita como:

$$\text{Fonte do Reator} = \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

Admitindo a equação monoenergética (2.4) como um modelo válido para os cálculos neutrônicos em reatores nucleares, e, ainda desprezando a variação temporal do fluxo de nêutrons obtém-se:

$$-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \nu\Sigma_f\Phi(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

É importante destacar que a equação (2.6) é uma equação local, isto é, considera um elemento de volume dV específico portanto não leva em consideração à fuga de nêutrons com relação à dV . Adicionalmente considerando uma contribuição da geometria e da composição do do reator a equação acima pode ser corrigida, assumindo a forma:

$$-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k}\nu\Sigma_f\Phi(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

Logo, para algum valor de k , pode-se garantir relevância física. Se $k = 1$, a equação (2.7) reduz-se a (2.6) e, assim, um sistema crítico é obtido. Se $k \neq 1$, entretanto, precisa-se escolher uma nova combinação entre dimensão e composição, para que seja atingido o estado crítico do reator. Haverá um conjunto de autovalores para a equação (2.7), na qual apenas o autovalor dominante corresponderá a uma auto função $\Phi(\mathbf{r})$ não-negativa em todos os pontos do sistema e, portanto, fisicamente relevante. Define-se o autovalor dominante como o fator de multiplicação efetivo (k_{eff}) que indicará se o sistema está em estado subcrítico ($k_{eff} < 1$), crítico ($k_{eff} = 1$) ou supercrítico ($k_{eff} > 1$). Assim, pode-se reescrever a equação (2.7) como:

$$-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\Phi(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

2.2 Cinética de reatores nucleares

Para um reator nuclear operar em um nível de potência constante, a taxa de produção de nêutrons via fissão deve igualar-se à perda via absorção ou fuga de nêutrons. Logo, a densidade de nêutrons, ou o fluxo, independe do tempo, o que corresponde a um es-

tado crítico do reator. Desviada essa condição do balanço ter-se-á dependência temporal do fluxo de nêutrons, resultando uma variação da potência do reator. Esse processo é modelado pela equação de cinética de reatores vide [Petersen, 2011].

É importante destacar que as mudanças no comportamento da população neutrônica, muitas vezes, não estão sob o controle do operador do reator. Eventualmente, dependerá da composição do núcleo, que dependerá de outras variáveis, variáveis essas que não estão diretamente acessíveis ao controle, tais como a temperatura do combustível ou refrigerante. No entanto, tais variáveis, por sua vez, têm dependência do nível de potência do reator e, conseqüentemente, do fluxo de nêutrons. O estudo dessas causas do comportamento da população neutrônica é dito dinâmica de reator nuclear, e, excede o escopo deste trabalho, que tem sua ênfase no estudo da cinética de reator nuclear.

2.2.1 A relevância dos nêutrons atrasados nas equações da cinética

A fissão nuclear dá origem a subprodutos que são elementos com menor número de massa que o núcleo original. Alguns desses subprodutos são instáveis e nos processos de decaimento eles emitem nêutrons. Esses nêutrons que são emitidos após o processo da fissão são chamados de nêutrons atrasados e os núcleos que os emitem são ditos precursores de nêutrons atrasados. Os nêutrons atrasados não têm as mesmas propriedades que os nêutrons prontos, aqueles produzidos diretamente da fissão. A energia média dos nêutrons prontos é muito maior do que a energia média dos nêutrons atrasados ($E \approx 2,0MeV$ para os nêutrons prontos e $E \approx 0,5MeV$ para nêutrons atrasados) [Stacey, 1967]. Os nêutrons atrasados têm probabilidade menor de causar fissões rápidas, em relação aos nêutrons prontos, porque sua energia média está abaixo do requerido para a ocorrência da fissão rápida. E ainda, os nêutrons atrasados têm probabilidade menor de fuga do núcleo, porque eles são produzidos com energias mais baixas e, por isso, seu livre caminho médio é mais curto do que os nêutrons rápidos. Os produtos de fissão que emitem nêutrons atrasados foram reunidos em 6 grupos de acordo com sua meia-vida. A Tabela abaixo mostra a fração de nêutrons atrasados para cada grupo de alguns combustíveis usados em reatores nucleares.

Por definição, $\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$. Dessa forma para reatores térmicos, da Tabela 2.1*, temos que $\beta = 0.0065$, ou seja, os nêutrons atrasados correspondem a 0,65% dos nêutrons produzi-

*Fonte: adaptada de Duderstadt,1976

Tabela 2.1 – Parâmetros nucleares dos precursores de nêutrons atrasados para alguns núcleos

Grupos	$\lambda_i (s^{-1})$	Fração β_i
U_{92}^{235}		
1	0,0124	0,00022
2	0,0305	0,00142
3	0,111	0,00127
4	0,310	0,00257
5	1,14	0,00075
6	3,01	0,00027
U_{92}^{233}		
1	0,0126	0,00023
2	0,0337	0,00081
3	0,139	0,00068
4	0,305	0,00075
5	1,13	0,00014
Pu_{94}^{239}		
1	0,0129	0,000076
2	0,0311	0,000560
3	0,134	0,000432
4	0,331	0,000656
5	1,26	0,000206
6	3,21	0,000070

dos pela fissão do elemento Urânio ${}_{92}^{235}U$. Parece pouco, porém para escalas de tempo maiores quando comparadas com a escala de tempo da fissão, esses nêutrons têm um efeito muito significativo. Isso posto, o passo a seguir é definir um conjunto de equações que descrevam a dependência temporal da concentração dos precursores de nêutrons atrasados. A fim de atingir esse objetivo, inicialmente avaliam-se quais os mecanismos de perda e ganho dos precursores, possibilitando assim a construção de uma equação de balanço.

É fato que a variação temporal da concentração dos precursores é dada pela produção do precursor através da fissão e pela perda causada no subsequente decaimento. Os nêutrons produzidos por um grupo i , considerando um grupo de energia, podem ser contabilizados pelo seguinte método: multiplicando a taxa de produção de nêutrons na fissão pela fração de nêutrons atrasados, dessa forma obtém-se:

$$\beta_i \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

para $i = 1$ até $i = 6$. A perda é expressa como a taxa de decaimento do precursor escrita como o produto da concentração do precursor $C_i(\mathbf{r}, t)$ e da sua respectiva constante de decaimento λ_i para $i = 1$ até $i = 6$. Portanto, a equação de balanço que representa a variação temporal da concentração de precursores é:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) = -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.10)$$

com $i = 1$ até $i = 6$. Logo, incluindo os nêutrons atrasados por meio da fração de nêutrons atrasados β_i e da taxa de decaimento λ_i de cada precursor, tem-se, incluindo a equação de balanço para a concentração de precursores, a equação de cinética espacial monoenergética que é escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot D(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

para $i = 1$ até $i = 6$. A fim de obter-se as equações de cinética pontual, parte-se das equações acima, supondo um meio homogêneo tem-se que $D(\mathbf{r}) = D, \Sigma_a(\mathbf{r}) = \Sigma_a$ e $\Sigma_f(\mathbf{r}) = \Sigma_f$. Isso posto, permanece que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) &= D \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

para $i = 1:6$. Desprezando fonte externa de nêutrons, $Q_{ext}(t)$ apresentada na equação (2.3), forma a fonte de nêutrons será dada por:

$$Q = [1 - \beta] \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.13)$$

Dedução das equações de cinética pontual

Pode-se re-escrever a equação (2.12) como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{L} \Phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (2.14)$$

para $i = 1$ até $i = 6$, na qual \mathcal{L} representa um operador diferencial linear dado por:

$$\mathcal{L} = D \nabla^2 - \Sigma_a + (1 - \beta) \nu \Sigma_f. \quad (2.15)$$

Considerando o estado crítico de um reator tem-se que 2.14 torna-se:

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = 0 &\Rightarrow D \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) = 0 &\Rightarrow \beta \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t),\end{aligned}\quad (2.16)$$

ou seja, o sistema 2.16 reduz-se à

$$\mathcal{L} \Phi = 0, \quad (2.17)$$

isto é, a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Phi + \mathbf{B}^2 \Phi = 0, \quad (2.18)$$

na qual,

$$\mathbf{B}^2 = \frac{(\nu \Sigma_f - \Sigma_a)}{D}, \quad (2.19)$$

dito *buckling* material. Introduzindo-se o comprimento de difusão de nêutrons

$$\mathbf{L} = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad (2.20)$$

e dado o fator de multiplicação infinito

$$k_\infty = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}, \quad (2.21)$$

correspondente ao número de nêutrons produzidos pelos nêutrons absorvidos pode-se reescrever a equação (2.18) como

$$\nabla^2 \Phi + \frac{k_\infty - 1}{\mathbf{L}^2} \Phi = 0. \quad (2.22)$$

Supondo-se a separabilidade do espaço e do tempo, pode-se realizar a expansão do fluxo de nêutrons, $\Phi(\mathbf{r}, t)$, e a concentração de precursores, $C_i(\mathbf{r}, t)$, em séries de autofunções tais como:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = v \sum_{j=1}^{\infty} n_j(t) \Phi_j(\mathbf{r}) \quad (2.23)$$

e

$$C_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_{i,j}(t) \Phi_j(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

para $i = 1$ até $i = 6$, nas quais $\Phi(\mathbf{r})$ satisfaz a equação (2.18) Tal como em [Petersen, 2011] considera-se apenas o primeiro termo da série, isto é,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = v n_1(t) \Phi_1(\mathbf{r}) = v n(t) \Phi_1(\mathbf{r}) \quad (2.25)$$

e

$$C_i(\mathbf{r}, t) = C_{i,1}(t) \Phi_1(\mathbf{r}) = C_i(t) \Phi_1(\mathbf{r}) \quad (2.26)$$

Substituindo-se as equações (2.25) e (2.26) no sistema (2.24) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t)\Phi_1(\mathbf{r}) - Dvn(t)\nabla^2\Phi_1(\mathbf{r}) + \Sigma_a vn(t)\Phi_1(\mathbf{r}) &= (1 - \beta)\nu\Sigma_f vn(t)\Phi_1(\mathbf{r}) \\ &+ \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t)\Phi_1(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

e

$$\frac{d}{dt}C_i(t)\Phi_1(\mathbf{r}) = -\lambda_i C_i(t)\Phi_1(\mathbf{r}) + \beta_i \nu \Sigma_f v n(t)\Phi_1(\mathbf{r}), \quad (2.28)$$

para $i = 1$ até $i = 6$. Isolando-se $\frac{d}{dt}n(t)\Phi_1(\mathbf{r})$ na equação (2.27), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t)\Phi_1(\mathbf{r}) &= Dvn(t)\nabla^2\Phi_1(\mathbf{r}) - \Sigma_a vn(t)\Phi_1(\mathbf{r}) + \\ &+ (1 - \beta)\nu\Sigma_f vn(t)\Phi_1(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t)\Phi_1(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Como $\Phi_1(\mathbf{r})$ satisfaz à equação (2.18) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t)\Phi_1(\mathbf{r}) &= [(1 - \beta)\nu\Sigma_f v - \mathbf{B}^2 Dv - \Sigma_a v]n(t)\Phi_1(\mathbf{r}) \\ &+ \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t)\Phi_1(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}n(t) = [(1 - \beta)\nu\Sigma_f v - \mathbf{B}^2 Dv - \Sigma_a v]n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t), \quad (2.31)$$

Segundo [Duderstadt, 1976]

$$l = [v\Sigma_a(1 + \mathbf{L}^2\mathbf{B}^2)]^{-1}, \quad (2.32)$$

é o tempo médio de vida de um nêutron no reator e

$$k_{eff} = \frac{\nu \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a}}{(1 + \mathbf{L}^2 \mathbf{B}^2)} = \frac{k_\infty}{(1 + \mathbf{L}^2 \mathbf{B}^2)}, \quad (2.33)$$

então a equação (2.31) torna-se

$$\frac{d}{dt}n(t) = \left[(1 - \beta) \frac{k_{eff}}{l} - v(\mathbf{B}^2 D + \frac{D}{L^2}) \right] n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t), \quad (2.34)$$

E, conseqüentemente

$$\frac{d}{dt}n(t) = \left[\frac{(1 - \beta)k_{eff} - 1}{l} \right] n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t), \quad (2.35)$$

Analogamente obtém-se:

$$\frac{d}{dt}C_i(t) = -\lambda_i C_i(t) + \beta_i \frac{k_{eff}}{l} n(t), \quad (2.36)$$

ambas possuem o mesmo intervalo i , isto é, para $i = 1$ até $i = 6$. Introdúz-se aqui duas definições segundo [Duderstadt e Hamilton, 1976]:

$$\Lambda = \frac{l}{k_{eff}} \quad (2.37)$$

sendo esse o tempo médio entre a geração de um nêutron e sua subsequente absorção induzindo fissão,e

$$\rho(t) \equiv \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}} \quad (2.38)$$

sendo essa a reatividade.

Concluí-se que para:

$\rho(t) < 0$ o estado do reator é subcrítico;

$\rho(t) = 0$ o estado do reator é crítico;

$\rho(t) > 0$ o estado do reator é supercrítico.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}n(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda_i C_i(t)\end{aligned}\tag{2.39}$$

para $i = 1$ até $i = 6$. Essas são as equações da cinética pontual. Cabe ressaltar que, em geral, a reatividade pode tornar-se uma função dependente não só do tempo, mas também da própria densidade, o que tornaria a equação (2.39) não linear. Esses casos são tratados pelos modelos de dinâmica. Para mais detalhes ver [Hetrick, 1971]. Nesta dissertação, considera-se o caso em que a reatividade é função unicamente do tempo. A resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas (2.39) para um grupo de energia e seis grupos de precursores, que descrevem o comportamento da população de nêutrons e o decaimento de precursores de nêutrons atrasados, serão objeto de estudo neste trabalho. Esse sistema é de difícil resolução numérica. Portanto no próximo capítulo, mostra-se como resolver em forma analítica esse problema de relevância em física de reatores nucleares.

3 Metodologia Proposta e Desenvolvida

Este capítulo é dividido em quatro partes. A primeira parte visa familiarizar o leitor, leigo, com uma metodologia bastante difundida para o tratamento de problemas não lineares, o método de Adomian. A segunda parte discute a aplicação desse método a um problema mais amplo do que o proposto ao término do capítulo anterior. A terceira parte e principal do capítulo é o foco do trabalho desta dissertação, nessa parte é apresentado a metodologia desenvolvida e essa é aplicada ao problema de cinética proposto ao término do capítulo segundo. A quarta parte, e final do capítulo, discute os critérios de convergência e parada utilizados nas simulações numéricas, que serão apresentadas no capítulo seguinte.

3.1 A Metodologia Proposta - O Método de Adomian

O método de Adomian foi desenvolvido por George Adomian na década de 1980. Como uma técnica de resolução que permite formular a solução analítica para equações não-lineares de vários tipos, sem a necessidade de modificar o modelo original para obter uma versão matematicamente tratável [Adomian, 1994]. Assim pode se considerar como objetivo do método tornar possível soluções fisicamente realistas para sistemas complexos, sem comprometimento da solução ou modelo para ter-se “tratabilidade”.

Esse método consiste em separar uma equação em sua parte linear e não linear. Utilizar o operador inverso da parte linear, que, na maioria dos casos, pode ser encontrado com facilidade. Em seguida, a partir da parte linear do operador, e levando em consideração as condições iniciais e/ou de contorno do problema, são determinadas funções. Essas funções são utilizadas para decompor os termos não lineares do operador.

Cabe ressaltar que a solução obtida por esse método, quando existe, é encontrada sob a forma de série e rapidamente convergente [Mello, 2010]. Dessa forma, estando a solução do problema representada sob a forma de uma série, restringe-se a sua validade às regiões onde o comprimento do domínio seja menor que o raio de convergência da série. Essa série, frequentemente, coincide com a expansão de Taylor da solução [Schneider, 2006].

3.1.1 Aplicação do Método de Adomian

Inicialmente supõe-se o modelo determinístico $\mathcal{F}u = g(t)$, no qual \mathcal{F} representa um operador diferencial não-linear, que possui tanto termos lineares como não-lineares, e $g(t)$ representa uma fonte externa. Representa-se o operador \mathcal{F} como

$$\mathcal{F}u = \mathcal{L}u + \mathcal{R}u + \mathcal{N}u \quad (3.1)$$

Na qual \mathcal{L} é a derivada de mais alta ordem, portanto \mathcal{L}^{-1} é obtido pela integral de mais alta ordem correspondente, \mathcal{R} corresponde aos demais termos lineares, e \mathcal{N} aos termos não lineares do operador.

Assim, escreve-se $\mathcal{F}u = \mathcal{L}u + \mathcal{R}u + \mathcal{N}u$, e portanto

$$\mathcal{L}u + \mathcal{R}u + \mathcal{N}u = g(t) \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}u = \mathcal{L}^{-1}g(t) - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{R}u - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}u. \quad (3.3)$$

Assume-se, em seguida, que a solução $\mathbf{u}(t)$ possa ser decomposta em componentes, tais que $u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t)$, na qual u_0 pode ser determinada a partir de $g(t)$, das condições iniciais, das condições de contorno do problema, ou ainda do operador linear \mathcal{L} .

Um passo adicional torna-se necessário a fim de que sejam propriamente representados os termos não lineares do operador original \mathcal{F} . Supõe-se que $\mathcal{N}u$ seja analítico, e reescreve-se $\mathcal{N}u$ como

$$\mathcal{N}u = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(u_0, u_1, u_2, \dots) \quad (3.4)$$

na qual A_i são polinômios determinados especificamente para a não linearidade considerada, os quais dependem unicamente dos componentes da solução decomposta.

Esses polinômios são dados por

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0) \\
A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) \\
A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1^2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) \\
A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + u_1^3 \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.1.2 Um Problema Não Linear de Cinética Pontual

Reatores nucleares, devido a sua natureza, são modelados por equações não lineares, nas quais os parâmetros de um reator variam com o tempo e com o nível de potência, temperatura e demais propriedades termo hidráulicas, que influenciam a reatividade, isto é, seu fator multiplicativo.

Quando observada a temperatura, em particular, percebe-se que

$$\frac{d}{dt}T(t) = H \cdot n(t) \tag{3.6}$$

na qual H é uma constante de proporcionalidade, que representa um parâmetro ligado a influência do fluxo de calor na taxa de variação de temperatura. Pode-se então considerar um modelo mais abrangente, que o modelo proposto ao término do capítulo anterior, no qual

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}n(t) &= \left(\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right) n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\
\frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \\
\frac{d}{dt}T(t) &= H \cdot n(t)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Isso posto, tal como feito por [Silva, 2011] e [Nahla, 2010b] considera-se a temper-

atura como uma perturbação na equação da reatividade, assim passa-se a ter:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}n(t) &= \left(\frac{\rho(T, t) - \beta}{\Lambda}\right)n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda_i C_i(t)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Uma vez que $\frac{d}{dt}T(t)$ depende de $n(t)$ pode-se representar $\rho(T(t), t)$ por $\rho(n(t), t)$. Grife-se que o termo $\rho(n(t), t)$, segundo o método de Adomian, será da forma:

$$\rho(n(t), t) = \rho^0 + \frac{\partial \rho}{\partial n}\bigg|_{n=0}(t) \cdot n(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial n^2}\bigg|_{n=0}(t) \cdot n^2(t) + \dots \quad (3.9)$$

A expansão acima foi tratada até o termo não linear de primeira ordem em [Silva, 2011], pretende-se estender esse tratamento a não-linearidades de ordens superiores. Note ,ainda, que $\frac{\partial^k \rho}{\partial n^k}\bigg|_{n=0}$ são dependentes de t , e portanto, $\frac{d}{dt}n(t)$ é não linear.

Logo $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}u = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{R}u - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}u$, e em nosso modelo específico temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\Upsilon = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{R}\Upsilon - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}\Upsilon \quad (3.10)$$

na qual

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \\ C_4(t) \\ C_5(t) \\ C_6(t) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \frac{\rho^0 - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \frac{\Lambda}{\beta_1} & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda}{\beta_2} & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda}{\beta_3} & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda}{\beta_4} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda}{\beta_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ \frac{\Lambda}{\beta_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \\ \frac{\Lambda}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k \rho}{\partial n^k} n^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

e, $\mathcal{L} = \frac{d}{dt}$.

Logo o sistema linear, sobre o qual esta dissertação versará, nada mais é que o lado

direito do problema não linear, isto é, a solução obtida nesta dissertação é a inicialização da recursão para o problema não linear. Isso posto, torna-se necessário, agora, definir uma forma geral para os polinômios utilizados para decompor o termo não-linear \mathcal{N} , dessa forma temos que:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \rho^0(t) \\
 A_1 &= \left. \frac{\partial \rho}{\partial n} \right|_{n=0}(t) \cdot n(t) \\
 &\vdots \\
 A_k &= \rho^0(t)n_k + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \rho_j^0(t) \sum_{\substack{K_1, \dots, K_{k-1} \\ \sum K_i = j}} \left(\binom{j}{\{K_i\}_1^{k-1}} \prod_{m=1}^{k-1} n_m^{k_m} \right)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Cabe, mais uma vez, ressaltar que nesta dissertação, para resolver as equações da cinética pontual não utiliza-se diretamente o método clássico de Adomian aplicado a um problema linear, mas devido às pretensões futuras para essa pesquisa tornam-se necessários tanto uma referencia a recursos como um estudo mais amplos. Portanto não se fazem necessários os polinômios de Adomian, no presente estudo. A ideia principal é expandir a densidade de nêutrons e as concentrações de precursores de nêutrons atrasados em uma série truncada, substituir estas expansões nas equações de cinética e construir um conjunto de sistemas recursivos de equações diferenciais de primeira ordem de forma que, ao primeiro sistema é introduzida a condição inicial para resultar em um sistema homogêneo de equações diferenciais de primeira ordem com entradas constantes, e os demais sistemas atendem a condição inicial nula. Nos demais sistemas é introduzida a dependência temporal como um termo fonte, obtendo uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não homogênea. A solução destes sistemas recursivos é obtida reformulando estas equações na forma matricial e utilizando as soluções conhecidas para as equações diferenciais ordinárias matriciais de primeira ordem.

3.2 Solução das equações de cinética pontual pelo método da Decomposição com Diagonalização

Como modelo de cinética pontual a ser resolvido nessa dissertação consideram-se o sistema abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}n(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda_i C_i(t),\end{aligned}\tag{3.15}$$

para $i = 1$ até $i = 6$, com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}n(0) &= n_0 \\ C_i(0) &= \frac{\beta_i n_0}{\Lambda \lambda_i},\end{aligned}\tag{3.16}$$

com $i = 1$ até $i = 6$, e na qual

$n(t)$ denota a densidade de nêutrons

$\rho(t)$ é a reatividade variável com o tempo

β_i é a fração de nêutrons atrasados produzidos

β é a fração total de nêutrons atrasados emitidos por todos os precursores

λ_i é a constante de decaimento da concentração de precursores de nêutrons atrasados, para $i = 1$ até $i = 6$

Λ é o tempo de geração médio do nêutron

$C_i(t)$ é a concentração de um precursor i de nêutrons atrasados, para $i = 1$ até $i = 6$

E ainda, $n(0)$ é a densidade de nêutrons em $t = 0s$, e $C_i(0)$ é a concentração do precursor i em $t = 0s$.

Por meio do método da decomposição, expandem-se tanto a densidade de nêutrons

como a concentração de precursores em séries, da forma:

$$\begin{aligned} n(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} n_j(t) \\ C_i(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j}(t) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Com o objetivo, posterior, de desenvolver aplicações numéricas para a solução obtida; trunca-se a série em um determinado R ditado pelo critério de convergência e pelo critério de parada utilizados nas simulações numéricas. Dessa forma adota-se a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} n(t) &= \sum_{j=0}^R n_j(t) \\ C_i(t) &= \sum_{j=0}^R C_{i,j}(t), \end{aligned} \tag{3.18}$$

para $i = 1$ até $i = 6$. Substituindo a equação (3.18) na equação (3.15), omitindo-se para simplicidade de notação as dependências temporais, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R n_j(t) &= \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \sum_{j=0}^R n_j(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \sum_{j=0}^R C_{i,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{i,j}(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} \sum_{j=0}^R n_j(t) - \lambda_i \sum_{j=0}^R C_{i,j}(t), \end{aligned} \tag{3.19}$$

para $i = 1$ até $i = 6$. Uma notação matricial do sistema decomposto acima pode ser encontrada nos apêndices deste trabalho. Em seguida, considerando a reatividade como expressa por $\rho(t) = \rho_0 + \rho_1(t)$, na qual ρ_0 representa um valor constante, e, ρ_1 um função dependente do tempo, o sistema (3.19) torna-se, omitimos as dependências temporais por simplicidade

de notação:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R n_j(t) &= \frac{\rho_0 + \rho_1 - \beta}{\Lambda} \sum_{j=0}^R n_j(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \sum_{j=0}^R C_{i,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{i,j}(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} \sum_{j=0}^R n_j(t) - \lambda_i \sum_{j=0}^R C_{i,j}(t), \end{aligned} \quad (3.20)$$

para $i = 1$ até $i = 6$, é fácil ver que o sistema (3.20) é um sistema indeterminado, isto é, existe $7 \times R$ incógnitas e apenas 7 equações.

Tal situação pode ser contornada como apresentado em [Petersen, 2011], contudo tal artifício, apesar de tornar o sistema determinado, ainda requer o uso da técnica de continuação analítica, ou seja, não torna o problema livre de rigidez para tempos maiores de simulação. Por essa razão, propõe-se uma modificação na estrutura da matriz principal do sistema, que corresponde ao lado esquerdo da igualdade do sistema proposto na equação (3.20). Realiza-se, então, uma decomposição em uma soma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \right) \sum_{j=0}^R n_j(t) &= \frac{\rho_1}{\Lambda} \sum_{j=0}^R n_j(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \sum_{j=0}^R C_{i,j}(t) \\ \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i \right) \sum_{j=0}^R C_{i,j}(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} \sum_{j=0}^R n_j(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

O sistema acima pode ser re-escrito de forma matricial como

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} - \Omega \mathbf{Y}(t) = \Xi(t). \quad (3.22)$$

Assim por conveniência introduzimos as matrizes:

$$\mathbf{Y}_j(t) = (n_j(t), C_{1,j}(t), C_{2,j}(t), C_{3,j}(t), C_{4,j}(t), C_{5,j}(t), C_{6,j}(t))^T, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag} \left(\frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4, -\lambda_5, -\lambda_6 \right), \quad (3.24)$$

e

$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1(t)}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_3}{\Lambda} & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_4}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_5}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

Formalmente a equação (3.22) pode ser resolvida pela técnica da Transformada de Laplace, sendo essa solução da forma

$$\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{\Omega}t)\mathbf{Y}(0) + \int_0^t \exp(\mathbf{\Omega}\tau)\mathbf{\Xi}(t - \tau)d\tau. \quad (3.26)$$

Note que a integral contém o parte da reatividade que é dependente do tempo juntamente com as constantes de decaimento que deram origem ao caráter rígido do problema. Em geral, reatividades dependentes de tempo específicas, as soluções analíticas do integral existem, de modo que se tem de recorrer a outras técnicas, a fim de resolver a integral para uma dependência arbitrária qualquer de tempo em $\rho_1(t)$. Para este fim, decompor a equação integral (3.26) em um conjunto de equações seguindo um raciocínio semelhante que levou Adomian a propor o método de decomposição, isto é, o problema original é convertido num esquema recursivo, onde a inicialização pode ser resolvida diretamente e as demais equações são resolvidas pelo método de integração de Gauss-Legendre. E o número de passos de recursão é determinado a partir da precisão numérica desejada. Note ainda que $\exp(\mathbf{\Omega}t)$ é facilmente determinado uma vez que $\mathbf{\Omega}$ é uma matriz diagonal. A convolução $\int_0^t \exp(\mathbf{\Omega}\tau)\mathbf{\Xi}(t - \tau)d\tau$ pode ser obtida aproximando-se o produto $\exp(\mathbf{\Omega}\tau)\mathbf{\Xi}(t - \tau)$ por um spline cúbico, e utilizando-se a quadratura de Gauss-Legendre para efetuar-se a integral,

assim garante-se, uma vez que utiliza-se um polinômio cúbico, que a integral é exata. Portanto, a partir desse ponto não há mais referência a (3.26) enquanto uma solução analítica, e sim como uma representação, uma vez que aproximações e arredondamentos tornaram-se necessário para que a integral descrita em (3.26) pudesse ser avaliada.

Assim, a fim de determinar cada termo da expansão de $\mathbf{Y} = \sum_i \mathbf{Y}_i$, a primeira iteração terá a forma

$$\frac{d\mathbf{Y}_0(t)}{dt} - \Omega\mathbf{Y}_0(t) = 0, \quad (3.27)$$

que de maneira expandida é expressa por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_0(t) &= \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}n_0(t) \\ \frac{d}{dt}C_{1,0}(t) &= -\lambda_1C_{1,0}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}C_{6,0}(t) &= -\lambda_6C_{6,0}(t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

E a instrução de recursão para a solução em sua forma fechada é dada por

$$\frac{d\mathbf{Y}_i(t)}{dt} - \Omega\mathbf{Y}_i(t) = \Xi(t)\mathbf{Y}_{i-1}(t), \quad (3.29)$$

que pode ser escrita em forma expandida como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_j(t) &= \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}n_j(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{1,j-1} + \frac{\rho_1}{\Lambda}n_{j-1}(t) \\ \frac{d}{dt}C_{1,j}(t) &= -\lambda_1C_{1,j}(t) + \frac{\beta_1}{\Lambda}n_{j-1}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}C_{6,j}(t) &= -\lambda_6C_{6,j}(t) + \frac{\beta_6}{\Lambda}n_{j-1}(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Em virtude do Transformada de Laplace ser uma operador linear e a equação

de ser linear, a solução por Transformada de Laplace pode ser empregada diretamente no formalismo recursão mantendo o esquema exato.

Cabe ressaltar que, embora não seja única, essa decomposição é feita de tal maneira que o sistema(3.15) seja satisfeito, a menos dos termos $\frac{\rho_1}{\Lambda}, \frac{\beta_i}{\Lambda}$ com $i = 1$ até $i = 6$, e $\sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i$ que não estão presentes na equação (3.28). Enfatiza-se que a solução das equações (3.28) e (3.30) são determinados a partir de técnicas já estabelecidas pela teoria de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem.

3.3 Convergência do Método

O tratamento da convergência do método da decomposição foi considerado por diversos autores. Como [Cherruault, 1989] e [Répaci, 1990]. Em [Cherruault, 1989], foi provada uma nova definição da técnica e então a ideia que torna possível provar a convergência do método da decomposição. Em [Répaci, 1990], mostra-se a convergência do método com base em uma sutil conexão com técnicas de ponto fixo. Essa é, essencialmente, a mesma conclusão derivada por [Cherruault, 1993], que propuseram uma nova prova da convergência para a técnica de Adomian baseando-se em propriedades da convergência de séries. Neste trabalho opta-se por utilizar a técnica de Lyapunov, tal como formalizado por [Boichenko, 2005], proposto por [Vilhena, 2008] e recentemente usado por [Petersen, 2011] e [Mello, 2010].

3.3.1 Critério de Convergência de Lyapunov

O critério de convergência de Lyapunov é fundamentado na teoria de estabilidade de Lyapunov. Tal teoria é usada para analisar a trajetória de um sistema, sem encontrar a trajetória em si, isto é, sem resolver a equação diferencial. [Boichenko, 2005]. Para a análise da estabilidade e convergência das soluções essa teoria utiliza dois métodos, o método indireto de Lyapunov, também conhecido como primeiro método, e o método direto de Lyapunov, também conhecido como segundo método de Lyapunov [Zhong-Ping, 2002].

O primeiro método, o método indireto, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear, a partir de seu modelo linearizado, no qual os termos não lineares são aproximados pelo truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio, e, sua estabilidade é analisada por meio dos autovalores [Hafstein, 2004].

O segundo método Lyapunov, o método direto, não depende da linearização do sistema original, apenas da existência de uma solução positivo definida. Nesse método determina-se a estabilidade sem integrar, explicitamente, a solução.

Dado o proposto, para sistemas dinâmicos, em [Hafstein, 2005] e [Hafstein, 2004], toma-se como referência para a análise da convergência das soluções propostas na presente pesquisa o método direto de Lyapunov. Uma vez que esse dispensa linearizações o que vai ao encontro do pretendido com uso do método da decomposição de Adomian. E por fim, com base nos recentes trabalhos de [Petersen, 2011] e [Mello, 2010], utiliza-se para analisar a convergência da solução das equações de cinética pontual para a densidade de nêutrons, e também para a concentração de precursores de nêutrons atrasados, o critério de convergência de Lyapunov.

Assumindo que $|\delta Z_R| = \left\| \sum_{j=R+1}^{\infty} k_j \right\|$ seja a a diferença máxima entre $\Gamma_R = \sum_{j=1}^R k_j$ e k , na qual $\| \cdot \|$ significa a norma máxima, então analisa-se a convergência a partir de

$$|\delta Z_R| \approx e^{\xi \|\Gamma_R\|} |\delta Z_0|, \quad (3.31)$$

na qual ξ representa o coeficiente de Lyapunov. A equação acima pode ser re-escrita como

$$\xi = \frac{1}{\|\Gamma_R\|} \ln \left(\frac{|\delta Z_R|}{|\delta Z_0|} \right). \quad (3.32)$$

Onde Z_0 representa a solução dada pelo primeiro sistema recursivo, e Z_R representa a solução acumulada pelos R sistemas recursivos considerados.

O critério de Lyapunov determina a influência da variação da condição inicial sobre a solução. Neste trabalho o critério de Lyapunov é utilizado para verificar se a solução para a densidade de nêutrons Caso $\xi < 0 \forall k > k_0$ então a convergência da solução é garantida a partir de um determinado incremento no número de termos da série, pela qual a solução é representada. Uma vez que δZ_0 contém toda a influência da condição inicial, concluí-se que δZ_R tenderá a zero quando $\xi < 0$. Ou seja, quando o primeiro termo da série for dominante em relação a soma dos demais, tem-se $\xi < 0$. Contudo, caso $\xi > 0 \forall k > k_0$ o comportamento da solução será caótico, o que indica que a série afasta-se do raio de convergência da solução. E ainda, quando $\xi = 0$ tem-se um caso de convergência indeterminada.

4 Resultados Numéricos

Mostram-se neste capítulo resultados e comparações com a literatura que indicam a viabilidade do Método da Decomposição com Diagonalização, (MDD), para resolver as equações da cinética pontual para diversas reatividades. Classificam-se as simulações em duas categorias, a de reatividade constante (Caso A), e em seguida a de reatividade variável com o tempo (Caso B). Para todos os casos consideram-se as condições iniciais como $n(0) = 1$ e $C_i(0) = \frac{\beta_i n_0}{\Lambda \lambda_i}$ para de $i = 1$ até $i = 6$.

4.1 Caso A - Reatividade Constante

Neste caso, para avaliar o MDD, consideram-se dois exemplos: o primeiro para avaliar a solução em diferentes tempos de geração de nêutrons e para diferentes reatividades; o segundo para comparar e validar a metodologia proposta comparando-a a outras metodologias encontradas da literatura. Aqui assumem-se os parâmetros nucleares de um reator térmico dado o disposto por [Aboander, 2004]

Tabela 4.1 – Parâmetros nucleares para um reator térmico

Fração de Nêutrons Atrasados por Grupo de Precursores	Constante de Decaimento por grupo de precursores
$\beta_i \cdot 10^{-3}$	$\lambda_i (s^{-1})$
0,266	0,0127
1,491	0,0317
1,316	0,115
2,849	0,311
0,896	1,40
0,182	3,87
$\beta = 7 \cdot 10^{-3}$	

4.1.1 Exemplo 1

Neste exemplo são apresentados resultados obtidos pelo MDD comparando três diferentes tempos de geração: Λ ($10^{-5}s$, $10^{-4}s$, $10^{-3}s$), e para três reatividades: sub-pronto crítica ($\rho = 0,003$); pronto crítica ($\rho = 0,007$) e super-pronto crítica ($\rho = 0,008$). Os resultados são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Densidade de nêutrons entre diferentes Λ para reatividade constante, $\rho(t) = \rho_0$

		$\rho = 0,003$	$\rho = 0,007$	$\rho = 0,008$
Λ	t(s)	Densidade de nêutrons [cm^3] MDD		
10^{-3}	10^{-3}	1,0029	1,0070	1,0080
	10^{-1}	1,2484	1,7034	1,8454
	1	1,9672	11,0252	20,7376
10^{-4}	10^{-3}	1,0294	1,0700	1,0804
	10^{-1}	1,7652	8,3474	15,4198
	1	2,1876	1055,5143	$1,14917 \cdot 10^6$
10^{-5}	10^{-3}	1,2472	1,7000	1,8414
	10^{-1}	1,8022	110,7571	$2,22968 \cdot 10^5$
	1	2,2126	$4,0266 \cdot 10^9$	$3,7558 \cdot 10^{45}$

Na Tabela 4.2, nota-se que para reatividades mais altas, o fluxo neutrônico aumenta mais rapidamente quanto mais curto for o tempo de geração médio do nêutron. Adicionalmente, percebe-se que, quando $\rho < \beta$ a influência do tempo de geração é pequena, o que sugere que a densidade de nêutrons vem a ser determinada principalmente pelos nêutrons atrasados. E ainda, quando a reatividade é maior ou igual que a fração de nêutrons atrasados, ou seja, $\rho \geq \beta$, o reator torna-se praticamente fora de controle, o que sugere que a contribuição dos atrasados é irrelevante frente aos nêutrons prontos.

4.1.2 Exemplo 2

Neste exemplo, a densidade de nêutrons obtida pelo método MDD é comparada com: o método Theta (θ weighting) [Porsching, 1966]; o método do confinamento da rigidez (SCM) [Chao, 1985]; o método de Runge-Kutta generalizado (GRK) [Sánchez, 1989] e o método do modo da exponencial analítica (AEM) [Aboander, 2004]. Os parâmetros nucleares são os mesmos utilizados no exemplo anterior dados pela 4.2. Na Tabela 4.3, apresentam-se os resultados obtidos pelo método da Decomposição com diagonalização (MDD) para diferentes tempos. As mesmas reatividades do exemplo anterior são consideradas.

Tabela 4.3 – Comparação de resultados numéricos com $\Lambda = 0,00002$

ρ_0	Método	Δt	Densidade de Nêutrons[cm^{-3}]		
			$t = 1\text{s}$	$t = 10\text{s}$	$t = 20\text{s}$
0,003	θ weighting		2,1737	8,0069	$2,8076 \cdot 10^1$
	SCM	0,000333	2,2254	8,0324	$2,8351 \cdot 10^1$
	GRK	0,001	2,2098	8,0192	$2,8297 \cdot 10^1$
	AEM		2,2098	8,0192	$2,8297 \cdot 10^1$
	DM		2,2098	8,0192	$2,8297 \cdot 10^1$
	MDD		2,2098	8,0192	$2,8297 \cdot 10^1$
				$t = 0,01\text{s}$	$t = 0,5\text{s}$
0,007	θ weighting		4,5089	$5,3484 \cdot 10^3$	$2,0641 \cdot 10^{11}$
	SCM	0,000143	4,5001	$5,3530 \cdot 10^3$	$2,0627 \cdot 10^{11}$
	GRK	0,001	4,5088	$5,3445 \cdot 10^3$	$2,0570 \cdot 10^{11}$
	AEM		4,5088	$5,3459 \cdot 10^3$	$2,0591 \cdot 10^{11}$
	DM		4,5088	$5,3459 \cdot 10^3$	$2,0591 \cdot 10^{11}$
	MDD		4,5088	$5,3459 \cdot 10^3$	$2,0591 \cdot 10^{11}$
				$t = 0,01\text{s}$	$t = 0,1\text{s}$
0,008	θ weighting		6,2030	$1,4115 \cdot 10^3$	$6,2258 \cdot 10^{23}$
	SCM	0,000125	6,2046	$1,4089 \cdot 10^3$	$6,1574 \cdot 10^{23}$
	GRK	0,001	6,2028	$1,4101 \cdot 10^3$	$6,1486 \cdot 10^{23}$
	AEM		6,2028	$1,4104 \cdot 10^3$	$6,1632 \cdot 10^{23}$
	DM		6,2028	$1,4104 \cdot 10^3$	$6,1633 \cdot 10^{23}$
	MDD		6,2028	$1,4104 \cdot 10^3$	$6,1633 \cdot 10^{23}$

Dos resultados da literatura comparado a este método, pode-se aferir uma excelente concordância dos resultados obtidos pelo método (MDD), uma vez que se obteve um desvio relativo de praticamente 0% para todos os tempos. Em vista dos resultados apresentados, pode-se inferir que o método MDD é aplicável para a resolução das equações de cinética pontual com reatividade constante.

4.1.3 Exemplo 3 - Reatividade do tipo Degrau

Utilizou-se como teste preliminar para simulação desenvolvida, isto é, um exame de consistência do algoritmo desenvolvido. Esse teste foi realizado a partir do estabelecido no artigo de [Li et al., 2010], no qual é proposta uma solução analítica para a equação de cinética com uma inserção de reatividade do tipo degrau, considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados. Para essa solução são utilizados os seguintes parâmetros $\lambda = 0,008s^{-1}$, $l = 1 \cdot 10^{-4}s$, $\beta = 0,0065$, $n_0 = 1,0cm^3$, $\rho = 0,0015$, e $\rho = 0,0032$. Utilizando-se os mesmos parâmetros, a exceção de l compara-se o método desenvolvido, MDD, com a solução analítica e outros métodos polinomiais da literatura.

A solução proposta em [Li, 2010] é da forma:

$$n(t) = -\frac{q\Lambda}{\rho} + \frac{(n_0\rho + q\Lambda)}{2\rho\sqrt{\rho_s^2 + 4\lambda\rho\Lambda}} \left(2\rho + \rho_s \pm \sqrt{\rho_s^2 + 4\lambda\rho\Lambda}\right) \times \exp\left(\frac{-\rho_s \pm \sqrt{\rho_s^2 + 4\lambda\rho\Lambda}}{2\Lambda}t\right) \quad (4.1)$$

na qual

$$\rho_s = \lambda l + \beta - \rho.$$

No resultado obtido por [Li, 2010] estão presentes duas soluções simétricas, contudo apenas a solução positiva é levada em consideração na presente análise.

Pode se concluir a partir dos resultados expostos em 4.4 e 4.5, que para o algoritmo desenvolvido é consistente uma vez que é capaz de reproduzir os resultados obtidos pela solução analítica do problema proposto.

Tabela 4.4 – Densidade de nêutrons para uma inserção de reatividade tipo degrau com $\rho = 0,0015$ pelos métodos Hermite, Taylor, Gear e MDD.

Método	Passo de tempo (s)	Tempos para os quais a solução foi avaliada (s)			
		0,15	1,0	10	80
Hermite[Li, 2010]	h=0,0001	1,60653661	1,66047550	2,30044310	16,64709627
	h=0,01	1,60653563	1,660477550	2,30044310	16,64709628
Taylor*	h=0,0001	1,60670538	1,66176195	2,31506860	16,96075355
	h=0,01	1,60645732	1,66047554	2,30044315	16,64709654
Gear [Li, 2010]		1,60650974	1,66049068	2,30262036	16,69901706
MDD	–	1,60653661	1,6047550	2,30044310	16,64709627
Equação 4.1	–	1,60653661	1,66047550	2,30044310	16,64709627

Tabela 4.5 – Densidade de nêutrons para uma inserção de reatividade tipo degrau com $\rho = 0,0032$ pelos métodos Hermite, Taylor, Gear e MDD.

Método	Passo de tempo (s)	Tempos para os quais a solução foi avaliada (s)			
		0,15	1,0	10	80
Hermite[Li, 2010]	h=0,0001	2,95345237	3,23579952	7,48621969	$1,88648403 \cdot 10^3$
	h=0,01	2,95395578	3,24001136	7,54901155	$1,91244349 \cdot 10^3$
Taylor[Li, 2010]	h=0,0001	2,95344061	3,23579953	7,48621971	$1,88648403 \cdot 10^3$
	h=0,01	2,95247402	3,23580024	7,48622113	$1,88648403 \cdot 10^3$
Gear [Li, 2010]		2,95321521	3,23580124	7,48971361	$1,90116801 \cdot 10^3$
MDD	–	2,95345237	3,23579952	7,48621969	$1,88648403254 \cdot 10^3$
Equação 4.1	–	2,95345237	3,23579952	7,48621969	$1,88648403 \cdot 10^3$

4.2 Caso B - Reatividades com dependência temporal

Para esse caso, resolve-se o problema de cinética pontual para uma reatividade variável com o tempo. Consideram-se quatro exemplos com reatividades dependentes do tempo: uma reatividade do tipo linear, uma do tipo quadrática e uma do tipo senoidal.

4.2.1 Reatividade Linear

Neste exemplo, considera-se inicialmente que a reatividade é descrita como uma função linear do tempo da forma $\rho(t) = at$, onde a taxa de inserção de reatividade a , cuja unidade é $[\$/s]$, é uma constante. A densidade de nêutrons é calculada para dois valores diferentes de a . Os parâmetros nucleares são descritos na Tabela 4.6 para um reator térmico

conforme [Nahla, 2008] para um tempo de geração $\Lambda = 0,00001s$.

Tabela 4.6 – Parâmetros nucleares para um reator térmico

Fração de Nêutrons Atrasados por Grupo de Precusores	Constante de Decaimento por grupo de precusores
$\beta_i \cdot 10^{-3}$	$\lambda_i (s^{-1})$
0,246	0,0127
1,363	0,0317
1,203	0,115
2,605	0,311
0,819	1,40
0,167	3,87
$\beta = 6,4 \cdot 10^{-3}$	

Na Tabela 4.7, apresentam-se os resultados obtidos por meio do MDD comparados com o método da composição de [Petersen, 2011] (DM) já validados em seu trabalho pelos métodos (GAEM) proposto por [Nahla, 2010a] e aproximação do tipo Padé. Utiliza-se um critério de parada de 10^{-14} para o truncamento dos R sistemas recursivos. e

Tabela 4.7 – Densidade de Nêutrons

a	t(s)	Densidade de Nêutrons	
		DM	MDD
0,25	0,25	1,069651	1,069542
	0,50	1,156849	1,156695
	0,75	1,265493	1,265332
	1	1,401838	1,401982
0,5	0,25	1,149328	1,492100
	0,50	1,368775	1,368928
	0,75	1,707983	1,707601
	1	2,275336	2,275272

Com os resultados apresentados na Tabela 4.7, pode-se observar uma boa concordância dos resultados quando comparados com o método (DM). O método da Decomposição com diagonalização satisfaz em todos os pontos o respectivo critério de Lyapunov. Fica claro que se pode controlar a precisão dos resultados e a convergência da solução pelo aumento dos R sistemas recursivos. A Tabela 4.8 ilustra a satisfação do critério de Lyapunov para $a = 0,5\$ \cdot s^{-1}$, $t = 1$ s e $h = 0,25$ s para os R sistemas recursivos.

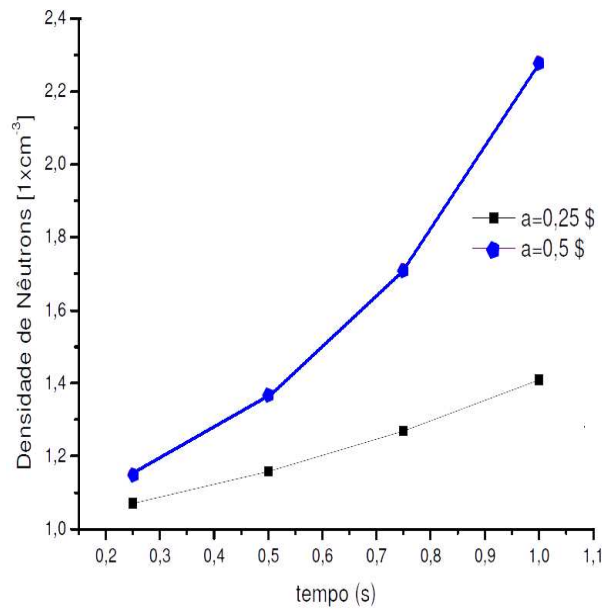


Figura 4.1 – Densidade de nêutrons para $\rho(t) = at$

Tabela 4.8 – Número de Sistemas Recursivos para Convergência segundo o Critério de Lyapunov

Número R de Sistemas Recursivos	Densidade de Nêutrons [cm ⁻³]		Coeficiente ξ de Lyapunov
	Resultado da Recursão	Resultado Acumulado Pela Soma	
R=0	1,70793	1,70793	0
R=1	0,532079	2,240062	-0,520631
R=2	0,033083	2,273145	-1,735055
R=3	0,0164648	2,274791	-2,04054
R=4	0,000481	2,275272	-3,59294
R=5	0,000000001687	2,2752721687...	-9,11346
R=6	$1,265 \cdot 10^{-11}$	2,2752721688...	-11,264

4.2.2 Reatividade quadrática

Neste exemplo, resolvem-se as equações da cinética pontual pelo método da decomposição com diagonalização para uma reatividade do tipo quadrática dada por: $\rho(t) = at^2 + bt$, na qual a e b são constantes arbitrárias. Os parâmetros nucleares são dados na Tabela 4.9 para um reator térmico com tempo de geração $\Lambda = 10^{-4}s$ conforme [Nobrega, 1971].

Tabela 4.9 – Parâmetros nucleares para um reator térmico

Fração de Nêutrons Atrasados por Grupo de Precusores	Constante de Decaimento por grupo de precusores
$\beta_i \cdot 10^{-3}$	$\lambda_i (s^{-1})$
0,2850	0,0127
1,5975	0,0317
1,4100	0,115
3,0525	0,311
0,9600	1,40
0,1950	3,87
$\beta = 7,5 \cdot 10^{-3}$	

Na Figura 4.2, ilustra-se a resposta da densidade de nêutrons a uma variação quadrática na reatividade, estabelecendo um parâmetro fixo b e variando o parâmetro a . Neste caso, nota-se que se pode controlar o crescimento da densidade de nêutrons pelo simples ajuste do parâmetro a . Fisicamente isso poderia representar uma aproximação dos movimentos das barras de controle dada pela variação da reatividade em função do tempo. Aqui, novamente tem-se o critério de Lyapunov satisfeito para todos os pontos calculados. Como critério de parada utilizou-se 10^{-7} para os R sistemas recursivos.

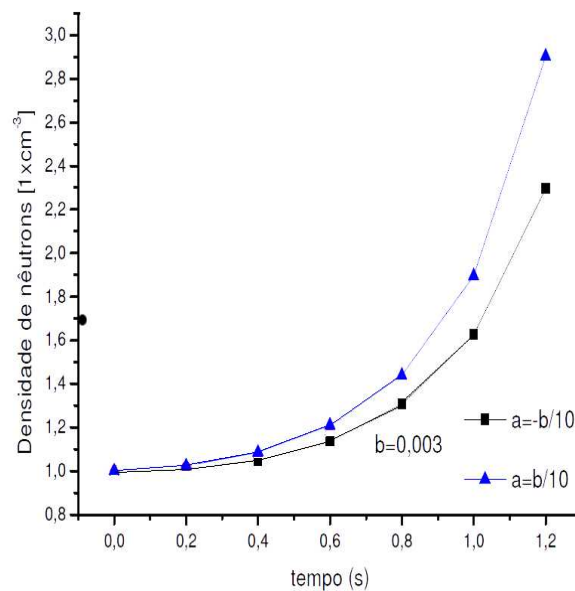
Figura 4.2 – Densidade de nêutrons para $\rho(t) = at^2 + bt$

Tabela 4.10 – Número de Sistemas Recursivos para Convergência segundo o Critério de Lyapunov

Número R de Sistemas Recursivos	Densidade de Nêutrons [cm ⁻³]		Coeficiente ξ de Lyapunov
	Resultado da Recursão	Resultado Acumulado Pela Soma	
R=0	1,814651	1,814651	0
R=1	0,5615870,5	2,3762385	-0493582
R=2	0,37439168	2,75063016	-0,5738812
R=3	0,12479722	2,87542738	-0,930978
R=4	0,06239861	2,9378259	-1,14713

4.2.3 Reatividade tipo senoidal

A fim de completar a análise dos resultados numéricos, resolvem-se as equações de cinética pontual para reatividade senoidal do tipo $\rho(t) = \rho_0 \sin(t)$, com $\rho_0 = 0,00073$ para $\Lambda = 0,00003s$. Os parâmetros nucleares são dados pela Tabela 4.11 conforme [Hansen, 1965].

Tabela 4.11 – Parâmetros nucleares para um reator térmico

Fração de Nêutrons Atrasados por Grupo de Precursores	Constante de Decaimento por grupo de precursores
$\beta_i \cdot 10^{-3}$	$\lambda_i (s^{-1})$
0,214	0,0127
1,423	0,0317
1,247	0,115
2,568	0,311
0,748	1,40
0,273	3,87
$\beta = 6,4 \cdot 10^{-3}$	

Na Tabela 4.12, apresentam-se os resultados numéricos para a densidade de nêutrons obtidos pela metodologia proposta (DDM) para o tempo variando de 0 a 10 segundos. Estes resultados são ilustrados também na Figura 4.3

Tabela 4.12 – Comparação dos resultados numéricos para densidade de nêutrons com reatividade senoidal $\rho(t) = \rho_0 \sin(t)$

t(s)	Densidade de Nêutrons	
	DM	MDD
0	1,00000	1,00000
1	1,12397	1,12393
2	1,16881	1,16883
3	1,07443	1,07441
4	0,95381	0,95379
5	0,90737	0,90736
6	0,96151	0,96157
7	1,08748	1,08748
8	1,17168	1,17165
9	1,11128	1,11126
10	0,98464	0,98464

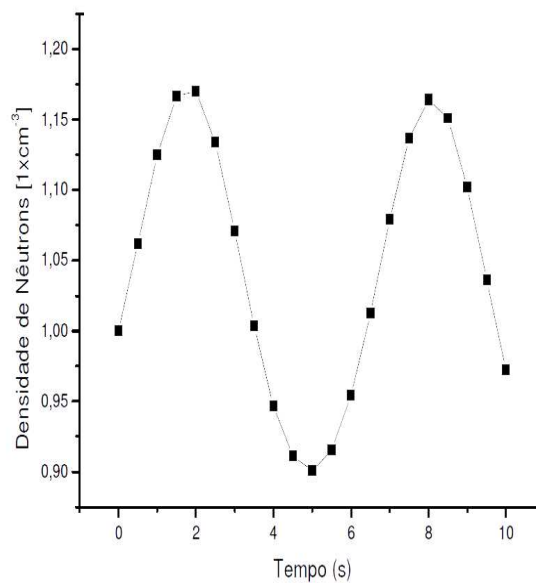


Figura 4.3 – Densidade de nêutrons para $\rho(t) = \rho_0 \sin(t)$

Mais uma vez os resultados foram excelentes quando comparados com as metodologias propostas por [Petersen, 2011]. O critério de Lyapunov foi satisfeito para todos os

Tabela 4.13 – Número de Sistemas Recursivos para Convergência segundo o Critério de Lyapunov

Número R de Sistemas Recursivos	Densidade de Nêutrons [cm ⁻³]		Coeficiente ξ de Lyapunov
	Resultado da Recursão	Resultado Acumulado Pela Soma	
R=0	0,233762	0,233762	0
R=1	0,1753215	0,4090835	-0,703236
R=2	0,116881	0,5259645	-1,31786
R=3	0,054405	0,584405	-2,49458
R=4	0,071286	0,6535336	-1,8172
R=5	0,085712733	0,740048733	-1,35572
R=6	0,805752253	0,825800986	-1,49851
R=7	0,228672676	1,054473662	-0,0208748
R=8	0,113115125	1,167587787	-0,621707
R=9	0,001185088	1,1688772875	-4,52099
R=10	0,000037125	1,16881	-7,48434

pontos. Tendo em vista os resultados obtidos para as equações da cinética pontual com reatividade variável com o tempo, obteve-se sucesso na obtenção da solução para o referido problema com o uso do método da decomposição com diagonalização. Além disso, observa-se que quando a solução se afasta da solução inicial $n(0)$, um número maior de sistemas recursivos é exigido.

5 Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho atingiu-se o objetivo proposto, obtendo uma solução analítica para a equação de cinética pontual, livre de rigidez, considerando a reatividade uma função contínua ou seccionalmente contínua no tempo. O caráter analítico da representação da solução é justificado pelo fato que nenhuma aproximação é feita no procedimento de derivação da solução. A contribuição na eliminação do caráter de rígido dessa equação, consiste na eliminação da metodologia de continuação analítica, ou seja, a integração em intervalos de tempo, no cálculo da densidade de nêutrons e concentração de precursores de nêutrons atrasados, para um tempo prescrito.

De fato, com a metodologia proposta torna-se possível realizar diretamente esses cálculos, para qualquer valor de tempo. Esse fato é comprovado pelos bons resultados encontrados para os problemas considerados, decorrente do caráter analítico da representação, uma vez garantida a existência e a unicidade da mesma. A comparação com os resultados da literatura demonstra a eliminação do efeito de rigidez na solução proposta, uma vez que é observada a coincidência com os resultados disponíveis na literatura, para pequenos passo de tempo na discretização.

Outra característica importante desse método reside no fato que o erro pode ser controlado, utilizando-se um número adequado de equações no sistema recursivo, para a obtenção da precisão desejada. Cumpre ainda ressaltar que o caráter analítico da representação mitiga o erro devido à solução numérica da equação desconsiderando o erro de arredondamento. A adicional justificativa para essa afirmativa decorre do fato que os resultados de análise numérica estabeleceram que os métodos numéricos de solução de problemas do tipo rígido devem ser A-estáveis. Portanto, dando continuidade ao trabalho nessa linha de pesquisa, sugerimos como trabalho futuro, a aplicação da metodologia proposta a problemas de cinética pontual, com realimentação de temperatura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aboander, A.E. e Nahla, A., 2004. "On Padé approximations to the exponential function and applications to the point kinetics equations", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 44, pp. 347–368.

Adomian, G., 1988. "A review of the decomposition method in applied mathematics", **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, vol. 135, pp. 501–544.

Adomian, G., 1989. "**Nonlinear stochastic systems theory and applications to physics**". Kluwer Academic Publishers, Athens, Georgia, USA, 1 edition.

Adomian, G., 1994. "**Solving frontier problems of physics: The Decomposition Method**". Kluwer Academic Publishers, Athens, Georgia, USA, 1 edition.

Adomian, G. e Cherruault, Y. e A. K., 1996. "A nonperturbative analytical solution of immune response with time-delays and possible generalization", **Math. Comput. Modell.**, vol. 20, pp. 89–96.

Boichenko, V.A. e Leonov, G. e R. V., 2005. "**Dimension theory for ordinary differential equations**". Teubner Verlag, St. Petersburg, Rússia, primeira reimpressão edition.

Chao, Y. e Attard, A., 1985. "A resolution of the stiffness problem of reactor kinetics", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 90, pp. 44–46.

Cherruault, Y. e Adomian, G., 1993. "Decomposition methods: a new proof of convergence", **Math. Comput. Modell.**, vol. 18, pp. 103–106.

Cherruault, Y., 1989. "Convergence of Adomian's method", **Kybernetes**, vol. 18, pp. 31–38.

Duderstadt, J.J. e Hamilton, L., 1976. "**Nuclear Reactor Analysis**". John Wiley and Sons, Ann Harbor, Michigan, USA, 1 edition.

Eugene, Y., 1993. "Application of the decomposition to the solution of the reaction connection diffusion equation", **Applied Mathematics and Computation**, vol. 56, pp. 1–27.

Hafstein, S., 2004. "A constructive converse Lyapunov theorem on exponential stability", **Discrete e Continuous Dynamical Systems**, vol. 10(3), pp. 657–678.

Hafstein, S., 2005. "A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for non-linear autonomous ordinary differential equations", **Dynamical Systems**, vol. 20(3), pp. 281–299.

Hetrick, D., 1971. "**Dynamics of Nuclear Reactors**". University of Chicago Press, Chicago, USA, 1 edition.

Li, H. e Shang, X. e. C. W., 2010. "An accurate solution of point kinetics equations of one-group delayed neutrons and an extraneous neutron source for step reactivity insertion", **Chinese Science Bulletin**, vol. 55(36), pp. 4116–4119.

Mello, K., 2010. "**Simulação da dispersão de poluentes na camada limite planetária através da solução da equação de langevin pelo método da decomposição**", Master's thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre.

Nahla, A., 2010a. "Analytical solution to solve the point reactor kinetics equations", **Nuclear Engineering e Design**, vol. 240, pp. 1622–1629.

Nahla, A.A. e Zayed, E., 2010b. "Solution to the nonlinear point nuclear reactor kinetics equations", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 52, pp. 743–746.

Petersen, Z., 2011. "**Solução Analítica das Equações de Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Nêutrons pelas Técnicas de GITT e Decomposição**", PhD thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

Porsching, T., 1966. "Numerical solution of the reactor kinetics equations by approximate exponentials", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 41, pp. 183–188.

Répací, A., 1990. "Nonlinear dynamical systems: on the accuracy of Adomian's decomposition method", **Appl. Math. Lett.**, vol. 3, pp. 35–39.

Sánchez, J., 1989. "On the numerical solution of the point reactor kinetics equations by generalized Runge-Kutta methods", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 103, pp. 94–99.

Schneider, E., 2006. "**Solução das equações de cinética pontual pelo método da decomposição de Adomian**", Master's thesis, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre.

Silva, J., 2011. "**Cinética pontual com realimentação de temperatura considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados**", Master's thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

Stacey, W., 1967. "**Modal approximations: Theory and an application to reactor physics**". The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1 edition.

Vilhena, M.T e Bodmann, B., 2008, Critério de Convergência de Lyapunov. Comunicação Interna.

Zhong-Ping, J. e Yuan, W., 2002. "A converse Lyapunov theorem for discrete-time systems with disturbances", **System and Control Letters**, vol. 45, pp. 49–58.

I Dedução da Equação de Cinética Pontual

Partindo da equação da difusão dependente do tempo dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v(e)} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} &= \nabla D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) - \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t) \phi(\mathbf{r}, E, t) + \\
&+ \int dE' \left[\sum_j f_p^j(E') (1 - \beta^j) v^j \Sigma_f^j \right] \phi(\mathbf{r}, E', t) + \\
&+ \int dE' \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) \phi(\mathbf{r}, E', t) + \sum_i f_i(E) \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + q(\mathbf{r}, E, t)
\end{aligned} \tag{I.1}$$

$f_p^j(E)dE$ é a probabilidade que um nêutron pronto apareça entre E e $E+dE$ como resultado da fissão de um isótopo j . f_p depende do isótopo j .
na qual $f_i(E)dE$ é a probabilidade que um nêutron retardado apareça no intervalo E e $E+dE$ como resultado do decaimento do i -ésimo emissor. f_i não depende do isótopo que se fissionou.

E da equação para a variação das concentrações de emissores de nêutrons retardados:

$$\sum_j \beta_i^j v^j \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E', t) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \tag{I.2}$$

Integrando a equação de difusão em espaço e energia, e a equação dos precursores em dV obtemos:

$$\begin{aligned}
&\iint \left[\nabla D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) + \left(\sum_j v^j \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}, E, t) \right) \phi(\mathbf{r}, E, t) \right] dEdV - \\
&\iint \sum_j \beta_i^j v^j \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E, t) \phi(\mathbf{r}, E, t) dEdV - \sum_i \int \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) dV + \iint q(\mathbf{r}, E, t) dEdV \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[\iint \frac{1}{v(e)} \phi(\mathbf{r}, E, t) dEdV \right]
\end{aligned} \tag{I.3}$$

$$\iint \sum_j \beta_j^j v^j \Sigma_f^i(\mathbf{r}, E', t) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' dV - \lambda_i \int C_i(\mathbf{r}, t) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int C_i(\mathbf{r}, t) dV \quad (\text{I.4})$$

Fisicamente $\iint \frac{1}{v(e)} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE dV$ representa o número de nêutrons no reator no tempo t , ou seja, uma grandeza que depende apenas do tempo.

Define-se uma função amplitude $T(t) \equiv \iint \frac{1}{v(e)} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE dV$ e uma função forma $S(t) \equiv \frac{\phi(\mathbf{r}, E, t)}{T(t)}$ e substituindo nas equações integradas $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ por $S(t)T(t)$ percebe-se que a função forma é uma função não separável de espaço, energia e tempo, proporcional ao fluxo, mas normalizada tal que o número de nêutrons associado a ela é unitário para qualquer tempo. Isso implica que a integral em espaço e energia da função forma da função forma não depende de t . **Finalmente introduzindo as quantidades:** População total no tempo t do i -ésimo precursor de nêutrons atrasados:

$$C_i(t) = \frac{\iint f_i(E) C_i(\mathbf{r}, t) dE dV}{\iint \frac{1}{v(e)} S(\mathbf{r}, E, t) dE dV} \quad (\text{I.5})$$

Fonte total no tempo t :

$$Q(t) = \frac{\iint q(\mathbf{r}, t) dE dV}{\iint \frac{1}{v(e)} S(\mathbf{r}, E, t) dE dV} \quad (\text{I.6})$$

Reatividade

$$\rho(t) \equiv \frac{\iint [\nabla D(\mathbf{r}, E, t) \nabla S(\mathbf{r}, E, t) + (v \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}, E, t)) S(\mathbf{r}, E, t)] dE dV}{\iint v \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) S(\mathbf{r}, E, t) dE dV} \quad (\text{I.7})$$

Tempo de vida dos nêutrons prontos:

$$\Lambda(t) \equiv \frac{\iint \frac{1}{v(e)} S(\mathbf{r}, E, t) dEdV}{\iint v \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) S(\mathbf{r}, E, t) dEdV} \quad (\text{I.8})$$

Frações efetivas de nêutrons atrasados:

$$\bar{\beta}_i(t) \equiv \frac{\iint \sum_j \beta_i^j v^j \Sigma_f^i(\mathbf{r}, E, t) S(\mathbf{r}, E, t) dEdV}{\iint v \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) S(\mathbf{r}, E, t) dEdV} \quad (\text{I.9})$$

$$\bar{\beta}(t) = \sum_i \bar{\beta}_i(t) \quad (\text{I.10})$$

Substituindo essas grandezas nas equações integradas obtemos o sistema conhecido como a equação de cinética pontual.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} T(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt} C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} T(t) - \lambda_i C_i(t) \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

II Representações Matriciais

II.1 Representação da Equação

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R n_j(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{1,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{2,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{3,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{4,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{5,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{6,j}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 + \rho_1(t) - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_3}{\Lambda} & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_4}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_5}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^R n_j(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{1,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{2,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{3,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{4,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{5,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{6,j}(t) \end{bmatrix}$$

II.2 Representação da Equação 3.23

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R n_j(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{1,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{2,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{3,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{4,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{5,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^R C_{6,j}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 + \rho_1(t) - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_3}{\Lambda} & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_4}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_5}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^R n_j(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{1,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{2,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{3,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{4,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{5,j}(t) \\ \sum_{j=0}^R C_{6,j}(t) \end{bmatrix}$$

II.3 Representação da Equação 3.30

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}n_j(t) \\ \frac{d}{dt}C_{1,j}(t) \\ \frac{d}{dt}C_{2,j}(t) \\ \frac{d}{dt}C_{3,j}(t) \\ \frac{d}{dt}C_{4,j}(t) \\ \frac{d}{dt}C_{5,j}(t) \\ \frac{d}{dt}C_{6,j}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{j-1}(t) \\ C_{1,j-1}(t) \\ C_{2,j-1}(t) \\ C_{3,j-1}(t) \\ C_{4,j-1}(t) \\ C_{5,j-1}(t) \\ C_{6,j-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1(t)}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_3}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_4}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_5}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{j-1}(t) \\ C_{1,j-1}(t) \\ C_{2,j-1}(t) \\ C_{3,j-1}(t) \\ C_{4,j-1}(t) \\ C_{5,j-1}(t) \\ C_{6,j-1}(t) \end{bmatrix}$$