UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

COMPORTAMENTO HIDRODINÂMICO PARA O PROCESSO DE EXCLUSÃO COM TAXA LENTA NO BORDO

Dissertação de Mestrado

Rangel Baldasso

Porto Alegre, 17 de julho de 2013.

Dissertação submetida por Rangel Baldasso [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Rafael Rigão Souza

Professora Co-Orientadora:

Dra. Adriana Neumann de Oliveira

Banca Examinadora:

Dra. Adriana Neumann de Oliveira (PPGMat-UFRGS)
Dr. Alexandre Tavares Baravieira (PPGMat-UFRGS)
Dr. Milton Jara (IMPA)
Dr. Patrícia Gonçalves (PUC-Rio)
Dr. Rafael Rigão Souza (PPGMat-UFRGS)

Data da Apresentação: 16 de julho de 2013.

[1]Bolsista da Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Resumo:

Apresentamos o teorema de limite hidrodinâmico para o processo de exclusão simples simétrico com taxa lenta no bordo. Neste processo, partículas descrevem passeios aleatórios independentes no espaço $\{0, 1, \ldots, N\}$, respeitando a regra de exclusão (que afirma que duas partículas não ocupam o mesmo lugar ao mesmo instante). Paralelamente, partículas podem nascer ou morrer nos sítios 0 e N com taxas proporcionais a N^{-1}. Com o devido reescalonamento, a densidade de partículas converge para a solução fraca de uma equação diferencial parcial parabólica. Além disso, no primeiro capítulo, apresentamos seções sobre o Teorema de Prohorov, o espaço das funções càdlàg e a métrica de Skorohod definida nesse espaço.

Palavras Chave: Limite hidrodinâmico, processo de exclusão, taxa lenta.

Abstract:

We present the hydrodynamic limit theorem for the simple symmetric exclusion process with slow driven boundary. In this process, particles describe independent random walks in the space $\{0, 1, \ldots, N\}$, using the exclusion rule (which says that two particles do not occupy the same place at the same time). We also suppose that particles can be born or die on the sites 0 and N with rates proportional to N^{-1}. With the right rescaling procedure, the density of particles converges to the weak solution of a parabolic partial differential equation. In the first chapter, we present sections about Prohorov's Theorem, the càdlàg function space and Skorohod's metric defined in this space.

Key Words: Hydrodynamic limit, exclusion process, slow driven boundary.

Agradecimentos

Gostaria inicialmente de agradecer todo o apoio que recebi da minha família.

Gostaria de agradecer a Oclide José Dotto e Roberta Manfroi Ló, que me apresentaram ao incrível mundo da Matemática. Também gostaria de agradecer a meus professores, em especial ao Luiz Fernando Carvalho da Rocha, por toda paciência e dedicação. Não menos importante, agradeço a meus orientadores, Rafael Rigão Souza e Adriana Neumann de Oliveira, por toda atenção e tempo que dedicaram.

Agradeço a banca examinadora todas as suas valiosas sugestões para deixarem o texto mais agradável. As eventuais incorreções, naturalmente, devem ser atribuídas ao autor.

Também gostaria de agradecer ao Otávio de Macedo Menezes, que trabalhou junto comigo neste período.

Agradeço a Cilon Perusato, Douglas Machado dos Santos, Eduardo Horta, Gustavo Lopes Rodrigues, Jéssica Duarte, Jonier Amaral Antunes, Rafael Cichelero e Robert Guterres e a todos os outros amigos e colegas pela amizade e por todas conversas. Não poderia esquecer meu primo Ricardo Misturini, que sempre esteve muito disposto a me ajudar quando precisei.

Agradeço a todos os professores e funcionários do IM-UFRGS o apoio e atenção que recebi durante minha estadia nessa instituição. Agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução

O objetivo da mecânica estatística consiste na descrição de fenômenos macroscópicos a partir da descrição do comportamento microscópico do ambiente. Suponha que queremos estudar a de evolução de um gás. A princípio, o comportamento macroscópico pode ser explicado através da aplicação das leis da mecânica clássica para cada uma das partículas. Entretanto, o número de partículas é muito grande (tipicamente da ordem de 10^{23}) o que torna inviável este tipo de raciocínio. Logo, é necessária uma maneira diferente de relacionar os caracteres macroscópico e microscópico. Um modelo matemático que tem se mostrado altamente eficiente é assumir que o estado microscópico se comporta de maneira aleatória. Esta nova forma de pensamento foi introduzida com a ajuda de Boltzman, no século XIX, motivo pelo qual ele é conhecido como um dos pais da mecânica estatística.

Uma das formas de fazer essa conexão entre os mundos microscópico e macroscópico é através do limite hidrodinâmico, que é um limite de escala (assim como a Lei dos Grandes Números e o Teorema Central do Limite). Neste cenário, a partir de uma lei probabilística que governa o comportamento microscópico do gás e uma densidade macroscópica do gás em consideração, associamos uma distribuição de partículas microscópicas associadas a essa "distribuição"macroscópica. A esta distribuição inicial, associamos uma cadeia de Markov a tempo contínuo, modelando a lei microscópica do gás. Com esta modelagem, esperamos que o processo microscópico nos ajude a entender a evolução temporal da densidade do gás.

Desde que esta teoria começou a se desenvolver, vários modelos microscópicos foram propostos. Um em particular, chamado de processo de exclusão, proposto por Spitzer em 1970 (ver [10]), é de grande importância por ser matematicamente tratável. Por esse motivo, este processo foi extensivamente estudado nas últimas décadas. Aqui vamos estudar uma das variantes do processo de exclusão: o processo de exclusão no intervalo com taxa lenta no bordo.

Uma característica marcante das técnicas aqui utilizadas é que elas fornecem uma ponte entre as teorias da Probabilidade e das Equações Diferenciais Parciais (EDP), pois a evolução temporal da densidade de partículas no estado macroscópio é descrita como a solução fraca de uma EDP de evolução. Este fato é surpreendente: um processo de natureza aleatória dá origem a um processo que é determinístico. Além disso, do ponto de vista das EDPs, as técnicas aqui usadas são interessantes, pois exibem uma maneira diferente de demonstrar a existência de soluções fracas de EDPs, via ferramentas de Probabilidade.

O processo de exclusão simples simétrico com taxa lenta no bordo pode ser descrito de maneira informal da seguinte forma: neste modelo, existe no máximo uma partícula por posição disponível (sítio) em $\{0, 1, 2, \cdots, N\}$, que pode se mover para um de seus vizinhos, se o local estiver vazio, com taxa 1 para cada lado. Além disso, uma partícula na borda pode sair do sistema com taxa $(1-\alpha)/N$ ou entrar (caso o local esteja vazio) com taxa α/N no sítio 0. De maneira análoga, o mesmo comportamento ocorre no sítio N, com taxas de saída $(1-\beta)/N$ e de entrada β/N. Isto descreve a nossa regra microscópica.

Fazemos agora um reescalonamento, considerando o processo acima descrito no conjunto $\{0, 1/N, 2/N, \cdots, 1\}$. A ideia é que, se considerarmos o processo neste espaço, quando fazemos $N \to \infty$, o comportamento microscópico da densidade se aproxima do comportamento no caso contínuo (espaço macroscópico). Na verdade, aqui precisamos fazer uma mudança de escala: o tempo é acelerado por um fator de N^2.

Com esta dissertação, pretendemos escrever um texto detalhado sobre as técnicas necessárias para a demonstração de um teorema de limite hidrodinâmico. Vamos aqui fazer uma demonstração parcial do limite hidrodinâmico para o processo de exclusão no intervalo com taxa lenta no bordo, um modelo ainda não abordado na literatura. Para isto, vamos começar com um capítulo introdutório sobre teoria da Probabilidade, onde serão apresentados resultados já conhecidos, mas que serão importantes na demonstração do nosso resultado.

No primeiro capítulo, tratamos de alguns resultados preliminares de extrema importância para o bom entendimento do texto. Começamos com a noção de convergência fraca de probabilidades e o Teorema de Prohorov. Na segunda seção introduzimos a métrica de Skorohod, uma métrica no espaço das funções càdlàg (contínuas à direita e com limite à esquerda) com contradomínio em um espaço métrico completo e separável. Esta métrica torna o espaço das funções càdlàg completo e separável, o que nos permite utilizar a teoria da convergência fraca de probabilidades neste ambiente.

Logo depois, passamos para a principal parte desta dissertação. Definimos formalmente o que significa o limite hidrodinâmico e o que é o processo de exclusão com taxa lenta no bordo. Também apresentamos as principais notações que serão utilizadas durante o texto. Além disso, tratamos de questões que surgem naturalmente quando se introduz uma cadeia de Markov. Um exemplo disso é a existência de medidas invariantes, e mais que isso, reversíveis. Verificamos que, sob certas condições, a medida Bernoulli produto (definida mais à frente) torna nosso processo reversível, o que nos permite utilizar novas ferramentas que facilitam as demonstrações.

Os Capítulos 3 e 4 tratam de 2 partes da demonstração do nosso principal teorema. A demonstração desse teorema tem 3 partes: a rigidez de uma sequência de probabilidades, a caracterização dos seus pontos limites, e a demonstração da unicidade da solução fraca de uma EDP. Aqui demonstraremos as duas partes iniciais. O primeiro capítulo afirma que uma sequência de probabilidades associadas aos processos microscópicos é rígida. Estas probabilidades trazem consigo toda a informação microscópica do sistema. O conhecimento da rigidez destas probabilidades nos permite considerar os possíveis pontos limites. Isto é feito no Capítulo 4, onde os limites são caracterizados como probabilidades concentradas em trajetórias de medidas que são absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue e têm densidades regulares, num sentido que será explicado mais tarde.

O Apêndice possui uma coleção de resultados de fácil demonstração ou resultados não demonstrados (quando a complexidade da demonstração não é adequada ao texto). Quando este for o caso, indicamos uma referência onde o leitor pode encontrar uma demonstração do resultado.

Todos os resultados inéditos deste trabalho foram obtidas em conjunto com Otávio de Macedo Menezes. Sugerimos que a sua leitura se dê em paralelo com a leitura da dissertação de mestrado Otávio de Macedo Menezes.

Capítulo 1

Preliminares

Aqui vamos apresentar os resultados preliminares que serão usados no restante do texto. Começamos com a exposição do Teorema de Prohorov, que trata de convergência fraca de probabilidades. Na seção seguinte, apresentamos a métrica de Skorohod, uma métrica definida em $D_{\mathbb{R}}[0,1]$, o espaço das funções càdlàg com domínio $[0,1]$ e contradomínio $\mathbb{R}$. O leitor mais experiente pode se sentir à vontade para avançar este capítulo.

1.1 O Teorema de Prohorov

Aqui demonstramos o Teorema de Prohorov, que trata das condições necessárias e suficientes para que uma sequência de probabilidades tenha uma subsequência fracamente convergente. Observe que isso não é sempre verdade, como nos mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1. Sejam $\mathbb{P}_n = \delta_{\{n\}}$ probabilidades definidas na reta, onde δ_n denota a medida delta de Dirac concentrada em n. Sabemos que deltas de Dirac convergem fracamente para alguma probabilidade se, e somente se, a sequência de pontos converge. Neste caso, a sequência de pontos não tem nenhuma subsequência convergente, donde a sequência de probabilidades $\{\mathbb{P}_n\}$ não tem subsequência fracamente convergente.

Embora simples, este exemplo diz que precisamos de uma condição especial sobre as probabilidades ou sobre o espaço onde elas estão definidas para que o conjunto de probabilidades seja sequencialmente compacto, isto é, para que toda sequência possua uma subsequência fracamente convergente. Esta condição adicional é chamada de rigidez e é definida no que segue.

Definição 1.2. Um conjunto de probabilidades Π definidas em um espaço métrico $(\Omega, \mathcal{S})$ é chamado rígido se, dado $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$, $\forall \mathbb{P} \in \Pi$. Aqui, $\mathcal{S}$ denota a σ-álgebra de Borel de Ω.

Observe que a ideia de rigidez é invariante por funções contínuas entre espaços métricos.

Proposição 1.3. *Seja Π uma família rígida de probabilidades em $(S, \mathcal{S})$ e $h : S \to S'$ contínua. Então a família $\Pi' = \{\mathbb{P}h^{-1} : \mathbb{P} \in \Pi\}$ de probabilidades em $(S', \mathcal{S}')$ é rígida.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos K compacto tal que $\mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$ para toda probabilidade em Π. Como h é contínua, $K' = h(K)$ é compacto e então $\mathbb{P}h^{-1}(K') \geq \mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$, donde Π' é rígida. □

Teorema 1.4. ***(Teorema de Prohorov)*** *Seja Π um conjunto de probabilidades de $(S, \mathcal{S})$. Se Π e rígido, então toda sequência de probabilidades de Π tem uma subsequência fracamente convergente. Além disso, se S for completo e separável, vale a recíproca.*

A demonstração do teorema é dividida em várias partes. Começamos demonstrando que a afirmação é válida em $\mathbb{R}^n$, depois para $\mathbb{R}^\infty$. Após estes dois casos, demonstramos para espaços σ-compactos e finalmente para o caso geral. Precisamos de umas proposições adicionais para tornar o caminho mais fácil.

Em $\mathbb{R}^n$, escrevemos $x < y$ se $x_i < y_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, onde x_i denota a i-ésima coordenada de x na base canônica. Denotamos $[x \leq y] = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \leq y_i, \forall\, i = 1, \ldots, n\}$ e chamamos de retângulo um conjunto da forma $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i, \forall\, i = 1, \ldots, n\}$. Definimos a função de distribuição $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associada a uma probabilidade $\mathbb{P}$ definida em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ como $F(y) = \mathbb{P}[x \leq y]$. Sabemos que as funções de distribuições satisfazem as três propriedades listadas a seguir.

(i) F é contínua por cima em todo ponto x, isto é, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0/$
$x \leq y < x + \delta u \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon$. Aqui, $u = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $0 \leq F(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, F é crescente em cada variável e, para cada retângulo n-dimensional $(a, b]$, vale

$$\sum (-1)^{n - \sum_{i=1}^n \eta_i} F(a_1 + \eta_1 d_1, \ldots, a_n + \eta_n d_n) \geq 0,$$

onde $d = b - a$ e a soma é feita sobre todas as 2^n sequências $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de zeros e uns.

(*iii*) $F(x) \to 0$ quando qualquer uma das coordenadas de x vai para $-\infty$ e $F(x) \to 1$ quando todas as coordenadas de x vão para $+\infty$.

Proposição 1.5. ***(Teorema de Helly)*** *Se $\{F_k\}$ é uma sequência de funções de distribuição em $\mathbb{R}^n$, então existe uma subsequência $\{F_{k_j}\}$ e uma função F satisfazendo as condições (i) e (ii) acima tal que $F_{k_j}(x) \xrightarrow{j} F(x)$ em todos os pontos de continuidade de F.*

Demonstração. Seja $\{r_1, r_2, \ldots\}$ uma enumeração de $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$. Para cada k, considere $x_k = (F_k(r_1), F_k(r_2), F_k(r_3), \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$. Como $0 \leq F_k(x) \leq 1$, $\{x_k\}$ pertence ao compacto $\prod [0,1]$, donde $\{x_k\}$ possui uma subsequência $\{x_{k'}\}$ convergente. Isto nos diz que cada coordenada de $\{x_{k'}\}$ converge para algum valor. Para cada ponto r_j em $\mathbb{Q}^n$, defina uma função G pondo

$$G(r_j) = \lim_{k' \to \infty} F_{k'}(r_j).$$

Claramente G satisfaz as condições (i) e (ii) para pontos em $\mathbb{Q}^n$. Definimos $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ da forma

$$F(x) = \inf\{G(r) : x \leq r, r \in \mathbb{Q}^n\}.$$

Observe que, se $x \in \mathbb{Q}^n$, então $F(x) = G(x)$. Afirmamos que a função F assim definida é contínua por cima, pois se $x_k \downarrow x$, tomamos $r_k \in \mathbb{Q}^n$ com $x_k < r_k$, $|x_k - r_k| < \frac{1}{2^k}$ e $|F(x_k) - F(r_k)| < \frac{1}{2^k}$, donde $\lim r_k = x$ e $\lim F(x_k) = \lim F(r_k)$. Sabemos que existe uma sequência de pontos $\{r'_k\}$ com $F(r'_k) \to F(x)$. Podemos escolher esta sequência de forma que $r_k \leq r'_k$ e então $F(x) \leq \lim F(r_k) \leq \lim F(r'_k) = F(x)$. Além disso, F claramente satisfaz o item (ii). Se F é contínua em x, então dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar pontos com coordenadas racionais r e r' tais que $r < x < r'$ e

$$F(x) - \varepsilon < G(r) < G(r') < F(x) + \varepsilon.$$

Para cada k', temos

$$F_{k'}(r) \leq F_{k'}(x) \leq F_{k'}(r').$$

E então

$$F(x) - \varepsilon < \liminf F_{k'}(x) < \limsup F_{k'}(x) < F(x) + \varepsilon.$$

Como ε é qualquer, temos o resultado. □

Em $\mathbb{R}^\infty$, consideramos a projeção $\pi_n : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^n$ como a função que faz corresponder a uma sequência de números reais $x = (x_1, x_2, \ldots)$ suas n primeiras coordenadas $\pi_n(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Para $n > 1$, consideramos a função $\psi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ dada por $\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Como estas funções são contínuas, elas são mensuráveis nas respectivas σ-álgebras de Borel.

Além disso, um conjunto A na σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^\infty$ (que denotaremos por $\mathcal{R}^\infty$) será chamado de cilindro se ele puder ser escrito como $A = \pi_n^{-1}(B)$, para algum n e $B \in \mathcal{R}^n$, a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$. Observe que os cilindros formam uma álgebra de conjuntos que geram a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^\infty$.

Dada uma probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{R}^\infty)$, podemos considerar a probabilidade $\mathbb{P}_n$ em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ induzida pela função π_n, isto é, para $A \in \mathcal{R}^n$ definimos $\mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(\pi_n^{-1}(A))$. Como $\pi_{n-1} = \psi_n \pi_n$, temos que

$$\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}_n \psi_n^{-1}. \tag{1.1}$$

Consideramos o problema contrário agora. Dadas probabilidades $\mathbb{P}_n$ em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$, queremos saber se existe $\mathbb{P}$ em $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{R}^\infty)$ tal que $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}\pi_n^{-1}$. Sabemos que uma condição necessária é (1.1). O Teorema de Existência de Kolmogorov diz que esta condição não é somente necessária mas também suficiente.

Proposição 1.6. ***(Teorema de Existência de Kolmogorov)*** *Sejam $\mathbb{P}_n$ probabilidades em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ satisfazendo (1.1). Então existe uma única probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{R}^\infty)$ tal que $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}\pi_n^{-1}$.*

Demonstração. A ideia geral da demonstração consiste em usar o Teorema de Carathéodory para estender uma medida definida na álgebra dos cilindros. Para tal, basta definirmos uma medida adequada nesta álgebra. Para $n > m \geq 1$, defina $\psi_{n,m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pondo $\psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$. Observe que $\psi_{n,n-1} = \psi_n$, que $\psi_{n,m} = \psi_{m+1}\psi_{m+2}\cdots\psi_n$, e que $\pi_m = \psi_{n,m}\pi_n$. Disto e de (1.1) segue que $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}_n\psi_{n,m}^{-1}$, para $n > m \geq 1$.

Seja $\mathcal{F}$ a álgebra dos cilindros que gera a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^\infty$. Definimos uma função $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, colocando $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_n(H)$, se $A = \pi_n^{-1}(H)$.

Observe que, embora cada conjunto A de $\mathcal{F}$ seja da forma $A = \pi_n^{-1}(H)$, para algum n e $H \in \mathcal{R}^n$, esta representação não é única. Suponha que $A = \pi_n^{-1}(H) = \pi_m^{-1}(H')$, com $m < n$. Então $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está em H, se, e somente se, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots)$ está em A, o que ocorre se, e somente se $\psi_{n,m}(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ está em H'. Isto nos mostra que $\psi_{n,m}^{-1}(H') = H$ e isto implica que $\mathbb{P}_m(H') = \mathbb{P}_n(H)$. E então a função $\mathbb{P}$ está bem definida.

Claramente $\mathbb{P}(A) \geq 0$, para $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ e $\mathbb{P}(\mathbb{R}^\infty) = 1$. Suponha que $A = \pi_n^{-1}(H)$ e $B = \pi_m^{-1}(J)$ são cilindros disjuntos e que $m < n$. Tomando $J' = \psi_{n,m}^{-1}(J)$, temos $B = \pi_n^{-1}(J')$ e $H \cap J' = \emptyset$, pois $A \cap B = \emptyset$, donde

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}_n(H \cup J') = \mathbb{P}_n(H) + \mathbb{P}_n(J') = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Segue por indução que $\mathbb{P}$ é uma medida finitamente aditiva na álgebra dos cilindros $\mathcal{F}$. Vamos verificar que $\mathbb{P}$ é aditiva, verificando que se $\{A_k\} \in \mathcal{F}$ é uma família com

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \tag{1.2}$$

e $\bigcap_{k\geq 1} A_k = \emptyset$, então $\lim P(A_k) = 0$.

Como cada conjunto destes é um cilindro, temos para cada n que

$$A_n = \pi_{i_n}^{-1}(H_n), \quad H_n \in \mathcal{R}^{i_n}.$$

Vimos que, dada uma representação de um cilindro como $A = \pi_n^{-1}(H)$, podemos escrever $A = \pi_m^{-1}(\tilde{H})$, com $n < m$. Com isso, podemos assumir que os i_n formam uma sequência estritamente crescente, isto é:

$$i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$$

Suponha, por absurdo, que $\mathbb{P}(A_n) > \varepsilon$, para todo n. Disto segue que $\mathbb{P}_{i_n}(H_n) > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada n, tomamos um compacto $K_n \subset H_n$ tal que $\mathbb{P}_{i_n}(H_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ e definimos $B_n = \pi_{i_n}^{-1}(K_n)$, um cilindro contido em A_n que satisfaz $\mathbb{P}(A_n - B_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Tomamos $C_n = \bigcap_{i\leq n} B_i$. Então por (1.2), temos $\mathbb{P}(A_n - C_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i - B_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Isso, juntamente com a hipótese de que $\mathbb{P}(A_n) > \varepsilon$, implica que $\mathbb{P}(C_n) > \frac{\varepsilon}{2}$, e que C_n é não vazio.

Acabamos de construir uma sequência de conjuntos não vazios tais que $C_n \subset \pi_{i_n}^{-1}(K_n)$, com K_n compacto e tal que

$$C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$$

Além disso, como $C_n \subset A_n$, para concluirmos que $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ é não vazio, basta verificar que $\bigcap_{n\geq 1} C_n$ é não vazio. Seja, então, $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots)$ um elemento qualquer de C_n. Observe que, se $m > n$, então $x_m \in C_n$. Disto segue que $\pi_{i_n}(x_m) \in K_n$, que é compacto. Assim, $\sup_{m>n} x_m^{(n)} < \infty$, e então $\sup_m x_m^{(n)} < \infty$. Logo, para cada n, a sequência $\{x_i^n\}_i$ é limitada. Usando o método da diagonal, obtemos uma subsequência $\{x_{n'}\}$ de $\{x_n\}$ em que toda coordenada converge. Mas então $\{x_{n'}\}$ converge para algum $x \in \mathbb{R}^\infty$. Como cada C_n é fechado, temos $x \in C_n$ para todo n, donde $x \in \bigcap_{n\geq 1} C_n \subset \bigcap_{n\geq 1} A_n$. Mas isto é um absurdo, pois $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$.

Com isso, concluímos que $\mathbb{P}$ é uma medida na álgebra dos cilindros $\mathcal{F}$. Aplicando o Teorema de Carathéodory, podemos estender $\mathbb{P}$ para a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$. Esta σ-álgebra é exatamente a σ-álgebra de Borel, o que demonstra o teorema. $\square$

Estamos quase em condições de demonstrar a primeira parte do teorema. Precisamos de mais alguns resultados que enunciamos a seguir.

Proposição 1.7. *Se S é um espaço métrico separável, então ele é homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}^\infty$.*

Demonstração. Em S, seja $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ um conjunto enumerável denso. Definimos $h : S \to \mathbb{R}^\infty$ pondo para cada $x \in S$

$$h(x) = (d(x, r_1), d(x, r_2), d(x, r_3), \ldots),$$

onde d é a métrica em S. Queremos mostrar que h é um homeomorfismo sobre a sua imagem.

Se $x_n \to x$ em S, então $d(x_n, r_k) \xrightarrow{n} d(x, r_k)$ para todo k fixo. Como cada coordenada converge, temos $h(x_n) \to h(x)$. Suponha que $x_n \nrightarrow x$ em S, então existe uma subsequência $x_{n'}$ tal que $d(x_{n'}, x) > \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. Tomamos r_k tal que $d(x, r_k) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Então $d(x_{n'}, r_k) > \frac{1}{2}\varepsilon$ para todo n'. Assim $d(x_{n'}, r_k) \nrightarrow d(x, r_k)$ e $h(x_n) \nrightarrow h(x)$. Acabamos de demonstrar que $h(x_n) \to h(x)$ se, e somente se, $x_n \to x$.

Daqui, concluímos que h é contínua, injetiva e um homeomorfismo sobre sua imagem. □

Seja S um espaço métrico e $S' \subset S$ um boreliano. Sabemos que S' tem uma estrutura métrica induzida por S. Além disso, a σ-álgebra de Borel de S' é exatamente o conjunto dos borelianos de S contidos em S'. Se $\mathbb{P}$ é uma probabilidade em $(S, \mathcal{S})$ com $\mathbb{P}(S') = 1$, podemos considerar a restrição de $\mathbb{P}$ a S' definindo $\mathbb{P}^r(A) = \mathbb{P}(A)$ para $A \in \mathcal{S}'$. Por outro lado, dada uma probabilidade $\mathbb{P}$ em $(S', \mathcal{S}')$, podemos considerar a extensão de $\mathbb{P}^e$ para $(S, \mathcal{S})$ pondo $\mathbb{P}^e(A) = \mathbb{P}(A \cap S')$, para A boreliano de S. Se, na Proposição 1.3 tomamos $h : S' \to S$ a inclusão, dada $\mathbb{P}$ uma probabilidade em $(S', \mathcal{S}')$, temos $\mathbb{P}h^{-1} = \mathbb{P}^e$ e então, neste caso particular

Proposição 1.8. *Se Π é uma família rígida de probabilidades em $(S', \mathcal{S}')$, então $\Pi^e = \{\mathbb{P}^e : P \in \Pi\}$ é uma família rígida de probabilidades em $(S, \mathcal{S})$. Além disso, se $\mathbb{P}_n \rightharpoonup \mathbb{P}$ em $(S', \mathcal{S}')$, então $\mathbb{P}_n^e \rightharpoonup \mathbb{P}^e$ em $(S, \mathcal{S})$, onde $\rightharpoonup$ denota a convergência fraca de probabilidades.*

Proposição 1.9. *Se $\mathbb{P}_n \rightharpoonup \mathbb{P}$ em $(S, \mathcal{S})$ e $\mathbb{P}_n(S') = \mathbb{P}(S') = 1$, então $\mathbb{P}_n^r \rightharpoonup \mathbb{P}^r$ em $(S', \mathcal{S}')$.*

Acima e no que segue, denotamos por $\rightharpoonup$ a convergência fraca de probabilidades. A demonstração dessas duas proposições segue de maneira fácil do Teorema de Portmanteau e será omitida aqui.

Com estes fatos em mãos, estamos em condições de demonstrar o Teorema de Prohorov.

Demonstração do Teorema de Prohorov. Começamos supondo que Π é um conjunto rígido de probabilidades. Como já foi dito anteriormente, vamos dividir a demonstração em várias partes.

***Caso* $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.** Se $\{\mathbb{P}_n\}$ é uma sequência de probabilidades em Π, o Teorema de Helly implica que $\{F_n\}$, a sequência de distribuições correspondentes, contém uma subsequência $\{F_{n'}\}$ tal que

$$F_{n'}(x) \to F(x),$$

para todo ponto de continuidade de F, onde F é uma função contínua por cima. Sabemos que existe uma medida μ em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ tal que $\mu(a,b]$ é a diferença de F nos vértices do retângulo n-dimensional $(a,b]$. Se provarmos que $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$, então concluímos que $\mathbb{P}_{n'} \rightharpoonup \mu$. Para isso, tomamos $\varepsilon > 0$ e, por rigidez, um compacto K tal que $P_{n'}(K) > 1-\varepsilon$, para todo n'. Escolha a e b tais que $K \subset (a,b]$ e tal que todos os vértices de $(a,b]$ são pontos de continuidade de F. Como $\mathbb{P}_{n'}(a,b]$ (respectivamente, $\mu(a,b]$) é a diferença dos valores de $F_{n'}$ (respectivamente, F) nos vértices do retângulo, temos $\mu(\mathbb{R}^n) \geq \mu(a,b] = \lim \mathbb{P}_{n'}(a,b] > 1-\varepsilon$ e então $\mu(\mathbb{R}^n) \geq 1$. Se por acaso $\mu(\mathbb{R}^n) > 1$, tomamos um compacto K com $\mu(K) > 1$ e um retângulo $(a,b]$ tal que todos os vértices são pontos de continuidade de F e que $K \subset (a,b]$. Daí $\mu(K) \leq \mu(a,b] = \lim \mathbb{P}_{n'}(a,b] \leq 1$. Mas $\mu(K) > 1$, o que é um absurdo. Concluímos $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$.

***Caso* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{\infty}}$.** Tomamos $\pi_n : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^n$ as projeções em $\mathbb{R}^n$. Sabemos, pela Proposição 1.3 que se Π é uma família rígida de probabilidades em $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{R}^\infty)$ então $\Pi_n = \{\mathbb{P}\pi_n^{-1} : \mathbb{P} \in \Pi\}$ é uma família rígida de probabilidades em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$. Tomamos uma sequência de probabilidades $\{\mathbb{P}_n\}$ em Π, pelo caso tratado anteriormente e pelo método da diagonal, conseguimos uma subsequência $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ tal que $\mathbb{P}_{n'}\pi_k^{-1} \rightharpoonup P_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como a coleção $\{P_k\}$ claramente satisfaz as condições do Teorema de Existência de Kolmogorov, existe P uma probabilidade em $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{R}^\infty)$ tal que $P\pi_k^{-1} = P_k$. Afirmamos que $\mathbb{P}_{n'} \rightharpoonup P$. É sabido que, em $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{R}^\infty)$, a convergência das marginais implica a convergência da sequência e como $\mathbb{P}_{n'}\pi_k^{-1} \rightharpoonup P\pi_k^{-1}$, temos o resultado neste caso.

Caso σ-compacto. Sabemos que um espaço S σ-compacto é separável e então existe um homeomorfismo de S em um subconjunto de $\mathbb{R}^\infty$. Como S é σ-compacto, sua imagem pelo homeomorfismo é um boreliano. Sabemos que convergência fraca é preservada por homeomorfismos e compacidade também o é. Assim, podemos assumir que S é um boreliano de $\mathbb{R}^\infty$. Se Π é uma família rígida, então Π^e é rígido em $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{R}^\infty)$, pela Proposição 1.8. Pelo caso anteriormente tratado, dada uma sequência $\{\mathbb{P}_n^e\}$ em Π^e, temos uma subsequência $\{\mathbb{P}_{n'}^e\}$ fracamente convergente. Pela Proposição 1.9, $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ converge fracamente.

Caso geral. Seja Π uma família rígida em $(S, \mathcal{S})$, onde S é um espaço qualquer, para cada n, tomamos um compacto K_n tal que $\mathbb{P}(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$, para toda probabilidade $\mathbb{P}$ em Π. Fazendo $S' = \bigcup K_n$, todas as probabilidades em Π tem seu suporte em S'. Dada uma sequência $\{\mathbb{P}_n\}$ em Π, como $\mathbb{P}_n(S') = 1$ para todo n, podemos considerar $\{\mathbb{P}_n^r\}$, uma sequência rígida de probabilidades em S', que é σ-compacto. Pelo caso anterior, podemos tomar uma subsequência $\{\mathbb{P}_{n'}^r\}$ que converge fracamente. Como $(\mathbb{P}^r)^e = \mathbb{P}$, usando a Proposição 1.8, $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ converge fracamente.

Isto termina a demonstração da primeira parte do teorema. Vamos demonstrar a segunda parte agora, que afirma que num espaço completo e separável, se Π é sequencialmente compacto, então ele é rígido.

Para tal, afirmamos que, dados ε e δ positivos, existe uma coleção finita de esferas de raio δ, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, tal que $\mathbb{P}(\bigcup_{i\leq n} B_i) > 1 - \varepsilon$ para todo $\mathbb{P}$ em Π. Suponha que isto não é verdade, então existem ε e δ tal que toda coleção finita de esferas de raio δ, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, satisfaz $\mathbb{P}(\bigcup_{i\leq n} B_i) \leq 1 - \varepsilon$ para algum $\mathbb{P}$ em Π. Como S é separável, ele pode ser escrito como a união enumerável de uma coleção de esferas abertas de raio δ, $B_1, B_2, \ldots$. Coloque $A_n = \bigcup_{i\leq n} B_i$ e tome $\mathbb{P}_n \in \Pi$ tal que $\mathbb{P}_n(A_n) \leq 1 - \varepsilon$. Se alguma subsequência de $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ converge fracamente para algum $\mathbb{P}$, então $\mathbb{P}(A_m) \leq \liminf_{n'} \mathbb{P}_{n'}(A_m) \leq \liminf_{n'} \mathbb{P}_{n'}(A_{n'}) \leq 1 - \varepsilon$, pois A_m é aberto. Como $A_m \uparrow S$, nenhuma subsequência de $\{\mathbb{P}_n\}$ pode convergir fracamente e então Π não pode ser rígido, o que contraria a nossa hipótese.

Com a afirmação acima em mãos, podemos demonstrar que o conjunto Π é rígido, sabendo que ele é sequencialmente compacto. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos, para cada k inteiro positivo, uma quantidade finita de esferas de raio $\frac{1}{k}$, $B_1^k, B_2^k, \ldots, B_{n_k}^k$ tal que $\mathbb{P}(\bigcup_{i\leq n_k} B_i^k) \geq 1 - \frac{1}{2^k}\varepsilon$. Se K é o fecho de $\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{i\leq n_k} B_i^k$, então ele é totalmente limitado e completo, donde compacto. Para $\mathbb{P} \in \Pi$ vale $\mathbb{P}(K) \geq 1 - \varepsilon$. $\square$

1.2 A métrica de Skorohod

Considere o espaço $D_{\mathbb{R}}[0, 1]$ das funções càdlàg definidas em $[0, 1]$ com contradomínio $\mathbb{R}$. Precisamos considerar probabilidades definidas neste espaço e conseguir dizer quando uma sequência de probabilidades é rígida. Para tal, necessitamos que o espaço tenha uma estrutura métrica que o torne completo e separável. Isto é o que fazemos aqui.

Nota. Aqui demonstraremos os resultados para contradomínio $\mathbb{R}$. Entretanto, sem trabalho adicional, podemos aplicar as mesmas demonstrações quando o contradomínio for um espaço métrico E separável e completo. Além disso, é claro que os mesmos resultados são válidos se considerarmos um intervalo real qualquer, ao invés de considerarmos $[0,1]$ como o domínio de nossas funções.

Defina, para $x \in D_{\mathbb{R}}[0,1]$ e I um intervalo,

$$\omega_x(I) = \sup\{|x(t) - x(s)| : s, t \in I\}.$$

Precisamos de algo que desempenhe o mesmo papel que o módulo de continuidade em $C[0,1]$. Esta função é

$$\omega'_x(\delta) = \inf_P \max_{1 \le i \le r} \omega_x[t_{i-1}, t_i),$$

onde este ínfimo é tomado sobre todas as partições $P = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1\}$ de $[0,1]$ satisfazendo $\inf_i(t_i - t_{i-1}) > \delta$.

Lema 1.10. *Se $x \in D_{\mathbb{R}}[0,1]$, então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, t_0 < t_1 < \ldots < t_r$ partição de $[0,1]$ tais que $\omega_x[t_i, t_{i+1}) < \varepsilon$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$.*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ e defina $A = \{t \ge 0 : \exists\, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ tais que $\omega_x[t_i, t_{i+1}) < \varepsilon\}$. Observe que A é não vazio pela continuidade à direita no zero. Além disso, se $\tau = \sup A$, então $\tau \in A$, pois $\lim_{t \to \tau^-}$ existe. Novamente, pela continuidade à direita, devemos obrigatoriamente ter $\tau = 1$. □

O lema acima implica que toda função em $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ é limitada. Além disso, se $x \in D_{\mathbb{R}}[0,1]$, então $\omega'_x(\delta) \to 0$ quando $\delta \to 0$.

Estamos em busca de uma métrica adequada para $D_{\mathbb{R}}[0,1]$. Como toda função em $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ é limitada, poderíamos tomar a métrica da convergência uniforme. Entretanto, esta métrica não é "boa", no sentido que funções do tipo $f(t) = \mathbf{1}_{\{t>0\}}$ e $g_\varepsilon(t) = \mathbf{1}_{\{t>\varepsilon\}}$ estão à distância 1, mas intuitivamente, gostaríamos de dizer que elas estão próximas.

Uma maneira de fazer isto é permitir pequenas perturbações no domínio. Para tal, denote Λ o conjunto das funções $\lambda : [0,1] \to [0,1]$ contínuas, estritamente crescentes e sobrejetoras. Observe que $\lambda(0) = 0$ e que $\lambda(1) = 1$. Para $x, y \in D_{\mathbb{R}}[0,1]$, defina $d(x,y)$ como

$$d(x,y) = \inf\{\varepsilon > 0 : \exists\, \lambda \in \Lambda \text{ tal que } \sup_t |\lambda(t) - t| \le \varepsilon \text{ e } \sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| \le \varepsilon\}.$$

Proposição 1.11. *d é uma métrica no espaço $D_{\mathbb{R}}[0,1]$.*

Demonstração. Seja $A = \{\varepsilon > 0 : \exists\, \lambda \in \Lambda \text{ tal que } \sup_t |\lambda(t) - t| \leq \varepsilon \text{ e } \sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| \leq \varepsilon\}$, de modo que $d(x,y) = \inf A$. Tomando $\lambda(t) = t$, obtemos $||x - y||_\infty = \sup_t |x(t) - y(t)| \in A$, donde $d(x,y) < \infty$. Além disso, claramente $d(x,y) \geq 0$. Se $d(x,y) = 0$, então $\forall\, n > 0$, $\exists\, \lambda_n \in \Lambda$ que satisfaz $||\lambda_n - I||_\infty < \frac{1}{n}$ e $||x - y \circ \lambda_n||_\infty < \frac{1}{n}$, onde I é a identidade. Logo, $\lambda_n(t) \to t$ e $x(t) = \lim y(\lambda_n(t))$, de modo que em todos os pontos de continuidade de y temos $x(t) = y(t)$. Disto concluímos que $x \equiv y$.

Pelo fato de que se $\lambda \in \Lambda$ então $\lambda^{-1} \in \Lambda$, temos a simetria da métrica. Observe que se $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, então $\lambda_1\lambda_2 \in \Lambda$ e

$$|\lambda_1\lambda_2(t) - t| \leq |\lambda_1\lambda_2(t) - \lambda_2(t)| + |\lambda_2(t) - t|,$$

$$|x(\lambda_1\lambda_2(t)) - y(t)| \leq |x(\lambda_1\lambda_2(t)) - z(\lambda_2(t))| + |z(\lambda_2(t)) - y(t)|.$$

Com isto temos a desigualdade triangular para d. □

Com esta métrica, $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ é separável: um subconjunto denso é o conjunto das funções escadas $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{[\alpha_i,\beta_i)}$, onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $c_i \in \mathbb{Q}$. Mas esta métrica não torna $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ completo. Um exemplo disso é tomar $x_n = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$. Para esta sequência, $d(x_n, x_m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$ e ela não converge.

A topologia induzida por esta métrica se chama topologia de Skorohod. Precisamos achar uma métrica que torne o conjunto $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ completo e que seja equivalente a d. Para tal, dado $\lambda \in \Lambda$, defina

$$||\lambda|| = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|,$$

e faça

$$d_0(x,y) = \inf \{\varepsilon > 0 : \exists\, \lambda \in \Lambda \text{ tal que } ||\lambda|| \leq \varepsilon \text{ e } \sup |x(t) - y(\lambda(t))| \leq \varepsilon\}.$$

A nova definição de d_0 nos leva a considerar um modo diferente de medir as perturbações em Λ. O que fazemos aí é levar em conta as inclinações das retas secantes pelo gráfico de uma $\lambda \in \Lambda$ qualquer. Entretanto, ainda temos uma relação entre $||\lambda||$ e $\sup_t |\lambda(t) - t|$. Observe que

$$||\lambda|| \geq \left| \log \left(\tfrac{\lambda(t)}{t} \right) \right| = \frac{1}{x*} \left| \tfrac{\lambda(t)}{t} - 1 \right| \geq \frac{1}{x*} |\lambda(t) - t|,$$

onde $x*$ é dado pelo Teorema do valor médio aplicado à função logaritmo. Em particular, se $||\lambda||$ for suficientemente pequeno, temos uma desigualdade do tipo $\sup |\lambda(t) - t| \leq C||\lambda||$.

Proposição 1.12. *d_0 é uma métrica no espaço $D_{\mathbb{R}}[0,1]$.*

Demonstração. A demonstração da finitude e da positividade é análoga àquela apresentada na Proposição 1.11. A simetria segue do fato que $||\lambda|| = ||\lambda^{-1}||$. Além disso, se $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, então

$$\begin{aligned}
||\lambda_1\lambda_2|| &= \sup_{s\neq t}\left|\log\frac{\lambda_1\lambda_2(t)-\lambda_1\lambda_2(s)}{t-s}\right| \\
&= \sup_{s\neq t}\left|\log\left(\frac{\lambda_1\lambda_2(t)-\lambda_1\lambda_2(s)}{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}\frac{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}{t-s}\right)\right| \\
&\leq ||\lambda_1|| + ||\lambda_2||.
\end{aligned}$$

Disto segue a desigualdade triangular e o fato de que d_0 é uma métrica. □

As métricas d e d_0 estão fortemente relacionadas. De fato, d e d_0 são equivalentes e $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ é completo com a métrica d_0.

Nota. Se tomarmos $|s| < \frac{1}{2}$, então $s - s^2 \leq \log(1+s)$ e se $s > -1$, então $\log(1+s) < s$. Estas desigualdades são facilmente demonstradas utilizando a expansão em séries de potências de $\log(1+s)$ e nos serão úteis no que segue.

Lema 1.13. *Se $d(x,y) < \delta^2$, com $0 < \delta < \frac{1}{4}$, então $d_0(x,y) \leq 4\delta + \omega'_x(\delta)$.*

Demonstração. Escolha $\{t_i\}$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
&0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1; \\
&t_i - t_{i-1} > \delta; \forall i = 1, 2, \ldots n; \\
&\omega_x[t_{i-1}, t_i) < \omega'_x(\delta) + \delta.
\end{aligned}$$

Escolha $\lambda \in \Lambda$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
&\sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| < \delta^2; \\
&\sup_t |\lambda(t) - t| < \delta^2.
\end{aligned}$$

Defina $\mu \in \Lambda$ colocando $\mu(t_i) = \lambda(t_i)$ e fazendo uma interpolação linear, de modo que, se $t \in [t_{i-1}, t_i)$, então $\lambda^{-1}\mu(t) \in [t_{i-1}, t_i)$.

Com isso obtemos

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(\mu(t))| &\leq |x(t) - x(\lambda^{-1}\mu(t))| + |x(\lambda^{-1}\mu(t)) - y(\mu(t))| \\
&\leq \omega'_x(\delta) + \delta + \delta^2 \\
&< \omega'_x(\delta) + 4\delta.
\end{aligned}$$

Vamos verificar que $||\mu|| \leq 4\delta$. Para tal, observe que

$$|\mu(t_i) - \mu(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})| \leq 2\delta^2 < 2\delta(t_i - t_{i-1}).$$

Pelo caráter poligonal de μ, a desigualdade acima vale para quaisquer $s, t \in [0,1]$. Disto segue diretamente que

$$\log(1-2\delta) \leq \log \frac{\mu(t) - \mu(s)}{t-s} \leq \log(1+2\delta).$$

Pelas desigualdades mencionadas na nota acima temos $||\mu|| \leq 4\delta$. □

Agora podemos provar a equivalência entre as duas métricas.

Proposição 1.14. *As métricas d e d_0 são equivalentes.*

Demonstração. Dados $x \in D_{\mathbb{R}}[0,1]$ e $\varepsilon > 0$, pelo Lema 1.10 , podemos encontrar $\delta > 0$ que satisfaz $\delta < \frac{1}{4}$ e $4\delta + \omega'_x(\delta) < \varepsilon$. Pelo lema acima, temos $S_d(x, \delta^2) \subset S_{d_0}(x, \varepsilon)$.

Vamos agora demonstrar que, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta > 0$ tal que $S_{d_0}(x, \delta) \subset S_d(x, \varepsilon)$. Observe que, se $d_0(x,y) < \varepsilon < \frac{1}{4}$, como $\lambda(0) = 0$, temos

$$\log(1-2\varepsilon) \leq \varepsilon \leq \log \frac{\lambda(t)}{t} \leq \varepsilon \leq \log(1+2\varepsilon).$$

Daí segue que $|\lambda(t) - t| \leq 2\varepsilon t \leq 2\varepsilon$, donde $d(x,y) \leq 2d_0(x,y)$. Isto implica que $d(x,y) \leq \varepsilon$ quando $d_0(x,y) \leq \varepsilon/2$. □

Nota. Este último teorema nos permite caracterizar convergência no espaço $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ com a métrica d_0, uma vez que ela é equivalente à métrica d. Ora, uma sequência $\{f_n\}$ em $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ converge na métrica d_0 se, e somente se, $\{f_n\}$ converge na métrica d. Suponha então que $f_n \to f$. Tome reparatetrizações $\{\lambda_n\} \in \Lambda$ tais que

$$\sup_t |\lambda_n(t) - t| \leq d(f_n, f) + \tfrac{1}{N}$$

e

$$\sup_t |f_n \circ \lambda_n(t) - f(t)| \leq d(f_n, f) + \tfrac{1}{N}.$$

Para esta sequência de reparametrizações, temos $|\lambda_n(t) - t| \to 0$ e $|f_n \circ \lambda_n(t) - f(t)| \to 0$ uniformemente em t. Isto é, $f_n \to f$ na topologia de Skorohod se e somente se existem reparametrizações $\lambda_n \in \Lambda$ tais que $|\lambda_n(t) - t| \to 0$ uniformemente em t e $f_n \circ \lambda_n \to f$ uniformemente.

Teorema 1.15. *$D_{\mathbb{R}}[0,1]$ é completo na métrica d_0.*

Demonstração. Tome $\{x_n\} \in D_{\mathbb{R}}[0,1]$ uma sequência de Cauchy e uma subsequência $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ com $d_0(y_n, y_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$.

Tome agora $\{\mu_n\} \in \Lambda$ com

$$\begin{aligned} &|y_n(t) - y_{n+1}(\mu_n(t))| < \frac{1}{2^n}; \\ &||\mu_n|| < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Defina $\phi_m^n = \mu_{n+m+1}\mu_{n+m}\dots\mu_n$. Observe que

$$\sup_t |\phi_m^n(t) - \phi_{m-1}^n(t)| \le \sup_t |\mu_{n+m+1}(t) - t| \le 2||\mu_{n+m+1}|| \le \frac{1}{2^{n+m}},$$

para m suficientemente grande. Pelo Teste M de Weierstrass, $\lambda_n = \lim_m \phi_m^n$ existe. Observe que $||\lambda_n|| \le \frac{1}{2^{n-1}}$, pois

$$\begin{aligned} \log\left|\frac{\phi_m^n(t) - \phi_m^n(s)}{t-s}\right| &\le ||\phi_m^n|| \\ &\le \sum_{j=0}^{m} ||\mu_{n+j}|| \\ &\le \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Observe também que $\lambda_n = \lambda_{n+1}\mu_n$, donde

$$\sup |y_n(\lambda_n^{-1}(t)) - y_{n+1}(\lambda_{n+1}^{-1}(t))| \le \sup |y_n(t) - y_{n+1}(\mu_n(t))| \le \frac{1}{2^n}.$$

O fato de que $||\lambda_n|| < +\infty$ implica que $\lambda_n \in \Lambda$. Com isso, $y_n\lambda_n^{-1}$ é uma sequência de Cauchy na métrica da convergência uniforme e portanto converge uniformemente para alguma função x. É fácil ver que $x \in D_{\mathbb{R}}[0,1]$ e que $y_n \to x$ na métrica d_0, pois $||\lambda_n|| \to 0$ e $\sup_t |y_n(\lambda_n^{-1}(t)) - x(t)| \to 0$.

Agora, dada uma sequência de Cauchy, construímos uma subsequência convergente. É um fato já conhecido que uma sequência de Cauchy com subsequência convergente também converge, o que termina a demonstração do teorema. □

1.2.1 Compacidade em $D_{\mathbb{R}}[0,1]$

Vamos agora caracterizar os conjuntos compactos de $D_{\mathbb{R}}[0,1]$. O Teorema de Arzelà-Ascoli tem um correspondente neste caso. Para podermos demonstrá-lo, precisamos de um lema inicial.

Lema 1.16. *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções semicontínuas superiormente, com $f_n \downarrow 0$ pontualmente, então $f_n \to 0$ uniformemente em compactos.*

Demonstração. Para $\varepsilon > 0$ e K compacto, defina $G_n = \{x : f_n(x) < \varepsilon\}$. Como as f_n são semicontínuas superiormente, cada G_n é aberto. Além disso, como $f_{n+1} \leq f_n$, temos $G_n \subset G_{n+1}$. Observe que $K \subset \cup G_n$. Extraindo uma subcobertura finita, concluímos que $K \subset G_n$ a partir de algum n_0, o que mostra a convergência uniforme. $\square$

Além desse lema, para podermos entender a demonstração do teorema, precisamos saber o que é uma ε-net.

Definição 1.17. Uma ε-net em E é um conjunto A tal que $\forall\, x \in E, \exists\, y \in A : d(x, y) < \varepsilon$.

Teorema 1.18. *Um conjunto $A \subset D_{\mathbb{R}}[0, 1]$ tem fecho compacto se, e somente se, valem as seguintes afirmações:*

$$\sup_{x\in A} \sup_t |x(t)| < +\infty;$$
$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in A} \omega'_x(\delta) = 0.$$

Demonstração. Vamos começar provando que, se as duas condições valem, o conjunto A tem fecho compacto. Para isto, basta verificar que A é totalmente limitado na métrica d_0, pois esta métrica torna o espaço completo. Primeiramente, vamos verificar que A é totalmente limitado com relação à métrica d.

Dado $\varepsilon > 0$, tome k inteiro com $\frac{1}{k} < \varepsilon$ e $\omega'_x(\frac{1}{k}) < \varepsilon$, $\forall\, x \in A$. Tome também H uma ε-net finita de $[-\alpha, \alpha]$, onde $\alpha = \sup_{x\in A} \sup_t |x(t)|$. Defina B como o conjunto finito dos $y \in D_{\mathbb{R}}[0, 1]$ que em intervalos da forma $[\frac{u}{k}, \frac{u+1}{k})$ são constantes, com valores em H e $y(1) \in H$. Afirmamos que B é uma 2ε-net de A na métrica d, ou seja, dado $x \in A$, podemos achar $y \in B$ tal que $d(x, y) < 2\varepsilon$.

Dado $x \in A$, use que $\omega'_x(\frac{1}{k}) < \varepsilon$ para escolher uma partição $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tal que

$$t_i - t_{i-1} > \frac{1}{k},$$
$$\omega'[t_{i-1}, t_i) < \varepsilon.$$

Escolha inteiros u_i de modo que $\frac{u_i}{k} \leq t < \frac{u_i+1}{k}$. Observe que os u_i são distintos, pois $t_i - t_{i-1} > \frac{1}{k}$. Tome agora $\lambda \in \Lambda$ que satisfaz $\lambda(\frac{u_i}{k}) = t_i$ e que é linear entre estes pontos. Escolha um $y \in B$ tal que

$$\left|y\left(\tfrac{u}{k}\right) - x\left(\lambda\left(\tfrac{u}{k}\right)\right)\right| < \varepsilon, \quad 0 \leq u \leq k.$$

Observe que todo intervalo da forma $[\lambda(\frac{u}{k}), \lambda(\frac{u+1}{k}))$ está contido em algum intervalo $[t_i, t_{i+1})$. Logo, a função $x \circ \lambda$ não pode variar mais do que ε em um intervalo da forma $[\frac{u}{k}, \frac{u+1}{k})$. Como y é constante em intervalos desta forma, obtemos $||y - x \circ \lambda||_\infty < 2\varepsilon$. Observe que também vale $|\lambda(\frac{u}{k}) - \frac{u}{k}| < \varepsilon$, e por linearidade $|\lambda(t) - t| < \varepsilon$. Com isso, concluímos que $d(x, y) < 2\varepsilon$ e então B é uma 2ε-net de A na métrica d.

Dado $\eta > 0$, vamos mostrar agora que podemos cobrir A com um número finito de bolas de raio η na métrica d_0 e então concluir que A tem fecho compacto nesta métrica. Escolha δ de modo que $0 < \delta < \frac{1}{4}$ e $4\delta + \omega'_x(\delta) < \eta$ para todo $x \in A$. Escolha ε que satisfaça $0 < 2\varepsilon < \delta^2$. Tome o conjunto finito B construído acima com respeito a este ε. Dado $x \in A$, tome $y \in B$ que satisfaça $d(x, y) < 2\varepsilon < \delta^2$. Pelo Lema 1.13, temos $d_0(x, y) < 4\delta + \omega'_x(\delta) < \eta$. Logo, tomando bolas com centro em elementos de B e raio η cobrimos A com um número finito delas. Isto implica que $\overline{A}$ é compacto e com isso, terminamos a primeira parte da demonstração.

Suponha agora que A tem fecho compacto. Vamos verificar que ele satisfaz as duas condições do teorema. Como $\overline{A}$ é compacto, ele é limitado e, em particular, vale $\sup_{x \in A} \sup_t |x(t)| < +\infty$, e portanto a primeira condição do teorema é satisfeita.

Vamos agora demonstrar a segunda condição. Primeiramente, note que $\omega'_x(\delta) \downarrow 0$, quando $\delta \downarrow 0$, para todo $x \in A$. Queremos verificar que esta convergência é uniforme em x em A . Para tal, usando o Lema 1.16, basta demonstrar que as funções $x \mapsto \omega'_x(\delta)$, para δ fixo, são contínuas superiormente. Se demonstrarmos isto, o teorema fica provado.

Fixe $x \in A$ e $\delta > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que encontrar $\eta > 0$ tal que $d(x, y) < \eta$ implique $\omega'_y(\delta) < \omega'_x(\delta) + \varepsilon$. Podemos fazer isto na métrica d pois ela é equivalente à métrica d_0. Escolha uma partição $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tal que, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
&t_i - t_{i-1} > \delta, \\
&\omega'_x[t_{i-1}, t_i) < \omega'_x(\delta) + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Tome η pequeno de modo que

$$
\begin{aligned}
&t_i - t_{i-1} > \delta + 2\eta; \forall i = 1, 2, \ldots, n; \\
&\eta < \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}
$$

Se $d(x, y) < \eta$, então para algum $\lambda \in \Lambda$ temos

$$
\begin{aligned}
&\sup_t |\lambda(t) - t| < \eta, \\
&\sup_t |y(t) - x(\lambda(t))| < \eta.
\end{aligned}
$$

Tome $s_i = \lambda^{-1}(t_i)$, de modo que $s_i - s_{i-1} > t_i - t_{i-1} - 2\eta > \delta$. Observe que, se $s, t \in [s_{i-1}, s_i)$, então $\lambda(s), \lambda(t) \in [t_{i-1}, t_i)$, de modo que

$$|y(s) - y(t)| < 2\eta + |x(\lambda(s)) - x(\lambda(t))| < \omega'_x(\delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \omega'_x(\delta) + \varepsilon.$$

Logo, $\omega_y[s_{i-1} - s_i) < \omega'_x(\delta) + \varepsilon$ e então $\omega'_y(\delta) < \omega'_x(\delta) + \varepsilon$. □

1.2.2 Rigidez de probabilidades em $D_{\mathbb{R}}[0,1]$

O Teorema 1.18 caracteriza os conjuntos compactos de $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ e isto nos permite achar um teorema equivalente ao Teorema de Prohorov em $D_{\mathbb{R}}[0,1]$:

Teorema 1.19. *Uma sequência de probabilidades $\{P_n\}$ definidas em $D_{\mathbb{R}}[0,1]$ é rígida se, e somente se:*

1. $\forall\, \eta > 0, \exists\, c > 0$ *tal que*

$$P_n\{x : \sup_t |x(t)| > c\} \leq \eta, \quad \forall\, n \geq 1;$$

2. $\forall\, \eta > 0, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta \in (0,1), \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$P_n\{x : \omega'_x(\delta) > \varepsilon\} \leq \eta, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Demonstração. Suponha que $\{P_n\}$ é rígida. Dados ε e η positivos, tome K compacto com $P_n(K) > 1-\eta$, $\forall\, n \geq 1$. Pelo Teorema 1.18, existe $c > 0$ tal que $K \subset \{x : \sup_t |x(t)| < c\}$ e, para δ suficientemente pequeno, $K \subset \{x : \omega'_x(\delta) < \varepsilon\}$, o que prova a necessidade das condições 1 e 2.

Suponha agora que as condições 1 e 2 são verdadeiras. Observe que, diminuindo o valor de δ, podemos supor que a segunda condição vale com $n_0 = 0$, pois um conjunto finito de probabilidades é sempre rígido. Dado $\eta > 0$, escolha $c > 0$ de modo que $A = \{x : \sup_t |x(t)| < c\}$ satisfaz $P_n(A) \geq 1 - \frac{1}{2}\eta$, $\forall\, n \geq 1$. Escolha δ_k a fim de que $P_n(A_k) \geq 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\eta$, $\forall\, n \geq 1$, onde $A_k = \{x : \omega'_x(\delta_k) < \frac{1}{k}\}$. Tomando K como o fecho do conjunto $A \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, temos $P_n(K) > 1 - \eta$ e, pelo Teorema 1.18, resulta que K é compacto. □

1.2.3 O caso geral: a métrica de Skorohod em $D_E[0,1]$

Seja E um espaço métrico separável e completo com métrica d. Denotamos por $D_E[0,1]$ o espaço das funções $f : [0,1] \to E$ que são contínuas à direita e que têm limite à esquerda.

Podemos definir uma métrica em $D_E[0,1]$ colocando

$$d_0(f,g) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left\{ \|\lambda\|, \sup_{0 \le t \le T} d(f(t), (g \circ \lambda)(t)) \right\}$$

Como no caso em que $E = \mathbb{R}$, a equação acima de fato define uma métrica em $D_E[0,1]$ que torna esse espaço separável e completo.

Seguem os enunciados dos resultados sobre a métrica de Skorohod que são utilizados no decorrer do texto. As demonstrações desses resultados são pequenas adaptações daquelas apresentadas para o caso $E = \mathbb{R}$.

Lema 1.20. *Sejam $f_n, f \in D_E[0,1]$. Então $f_n \to f$ na topologia de Skorohod se e somente se existem reparametrizações $\lambda_n \in \Lambda$ tais que $|\lambda_n(t) - t| \to 0$ uniformemente em t e $f_n \circ \lambda_n \to f$ uniformemente.*

Definição 1.21. (Módulo de continuidade) Sejam $f \in D_E[0,1]$ e $\delta > 0$. Definimos

$$w'_f(\delta) := \inf_{\{t_i\}} \max_i \sup_{|s-t| \le \delta} d(f(t), f(s)),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as partições $0 = t_0 < t_1 < ... < t_r = 1$ de $[0,1]$ tais que $t_i - t_{i-1} > \delta$ para todo i.

Observe que, para $\delta < 1/2$, conseguimos uma partição $\{t_i\}$ tal que $\delta < t_i - t_{i-1} \le 2\delta$ para todo i. Usando essa partição obtemos

$$w'_f(\delta) \le \sup_{|t-s| \le 2\delta} d(f(t), f(s)). \tag{1.3}$$

Teorema 1.22. *Seja $\{Q^N\}_{N \in \mathbb{N}}$ uma sequência de probabilidades em $D_E[0,1]$. Essa sequência é rígida se, e somente se, as duas afirmações seguintes são verdadeiras*

1. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $K \subset E$ compacto tal que $Q^N[f : \exists\, t \in [0,1]$ com $f(t) \in K^c] < \varepsilon$ para todo $N \in \mathbb{N}$.*

2. *Para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} Q^N[f : w'_f(\delta) > \varepsilon] = 0.$$

1.2.4 O caso $E = \mathcal{M}$

Sejam K um espaço métrico compacto, $C(K)$ o espaço de Banach das funções reais contínuas definidas em K, $\mathcal{M}$ o conjunto das medidas finitas em K com massa limitada por 1.

Podemos identificar $\mathcal{M}$ com um subconjunto do espaço dual de $C(K)$ pondo, para $f \in C(K)$, $\langle \mu, f \rangle = \int_K f \, d\mu$. Note que $\|\mu\|_* = \mu(K) = \langle \mu, 1 \rangle$, onde $\| \cdot \|_*$ é a norma do espaço dual. Coloque em $\mathcal{M}$ a topologia da convergência fraca de medidas. Com a identificação $\mathcal{M} \subset C(K)^*$, essa norma corresponde à topologia fraca estrela. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu, $\mathcal{M}$ é relativamente compacto. Como $C(K)$ é separável e $\mathcal{M}$ é limitado, a topologia fraca estrela de $\mathcal{M}$ pode ser metrizada.

Uma métrica que gera a topologia fraca estrela pode ser obtida da seguinte forma (ver [2] para a demonstração): tome um conjunto enumerável $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ denso em $\{f \in C(K) : \|f\|_\infty \leq 1\}$. Para $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, defina

$$d(\mu, \nu) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle \mu, g_k \rangle - \langle \nu, g_k \rangle|.$$

Com essa métrica, $\mathcal{M}$ é um espaço métrico compacto, portanto completo e separável[1]. Com isso podemos definir a métrica de Skorohod em $D_{\mathcal{M}}[0,1]$, tornando-o um espaço métrico também separável e completo.

Concluímos essa seção apresentado uma caracterização para rigidez de probabilidades em $D_{\mathcal{M}}[0,1]$, quando $K = [0,1]$.

Proposição 1.23. *Suponha que $\{Q^N\}_{N \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de probabilidades em $D_{\mathcal{M}}[0,1]$. Se, para um subconjunto denso $\mathcal{A} \subset C[0,1]$ vale*

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} Q^N \left[\pi_\cdot : \sup_{|t-s| \leq \delta} |\langle \pi_t, H \rangle - \langle \pi_s, H \rangle| > \varepsilon \right] = 0 \,, \quad \textit{para todo } \varepsilon > 0 \,,$$

para toda função $H \in \mathcal{A}$, então a sequência de probabilidades $\{Q^N\}$ é rígida.

Demonstração. Vamos usar a versão do Teorema de Prohorov para o espaço $D_{\mathcal{M}}[0,1]$ (Teorema 1.22). Como o espaço $\mathcal{M}$ é compacto, a primeira condição é trivialmente satisfeita. Por (1.3) é suficiente mostrar que, para quaisquer $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} Q^N \left[\pi_\cdot : \sup_{|s-t| \leq \delta} d(\pi_t, \pi_s) > \varepsilon \right] = 0.$$

[1]Sabemos que $\mathcal{M}$ é relativamente compacto em $C(K)^*$ com a topologia fraca estrela. Que $\mathcal{M}$ é fechado é uma consequência do Teorema da Representação de Riesz.

Seja $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ um subconjunto enumerável denso de $\{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1\}$ tal que $g_k \in \mathcal{A}$ para todo k. Usamos esse conjunto para definir uma métrica que induz a convergência fraca em $\mathcal{M}$. Tomamos $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-k_\varepsilon} < \varepsilon/2$. Temos

$$\begin{aligned}
Q^N\left[\pi_\cdot : \sup_{|s-t|\leq\delta} d(\pi_t,\pi_s) > \varepsilon\right] &= Q^N\left[\pi_\cdot : \sup_{|s-t|\leq\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|\langle\pi_s,g_k\rangle - \langle\pi_t,g_k\rangle| > \varepsilon\right] \\
&\leq Q^N\left[\pi_\cdot : \sup_{|s-t|\leq\delta} \sum_{k=1}^{k_\varepsilon} \frac{1}{2^k}|\langle\pi_s,g_k\rangle - \langle\pi_t,g_k\rangle| > \varepsilon/2\right] \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_\varepsilon} Q^N\left[\pi_\cdot : \sup_{|s-t|\leq\delta} |\langle\pi_s,g_k\rangle - \langle\pi_t,g_k\rangle| > \varepsilon/2^{k+1}\right].
\end{aligned}$$

Aplicando a hipótese aos termos do último somatório obtemos o resultado.

□

1.2.5 Continuidade e convergência em $D_\mathcal{M}[0,1]$

Lema 1.24. *Sejam $\pi^N_\cdot$, $\pi_\cdot \in D_\mathcal{M}[0,1]$ tais que $\pi^N_\cdot \to \pi_\cdot$ na topologia de Skorohod. Então $\pi^N_t \rightharpoonup \pi_t$ para quase todo t, incluindo $t = 0$ e $t = 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.20 existem reparametrizações λ_N de $[0,1]$ com $\lambda_N(s) \to s$ uniformemente em s e tais que $\pi^N_{\lambda_N(s)} \rightharpoonup \pi_s$ para todo s. Note que, como $\lambda_N(0) = 0$ e $\lambda_N(1) = 1$ para todo N, já temos $\pi^N_0 \rightharpoonup \pi_0$ e $\pi^N_1 \rightharpoonup \pi_1$.

Fixe $t \in [0,1]$ tal que $\pi_\cdot$ é contínua em t. Observe que o conjunto dos t possíveis tem medida de Lebesgue total em $[0,1]$ pois uma função càdlàg tem no máximo enumeráveis pontos de descontinuidade. Afirmo que $\pi^N_t \rightharpoonup \pi_t$. Seja d a métrica que induz a convergência fraca em $\mathcal{M}$. Pela desigualdade triangular vale

$$d(\pi_t, \pi^N_t) \leq d(\pi_t, \pi_{\lambda_N^{-1}(t)}) + d(\pi_{\lambda_N^{-1}(t)}, \pi^N_t).$$

Notamos que

$$|t - \lambda_N^{-1}(t)| \leq \sup_{s\in[0,1]} |s - \lambda_N^{-1}(s)| = \sup_{s\in[0,1]} |s - \lambda_N(s)| \overset{N\to\infty}{\to} 0.$$

Com a continuidade de $\pi_\cdot$ em t obtemos $\lim_{N\to\infty} d(\pi_t, \pi_{\lambda_N^{-1}(t)}) = 0$. Analogamente

$$d(\pi_{\lambda_N^{-1}(t)}, \pi^N_t) \leq \sup_{s\in[0,1]} d(\pi_{\lambda_N^{-1}(s)}, \pi^N_s) = \sup_{s\in[0,1]} d(\pi_s, \pi^N_{\lambda_N(s)}) \overset{N\to\infty}{\to} 0.$$

□

A proposição a seguir é utilizada para verificar que várias funções que aparecem ao longo do texto estão bem definidas.

Proposição 1.25. *Sejam $H \in L^1[0,T] \times [0,1]$ e $\pi_\cdot \in D_{\mathcal{M}}[0,T]$. Então a função ϕ : $[0,T] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(s) = \int_0^1 H(s,u)\, d\pi_s(u)$$

é mensurável.

Demonstração. É suficiente mostrar a proposição quando H é a função indicadora de um retângulo $[a,b] \times [c,d]$ em $[0,T] \times [0,1]$. Nesse caso temos

$$\phi(s) = \pi_s[c,d]\mathbf{1}_{[a,b]}(s).$$

Logo, basta mostrar que $s \mapsto \pi_s[c,d]$ é mensurável. Pelo Teorema de Portmanteau a função $\mu \mapsto \mu[c,d]$ definida em $\mathcal{M}$ é semicontínua superiormente, portanto mensurável. Por outro lado a função $s \mapsto \pi_s$ é càdlàg, logo mensurável também. Segue que a composição $s \mapsto \pi_s[c,d]$ é mensurável, como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 1.26. *Fixe uma função $H \in C[0,T] \times [0,1]$. A função $\Phi : D_{\mathcal{M}}[0,T] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Phi_H(\pi_\cdot) = \int_0^T \int_{[0,1]} H(s,u)\, d\pi_s(u)\, ds$$

é contínua.

Demonstração. Tome $\pi^N, \pi \in D_{\mathcal{M}}[0,1]$ medidas que satisfazem $\pi^N \to \pi$. Já demonstramos que $\pi_s^N \to \pi_s$ para quase todo s. Logo, para quase todo s também vale

$$\int_{[0,1]} H(s,u)\, d\pi_s^N(u)\, ds \to \int_{[0,1]} H(s,u)\, d\pi_s(u)\, ds.$$

O resultado segue pelo Teorema da convergência dominada. $\square$

Capítulo 2

Considerações iniciais

Começamos por introduzir notação:

Notação: Para todo $N \geq 1$, defina $I_N = \{0, 1, \ldots, N\}$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ com $N+1$ pontos. Os sítios de I_N serão denotados por x, y e z enquanto que as variáveis macroscópicas (pontos no intervalo $[0,1]$) serão denotadas por u, v e w. O estado microscópico será denotado por $\{0,1\}^{I_N}$; elementos de $\{0,1\}^{I_N}$, chamados de configurações, serão denotados por η e ξ. Desta maneira $\eta(x) \in \{0,1\}$ representa o número de partículas no sítio x para a configuração η. Dado um processo de Markov com medida inicial μ, denotaremos por $\mathbb{P}_\mu$ ou $\mathbb{Q}_\mu$ a medida de probabilidade induzida no espaço das trajetórias pelo processo com distribuição inicial μ e por $\mathbb{E}_\mu$ a esperança com relação à $\mathbb{P}_\mu$ ou $\mathbb{Q}_\mu$.

O processo de exclusão com taxa lenta no bordo pode ser descrito informalmente da seguinte forma: neste modelo, existe no máximo uma partícula por sítio de I_N que pode se mover para uma de suas posições vizinhas, se ela estiver vazia, com taxa 1 para cada lado. Além disso, uma partícula no bordo pode sair do sistema com taxa $(1-\alpha)/N$ ou entrar (caso o local esteja vazio) com taxa α/N no sítio 0. De maneira análoga, o mesmo comportamento ocorre no sítio N, com taxas de saída $(1-\beta)/N$ e de entrada β/N.

Nosso objetivo nesse trabalho é estudar o limite hidrodinâmico desse processo. Para isto, consideramos o processo em $\{0, 1/N, 2/N, ..., 1\}$ e fazemos $N \to \infty$. Mostraremos que a densidade de partículas em $[0,1]$ (que será precisamente definida na seção seguinte) converge (também num sentido preciso definido na seção seguinte) para a (única) solução fraca de uma EDP de evolução.

Formalmente, podemos definir o processo de exclusão unidimensional com bordo de taxa lenta como o processo de Markov com espaço de estados $\{0,1\}^{I_N}$ cujo gerador infinitesimal é dado pelo operador L_N no espaço das funções reais em $\{0,1\}^{I_N}$, que em funções $f : \{0,1\}^{I_N} \to \mathbb{R}$ é dado por [1]

$$(L_N f)(\eta) = (L_{N,0} f)(\eta) + (L_{N,b} f)(\eta)\,,$$

onde

$$(L_{N,0} f)(\eta) = \sum_{x=0}^{N-1} \left[f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta) \right],$$

com

$$(\eta^{x,x+1})(y) = \begin{cases} \eta(x{+}1) & \text{, se } \; y = x \\ \eta(x) & \text{, se } \; y = x+1 \\ \eta(y) & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} (L_{N,b} f)(\eta) = {} & \Big[\frac{\alpha}{N}(1-\eta(0)) + \frac{1-\alpha}{N}\eta(0) \Big] \big[f(\eta^0) - f(\eta) \big] \\ & + \Big[\frac{\beta}{N}(1-\eta(N)) + \frac{1-\beta}{N}\eta(N) \Big] \big[f(\eta^N) - f(\eta) \big]\,, \end{aligned}$$

com

$$(\eta^x)(y) = \begin{cases} 1-\eta(x) & \text{, se } \; y = x \\ \eta(y) & \text{, caso contrário}\,. \end{cases}$$

Observe que o espaço de estados do processo acima descrito é finito. Portanto, podemos usar toda a teoria já desenvolvida para processos de Markov com espaço de estados finitos. Em particular, o operador L_N pode ser descrito por uma matriz, que é dada por:

$$L_N = L_{N,0} + L_{N,b},$$

onde

$$L_{N,0}(\eta,\xi) = \begin{cases} 1 & \text{, se } \xi = \eta^{x,x+1}, 0 \le x \le N-1 \text{ e } \eta(x) \neq \eta(x+1) \\ -\#\{x : \eta(x) \neq \eta(x+1)\} & \text{, se } \xi = \eta \\ 0 & \text{, caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$L_{N,b}(\eta,\xi) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{N}\eta(0) + \frac{\alpha}{N}(1-\eta(0)) & \text{, se } \xi = \eta^0 \\ \frac{1-\beta}{N}\eta(N) + \frac{\beta}{N}(1-\eta(N)) & \text{, se } \xi = \eta^N \\ -\frac{1-\alpha}{N}\eta(0) - \frac{\alpha}{N}(1-\eta(0)) - \frac{1-\beta}{N}\eta(N) - \frac{\beta}{N}(1-\eta(N)) & \text{, se } \xi = \eta \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

[1] O leitor pode pensar intuitivamente que a fórmula do gerador infinitesimal é dada por $L_N f(\eta) = \sum_\xi$ (taxa de salto de η para ξ)$[f(\xi) - f(\eta)]$.

Denote por $\{\eta_t^N := \eta_{tN^2} : t \geq 0\}$ o processo de Markov em $\{0,1\}^{I_N}$ associado ao gerador L_N acelerado por N^2. Mesmo que η_t^N dependa em α e β, não vamos indexar por estes índices para simplificar a notação. Quando estiver claro qual o valor de N que estamos considerando, podemos omiti-lo também, escrevendo somente η_t para o processo η_t^N. Observe que podemos considerar $\eta_\cdot^N$ como uma função aleatória em $D_{\{0,1\}^{I_N}}\mathbb{R}_+$, o espaço das trajetórias càdlàg tomando valores em $\{0,1\}^{I_N}$, onde, para cada tempo t associamos a configuração $\eta_t^N \in \{0,1\}^{I_N}$.

Começamos procurando as medidas invariantes para o processo η_t^N. Na verdade, queremos procurar medidas que fazem com que o processo seja reversível. Para tal, sabemos que precisamos achar medidas μ que satisfazem $\mu(\eta)L(\eta,\xi) = \mu(\xi)L(\xi,\eta)$, quaisquer que sejam $\eta, \xi \in \{0,1\}^{I_N}$, ver [7].

Definição 2.1. A medida de probabilidade em $\{0,1\}^{I_N}$ que satisfaz $\nu_\alpha^N[\eta(x) = 1; \forall\, x \in A] = \alpha^{|A|}$, onde $|A|$ denota a cardinalidade do conjunto A, é chamada de Bernoulli produto com parâmetro α.

Novamente, quando o valor de N for claro, vamos denotar ν_α^N simplesmente por ν_α. Observe que a medida ν_α é equivalente a considerar $\eta \mapsto \eta(x)$ como variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli com parâmetro α. Por isso, vale $\nu_\alpha^N(\eta) = \alpha^{\sum_{x=0}^N \eta(x)}(1-\alpha)^{N+1-\sum_{x=0}^N \eta(x)}$.

Proposição 2.2. *Quando $\alpha = \beta$ a medida de probabilidade ν_α torna o processo $\eta_\cdot$ reversível.*

Demonstração. Como foi observado acima, basta verificar que $\nu_\alpha(\eta)L(\eta,\xi) = \nu_\alpha(\xi)L(\xi,\eta)$ sempre vale. Esta igualdade é clara se $\xi = \eta$. Se ξ for diferente de η η^0, η^N e $\eta^{x,x+1}$ então $L(\eta,\xi) = L(\xi,\eta) = 0$, o que verifica a condição. Os casos restantes podem ser verificados por um cálculo direto. $\square$

Este resultado, em particular, nos permite estabelecer a medida invariante do processo de Markov, no caso em que $\alpha = \beta$, como sendo uma Bernoulli produto de parâmetro α.

2.1 O limite hidrodinâmico

De maneira geral, a uma distribuição inicial de partículas associamos uma sequência de probabilidades μ_N em $\{0,1\}^{I_N}$, que será a distribuição inicial do processo de Markov $\eta_\cdot^N$ para cada N. De modo intuitivo, quando tomarmos o limite em N, as distribuições do limite no tempo t representarão as densidades do processo macroscópico no tempo correspondente. Vamos demonstrar que as densidades limites são soluções fracas de uma EDP. Isso tudo vai ficar mais claro em seguida.

Definição 2.3. Uma sequência de probabilidades $\{\mu_N : N \geq 1\}$ em $\{0,1\}^{I_N}$ é dita associada ao perfil de densidade contínuo $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ se, para todo $\delta > 0$ e toda função contínua $H : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N \left[\eta : \left| \tfrac{1}{N+1} \sum_{x \in I_N} H(\tfrac{x}{N})\, \eta(x) - \int_{[0,1]} H(u)\, \gamma(u) du \right| > \delta \right] = 0. \tag{2.1}$$

Notação: Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $L^2[0,1]$, por ρ_t uma função $\rho(t, \cdot)$ e para um inteiro n, denote por $C^n[0,1]$ o conjunto das funções contínuas definidas em $[0,1]$ com contradomínio $\mathbb{R}$ e com derivadas contínuas até a ordem n. Quando estivermos tomando o produto interno em $L^2[0,1]$ com outra medida μ, vamos denotar este produto por $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$. Para $\mathcal{I}$ um intervalo em $\mathbb{R}$, no que segue, para n e m inteiros, denotamos $C^{n,m}([0,T] \times \mathcal{I})$ o conjunto das funções definidas em $[0,T] \times \mathcal{I}$ que são de classe C^n no tempo e C^m no espaço. Um subíndice na função sempre denotará uma variável, não uma diferenciação. Por exemplo, $H_s(u)$ significa $H(s,u)$. As derivadas de uma função $H : [0,T] \times [0,1]$ serão denotadas por $\partial_s H$ (primeira coordenada) e $\partial_u H$ (segunda coordenada). A derivada segunda na segunda coordenada será denotada por ΔH. [2]

Definição 2.4. Dizemos que uma função $f \in L^2(0,1)$ pertence ao espaço de Sobolev $\mathcal{H}^1(0,1)$ se exite $g \in L^2(0,1)$ tal que, para toda $\phi \in C_c^\infty(0,1)$, vale

$$\int_0^1 f(u) \partial_u \phi(u)\, du = -\int_0^1 g(u) \phi(u)\, du.$$

A função g é chamada derivada fraca de f e é denotada por f'. Conforme [3], $\mathcal{H}^1(0,1)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^1(0,1)} = \langle f, g \rangle_{L^2(0,1)} + \langle f', g' \rangle_{L^2(0,1)}.$$

Definição 2.5. O espaço $L^2(0;T;\mathcal{H}^1(0,1))$ é formado pelas funções mensuráveis $f : [0,T] \to \mathcal{H}^1(0,1)$ tais que

$$\int_0^T ||f_t||^2_{\mathcal{H}^1(0,1)}\, dt < +\infty.$$

[2]Podemos pensar que a primeira coordenada representa o tempo e a segunda coordenada o espaço.

Definição 2.6. Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Uma função limitada $\rho : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca da EDP parabólica com condições de fronteira

$$\begin{cases} \partial_t \rho \, = \, \Delta \rho \\ \rho(0,\cdot) \, = \, \gamma(\cdot) \\ \partial_u \rho_t(0) = -\alpha + \rho_t(0) \, , \; \forall \, t \in [0,T] \\ \partial_u \rho_t(1) = \beta - \rho_t(1) \, , \; \forall \, t \in [0,T] \, , \end{cases} \tag{2.2}$$

se $\rho \in L^2(0,T;\mathcal{H}^1(0,1))$ e para $t \in [0,T]$ e $H \in C^{1,2}([0,T] \times [0,1])$, $\rho(t,\cdot)$ satisfaz a equação integral

$$\begin{aligned} \langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle = & \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds \\ & + \int_0^t \big\{ \rho_s(0) \partial_u H_s(0) - \rho_s(1) \partial_u H_s(1) \big\} ds \\ & + \int_0^t \Big\{ H_s(0) \big(\alpha - \rho_s(0) \big) + H_s(1) \big(\beta - \rho_s(1) \big) \Big\} ds. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na expressão acima, precisamos dar um sentido às integrais envolvendo $\rho_s(0)$ e $\rho_s(1)$, pois as densidades ρ_s só estão definidas a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula. Sabemos que $\rho \in L^2(0;T;\mathcal{H}^1(0,1))$. É possível demonstrar (ver [2], Teorema 8.2) que para cada $s \in [0,T]$ a função ρ_s é igual quase certamente a uma função absolutamente contínua. Dessa forma, as funções $f_n : [0,T] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(s) := \frac{1}{n} \int_0^{1/n} \rho_s(u) \, du$$

convergem pontualmente quando $n \to \infty$. Denotamos por $\rho_s(0)$ o limite $\lim_{n\to\infty} f_n(s)$. Note que as funções f_n são mensuráveis, logo $\rho_s(0)$ é uma função mensurável de s, de modo que a integral envolvendo $\rho_s(0)$ acima está bem definida. Procedemos da mesma forma para dar sentido à integral envolvendo $\rho_s(1)$.

Para mais informações de como se deduz esta noção de solução fraca, o leitor pode consultar o Apêndice A.

Agora podemos enunciar o nosso principal resultado:

Teorema 2.7. *Fixe um perfil inicial contínuo $\gamma : [0,1] \to [0,1]$. Seja $\{\mu_N : N \geq 1\}$ uma sequência de probabilidades em $\{0,1\}^{I_N}$ associada a γ. Suponha que $\alpha = \beta$. Então, para cada $t \in [0,T]$, para cada $\delta > 0$ e para toda $H \in C[0,1]$, vale*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}_{\mu_N} \Big[\eta^N_\cdot : \Big| \tfrac{1}{N+1} \sum_{x \in I_N} H(\tfrac{x}{N}) \, \eta^N_t(x) - \int_{[0,1]} H(u) \, \rho(t,u) du \Big| > \delta \Big] = 0,$$

onde $\rho(t,\cdot)$ é a solução fraca da EDP (2.2).

Observação: Colocamos a hipótese $\alpha = \beta$ porque a nossa demonstração precisa da reversibilidade do processo com respeito a medida invariante Bernoulli produto em um de seus passos (no Capítulo 4). No entanto, outros passos da demonstração funcionam bem sem essa hipótese, motivo pelo qual continuaremos diferenciando α e β sempre que for possível.

Até agora, temos uma sequência de processos de Markov η_t^N, que podemos considerar como funções aleatórias em $D_{\{0,1\}^{I_N}}[0,T]$, para $T > 0$ fixo. Queremos fazer um limite em N para demonstrar o Teorema 2.7. Entretanto, o espaço de estados muda conforme mudamos o valor de N. Para contornar isto, vamos considerar as medidas empíricas associadas ao nosso processo, que definimos agora. Dada uma configuração η, associamos uma medida, chamada de medida empírica associada a η, dada por

$$\pi = \tfrac{1}{N+1} \sum_{x=0}^{N} \eta(x) \delta_{\frac{x}{N}},$$

onde δ_u denota a delta de Dirac no ponto u. Às vezes escreveremos π^N em vez de π para explicitar a dependência em N. Com isso, dado um processo de Markov em $D_{\{0,1\}^{I_N}}[0,T]$, podemos considerar o processo das medidas empíricas $\pi_\cdot^N$ em $D_{\mathcal{M}}[0,T]$, onde $\mathcal{M}$ é o conjunto das medidas positivas em $[0,1]$ com massa total menor ou igual a um, dotado com a topologia da convergência fraca. Observe que a aplicação que leva um processo de Markov em $D_{\{0,1\}^{I_N}}[0,T]$ no processo das medidas empíricas em $D_{\mathcal{M}}[0,T]$ é claramente injetiva, disto segue que $\pi_\cdot^N$ também pode ser visto como um processo de Markov.

Para uma função integrável $H : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\langle \pi_t^N, H \rangle$ indica a integral de H com respeito a π_t^N:

$$\langle \pi_t^N, H \rangle = \tfrac{1}{N+1} \sum_{x \in I_N} H(\tfrac{x}{N}) \eta_t(x).$$

Embora estamos usando a mesma notação para o produto interno em $L^2[0,1]$, elas não significam o mesmo. Além disso, quando π_t tem densidade ρ, isto é, $\pi(t, du) = \rho(t,u)du$, podemos escrever $\langle \rho_t, H \rangle$ para denotar $\langle \pi_t, H \rangle$.

Fixe $T > 0$. Dada uma medida de probabilidade μ_N em $\{0,1\}^{I_N}$, considere o processo de Markov $\pi_\cdot^N$ em $D_{\mathcal{M}}[0,T]$ associado ao processo $\eta_\cdot^N$ em $D_{\{0,1\}^{I_N}}[0,T]$ que tem como distribuição inicial μ_N. Denote por $\mathbb{Q}_N$ a medida de probabilidade em $D_{\mathcal{M}}[0,T]$ induzida por π_t^N. Observe que $\mathbb{Q}_N$ é o pushforward da medida $\mathbb{P}_{\mu_N}$, definida em $D_{\{0,1\}^{I_N}}[0,T]$, pela aplicação que associa a uma configuração a sua medida empírica.

Fixe um perfil inicial contínuo $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ e considere uma sequência $\{\mu_N : N \geq 1\}$ de medidas em $\{0,1\}^{I_N}$ associadas a γ. Seja $\mathbb{Q}_*$ a medida de probabilidade em

$D_{\mathcal{M}}[0,T]$ concentrada no caminho determinístico $\pi(t,du) = \rho(t,u)du$, onde $\rho(t,\cdot)$ é uma solução fraca de (2.2).

Proposição 2.8. *Quando $N \uparrow +\infty$, a sequência de probabilidades $\{\mathbb{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge fracamente a $\mathbb{Q}_*$.*

Observe que a proposição anterior implica o Teorema 2.7, como explicamos a seguir. Defina a função

$$\Phi_t(\pi_\cdot) = |\langle \pi_t, H\rangle - \int_0^1 H(u)\rho_t(u)\,du|,$$

para uma $H \in C^3[0,1]$ fixa.

Observe que o conjunto dos pontos de descontinuidade da função Φ_t tem medida $\mathbb{Q}_*$ nula, pois a medida $\mathbb{Q}_*$ está concentrada numa trajetória em que cada medida é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, com densidades satisfazendo a EDP (2.2) no sentido fraco. Com isto, concluímos que $\mathbb{Q}_N\Phi_t^{-1} \rightharpoonup \mathbb{Q}_*\Phi_t^{-1}$. O teorema segue então pelo Teorema de Portmanteau, uma vez que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{Q}_N[\pi_\cdot : \Phi_t(\pi_\cdot) \geq \delta] = \mathbb{Q}_*[\pi_\cdot : \Phi_t(\pi_\cdot) \geq \delta] = 0$$

A demonstração da Proposição 2.8 é dividida em três partes principais. Aqui vamos demonstrar somente a primeira e parte da segunda. No próximo capítulo nós mostramos que $\{\mathbb{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta. No capítulo 4 os pontos limites são caracterizados como probabilidades concentradas em medidas absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue, com densidade $\rho_t(u)$ no espaço $L^2(0;T;\mathcal{H}^1(0,1))$. O final do segundo passo consiste em demonstrar que as densidades são soluções fracas da EDP (2.2). Aqui vamos somente esboçar a demonstração. O leitor interessado pode encontrar esta demonstração em detalhe na dissertação de mestrado de Otávio de Macedo Menezes. O último passo na demonstração do resultado é demonstrar a unicidade de soluções fracas da EDP (2.2). Não faremos isto aqui. Para o leitor interessado, apontamos o artigo [4], que utiliza a mesma técnica para demonstração de unicidade de soluções que pode ser aplicada aqui.

Capítulo 3

Rigidez do processo

Aqui demonstramos que a sequência de probabilidades $\{\mathbb{Q}_N\}$, definidas no capítulo anterior, é rígida. Esta parte da demonstração é de extrema importância. A partir daqui, se concluirmos que todos os pontos limites são iguais, teremos a convergência de toda a sequência. As ferramentas matemáticas aqui usadas são importantes por si só. A teoria de martingais, por exemplo, é uma fonte inesgotável de problemas interessantes. A fórmula de Dynkin desempenha um papel central nesta demonstração, e pode ser encontrada no Teorema D.5 do apêndice.

Proposição 3.1. *A sequência de medidas $\{\mathbb{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ é rígida na topologia de Skorohod de $D_{\mathcal{M}}[0,T]$.*

Demonstração. Para provarmos a rigidez de $\{\pi_t^N : 0 \leq t \leq T\}_{N\in\mathbb{N}}$ em $D_{\mathcal{M}}[0,T]$, é suficiente provar que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{P}_{\mu_N}\left[\sup_{|t-s|\leq\delta}|\langle\pi_t^N,H\rangle-\langle\pi_s^N,H\rangle|>\varepsilon\right]=0\,,\ \text{ para todo } \varepsilon>0 \tag{3.1}$$

vale para toda função H em um subconjunto denso de $C[0,1]$. Usaremos $H\in C^2[0,1]$.

Pela fórmula de Dynkin (ver o Teorema D.5), sabemos que

$$M_t^N(H) := \langle\pi_t^N,H\rangle-\langle\pi_0^N,H\rangle-\int_0^t N^2 L_N\langle\pi_s^N,H\rangle\,ds \tag{3.2}$$

é um martingal com respeito à filtração natural $\mathcal{F}_t := \sigma(\eta_s : s\leq t)$. Pela expressão anterior, (3.1) segue de

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{P}_{\mu_N}\left[\sup_{|t-s|\leq\delta}\left|M_t^N(H)-M_s^N(H)\right|>\varepsilon\right]=0\,,\ \text{ para todo } \varepsilon>0\,, \tag{3.3}$$

e

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{P}_{\mu_N}\left[\sup_{0\leq t-s\leq\delta}\left|\int_s^t N^2 L_N\langle\pi_r^N, H\rangle\,dr\right|>\varepsilon\right]=0\,,\ \text{ para todo }\varepsilon>0\,. \tag{3.4}$$

Mostraremos os seguintes resultados, mais fortes (eles implicam (3.3) e (3.4) pela desigualdade de Markov):

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_N}\left[\sup_{|t-s|\leq\delta}\left|M_t^N(H)-M_s^N(H)\right|\right]=0\,, \tag{3.5}$$

e

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_N}\left[\sup_{0\leq t-s\leq\delta}\left|\int_s^t N^2 L_N\langle\pi_r^N, H\rangle\,dr\right|\right]=0\,. \tag{3.6}$$

Para provar (3.5), usaremos a variação quadrática de $M_t^N(H)$, que denotaremos por $\langle M_t^N(H)\rangle$. Calculamos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_N}\left[\sup_{|t-s|\leq\delta}\left|M_t^N(H)-M_s^N(H)\right|\right] &\leq 2\,\mathbb{E}_{\mu_N}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|M_t^N(H)|\right]\\ &\leq 2\,\mathbb{E}_{\mu_N}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|M_t^N(H)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leq 4\mathbb{E}_{\mu_N}[|M_T^N(H)|^2]^{\frac{1}{2}}\\ &= 4\,\mathbb{E}_{\mu_N}\left[\langle M_T^N(H)\rangle\right]^{\frac{1}{2}}\,,\end{aligned}$$

onde a terceira desigualdade é uma aplicação da Desigualdade de Doob e a quarta usa que $\{M_t^N(H)-\langle M_t^N(H)\rangle\}_{0\leq t\leq T}$ é um martingal nulo no tempo $t=0$.

Mostraremos que a variação quadrática $\langle M_t^N(H)\rangle$ converge a zero uniformemente em $t\in[0,T]$, quando $N\to\infty$. Temos

$$\langle M_t^N(H)\rangle=\int_0^t N^2[L_N\langle\pi_s^N, H\rangle^2-2\langle\pi_s^N, H\rangle L_N\langle\pi_s^N, H\rangle]\,ds,$$

pelo Teorema D.5 do apêndice. Para simplificar a notação, denotaremos $F(\eta):=\langle\pi^N, H\rangle=$

$\frac{1}{N+1}\sum_{x\in I_N}\eta(x)H(\frac{x}{N})$. Agora fazemos algumas contas:

$$
\begin{aligned}
N^2\big[L_{N,0}\langle\pi_s^N,H\rangle^2 - 2\langle\pi_s^N,H\rangle L_{N,0}\langle\pi_s^N,H\rangle\big] \\
&= N^2\left[\sum_{x=0}^{N-1}[F^2(\eta_s^{x,x+1})-F^2(\eta_s)] - \sum_{x=0}^{N-1}2F(\eta_s)[F(\eta_s^{x,x+1})-F(\eta_s)]\right] \\
&= N^2\sum_{x=0}^{N-1}[F(\eta_s^{x,x+1})-F(\eta_s)]^2 \\
&= N^2\sum_{x=0}^{N-1}\tfrac{1}{(N+1)^2}\big[\eta_s(x+1)H(\tfrac{x}{N})+\eta_s(x)H(\tfrac{x+1}{N}) \\
&\qquad\qquad -\eta_s(x)H(\tfrac{x}{N})-\eta_s(x+1)H(\tfrac{x+1}{N})\big]^2 \\
&= N^2\sum_{x=0}^{N-1}\tfrac{1}{(N+1)^2}\big[(\eta_s(x)-\eta_s(x+1))(H(\tfrac{x+1}{N})-H(\tfrac{x}{N}))\big]^2 \\
&= \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{x=0}^{N-1}(\eta_s(x)-\eta_s(x+1))^2\left(\frac{H(\frac{x+1}{N})-H(\frac{x}{N})}{N^{-1}}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Usando o teorema do valor médio, vemos que o termo envolvendo H é limitado por $\|(H')^2\|_\infty$. A última expressão é então limitada por $\frac{N}{(N+1)^2}\|(H')^2\|_\infty$, donde concluímos que

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^t N^2[L_{N,0}\langle\pi_s^N,H\rangle^2 - 2\langle\pi_s^N,H\rangle L_{N,0}\langle\pi_s^N,H\rangle]\,ds = 0$$

uniformemente em $t\in[0,T]$.

O próximo passo consiste em demonstrar que

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^t N^2[L_{N,b}\langle\pi_s^N,H\rangle^2 - 2\langle\pi_s^N,H\rangle L_{N,b}\langle\pi_s^N,H\rangle]\,ds = 0 \tag{3.7}$$

uniformemente em $t\in[0,T]$.

Para isso, calculamos

$$
\begin{aligned}
&N^2[L_{N,b}F(\eta_s)^2 - 2F(\eta_s)L_{N,b}F(\eta_s)]\\
&= N^2\left\{\left(\tfrac{1-\alpha}{N}\eta_s(0) + \tfrac{\alpha}{N}(1-\eta_s(0))\right)\left[F(\eta_s^0)^2 - F(\eta_s)^2 - 2F(\eta_s)(F(\eta_s^0) - F(\eta_s))\right]\right\}\\
&+ N^2\left\{\left(\frac{1-\beta}{N}\eta_s(N) + \tfrac{\beta}{N}(1-\eta_s(N))\right)\left[F(\eta_s^N)^2 - F(\eta_s)^2 - 2F(\eta_s)(F(\eta_s^N) - F(\eta_s))\right]\right\}\\
&= N\left\{[(1-\alpha)\eta_s(0) + \alpha(1-\eta_s(0))]\left[F(\eta_s^0) - F(\eta_s)\right]^2\right\}\\
&+ N\left\{[(1-\beta)\eta_s(N) + \beta(1-\eta_s(N))]\left[F(\eta_s^0) - F(\eta_s)\right]^2\right\}\\
&= \tfrac{N}{(N+1)^2}[(1-\alpha)\eta_s(0) + \alpha(1-\eta_s(0))][1-2\eta_s(0)]^2 H(0)^2\\
&+ \tfrac{N}{(N+1)^2}[(1-\beta)\eta_s(N) + \beta(1-\eta_s(N))][1-2\eta_s(N)]^2 H(N)^2\\
&= \tfrac{N}{(N+1)^2}[(1-\alpha)\eta_s(0) + \alpha(1-\eta_s(0))]H(0)^2\\
&+ \tfrac{N}{(N+1)^2}[(1-\beta)\eta_s(N) + \beta(1-\eta_s(N))]H(N)^2.
\end{aligned}
$$

O valor absoluto da última expressão é menor ou igual a $2\|H^2\|_\infty N/(N+1)^2$, donde segue (3.7). Isso conclui a demonstração de (3.5).

Nota. Em particular, a quantidade $\mathbb{E}_{\mu_N}\left[\sup_{0\le t\le T}|M_t^N(H)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$ converge para zero quando $N \to +\infty$. A desigualdade de Markov implica que, para cada $\delta > 0$ vale

$$
\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu_N}\left[\sup_{0\le t\le T}|M_t^N(H)| > \delta\right] = 0\,, \tag{3.8}
$$

o que, junto com (3.5), implica a rigidez da sequência de martingais $\{M_t^N(H); t \in [0,T]\}_{N\in\mathbb{N}}$. Isto nos será útil mais a frente, quando caracterizaremos os pontos limites de $\{\mathbb{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$.

Agora, precisamos examinar o termo integral em (3.2). Gostaríamos de provar que existe uma constante $C := C(H) > 0$ tal que $|N^2 L_N\langle\pi_r^N, H\rangle| \le C$, o que implica

$$
\left|\int_s^t N^2 L_N\langle\pi_r^N, H\rangle\, dr\right| \le C|t-s|\,,
$$

donde (3.6) segue facilmente.

Mostraremos primeiro que $N^2 L_{N,0}\langle \pi_s^N, H\rangle$ é limitado.

$$
\begin{aligned}
&N^2 L_{N,0}\langle \pi_s^N, H\rangle \\
&= \tfrac{N^2}{N+1}\sum_{x=0}^{N-1}[\eta_s(x+1)-\eta_s(x)]\left[H\left(\tfrac{x}{N}\right)-H\left(\tfrac{x+1}{N}\right)\right] \\
&= \tfrac{N^2}{N+1}\sum_{x=0}^{N-1}\eta_s(x)\left[H\left(\tfrac{x+1}{N}\right)-H\left(\tfrac{x}{N}\right)\right] \\
&+ \tfrac{N^2}{N+1}\sum_{x=1}^{N}\eta_s(x)\left[H\left(\tfrac{x-1}{N}\right)-H\left(\tfrac{x}{N}\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{N+1}\sum_{x=1}^{N-1}\eta_s(x)N^2\left\{\left[H\left(\tfrac{x+1}{N}\right)-H\left(\tfrac{x}{N}\right)\right]-\left[H\left(\tfrac{x}{N}\right)-H\left(\tfrac{x-1}{N}\right)\right]\right\} \\
&+ \tfrac{N}{N+1}\eta_s(N)N\left(H\left(\tfrac{N-1}{N}\right)-H(1)\right)+\tfrac{N}{N+1}\eta_s(0)N\left(H\left(\tfrac{1}{N}\right)-H(0)\right) \\
&= \tfrac{1}{N+1}\sum_{x=1}^{N-1}\eta_s(x)\Delta_N H\left(\tfrac{x}{N}\right)-\tfrac{N}{N+1}\eta_s(N)\nabla_N H(1)+\tfrac{N}{N+1}\eta_s(1)\nabla_N H(0),
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

onde

$$
\Delta_N H(u) = N^2\left[H\left(u+\tfrac{1}{N}\right)+H\left(u-\tfrac{1}{N}\right)-2H(u)\right],
$$
$$
\nabla_N H(0) = N\left[H\left(\tfrac{1}{N}\right)-H(0)\right],
$$

e

$$
\nabla_N H(1) = -N\left[H\left(1-\tfrac{1}{N}\right)-H(1)\right].
$$

Usando o teorema do valor médio, vemos que o valor absoluto da expressão anterior é limitado por $2\|H''\|_\infty + 2\|H'\|_\infty$. Resta apenas mostrar que $N^2 L_{N,b}\langle \pi_s^N, H\rangle$ é limitado por $2\|H\|_\infty$, como segue:

$$
\begin{aligned}
&N^2 L_{N,b}\langle \pi_s^N, H\rangle \\
&= N^2\left[\tfrac{\alpha}{N}(1-\eta_s(0))+\tfrac{1-\alpha}{N}\eta_s(0)\right]\tfrac{1}{N+1}[(1-\eta_s(0))-\eta_s(0)]H(0) \\
&+ N^2\left[\tfrac{\beta}{N}(1-\eta_s(N))+\tfrac{1-\beta}{N}\eta_s(N)\right]\tfrac{1}{N+1}[(1-\eta_s(N))-\eta_s(N)]H(1) \\
&= \tfrac{N^2}{N(N+1)}H(0)\left\{\alpha[(1-\eta_s(0))^2-\eta_s(0)(1-\eta_s(0))]\right. \\
&\left.+(1-\alpha)[\eta_s(0)(1-\eta_s(0))-\eta_s(0)^2]\right\}+\tfrac{N^2}{N(N+1)}H(1) \\
&\times\left\{\beta[(1-\eta_s(N))^2-\eta_s(N)(1-\eta_s(N))]+(1-\beta)[\eta_s(N)(1-\eta_s(N))-\eta_s(N)^2]\right\} \\
&= \tfrac{N^2}{N(N+1)}[\alpha(1-\eta_s(0))^2-(1-\alpha)\eta_s(0)^2]H(0) \\
&+ \tfrac{N^2}{N(N+1)}[\beta(1-\eta_s(N))^2-(1-\beta)\eta_s(N)^2]H(1) \\
&= \tfrac{N^2}{N(N+1)}(\alpha-\eta_s(0))H(0)+\tfrac{N^2}{N(N+1)}(\beta-\eta_s(N))H(1).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

□

Capítulo 4

Caracterização dos pontos limites

No capítulo anterior demonstramos que a sequência de probabilidades $\{\mathbb{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ é rígida. Tomamos agora uma subsequência fracamente convergente de $\{\mathbb{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, sem perda de generalidade, supomos que $\{\mathbb{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge para uma probabilidade limite $\mathbb{Q}_*$. Aqui, vamos verificar que a medida de probabilidade $\mathbb{Q}_*$ está concentrada em trajetórias $\pi_\cdot \in D_{\mathcal{M}}[0,T]$ que são absolutamente contínuas em relação a medida de Lebesgue e têm densidades $\rho \in L^2(0;T;\mathcal{H}^1(0,1))$. Também vamos esboçar uma demonstração da afirmação que diz que as densidades são soluções fracas da EDP (2.2). Vamos denotar por $\mathbb{E}_*$ a esperança com respeito à probabilidade $\mathbb{Q}_*$.

A caracterização dos pontos limites é dividida em três passos. O primeiro passo consiste em demonstrar que a medida de probabilidade $\mathbb{Q}_*$ é concentrada em trajetórias absolutamente contínuas com relação a medida de Lebesque, o segundo passo consiste em demonstrar que as densidades pertencem ao conjunto $L^2(0;T;\mathcal{H}^1(0,1))$. O último passo consiste em verificar que as densidades são soluções fracas da EDP (2.2).

4.1 Medidas absolutamente contínuas

Aqui vamos demonstrar a primeira parte da nossa caracterização. Estamos assumindo que $\mathbb{Q}_N \rightharpoonup \mathbb{Q}_*$, o que implica que $\pi_\cdot^N$ converge em distribuição para $\pi_\cdot$, quando $N \to +\infty$.

Nota. Observe que as variáveis aleatórias $\{\pi_\cdot^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ não tem contradomínio $\mathbb{R}$. Na verdade, estas funções são na realidade medidas aleatórias. Como o leitor pode conferir na Subseção 1.2.4, o espaço em que nossas medidas aleatórias tomam valores é um espaço métrico completo e separável, o que nos permite considerar convergência fraca de probabilidades sobre este espaço, conforme [1]. Além disso, o Teorema de Portmanteau ainda vale nesse cenário, bem como grande parte dos seus corolários.

Proposição 4.1. *Qualquer ponto de acumulação $\mathbb{Q}_*$ tem suporte sobre caminhos tomando valores em medidas absolutamente continuas. Mais precisamente, existe nos borelianos de $D_{\mathcal{M}}[0,T]$ um conjunto C de medida $\mathbb{Q}_*$ total em que todo elemento π de C é tal que π_t é uma medida absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue, com densidade (derivada de Radon-Nikodym) limitada por 1.*

Note que após caracterizarmos os suportes dos pontos limites como as trajetórias com densidades que satisfazem fracamente a EDP (2.2), e assumindo que a solução fraca da EDP (2.2) é única (não faremos isso aqui), teremos como consequência que C é um conjunto unitário. Além de provarmos a convergência da sequência $\{\mathbb{Q}_N\}$, o limite será uma delta de Dirac no caminho definido por medidas com densidades que satisfazem a EDP (2.2) fracamente. Por enquanto, tudo que sabemos é caracterizar os pontos de C da maneira enunciada na proposição acima.

Começamos com um lema que nos auxiliará na demonstração do resultado.

Lema 4.2. *Se μ é uma medida que satisfaz $|\langle \mu, G\rangle| \leq \langle \lambda, |G|\rangle$, para toda função $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, então $\mu \ll \lambda$, isto é, μ é absolutamente contínua com respeito a λ.*

Demonstração. Dado um aberto $A \subset [0,1]$ qualquer tomando funções que valem 1 em A e que se anulam em todo ponto a uma distância maior que δ de A, obtemos $\mu(A) \leq \lambda(A)$. Dado com conjunto E de λ-medida zero, podemos encontrar um aberto A com $\lambda(A) < \varepsilon$ e $E \subset A$, donde $\mu(E) \leq \mu(A) \leq \lambda(A) < \varepsilon$. Consequentemente, $\mu(E) = 0$ e $\mu \ll \lambda$. $\square$

Para demonstrarmos o resultado, vamos verificar que $\mathbb{Q}^*[\pi_. : \sup_{0\leq t\leq T} |\langle \pi_t, G\rangle| \leq \int |G|\, d\lambda, \forall G : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e limitada $] = 1$. Para tal, observe primeiramente que basta demonstrarmos esse resultado para um conjunto denso de funções $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Agora, como o conjunto de funções é enumerável, basta verificar que a igualdade vale para cada uma delas.

Vamos demonstrar então que $\mathbb{Q}^*[\pi_. : \sup_{0\leq t\leq T} |\langle \pi_t, G\rangle| \leq \int |G| d\lambda] = 1$, para cada G contínua e limitada.

Pelos Lemas B.1 e C.1, e pelo fato que $\pi^N \to \pi$ em distribuição, concluímos que $\sup_{0\leq t\leq T} |\langle \pi_t^N, G\rangle| \to \sup_{0\leq t\leq T} |\langle \pi_t, G\rangle|$ em distribuição. Além disso, uma vez que $|\eta(x)| \leq 1$, $|\langle \pi_t^N, G\rangle| \leq \frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^{N} |G(\frac{x}{N})|$. Pelo fato da função G ser contínua e limitada a soma de Riemann $\frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^{N} |G(\frac{x}{N})| \to \int_0^1 |G(x)|\, dx$. Disto concluímos que $\mathbb{Q}_N[\pi_.^N : |\langle \pi_t^N, G\rangle| \leq \frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^{N} |G(\frac{x}{N})|] = 1$ e então por passagem ao limite, obtemos o resultado, pelo Lema B.2.

Denotaremos por ρ_t a densidade da medida π_t. Observe que as medidas π_t não são necessariamente medidas de probabilidade. No entanto, elas são finitas, o que implica que $\rho_t \in L^1[0,1]$. Além disso, as densidades ρ_t são limitadas, como demonstramos a seguir.

Começamos considerando ι_ε como uma sequência de aproximações da identidade, ver [2]. A sequência

$$f_\varepsilon(v) = \int_0^1 \iota_\varepsilon(v-u)\rho_s(u)\,du$$

converge em L^1 para a função ρ_s, quando $\varepsilon \downarrow 0$. Observe que $|f_\varepsilon(v)| = |\langle \iota_\varepsilon(v-\cdot, \rho_s\rangle| \leq \int_0^1 |\iota_\varepsilon(v-u)|\,du = 1$, pelo que demonstramos acima. Tomando uma subsequência de f_ε que converge quase certamente para ρ_s, obtemos $|\rho_s(u)| \leq 1$.

4.2 O espaço $L^2(0;T;\mathcal{H}^1(0,1))$

O espaço de Sobolev $\mathcal{H}^1(0,1)$ é um espaço de Hilbert separável, veja [3]. O seu produto interno é dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(u)g(u)\,du + \int_0^1 f'(u)g'(u)\,du,$$

onde $f, g \in L^2(0,1)$ e f' e g' denotam suas derivadas fracas, também em $L^2(0,1)$. Note que, por $\mathcal{H}^1(0,1)$ ser espaço de Hilbert, todo funcional linear $F \in \mathcal{H}^1(0,1)^*$ é o produto interno por alguma função de $\mathcal{H}^1(0,1)$, ou seja, existe $f \in \mathcal{H}^1(0,1)$ tal que $F(g) = \langle f, g\rangle$, para todo $g \in \mathcal{H}^1(0,1)$.

Nesta seção vamos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 4.3. *Seja $\mathbb{Q}_*$ um ponto de acumulação da sequência $\{\mathbb{Q}_N\}$. O suporte de $\mathbb{Q}_*$ é composto de trajetórias $\pi \in D_{\mathcal{M}}[0,T]$ que satisfazem:*

1. *π_t é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue com densidade ρ_t em $\mathcal{H}^1(0,1)$;*

2. *A função $\rho : [0,T] \to \mathcal{H}^1(0,1)$ está em $L^2(0;T;\mathcal{H}^1(0,1))$, isto é, as densidades $\rho_t \in \mathcal{H}^1(0,1)$ são uma função mensurável $\rho : [0,T] \to \mathcal{H}^1(0,1)$ e satisfazem*

$$\int_0^1 ||\rho_t||^2_{\mathcal{H}^1(0,1)}\,dt < +\infty.$$

Para tal, vamos usar o seguinte lema:

Lema 4.4. *Suponha que* $\pi_. \in D_{\mathcal{M}}[0,T]$ *é tal que, para todo* $t \in [0,T]$, π_t *é absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue, com densidade* $\rho_t \in L^1[0,1]$ *limitada por* 1 *e que existe uma função* $\xi \in L^2([0,T]\times(0,1))$ *que satisfaz*

$$\int_0^T \int_0^1 \partial_u H(s,u)\rho(s,u)\,du\,ds = -\int_0^T \int_0^1 H(s,u)\xi(s,u)\,du\,ds,$$

para toda função $H \in C_c^{0,1}([0,T]\times(0,1))$*. Então* $\rho \in L^2(0,T;\mathcal{H}^1(0,1))$.

Demonstração. Começamos mostrando que $t \mapsto \rho_t$ está bem definida, isto é, mostrando que $\rho_t \in \mathcal{H}^1(0,1)$ para cada t fixo. Para tal, dada $H \in C_c^1(0,1)$ e uma sequência de aproximações da identidade ι_ε, aplicamos a hipótese nas funções $H^\varepsilon(s,u) = \iota_\varepsilon(t-s)H(u)$ para obter

$$\int_0^T \int_0^1 \iota_\varepsilon(t-s)\partial_u H(u)\rho(s,u)\,du\,ds = -\int_0^T \int_0^1 \iota_\varepsilon(t-s)H(u)\xi(s,u)\,du\,ds.$$

Observe que o lado esquerdo da igualdade acima converge para $\int_0^1 \partial_u H(u)\rho(t,u)du$ em $L^1[0,T]$ (a função $t \mapsto \int_0^1 \partial_u H(u)\rho(t,u)du$ está em $L^1[0,T]$ pela Proposição 1.25) e que o lado direito converge, também em $L^1[0,T]$, para $-\int_0^1 H(u)\xi(t,u)du$. Como o limite em $L^1[0,T]$ é único, estas funções são iguais quase certamente para cada H fixa. Podemos estender esta igualdade para toda função H em um conjunto enumerável, ainda fazendo com que ela valha quase certamente. Como o conjunto $C_c^1(0,1)$ é separável na norma C^1, estendemos a nossa igualdade para todo o conjunto. Isto termina a primeira parte da demonstração, ou seja, a função $t \mapsto \rho_t$ está bem definida.

Agora verificamos que a função $t \mapsto \rho_t \in \mathcal{H}^1(0,1)$ é mensurável. Para tal, usando o Lema C.2, basta verificarmos que a composição de ρ_t com cada funcional linear f em $\mathcal{H}^1(0,1)^*$ é mensurável. Como este último espaço é um espaço de Hilbert, a composição fica

$$t \mapsto f(\rho_t) = \int_0^1 \rho_t(u)g(u)\,du + \int_0^1 \xi_t(u)g'(u)\,du,$$

onde $g \in \mathcal{H}^1(0,1)$ e g' indica a sua derivada fraca. A primeira parcela é mensurável pelo Lema 1.25. A segunda parcela é mensurável pelo Teorema de Fubini.

Agora, basta verificarmos que a função $t \mapsto \rho_t$ está de fato em $L^2(0,T;\mathcal{H}^1(0,1))$. Para isto, temos que verificar que

$$\int_0^T ||\rho_t||^2_{\mathcal{H}^1(0,1)}\,dt = \int_0^T \Big(\int_0^1 \rho(s,u)^2 du + \int_0^1 \xi(s,u)^2\,du\Big)\,ds < +\infty.$$

Para tal, observe inicialmente, que $||\rho_t||^2_{L^2(0,1)} = ||\rho_t||^2_{\mathcal{H}^1(0,1)} - ||\xi_t||^2_{L^2(0,1)}$ é mensurável em t, pois $t \mapsto \rho_t \in \mathcal{H}^1(0,1)$ é mensurável, a função norma é contínua e, pelo Teorema de Fubini, $t \mapsto ||\xi_t||_{L^2(0,1)}$ é mensurável. Como a densidade ρ é limitada por 1, segue o lema. □

A partir deste lema, para concluirmos que $\rho_{\cdot} \in L^2(0;T;\mathcal{H}^1(0,1))$, basta vermos que existe $\xi \in L^2\left([0,T]\times(0,1)\right)$ que satisfaz

$$\int_0^T\int_0^1 \partial_u H(s,u)\rho(s,u)\,du\,ds = -\int_0^T\int_0^1 H(s,u)\xi(s,u)\,du\,ds, \tag{4.1}$$

para toda função $H \in C_c^{0,1}\left([0,T]\times(0,1)\right)$.

Vamos demonstrar isto de maneira indireta. Vamos definir um funcional linear l_ρ em $C_c^{0,1}\left([0,T]\times(0,1)\right)$, dado por

$$l_\rho(H) = \int_0^T\int_0^1 \partial_u H(s,u)\rho(s,u)\,du\,ds = \int_0^T\int_0^1 \partial_u H(s,u)\,d\pi_s(u)\,ds. \tag{4.2}$$

Com um segundo passo, vamos verificar que podemos estender continuamente este funcional para o conjunto $L^2\left([0,T]\times(0,1)\right)$. Quando concluirmos que l_ρ é quase certamente contínuo com respeito à probabilidade $\mathbb{Q}_*$, pelo Teorema de representação de Riesz, poderemos encontrar $\xi \in L^2\left([0,T]\times(0,1)\right)$ satisfazendo (4.1). Para tal, vamos usar o Lema C.3, demonstrando que $l_\rho(H) - c||H||_2^2 \leq K$, para $H \in C_c^{0,2}\left([0,T]\times(0,1)\right)$ e c uma constante adequada que será determinada mais tarde, com $\mathbb{Q}_*$-probabilidade 1. Na verdade, vamos verificar que um resultado um pouco mais forte do que este vale:

Proposição 4.5. *Se os funcionais l_ρ são definidos por (4.2), então existe uma constante K_0 tal que*

$$\mathbb{E}_*[\sup_H\{l_\rho(H) - c||H||^2_{L^2[0,T]\times(0,1)}\}] \leq K_0 < \infty, \tag{4.3}$$

com $c = 2$, onde o supremo acima é tomado no conjunto $L^2[0,T]\times(0,1)$.

4.2.1 Demonstração da Proposição 4.5

Aqui isolamos a demonstração da Proposição 4.5, por sua importância. A técnica aqui utilizada é a mesma para a demonstração do Lema de Substituição (ver a dissertação de mestrado de Otávio de Macedo Menezes).

Vamos denotar por $||H||_2$ norma de uma função $H \in L^2[0,T] \times (0,1)$.

Por densidade (ver Lema C.4), basta considerarmos $\sup_H\{l_\rho(H) - c||H||_2^2\}$ para H pertencendo a um subconjunto enumerável $\{H^m\}$ denso de $C_c^{0,2}([0,T] \times (0,1))$, ao invés de tomá-lo em todo o conjunto. Além disso, como $\max_{k\leq m}\{l_\rho(H^k) - c||H^k||_2^2\} \uparrow \sup_H\{l_\rho(H) - c||H||_2^2\}$, por convergência monótona, $\mathbb{E}_*[\max_{k\leq m}\{l_\rho(H^k) - c||H^k||_2^2\}] \to \mathbb{E}_*[\sup_H\{l_\rho(H) - c||H||_2^2\}]$, quando $m \to +\infty$. Assim, é suficiente verificarmos que $\mathbb{E}_*[\max_{k\leq m}\{l_\rho(H^k) - c||H^k||_2^2\}] \leq K_0$, para cada m fixo.

Lema 4.6. *Dada um conjunto finito de funções contínuas $F_n : [0,T]\times(0,1) \to \mathbb{R}$, $n \leq k$, a função $\Phi : D_{\mathcal{M}}[0,T] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Phi(\pi_\cdot) = \max_{n\leq m}\left\{\int_0^T \int_0^1 F_n(s,t)\, d\pi_s(u)\, ds - c||F_n||_2^2\right\}$$

é contínua na topologia de Skorohod.

A demonstração deste fato segue da Proposição 1.26.

A partir disto, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_*[\max_{k\leq m}\{l_\rho(H^k) - c||H^k||_2^2\}] &= \mathbb{E}_*[\Phi] = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\mu_N}[\Phi] \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\mu_N}\left[\max_{k\leq m}\left\{\int_0^T \int_0^1 \partial_u H^k(s,u)\, d\pi_s^N(u)\, ds - c||H^k||_2^2\right\}\right] \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\mu_N}\left[\max_{k\leq m}\left\{\tfrac{1}{N+1}\int_0^T \sum_{x=0}^N \partial_u H_s^k\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta_s(x)\, ds - c||H^k||_2^2\right\}\right].
\end{aligned}$$

A partir de agora, vamos trabalhar somente com a última expressão acima. Como μ_N é a medida inicial do processo de Markov $\eta_\cdot$, vale a relação

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mu_N}\left[\max_{k\leq m}\left\{\tfrac{1}{N+1}\int_0^T \sum_{x=0}^N \partial_u H_s^k\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta_s(x)\, ds - c||H^k||_2^2\right\}\right] \\
&\qquad = \int \mathbb{E}_\eta\left[\max_{k\leq m}\left\{\tfrac{1}{N+1}\int_0^T \sum_{x=0}^N \partial_u H_s^k\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta_s(x)\, ds - c||H^k||_2^2\right\}\right] d\mu_N(\eta).
\end{aligned}$$

Acima, quando escrevemos $\mathbb{E}_\eta$, estamos nos referindo à esperança do processo quando a distribuição inicial for a delta de Dirac na configuração η. Agora usamos a desigualdade da entropia D.1 para obter que a expressão acima é dominada por

$$\frac{H(\mu_N|\nu_\alpha)}{N}+\frac{1}{N}\log\int\exp\mathbb{E}_\eta\left[\max_{k\le m}\left\{\tfrac{N}{N+1}\int_0^T\sum_{x=0}^N\partial_u H_s^k\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta_s(x)\,ds-cN||H^k||_2^2\right\}\right]\,d\nu_\alpha(\eta),$$

onde ν_α é a medida invariante Bernoulli produto de parâmetro α.

Agora, pelo Lema D.1, temos que $H(\mu_N|\nu_\alpha)\le K_0(N+1)$, onde K_0 é uma constante que depende somente de α. Isto limita o primeiro termo. Usando a desigualdade de Jensen, o segundo termo fica dominado por

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\log\int\mathbb{E}_\eta\left[\exp\left[\max_{k\le m}\left\{\tfrac{N}{N+1}\int_0^T\sum_{x=0}^N\partial_u H_s^k\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta_s(x)\,ds-cN||H^k||_2^2\right\}\right]\right]\,d\nu_\alpha(\eta)\\&\qquad=\frac{1}{N}\log\mathbb{E}_{\nu_\alpha}\left[\exp\left[\max_{k\le m}\left\{\tfrac{N}{N+1}\int_0^T\sum_{x=0}^N\partial_u H_s^k\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta_s(x)\,ds-cN||H^k||_2^2\right\}\right]\right].\end{aligned}$$

Seguimos observando que $\exp\{\max_{n\le m}a_n\}\le\sum_{n=1}^m e^{a_n}$, e portanto a última expressão fica limitada por

$$\frac{1}{N}\log\mathbb{E}_{\nu_\alpha}\left[\sum_{k=1}^m\exp\left\{\tfrac{N}{N+1}\int_0^T\sum_{x=0}^N\partial_u H_s^k\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta_s(x)\,ds-cN||H^k||_2^2\right\}\right].$$

Estamos interessados em estimar o limite superior da quantidade acima quando $N\to+\infty$. Pelo Lema C.5 do apêndice, é suficiente estimar a quantidade

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\log\mathbb{E}_{\nu_\alpha}\left[\exp\left\{\tfrac{N}{N+1}\int_0^T\sum_{x=0}^N\partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta_s(x)\,ds-cN||H||_2^2\right\}\right],$$

para uma função $H\in C_c^{0,2}[0,T]\times(0,1)$ fixa.

Uma vez que o processo $\eta_\cdot$ é reversível com respeito a medida inicial ν_α, podemos usar a fórmula de Feynman-Kac, limitando a esperança acima por

$$\exp\left\{\int_0^T\Gamma_s\,ds\right\},$$

onde

$$\Gamma_s=\sup_{||f||_{L^2(\nu_\alpha)}=1}\left\{\langle V_s,f^2\rangle_{\nu_\alpha}+\langle N^2L_Nf,f\rangle_{\nu_\alpha}\right\},$$

e

$$V(s,\eta)=\tfrac{N}{N+1}\sum_{x=0}^N\partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta(x)-cN\int_0^1 H_s(u)^2\,du.$$

Assim, o limite superior fica limitado por

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\int_0^T\Gamma_s\,ds,$$

onde

$$\frac{1}{N}\Gamma_s = \sup_{||f||_{L^2(\nu_\alpha)}=1} \Bigg[\tfrac{1}{N+1} \int \sum_{x=0}^{N} \partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) \eta(x) f^2(\eta)\, d\nu_\alpha(\eta) \\ - c\int_0^1 H_s(u)^2\, du + N\langle L_N f, f\rangle_{\nu_\alpha}\Bigg]. \quad (4.4)$$

Agora vamos analisar o primeiro termo do supremo acima. O primeiro passo consiste em somar somente a partir de $x = 1$, de modo que, se

$$A := \tfrac{1}{N+1} \int \sum_{x=0}^{N} \partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) \eta(x) f^2(\eta)\, d\nu_\alpha(\eta),$$

então

$$A = \tfrac{1}{N+1} \int \sum_{x=1}^{N} \partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) \eta(x) f^2(\eta)\, d\nu_\alpha(\eta) + R_1^N,$$

onde

$$R_1^N = \tfrac{1}{N+1} \int \partial_u H_s(0)\eta(0) f^2(\eta)\, d\nu_\alpha(\eta). \quad (4.5)$$

Note que $R_1^N = 0$, pois H tem suporte compacto contido em $[0,T]\times(0,1)$. Uma vez que $H \in C_c^{0,2}([0,T]\times(0,1))$, a quantidade $\frac{1}{\delta}[H_s(u+\delta) - H_s(u)] \to \partial_u H_s(u)$ uniformemente. Portanto, para N suficientemente grande, o resto

$$R_2^N = \tfrac{1}{N+1} \int \sum_{x=1}^{N} \left[\partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - N\left[H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - H_s\left(\tfrac{x-1}{N}\right)\right]\right] \eta(x) f^2(\eta)\, d\nu_\alpha(\eta) \quad (4.6)$$

é tão pequeno quanto quisermos. Além disso, podemos escrever

$$A = \tfrac{1}{N+1} \int \sum_{x=1}^{N} N\left[H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - H_s\left(\tfrac{x-1}{N}\right)\right] \eta(x) f^2(\eta)\, d\nu_\alpha(\eta) + R_2^N.$$

Nota. Usando o fato de que $||f||_{L^2(\nu_\alpha)} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
|R_2^N| &= \left| \tfrac{1}{N+1} \int \sum_{x=1}^{N} \left[\partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - N\left[H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - H_s\left(\tfrac{x-1}{N}\right)\right]\right] \eta(x) f^2(\eta)\, d\nu_\alpha(\eta) \right| \\
&\le \tfrac{1}{N+1} \sum_{x=1}^{N} \left|\partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - N\left[H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - H_s\left(\tfrac{x-1}{N}\right)\right]\right| \left| \int \eta(x) f^2(\eta)\, d\nu_\alpha(\eta) \right| \\
&\le \tfrac{1}{N+1} \sum_{x=1}^{N} \left|\partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - N\left[H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - H_s\left(\tfrac{x-1}{N}\right)\right]\right| ||f||_2^2 \\
&\le \tfrac{1}{N+1} \sum_{x=1}^{N} \left|\partial_u H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - N\left[H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - H_s\left(\tfrac{x-1}{N}\right)\right]\right|.
\end{aligned}$$

Se colocarmos $\tilde{R}_2^N = \frac{1}{N+1}\sum_{x=1}^{N} \left|\partial_u H_s\left(\frac{x}{N}\right) - N\left[H_s\left(\frac{x}{N}\right) - H_s\left(\frac{x-1}{N}\right)\right]\right|$, então vale $R_2^N \le |R_2^N| \le \tilde{R}_2^N$. Além disso, quando fazemos $N \to +\infty$, vale $\tilde{R}_2^N \to 0$.

Observe que vale

$$A = \tfrac{N}{N+1}\sum_{x=1}^{N}\int H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta(x)f^2(\eta)\,d\nu_\alpha(\eta)$$
$$-\tfrac{N}{N+1}\sum_{x=0}^{N-1}\int H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)\eta(x+1)f^2(\eta)\,d\nu_\alpha(\eta)+R_2^N,$$

de modo que

$$A = \tfrac{N}{N+1}\sum_{x=1}^{N-1}\int H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)(\eta(x)-\eta(x+1)))f^2(\eta)\,d\nu_\alpha(\eta)+R_2^N+R_3^N,$$

onde

$$R_3^N = \tfrac{N}{N+1}\int (H_s(1)\eta(N)-H_s(0)\eta(1))f^2(\eta)\,d\nu_\alpha(\eta). \tag{4.7}$$

Novamente aqui, o fato que H tem suporte compacto contido em $[0,T]\times(0,1)$ implica que este erro R_3^N é nulo. O próximo passo consiste em escrever $A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A$ e fazer a mudança de variáveis $\eta\mapsto\eta^{x,x+1}$ (que é invariante para ν_α) para obter

$$A = \tfrac{N}{2(N+1)}\sum_{x=1}^{N-1}\int H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)(\eta(x)-\eta(x+1)))(f^2(\eta)-f^2(\eta^{x,x+1}))\,d\nu_\alpha(\eta)+R_2^N.$$

Agora, usamos que $(f^2(\eta)-f^2(\eta^{x,x+1}))=(f(\eta)+f(\eta^{x,x+1}))(f(\eta)-f(\eta^{x,x+1}))$ e depois que $ab\leq Ca^2+\frac{b^2}{C}$ para qualquer número real $C>0$ e que $|\eta(x)-\eta(x+1)|\leq 1$ para obter

$$A \leq \tfrac{CN}{2(N+1)}\sum_{x=1}^{N-1}\int H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)^2(f(\eta)+f(\eta^{x,x+1}))^2\,d\nu_\alpha(\eta)$$
$$+\tfrac{N}{2C(N+1)}\sum_{x=1}^{N-1}\int (f(\eta)-f(\eta^{x,x+1}))^2\,d\nu_\alpha(\eta)+R_2^N.$$

Usamos o fato que $||f||_{L^2(\nu_\alpha)}=1$ para obter

$$\int (f(\eta)+f(\eta^{x,x+1}))^2\,d\nu_\alpha(\eta)\leq 2+2\int f(\eta)f(\eta^{x,x+1})\,d\nu_\alpha(\eta)\leq 2+2||f||_2||f||_2=4.$$

Com isso, finalmente obtemos

$$A\leq \tfrac{2CN}{N+1}\sum_{x=1}^{N-1}H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)^2+\tfrac{N}{2C(N+1)}\sum_{x=0}^{N-1}\int (f(\eta)-f(\eta^{x,x+1}))^2\,d\nu_\alpha(\eta)+R_2^N.$$

Quando escolhemos $C=(N+1)^{-1}$ conseguimos a estimativa

$$A\leq \frac{2N}{(N+1)^2}\sum_{x=1}^{N-1}H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)^2-N\langle L_{N,0}f,f\rangle_{\nu_\alpha}+R_2^N,$$

onde R_2^N é dado por (4.6).

Com isto, temos, escolhendo $c = 2$, que

$$\frac{1}{N}\Gamma_s \leq \sup_{||f||_{L^2(\nu_\alpha)}=1} \left\{ \frac{2N}{(N+1)^2} \sum_{x=1}^{N-1} H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)^2 - 2\int_0^1 H_s(u)^2\,du \right.$$
$$\left. + N\langle L_N f, f\rangle_{\nu_\alpha} - N\langle L_{N,0} f, f\rangle_{\nu_\alpha} + R_2^N \right\}.$$

Finalmente, pela nota acima R_2^N fica pequeno quando N for suficientemente grande. Outra observação importante é que $N\langle L_N f, f\rangle_{\nu_\alpha} - N\langle L_{N,0} f, f\rangle_{\nu_\alpha} = N\langle L_{N,b} f, f\rangle_{\nu_\alpha} \leq 0$. Também vale $\frac{2N}{(N+1)^2}\sum_{x=1}^{N-1} H_s\left(\frac{x}{N}\right)^2 \to 2\int_0^1 H_s(u)^2\,du$, donde podemos escrever

$$\frac{1}{N}\Gamma_s \leq \tfrac{2N}{(N+1)^2} \sum_{x=1}^{N-1} H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)^2 - 2\int_0^1 H_s(u)^2\,du + \tilde{R}_2^N \to 0$$

pontualmente, quando $N \to +\infty$. Daí concluímos que

$$\limsup \int_0^T \frac{1}{N}\Gamma_s\,ds \leq \limsup \int_0^T \left(\tfrac{2N}{(N+1)^2} \sum_{x=1}^{N-1} H_s\left(\tfrac{x}{N}\right)^2 - 2\int_0^1 H_s(u)^2\,du + \tilde{R}_2^N \right) ds.$$

Pelo Teorema da convergência dominada, esta última integral converge para zero, o que conclui a demonstração de que as densidades ρ estão quase certamente em $L^2(0;T;\mathcal{H}^1(0,1))$.

4.3 Caracterização dos pontos limites

O objetivo desta seção consiste em esboçar a demonstração de que as densidades ρ_s satisfazem a EDP (2.2) no sentido fraco. Isto é

Teorema 4.7. *Para qualquer medida $\mathbb{Q}_*$ que seja um ponto limite da sequência de medidas $\{\mathbb{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, temos*

$$\mathbb{Q}_*\Bigg[\pi_\cdot : \langle \rho_t, H_t\rangle - \langle \gamma, H_0\rangle - \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta) H_s\rangle\,ds$$
$$- \int_0^t \{\rho_s(0)\partial_u H_s(0) - \rho_s(1)\partial_u H_s(1)\}ds - \int_0^t \Big\{ H_s(0)\big(\alpha - \rho_s(0)\big) + H_s(1)\big(\alpha - \rho_s(1)\big)\Big\}ds = 0$$
$$\forall t \in [0,T], \quad \forall H \in C^{1,2}([0,T]\times[0,1]) \Bigg] = 1. \quad (4.8)$$

Os detalhes desta demonstração podem ser encontrados na dissertação de mestrado de Otávio de Macedo Menezes.

Inicialmente, observe que é suficiente demonstrar que

$$\mathbb{Q}_*\Bigg[\pi : \sup_{0\le t\le T}\Big|\langle \rho_t, H_t\rangle - \langle \gamma, H_0\rangle - \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s+\Delta)H_s\rangle\, ds - \int_0^t \big\{\rho_s(0)\partial_u H_s(0)$$
$$- \rho_s(1)\partial_u H_s(1)\big\}ds - \int_0^t \Big\{H_s(0)\big(\alpha-\rho_s(0)\big) + H_s(1)\big(\alpha - \rho_s(1)\big)\Big\}ds\Big| > \delta\Bigg] = 0, \quad (4.9)$$

para cada $\delta > 0$ fixo e cada $H \in C^{1,3}([0,T]\times[0,1])$, pois este conjunto é denso em $C^{1,2}([0,T]\times[0,1])$ com a norma $||H|| = ||H||_\infty + ||\partial_t H||_\infty + ||\partial_u H||_\infty + ||\Delta H||_\infty$.

Para demonstrarmos isto, o primeiro passo consiste em trocar $\mathbb{Q}_*$ pelo limite das probabilidades $\mathbb{Q}_N$. Entretanto, este passo tem algumas dificuldades, pois o conjunto acima não pode ser medido com as probabilidades $\mathbb{Q}_N$. Para contornar isto, trocamos os valores de $\rho_s(0)$ e $\rho_s(1)$ pelas aproximações $\frac{1}{\varepsilon}\pi_t[0,\varepsilon]$ e $\frac{1}{\varepsilon}\pi_t[1-\varepsilon,1]$, onde $\varepsilon > 0$ será tomado suficientemente pequeno. Com isso, (4.9) fica limitado pela soma dos seguintes termos:

$$\mathbb{Q}_*\Bigg[\pi_\cdot : \sup_{0\le t\le T}\Big|\langle \pi_t, H_t\rangle - \langle \pi_0, H_0\rangle - \int_0^t \langle \pi_s, (\partial_s+\Delta)H_s\rangle\, ds - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\pi_s[0,\varepsilon][\partial_u H_s(0) - H_s(0)]\, ds$$
$$+ \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\pi_s[1-\varepsilon,1][\partial_u H_s(1) + H_s(1)]\, ds - \int_0^t \alpha[H_s(0)+H_s(1)]\, ds\Big| > \delta/4\Bigg], \quad (4.10)$$

$$\mathbb{Q}^*[\pi : |\langle \pi_0, H_0\rangle - \langle \gamma, H_0\rangle| > \delta/4], \quad (4.11)$$

$$\mathbb{Q}^*\left[\pi : \sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t [\partial_u H_s(0) - H_s(0)]\left[\frac{1}{\varepsilon}\pi_s[0,\varepsilon] - \rho_s(0)\right] ds\Big| > \delta/4\right]$$

e

$$\mathbb{Q}^*\left[\pi : \sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t [\partial_u H_s(1) + H_s(1)]\left[\frac{1}{\varepsilon}\pi_s[1-\varepsilon,1] - \rho_s(1)\right] ds\Big| > \delta/4\right].$$

As duas últimas probabilidades são nulas para ε suficientemente pequeno. A demonstração desta afirmação é técnica e não a faremos aqui. A probabilidade (4.11) é nula por consequência da definição de medida associada a um perfil inicial γ. Outro lema técnico demonstra que a probabilidade (4.10) é limitada por

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{Q}_N\Bigg[\pi_\cdot : \sup_{0\le t\le T}\Big|\langle \pi_t, H_t\rangle - \langle \pi_0, H_0\rangle - \int_0^t \langle \pi_s, (\partial_s+\Delta)H_s\rangle\, ds$$
$$- \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\pi_s[0,\varepsilon][\partial_u H_s(0) - H_s(0)]\, ds + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\pi_s[1-\varepsilon,1][\partial_u H_s(1) + H_s(1)]\, ds$$
$$- \int_0^t \alpha[H_s(0)+H_s(1)]\, ds\Big| > \delta/16\Bigg]. \quad (4.12)$$

Vamos demonstrar que este último limite é nulo. Somando e subtraindo $\int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s^N, H_s\rangle$ ao termo que aparece dentro do supremo em (4.12), podemos limitar essa expressão pela soma de

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{Q}_N \left[\sup_{0\le t\le T} |M_t^N(H)| > \delta/32 \right] \tag{4.13}$$

e

$$\begin{aligned} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{Q}_N \Bigg[\pi_\cdot : \sup_{0\le t\le T} \Bigg| \int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s^N, H_s\rangle\, ds - \int_0^t \langle \pi_s^N, \Delta H_s\rangle\, ds \\ - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0,\varepsilon][\partial_u H_s(0) - H_s(0)]\, ds + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\pi_s[1-\varepsilon, 1][\partial_u H_s(1) + H_s(1)]\, ds \\ - \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)]\, ds \Bigg| > \delta/32 \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

A Observação (3.8) mostra que o limite em (4.13) é nulo. Quando escrevemos

$$\begin{aligned} \eta^{\varepsilon N}(0) &= \frac{1}{\varepsilon}\pi^N[0,\varepsilon] = \tfrac{1}{\varepsilon(N+1)} \sum_{x=0}^{\lfloor \varepsilon N\rfloor} \eta(x) \\ \eta^{\varepsilon N}(N) &= \frac{1}{\varepsilon}\pi^N[1-\varepsilon,1] = \tfrac{1}{\varepsilon(N+1)} \sum_{x=N-\lfloor \varepsilon N\rfloor}^{N} \eta(x), \end{aligned}$$

onde $\lfloor\cdot\rfloor$ é a função parte inteira, podemos reescrever a equação (4.14) como

$$\begin{aligned} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu_N} \Bigg[\eta_\cdot : \sup_{0\le t\le T} \Bigg| \int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s^N, H_s\rangle\, ds - \int_0^t \langle \pi_s^N, \Delta H_s\rangle\, ds \\ - \int_0^t \eta_s^{\varepsilon N}(0)[\partial_u H_s(0) - H_s(0)]\, ds + \int_0^t \eta_s^{\varepsilon N}(N)[\partial_u H_s(1) + H_s(1)]\, ds \\ - \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)]\, ds \Bigg| > \delta/32 \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

O próximo passo consiste em associar cada uma das parcelas acima com uma parcela do gerador $L_N = L_{N,0} + L_{N,b}$, utilizando as expressões (3.9) da página 36 e (3.10) da página 36. Lembrando também que estamos assumindo aqui $\alpha = \beta$, para limitar a expressão dentro da probabilidade em (4.15) pela soma de

$$\sup_{0\le t\le T} \Bigg| \int_0^t \Big\{ \tfrac{1}{N+1} \sum_{x=1}^{N-1} \eta_s(x) \Delta_N H_s\left(\tfrac{x}{N}\right) - \langle \pi_s^N, \Delta H_s\rangle \Big\}\, ds \Bigg|, \tag{4.16}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \Bigg| \int_0^t \Big\{ \eta_s^{\varepsilon N}(0)[\partial_u H_s(0) - H_s(0)] - \eta_s(0) \tfrac{N}{N+1} [\nabla_N H_s(0) - H_s(0)] \Big\}\, ds \Bigg|, \tag{4.17}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t \Big\{\eta_s^{\varepsilon N}(N)[\partial_u H_s(1)-H_s(1)]-\eta_s(N)\tfrac{N}{N+1}[\nabla_N H_s(1)-H_s(1)]\Big\}\,ds\Big| \tag{4.18}$$

e

$$\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t \alpha[H_s(0)+H_s(1)]\Big(1-\tfrac{N}{N+1}\Big)\,ds\Big|. \tag{4.19}$$

Como $H\in C^{1,3}([0,T]\times[0,1])$, temos que $\Delta_N H_s(u)\to\Delta H_s(u)$ uniformemente em s e em u, o que implica que o termo (4.16) converge para zero, uniformemente em $\eta_\cdot$. Como H é limitada, segue facilmente que (4.19) também converge para zero, quando $N\to+\infty$. Os outros dois termos são majorados de maneira similar. Vamos tratar da parcela (4.18). Comece limitando esta parcela por

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t \big[\eta_s^{\varepsilon N}(N)\big[\partial_u H_s(1)-\nabla_N H_s(1)\big]\big]\,ds\Big|\\ &+\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t \big[\nabla_N H_s(1)-H_s(1)\big]\big[\eta_s^{\varepsilon N}(N)-\eta_s(N)\big]\,ds\Big|\\ &+\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t \eta_s(N)\Big(1-\tfrac{N}{N+1}\Big)\big[\nabla_N H_s(1)-H_s(1)\big]\,ds\Big|.\end{aligned}$$

Observe que a terceira parcela acima converge para zero, quando $N\to\infty$, pois $\nabla_N H_s(1)$ é limitado uniformemente em N. Além disso, a primeira parcela também é nula no limite $N\to\infty$, pois $\nabla_N H_s(1)\to\partial_u H_s(1)$ uniformemente em s. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para a equação (4.17), o que nos deixa com o problema de estimar o limite, quando $N\to\infty$, da parcela

$$\mathbb{P}_{\mu_N}\Big[\eta_\cdot:\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t \big[\nabla_N H_s(\tfrac{x}{N})-H_s(\tfrac{x}{N})\big]\big[\eta_s^{\varepsilon N}(x)-\eta_s(x)\big]\,ds\Big|>\tilde{\delta}\Big],$$

para $x\in\{0,N\}$ e $\tilde{\delta}>0$. Isto segue do fato que $\nabla_N H_s(\frac{x}{N})-H_s(\frac{x}{N})$ é uniformemente limitado em N e pelo Lema de Substituição (ver a dissertação de mestrado de Otávio de Macedo Menezes).

Apêndice A

Motivação para a definição de solução fraca da EDP (2.2)

O intuito desta seção é de servir como motivação para a definição de solução fraca da EDP (2.2). Alertamos que o que faremos aqui possui caráter informal.

Fixe $t \in [0,T]$ e $H \in C^{1,2}([0,T] \times [0,1])$. Como temos a condição inicial que $\rho_0(u) = \gamma(u)$, esperamos poder escrever algo da forma

$$\langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle = \langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \rho_0, H_0 \rangle = \int_0^t \partial_s \langle \rho_s, H_s \rangle ds. \tag{A.1}$$

A partir daí, podemos intuir que $\partial_s \langle \rho_s, H_s \rangle = \langle \partial_s \rho_s, H_s \rangle + \langle \rho_s, \partial_s H_s \rangle$. Agora, se ρ é solução da EDP, vale $\partial_s \rho_s = \Delta \rho_s$, com isto, obtemos

$$\partial_s \langle \rho_s, H_s \rangle = \langle \Delta \rho_s, H_s \rangle + \langle \rho_s, \partial_s H_s \rangle. \tag{A.2}$$

O próximo passo consiste em fazer uma integração por partes no termo $\langle \Delta \rho_s, H_s \rangle$, para obtermos

$$\langle \Delta \rho_s, H_s \rangle = \partial_u \rho_s(u) H_s(u)\big|_{u=0}^{u=1} - \langle \partial_u \rho_s, \partial_u H_s \rangle.$$

Novamente, aqui utilizamos integração por partes no último termo acima para obter

$$\langle \Delta \rho_s, H_s \rangle = \partial_u \rho_s(u) H_s(u)\big|_{u=0}^{u=1} - \rho_s(u) \partial_u H_s(u)\big|_{u=0}^{u=1} + \langle \rho_s, \Delta H_s \rangle.$$

Observe que nossa equação também satisfaz as condições $\partial_u \rho_s(0) = -\alpha + \rho_s(0)$ e $\partial_u \rho_s(1) = \beta - \rho_s(1)$. Com isso, vale

$$\begin{aligned} \langle \Delta \rho_s, H_s \rangle = {} & \langle \rho_s, \Delta H_s \rangle \\ & + \rho_s(0) \partial_u H_s(0) - \rho_s(1) \partial_u H_s(1) \\ & + H_s(0)\big(\alpha - \rho_s(0)\big) + H_s(1)\big(\beta - \rho_s(1)\big). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Juntando as equações (A.1), (A.2), e (A.3), obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle = & \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds \\
& + \int_0^t \big\{ \rho_s(0) \partial_u H_s(0) - \rho_s(1) \partial_u H_s(1) \big\} ds \\
& + \int_0^t \Big\{ H_s(0) \big(\alpha - \rho_s(0) \big) + H_s(1) \big(\beta - \rho_s(1) \big) \Big\} ds.
\end{aligned}
$$

Apêndice B

Resultados gerais sobre variáveis aleatórias

Lema B.1. *Suponha que* $X_n \to X$ *em distribuição e que* f *é uma função contínua. Então* $f(X_n) \to f(X)$ *em distribuição.*

Demonstração. Para toda função contínua e limitada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E[g(f(X_n))] = E[g \circ f(X_n)] \to E[g \circ f(X)] = E[g(f(X))]$. □

Lema B.2. *Suponha que* $X_n \to X$ *em distribuição, e que* $\{c_n\}$ *é uma sequência de números reais que convergem para* c*. Se* $P[X_n \leq c_n] = 1$, $\forall n \geq 1$, *então* $P[X \leq c] = 1$.

Demonstração. Dado $\delta > 0$, observe que $P[X_n \leq c + \delta] = 1$, para n suficientemente grande. Pelo teorema de Portmanteau, temos $P[X \leq c+\delta] \geq \limsup P[X_n \leq c+\delta] = 1$. Assim, $P[X \leq c+\delta] = 1$, para qualquer $\delta > 0$. Daqui concluímos que $P[X \leq c] = 1$. □

Apêndice C

Ferramentas de Análise

Lema C.1. *Se* $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e limitada, então a função* $F : D_{\mathcal{M}}[0,T] \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(\pi_t) = \sup_{0 \le t \le T} |\langle \pi_t, G \rangle|$ *é contínua.*

Demonstração. Observe que a função F pode ser escrita como a composta de duas funções $F_1 : D_{\mathcal{M}}[0,T] \to D_{\mathbb{R}}[0,T]$ e $F_2 : D_{\mathbb{R}}[0,T] \to \mathbb{R}$ dadas por $F_1(\pi)(t) = \langle \pi_t, G \rangle$ e $F_2(\phi) = \sup_{0 \le t \le T} |\phi(t)|$. É fácil verificar que F_2 é contínua. Se $\phi_n \to \phi$ em $D_{\mathbb{R}}[0,T]$, então existem reparametrizações λ_n de $[0,T]$ tais que $\phi_n \circ \lambda_n \to \phi$ uniformemente. Com isso, temos $F_2(\phi_n) = F_2(\phi_n \circ \lambda_n) \to F_2(\phi)$.

Basta agora verificarmos que F_1 é contínua. Suponha então que $\pi^n \to \pi$ em $D_{\mathcal{M}}[0,T]$. Com isso, existem reparametrizações λ_n de $[0,T]$ tais que $\pi^n_{\lambda_n(t)} \to \pi_t$ uniformemente. Com isso, $F_1(\pi^n)(\lambda_n(t)) \to F_1(\pi)(t)$ uniformemente. Disto segue-se que $F_1(\pi^n) \to F_1(\pi)$ em $D_{\mathbb{R}}[0,T]$.

Como F é a composta de duas funções contínuas, ela é uma função contínua. □

Lema C.2. *Seja E um espaço de Banach separável. Então a σ-álgebra de Borel em E é gerada pelos abertos da topologia fraca de E.*

Demonstração. Como E é separável, basta mostrar que as bolas fechadas na topologia forte estão na σ-álgebra gerada pelos abertos fracos. Para isso observamos que os conjuntos convexos que são fechados na topologia fraca são também fechados na topologia forte (pois dado um ponto fora do convexo fracamente fechado K podemos usar o Teorema de Hahn-Banach para encontrar um hiperplano que separa esse ponto de K, de modo que podemos escrever K como uma interseção de semiespaços fechados). □

Lema C.3. *Sejam E um espaço de Banach com norma $||\cdot||$, $\kappa > 0$ e $f : E \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Se*

$$\sup_{x\in E}\left\{f(x) - \kappa\|x\|^2\right\} < \infty,$$

então f é limitado. Além disso,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{4\kappa}\sup_{x\in E}\left\{f(x) - \kappa\|x\|^2\right\}.$$

Demonstração. Observe que vale

$$\sup_{x\in E}\left\{f(x) - \kappa\|x\|^2\right\} = \sup_{\|y\|=1}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\{f(\lambda y) - \kappa\|\lambda y\|^2\right\}. \tag{C.1}$$

Para $y \in E$ com $\|y\| = 1$ fixado, vemos que $f(\lambda y) - \kappa\|\lambda y\|^2 = \lambda f(y) - \kappa\lambda^2$ atinge o seu máximo em $\lambda = \frac{1}{2\kappa}f(y)$. Substituindo esse valor de λ em (C.1) obtemos

$$\sup_{x\in E}\left\{f(x) - \kappa\|x\|^2\right\} = \frac{1}{4\kappa}\sup_{\|y\|=1} f(y)^2 = \frac{1}{4\kappa}\|f\|^2,$$

como queríamos demonstrar. □

Nota. No lema acima só precisamos que F esteja definido num subespaço denso de E. De fato, podemos estender o funcional F para todo o espaço E da seguinte forma: dado $x \in E$, tome $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências de pontos em E que convergem para x. Pela limitação de F, as sequências $\{F(x_n)\}$ e $\{F(y_n)\}$ são limitadas em $\mathbb{R}$, donde podemos tomar subsequências que convergem. Sem perda de generalidade, suponha que $\{F(x_n)\}$ e $\{F(y_n)\}$ convergem. Observe que

$$|F(x_n) - F(y_n)| \leq (C + k)|x_n - y_n| \to 0.$$

Com isso, podemos definir $F(x) = \lim F(x_n)$, onde $\{x_n\}$ é uma sequência de pontos em E que convergem para x. O funcional $F : B \to \mathbb{R}$ assim definido é claramente contínuo.

Lema C.4. *O espaço $C_c^{0,1}([0,T]\times(0,1))$ é separável com a norma C^1 $||H||_{C^1} = ||H||_\infty + ||\partial_u H||_\infty$.*

Demonstração. Como $C_c^{0,1}([0,T]\times(0,1)) \subset C^{0,1}([0,T]\times[0,1])$, é suficiente demonstrarmos a separabilidade do último conjunto. Para isto, tome um subconjunto enumerável denso $\{f_n\} \subset C^0[0,T]$ e um subconjunto enumerável denso $\{g_n\} \subset C^0([0,T]\times[0,1])$. Defina, para $m, n \in \mathbb{N}$, $F_{n,m}(s,u) = f_m(s) + \int_0^u g_n(s,v)\,dv$. Observe que $\{F_{n,m}\}$ definidas como acima formam um subconjunto enumerável de $C^{0,1}([0,T]\times[0,1])$. Dada uma função $H \in C^{0,1}([0,T]\times[0,1])$, tome g_n que satisfaz $||g_n - \partial_u H||_\infty \leq \varepsilon$ e f_m satisfazendo $||f_m - H(\cdot,0)||_\infty \leq \varepsilon$. Escrevendo $H(s,u) = H(s,0) + \int_0^u \partial_v H(s,v)\,dv$, obtemos $||F_{n,m} - H||_\infty \leq 2\varepsilon$ e $||\partial_u F_{n,m} - \partial_u H||_\infty = ||g_n - \partial_u H||_\infty \leq \varepsilon$, donde o conjunto $\{F_{n,m}\}$ é denso em $C^{0,1}([0,T]\times[0,1])$. □

Lema C.5. *Sejam* $\{a_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, $\{b_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ *e* $\{c_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ *sequências de números não-negativos com* $c_N \uparrow \infty$. *Então*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{c_N} \log(a_N + b_N) = \max\left\{\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{c_N} \log a_N, \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{c_N} \log b_N\right\}.$$

Demonstração. Usando $a_N + b_N \geq a_N$ e $a_N + b_N \geq b_N$, é fácil ver que o lado esquerdo da igualdade acima é maior ou igual ao lado direito. Resta mostrar a desigualdade contrária:

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{c_N} \log(a_N + b_N) &\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{c_N} \log 2\max\{a_N, b_N\} \\ &= \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{c_N} \log \max\{a_N, b_N\} \\ &= \max\left\{\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{c_N} \log a_N, \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{c_N} \log b_N\right\}.\end{aligned}$$

□

Apêndice D

Resultados sobre Processos de Markov

Dadas duas medidas finitas μ e π num espaço de medida E, definimos a entropia de μ com respeito a π como

$$H(\mu|\pi) := \sup_f \{\langle \mu, f\rangle - \log\langle \pi, e^f\rangle\},$$

onde o supremo é tomado sobre as funções $f : E \to \mathbb{R}$ limitadas. Sejam $\alpha > 0$ e $f : E \to \mathbb{R}$ limitada. Pela definição da entropia temos

$$\begin{aligned} &\langle \mu, \alpha f\rangle \leq H(\mu|\pi) + \log\langle \pi, e^{\alpha f}\rangle \\ \Rightarrow &\langle \mu, f\rangle \leq \frac{1}{\alpha} H(\mu|\pi) + \frac{1}{\alpha}\log\langle \pi, e^{\alpha f}\rangle. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Quando o espaço E é enumerável e μ é absolutamente contínua com relação a π a entropia $H(\mu|\pi)$ tem uma fórmula explícita:

$$H(\mu|\pi) = \sum_{x\in E} \mu(x) \log \frac{\mu(x)}{\pi(x)}. \tag{D.2}$$

A demonstração dessa fórmula pode ser encontrada no Teorema 8.3 de [5].

Lema D.1. *Sejam ν_α^N a probabilidade Bernoulli produto de parâmetro α no espaço $\{0,1\}^{I_N}$ e μ_N uma probabilidade qualquer em $\{0,1\}^{I_N}$. Então*

$$H(\mu|\nu_\alpha) \leq K(N+1),$$

onde K é uma constante que depende somente de α.

Demonstração. Usando a fórmula explícita (D.2) para a entropia obtemos (denotando por $a \wedge b$ o mínimo entre dois números a e b)

$$\begin{aligned} H(\mu_N|\nu_\alpha^N) &= \sum_{\eta \in \{0,1\}^{I_N}} \mu_N(\eta) \log \frac{\mu_N(\eta)}{\nu_\alpha^N(\eta)} \\ &\leq \sum_{\eta} \mu_N(\eta) \log \frac{1}{[\alpha \wedge (1-\alpha)]^{N+1}} \\ &= (N+1) \log \left(\frac{1}{\alpha \wedge (1-\alpha)} \right). \end{aligned}$$

□

Lema D.2. ***(Feynman-Kac)*** *Sejam $\{X_s\}_{s\geq 0}$ um cadeia de Markov com espaço de estados enumerável E, gerador infinitesimal L e medida invariante π e $V : [0,\infty) \times E \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Suponha que a cadeia de Markov é reversível em relação à medida invariante π. Então*

$$\mathbb{E}_\pi \left[\exp \left\{ \int_0^t V(s, X_s)\, ds \right\} \right] \leq \exp \left\{ \int_0^t \Gamma_s\, ds \right\},$$

onde

$$\Gamma_s = \sup_{\|f\|_{L^2(\pi)} \leq 1} \{ \langle V_s, f^2 \rangle_\pi + \langle Lf, f \rangle_\pi \}. \tag{D.3}$$

A demonstração da fórmula de Feynman-Kac pode ser encontrada em [5], Lema 7.2.

Lema D.3. ***(Forma de Dirichlet)*** *Considere um processo de Markov com espaço de estados finito E e semigrupo $\{P_t\}_{t\geq 0}$, reversível com respeito à medida ν em E. Sejam L a matriz do gerador infinitesimal e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função. Então*

$$\langle Lf, f \rangle_\nu = -\frac{1}{2} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} L(\eta, \xi) [f(\eta) - f(\xi)]^2 \nu(\eta).$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \langle P_t f, f \rangle_\nu &= \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} P_t(\eta, \xi) f(\xi) f(\eta) \nu(\eta) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} P_t(\eta, \xi) \{ [f(\xi) - f(\eta)]^2 - f(\xi)^2 - f(\eta)^2 \} \nu(\eta). \end{aligned} \tag{D.4}$$

.

Usando a reversibilidade, isto é, $\nu(\eta) P_t(\eta, \xi) = \nu(\xi) P_t(\xi, \eta)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} P_t(\eta, \xi) f(\eta)^2 \nu(\eta) &= \sum_{\xi \in E} \sum_{\eta \in E} \nu(\xi) P_t(\xi, \eta) f(\eta)^2 \\ &= \sum_{\eta \in E} \nu(\eta) f(\eta)^2. \end{aligned}$$

Além disso, como ν é medida invariante,

$$\sum_{\xi\in E}\sum_{\eta\in E} P_t(\eta,\xi)f(\xi)^2\nu(\eta) = \sum_{\xi\in E}\nu(\xi)f(\xi)^2.$$

Substituindo as duas últimas identidades em (D.4) obtemos

$$\langle P_t f - f, f\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{\eta\in E}\sum_{\xi\in E} P_t(\eta,\xi)[f(\xi)-f(\eta)]^2\nu(\eta).$$

Note que as parcelas com $\eta=\xi$ são nulas, de forma que, denotando por I a matriz identidade, podemos escrever a expressão acima como

$$-\frac{1}{2}\sum_{\eta\in E}\sum_{\xi\in E}\frac{1}{t}[P_t(\eta,\xi)-I(\eta,\xi)][f(\xi)-f(\eta)]^2\nu(\eta).$$

Finalmente, calculamos

$$\begin{aligned}\langle Lf,f\rangle_\nu &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\langle P_t f - f, f\rangle_\nu\\ &= \lim_{t\downarrow 0} -\frac{1}{2}\sum_{\eta\in E}\sum_{\xi\in E}\frac{1}{t}[P_t(\eta,\xi)-I(\eta,\xi)][f(\xi)-f(\eta)]^2\nu(\eta)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{\eta\in E}\sum_{\xi\in E} L(\eta,\xi)[f(\xi)-f(\eta)]^2\nu(\eta).\end{aligned}$$

□

Corolário D.4. *Seja $L_N = L_{N,0} + L_{N,b}$ o gerador infinitesimal definido no Capítulo 2. Então*

$$\langle N^2 L_{N,0} f, f\rangle_{\nu_\alpha^N} = -\frac{N^2}{2}\sum_{x=0}^{N-1}\int [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)]^2\, d\nu_\alpha^N(\eta),$$

e

$$\begin{aligned}\langle N^2 L_{N,b} f, f\rangle_{\nu_\alpha^N} =& -\frac{N^2}{2}\int\left[\frac{1-\alpha}{N}\eta(0) + \frac{\alpha}{N}(1-\eta(0))\right][f(\eta^0)-f(\eta)]^2 d\nu_\alpha^N(\eta)\\ & -\frac{N^2}{2}\int\left[\frac{1-\alpha}{N}\eta(N) + \frac{\alpha}{N}(1-\eta(N))\right][f(\eta^N)-f(\eta)]^2 d\nu_\alpha^N(\eta)\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Teorema D.5. *Sejam $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um processo de Feller com semigrupo $\{P_t\}_{t\geq 0}$ e $f:\mathbb{R}\times E\to\mathbb{R}$ uma função limitada, C^2 na primeira coordenada com as derivadas de primeira e segunda ordens limitadas uniformemente na segunda coordenada. Suponha ainda que $f(t,\cdot)\in D(L)$ para todo $t\in\mathbb{R}^+$, onde L denota o gerador infinitesimal do processo e $D(L)$ seu domínio. Então, denotando $f(t,x)$ por $f_t(x)$,*

$$M_t(f) := f_t(X_t) - f_0(X_0) - \int_0^t (\partial_u + L) f_u(X_u)\, du \tag{D.5}$$

é um martingal com respeito à filtração natural do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Além disso, definindo

$$\langle M_t(f)\rangle := \int_0^t \left\{ Lf_s(X_s)^2 - 2f_s(X_s)Lf_s(X_s) \right\} ds,$$

temos que $(M_t(f))^2 - \langle M_t(f)\rangle$ *é um martingal com respeito à filtração natural do processo* $\{X_t\}_{t\geq 0}$. *O processo* $\langle M_t(f)\rangle$ *é chamado de* variação quadrática *de* $M_t(f)$.

O primeiro martingal do teorema acima é conhecido como Fórmula de Dynkin e é de extrema importância no decorrer do texto. Não vamos demonstrar este teorema aqui. Ao leitor interessado, uma demonstração pode ser encontrada no apêndice de [5].

Referências Bibliográficas

[1] BILLINGSLEY, P. *Convergence of Probability Measures.* John Wiley & Sons, 1968.

[2] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2010.

[3] EVANS, L. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[4] FRANCO, T.; GONÇALVES, P.; NEUMANN, A. *Phase transition of a Heat equation with Robin's boundary conditions and exclusion process.* Aceito para publicação em Transactions of the American Mathematical Society. Disponível em http://arxiv.org/abs/1210.3662 [acesso em 19 maio 2013].

[5] KIPNIS, C.; LANDIM, C. *Scaling limits of interacting particle systems.* Springer, 1999.

[6] KORALOV, L.; SINAI, Y. *Theory of Probability and Random Processes.* Springer, 2012.

[7] LEVIN, D.; PERES, Y. ; WILMER, E. *Markov Chains and Mixing Times.* American Mathematical Society, 2009.

[8] NEUMANN, A. *Hydrodynamical Limit and Large Deviation Principle for the Exclusion Process with Slow Bonds.* 2011. 159p. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

[9] REVUZ, D.; YOR, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer, 2010.

[10] SPITZER, F. *Interaction of Markov Processes.* Adv. Math. 1970.

[11] VARADHAN, S.R.S. *Probability Theory.* Courant Lecture Notes in Mathematics, 2000.