

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ASPECTOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESCOAMENTOS NÃO-NEWTONIANOS
EMPREGANDO OS PRINCÍPIOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO: APLICAÇÃO A
ESCOAMENTOS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS

por

Giovanni Minervino Furtado

Monografia apresentada ao
Departamento de Engenharia Mecânica
da Escola de Engenharia da
Universidade Federal do Rio Grande do
Sul como parte dos requisitos para
obtenção do diploma de Engenheiro
Mecânico.

Porto Alegre, novembro de 2013



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

ASPECTOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESCOMANTOS NÃO-NEWTONIANOS
EMPREGANDO OS PRINCÍPIOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO: APLICAÇÃO A
ESCOAMENTOS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS

por

Giovanni Minervino Furtado

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof^a. Dr^a. Thamy Cristina Hayashi
Coordenadora do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Energia e Fenômenos de Transporte**

Orientador: Prof. Sérgio Frey

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França

Prof. Dr^a. Adriane Prisco Petry

Prof. Dr^a. Thamy Cristina Hayashi

Porto Alegre, 14, novembro de 2013.

- DEDICATÓRIA

Esta monografia é dedicada aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, aos meus amigos de infância, de trabalho e especialmente à minha família.

- AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores da Escola de Engenharia por me darem todo o conhecimento que adquiri ao longo do curso para poder chegar até a conclusão; também agradeço a ajuda dos meus colegas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC), ao meu professor orientador Sergio Frey que sempre me acompanhou até o término deste trabalho. Agradeço, de modo especial, à minha família que sempre me deu total apoio e confiança para seguir a difícil caminhada requerida por este curso.

FURTADO, G.M. **ASPECTOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESCOAMENTOS NÃO-NEWTONIANOS EMPREGANDO OS PRINCÍPIOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO: APLICAÇÃO A ESCOAMENTOS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS**. 2013. 26. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivos a utilização da Mecânica dos Meios Contínuos como ferramenta fundamental na modelagem mecânica de problemas não lineares em Mecânica dos Fluidos, e na investigação numérica do padrão de escoamento de fluidos não-Newtonianos. O primeiro dos objetivos é enalçado com o estabelecimento rigoroso dos princípios e consequentes equações de conservação que governam o movimento dos corpos mecânicos, e das equações constitutivas que descrevem a resposta mecânica dos materiais de interesse desse estudo – a saber, fluidos que não mais obedecem à lei de Newton de viscosidade, a qual modela a resposta linear de um fluido a uma dada tensão nele aplicada. O segundo objetivo desta monografia é estabelecido através da investigação numérica, via a metodologia estabilizada de elementos finitos, de escoamentos de materiais de grande interesse industrial, tais como petróleo com alto teor de parafina, lamas de perfuração de poços petrolíferos, gel, shampoo, cremes e condicionadores na indústria de cosméticos e chocolate, iogurtes e ketchup na indústria alimentícia. Esses materiais serão aqui modelados como materiais viscoplásticos sujeitos a efeitos de memória, escoando lentamente no interior de cavidades vazantes. Os efeitos cinemático, de *yield stress*, de *shear-thinning* e elasticidade são avaliados variando a intensidade de escoamento adimensional, o nível de plasticidade adimensional do material e o tempo de relaxação adimensional, respectivamente, em faixas de relevância.

PALAVRAS-CHAVE: (Mecânica do Contínuo, Equações de Conservação, Princípio das Potências Virtuais, Materiais Elasto-Viscoplásticos).

FURTADO, G.M. **ASPECTS OF MODELLING MATH NON-NEWTONIAN FLOWS EMPLOYING THE PRINCIPLES OF CONTINUUM MECHANICS: APPLICATION ELASTO-VISCOPLASTIC FLOWS**. 2013. 26. Monograph (Conclusion Work Course in Mechanical Engineering) – Department of Mechanical Engineering, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

ABSTRACT

This Conclusion Work aims the utilization of the Continuum Mechanics as a fundamental tool in modeling nonlinear mechanics problems in fluid mechanics , and numerical investigation of the flow pattern of non-Newtonian fluids . The first objective is tracked down with the establishment of strict principles and consequent conservation equations governing the motion of mechanical bodies , and the constitutive equations that describe the mechanical response of materials of interest in this study - namely that no further fluid follow Newton's law of viscosity , which models the linear response of a fluid at a given stress it applied. The second objective of this monograph is established through numerical investigation via a stabilized finite element method , the flow of materials of great industrial interest , such as oil with high content of paraffin, mud drilling oil , gel, shampoo , creams and conditioners in cosmetics and chocolate , yogurt and ketchup in the food industry . These materials will be modeled here as viscoplastic materials subjected to the effects of memory, slowly flowing inside leaky cavity . The kinematic effects , yield stress, shear- thinning and elasticity are measured by varying the intensity of dimensionless flow , the level of non-dimensional plasticity of the material and dimensionless relaxation time , respectively, in ranges of relevance.

KEYWORDS: (Continuum Mechanics, Conservations Equations, Principle of Virtual Potential, Elasto-Viscoplastic Materials).

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	2
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	2
4. METODOLOGIA	3
4.1. Cinemática dos fluidos	3
4.2. Transporte de Reynolds	4
4.3. Equação da Continuidade	5
4.3.1. Princípio da Conservação de Massa.....	5
4.4. Dinâmica dos fluidos	6
4.4.1. Princípio da Conservação do Momentum Linear	6
4.4.2. Princípio das Potenciais Virtuais.....	7
5. COMPORTAMENTO DO MATERIAL	7
5.1. Comportamento de um Fluido Puramente Viscoso.....	8
5.2. Comportamento Viscoelástico.....	9
6. MODELAGEM MECÂNICA	9
7. APROXIMAÇÃO NUMÉRICA	10
7.1. Método de Elementos Finitos	10
7.2. Parâmetros Adimensionais	11
8. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	11
8.1. Influência dos Efeitos Viscosos	12
8.2. Influência dos Efeitos Elásticos	13
8.3. Influência da Intensidade do Escoamento	13
9. CONCLUSÕES	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	15
10. ANEXOS.....	16
11. APÊNDICES.....	18

1. INTRODUÇÃO

Este Trabalho de Conclusão de Curso lida com escoamentos dos chamados *fluidos não-Newtonianos* os quais são extremamente comuns nos processos industriais. Por exemplo, em escoamentos de extrusão, escoamento de óleo no interior de reservatórios petrolíferos, fabricação de cosméticos na indústria farmacêutica e fabricação de alimentos. Os que diferenciam estes fluidos industriais dos chamados fluidos Newtonianos é não mais escoarem com viscosidade constante em processo isotérmicos. Para estes fluidos a tensão a eles aplicada não é mais diretamente proporcional à taxa de deformação que esta tensão produz – como a lei de Newton de viscosidade prediz.

Os princípios e postulados da Mecânica dos Meios Contínuos – a maioria deles apoiados no Cálculo Tensorial – são de vital importância na modelagem rigorosa desses fluidos, visto a necessidade de empregar equações constitutivas complexas e não-lineares para obter a resposta mecânica desses fluidos a uma dada solicitação de tensão. São equações que empregam como variável primal a parte constitutiva do tensor total de tensão – doravante chamada simplesmente por tensão extra – e, que nos casos de interesse para os processos industriais, têm que caracterizar fenômenos não-lineares como o *shear-thinning* da função viscosidade, materiais com limite de escoamento e materiais com efeitos de memória e, nos casos aqui estudados, materiais que combinam todos os efeitos citados. É ainda de mencionar a introdução natural de métodos variacionais na modelagem mecânica – e, em particular, o método de elementos finitos empregado neste trabalho – feita com a introdução do Princípio das Potências Virtuais (PPV). Princípio este que carrega intrínseca a grande virtude de não dissociar a Cinemática e a Dinâmica dos fluidos ao introduzir a (versão variacional da) equação de movimento.

Especificamente, no que diz aos modelos matemáticos que predizem os comportamentos dos fluidos não-Newtonianos, pode-se, de maneira sucinta, citar, dentro os modelos puramente viscosos, o modelo de Carreau – o qual descreve tanto o *shear thickening* como o *shear thinning* da função viscosidade, o modelo de *Bingham* e *Herschel-Bulkley* - os quais predizem o escoamento de fluidos sujeitos a limite de escoamento. No que diz respeito ao modelo de Carreau – os quais não necessitam alcançar uma dada tensão para iniciarem a escoar – dependendo do valor de seu coeficiente *power-law* n , ele tanto dar origem aos chamados *fluidos dilatantes* (quando $n > 1$) como aos ditos fluidos pseudoplásticos (quando $n < 1$). Já o comportamento viscoplástico caracteriza-se pela necessidade do material exceder um dado nível de tensão – o chamado limite de escoamento (*yield stress*) do material – para que ocorra escoamento. Uma vez estabelecido o escoamento, este pode se dar de maneira linear – ou seja, com uma relação linear tensão/taxa de deformação – ou não-linear – quando esta relação é não linear; os primeiros são ditos fluidos viscoplásticos lineares, sendo descritos pelo modelo de Bingham, enquanto os segundos são conhecidos como fluidos viscoplásticos não-lineares, com o modelo de *Herschel-Bulkley* sendo empregado em sua caracterização material.

Os modelos de Bingham e de Herschel-Bulkley são denominados modelos clássicos de viscoplasticidade por predizerem que não há escoamento abaixo do limite de escoamento. Entretanto, com o aumento da precisão dos reômetros a baixas taxas de deformação, foi possível comprovar que, na verdade, os materiais viscoplásticos realizam escoamentos extremamente viscosos e lineares abaixo deste limite – criando, assim, as chamadas regiões aparentemente não-escoadas (*apparently unyielded regions*). O próprio conceito clássico de limite de escoamento foi alterado, com o conceito atual de *yield stress* sendo visto como um divisor de águas entre as zonas de escoamentos extremamente viscosos lineares e as ditas *zonas escoadas*, nas quais o material escoar como um fluido *power-law*. Em face dessa nova visão do comportamento dos materiais reais viscoplásticos, surgem os chamados modelos regularizados de viscoplasticidade, com as importantes contribuições de Bercovier et al. (1982) e Papanastasiou et al. (1987). O primeiro trabalho dá origem ao chamado *modelo de bi-viscosidade*, enquanto o segundo fornece uma função analítica e contínua para a tensão cisalhante em termos da taxa de deformação, a qual é válida para todo o domínio do fluido.

Apesar do modelo de bi-viscosidade apresentar resultados muito bons no ajuste de dados viscoplásticos experimentais, ele carrega a inconveniência da determinação das superfícies de escoamento (*yield surfaces*), as quais é de determinação trivial pelo modelo de Papanastasiou – a saber, o lugar geométrico dos pontos no qual a tensão iguala a tensão de escoamento.

Finalmente, tem-se ainda os fluidos que se afastam do comportamento puramente viscosos por apresentarem efeitos de memória, efeitos estes que produzem um comportamento elástico, superposto ao comportamento puramente dissipativo – os chamados *fluidos viscoelásticos*. Dentre os modelos mais conhecidos e amplamente utilizados na caracterização dos materiais viscoelásticos, temos o modelo de Maxwell convectado superior (ou simplesmente, modelo UCM) e o modelo de Oldroyd-B – este último de grande importância para este trabalho de conclusão já que o modelo mecânico adotado é baseado em uma versão modificada deste modelo de modo a acomodar o *shear-thinning* tanto dos tempos do fluido, bem como de sua função viscosidade polimérica.

Nesta monografia, é realizada a modelagem mecânica e um estudo numérico de um fluido elasto-viscoplástico, o qual realiza um escoamento lento no interior de uma cavidade cuja tampa superior move-se com velocidade constante. O modelo é dito elasto-viscoplástico, no sentido que este adiciona elasticidade (somente) às zonas aparentemente não escoadas de um material viscoplástico. O modelo mecânico empregado é constituído pela equação da continuidade para materiais incompressíveis e a equação de movimento para escoamentos lentos, ambas acopladas à equação elasto-viscoplástica proposta por Nassar et al. (2011). Este modelo é aproximado por uma formulação a três campos de Galerkin mínimos-quadrados (GLS), em termos dos campos tensoriais de tensão extra, do escalar de pressão e do campo vetorial de velocidades. Esta formulação pode ser vista como uma extensão – para o caso elasto-viscoplástico sujeito a *shear-thinning* dos tempos de relação e retardamento, e da função viscoplástica SMD (de Souza Mendes, 2007) – da formulação proposta em Behr, et al. 1993, para fluidos de viscosidade constante. As simulações numéricas são focadas na determinação da influência da elasticidade, tensão de escoamento e da cinemática do escoamento, na morfologia das regiões aparentemente não-escoadas – investigação esta condizida para faixas relevantes do tempo de relaxação adimensional do material, de seu grau de plasticidade e da intensidade dos escoamentos considerados.

2. OBJETIVOS

O presente trabalho tem por objetivo a introdução dos princípios básicos da teoria dos meios contínuos como uma importante ferramenta da mecânica computacional. Serão postuladas a hipótese do contínuo, a definição de movimento de um fluido como um tensor de transformação linear, as definições materiais e espaciais de velocidade, aceleração e derivadas temporais, Teorema de Reynolds, equações de conservação de massa e momentum e o PPV. Do ponto de vista material são introduzidos os conceitos de material viscoplástico, viscoelástico e elasto-viscoplástico. Por fim, este trabalho apresentará simulações computacionais mostrando a influência da elasticidade em escoamentos viscoplasticos sem inércia no interior de cavidades vazantes.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A tensão de escoamento é a característica mais importante de um fluido viscoplástico e sua definição está ainda em debate na literatura.

BARNES et al., 1999, realizou uma revisão sobre materiais com tensão de escoamento, na qual afirma que a propriedade tensão de escoamento não existe. Apresentou curvas de materiais viscoplásticos, mostrando a existência de escoamento abaixo da tensão de escoamento, o que contradiz a definição do termo. Portanto, considera que a tensão de escoamento é o nível de tensão para o qual ocorre uma mudança severa na microestrutura do material e conseqüentemente uma mudança na sua viscosidade.

NASSAR et al., 2011, propôs uma equação constitutiva para o modelo elasto-viscoplástico com base no modelo Oldroyd-B com o objetivo de substituir o valor da viscosidade, do tempo de relaxação e retardação para expressões que são funções da taxa de deformação. Como resultado, analisou as superfícies de escoamento em uma expansão-contração.

4. METODOLOGIA

4.1. Cinemática dos Fluidos

Neste trabalho, utiliza-se o modelo contínuo para a descrição e o estudo da cinemática e dinâmica dos fluidos. Este modelo baseia-se na hipótese de que a massa é distribuída continuamente no espaço, exceto nas superfícies de descontinuidade. Com o objetivo de facilitar o entendimento dos fenômenos físicos envolvidos no estudo da teoria da Mecânica do Contínuo, cria-se a idéia da partícula material. Uma partícula material não é um ponto ou uma pequena porção de matéria e, sim, uma abstração capaz de representar as propriedades físicas e a condição cinemática de uma dada posição de um corpo; assim, é dito que um corpo mecânico é formado por um conjunto de partículas materiais.

O escoamento de fluidos é um fenômeno físico que pode ser representado por uma transformação contínua do espaço euclidiano, parametrizada pelo tempo $t \in [0, \infty)$. Para isso, introduzimos um sistema de coordenadas fixo (x_1, x_2, x_3) referido como posição denotada por x . Considerando-se um ponto P do fluido, ou seja, uma partícula movendo-se em um escoamento, em $t=0$ (instante inicial arbitrário) esta partícula ocupa a posição $X=(X_1, X_2, X_3)$ e no instante genérico t irá ocupar posição $x=(x_1, x_2, x_3)$ logo, podemos representar a posição do fluido pela seguinte transformação linear:

$$x = \chi(X, t) \quad (4.1)$$

onde, χ representa uma transformação referida como seu *movimento*.

Fixando a posição X da partícula na configuração de referência e variando o tempo t , isto é, $x = \chi(X, \cdot)$, a equação (4.1) representa a trajetória da partícula P e quando o tempo t é fixo, isto é, $x = \chi(\cdot, t)$, a equação (4.1) representa a deformação do fluido, ver a figura (4.1). Como os pontos distintos do fluido permanecem no decorrer do escoamento, a equação (4.1) admite inversa, ou seja,

$$X = \chi^{-1}(x, t) \quad (4.2)$$

onde, χ^{-1} representa uma transformação inversa do seu movimento.

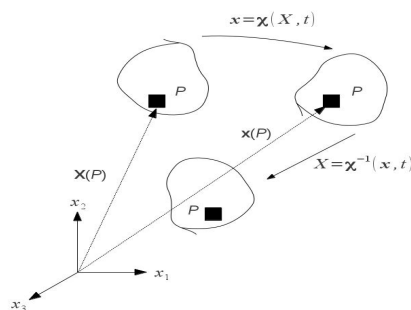


Figura 4.1 – Descrição do movimento de uma partícula P

Também é importante analisar o movimento da partícula em uma dada posição ao longo do tempo. Para isso ser feito, utilizamos campos espaciais, como por exemplo $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ o qual fornece a velocidade da partícula na posição x no instante de tempo t .

As variáveis (x, t) são conhecidas como variáveis espaciais, enquanto que as variáveis (X, t) identificam as partículas do fluido e são denominadas variáveis materiais. Empregando-se as transformações (4.1) e (4.2) qualquer grandeza genérica φ de um fluido tanto pode ser descrita por suas variáveis materiais como por suas variáveis espaciais. Se a grandeza φ for um campo espacial do fluido ($\varphi(x, t)$) então sua descrição material a relacionará com suas variáveis materiais através da Eq. (4.1), $\varphi(x, t) = \varphi(\chi(X, t), t)$ - relação a qual expressa o valor da grandeza φ para um dado instante de tempo t , pela partícula que inicialmente ocupa a posição X . E se φ for um campo material ($\varphi(X, t)$), empregando-se a Eq.(4.2), sua descrição espacial será $\varphi(x, t) = \varphi(\chi^{-1}(x, t), t)$, onde esta relação representa o valor do campo φ para um instante t de uma partícula que instantaneamente ocupa a posição x . Para as derivadas temporais, aplicaremos a seguinte notação:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \Big|_x \quad \text{e} \quad \dot{\varphi} = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial t} \Big|_X \quad (4.3)$$

onde, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ e $\dot{\varphi}$ são conhecidas, respectivamente como derivada espacial e derivada material de φ . A derivada material mede a variação de φ seguindo uma partícula, enquanto que a derivada espacial mede a taxa de variação de φ segundo um observador fixo na posição x . Sendo assim, podemos ainda pensar na derivada material de um campo espacial, sendo $\dot{\varphi}$ um campo vetorial, $\dot{\varphi}(x, t)$,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(x, t) &= \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\chi(x, t), t)}{\partial t} \Big|_{X=\chi^{-1}(x, t)} = \frac{\partial \varphi(\chi(X, t), t)}{\partial t} \Big|_{x=\chi(X, t)} + \\ &+ \left[\frac{\partial \varphi(\chi(X, t), t)}{\partial \chi(X, t)} \right] \Big|_t \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial \varphi(\chi(X, t), t)}{\partial t} \Big|_{x=\chi(X, t)} + \left[\frac{\partial \varphi(\chi(X, t), t)}{\partial \chi(X, t)} \right] \Big|_t \chi(X, t) = \\ &= \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \Big|_x + [\nabla \varphi(x, t)] \Big|_t \chi(\chi^{-1}(x, t), t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde essa equação deduz os campos espaciais e materiais.

A velocidade \mathbf{u} de uma partícula de fluido é definida materialmente como a taxa de variação de seu movimento,

$$\mathbf{u}(X, t) = \frac{d\chi(X, t)}{dt} = \dot{\chi}(X, t) \quad (4.5)$$

a qual pode ser expressa em coordenadas espaciais através da eq. (4.2),

$$\mathbf{u}(X, t) = \mathbf{u}(\chi^{-1}(x, t), t) \quad (4.6)$$

A aceleração de uma partícula é definida materialmente como a taxa de variação da velocidade, isto é, $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}(X, t) = \dot{\dot{\chi}}(X, t)$. Entretanto, é mais vantajoso em Mecânica dos Fluidos expressá-la através da sua descrição espacial através da eq. (4.4),

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (4.7)$$

4.2. Transporte de Reynolds

Seja φ um campo vetorial suficientemente regular. Para um dado volume $\Omega = \Omega(t)$ e em um dado instante de tempo t , o Teorema de Reynolds postula que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} (\varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.8)$$

Prova: Trocando o domínio de integração para Ω_r , onde Ω_r é o domínio da configuração de referência ($t=0$) e portanto independe do tempo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) |_{\mathbf{x}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)} d\Omega_r = \\ &= \int_{\Omega_r} \dot{\varphi}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \varphi(\chi(\mathbf{X}, t)) \dot{\det} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\Omega_r \end{aligned} \quad (4.9)$$

usando o fato que $\dot{\det} \mathbf{F} = \det \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{u}$ (Eq. (A.11.3)), aplicando o Teorema da divergência para um campo vetorial (Eq. (A.10.5)) e retornando ao domínio de integração para a configuração atual Ω , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, t) d\Omega &= \int_{\Omega_r} \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) [\dot{\varphi}(\chi(\mathbf{X}, t), t) + \varphi(\chi(\mathbf{X}, t)) \operatorname{div} \mathbf{u}] d\Omega_r = \\ &= \int_{\Omega} \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) + \varphi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) |_{\mathbf{x}} + \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) |_{\mathbf{x}} + \operatorname{div}(\varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) |_{\mathbf{x}} d\Omega + \int_{\Gamma} (\varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.10)$$

A Eq. (4.10) fornece uma importante ferramenta para a obtenção das equações de conservação de massa, transporte e energia, visto que ela fornece o valor da derivada material da integral de uma quantidade mecânica descrita espacialmente. (Ver no apêndice a dedução para φ sendo um escalar).

4.3. Equação da Continuidade

Para determinar a massa M de um fluido que ocupa um volume Ω , supõem-se a existência de uma função densidade $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ estritamente positiva, logo,

$$M = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (4.11)$$

onde a massa M é um escalar.

4.3.1. Princípio da Conservação de massa

Este princípio postula que “a vazão mássica líquida que entra em um volume fluido Ω é igual a taxa de variação com o tempo da massa no seu interior”. Assim, este princípio pode ser expresso matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

Fazendo $\varphi = \rho$ na Eq. (4.10) e o Teorema da Divergência (Eq. (A.10.4)),

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} (\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad (4.13)$$

Aplicando o Teorema da Localização (Eq.(A.10.7)) e supondo o fluido um material incompressível ($\rho = cte$), chega-se à chamada **Equação da Continuidade** para fluidos incompressíveis,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.14)$$

onde \mathbf{u} é o vetor velocidade e segundo a Eq.(4.14), o princípio da conservação de massa para um fluido incompressível impõe que o campo de velocidades tenha divergência nula.

4.4. Dinâmica dos fluidos

Agora, veremos a dinâmica dos fluidos com o objetivo de derivar a equação de movimento. Para isso, precisamos inicialmente definir o conceito das forças atuantes no escoamento do fluido. Ao longo do movimento de um fluido tem-se três tipos de forças: forças mútuas entre partes disjuntas do fluido, forças volumétricas ou de corpo e forças de contato entre uma porção do fluido e o meio que a cerca.

4.4.1. Princípio da Conservação de Momentum Linear

Este princípio postula que o fluxo líquido de momentum linear no sistema + soma das forças de corpo agindo no sistema + soma das forças de superfícies = taxa de aumento do momentum linear no sistema, ou seja, a taxa de variação do momentum linear em um volume de fluido Ω é igual a força total nele aplicada. Assim, este princípio pode ser expresso matematicamente fazendo $\varphi = \rho \mathbf{u}$ na Eq.(4.10) e como $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega$ é a massa vezes a aceleração, o balanço de momentum vai ser igual a esse termo igualado com o somatório de forças agindo no sistema, a qual poder ser expressa pela tensão multiplicada pela normal, $\int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma$ e aplicando o teorema de Green (Eq.(A.10.10)), teorema da divergência (Eq.(A.10.7)), hipótese de Cauchy (Eq.(A.10.11)) e aplicando para um fluido incompressível e o escoamento em regime permanente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \frac{d\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} + \int_{\Omega} \text{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \text{div} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde ρ é a massa específica, Γ representa a superfície do volume Ω , \mathbf{F} representa o campo de forças totais externas e mútuas e $\mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$ representa o tensor de Cauchy, assim:

I – para todo vetor unitário $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$;

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad (4.16)$$

II – o tensor $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ é simétrico; $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$,

Aplicando o Teorema da Localização (Eq.(A.10.9)) para um fluido incompressível na equação (4.15), chegamos na primeira lei de Cauchy, ou, equação de movimento,

$$\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \text{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (4.17)$$

em que esta equação descreve o movimento dos fluidos, bem como o movimento de qualquer meio contínuo.

4.4.2. Princípio das Potências Virtuais

Para a introdução do método de elementos finitos, será demonstrado o Princípio das Potências Virtuais (PPV), no qual para um volume de fluido Ω e um instante de tempo t a equação da conservação da energia mecânica é dada por:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} d\Omega + \int_{d\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) d\Gamma \quad (4.18)$$

onde $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ (ver prova no apêndice (Eq.(A.11.4)).

Neste trabalho este princípio consiste na multiplicação da equação de movimento pelo campo de velocidade (\mathbf{V}), ou seja, este princípio não é nada mais do que a formulação variacional de Navier-Stokes.

Partindo da equação de movimento $\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}) = \text{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{g}$, onde temos as forças de contato estáticas por volume representado pelo $\text{div} \mathbf{T}$ e as forças de corpo por volume representadas pelo produto $\rho \mathbf{g}$, podemos abrir o termo das forças de contato, aplicando a equação constitutiva do fluido Newtoniano incompressível $\mathbf{T} = -\mathbf{p}\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{p}\mathbf{1} + 2\eta \mathbf{D}(\mathbf{u})$. Essa parte da equação é chamada de formulação forte de Navier-Stokes, $\text{div}(\mathbf{T}) = \text{div}(-\mathbf{p}\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}) = \text{div}(-\mathbf{p}\mathbf{1}) + \text{div}(\boldsymbol{\tau})$, mas temos que, $\text{div}(-\mathbf{p}\mathbf{1}) = -\mathbf{p} \text{div}(\mathbf{1}) - \mathbf{1}(\nabla \mathbf{p})$ e como $\text{div} \mathbf{1} = 0$, chegamos que:

$$\text{div}(\mathbf{T}) = -\nabla \mathbf{p} + \text{div} \boldsymbol{\tau} \quad (4.19)$$

onde \mathbf{T} é o tensor tensão dado pela equação constitutiva, \mathbf{p} é o campo de pressão e $\boldsymbol{\tau}$ é o campo de tensões envolvidas no problema.

Com isso, podemos partir para o PPV:

$$\int_{\Omega} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} - \text{div} \boldsymbol{\tau} - \rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{V} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{V} \quad (4.20)$$

Agora, analisando cada termo da equação acima e aplicando o teorema da divergência, chega-se à forma variacional de Navier-Stokes (PPV):

$$\int_{\Omega} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}) \cdot \mathbf{V} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{p} \text{div}(\mathbf{V}) d\Omega + \int_{\Omega} (2\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{D}(\mathbf{V})) d\Omega - \int_{\Omega} (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{V} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{q} \text{div} \mathbf{u} d\Omega + e \int_{\Omega} \mathbf{p} \mathbf{q} d\Omega = 0; \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{V} \quad (4.21)$$

onde nesta equação, foi acrescentado o termo da equação da continuidade, $\int_{\Omega} \mathbf{q} \text{div} \mathbf{u} d\Omega$, pois precisamos de mais uma equação além da equação de movimento para conseguirmos resolver o problema com duas equações e duas incógnitas, (\mathbf{p}, \mathbf{V}) e também outro termo foi acrescentado $e \int_{\Omega} \mathbf{p} \mathbf{q} d\Omega$ em função do erro (e), pois esse erro foi colocado no programa com o valor de 10^{-8} apenas para não zerar o $\text{div} \mathbf{u}$. Uma observação a ser feita é que, quando o escoamento é em regime permanente e sem inércia, o primeiro termo da equação (4.21) se anula. E no caso de um fluido Newtoniano Generalizado, a viscosidade não vai ser mais constante, ela será em função da taxa de deformação $(\mathbf{D}(\mathbf{u})2\eta(\dot{\gamma}))$. Essa dependência da taxa de deformação é abordada nesse trabalho.

5. COMPORTAMENTO MATERIAL

Essas equações de conservação até aqui mostradas são insuficientes para caracterizar totalmente o comportamento dos fluidos, por não serem capazes de distinguir os diferentes tipos de comportamentos dos materiais. Então, é necessário introduzir hipóteses adicionais, as chamadas equações constitutivas, que caracterizam o comportamento de um dado fluido. Estes comportamentos são descritos pela variação do tensor tensão T com o movimento e a deformação às quais o corpo está submetido. Porém, para definir um comportamento material são necessários quatro princípios para o comportamento ser válido (Slatery, 1999):

Princípio do Determinismo: o que acontecerá ao corpo no futuro não irá influenciar seu campo de tensão no presente; princípio da Ação Local: a determinação da tensão em um ponto material em relação ao movimento do material exterior a uma vizinhança pequena pode ser ignorada, isto é, o movimento em uma parte de um corpo não necessariamente afetará o estado de tensão em uma outra parte do corpo; princípio da Indiferença do Referencial Material: as equações constitutivas devem necessariamente ser invariantes ao referencial.

5.1. Comportamento de um fluido puramente viscoso

O comportamento de um fluido não-Newtoniano se caracteriza principalmente pela relação da tensão sobre a taxa de deformação por cisalhamento não ser constante, ou seja, a sua viscosidade não ser constante, equanto que, no fluido Newtoniano, essa relação é constante. Esse comportamento pode ser explicado da seguinte forma: como o fluido Newtoniano possui viscosidade constante ($n=1$), logo o que diferencia o Newtoniano do dilatante e do pseudoplástico e o valor do índice de *power-law*, n , por sua vez, a diferença entre o *shear thinning* e o *shear thickening* é que o primeiro tem $n < 1$ e assim, a sua viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação e já o segundo tem $n > 1$ e, com isso, a sua viscosidade aumenta.

Também podemos analisar o comportamento viscoplástico, no qual esse tipo de fluido precisa de uma tensão inicial de escoamento τ_0 para acontecer a deformação do fluido, ou seja, para que o fluido escoe. O que diferencia o comportamento viscoplástico também é o índice de *power-law*, isto é, quando $n=1$ o fluido é dito viscoplástico de Bingham e quando $n < 1$ o fluido é dito viscoplástico de Herschel-Bulcley. Por outro lado, um material se deformará elasticamente, como um corpo rígido, quando a tensão aplicada for inferior a tensão inicial de escoamento, o que implica que a curva de escoamento nunca passa pela origem. Com base nessas explicações, veremos a seguir o comportamento detalhado desses fluidos.

Um dos modelos mais usados para ajustar dados experimentais de materiais viscoplásticos é o modelo de Herschel-Bulkley (HB). Este modelo usa três parâmetros reológicos, τ_0 , K , n e a sua equação constitutiva é dada por $\tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^n$ e, como visto anteriormente, quando $n=1$ este modelo se reduz ao modelo de Bingham, no qual sua equação constitutiva é expressa por $\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}$, onde μ_p é a viscosidade plástica. Essas duas equações prescrevem uma viscosidade infinita no limite quando a taxa de deformação tende a zero.

Esses modelos vistos acima, são de difícil implementação no ponto de vista computacional, pois a equação da tensão não é contínua em $\dot{\gamma}$. Para superar essa dificuldade e para aumentar a abrangência dos modelos de viscoplasticidade, Papanastasiou et al. (1987) propôs uma modificação na equação do modelo de Herschel-Bulkley através de uma função exponencial que leva em seu argumento um parâmetro regularizador m que controla o crescimento exponencial da tensão quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Aplicando ao modelo HB $\tau = \tau_0(1 - e^{-m\dot{\gamma}}) + K \dot{\gamma}^n$, onde m tem dimensão de tempo. A vantagem dessa regularização é gerar funções de tensão de cisalhamento e viscosidades contínuas, válidas tanto para regiões de escoamento $\tau > \tau_0$, como para regiões onde o material aparentemente não se deformou.

Devido às dificuldades encontradas nos modelos clássicos acima, de Souza Mendes e Dutra et al. (2004) propuseram uma nova função de viscosidade viscoplástica, a qual apresenta um platô de viscosidade alta, porém finita para baixas tensões de cisalhamento seguida de uma quebra da viscosidade quando $\tau = \tau_0$, a função SMD é expressa por,

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_0} \dot{\gamma}\right)\right) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1}\right) \quad (5.1)$$

onde η_0 é o baixo platô de viscosidade, τ_0 é a tensão inicial de escoamento, K é o índice de consistência e n é o índice de power-law.

5.2. Comportamento viscoelástico

Para expressar esse comportamento, vamos introduzir dois modelos: o modelo de Maxwell Convectado Superior(UCM) e o modelo Oldroyd-B. O modelo UCM é o modelo mais simples para modelar o comportamento viscoelástico, visto que ele apresenta facilidade na implementação de algoritmos numéricos. A sua equação é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (5.2)$$

onde o seu modelo é descrito como uma mola em série com um amortecedor (Fig.(A.9.1)) e a derivada $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ é expressa por,

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (5.3)$$

O modelo UCM, combinado em paralelo com o modelo Newtoniano, resulta no chamando modelo *Oldroyd-B*, em que a equação constitutiva é expressa por:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \quad (5.4)$$

onde o seu modelo é descrito como um amortecedor em paralelo com uma mola e um amortecedor em série (Fig.(A.9.2)) e a derivada $\overset{\nabla}{\mathbf{D}}$ é dada por,

$$\overset{\nabla}{\mathbf{D}} = (\nabla \mathbf{D}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (5.5)$$

onde \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação.

6. MODELAGEM MECÂNICA

O modelo mecânico deste trabalho pode ser escrito como o acoplamento do princípio da conservação de massa (Eq.(4.14)) e do balanço de momentum (Eq.(4.17)) com uma modificação na derivada convectada na equação constitutiva viscoelástica Oldroyd-B. O principal objetivo do modelo elasto-viscoplástico empregado é substituir o valor da viscosidade, do tempo de relaxação e retardação, no modelo Oldroyd-B, para expressões que são funções da taxa de deformação, conforme Nassar et al. (2011).

A equação constitutiva do modelo elasto-viscoplástico para o tensor tensão é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta(\dot{\gamma})(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \quad (6.1)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor extra de tensão, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ e $\overset{\nabla}{\mathbf{D}}$ representam as derivadas convectadas superior, respectivamente dadas pelas Eqs.(5.3) e (5.5)) e esta equação constitutiva representa o comportamento elasto-viscoplástico adotado.

A magnitude do tensor taxa de deformação segue a seguinte expressão $\dot{\gamma} = \sqrt{2 \text{tr} |(\mathbf{D}(\mathbf{u}))^2|}$ e \mathbf{u} representa o campo de velocidade.

A função viscosidade viscoplástica é uma versão modificada do modelo proposto por De Souza Mendes e Dutra (2004) e pela Eq.(5.1),

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_0} \dot{\gamma}\right)\right) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1}\right) + \eta_\infty \quad (6.2)$$

onde η_∞ é o alto platô de viscosidade.

O tempo de relaxação e retardação do fluido, são dados respectivamente seguindo as seguintes expressões:

$$\theta_1(\dot{\gamma}) = (\theta_{01} - \theta_{\infty_1}) \exp(-(\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)) + \theta_{\infty_1} \quad \text{e} \quad \theta_2(\dot{\gamma}) = (\theta_{02} - \theta_{\infty_2}) \exp(-(\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)) + \theta_{\infty_2} \quad (6.3)$$

onde θ_{01} e θ_{∞_1} são o tempo de relaxação abaixo do escoamento e acima do escoamento, respectivamente; e, analogamente, θ_{02} e θ_{∞_2} são o tempo de retardação abaixo do escoamento e acima do escoamento respectivamente. Neste trabalho a elasticidade é considerada somente abaixo da tensão limite de escoamento, então $\theta_{\infty_1} = \theta_{\infty_2} = 0$. De acordo com as Eqs. (6.2) e (6.3), no limite $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ (regiões aparentemente não escoadas), $\eta(\dot{\gamma}) \rightarrow \eta_0$, $\theta_1(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{01}$ e $\theta_2(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{02}$, isto é, o modelo tende ao modelo clássico Oldroyd-B. Por outro lado, quando $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0$ (regiões escoadas), $\theta_1(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{\infty_1}$, $\theta_2(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{\infty_2}$ e, assim, obtemos uma equação do tipo Oldroyd-B com uma função viscosidade variável (viscoplástico). Também foi utilizado $\theta_{\infty_1} = \theta_{\infty_2} = 0$, isto é, o modelo Newtoniano Generalizado é recuperado e o fluido se comporta como um fluido viscoplástico inelástico.

7. APROXIMAÇÃO NUMÉRICA

Para aproximação do modelo mecânico descrito acima, foi empregado multi-campos com a formulação de Galerkin Mínimos Quadrados em termos da velocidade, pressão e tensão extra. Esta formulação pode ser vista como uma extensão direta do modelo introduzido por Behr et al. (1993) para fluidos com viscosidade constante e para escoamento de materiais elasto-viscoplástico. Proposto por Hughes et al. (1986) para o escoamento de Stokes e posteriormente estendido por Franca e Frey et al. (1992) para o escoamento de Navier-Stokes. O método de Galerkin clássico não garante aproximações estáveis, pode gerar soluções sem significado físico e patologias numéricas para escoamento incompressíveis mistos. As dificuldades associadas ao método de Galerkin são devido à compatibilidade da velocidade e da pressão dos subespaços do elemento. A velocidade e a pressão dos subespaços não podem ser gerados por qualquer combinação arbitrária de interpolações de elementos finitos e, no caso deste trabalho, que emprega uma formulação multi-campos, outra condição de compatibilidade deve ser imposta da tensão e da velocidade dos subespaços. A alternativa para corrigir essas deficiências impostas pelo modelo de Galerkin para fluidos incompressíveis é mudar a formulação clássica de Galerkin, ou seja, adicionar termos malha-dependentes, que são funções dos resíduos da equações governantes do escoamento e usar elemento Lagrangeano simples. Explorando esse recurso, uma ordem de igualdade bi-linear (Q1) para a interpolação de elementos finitos é utilizada.

Para gerar a malha foi utilizado o programa GID; já as equações que regem o problema proposto neste trabalho foram resolvidas utilizando o Fortran e um código proposto pelo professor Frey chamado *nnfem* que também utiliza o Fortran e, para gerar as figuras, foi utilizado o programa *Gmsh*.

7.1. Método de Elementos Finitos

Consiste em uma aproximação numérica de equações diferenciais, as quais podem ser representadas como uma combinação linear de graus de liberdade e de funções de aproximação selecionadas ao longo de todo o domínio do problema (Ω) e para a sua formulação, parte-se da Eq.(4.18).

A formulação forte é obtida da particularização da equação da conservação de massa, balanço do momentum e da equação constitutiva. A formulação fraca ou variacional consiste em uma aproximação do problema utilizando equações integro-diferenciais, para diminuir a ordem da derivada, admitindo funções pesos conhecidas; com isso, irá acontecer o enfraquecimento da exigência para encontrar a solução do problema. Esta formulação é com base na Eq.(4.21).

7.2. Parâmetros Adimensionais

As superfícies de escoamento são calculadas como o local geométrico dos pontos nos quais a magnitude do tensor taxa de deformação é inferior ao mais baixo valor da taxa de deformação, para a qual a viscosidade é igual ao platô inferior de viscosidade η_0 , isto é, quando $\dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0$, ver Santos et al. (2011), para mais detalhes.

Com o objetivo de analisar os efeitos viscosos e elásticos sobre o padrão de escoamento, os parâmetros adimensionais que representam o problema são obtidos com a introdução de alguns parâmetros adimensionais:

$$x^* = \frac{x}{L}, u^* = \frac{u}{\dot{\gamma}_1 L}, \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1}, P^* = \frac{P}{\tau_0}, \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \eta^* = \frac{\eta}{\tau_0 / \dot{\gamma}_1} \quad (7.1)$$

onde, o sobrescrito (*) indica uma variável adimensional e $\dot{\gamma}_1 = (\tau_0 / K)^{1/n}$ representa o valor da taxa de deformação para a qual a viscosidade começa a ter um comportamento *power-law*. A partir dessas equações acima, os parâmetros adimensionais governantes do problema estudado são identificados como:

$$U^* = \frac{u_c}{\dot{\gamma}_1 L}, \theta_{01}^* = \theta_{01} \dot{\gamma}_1, \theta_{02}^* = \theta_{02} \dot{\gamma}_1, J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \eta_0 \left(\frac{\tau_0^{1/n-1}}{K^{1/n-1}} \right) - 1 \quad (7.2)$$

A intensidade do escoamento U^* surge da adimensionalização da condição de contorno de velocidade e fornece a intensidade de escoamento na tampa da cavidade. O parâmetro J é uma medida relativa do colapso da microestrutura do material, ver de Souza Mendes et al. (2007) para maiores detalhes.

8. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A geometria considerada está ilustrada na figura (8.1). Ela representa uma cavidade quadrática de comprimento L , com a parede superior submetida a uma velocidade horizontal u_c não-nula dirigida na tampa da esquerda para a direita e condições de não-deslizamento e impermeabilidade, $u=0$ imposta nas paredes restantes da cavidade.

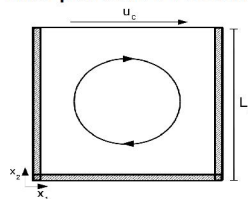


Figura 8.1 - Geometria e condições de contorno

Uma verificação da qualidade de malha (Fig.8.2) , com base da magnitude da tensão extra ao longo do eixo $x_1^*=0.5$ (centro da cavidade), foi analisada na figura (8.3). Apesar da semelhança de todos os perfis apresentados, a malha mais refinada com 10000 elementos Q1, 10201 pontos nodais e com o seu menor valor de comprimento de malha adimensional foi selecionada de modo a garantir aproximações mais precisas próximas das quinas da cavidade. O método para analisar o erro dessa escolha foi feito calculando o menor valor de comprimento de malha para as malhas 10x10 , 20x20 , 50x50 , 70x70 e 100x100 e esse valor foi plotado no eixo das abscissas e no eixo das ordenadas foi plotado o valor do erro, sendo o seguinte: valor do módulo da tensão nos pontos $x_1^*=0.5$ e em x_2^* alguns pontos semelhantes nas 5 malhas e com isso foi feito o seguinte cálculo: tensão extra maior menos tensão extra menor dividido pela tensão extra maior nos pontos semelhantes das malhas. O gráfico (Fig.8.3) foi plotado com escala logarítmica para a melhor visualização.

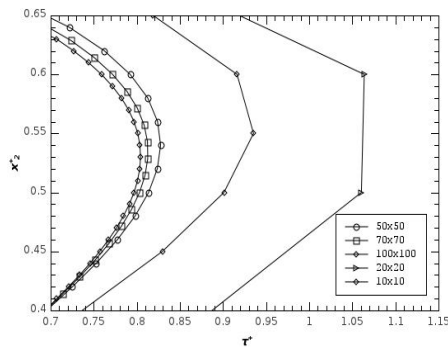


Figura 8.2 – Qualidade de malha

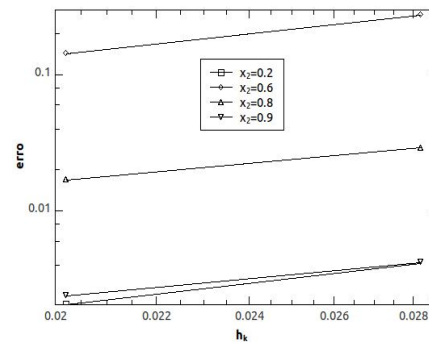


Figura 8.3 – Erro Calculado

Com base na figura (8.2), podemos perceber que as malhas 10x10 e 20x20 são muito pouco refinadas e, com isso, a qualidade de malha não é muito boa; já as malhas 50x50 , 70x70 e 100x100 possuem uma boa qualidade de malha. Para a resolução desse trabalho o tempo computacional não foi problema, logo a malha escolhida foi 100x100 por possuir melhores resultados. Em relação à figura (8.3), podemos ver que quando x_2^* aumenta, o erro também aumenta com relação ao h_k^* e o máximo valor do erro foi de 10% em $x_2^*=0.2$ e em $x_2^*=0.8$ obteve-se um erro muito baixo, menos de 1%.

Os resultados foram obtidos de acordo com o critério da taxa de deformação, visto que a velocidade é adimensionalizada em função deste parâmetro e também este critério separa os efeitos elásticos dos inerciais. Os resultados visam à visualização e compensação dos efeitos elásticos e viscosos na topologia das superfícies de escoamento. Para isso, será feita a variação da intensidade de escoamento adimensional U^* , o tempo de relaxação adimensional θ_{01}^* e o número de salto J . Todos os resultados são obtidos negligenciando o tempo de retardação, $\theta_{02}^*=0$. Assim, é importante mencionar que, para essa categoria de fluidos analisados neste trabalho, a elasticidade somente desempenha um papel não-negligenciável nas regiões aparentemente não-escoadas, isto é, regiões aonde $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0$.

8.1. Influência dos Efeitos Viscosos

A Figura 8.4 representa a influência do número de salto J , na topologia das superfícies de escoamento, para $U^*=0.1$, $n=0.5$ e $\theta_{01}^*=250$. As zonas pretas visualizadas nas figuras representam as zonas aparentemente não-escoadas ($\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0$) , enquanto que as zonas brancas representam as zonas escoadas ($\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$) .

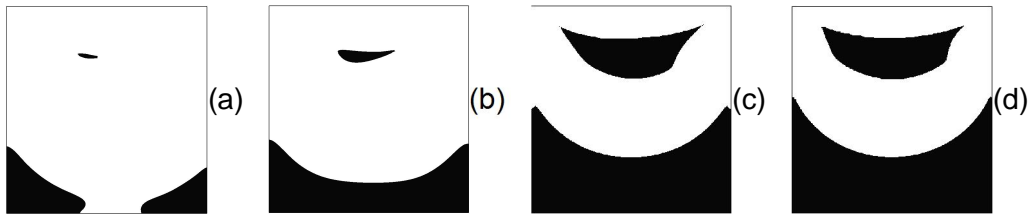


Figura 8.4 - $U^*=0.1$, $n=0.5$ e $\theta_{01}^*=250$,(a) $J=500$,(b) $J=1000$,(c) $J=5000$ e (d) $J=10000$

Duas regiões não-escoadas podem ser vistas no interior da cavidade, uma região quase estagnada na parte de baixo da cavidade e outra perto da sua tampa. Essa última região está associada com a recirculação provocada pelo movimento da tampa e, no entanto, está sujeita a níveis de tensão mais elevados. Com base na definição do número de salto J (Eq.(7.2)), observa-se que valores mais elevados de J representam que o fluido terá um comportamento viscoplástico mais acentuado, assim, as regiões não-escoadas crescem à medida que J aumenta. Para o menor valor de J ,representado na figura 8.4 (a), o material se comporta quase como um fluido pseudoplástico, com pequenas regiões aparentemente não-escoadas nos cantos inferiores da cavidade. Com relação à simetria, fica notória a assimetria das superfícies de escoamento. Este fato deve-se à presença de elasticidade dentro das regiões não-escoadas.

8.2. Influência dos Efeitos Elásticos

A Figura 8.5 representa o efeito da elasticidade sobre as superfícies de escoamento para $U^*=0.01$, $n=0.5$ e $J=1000$.

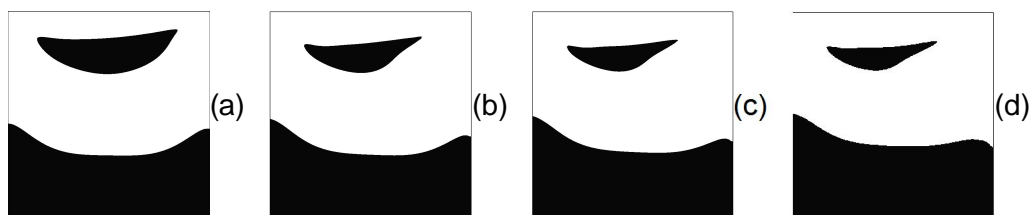


Figura 8.5 - $U^*=0.01$, $n=0.5$ e $J=1000$,(a) $\theta_{01}^*=250$,(b) $\theta_{01}^*=1000$ (c) $\theta_{01}^*=1500$ e (d) $\theta_{01}^*=2000$

Observa-se um padrão assimétrico das regiões aparentemente não-escoadas, tanto na parte superior quanto na parte inferior da cavidade. Essa tendência assimétrica é explicada pela elasticidade e essas regiões se tornam mais assimétricas de acordo com aumento da elasticidade. Outra influência observada é a diminuição da dimensão das zonas aparentemente não-escoadas de acordo com o aumento do nível elástico.

8.3. Influência da Intensidade do Escoamento

A Figura 8.6 ilustra a influência da intensidade do escoamento sobre o padrão do escoamento na cavidade para $\theta_{01}^*=250$, $n=0.5$ e $J=1000$.

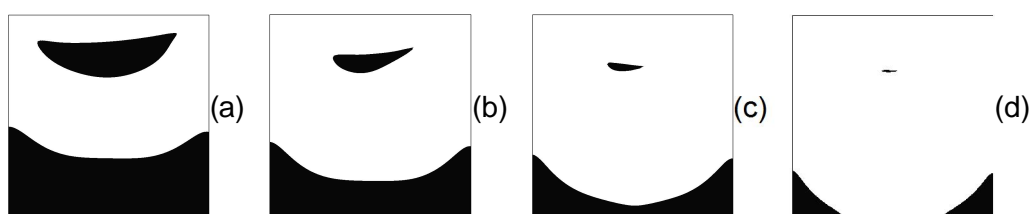


Figura 8.6 - $\theta_{01}^*=250$, $n=0.5$ e $J=1000$,(a) $U^*=0.01$,(b) $U^*=0.05$,(c) $U^*=0.2$ e (d) $U^*=1$

Como U^* também é relacionado com o inverso do número de Herschel-Bulkley, $U^* = HB^{-1/n}$, a diminuição das regiões aparentemente não escoadas é esperada com o aumento de U^* . Essa tendência é facilmente observada em toda cavidade. Com isso, duas observações podem ser feitas: a primeira é com relação a parte superior da cavidade, pois a região aparentemente não-escoada está localizada no vórtice principal da cavidade e, assim, ela está cercada por zonas sujeitas a crescentes níveis de tensão quando U^* aumenta, logo essa região sofre uma forte redução. A outra observação é com respeito a parte inferior da cavidade, onde também nota-se claramente que a região aparentemente não-escoada sofre uma forte redução, entretanto porções significativas ainda se fazem presentes nos cantos da cavidade. Percebe-se, ainda, que, após um valor crítico de U^* , ocorre a divisão dessas regiões e elas aumentam com a medida do crescimento de U^* . Essa separação é causada pelos níveis elevados de tensão que começam a atingir o fundo da cavidade, visto que esses níveis mais elevados de tensão estão associados com o vórtice principal do escoamento. Como os efeitos cinemáticos se sobrepõem aos efeitos elásticos para valores crescentes de U^* , as formas assimétricas tendem a desaparecer tanto na parte superior quanto no fundo da cavidade a medida que a intensidade de escoamento aumenta.

9. CONCLUSÕES

Neste Trabalho de Conclusão de Curso foram analisados aspectos da Mecânica dos Meios Contínuos na mecânica e simulação numérica de escoamentos lentos de fluidos elasto-viscoplásticos no interior de cavidades nas quais o escoamento é induzido por suas paredes superiores. Inicialmente, de modo a modelar o movimento dos corpos mecânicos, foram introduzidos os conceitos de contínuo, velocidade, aceleração e derivadas temporais, postulado o Teorema de Transporte de Reynolds e, fechando a seção de Cinemática dos Fluidos, foi estabelecido o Princípio da Conservação de Massa e sua consequente equação da Continuidade, para materiais incompressíveis. Em nível da Dinâmica dos Fluidos, são introduzidos a hipótese e Teorema de Cauchy, e assertando a localidade e linearidade do tensor total de tensão, e postulados o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Linear e o Princípio das Potências Virtuais – o primeiro conduzindo à equação de balanço das forças atuantes em um corpo mecânico, a chamada *equação de movimento*, enquanto o segundo introduz a versão variacional desta equação, formulação esta de grande importância na aproximação de elementos finitos dos problemas aqui abordados.

Visando a fechar a modelagem mecânica dos escoamentos a serem estudados neste trabalho, foram introduzidas as hipóteses constitutivas as quais descrevem a resposta mecânica de um dado constituinte à uma solicitação de tensão. Afastando-se do comportamento linear entre tensão/taxa de deformação previsto pela Lei de Newton, são introduzidas equações que descrevem o comportamento de materiais viscoplásticos sujeitos a *shear-thinning* da função viscosidade, materiais que apresentam efeitos de memória superpostos aos efeitos puramente viscosos – os chamados *modelos viscoelásticos* – e, finalmente, equações que adicionam um comportamento elástico às *apparently unyielded regions* (regiões aparentemente não escoadas) de materiais viscoplásticos – as chamadas *equações elasto-viscoplásticas*.

Nesta monografia, o modelo de elasto-viscoplasticidade empregado foi introduzido por Nassar et al. (2011), cuja principal característica é a análise da dependência dos tempos de retardação e relaxação e também a viscosidade em função da taxa de deformação. Para isso, a equação constitutiva foi feita com base no modelo Oldroyd-B modificado. Essa capacidade do modelo permite que a elasticidade só deva ser considerada dentro das regiões não-escoadas no escoamento. O modelo mecânico foi aproximado pelo método Galerkin Mínimos Quadrados com a utilização de três campos, em termos da tensão extra, pressão e velocidade.

As simulações numéricas realizadas avaliam a influência, na topologia das *yield surfaces*, tanto das grandezas reológicas do material – a saber, o tempo de relaxação do material e o número de salto, da função viscosidade – como da cinemática do escoamento – a

saber, a intensidade do escoamento. À medida que o nível de elasticidade do material aumenta, verifica-se que aumenta a assimetria das *yield surfaces* no interior da cavidade, aumento este devido ao crescimento da influência do termo (assimétrico) de *upwind* de tensão extra da derivada convectada superior do tensor, \mathbf{t} . Observa-se também que o aumento da elasticidade tende a diminuir as dimensões das *apparently unyielded regions*, comportamento este associado aos crescentes níveis de tensão gerados pela natureza mais elástica do tensor extra. Quanto à influência da cinemática do padrão de escoamento, verifica-se uma acentuada redução das *apparently unyielded regions* com o crescimento da intensidade de escoamento, pois também o aumento de U^* provoca níveis crescentes de tensão em toda a cavidade, o que faz com que mais regiões excedam o limite de escoamento do material e comecem a escoar como um fluido *power-law*.

Como extensões futuras deste Trabalho de Conclusão, vislumbra-se, de imediato, o estudo da influência dos efeitos da inércia sobre a topologia das *yield surfaces* no interior da cavidade. Num segundo momento, pode ainda pensar na extensão do atual estudo ao caso em três dimensões, uma extensão sempre desejada de modo a avaliar a influência que os efeitos de extremidade possam vir a ter sobre o padrão de escoamento bi-dimensional analisado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fox, R. W., McDonald, A. T., 2001, “**Introdução à Mecânica dos Fluidos**” 5ed., Rio de Janeiro, Editora LTC S.A,

Franca, L. P., Frey, S., 1992, “**Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations**”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 99, pp. 209-233, USA, 1992.

de Souza Mendes, P.R., 2007, “**Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics**”, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, Vol. 147, pp. 109-116.

Nassar, B., de Souza Mendes, P.R., Naccache, M.F., 2011, “**Flow of elasto-viscoplastic liquids through an axisymmetric expansion-contraction**”, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanical*, Vol. 166, pp. 386-394.

Behr, M., Franca, L.P., Tezduyar, T.E., 1993, “**Stabilized Finite Element Methods for the Velocity-Pressure-Stress Formulation of Incompressible Flows**”, *Comput. Methods Appl. Mech.* Vol. 104, pp. 31-48.

Bercovier, M. Engelman, 1982, “**A Finite Element Method for Incompressible non-Newtonian Flows**”, *J. Comput. Phys.* pp. 313-326.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balusters, M., 1986 “**A New Finite Element Formulation for Computational Fluids Dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi Condition: A Stable Petrov-Galerkin Formulation of the Stokes Problem Accommodating Equal-Order Interpolations**”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 59, pp. 85-99.

T.C. Papanastasiou., 1987 “**Flows os Materials with Yield-Stress**”, *J. Rheology.*, Vol. 31, pp. 385-404.

Slaterry, J. C., 1999 “**Advanced transport phenomena**”, Cambridge University Press, U.S.A.

Matins.R.R., Furtado.G.M., dos Santos.DD., Frey.S., Naccache.M.F., de Souza Mendes.,2013“**Elastic and viscous effects on flow pattern of elastic-viscoplastic fluids in a cavity**”, *Mechanics Research Communications*.

10. ANEXOS.

Anexo I – Teoremas da divergência

$$- \operatorname{div}(\alpha \mathbf{a}) = \nabla \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{a}) \quad , \text{ sendo } \alpha \text{ um escalar e } \mathbf{a} \text{ um campo vetorial.} \quad (10.1)$$

$$- \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{u}) - \mathbf{T} \nabla \mathbf{u} \quad , \text{ sendo } \mathbf{u} \text{ um campo vetorial (por exemplo, velocidade)} \quad (10.2)$$

e \mathbf{T} um tensor (por exemplo, o tensor de tensões).

$$- \int_{\Omega} \nabla \alpha = \int_{\Gamma} \alpha \mathbf{n} d\Gamma \quad , \text{ onde } \alpha \text{ é um escalar e } \mathbf{n} \text{ é o vetor normal.} \quad (10.3)$$

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{a} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad , \text{ onde } \mathbf{a} \text{ é um campo vetorial e } \mathbf{n} \text{ é o vetor normal.} \quad (10.4)$$

$$- \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \mathbf{n} d\Gamma \quad , \text{ onde } \mathbf{u} \text{ é um campo vetorial e } \mathbf{n} \text{ é o vetor normal.} \quad (10.5)$$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{S}) \mathbf{n} d\Gamma \quad , \text{ onde } \mathbf{T} \text{ é um tensor e } \mathbf{n} \text{ é o vetor normal.} \quad (10.6)$$

$$- \operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{w} \quad , \text{ onde } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w} \text{ são vetores.} \quad (10.7)$$

Anexo II – Derivada material de um campo escalar

$$- \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \varphi \quad , \text{ onde } \varphi \text{ é um escalar e } \mathbf{u} \text{ é o vetor velocidade.} \quad (10.8)$$

Anexo III – Teorema da Localização

Seja φ um campo escalar ou vetorial, contínuo e definido em conjunto aberto Ω ,
se dado $\mathbf{x} \in \Omega$ e se por sua vez,

$$\int \varphi d\Omega = 0 \quad , \text{ para todo } \Omega \subset \Omega \quad , \text{ então } \varphi = 0 \quad (10.9)$$

Anexo IV – Teorema de Green

$$- \int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad , \text{ onde } \mathbf{T} \text{ é um tensor.} \quad (10.10)$$

Anexo V – Hipótese de Cauchy

$$- \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \quad (10.11)$$

Anexo VI – Modelo Maxwell

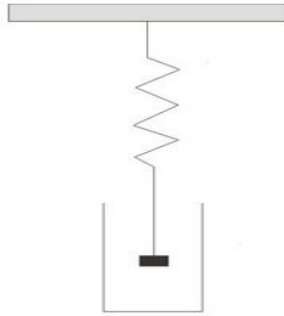


Figura 10.1 – Descrição do modelo de Maxwell

Anexo VII – Modelo Oldroyd-B

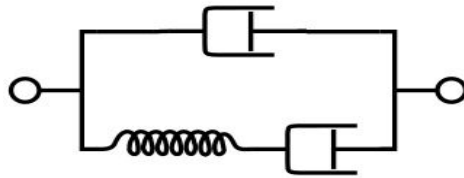


Figura 10.2 – Descrição do modelo Oldroyd-B

11. APÊNDICE(S)

Apêndice I – Tensor gradiente de deformação

Seja F o tensor gradiente de deformação, temos que, $F = \frac{\partial x}{\partial X}$ e por consequência, $dx = \det F dX$, onde $\det F$ é o jacobiano em um instante de tempo t .
Seja φ uma função definida no conjunto de todos os tensores inversíveis de A , tal que: $\varphi(A) = \det(A)$. Usando a propriedade dos Invariantes de um tensor, temos que:

$$\det(A - \alpha I) = -\alpha^3 + I_1(A)\alpha^2 - I_2(A)\alpha + I_3(A) \quad (11.1)$$

onde, $\alpha = f(A)$ e I_1, I_2, I_3 são os invariantes, na qual os seus valores são

$$I_1(A) = \text{tr } A, \quad I_2(A) = (1/2)[(\text{tr } A)^2 - \text{tr } A^2], \quad I_3(A) = \det A$$
 e fazendo $\alpha = -1$, temos que,

$$\det(I + A) = 1 + \text{tr } A$$
 e logo, se A é inversível e $U \in \text{Lin}$ e é arbitrário, então:

$$\det(A + U) = \det A + \det A \text{tr}(U A)^{-1}$$
 é linear, pelo fato de a operação do traço ser linear, assim:

$$D\varphi(A)U = \det A \text{tr}(U A)^{-1} \quad (11.2)$$

Sendo assim, de acordo com a eq. (11.2) e fazendo $A = F$, tem-se:
 $\frac{D(\det F)}{Dt} = (\det F) \text{tr}(\dot{F} F^{-1})$, onde $\dot{F} = (D/Dt)F$. Levando em conta que $\text{tr}(\dot{F} F^{-1}) = \text{div } u$, chegamos a comprovação que:

$$\dot{\det F} = \det F \text{div } u \quad (11.3)$$

Apêndice II – PPV

Prova da Eq.(4.18): fazendo-se um produto interno da equação de movimento com um campo de velocidade virtual u , fazendo integração por partes e como o tensor de Cauchy é simétrico, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\rho(x,t)\dot{u}(x,t) - f(x,t) - \text{div } T(x,t) \cdot u(x,t)) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \rho(x,t) \frac{\overline{u(x,t) \cdot u(x,t)}}{2} d\Omega - \int_{\Omega} f(x,t) \cdot u(x,t) d\Omega + \int_{\Omega} T(x,t) \cdot \nabla u(x,t) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} \text{div}(T^T(x,t)u(x,t)) d\Omega = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x,t) \frac{u(x,t) \cdot u(x,t)}{2} d\Omega - \int_{\Omega} f(x,t) \cdot u(x,t) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} T(x,t) \cdot D(u(x,t)) d\Omega - \int_{\Gamma} T(x,t)u(x,t) \cdot n(x,t) d\Gamma \end{aligned} \quad (11.2)$$

Aplicando o teorema de Cauchy $T(n) = Tn$, finalizamos a prova do teorema.