



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Limite Hidrodinâmico para um Processo de Exclusão:  
Pontos Limites das Medidas Empíricas**

Dissertação de Mestrado

**Otávio de Macedo Menezes**

Porto Alegre, 17 de julho de 2013.

Dissertação submetida por Otávio de Macedo Menezes <sup>1</sup> como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:

Dra. Adriana Neumann de Oliveira

Professor Co-Orientador:

Dr. Rafael Rigão Souza

Banca Examinadora:

Dra. Adriana Neumann de Oliveira (PPGMAT-UFRGS)

Dr. Alexandre Tavares Baravieira (PPGMAT-UFRGS)

Dr. Milton Jara (IMPA)

Dr. Patrícia Gonçalves (PUC-Rio)

Dr. Rafael Rigão Souza (PPGMAT - UFRGS)

Data da Apresentação: 16 de julho de 2013

---

<sup>1</sup>Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

**Resumo:**

Esta dissertação trata de um teorema de limite hidrodinâmico para a densidade de partículas no processo de exclusão simples com taxa lenta no bordo. Nesse processo as partículas realizam passeios aleatórios a tempo contínuo independentes no espaço  $\{0,1,\dots, N\}$ , condicionados ao evento de que duas partículas nunca ocupam o mesmo sítio simultaneamente. Além disso, partículas podem ser injetadas ou retiradas do sistema nos sítios 0 e N, com taxas proporcionais a  $1/N$ . O teorema do limite hidrodinâmico diz que reescalando o espaço por  $1/N$  e o tempo por  $N^2$  a evolução da densidade de partículas converge para a solução de uma equação do calor com certas condições de fronteira. Esta dissertação se concentra na caracterização dos pontos limites das medidas empíricas, um dos principais passos da demonstração. Além disso são apresentados resultados básicos de Processos de Markov relacionados ao problema do limite hidrodinâmico.

**Abstract:**

This text is about an hydrodynamic limit theorem for the particle density in the symmetric simple exclusion process with slow boundaries. In this process particles execute independent continuous time simple random walks in  $\{0,1,\dots,N\}$  conditioned to the event that at any time there is at most one particle per site. Moreover, particles can be injected or ejected from the system at sites 0 and N, with rates proportional to  $1/N$ . The hydrodynamic limit theorem asserts that, rescaling space by  $1/N$  and time by  $N^2$ , the particle density converges to the solution of a heat equation with certain boundary conditions. This text focuses on the characterization of limit points of empirical measures, a crucial step in the proof of the hydrodynamic limit. We also present some basic material on Markov Process related to the hydrodynamic limit problem.

*Para minha família*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos professores Eduardo Henrique de Mattos Brietzke e Elizabeth Quintana Ferreira da Costa, que me incentivaram escolher a matemática, me iniciaram no seu estudo e me ajudaram muito no começo dos meus estudos. Se não fosse por eles, este trabalho provavelmente nunca teria começado.

Agradeço ao professor Luiz Fernando Carvalho da Rocha os anos de orientação na iniciação científica e os cursos que ministrou. Devo a ele muito da minha formação.

Agradeço a Adriana Neumann de Oliveira e Rafael Rigão Souza, meus orientadores, que me receberam de braços abertos quando os procurei. Agradeço tudo o que me ensinaram, a paciência e a dedicação. Agradeço também a Rangel Balasso, que trabalhou junto comigo durante todo o mestrado.

Agradeço aos membros da banca examinadora as numerosas e valiosas correções e sugestões, que muito contribuíram para melhorar o texto. Qualquer erro que permaneça é de minha inteira responsabilidade.

Agradeço a Cilon Perusato, Douglas Machado dos Santos, Eduardo de Oliveira Horta, Gustavo Lopes Rodrigues, Jéssica Duarte, Jonier Amaral Antunes, Matheus Bohrer, Robert Guterres e a todos os outros amigos e colegas a amizade, as conversas e a ajuda. Eles foram os responsáveis por tornar a minha passagem pela UFRGS uma experiência muito mais rica.

Agradeço a minha família o apoio constante.

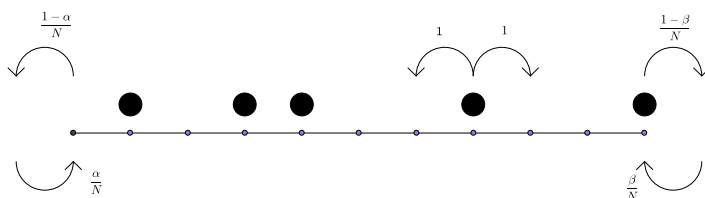
Agradeço aos professores e funcionários do Instituto de Matemática da UFRGS o suporte. Agradeço ao CNPq o apoio financeiro.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Processos de Feller</b>	<b>10</b>
1.1	Processos de Feller e Geradores Infinitesimais . . . . .	10
1.2	Associando Martingais a Processos de Feller . . . . .	12
1.3	Geradores Infinitesimais e o Teorema de Hille-Yosida . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>21</b>
2.1	O Processo de Exclusão Simples com Taxa Lenta no Bordo . . . . .	21
2.2	O Limite Hidrodinâmico . . . . .	23
2.3	Medidas Invariantes . . . . .	28
2.4	Rigidez . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Caracterização dos Pontos Limites</b>	<b>30</b>
3.1	Medidas Absolutamente Contínuas . . . . .	30
3.2	O Espaço $L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1))$ . . . . .	32
3.3	Lema da Substituição . . . . .	34
3.4	Caracterização dos Pontos Limites . . . . .	38
<b>A</b>	<b>A definição de solução fraca para a Equação (2.2)</b>	<b>50</b>
<b>B</b>	<b>O espaço <math>D_{\mathcal{M}}[0, T]</math></b>	<b>52</b>
B.0.1	A métrica de Skorohod . . . . .	52
B.0.2	$\mathcal{M}$ é um espaço métrico compacto . . . . .	53
B.0.3	Continuidade e convergência em $D_{\mathcal{M}}[0, T]$ . . . . .	53
<b>C</b>	<b>Ferramentas de Análise</b>	<b>55</b>
<b>D</b>	<b>Resultados sobre Processos de Markov</b>	<b>56</b>

# Introdução

Imaginemos o seguinte processo estocástico (descrito informalmente): existe uma quantidade finita de partículas sobre os pontos (que chamaremos de "sítios")  $0, 1, 2, \dots, N$ . Cada sítio contém no máximo uma partícula. Cada partícula executa um passeio aleatório a tempo contínuo independentemente das outras partículas, condicionado ao evento de que nenhum sítio é ocupado simultaneamente por mais de uma partícula. Esse tipo de interação caracteriza o chamado *processo de exclusão simples simétrico*. Além disso, partículas são injetadas<sup>2</sup> no sítio 0 com taxa  $\alpha/N$  e no sítio 1 com taxa  $\beta/N$ . Partículas no sítio 0 abandonam o sistema com taxa  $(1 - \alpha)/N$  e partículas no sítio 1 abandonam o sistema com taxa  $(1 - \beta)/N$ .



Uma série de perguntas interessantes pode ser feita sobre esse processo. Por exemplo: existem medidas invariantes? Quais são elas? Como evolui no tempo a densidade de partículas?

Para falarmos em densidade, fazemos uma imersão do espaço  $\{0, 1, \dots, N\}$  no intervalo contínuo  $[0, 1]$  através da aplicação que leva  $x$  em  $x/N$ . Dessa forma, as partículas passeiam pelos sítios  $0, 1/N, 2/N, \dots, 1 = N/N$ . Se fizermos  $N \rightarrow \infty$ , temos um cenário limite onde faz sentido falar na *densidade* de partículas. A teoria de limite hidrodinâmico enuncia (e demonstra) de forma matematicamente rigo-

---

<sup>2</sup>Ao falarmos em "taxa  $\alpha/N$ ", imaginamos um relógio que espera um tempo exponencial com parâmetro  $\alpha/N$  para tocar. Quando esse relógio toca, surge uma partícula no sítio zero, se ele estiver vazio. Um processo análogo descreve a injeção de partículas no sítio  $N$ .

rosa a seguinte afirmação: *quando  $N \rightarrow \infty$ , a densidade de partículas em  $[0, 1]$  se comporta como a solução de uma equação diferencial parcial*. Isso é formalizado da seguinte maneira: a cada configuração de partículas associamos uma medida em  $[0, 1]$  que dá peso  $1/(N + 1)$  a cada sítio *ocupado*. Essa medida evolui aleatoriamente no tempo, de modo que temos uma probabilidade no espaço das trajetórias de medidas. O teorema de limite hidrodinâmico mostra que quando  $N \rightarrow \infty$  essas probabilidades no espaço das trajetórias de medidas convergem fracamente a uma probabilidade que é concentrada numa única trajetória, que toma valores em medidas absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue e cujas densidades formam a (única) solução fraca de uma EDP de evolução. É claro que para conseguirmos provar algo desse tipo precisaremos de condições iniciais para a EDP, e portanto de um conceito adequado de condição inicial para os nossos sistemas de partículas. A definição correta é a de *medidas (iniciais) associadas a um perfil*, dada na Definição 2.2.1.

Sistemas de partículas diferentes são associados a EDPs diferentes. O processo de exclusão simples simétrico é descrito por uma equação do calor. É interessante observar que os teoremas de limite hidrodinâmico, que são enunciados na linguagem da probabilidade e provados com suas ferramentas, têm como corolário a existência de soluções fracas para as EDPs que aparecem como limite. Por outro lado, as ferramentas de EDP são essenciais para provar a unicidade das soluções, um passo fundamental na demonstração do teorema probabilístico que é o limite hidrodinâmico.

O sistema de partículas apresentado no início dessa introdução e outros relacionados surgiram inicialmente na Mecânica Estatística, como modelos simplificados de sistemas físicos com um número muito grande de componentes (por exemplo, um gás). A hipótese de que cada partícula aguarda um tempo exponencial antes de cada salto é feita por causa da conhecida propriedade de "perda de memória" das variáveis aleatórias exponenciais. As exponenciais são as únicas escolhas de tempos de espera que tornam a evolução do sistema como um todo um processo de Markov. Isso é interessante tanto do ponto de vista físico, pois esperamos que a evolução de um sistema físico dependa apenas do seu estado presente, não de todo o seu passado, quanto do ponto de vista matemático, pois os processos markovianos já foram estudados extensivamente, de modo que existem muitas ferramentas técnicas à disposição.

É de interesse dos físicos usar a interação microscópica entre as partículas para



deduzir as propriedades macroscópicas do sistema, como densidade, pressão e temperatura. Esses esforços são uma rica fonte de problemas para os matemáticos, pois o tratamento mesmo dos modelos mais simples é bastante intrincado, tendo originado várias técnicas matemáticas interessantes. Embora a evolução das configurações seja markoviana, a trajetória de uma partícula individual não é. Além disso, a complexidade do problema cresce muito rápido com a quantidade de sítios (de fato, no processo de exclusão apresentado acima existem  $2^{N+1}$  configurações possíveis).

O limite hidrodinâmico para muitas variantes do processo de exclusão ainda está em aberto. Nesta dissertação discutiremos uma dessas variantes, o processo de exclusão simples com fronteira aberta de taxa lenta, apresentado informalmente acima, e apresentaremos parte da demonstração do limite hidrodinâmico com detalhes. Além disso, este trabalho apresenta um pouco do material canônico de Teoria da Probabilidade usado para estudar esse problema, a saber: a teoria dos processos de Feller e a construção de martingais associados a tais processos. As técnicas usadas na demonstração do limite hidrodinâmico são as mesmas utilizadas por Adriana Neumann e Tertuliano Franco na primeira parte de [8].

A descrição mais intuitiva de um processo de Markov (num espaço de estados finito, para simplificar) é dada pelas probabilidades de transição  $P_t(\eta, \xi)$ , que representam a "probabilidade de no tempo  $t$  o processo estar no estado  $\xi$ , dado que no tempo 0 ele está no estado  $\eta$ . Acontece que essa descrição não é conveniente para trabalhar. Como observamos acima, o sistema de partículas apresentado no início dessa introdução tem  $2^{N+1}$  estados possíveis. Além disso as probabilidades  $P_t(\eta, \xi)$  são muito difíceis de calcular explicitamente. Todo o nosso trabalho com esse processo será baseado no chamado gerador infinitesimal, um operador linear que codifica toda a informação do processo. O Capítulo 1 a seguir apresentará a definição de gerador infinitesimal.

Além disso mostraremos como construir um martingal a partir de qualquer processo de Feller, uma construção que desempenhará um papel fundamental em vários passos da demonstração do limite hidrodinâmico. Construir martingais é vantajoso por causa da enorme quantidade de resultados que já foram provados para essa classe de processos estocásticos. No nosso caso, a desigualdade de Doob para martingais será importante no momento de fazer algumas estimativas cruciais para a demonstração do limite hidrodinâmico.

Todos os resultados novos desse trabalho (o limite hidrodinâmico para o pro-

cesso de exclusão simples com taxa lenta no bordo) foram obtidos em colaboração com Rangel Baldasso, cuja dissertação de mestrado apresenta várias demonstrações omitidas aqui. A exposição sobre processos de Markov é baseada nos livros, [5], [10] e [3].

# Capítulo 1

## Processos de Feller

### 1.1 Processos de Feller e Geradores Infinitesimais

As probabilidades de transição  $(P_t)_{t \geq 0}$  de um processo de Markov surgem como análogos da matriz de transição de uma cadeia de Markov com espaço de estados finito. A equação

$$P_t f(x) := \int_E P_t(x, dy) f(y) = \mathbb{E}_x[f(X_t)],$$

onde  $\mathbb{E}_x$  denota a esperança com respeito à medida induzida pelo processo  $(X_s)_{s \geq 0}$  com medida inicial concentrada no ponto  $x$ , mostra como as probabilidades de transição podem ser vistas como operadores em  $B(E)$ , o espaço de Banach das funções mensuráveis e limitadas em  $E$ . A equação de Chapman-Kolmogorov mostra que quando o processo é homogêneo no tempo (isto é,  $P(X_t|X_s)$  depende apenas da diferença  $t - s$ ) os operadores  $P_t$  formam um semigrupo, isto é,  $P_{t+s} = P_t \circ P_s$  para  $t, s \geq 0$ .

Colocando algumas hipóteses no comportamento desse semigrupo, obtemos uma grande classe de processos de Markov em cujo estudo podemos empregar com sucesso ferramentas de análise.

**Definição 1.1.1** (Semigrupo de contração). Sejam  $X$  um espaço de Banach com norma  $\|\cdot\|$  e  $(P_t)_{t \geq 0}$  uma família de operadores em  $X$ . Dizemos que  $(P_t)_{t \geq 0}$  é um

*semigrupo de contração*<sup>1</sup> se

1.  $P_{t+s} = P_t \circ P_s$  para quaisquer  $s, t \geq 0$
2.  $P_0 = I$  (o operador identidade)
3.  $\lim_{t \downarrow 0} \|P_t u - u\| = 0$  para todo  $u \in X$
4.  $\|P_t\| \leq 1$  para todo  $t \geq 0$

**Definição 1.1.2.** Um processo de Markov  $(X_t)_{t \geq 0}$  é dito *processo de Feller* se suas probabilidades de transição, vistas como operadores em  $B(E)$ , formam um semigrupo de contração.

A condição 3 na definição 1.1.1 é a que garante boas propriedades analíticas e permite recuperar o semigrupo a partir de sua "derivada no zero", o chamado gerador infinitesimal, definido a seguir:

**Definição 1.1.3** (Gerador Infinitesimal). Seja  $(P_t)_{t \geq 0}$  um semigrupo de operadores no espaço de Banach  $X$ . Definimos

$$D(L) := \left\{ u \in X : \exists \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t u - u}{t} \right\}.$$

Nesse conjunto podemos definir o operador  $L : D(L) \rightarrow X$  pondo

$$Lu := \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t u - u}{t}.$$

O operador  $L$  é chamado de *gerador infinitesimal* do semigrupo  $(P_t)_{t \geq 0}$ . Se  $X = B(E)$  e existir um processo de Markov associado esse semigrupo, dizemos que  $L$  é o gerador infinitesimal desse processo.

**Notação:** no restante do texto denotaremos a composição  $P_t \circ P_s$  simplesmente por  $P_t P_s$ .

A propriedade fundamental dos geradores infinitesimais é a seguinte:

**Proposição 1.1.4.** *Seja  $(P_t)_{t \geq 0}$  um semigrupo de contração no espaço de Banach  $X$  com a norma  $\|\cdot\|$ . Se  $u \in D(L)$  e  $t \geq 0$  então  $P_t u \in D(L)$  e*

$$\frac{d}{dt} P_t u = L P_t u = P_t L u. \tag{1.1}$$

---

<sup>1</sup>Alguns livros se referem a esses semigrupos como "semigrupos de contração fortemente contínuos" ou "semigrupos de Feller-Dynkin".

*Demonstração.* O caso  $t = 0$  é a definição de gerador infinitesimal. Suponha então  $t > 0$ . Seja  $u \in D(L)$ . Tome  $h > 0$ .

$$\frac{P_h P_t u - P_t u}{h} = P_t \frac{P_h u - u}{h} \xrightarrow{h \downarrow 0} P_t L u.$$

Isso mostra que  $P_t u \in D(L)$  e  $L P_t u = P_t L u$ . Além disso,  $t \mapsto P_t u$  é diferenciável à direita.

Calculamos agora a derivada pela esquerda: tome  $h < 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{P_{t+h} u - P_t u}{h} &= \frac{P_{t+h} P_{-h} u - P_{t+h} u}{-h} \\ &= P_{t+h} \left( \frac{P_{-h} u - u}{-h} - L u \right) + (P_{t+h} - P_t) L u + P_t L u \end{aligned}$$

Mas

$$\left\| P_{t+h} \left( \frac{P_{-h} u - u}{-h} - L u \right) \right\| \leq \left\| \frac{P_{-h} u - u}{-h} - L u \right\| \xrightarrow{h \uparrow 0} 0$$

e

$$\|(P_{t+h} - P_t) L u\| = \|P_{t+h} (I - P_{-h}) L u\| \xrightarrow{h \uparrow 0} 0.$$

Logo existe o limite  $\lim_{h \uparrow 0} \frac{P_{t+h} u - P_t u}{h}$  e ele vale  $P_t L u$ . □

**Observação:** A demonstração acima mostra que  $t \mapsto P_t u \in C^1[0, \infty)$ .

Toda a demonstração do limite hidrodinâmico será baseada no gerador infinitesimal do processo de exclusão. Em nenhum momento será necessário calcular uma probabilidade de transição. Nesse caso, o gerador infinitesimal já fornece informação suficiente sobre o processo para obtermos um resultado interessante. Esse é um fato geral: o gerador infinitesimal contém toda a informação do processo, no sentido de que sabendo o gerador podemos recuperar (infelizmente nem sempre de forma construtiva) as probabilidades de transição. Esse é o conteúdo do Teorema de Hille-Yosida, que se encontra no apêndice deste trabalho.

## 1.2 Associando Martingais a Processos de Feller

Nessa seção mostramos como contruir um martingal a partir de qualquer processo de Feller. Essa construção é muito útil em várias situações. Nos teoremas de limite hidrodinâmico, essa construção permite usar a Desigualdade de Doob para martingais para fazer algumas estimativas importantes na demonstração.

**Teorema 1.2.1.** *Sejam  $(X_t)_{t \geq 0}$  um processo de Feller com semigrupo  $(P_t)_{t \geq 0}$  e espaço de estados  $E$ . Seja  $f : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$  limitada,  $C^2$  na primeira coordenada e com as*

derivadas de primeira e segunda ordens limitadas uniformemente na segunda coordenada. <sup>2</sup> Suponha ainda que  $f(t, \cdot) \in D(L)$  para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ . Então, denotando  $f(t, x)$  por  $f_t(x)$ ,

$$M_t^f := f_t(X_t) - f_0(X_0) - \int_0^t (\partial_u + L)f_u(X_u) du \quad (1.2)$$

é um martingal com respeito à filtração natural do processo  $(X_t)_{t \geq 0}$ . <sup>3</sup>

Além disso, definindo

$$\langle M^f \rangle_t := \int_0^t \{L f_s(X_s)^2 - 2f_s(X_s)L f_s(X_s)\} ds,$$

temos que  $(M_t^f)^2 - \langle M^f \rangle_t$  é um martingal com respeito à filtração natural do processo  $(X_t)_{t \geq 0}$ . O processo  $\langle M^f \rangle_t$  é chamado de variação quadrática de  $M_t^f$ .

**Demonstração.** Devemos mostrar que se  $t > s$  então  $\mathbb{E}_x[M_t^f - M_s^f | \mathcal{F}_s] = 0$ . Isso ocorre se e somente se

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[ f_t(X_t) - f_s(X_s) - \int_s^t (\partial_u + L)f_u(X_u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0 \\ \text{(Prop. Markov)} & \iff \mathbb{E}_{X_s}[f_t(X_{t-s})] - \int_s^t \mathbb{E}_{X_s}[(\partial_u + L)f_u(X_{u-s})] du = f_s(X_s) \\ & \iff P_{t-s}f_t(X_s) - \int_0^{t-s} P_u[(\partial_u + L)f_{u+s}(X_s)] du = f_s(X_s). \end{aligned}$$

Precisamos verificar a igualdade acima ponto a ponto no espaço amostral  $\Omega$ . Para isso vamos verificá-la trocando  $X_s$  por  $y$ , para cada  $y \in E$ .

A igualdade é verdadeira quando  $t = s$ . Variando  $t$ , vemos que basta mostrar que

$$\frac{d}{dt} P_{t-s}f_t(y) = P_{t-s}f'_t(y) + P_{t-s}L f_t(y)$$

para qualquer  $y \in E$ , onde  $f'_t(x)$  é a derivada de  $f$  na primeira coordenada no ponto  $(t, x)$ . Tome  $h \in \mathbb{R}$  pequeno o suficiente para que nenhum dos índices abaixo seja negativo.

$$\begin{aligned} \frac{(P_{t-s+h}f_{t+h} - P_{t-s}f_t)(y)}{h} &= \frac{1}{h} [(P_{t-s+h}f_{t+h} - P_{t-s+h}f_t)(y)] + \\ & \quad + \frac{1}{h} [(P_{t-s+h}f_t - P_{t-s}f_t)(y)] \quad (1.3) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Essa hipótese serve para assegurar que  $\partial_t f(\cdot, x)$  é Lipschitz com uma constante que não depende de  $x$ . Um caso simples que aparece na prática é quando a função  $f$  não depende de  $t$ .

<sup>3</sup>Isto é, a filtração  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , onde  $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$ .

Mostremos que a primeira parcela da expressão acima converge a  $P_{t-s}f'_t(y)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h}[(P_{t-s+h}f_{t+h} - P_{t-s+h}f_t)(y)] = \mathbb{E}_y \left[ \frac{f_{t+h} - f_t}{h}(X_{t-s+h}) \right] \\ &= \mathbb{E}_y \left[ \frac{f_{t+h} - f_t}{h}(X_{t-s+h}) - f'_t(X_{t-s+h}) + f'_t(X_{t-s+h}) - f'_t(X_{t-s}) + f'_t(X_{t-s}) \right] \\ &= \mathbb{E}_y \left[ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f'_r(X_{t-s+h}) - f'_t(X_{t-s+h}) dr \right] + (P_{t-s+h} - P_{t-s})f'_t(y) + P_{t-s}f'_t(y) \end{aligned}$$

Pela hipótese de limitação sobre as derivadas de  $f$ , segue que a primeira parcela  $\rightarrow 0$  quando  $h \downarrow 0$ . A segunda parcela  $\rightarrow 0$  quando  $h \downarrow 0$  pela continuidade do semigrupo.

Finalmente, note que a segunda parcela de (1.3) converge a  $LP_{t-s}f_t(y) = P_{t-s}Lf_t(y)$  pela Proposição 1.1.4.

A demonstração da afirmação sobre a variação quadrática precisa de cálculo estocástico e não será feita aqui. O leitor pode consultar o Lema 5.1 de [5].  $\square$

### 1.3 Geradores Infinitesimais e o Teorema de Hille-Yosida

Vimos que todo processo de Feller possui um gerador infinitesimal associado. Veremos agora que o gerador infinitesimal contém *toda* a informação sobre o processo, no sentido de que o determina totalmente.

Faremos todas as coisas no contexto analítico de semigrupos de contração em espaços de Banach. Dado um operador num espaço de Banach  $X$ , será ele o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração? A resposta é sim, sob certas hipóteses que revelaremos a seguir.

Precisaremos várias vezes integrar funções tomando valores num espaço de Banach  $X$  cuja norma será denotada por  $\|\cdot\|$ . Dada uma função mensurável  $f : [a, b] \rightarrow X$ , é possível definir (não faremos a teoria aqui)

$$\int_a^b f(t) dt \in X$$

como o limite de somas de Riemann  $\sum_{i=1}^n f(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$  onde  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  e  $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ . Essa integral é linear e satisfaz  $\|\int_a^b f(t) dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$ , assim como a integral usual de funções tomando valores na reta. Precisaremos

do seguinte resultado: se  $A : D(A) \rightarrow X$  é um operador fechado e  $f(t) \in D(A)$  para  $a \leq t \leq b$  então  $\int_a^b Af(t) dt = A(\int_a^b f(t) dt)$ . Podemos tornar esse resultado plausível imaginando uma sequência  $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de partições de  $[a, b]$ ,  $\mathcal{P}_k = \{t_0, \dots, t_{n_k}\}$ , onde  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_k} = b$ , e associando somas de Riemann  $S_{\mathcal{P}_k}(f) := \sum_{i=1}^{n_k} f(t_i)(t_i - t_{i-1})$  a essas partições. Se a norma de  $\mathcal{P}_k$  converge a zero quando  $k \rightarrow \infty$  então  $S_{\mathcal{P}_k}(f)$  converge a  $\int_a^b f(t) dt$  quando  $k \rightarrow \infty$  e  $S_{\mathcal{P}_k}(Af)$  converge a  $\int_a^b Af(t) dt$ . Mas  $S_{\mathcal{P}_k}(Af) = A[S_{\mathcal{P}_k}(f)]$ . Como  $A$  é fechado, obtemos a identidade procurada. Ela vale em particular se  $A : X \rightarrow X$  for um operador limitado.

Essa integral também pode ser definida quando o intervalo  $[a, b]$  é infinito, e os resultados do parágrafo anterior continuam valendo.

A seguir,  $(P_t)_{t \geq 0}$  sempre denotará um semigrupo de contração num espaço de Banach  $X$  com gerador infinitesimal  $L : D(L) \rightarrow X$ .

**Proposição 1.3.1.**  $D(L)$  é denso em  $X$  e  $L$  é um operador fechado.<sup>4</sup>

*Demonstração.* Começamos provando que  $D(L)$  é denso em  $X$ . Defina  $u_t := \int_0^t P_s u ds$ .

**Afirmção 1.3.2.**

$$\frac{u_t}{t} \xrightarrow{t \downarrow 0} u$$

*Demonstração.*

$$\left\| \frac{u_t}{t} - u \right\| = \frac{1}{t} \left\| \int_0^t P_s u - u ds \right\| \leq \sup_{0 \leq s \leq t} \|P_s u - u\| \xrightarrow{t \downarrow 0} 0$$

□

**Observação:** Com o mesmo argumento podemos provar uma afirmação mais geral: dada  $f : [0, +\infty) \rightarrow X$  contínua, temos  $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = f(0)$ . Esse fato será usado algumas vezes no que se segue.

**Afirmção 1.3.3.**

$$u_t \in D(L).$$

---

<sup>4</sup>Dizemos que um operador linear  $L$  em  $X$  é fechado quando o seu gráfico  $\{(x, Lx) : x \in X\}$  é um subconjunto fechado de  $X \times X$  com a topologia produto. De forma equivalente, se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x$  e  $y$  são elementos de  $X$  tais que  $x_n \rightarrow x$  e  $Lx_n \rightarrow y$  então  $Lx = y$ .



*Demonstração.* Seja  $h > 0$ .

$$\begin{aligned}
\frac{P_h u_t - u_t}{h} &= \frac{1}{h} \left[ P_h \left( \int_0^t P_s u \, ds \right) - \left( \int_0^t P_s u \, ds \right) \right] \\
&= \frac{1}{h} \int_0^t P_{s+h} u \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t P_s u \, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} P_s u \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t P_s u \, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} P_s u \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h P_s u \, ds.
\end{aligned}$$

Usando a Afirmação 1.3.2, vemos que a última expressão converge a  $P_t u - u$  quando  $h \downarrow 0$ , concluindo a prova.  $\square$

Combinando as duas últimas afirmações vemos que  $D(L)$  é denso em  $X$ , como queríamos demonstrar.

Agora mostraremos que  $L$  é um operador fechado. Suponha que exista uma seqüência de elementos  $u_n \in D(L)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $u_n \rightarrow u \in X$  e  $Lu_n \rightarrow v \in X$ . Queremos mostrar que  $u \in D(L)$  e  $v = Lu$ . Tome  $h > 0$ . Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e o fato de que  $\partial_t P_t u_n = LP_t u_n$  (Proposição 1.1.4), obtemos

$$\frac{1}{h} (P_h u_n - u_n) = \frac{1}{h} \int_0^h P_s L u_n \, ds.$$

Quando  $n \rightarrow \infty$ , o lado esquerdo da equação acima converge a  $\frac{1}{h} (P_h u - u)$ . Para o lado direito observe que

$$\left\| \int_0^h P_s L u_n - P_s v \, ds \right\| \leq h \cdot \|L u_n - v\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

logo o lado direito converge a  $\frac{1}{h} \int_0^h P_s v \, ds$ . Segue que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (P_h u - u) = v,$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

**Definição 1.3.4.** O *resolvente* de  $L$  é por definição o conjunto

$$\rho(L) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda - L \text{ é bijeção}\},$$

onde  $\lambda - L := \lambda I - L$ .

**Proposição 1.3.5.** Se  $\lambda \in \rho(L)$  então  $R_\lambda := (\lambda - L)^{-1}$  é um operador limitado.

*Demonstração.* Pelo Teorema do Gráfico Fechado, basta mostrar que  $(\lambda - L)^{-1}$  é um operador fechado. Seja  $u_n \rightarrow u$  uma sequência em  $X$  tal que  $(\lambda - L)^{-1}u_n \rightarrow v$ . Queremos mostrar que  $(\lambda - L)^{-1}u = v$ . Mas já sabemos da proposição 1.3.1 que  $\lambda - L$  é fechado, logo  $u_n = (\lambda - L)(\lambda - L)^{-1}u_n \rightarrow (\lambda - L)v$ , como queríamos.  $\square$

**Teorema 1.3.6.** *Sejam,  $\lambda, \mu \in \rho(L)$ . Então*

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu \quad e \quad R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

*Além disso,*

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda \in \rho(L) \quad e \quad R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt,$$

*para todo  $u \in X$  e  $\|R_\lambda\| \leq 1/\lambda$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\lambda$  e  $\mu \in \rho(L)$ . A prova da comutatividade de  $R_\lambda, R_\mu, \lambda - L$  e  $\mu - L$  é simples e será omitida. Usando a comutatividade, obtemos

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= [(\lambda - L)^{-1} - (\mu - L)^{-1}](\lambda - L)(\mu - L)R_\lambda R_\mu \\ &= [(\mu - L) - (\lambda - L)]R_\lambda R_\mu \\ &= (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu. \end{aligned}$$

Para a segunda parte da proposição, tome  $\lambda > 0$ . Note que  $\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt$  está bem definido. Começamos mostrando que

$$(\lambda - L) \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt = u.$$

Para verificar a igualdade acima é suficiente mostrar que  $\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt \in D(L)$  e

$$L \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt \right) = \lambda \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt \right) - u.$$

Para isso calculamos (seja  $h > 0$ )

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left( P_h \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} P_t u \, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda(t-h)} P_t u \, dt + \int_0^\infty e^{-\lambda(t-h)} P_t u \, dt \right) \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} P_t u \, dt. \end{aligned}$$

Quando  $h \downarrow 0$ , a última expressão converge a

$$\lambda \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt \right) - u,$$

como desejado. Agora resta apenas mostrar que  $\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t (\lambda - L)u \, dt = u$  para todo  $u \in D(L)$ . Mas essa igualdade ocorre se e só se

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t L u \, dt = \lambda \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t u \, dt \right) - u.$$

Mas sabemos que  $L$  é um operador fechado e que comuta com  $P_t$ , logo pode ser passado para fora da integral no lado esquerdo da igualdade acima. A primeira parte da demonstração mostra que o resultado é exatamente o lado direito da igualdade.

Finalmente, note que, como o operador  $P_t$  é uma contração, para  $\lambda > 0$  e  $u \in X$  temos que

$$\|R_\lambda u\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|u\| \, dt = \frac{1}{\lambda} \|u\|.$$

Logo  $\|R_\lambda\| \leq 1/\lambda$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Já temos todas as propriedades necessárias para caracterizar geradores infinitesimais, como mostra o próximo teorema.

**Teorema 1.3.7 (Hille-Yosida).** *Seja  $D(L)$  um subespaço linear denso do espaço de Banach  $X$ . Seja  $L : D(L) \rightarrow X$  um operador linear fechado. Então  $L$  é o gerador de um semigrupo de contração se e somente se*

$$(0, \infty) \subset \rho(L) \text{ e } \|R_\lambda\| \leq 1/\lambda \quad \forall \lambda > 0,$$

onde  $R_\lambda := (\lambda - L)^{-1}$ .

*Demonstração.* A implicação "somente se" é o enunciado do teorema anterior. Fazemos agora a implicação "se".

Seja  $L$  como no enunciado. Se  $L$  fosse um operador limitado poderíamos definir  $P_t := e^{tL}$  como o semigrupo gerado por  $L$ . Como  $L$  não é necessariamente limitado, precisaremos encontrar outra maneira de definir o semigrupo de contração. Veremos a seguir que os resolventes  $R_\lambda$  aproximam o operador identidade ponto a ponto quando  $\lambda \rightarrow \infty$  e os usaremos para definir aproximações limitadas de  $L$ . A seguir mostraremos que as exponenciais dessas aproximações convergem a certos operadores, que nos darão o semigrupo de contração desejado.

**Afirmção 1.3.8.**

$$\lambda R_\lambda u \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} u \quad \forall u \in X.$$

*Demonstração.* Suponha inicialmente que  $u \in D(L)$ . Então

$$R_\lambda(\lambda - L)u = u \Rightarrow \lambda R_\lambda u - u = R_\lambda Lu$$

$$\text{e } \|\lambda R_\lambda u - u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|Lu\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Seja  $\varepsilon > 0$ . Se  $u \notin D(L)$  tome  $v \in D(L)$  com  $\|u - v\| \leq \varepsilon$  (possível pois  $D(L)$  é denso em  $X$  por hipótese).

$$\|\lambda R_\lambda u - u\| \leq \|\lambda R_\lambda(u - v)\| + \|\lambda R_\lambda v - v\| + \|v - u\|$$

$$\Rightarrow \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R_\lambda u - u\| \leq 2\varepsilon.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  vemos que  $\lambda R_\lambda u \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} u$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Para  $\lambda > 0$  defina  $L_\lambda := -\lambda + \lambda^2 R_\lambda$ . Note que  $L_\lambda$  é um operador limitado. Se  $u \in D(L)$  segue de  $R_\lambda(\lambda - L)u = (\lambda - L)R_\lambda u = u$  que  $L_\lambda u = \lambda R_\lambda Lu = \lambda L R_\lambda u$ . Note ainda que

$$\|e^{tL_\lambda}\| = \left\| e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 R_\lambda} \right\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \lambda^{2n} \|R_\lambda\|^n}{n!} \leq 1,$$

logo  $(e^{tL_\lambda})_{t \geq 0}$  é um semigrupo de contração com gerador  $L_\lambda$  e  $D(L_\lambda) = X$ .

Nosso objetivo agora é mostrar que  $e^{tL_\lambda} u$  converge quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Sejam  $\lambda, \mu > 0$ .

$$e^{tL_\lambda} u - e^{tL_\mu} u = \int_0^t \frac{d}{ds} [e^{(t-s)L_\mu} e^{sL_\lambda} u] ds = \int_0^t e^{(t-s)L_\mu} e^{sL_\lambda} (L_\lambda - L_\mu) u ds$$

$$\Rightarrow \|e^{tL_\lambda} u - e^{tL_\mu} u\| \leq t \|(L_\lambda - L_\mu)u\| \xrightarrow{\lambda, \mu \rightarrow \infty} 0$$

A convergência é uniforme em  $t$  para  $t$  variando num compacto. A conta acima mostra que a sequência  $(e^{tL_n} u)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy, portanto converge quando  $n \rightarrow \infty$ . Defina então  $P_t u := \lim_{n \rightarrow \infty} e^{tL_n} u$ .

**Afirmção 1.3.9.**  $(P_t)_{t \geq 0}$  é um semigrupo de contração.

- $P_t$  é contração:  $\|P_t u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{tL_n} u\| \leq \|u\|$ .
- $P_0 = I$ : é claro.
- $P_{t+s} = P_t P_s \quad \forall s, t \geq 0$ :

$$\|e^{tL_n} P_s u - P_{t+s} u\| \leq \|e^{tL_n} (P_s - e^{sL_n}) u\| + \|e^{(t+s)L_n} u - P_{t+s} u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- $\lim_{t \downarrow 0} \|P_t u - u\| = 0$ : dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $n$  tal que  $\|P_t u - e^{tL_n} u - u\| \leq \varepsilon$ ,  $\forall 0 \leq t \leq 1$ .

$$\|P_t u - u\| \leq \|P_t u - e^{tL_n} u\| + \|e^{tL_n} u - u\| \Rightarrow \limsup_{t \downarrow 0} \|P_t u - u\| \leq \varepsilon.$$

Agora basta tomar o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Resta apenas mostrar que  $L$  é o gerador infinitesimal de  $(P_t)_{t \geq 0}$ . Seja  $B$  o gerador de  $(P_t)_{t \geq 0}$ . Seja  $u \in D(L)$ . Note que

$$\frac{1}{t} (e^{tL_n} u - u) = \frac{1}{t} \int_0^t e^{sL_n} L_n u \, ds.$$

Quando  $n \rightarrow \infty$ , o lado esquerdo da identidade acima converge a  $\frac{1}{t} (P_t u - u)$ . O lado direito converge a  $\frac{1}{t} \int_0^t P_s L u \, ds$ , pois (lembrando que  $L_\lambda u = \lambda R_\lambda L u \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} L u$ )

$$\|e^{sL_n} L_n u - P_s L u\| \leq \|e^{sL_n}\| \|L_n u - L u\| + \|e^{sL_n} L u - P_s L u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

uniformemente em  $s$ . Logo

$$\frac{1}{t} (P_t u - u) = \frac{1}{t} \int_0^t P_s L u \, ds.$$

Fazendo  $t \downarrow 0$  vemos que  $u \in D(B)$  e  $Bu = Lu$ . Isso mostra que  $B$  é uma extensão de  $L$ . Para ver que  $B = L$  tome  $\lambda > 0$ . Pelo teorema anterior,  $\lambda - B$  é uma bijeção entre  $D(B)$  e  $X$ . Por hipótese,  $\lambda - L$  é uma bijeção entre  $D(L)$  e  $X$ . Como  $B$  é uma extensão de  $L$ , segue que  $D(B) = D(L)$ , portanto  $B = L$ , como queríamos demonstrar. □

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo definimos rigorosamente o processo de exclusão simples com bordo de taxa lenta através de seu gerador infinitesimal, enunciamos o teorema de limite hidrodinâmico e listamos os principais passos da sua prova.

### 2.1 O Processo de Exclusão Simples com Taxa Lenta no Bordo

Começamos fixando a notação que será usada daqui para a frente no texto. Para todo  $N \geq 1$ , defina  $I_N = \{0, 1, \dots, N\}$  um subconjunto de  $\mathbb{N}$  com  $N + 1$  pontos. Os sítios de  $I_N$  serão denotados por  $x, y$  e  $z$  enquanto as variáveis macroscópicas (pontos no intervalo  $[0, 1]$ ) serão denotadas por  $u, v$  e  $w$ . O espaço de estados (também chamado de espaço das configurações ou espaço dos estados microscópicos) será denotado por  $\{0, 1\}^{I_N}$ ; elementos de  $\{0, 1\}^{I_N}$ , chamados de configurações, serão denotados por  $\eta$  e  $\xi$ . Desta maneira  $\eta(x) \in \{0, 1\}$  representa o número de partículas no sítio  $x$  para a configuração  $\eta$ .

Formalmente, podemos definir o processo de exclusão unidimensional com bordo de taxa lenta como o processo de Markov com espaço de estados  $\{0, 1\}^{I_N}$  cujo gerador infinitesimal é dado pelo operador  $L_N$  definido no espaço das funções reais em  $\{0, 1\}^{I_N}$ , que em funções  $f : \{0, 1\}^{I_N} \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por <sup>1</sup>

$$(L_N f)(\eta) = (L_{N,0} f)(\eta) + (L_{N,b} f)(\eta),$$

---

<sup>1</sup>O leitor pode pensar intuitivamente que a fórmula do gerador infinitesimal é dada por  $L_N f(\eta) = \sum_{\xi} (\text{taxa de salto de } \eta \text{ para } \xi)[f(\xi) - f(\eta)]$ .

onde

$$(L_{N,0}f)(\eta) = \sum_{x=0}^{N-1} [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)],$$

com

$$(\eta^{x,x+1})(y) = \begin{cases} \eta(x+1), & \text{se } y = x \\ \eta(x), & \text{se } y = x + 1 \\ \eta(y), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$(L_{N,b}f)(\eta) = \left[ \frac{\alpha}{N}(1 - \eta(0)) + \frac{1 - \alpha}{N}\eta(0) \right] [f(\eta^0) - f(\eta)] \\ + \left[ \frac{\beta}{N}(1 - \eta(N)) + \frac{1 - \beta}{N}\eta(N) \right] [f(\eta^N) - f(\eta)],$$

com

$$(\eta^x)(y) = \begin{cases} 1 - \eta(x), & \text{se } y = x \\ \eta(y), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que o espaço de estados do processo descrito acima é finito, portanto o operador  $L_N$  pode ser descrito por uma matriz, que é dada por  $L_N = L_{N,0} + L_{N,b}$ , onde

$$L_{N,0}(\eta, \xi) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \xi = \eta^{x,x+1}, 0 \leq x \leq N - 1 \\ -N & , \text{ se } \xi = \eta \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

e

$$L_{N,b}(\eta, \xi) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{N}\eta(0) + \frac{\alpha}{N}(1 - \eta(0)) & , \text{ se } \xi = \eta^0 \\ \frac{1-\beta}{N}\eta(N) + \frac{\beta}{N}(1 - \eta(N)) & , \text{ se } \xi = \eta^N \\ -\frac{1-\alpha}{N}\eta(0) - \frac{\alpha}{N}(1 - \eta(0)) - \frac{1-\beta}{N}\eta(N) - \frac{\beta}{N}(1 - \eta(N)) & , \text{ se } \xi = \eta \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotaremos por  $(\eta_t^N)_{t \geq 0}$  o processo de Markov em  $\{0, 1\}^{I_N}$  associado ao gerador  $N^2 L_N$ . Isto é o processo de exclusão simples com taxa lenta no bordo com o tempo acelerado por um fator de  $N^2$ . Essa mudança na escala de tempo é importante para conseguirmos a convergência da densidade.

Mesmo que  $\eta_t^N$  dependa em  $\alpha$  e  $\beta$ , não vamos indexar nestes índices para simplificar a notação. Quando estiver claro qual o valor de  $N$  que estamos considerando, podemos omiti-lo também, escrevendo  $\eta_t$  em vez de  $\eta_t^N$ . Observe que podemos considerar  $\eta_t^N$  como uma função aleatória em  $D_{\{0,1\}^{I_N}}(\mathbb{R}_+)$ , o espaço das trajetórias càdlàg<sup>2</sup> tomando valores em  $\{0, 1\}^{I_N}$ , onde a cada tempo  $t$  associamos a configuração  $\eta_t^N \in \{0, 1\}^{I_N}$ .

Nosso objetivo nesse trabalho é estudar o limite hidrodinâmico desse processo. Isto é, consideraremos o processo em  $\{0, 1/N, 2/N, \dots, 1\}$  e faremos  $N \rightarrow \infty$ . Mostraremos que a densidade de partículas em  $[0, 1]$  (que será precisamente definida na seção seguinte) converge (também num sentido preciso definido na seção seguinte) para a (única) solução fraca de uma EDP de evolução.

## 2.2 O Limite Hidrodinâmico

Nesta seção enunciaremos de forma precisa um teorema de limite hidrodinâmico para o processo de exclusão simples com taxa lenta no bordo. Esperamos que no limite  $N \rightarrow \infty$  o nosso processo se comporte como a solução de uma EDP. Para isso precisamos de uma definição adequada de *condição inicial*.

**Definição 2.2.1.** Uma sequência de probabilidades  $(\mu_N)_{N \in \mathbb{N}}$  em  $\{0, 1\}^{I_N}$  é dita associada ao perfil de densidade  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  se, para todo  $\delta > 0$  e toda função contínua  $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N \left\{ \eta : \left| \frac{1}{N+1} \sum_{x \in I_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \eta(x) - \int_0^1 H(u) \gamma(u) du \right| > \delta \right\} = 0. \quad (2.1)$$

**Notação:** Denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno usual em  $L^2[0, 1]$ , isto é, dadas  $f$  e  $g \in L^2[0, 1]$  denotamos  $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(u)g(u) du$ . Sempre que tivermos uma função de duas variáveis, um subíndice denotará uma variável, e não uma derivada parcial. Por exemplo,  $H_s(u)$  significa  $H(s, u)$ . Derivadas parciais serão indicadas pelo símbolo  $\partial$ . A derivada segunda na derivada espacial (a segunda coordenada) será denotada por  $\Delta$ .

As trajetórias do processo de exclusão serão denotadas por  $\eta^N$ .

Para  $\mathcal{I}$  um intervalo em  $\mathbb{R}$  e  $n, m \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $C^{n,m}([0, T] \times \mathcal{I})$  o conjunto das funções definidas em  $[0, T] \times \mathcal{I}$  que são de classe  $C^n$  no tempo e  $C^m$  no

---

<sup>2</sup>Abreviação francesa para "contínuas à direita com limite à esquerda".



espaço e por  $C_c^{n,m}([0, T] \times \mathcal{I})$  o subespaço de  $C^{n,m}([0, T] \times \mathcal{I})$  formado pelas funções com suporte compacto.

Nossas próximas definições apresentam a EDP que aparecerá como limite da densidade de partículas do nosso sistema e o conceito de solução fraca para tal equação. Antes, especificaremos o espaço onde vivem as soluções fracas:

**Definição 2.2.2.** Dizemos que uma função  $f \in L^2(0, 1)$  pertence ao espaço de Sobolev  $\mathcal{H}^1(0, 1)$  se existir uma função  $g \in L^2(0, 1)$  tal que para toda  $\varphi \in C_c^\infty(0, 1)$  vale

$$\int_0^1 f(u)\varphi'(u) du = - \int_0^1 g(u)\varphi(u) du.$$

A função  $g$  é chamada de *derivada fraca* de  $f$  e denotada por  $f'$ . Prova-se (ver [3]) que  $f'$  está bem definida e  $\mathcal{H}^1$  é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{H}^1(0,1)} := \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(0,1)} + \langle f_1', f_2' \rangle_{L^2(0,1)}.$$

Denotamos por  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(0,1)}$  a norma em  $\mathcal{H}^1(0, 1)$  induzida pelo produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^1(0,1)}$ .

**Definição 2.2.3.** O espaço  $L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1))$  é formado pelas funções mensuráveis  $\rho : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}^1(0, 1)$  tais que

$$\int_0^T \|\rho(t)\|_{\mathcal{H}^1(0,1)}^2 dt < \infty.$$

**Definição 2.2.4.** Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Uma função limitada  $\rho : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução fraca da EDP parabólica com condições de fronteira

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t(u) = \Delta \rho_t(u), & \forall (t, u) \in [0, T] \times [0, 1] \\ \rho(0, u) = \gamma(u) & \forall u \in [0, 1] \\ \partial_u \rho_t(0) = -\alpha + \rho_t(0), & \forall t \in [0, T] \\ \partial_u \rho_t(1) = \beta - \rho_t(1), & \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (2.2)$$

se  $\rho \in L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1))$  e para  $t \in [0, T]$  e  $H \in C^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$ ,  $\rho$  satisfaz a equação

integral

$$\begin{aligned}
\langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle &= \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds \\
&+ \int_0^t \{ \rho_s(0) \partial_u H_s(0) - \rho_s(1) \partial_u H_s(1) \} ds \\
&+ \int_0^t \{ H_s(0) (\alpha - \rho_s(0)) + H_s(1) (\beta - \rho_s(1)) \} ds.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Na expressão acima, precisamos dar um sentido às integrais envolvendo  $\rho_s(0)$  e  $\rho_s(1)$ , pois as densidades  $\rho_s$  só estão definidas a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula. Sabemos que  $\rho \in L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1))$ . É possível demonstrar (ver [2], Teorema 8.2) que para cada  $s \in [0, T]$  a função  $\rho_s$  é igual, quase certamente, a uma função absolutamente contínua. Dessa forma, as funções  $f_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f_n(s) := \frac{1}{n} \int_0^{1/n} \rho_s(u) du$$

convergem pontualmente quando  $n \rightarrow \infty$ . Denotamos por  $\rho_s(0)$  o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s)$ . Note que as funções  $f_n$  são mensuráveis, logo  $\rho_s(0)$  é uma função mensurável de  $s$ , de modo que a integral envolvendo  $\rho_s(0)$  em (2.3) está bem definida. Procedemos da mesma forma para dar sentido à integral envolvendo  $\rho_s(1)$ .

Para a motivação dessa noção de solução fraca, o leitor pode consultar o Apêndice A.

Agora podemos enunciar o nosso principal resultado:

**Teorema 2.2.5** (Limite Hidrodinâmico). *Fixe um perfil inicial contínuo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Seja  $(\mu_N)_{N \in \mathbb{N}}$  uma sequência de probabilidades em  $\{0, 1\}^{I_N}$  associada a  $\gamma$ . Suponha que  $\alpha = \beta$ . Então, para cada  $t \in [0, T]$ , para cada  $\delta > 0$  e para toda  $H \in C[0, 1]$ , vale*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{\mu_N} \left[ \eta_t^N : \left| \frac{1}{N+1} \sum_{x \in I_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \eta_t^N(x) - \int_0^1 H(u) \rho(t, u) du \right| \geq \delta \right] = 0,$$

onde  $\rho(t, \cdot)$  é a solução fraca da EDP (2.2).

**Observação:** Colocamos a hipótese  $\alpha = \beta$  porque a nossa demonstração precisa da reversibilidade do processo e da medida invariante Bernoulli produto em dois passos cruciais, que se encontram nas Seções 3.2 e 3.3. No entanto, outros passos da demonstração funcionam bem sem essa hipótese, motivo pelo qual continuaremos diferenciando  $\alpha$  e  $\beta$  sempre que for possível.

Até agora, temos uma sequência de processos de Markov  $\eta_t^N$ , que podemos considerar como funções aleatórias em  $D_{\{0,1\}^{I_N}}[0, T]$ . Queremos fazer um limite em  $N$  para demonstrar o Teorema 2.2.5. No entanto, o espaço de estados muda conforme mudamos o valor de  $N$ . Para contornar isso, vamos considerar as medidas empíricas associadas ao nosso processo, que definimos agora. As definições e notações apresentadas a seguir serão usadas frequentemente no que se segue.

**Definição 2.2.6.** Dada uma configuração  $\eta \in \{0, 1\}^{I_N}$ , associamos uma medida em  $[0, 1]$ , chamada de *medida empírica associada* a  $\eta$ , dada por

$$\pi = \frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^N \eta(x) \delta_{\frac{x}{N}}.$$

Acima  $\delta_u$  denota a delta de Dirac no ponto  $u$ . Às vezes escreveremos  $\pi^N$  em vez de  $\pi$  para explicitar a dependência em  $N$ . Note que para não carregar a notação não explicitamos a dependência de  $\pi$  em  $\eta$ . Com isso, dado um processo de Markov em  $D_{\{0,1\}^{I_N}}[0, T]$ , podemos considerar o processo das medidas empíricas  $\pi_t^N$  em  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$ , onde  $\mathcal{M}$  é o conjunto das medidas positivas em  $[0, 1]$  com medida total menor ou igual a um, com a topologia da convergência fraca. Observe que a aplicação que leva um processo de Markov em  $D_{\{0,1\}^{I_N}}[0, T]$  no processo de suas medidas empíricas em  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$  é claramente injetiva. Disto segue que  $\pi_t^N$  também pode ser vista como um processo de Markov.

**Notação:** Denotaremos por  $\mathbb{Q}_N$  a medida induzida em  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$  pelo processo de Markov  $\pi_t^N$ . A medida  $\mathbb{Q}_N$  pode ser pensada como o pushforward da medida  $\mathbb{P}_{\mu_N}$  pela aplicação  $\eta_t^N \mapsto \pi_t^N$  que associa a cada trajetória no espaço de configurações a trajetória de suas medidas empíricas.

Para uma função integrável  $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\langle \pi_t^N, H \rangle$  indica a integral de  $H$  com respeito a  $\pi_t^N$ :

$$\langle \pi_t^N, H \rangle = \frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^N H\left(\frac{x}{N}\right) \eta_t(x).$$

Embora estejamos usando a mesma notação que usamos para o produto interno em  $L^2[0, 1]$ , o contexto deve evitar ambiguidades. Além disso, quando a medida  $\pi$  tem densidade  $\rho$  com respeito à medida de Lebesgue, podemos escrever  $\langle \rho_t, H \rangle$  para denotar  $\langle \pi_t, H \rangle$ , o que coincide com a notação  $\langle \rho_t, H \rangle$  para o produto interno entre  $\rho_t$  e  $H$  em  $L^2[0, 1]$ .

Estamos finalmente prontos para enunciar a versão que vamos provar do Teorema 2.2.5.

**Teorema 2.2.7.** Quando  $N \rightarrow \infty$ , a sequência de probabilidades  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge fracamente a uma probabilidade  $\mathbb{Q}$  que é uma delta de Dirac numa trajetória  $\pi$ , de  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$  formada por medidas absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue, cujas densidades  $\rho$ , formam uma solução fraca da Equação 2.2.

**Afirmção 2.2.8.** O Teorema 2.2.7 implica o Teorema 2.2.5.

*Demonstração.* Suponha  $t < T$ . Defina  $\Phi_t : D_{\mathcal{M}}[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\Phi_t(\pi) = |\langle \pi_t, H \rangle - \langle \rho_t, H \rangle|$ . O enunciado do Teorema 2.2.5 afirma então que, para todo  $\delta > 0$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N[\Phi_t \geq \delta] = 0.$$

Note que  $\Phi_t$  é contínua no ponto  $\pi$ , se  $\pi$ , (vista como função de  $[0, T]$  em  $\mathcal{M}$ ) for contínua em  $t$ . Usando o Teorema 2.2.7, vemos que o conjunto das descontinuidades de  $\Phi_t$  tem  $\mathbb{Q}$ -probabilidade zero. Isso nos permite aplicar o Teorema de Portmanteau para obter

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N[\Phi_t \geq \delta] \leq \mathbb{Q}[\Phi_t \geq \delta] = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

A demonstração (parcial) do Teorema 2.2.7 acima ocupará o resto desta dissertação, e consiste nos seguintes passos:

**Passo 1: A sequência  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  é relativamente compacta.**

A demonstração desse passo utiliza o Teorema de Prohorov, e pode ser encontrada na dissertação de mestrado de Rangel Baldasso.

**Passo 2: Os pontos limites da sequência  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  estão concentrados em trajetórias absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue, cujas densidades são soluções fracas da Equação 2.2.**

A demonstração desse passo pode ser subdividida em três partes: na Seção 3.1 mostraremos que os pontos limites da sequência  $\mathbb{Q}_N$  estão concentrados em trajetórias absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue.

Na Seção 3.2 será esboçada a prova de que as densidades pertencem ao espaço  $L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1))$ . A demonstração detalhada desse passo pode ser consultada na dissertação de mestrado de Rangel Baldasso.

Finalmente, a demonstração do Passo 2 será concluída na Seção 3.4.

**Passo 3: A Equação 2.2 possui uma única solução fraca.**

A unicidade da solução não será demonstrada aqui. Ela pode ser feita com o método do laplaciano inverso, ver [4].

Os três passos acima são usados em praticamente todos os resultados de limite hidrodinâmico. No entanto, cada modelo tem suas dificuldades, exigindo técnicas próprias para executar cada um dos passos acima. O Passo 3 é um problema puramente analítico e o Passo 1 geralmente é demonstrado usando o Teorema de Prohorov (que será apresentado no próximo capítulo). O Passo 2 é o que mais varia de modelo para modelo. No entanto, algumas técnicas são aplicáveis a vários modelos semelhantes. Nessa dissertação, seguiremos de perto os métodos usados em [8].

## 2.3 Medidas Invariantes

Começamos procurando as medidas invariantes para o processo  $\eta$ , apresentado na Seção 2.1. Na verdade, precisaremos que o processo seja reversível.<sup>3</sup> Para tal, precisamos achar medidas  $\mu$  que satisfazem  $\mu(\eta)L_N(\eta, \xi) = \mu(\xi)L_N(\xi, \eta)$ , quaisquer que sejam  $\eta, \xi \in \{0, 1\}^{I_N}$ . Lembramos que  $L_N$  é o gerador infinitesimal do processo de exclusão simples com taxa lenta no bordo, definido na seção 2.1.

**Definição 2.3.1.** Seja  $0 < \alpha < 1$ . Chamamos de *Bernoulli produto de parâmetro  $\alpha$*  a probabilidade  $\nu_\alpha^N$  em  $\{0, 1\}^{I_N}$  tal que as variáveis aleatórias  $\{\eta(x) : \eta \in \{0, 1\}^{I_N}, x \in I_N\}$  são independentes e  $\nu_\alpha^N[\eta \in \{0, 1\}^{I_N} : \eta(x) = 1] = \alpha$ .

Quando o valor de  $N$  for claro, vamos denotar  $\nu_\alpha^N$  simplesmente por  $\nu_\alpha$ .

**Proposição 2.3.2.** Quando  $\alpha = \beta$  a medida de probabilidade  $\nu_\alpha^N$  torna o processo  $\eta_t^N$  reversível.

*Demonstração.* Como foi observado acima, basta verificar que sempre vale a equação de balanço  $\nu_\alpha^N(\eta)L_N(\eta, \xi) = \nu_\alpha^N(\xi)L_N(\xi, \eta)$  quaisquer que sejam as configurações  $\eta$  e  $\xi$ . Esta igualdade é clara se  $\xi = \eta$ . Se  $\xi$  for diferente de  $\eta$ ,  $\eta^0$ ,  $\eta^N$  e  $\eta^{x, x+1}$

---

<sup>3</sup>Um Processo de Markov  $(X_t)_{t \geq 0}$  com probabilidades de transição  $(P_t)_{t \geq 0}$  é dito *reversível* com respeito à medida  $\mu$  no seu espaço de estados se a equação  $\mu(\eta)P_t(\eta, \xi) = \mu(\xi)P_t(\xi, \eta)$  for satisfeita para quaisquer estados  $\eta$  e  $\xi$  e para qualquer  $t > 0$ . Segue dessa definição que  $\mu$  é uma medida invariante para o processo. Para mais detalhes sobre medidas invariantes e reversibilidade o leitor pode consultar [7].

( $x \in I_N$ ) então  $L_N(\eta, \xi) = L_N(\xi, \eta) = 0$ , o que verifica a condição. Quando  $\xi = \eta^{x, x+1}$  para algum  $x \in I_N$  temos  $L_N(\eta, \xi) = L_N(\xi, \eta) = 1$  e  $\nu_\alpha^N(\eta) = \nu_\alpha^N(\xi)$ , de forma que  $\nu_\alpha^N(\eta)L_N(\eta, \xi) = \nu_\alpha^N(\xi)L_N(\xi, \eta)$ . Quando  $\xi = \eta^0$  e  $\eta(0) = 0$  temos  $L_N(\eta, \xi) = \alpha/N$ ,  $L_N(\xi, \eta) = (1 - \alpha)/N$  e  $\nu_\alpha^N(\xi) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\nu_\alpha^N(\eta)$ , de modo que a equação de balanço vale. Quando  $\xi = \eta^0$  e  $\eta(0) = 1$  temos  $L_N(\eta, \xi) = (1 - \alpha)/N$ ,  $L_N(\xi, \eta) = \alpha/N$  e  $\nu_\alpha^N(\xi) = \frac{1-\alpha}{\alpha}\nu_\alpha^N(\eta)$ , novamente verificando a equação de balanço. O caso  $\xi = \eta^N$  pode ser verificado analogamente.  $\square$

Este resultado, em particular, nos permite estabelecer a medida invariante do processo de Markov no caso em que  $\alpha = \beta$  como sendo uma medida Bernoulli produto de parâmetro  $\alpha$ .

Veremos mais adiante que a medida Bernoulli produto é muito conveniente para a demonstração do limite hidrodinâmico. É só por não conseguirmos medidas invariantes tão boas quando  $\alpha \neq \beta$  que somos obrigados a supor  $\alpha = \beta$  no enunciado do limite hidrodinâmico.

## 2.4 Rigidez

Dizemos que uma sequência de probabilidades  $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$  num espaço métrico  $\mathcal{E}$  é *rígida* se para todo  $\varepsilon > 0$  existir  $K_\varepsilon \subset \mathcal{E}$  compacto tal que  $P_N(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Rigidez é um conceito muito útil quando usada em conjunto com o Teorema de Prohorov:

**Teorema 2.4.1** (Prohorov). *Seja  $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$  uma sequência de probabilidades no espaço métrico completo  $\mathcal{E}$ . Se  $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$  for rígida então  $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$  é relativamente compacta (isto é, qualquer subsequência admite uma subsequência fracamente convergente). Se  $\mathcal{E}$  também for separável vale a volta.*

A demonstração pode ser encontrada por exemplo em [1] ou [6].

O espaço topológico  $\mathcal{M}$  das medidas em  $[0, 1]$  limitadas por 1 é um compacto com a topologia da convergência fraca e é metrizável com essa topologia (ver apêndice B.0.2). Com isso o espaço  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$  também pode tornar-se um espaço métrico separável e completo com a *Métrica de Skorohod*. Para detalhes da definição dessa métrica o leitor pode consultar o Apêndice B.

**Proposição 2.4.2.** *A sequência de medidas  $\{\mathbb{Q}_N : N \geq 1\}$  é rígida na topologia de Skorohod de  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$ .*

# Capítulo 3

## Caracterização dos Pontos Limites

Como observamos no capítulo anterior, é possível provar que a sequência de probabilidades  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  é rígida. Tomamos agora um ponto limite  $\mathbb{Q}_*$  para a sequência  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ . Sem perda de generalidade, supomos que  $\mathbb{Q}_N \Rightarrow \mathbb{Q}_*$ , onde a notação " $\Rightarrow$ " indica convergência fraca de medidas. Aqui, vamos verificar que a medida de probabilidade  $\mathbb{Q}_*$  está concentrada em trajetórias  $\pi \in D_{\mathcal{M}}[0, T]$  que são absolutamente contínuas em relação a medida de Lebesgue e têm densidades  $\rho \in L^2(0; T; \mathcal{H}^1(0, 1))$  que são soluções fracas da EDP (2.2). Vamos denotar por  $\mathbb{E}_*$  a esperança com respeito à probabilidade  $\mathbb{Q}_*$ .

Esta demonstração é dividida em três passos. O primeiro passo consiste em demonstrar que a medida de probabilidade  $\mathbb{Q}_*$  é concentrada em trajetórias absolutamente contínuas com relação a medida de Lebesgue. O segundo passo consiste em demonstrar que as densidades pertencem ao conjunto  $L^2(0; T; \mathcal{H}^1(0, 1))$ . O terceiro e último passo consiste em verificar que as densidades satisfazem a Equação (2.2).

### 3.1 Medidas Absolutamente Contínuas

Aqui vamos demonstrar a primeira parte da nossa caracterização. Estamos assumindo que  $\mathbb{Q}_N \Rightarrow \mathbb{Q}_*$ .

*Nota.* Observe que as variáveis aleatórias  $\pi^N$  não tem contradomínio  $\mathbb{R}$ . Na verdade, estas funções são medidas aleatórias. Como o leitor pode conferir no Apêndice B.0.2, o espaço em que nossas medidas aleatórias tomam valores é um espaço

métrico completo e separável, o que nos permite considerar convergência fraca de probabilidades sobre esse espaço, conforme [1]. Além disso, o Teorema de Portmanteau ainda vale nesse cenário, bem como grande parte de seus corolários.

O objetivo desta seção é demonstrar a seguinte

**Proposição 3.1.1.** *Seja  $\mathbb{Q}_*$  um ponto limite da sequência  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ . Então  $\mathbb{Q}_*$  está concentrada em trajetórias de medidas absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue.*

A estratégia da prova será demonstrar que  $\mathbb{Q}_*$ -quase certamente as trajetórias  $\pi$  satisfazem  $\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \pi_t, G \rangle| \leq \int_0^1 |G(u)| du$  para qualquer função contínua  $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . O lema abaixo justifica essa estratégia:

**Lema 3.1.2.** *Se  $\mu$  é uma medida que satisfaz  $|\langle \mu, G \rangle| \leq \int_0^1 |G(u)| du$ , para toda função  $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, então  $\mu$  é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.*

*Demonstração.* Durante a demonstração deste lema a medida de Lebesgue em  $[0, 1]$  será denotada por  $\lambda$ .

Seja  $F \subset [0, 1]$  um conjunto fechado. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  seja  $F_n := \{u \in [0, 1] : d(u, F) \leq 1/n\}$ , onde  $d$  denota a métrica usual em  $\mathbb{R}$ .<sup>1</sup> Note que a sequência  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é decrescente e  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F$ . Tome funções contínuas  $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $0 \leq g_n \leq 1$ ,  $g_n|_F = 1$  e  $g_n|_{F_n^c} = 0$ . Temos então  $\mu(F) \leq \langle \lambda, g_n \rangle \leq \lambda(F_n)$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$  obtemos  $\mu(F) \leq \lambda(F)$ .

Seja agora  $A \subset [0, 1]$  tal que  $\lambda(A) = 0$ . Vamos mostrar que  $\mu(A) = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existem intervalos fechados  $I_1, I_2, \dots$  tais que  $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n) < \varepsilon$ . Temos então  $\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^n I_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\bigcup_{k=1}^n I_k) \leq \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, obtemos  $\mu(A) = 0$ .  $\square$

*Demonstração da Proposição 3.1.1.* fixe  $G \in C[0, 1]$ . A restrição de no máximo uma partícula por sítio implica, para todo  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{Q}_N \left[ \pi : \sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \pi_t, G \rangle| \leq \frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^N |G(x/N)| \right] = 1.$$

Mas  $\frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^N |G(x/N)| \rightarrow \int_0^1 |G(u)| du$  quando  $N \rightarrow \infty$ , logo fixando  $\varepsilon > 0$  encontramos  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $N > N(\varepsilon)$

<sup>1</sup>A distância entre o ponto  $u$  e o conjunto  $F$  é definida por  $d(u, F) := \inf_{v \in F} d(u, v)$ .



$$\mathbb{Q}_N \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \pi_t, G \rangle| \leq \varepsilon + \int_0^1 |G(u)| du \right] = 1.$$

Gostaríamos de aplicar o Teorema de Portmanteau ao conjunto

$$B_\varepsilon = \left\{ \pi. \in D_{\mathcal{M}}[0, T] : \sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \pi_t, G \rangle| \leq \varepsilon + \int_0^1 |G(u)| du \right\}.$$

Para isso precisamos que tal conjunto seja fechado na topologia de Skorohod. Tome uma sequência  $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $B_\varepsilon$  e suponha que existe  $\pi. \in D_{\mathcal{M}}[0, T]$  tal que  $\pi^n \rightarrow \pi.$  na topologia de Skorohod. Vamos mostrar que  $\pi. \in B_\varepsilon$ . Como  $\pi.$  é uma trajetória contínua à direita, a função real  $t \mapsto |\langle \pi_t, G \rangle|$  também é contínua à direita.

Seja  $t < T$ . Usando o fato de que  $\pi_s^n \Rightarrow \pi_s$  para quase todo  $s$  (Lema B.0.7) conseguimos uma sequência  $t_k \downarrow t$  tal que  $\pi_{t_k}^n \Rightarrow_n \pi_{t_k}$  para todo  $k \geq 1$ , de modo que  $|\langle \pi_{t_k}, G \rangle| \leq \varepsilon + \int_0^1 |G(u)| du$  para todo  $k$ . Segue que

$$|\langle \pi_t, G \rangle| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle \pi_{t_k}, G \rangle| \leq \varepsilon + \int_0^1 |G(u)| du.$$

O Lema B.0.7 também garante que  $\pi_T^n \Rightarrow \pi_T$ , donde  $|\langle \pi_T, G \rangle| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \pi_T^n, G \rangle| \leq \varepsilon + \int_0^1 |G(u)| du$ . Concluimos que  $\pi. \in B_\varepsilon$ , o que conclui a prova de que  $B_\varepsilon$  é fechado.

Aplicando o Teorema de Portmanteau obtemos  $\mathbb{Q}_*(B_\varepsilon) \geq \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N(B_\varepsilon) = 1$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, segue que <sup>2</sup>

$$\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \pi_t, G \rangle| \leq \int_0^1 |G(u)| du \right] = 1.$$

Para concluir a demonstração da Proposição 3.1.1 basta usar a igualdade acima para  $G$  num subconjunto enumerável de  $C[0, 1]$ , denso na topologia uniforme.  $\square$

## 3.2 O Espaço $L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1))$

Nesta seção vamos dar os passos da demonstração de que as densidades  $\rho_t$  estão em  $\mathcal{H}^1(0, 1)$  e de que a função  $\rho : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}^1(0, 1)$  está em  $L^2(0; T; \mathcal{H}^1(0, 1))$ . Usaremos o seguinte lema:

**Lema 3.2.1.** *Suponha que  $\pi. \in D_{\mathcal{M}}[0, T]$  é tal que, para todo  $t \in [0, T]$ ,  $\pi_t$  é absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue, com densidade  $\rho_t \in L^1[0, 1]$*

---

<sup>2</sup>Intersectando os conjuntos  $B_{1/n}$ .

limitada por 1 e que existe uma função  $\tilde{\rho} \in L^2([0, T] \times (0, 1))$  que satisfaz

$$\int_0^T \int_0^1 \partial_u H(s, u) \rho(s, u) du ds = - \int_0^T \int_0^1 H(s, u) \tilde{\rho}(s, u) du ds,$$

para toda função  $H \in C_c^{0,1}([0, T] \times (0, 1))$ . Então  $\rho \in L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1))$ .

A partir deste lema, para concluirmos que  $\rho \in L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1))$ , basta encontrar uma  $\tilde{\rho} \in L^2([0, T] \times (0, 1))$  que satisfaz

$$\int_0^T \int_0^1 \partial_u H(s, u) \rho(s, u) du ds = - \int_0^T \int_0^1 H(s, u) \tilde{\rho}(s, u) du ds, \quad (3.1)$$

para toda função  $H \in C_c^{0,1}([0, T] \times (0, 1))$ .

Vamos demonstrar isto de maneira indireta. Defina o funcional linear  $l_\rho$  em  $C_c^{0,1}([0, T] \times (0, 1))$  por

$$l_\rho(H) = \int_0^T \int_0^1 \partial_u H(s, u) \rho(s, u) du ds = \int_0^T \int_0^1 \partial_u H(s, u) d\pi_s(u) ds. \quad (3.2)$$

Na igualdade acima utilizamos o fato de que  $\pi_s$  é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, com densidade  $\rho_s$ . Vamos verificar que podemos estender continuamente esse funcional para o conjunto  $L^2([0, T] \times (0, 1))$  e que  $l_\rho$  é  $\mathbb{Q}_*$ -quase certamente contínuo. Pelo Teorema da Representação de Riesz para espaços de Hilbert, poderemos achar (para  $\mathbb{Q}_*$ -quase toda  $\rho$ ) uma função  $\tilde{\rho} \in L^2([0, T] \times (0, 1))$  satisfazendo (3.1). Para demonstrar que  $l_\rho$  é limitado, estimaremos a quantidade  $\sup_H \{l_\rho(H) - 2\|H\|_{L^2([0, T] \times (0, 1))}^2\}$ . O lema abaixo mostra que essa quantidade nos dá a norma de  $l_\rho$ :

**Lema 3.2.2.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach com norma  $\|\cdot\|$ ,  $\kappa > 0$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear. Se*

$$\sup_{x \in E} \{f(x) - \kappa\|x\|^2\} < \infty,$$

então  $f$  é limitado. Além disso,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{4\kappa} \sup_{x \in E} \{f(x) - \kappa\|x\|^2\}.$$

*Demonstração.* Observe que vale

$$\sup_{x \in E} \{f(x) - \kappa\|x\|^2\} = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{f(\lambda y) - \kappa\|\lambda y\|^2\}. \quad (3.3)$$

Fixe  $y \in E$  com  $\|y\| = 1$ . Vemos que  $f(\lambda y) - \kappa\|\lambda y\|^2 = \lambda f(y) - \kappa\lambda^2$  atinge o seu máximo<sup>3</sup> em  $\lambda = \frac{1}{2\kappa} f(y)$ . Substituindo esse valor de  $\lambda$  em (3.3) obtemos

$$\sup_{x \in E} \{f(x) - \kappa\|x\|^2\} = \frac{1}{4\kappa} \sup_{\|y\|=1} f(y)^2 = \frac{1}{4\kappa} \|f\|^2,$$

como queríamos demonstrar. □

<sup>3</sup>Derivando em  $\lambda$  encontramos  $f(y) - 2\kappa\lambda$ .

Até agora só enunciamos resultados de análise nesta seção. A proposição a seguir é probabilística e é a parte mais importante da demonstração de que  $\rho \in L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1))$ . Lembramos que  $\mathbb{E}_*$  denota a esperança com respeito a  $\mathbb{Q}_*$ .

**Proposição 3.2.3.** *Se os funcionais  $l_\rho$  são definidos por (3.2), então existe uma constante  $K_0 < \infty$  tal que*

$$\mathbb{E}_* \left[ \sup_{H \in C_c^{0,1}([0, T] \times (0, 1))} \left\{ l_\rho(H) - 2 \|H\|_{L^2([0, T] \times (0, 1))}^2 \right\} \right] \leq K_0. \quad (3.4)$$

A demonstração pode ser encontrada na dissertação de mestrado de Rangel Baldasso.

### 3.3 Lema da Substituição

Nesta seção isolamos o enunciado e a demonstração de um lema que será essencial para a caracterização dos pontos limites. O leitor pode pular esta seção agora sem prejuízo da continuidade e voltar quando os resultados daqui se fizerem necessários, no final da seção seguinte.

Lembramos que  $\pi^N$  denota a medida empírica associada à configuração  $\eta \in \{0, 1\}^{I_N}$ , como definido na Seção 2.1. Usaremos as seguintes notações, onde  $[u]$  denota a parte inteira do número real  $u$ :

$$\begin{aligned} \eta^{\varepsilon N}(0) &:= \frac{1}{\varepsilon} \pi^N[0, \varepsilon] = \frac{1}{\varepsilon(N+1)} \sum_{x=0}^{[\varepsilon N]} \eta(x) \quad \text{e} \\ \eta^{\varepsilon N}(N) &:= \frac{1}{\varepsilon} \pi^N[1 - \varepsilon, 1] = \frac{1}{\varepsilon(N+1)} \sum_{x=N - [\varepsilon N]}^N \eta(x). \end{aligned}$$

Além disso, denotamos por  $\mathbb{E}_{\mu_N}$  a esperança com relação a  $\mathbb{P}_{\mu_N}$ .

**Lema 3.3.1** (Lema da Substituição). *Considere uma sequência de funções  $F_N : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\|F_N\|_\infty \leq L$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ , onde  $L > 0$  é uma constante fixa. Então para  $t \in [0, T]$  e  $x \in \{0, N\}$  vale*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_N} \left[ \left| \int_0^t F_N(s) [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta_s(x)] ds \right| \right] = 0.$$

**Demonstração.** Começamos escrevendo

$$\mathbb{E}_{\mu_N} \left[ \left| \int_0^t F_N(s) [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta_s(x)] ds \right| \right] = \int \mathbb{E}_\eta \left[ \left| \int_0^t F_N(s) [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta_s(x)] ds \right| \right] d\mu_N(\eta). \quad (3.5)$$

Fixe  $\gamma > 0$ . Usando a desigualdade da entropia (D.1) vemos que (3.5) é dominada por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma N} H(\mu_N | \nu_\alpha^N) + \frac{1}{\gamma N} \log \int \exp \left\{ \gamma N \cdot \mathbb{E}_\eta \left| \int_0^t F_N(s) [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta_s(x)] ds \right| \right\} d\nu_\alpha^N(\eta) \\ & \leq \frac{1}{\gamma N} H(\mu_N | \nu_\alpha^N) + \frac{1}{\gamma N} \log \int \mathbb{E}_\eta \left[ \exp \left\{ \gamma N \left| \int_0^t F_N(s) [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta_s(x)] ds \right| \right\} \right] d\nu_\alpha^N(\eta) \\ & = \frac{1}{\gamma N} H(\mu_N | \nu_\alpha^N) + \frac{1}{\gamma N} \log \mathbb{E}_{\nu_\alpha^N} \left[ \exp \left\{ \gamma N \left| \int_0^t F_N(s) [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta_s(x)] ds \right| \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

O Lema D.0.12 diz que  $H(\mu_N | \nu_\alpha^N) \leq K(N+1)$  onde  $K$  é uma constante que depende apenas de  $\alpha$ . Fazendo  $\gamma \rightarrow \infty$  nos livramos do primeiro termo em (3.6).

Resta analisar o segundo termo de (3.6). Observe que para todo  $x \in \mathbb{R}$  vale  $e^{|x|} \leq e^x + e^{-x}$ . Usando o Lema C.0.11, podemos eliminar o módulo na expressão (3.6): precisamos mostrar que

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma N} \log \mathbb{E}_{\nu_\alpha^N} \left[ \exp \left\{ \gamma N \int_0^t F_N(s) [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta_s(x)] ds \right\} \right] = 0 \quad (3.7)$$

uniformemente em  $t$  e que a mesma equação vale trocando  $\gamma N$  por  $-\gamma N$  dentro da exponencial.

Usando a fórmula de Feynman-Kac (Lema D.0.13 do apêndice) com  $V(s, \eta) = \gamma N F_N(s) [\eta^{\varepsilon N}(x) - \eta(x)]$  limitamos o logaritmo em (3.7) por  $\int_0^t \Gamma_s ds$ , onde

$$\Gamma_s = \sup_{\|f\|_{L^2(\nu_\alpha^N)} \leq 1} \left\{ \langle V_s, f^2 \rangle_{\nu_\alpha^N} + \langle N^2 L_{N,0} f, f \rangle_{\nu_\alpha^N} + \langle N^2 L_{N,b} f, f \rangle_{\nu_\alpha^N} \right\}.$$

Vamos fazer o caso  $x = 0$ . O caso  $x = N$  é análogo. Calculamos agora as parcelas no interior do supremo que define  $\Gamma_s$ :

$$\langle V_s, f^2 \rangle_{\nu_\alpha^N} = \gamma N \int F_N(s) [\eta^{\varepsilon N}(0) - \eta(0)] f(\eta)^2 d\nu_\alpha^N(\eta).$$

Segundo o Corolário D.0.15 temos que

$$\langle N^2 L_{N,0} f, f \rangle_{\nu_\alpha^N} = -\frac{N^2}{2} \sum_{x=0}^{N-1} \int [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)]^2 d\nu_\alpha^N(\eta)$$

e

$$\langle L_{N,b}f, f \rangle_{\nu_\alpha^N} \leq 0.$$

Com isso limitamos a expressão dentro dos limites em (3.7) por

$$\int_0^t \sup_{\|f\|_{L^2(\nu_\alpha^N)} \leq 1} \left\{ \int F_N(s) [\eta^{\varepsilon N}(0) - \eta(0)] f(\eta)^2 d\nu_\alpha^N(\eta) - \frac{N}{2\gamma} \sum_{x=0}^{N-1} \int [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)]^2 d\nu_\alpha^N(\eta) + \frac{N}{\gamma} \langle L_{N,b}f, f \rangle_{\nu_\alpha^N} \right\} ds. \quad (3.8)$$

O próximo passo consiste em limitar o primeiro termo no interior do supremo acima. As próximas contas procuram fazer aparecer a expressão de  $\langle NL_{N,0}f, f \rangle$  para que esta se cancele com o segundo termo no interior do supremo. Observe que ainda não podemos trocar  $F_N(s)$  por  $L$ , pois  $F_N(s)$  pode ser negativa, de modo que trocar  $F_N(s)$  por  $L$  poderia diminuir o valor da integral em  $s$ , o que não nos interessa.

$$\begin{aligned} & \int F_N(s) [\eta^{\varepsilon N}(0) - \eta(0)] f(\eta)^2 d\nu_\alpha^N(\eta) \\ &= \frac{1}{\varepsilon(N+1)} \int F_N(s) \sum_{x=0}^{[\varepsilon N]} [\eta(x) - \eta(0)] f(\eta)^2 d\nu_\alpha^N(\eta) + o(1). \end{aligned}$$

A notação  $o(1)$  usada acima indica que o termo de erro <sup>4</sup> converge a zero uniformemente em  $f$  com  $\|f\|_{L^2(\nu_\alpha^N)} \leq 1$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Por simplicidade, não vamos escrevê-lo no restante das contas. Com essa ressalva, escrevemos a última expressão como

$$\begin{aligned} & \frac{F_N(s)}{2\varepsilon(N+1)} \sum_{x=1}^{[\varepsilon N]} \sum_{y=0}^{x-1} \int [\eta(y+1) - \eta(y)] f(\eta)^2 d\nu_\alpha^N(\eta) \\ &+ \frac{F_N(s)}{2\varepsilon(N+1)} \sum_{x=1}^{[\varepsilon N]} \sum_{y=0}^{x-1} \int [\eta(y) - \eta(y+1)] f(\eta^{y,y+1})^2 d\nu_\alpha^N(\eta) \\ &= \frac{F_N(s)}{2\varepsilon(N+1)} \sum_{x=1}^{[\varepsilon N]} \sum_{y=0}^{x-1} \int [\eta(y+1) - \eta(y)] [f(\eta)^2 - f(\eta^{y,y+1})^2] d\nu_\alpha^N(\eta). \end{aligned}$$

Nas últimas estimativas escrevemos  $\frac{1}{\gamma N} \langle V_s, f^2 \rangle_{\nu_\alpha^N} = \frac{1}{2} \langle V_s, f^2 \rangle_{\nu_\alpha^N} + \frac{1}{2} \langle V_s, f^2 \rangle_{\nu_\alpha^N}$  e fizemos a mudança de variáveis  $\eta \mapsto \eta^{y,y+1}$  no segundo termo. Observe que só foi possível fazer essa mudança de variáveis porque a medida invariante é uma Bernoulli

---

<sup>4</sup>O termo de erro é  $\int F_N(s) \left[ \frac{[\varepsilon N]}{\varepsilon(N+1)} \eta(0) - \eta(0) \right] f(\eta)^2 d\nu_\alpha^N(\eta)$ .

produto. Fixe  $A > 0$ . Escrevendo  $f(\eta)^2 - f(\eta^{y,y+1})^2 = [f(\eta) - f(\eta^{y,y+1})][f(\eta) + f(\eta^{y,y+1})]$ , usando a desigualdade  $ab \leq Aa^2 + b^2/A$  e lembrando que há no máximo uma partícula por sítio, limitamos a expressão acima por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\varepsilon(N+1)} \sum_{x=1}^{\lfloor \varepsilon N \rfloor} \sum_{y=0}^{x-1} A \int [f(\eta) - f(\eta^{y,y+1})]^2 d\nu_\alpha^N(\eta) \\ & + \frac{F_N(s)^2}{2\varepsilon(N+1)} \sum_{x=1}^{\lfloor \varepsilon N \rfloor} \sum_{y=0}^{x-1} \frac{1}{A} \int [f(\eta) + f(\eta^{y,y+1})]^2 d\nu_\alpha^N(\eta). \end{aligned} \quad (3.9)$$

No primeiro termo acima, podemos majorar o somatório em  $y$  somando até  $y = N - 1$ . Com isso limitamos esse termo por

$$\frac{\varepsilon N}{2\varepsilon(N+1)} A \sum_{y=0}^{N-1} \int [f(\eta) - f(\eta^{y,y+1})]^2 d\nu_\alpha^N(\eta) \leq \frac{A}{2} \sum_{y=0}^{N-1} \int [f(\eta) - f(\eta^{y,y+1})]^2 d\nu_\alpha^N(\eta).$$

Escrevendo  $[f(\eta) + f(\eta^{y,y+1})]^2 = f(\eta)^2 + 2f(\eta)f(\eta^{y,y+1}) + f(\eta^{y,y+1})^2$ , usando  $\|f\|_{L^2(\nu_\alpha^N)} \leq 1$  e lembrando que  $\|F_N\|_\infty \leq L$ , o segundo termo de (3.9) pode ser majorado por

$$\frac{2L^2}{\varepsilon(N+1)} \sum_{x=1}^{\lfloor \varepsilon N \rfloor} \sum_{y=0}^{x-1} \frac{1}{A} \leq \frac{2L^2}{A} \frac{N}{N+1} (\varepsilon N + 1).$$

Tomando  $A = N/\gamma$  e lembrando que  $\langle N^2 L_{N,b} f, f \rangle_{\nu_\alpha^N} \leq 0$ , vemos que o supremo em (3.8) é menor ou igual a  $2L^2\gamma(\varepsilon N + 1)/(N + 1)$ , donde segue (3.7).

Resta apenas provar (3.7) com  $-\gamma N$  no lugar de  $\gamma N$  dentro da exponencial, o que pode ser feito trocando  $F_N$  por  $-F_N$ .  $\square$

Vamos precisar da seguinte consequência do Lema da Substituição:

**Proposição 3.3.2.** *Sejam  $F_N : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  funções mensuráveis com  $\|F_N\|_\infty \leq L$ ,  $x \in \{0, N\}$  e  $\delta > 0$ . Então*

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu_N} \left[ \eta : \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t F_N(s) [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta(x)] ds \right| > \delta \right] = 0.$$

*Demonstração.* Para simplificar a notação, defina

$$V_x^{\varepsilon, N}(s) := F_N(s) [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta(x)].$$

Começamos observando que para  $s, t \in [0, T]$  vale<sup>5</sup>

$$\left| \int_0^t V_x^{\varepsilon, N}(s) ds - \int_0^s V_x^{\varepsilon, N}(s) ds \right| \leq C|t - s| \quad (3.10)$$

---

<sup>5</sup> $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$

onde  $C := \|V^{\varepsilon, N}\|_\infty < \infty$  (e a cota não depende de  $N$  ou  $\varepsilon$ ).

Seja  $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$  um subconjunto finito <sup>6</sup> de  $[0, T]$  tal que para todo  $t \in [0, T]$  existe  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tal que  $|t - t_i| < \delta/4C$ . Segue do Lema da Substituição que

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu_N} \left[ \eta. : \max_{1 \leq i \leq k} \left| \int_0^{t_i} V_x^{\varepsilon, N}(s) ds \right| > \frac{\delta}{4} \right] = 0. \quad (3.11)$$

Se  $\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t V_x^{\varepsilon, N}(s) ds \right| > \delta$  então existe  $t^* \in [0, T]$  tal que  $\left| \int_0^{t^*} V_x^{\varepsilon, N}(s) ds \right| > \delta/2$ . Tome  $t_i$  tal que  $|t^* - t_i| < \delta/4C$ . Temos então  $\left| \int_0^{t_i} V_x^{\varepsilon, N}(s) ds \right| > \delta/4$ . Logo

$$\mathbb{P}_{\mu_N} \left[ \eta. : \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t V_x^{\varepsilon, N}(s) ds \right| > \delta \right] \leq \mathbb{P}_{\mu_N} \left[ \eta. : \max_{1 \leq i \leq k} \left| \int_0^{t_i} V_x^{\varepsilon, N}(s) ds \right| > \delta/4 \right].$$

A proposição segue então de (3.11). □

### 3.4 Caracterização dos Pontos Limites

Nesta seção provaremos o seguinte teorema, que constitui um passo fundamental na demonstração do limite hidrodinâmico:

**Teorema 3.4.1.** *Para qualquer medida  $\mathbb{Q}_*$  que seja um ponto limite da sequência de medidas  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ , temos*

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle - \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds \right. \\ \left. - \int_0^t \{ \rho_s(0) \partial_u H_s(0) - \rho_s(1) \partial_u H_s(1) \} ds \right. \\ \left. - \int_0^t \left\{ H_s(0) (\alpha - \rho_s(0)) + H_s(1) (\alpha - \rho_s(1)) \right\} ds = 0 \right. \\ \left. \forall t \in [0, T], \quad \forall H \in C^{1,2}([0, T] \times [0, 1]) \right] = 1. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Mostraremos que,  $\mathbb{Q}_*$ -quase certamente, vale a igualdade no interior da probabilidade acima para  $H$  num conjunto enumerável de funções teste, denso em  $C^{1,2}([0, T] \times (0, 1))$  com a norma  $C^2$  (ver Lema C.0.10).

Fixe então  $\delta > 0$  e  $H \in C^{1,3}([0, T] \times [0, 1])$ . Nosso objetivo é mostrar que

---

<sup>6</sup>Tal conjunto é chamado de uma  $\frac{\delta}{4C}$ -net para  $[0, T]$ .

$$\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle - \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds - \int_0^t \{ \rho_s(0) \partial_u H_s(0) - \rho_s(1) \partial_u H_s(1) \} ds - \int_0^t \{ H_s(0)(\alpha - \rho_s(0)) + H_s(1)(\alpha - \rho_s(1)) \} ds \right| = 0 \right] = 1.$$

A equação acima pode ser reescrita como

$$\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle - \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds - \int_0^t \rho_s(0) [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] ds + \int_0^t \rho_s(1) [\partial_u H_s(1) + H_s(1)] ds - \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)] ds \right| > \delta \right] = 0. \quad (3.13)$$

Para estimar a probabilidade (3.13) vamos usar as probabilidades  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ . O problema é que o conjunto que aparece em (3.13) não pode ser medido com as  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ , pois as medidas empíricas  $(\pi_N)_{N \in \mathbb{N}}$  não são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue. Para contornar essa dificuldade trocaremos  $\rho_t(0)$  e  $\rho_t(1)$  pelas suas aproximações  $\frac{1}{\varepsilon} \pi_t[0, \varepsilon]$  e  $\frac{1}{\varepsilon} \pi_t[1 - \varepsilon, 1]$ , onde  $\varepsilon > 0$  será escolhido pequeno. Com isso vemos que (3.13) é limitado pela soma dos seguintes termos:

$$\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \langle \pi_t, H_t \rangle - \langle \pi_0, H_0 \rangle - \int_0^t \langle \pi_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] ds + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[1 - \varepsilon, 1] [\partial_u H_s(1) + H_s(1)] ds - \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)] ds \right| > \delta/4 \right], \quad (3.14)$$

$$\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : |\langle \pi_0, H_0 \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle| > \delta/4 \right], \quad (3.15)$$

$$\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] \left[ \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] - \rho_s(0) \right] ds \right| > \delta/4 \right] \quad (3.16)$$

e

$$\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [\partial_u H_s(1) + H_s(1)] \left[ \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[1 - \varepsilon, 1] - \rho_s(1) \right] ds \right| > \delta/4 \right]. \quad (3.17)$$

O termo (3.15) é nulo pela própria definição de medidas associadas a um perfil. Esse é o conteúdo do próximo lema, cuja demonstração se encontra no final desta seção.



**Lema 3.4.2.** *Se  $(\mu_N)_{N \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de medidas associadas ao perfil inicial  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  então*

$$\mathbb{Q}_*[\pi : |\langle \pi_0, H_0 \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle| > \delta/4] = 0. \quad (3.18)$$

O próximo passo consiste em mostrar que os termos (3.16) e (3.17) convergem a zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Isso segue do seguinte lema, que será demonstrado no final dessa seção:

**Lema 3.4.3.** *Fixe  $\kappa > 0$ . Então*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{Q}_* \left[ \pi : \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left| \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] - \rho_s(0) \right| ds > \kappa \right] = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{Q}_* \left[ \pi : \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left| \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[1 - \varepsilon, 1] - \rho_s(1) \right| ds > \kappa \right] = 0.$$

Gostaríamos de aplicar o Teorema de Portmanteau ao conjunto em (3.14), mas não sabemos se tal conjunto é aberto. O lema a seguir usa aproximações das funções indicadoras de  $[0, \varepsilon]$  e  $[1 - \varepsilon, 1]$  por funções contínuas para conseguir aplicar o Teorema de Portmanteau (a demonstração se encontra no final dessa seção):

**Lema 3.4.4.** *A probabilidade em (3.14) é limitada por*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N \left[ \pi : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \langle \pi_t, H_t \rangle - \langle \pi_0, H_0 \rangle - \int_0^t \langle \pi_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] ds + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[1 - \varepsilon, 1] [\partial_u H_s(1) + H_s(1)] ds \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)] ds \right| > \delta/16 \right]. \quad (3.19)$$

Somando e subtraindo  $\int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s, H_s \rangle$  limitamos (3.19) pela soma de

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N \left[ \pi : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \langle \pi_t, H \rangle - \langle \pi_0, H \rangle - \int_0^t (\partial_s + N^2 L_N) \langle \pi_s, H \rangle ds \right| > \delta/32 \right] \quad (3.20)$$

e

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N \left[ \pi : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s, H_s \rangle ds - \int_0^t \langle \pi_s, \Delta H_s \rangle ds \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] ds + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[1 - \varepsilon, 1] [\partial_u H_s(1) + H_s(1)] ds \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)] ds \right| > \delta/32 \right]. \quad (3.21)$$

Pelo Teorema 1.2.1, a expressão  $M_t^N(H) := \langle \pi_t, H_t \rangle - \langle \pi_0, H_0 \rangle - \int_0^t (\partial_s + N^2 L_N) \langle \pi_s, H_s \rangle ds$  em (3.20) é um martingal com respeito à filtração natural  $\mathcal{F}_t := \sigma\{\eta_s : s \leq t\}$ .

Começamos mostrando que o limite (3.20) é nulo. Isso é uma consequência da Desigualdade de Markov e do seguinte lema, que será demonstrado no final desta seção:

**Lema 3.4.5.** *Seja  $M_t^N(H) := \langle \pi_t, H_t \rangle - \langle \pi_0, H_0 \rangle - \int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s, H_s \rangle ds$ . Então*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_N} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^N(H)| \right] = 0.$$

Resta apenas estimar (3.21), que pode ser reescrita, usando a definição de  $\mathbb{Q}_N$  (como pushforward de  $\mathbb{P}_{\mu_N}$  pela aplicação que associa a uma configuração a sua medida empírica), como

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu_N} \left[ \eta. : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s^N, H_s \rangle ds - \int_0^t \langle \pi_s^N, \Delta H_s \rangle ds \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \eta_s^{\varepsilon N}(0) [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] ds + \int_0^t \eta_s^{\varepsilon N}(N) [\partial_u H_s(1) + H_s(1)] ds \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)] ds \right| > \delta/32 \right], \quad (3.22) \end{aligned}$$

acima  $\pi_s^N$  é a medida empírica,  $\eta_s^{\varepsilon N}(0)$  é a média na caixa à direita do sítio  $x = 0$  e  $\eta_s^{\varepsilon N}(N)$  é a média na caixa à esquerda do sítio  $x = N$ .

Para isso vamos usar a expressão do gerador  $L_N = L_{N,0} + L_{N,b}$ . Lembrando que agora estamos assumindo  $\alpha = \beta$ , obtemos (as contas estão no final desta seção)

$$\begin{aligned} N^2 L_N \langle \pi_s, H_s \rangle &= \frac{1}{N+1} \sum_{x=1}^{N-1} \eta_s(x) \Delta_N H_s \left( \frac{x}{N} \right) \\ &+ \eta_s(0) \frac{N}{N+1} [\nabla_N H_s(0) - H_s(0)] \\ &- \eta_s(N) \frac{N}{N+1} [\nabla_N H_s(1) - H_s(1)] \\ &+ \alpha \frac{N}{N+1} (H_s(0) + H_s(1)), \end{aligned}$$

onde utilizamos as notações

$$\begin{aligned} \Delta_N H(u) &= N^2 \left[ H \left( u + \frac{1}{N} \right) + H \left( u - \frac{1}{N} \right) - 2H(u) \right], \\ \nabla_N H(0) &= N \left[ H \left( \frac{1}{N} \right) - H(0) \right] \end{aligned}$$

e

$$\nabla_N H(1) = -N \left[ H \left( 1 - \frac{1}{N} \right) - H(1) \right].$$

Observe que cada parcela na expressão do gerador é uma aproximação discreta para algum termo que aparece na equação integral (2.2). Em geral, ao abordarmos um problema de limite hidrodinâmico, um dos primeiros passos consiste em aplicar o gerador em  $\langle \pi_s^N, H_s \rangle$  para ter uma ideia de qual será a equação hidrodinâmica.

Finalmente podemos limitar por cima a expressão de dentro da probabilidade da equação (3.22) pela soma das seguintes parcelas:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left\{ \frac{1}{N+1} \sum_{x=1}^{N-1} \eta_s(x) \Delta_N H_s \left( \frac{x}{N} \right) - \langle \pi_s^N, \Delta H_s \rangle \right\} ds \right|, \quad (3.23)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left\{ \eta_s^{\varepsilon N}(0) [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] - \eta_s(0) \frac{N}{N+1} [\nabla_N H_s(0) - H_s(0)] \right\} ds \right|, \quad (3.24)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left\{ \eta_s^{\varepsilon N}(N) [\partial_u H_s(1) - H_s(1)] - \eta_s(N) \frac{N}{N+1} [\nabla_N H_s(1) - H_s(1)] \right\} ds \right| \quad (3.25)$$

e

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)] \left( 1 - \frac{N}{N+1} \right) ds \right|. \quad (3.26)$$

Como assumimos que  $H \in C^{1,3}([0, T] \times [0, 1])$ , temos que  $\Delta_N H_s(u) \rightarrow \Delta H_s(u)$  uniformemente em  $s$  e em  $u$ . Assim, lembrando da definição de  $\pi_s^N$  e de que  $\eta_s(x)$  toma valores em  $\{0, 1\}$ , obtemos que o termo (3.23) converge para zero, uniformemente em  $\eta$ . Além disso,  $H$  é limitada, donde segue facilmente que (3.26) também converge para zero.

Tratamos agora das duas parcelas restantes. Vamos começar limitando (3.24) por

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [\eta_s^{\varepsilon N}(0) [\partial_u H_s(0) - \nabla_N H_s(0)]] ds \right| \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [\nabla_N H_s(0) - H_s(0)] [\eta_s^{\varepsilon N}(0) - \eta_s(0)] ds \right| \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \eta_s(0) \left( 1 - \frac{N}{N+1} \right) [\nabla_N H_s(0) - H_s(0)] ds \right|. \end{aligned}$$

Como  $H$  é continuamente diferenciável na primeira coordenada obtemos que  $\nabla_N H_s(0)$  converge a  $\partial_u H_s(0)$  uniformemente em  $s$  e, além disso,  $\nabla_N H_s(0)$  é limitado como função de  $s$ . Juntando isso ao fato de que  $\eta_s(x)$  é limitado por 1, segue que a primeira parcela e a terceira parcela da soma acima convergem a zero quando  $N \rightarrow \infty$ .

O termo (3.25) pode ser tratado analogamente. Desta forma, para analisar o limite (3.22) basta estimar limite, quando  $N \rightarrow \infty$ , na expressão abaixo:

$$\mathbb{P}_{\mu_N} \left[ \eta : \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [\nabla_N H_s \left( \frac{x}{N} \right) - H_s \left( \frac{x}{N} \right)] [\eta_s^{\varepsilon N}(x) - \eta_s(x)] ds \right| > \tilde{\delta} \right],$$

para  $x \in \{0, N\}$  e para todo  $\tilde{\delta} > 0$ .

Aplicando a Proposição 3.3.2 vemos que, para  $x \in \{0, N\}$ , a expressão acima converge a 0 quando  $N \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluindo a demonstração de (3.13).

Estamos prontos para concluir o teorema de caracterização dos pontos limites da sequência  $(\mathbb{Q}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ .

*Demonstração do Teorema 3.4.1.* Basta mostrar que a igualdade no interior de (3.12) é válida para  $H$  num subconjunto enumerável de  $C^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$  denso na norma  $C^2$ .

Pelo Lema C.0.10 podemos encontrar um tal subconjunto enumerável denso tal que todos os seus elementos pertencem a  $C^{1,3}([0, T] \times (0, 1))$ . Agora basta aplicar (3.13) a cada elemento desse conjunto denso para concluir a prova do teorema.  $\square$

Concluimos essa seção com a demonstração dos lemas técnicos que foram necessários na demonstração do Teorema 3.4.1.

*Demonstração do Lema 3.4.2.* Seja  $A := \{\pi. : |\langle \pi_0, H_0 \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle| > \delta/4\}$ . Usando o Lema B.0.7, vemos que a função que leva  $\pi.$  em  $|\langle \pi_0, H_0 \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle|$  é contínua na topologia de Skorohod. Logo  $\mathbb{Q}_*(A) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N(A)$ . Mas

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_N(A) &= \mathbb{P}_{\mu_N} \left[ \eta. : |\langle \pi_0^N, H_0 \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle| > \delta/4 \right] \\ &= \mu_N \left[ \eta. : \left| \frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^N H_0\left(\frac{x}{N}\right) \eta(x) - \int_0^1 H_0(u) \gamma(u) du \right| > \delta/4. \right]. \end{aligned}$$

Pela definição de sequência de medidas associada a um perfil temos  $\mathbb{Q}_N(A) \rightarrow 0$ , concluindo a prova.  $\square$

*Demonstração do Lema 3.4.3.* Vamos demonstrar apenas a primeira equação. A verificação da segunda é análoga. Lembramos que  $\mathbb{Q}_*$ -quase certamente  $\pi_s$  tem densidade  $\rho_s$  com respeito à medida de Lebesgue. Assim, a igualdade abaixo vale para  $\mathbb{Q}_*$ -quase toda  $\pi. \in D_{\mathcal{M}}[0, T]$ :<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] - \rho_s(0) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon [\rho_s(u) - \rho_s(0)] du \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \int_0^1 \partial_u \rho_s(v) \mathbf{1}_{[0, u]}(v) \mathbf{1}_{[0, \varepsilon]}(u) dv du \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Na segunda igualdade supomos (ver [2], Teorema 8.2) que  $\rho_s$  é absolutamente contínua com derivada  $\partial_u \rho_s$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \partial_u \rho_s(v) \int_0^1 \mathbf{1}\{0 \leq v \leq u \leq \varepsilon\}(u, v) du dv \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \partial_u \rho_s(v)(\varepsilon - v) dv.
\end{aligned}$$

Como na demonstração do Lema da Substituição, usaremos a desigualdade  $ab \leq Ca^2 + b^2/C$ , válida para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $C > 0$ . Obtemos então

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] - \rho_s(0) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \|\partial_u \rho_s\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{\varepsilon C} \int_0^\varepsilon (\varepsilon - v)^2 dv = \frac{C}{\varepsilon} \|\partial_u \rho_s\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\varepsilon^2}{3C}.$$

Tomando  $C = \varepsilon^{3/2}$  obtemos

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] - \rho_s(0) \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \left( \|\partial_u \rho_s\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{3} \right).$$

Segue que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left| \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] - \rho_s(0) \right| ds \leq \sqrt{\varepsilon} \|\partial_u \rho\|_{L^2([0,T] \times (0,1))}^2 + \frac{T\sqrt{\varepsilon}}{3}.$$

Pelo Lema 3.2.2 (com  $\kappa = 2$ ) temos que

$$\|\partial_u \rho\|_{L^2([0,T] \times (0,1))}^2 = \frac{1}{8} \sup_H \left\{ \int_0^T \int_0^1 \partial_u H_s(u) \rho_s(u) du ds - 2 \int_0^T \int_0^1 H(s, u)^2 du ds \right\}$$

onde o supremo é tomado sobre o conjunto das funções  $H \in C_c^{1,2}([0, T] \times (0, 1))$ .

Finalmente calculamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left| \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] - \rho_s(0) \right| ds > \kappa \right] &\leq \mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sqrt{\varepsilon} \|\partial_u \rho\|_{L^2([0,T] \times (0,1))}^2 + \frac{T\sqrt{\varepsilon}}{3} > \kappa \right] \\
&= \mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \|\partial_u \rho\|_{L^2([0,T] \times (0,1))}^2 > \frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{T}{3} \right].
\end{aligned}$$

Tome  $\varepsilon$  pequeno o suficiente para que  $\frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{T}{3} > 0$ . A probabilidade acima é igual a

$$\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_H \left\{ \int_0^T \int_0^1 \partial_u H_s(u) \rho_s(u) du ds - 2 \int_0^T \int_0^1 H(s, u)^2 du ds \right\} > 8 \left( \frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{T}{3} \right) \right].$$

Usando a desigualdade de Markov e (3.4) limitamos a última expressão por  $\frac{\kappa_0}{8} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{T}{3} \right)^{-1}$ , que converge a 0 quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluindo a prova do lema.  $\square$

**Demonstração do Lema 3.4.4:** Seja  $\gamma > 0$ . Defina as funções  $f_\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $f_\gamma$  vale  $1/\varepsilon$  em  $[0, \varepsilon]$ , 0 em  $[\varepsilon + \gamma, 1]$  e é linear em  $[\varepsilon, \varepsilon + \gamma]$  e  $g_\gamma$  vale  $1/\varepsilon$  em  $[1 - \varepsilon, 1]$ , 0 em  $[0, 1 - \varepsilon - \gamma]$  e é linear em  $[1 - \varepsilon - \gamma, 1 - \varepsilon]$ .

Para simplificar a notação, defina para  $t \in [0, T]$  e  $\pi. \in D_{\mathcal{M}}[0, T]$

$$\begin{aligned} \varphi(t, \pi.) &:= \langle \pi_t, H_t \rangle - \langle \pi_0, H_0 \rangle - \int_0^t \langle \pi_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds \\ &\quad - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[0, \varepsilon] [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] ds + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \pi_s[1 - \varepsilon, 1] [\partial_u H_s(1) + H_s(1)] ds \\ &\quad - \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)] ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(t, \pi.) &:= \langle \pi_t, H_t \rangle - \langle \pi_0, H_0 \rangle - \int_0^t \langle \pi_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds \\ &\quad - \int_0^t [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] \int_0^1 f_\gamma(u) d\pi_s(u) ds + \int_0^t [\partial_u H_s(1) + H_s(1)] \int_0^1 g_\gamma(u) d\pi_s(u) ds \\ &\quad - \int_0^t \alpha [H_s(0) + H_s(1)] ds. \end{aligned}$$

Com essa notação o enunciado do lema fica

$$\mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, \pi.)| > \delta/4 \right] \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, \pi.)| > \delta/16 \right].$$

A estratégia da demonstração será trocar  $\varphi$  por  $\varphi_\gamma$ , mostrar que  $\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \cdot)|$  é semicontínua inferiormente e aplicar o Teorema de Portmanteau. Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, \pi.)| > \delta/4 \right] &\leq \mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \pi.)| > \delta/8 \right] \\ &\quad + \mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, \pi.) - \varphi_\gamma(t, \pi.)| > \delta/8 \right]. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Calculamos agora o erro  $|\varphi(t, \pi.) - \varphi_\gamma(t, \pi.)|$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t, \pi.) - \varphi_\gamma(t, \pi.) &= - \int_0^t [\partial_u H_s(0) - H_s(0)] \int_0^1 \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}_{[0, \varepsilon]}(u) - f_\gamma(u) \right) d\pi_s(u) ds \\ &\quad + \int_0^t [\partial_u H_s(1) + H_s(1)] \int_0^1 \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}_{[1 - \varepsilon, 1]}(u) - f_\gamma(u) \right) d\pi_s(u) ds \\ &\Rightarrow |\varphi(t, \pi.) - \varphi_\gamma(t, \pi.)| \leq \frac{Ct}{\varepsilon} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \pi_t(\varepsilon, \varepsilon + \gamma) + \sup_{0 \leq t \leq T} \pi_t(1 - \varepsilon - \gamma, 1 - \varepsilon) \right], \end{aligned}$$

onde  $C := \|H\|_\infty + \|\partial_u H\|_\infty$ .

Sabemos que,  $\mathbb{Q}_*$ -quase certamente,  $\pi.$  tem densidade  $\rho.$  limitada por 1. Logo se  $\gamma$  for pequeno o suficiente o segundo termo de (3.27) será nulo.

O próximo passo consiste em mostrar que a função  $\pi. \mapsto \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \pi.)|$  é semicontínua inferiormente. Seja  $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$  que converge a  $\pi.$  <sup>8</sup> Vamos mostrar que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \pi^n)| \geq \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \pi.)|$ .

Seja  $\kappa > 0$ . Existe  $t_0 \in [0, T]$  tal que  $\left| |\varphi_\gamma(t_0, \pi.)| - \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \pi.)| \right| < \kappa$ . Como  $\varphi_\gamma$  é contínua a direita na primeira coordenada<sup>9</sup>, conseguimos pelo Lema B.0.7 um  $t'_0 \in [0, T]$  tal que  $\left| |\varphi_\gamma(t_0, \pi.)| - |\varphi_\gamma(t'_0, \pi.)| \right| < \kappa$  e tal que  $\pi^n_{t'_0} \Rightarrow \pi_{t'_0}$ , de modo que  $\varphi_\gamma(t'_0, \pi^n) \rightarrow \varphi_\gamma(t'_0, \pi.)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Temos então

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \pi^n)| \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} |\varphi_\gamma(t'_0, \pi^n)| = |\varphi_\gamma(t'_0, \pi.)| \geq \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \pi.)| - 2\kappa.$$

Fazendo  $\kappa \rightarrow 0$  concluímos a demonstração da semicontinuidade inferior de  $\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \cdot)|$ . Agora podemos usar o Teorema de Portmanteau para escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_* \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \pi.)| > \delta/8 \right] &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_\gamma(t, \pi.)| > \delta/8 \right] \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N \left[ \pi. : \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, \pi.)| + \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, \pi.) - \varphi_\gamma(t, \pi.)| > \delta/8 \right] \end{aligned}$$

Mas  $\mathbb{Q}_N$ -quase certamente  $\pi_t(a, b) \leq (b - a)$  para qualquer intervalo aberto  $(a, b) \subset [0, 1]$ . Dessa forma, tomando  $\gamma$  pequeno o suficiente obtemos

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, \pi.) - \varphi_\gamma(t, \pi.)| < \delta/16,$$

donde segue o lema. □

*Demonstração do Lema 3.4.5:* Usaremos a variação quadrática de  $M_t^N(H)$ , que denotaremos por  $\langle M^N(H) \rangle_t$ . Calculamos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_N} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^N(H)| \right] &\leq \mathbb{E}_{\mu_N} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^N(H)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \mathbb{E}_{\mu_N} \left[ |M_T^N(H)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \mathbb{E}_{\mu_N} \left[ \langle M^N(H) \rangle_T \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Não confundir com a notação  $\pi_t^N$  para as medidas empíricas. No contexto acima,  $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  denota uma sequência de elementos quaisquer do espaço  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$ .

<sup>9</sup>Demonstração: sejam  $t_m, t \in [0, T]$  tais que  $t_m \downarrow t$ . Usando a continuidade e a limitação das funções  $f_\gamma$  e  $g_\gamma$ , o Lema B.0.7 e o Teorema da Convergência Dominada obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} |\varphi_\gamma(t_m, \pi.) - \varphi_\gamma(t, \pi.)| &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} |\langle \pi_{t_m}, H_{t_m} \rangle - \langle \pi_t, H_t \rangle| \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} |\langle \pi_{t_m}, H_{t_m} - H_t \rangle| + \limsup_{m \rightarrow \infty} |\langle \pi_{t_m}, H_t \rangle - \langle \pi_t, H_t \rangle| = 0 \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Scharz, a segunda é uma aplicação da Desigualdade de Doob e a terceira usa que  $\{M_t^N(H) - \langle M^N(H)^2 \rangle_t\}_{0 \leq t \leq T}$  é um martingal nulo no tempo  $t = 0$  (ver Teorema 1.2.1).

Mostraremos que a variação quadrática  $\langle M^N(H) \rangle_t$  converge a zero uniformemente em  $t \in [0, T]$ , quando  $N \rightarrow \infty$ . Temos

$$\langle M_t^N(H) \rangle = \int_0^t N^2 [L_N \langle \pi_s^N, H_s \rangle^2 - 2 \langle \pi_s^N, H \rangle L_N \langle \pi_s^N, H_s \rangle] ds$$

(ver [9] or [5]). Para simplificar a notação, denotaremos  $F_s(\eta) := \langle \pi^N, H_s \rangle = \frac{1}{N+1} \sum_{x \in I_N} \eta(x) H_s(\frac{x}{N})$ . Agora fazemos algumas contas:

$$\begin{aligned} & N^2 [L_{N,0} \langle \pi_s^N, H_s \rangle^2 - 2 \langle \pi_s^N, H_s \rangle L_{N,0} \langle \pi_s^N, H_s \rangle] \\ &= N^2 \left[ \sum_{x=0}^{N-1} [F_s^2(\eta_s^{x,x+1}) - F_s^2(\eta_s)] - \sum_{x=0}^{N-1} 2F_s(\eta_s) [F_s(\eta_s^{x,x+1}) - F_s(\eta_s)] \right] \\ &= N^2 \sum_{x=0}^{N-1} [F_s(\eta_s^{x,x+1}) - F_s(\eta_s)]^2 \\ &= N^2 \sum_{x=0}^{N-1} \frac{1}{(N+1)^2} [\eta_s(x+1)H_s(\frac{x}{N}) + \eta_s(x)H_s(\frac{x+1}{N}) \\ &\quad - \eta_s(x)H_s(\frac{x}{N}) - \eta_s(x+1)H_s(\frac{x+1}{N})]^2 \\ &= N^2 \sum_{x=0}^{N-1} \frac{1}{(N+1)^2} [(\eta_s(x) - \eta_s(x+1))(H_s(\frac{x+1}{N}) - H_s(\frac{x}{N}))]^2 \\ &= \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{x=0}^{N-1} (\eta_s(x) - \eta_s(x+1))^2 \left( \frac{H_s(\frac{x+1}{N}) - H_s(\frac{x}{N})}{N^{-1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Usando o teorema do valor médio, vemos que o termo envolvendo  $H_s$  é limitado por  $\|\partial_u H\|_\infty^2$ . A última expressão é então limitada por  $\frac{N}{(N+1)^2} \|\partial_u H\|_\infty^2$ , donde concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t N^2 [L_{N,0} \langle \pi_s^N, H_s \rangle^2 - 2 \langle \pi_s^N, H_s \rangle L_{N,0} \langle \pi_s^N, H_s \rangle] ds = 0$$

uniformemente em  $t \in [0, T]$ .

O próximo passo consiste em demonstrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t N^2 [L_{N,b} \langle \pi_s^N, H_s \rangle^2 - 2 \langle \pi_s^N, H_s \rangle L_{N,b} \langle \pi_s^N, H_s \rangle] ds = 0 \quad (3.28)$$

uniformemente em  $t \in [0, T]$ .



Para isso, calculamos

$$\begin{aligned}
& N^2[L_{N,b}F_s(\eta_s)^2 - 2F_s(\eta_s)L_{N,b}F_s(\eta_s)] \\
&= N^2 \left\{ \left( \frac{1-\alpha}{N}\eta_s(0) + \frac{\alpha}{N}(1-\eta_s(0)) \right) [F_s(\eta_s^0)^2 - F_s(\eta_s)^2 - 2F_s(\eta_s)(F_s(\eta_s^0) - F_s(\eta_s))] \right\} \\
&+ N^2 \left\{ \left( \frac{1-\beta}{N}\eta_s(N) + \frac{\beta}{N}(1-\eta_s(N)) \right) [F_s(\eta_s^N)^2 - F_s(\eta_s)^2 - 2F_s(\eta_s)(F_s(\eta_s^N) - F_s(\eta_s))] \right\} \\
&= N \left\{ [(1-\alpha)\eta_s(0) + \alpha(1-\eta_s(0))] [F_s(\eta_s^0) - F_s(\eta_s)]^2 \right\} \\
&+ N \left\{ [(1-\beta)\eta_s(N) + \beta(1-\eta_s(N))] [F_s(\eta_s^N) - F_s(\eta_s)]^2 \right\} \\
&= \frac{N}{(N+1)^2} [(1-\alpha)\eta_s(0) + \alpha(1-\eta_s(0))] [1-2\eta_s(0)]^2 H_s(0)^2 \\
&+ \frac{N}{(N+1)^2} [(1-\beta)\eta_s(N) + \beta(1-\eta_s(N))] [1-2\eta_s(N)]^2 H_s(1)^2 \\
&= \frac{N}{(N+1)^2} [(1-\alpha)\eta_s(0) + \alpha(1-\eta_s(0))] H_s(0)^2 \\
&+ \frac{N}{(N+1)^2} [(1-\beta)\eta_s(N) + \beta(1-\eta_s(N))] H_s(1)^2.
\end{aligned}$$

O valor absoluto da última expressão é menor ou igual a  $2\|H^2\|_\infty N/(N+1)^2$ , donde segue (3.28).  $\square$

*Contas para determinar  $N^2 L_N \langle \pi_s, H_s \rangle$ .* Escrevemos  $L_N = L_{N,0} + L_{N,b}$ . Começamos fazendo as contas para  $L_{N,0}$ :

$$\begin{aligned}
& N^2 L_{N,0} \langle \pi_s^N, H_s \rangle \\
&= \frac{N^2}{N+1} \sum_{x=0}^{N-1} [\eta_s(x+1) - \eta_s(x)] \left[ H_s\left(\frac{x}{N}\right) - H_s\left(\frac{x+1}{N}\right) \right] \\
&= \frac{N^2}{N+1} \sum_{x=0}^{N-1} \eta_s(x) \left[ H_s\left(\frac{x+1}{N}\right) - H_s\left(\frac{x}{N}\right) \right] \\
&+ \frac{N^2}{N+1} \sum_{x=1}^N \eta_s(x) \left[ H_s\left(\frac{x-1}{N}\right) - H_s\left(\frac{x}{N}\right) \right] \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{x=1}^{N-1} \eta_s(x) N^2 \left\{ \left[ H_s\left(\frac{x+1}{N}\right) - H_s\left(\frac{x}{N}\right) \right] - \left[ H_s\left(\frac{x}{N}\right) - H_s\left(\frac{x-1}{N}\right) \right] \right\} \\
&+ \frac{N}{N+1} \eta_s(N) N \left( H_s\left(\frac{N-1}{N}\right) - H_s(1) \right) + \frac{N}{N+1} \eta_s(0) N \left( H_s\left(\frac{1}{N}\right) - H_s(0) \right) \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{x=1}^{N-1} \eta_s(x) \Delta_N H_s\left(\frac{x}{N}\right) - \frac{N}{N+1} \eta_s(N) \nabla_N H_s(1) + \frac{N}{N+1} \eta_s(0) \nabla_N H_s(0).
\end{aligned}$$

A seguir calculamos  $N^2 L_{N,b} \langle \pi_s, H_s \rangle$ :

$$\begin{aligned}
& N^2 L_{N,b} \langle \pi_s^N, H_s \rangle \\
&= N^2 \left[ \frac{\alpha}{N} (1 - \eta_s(0)) + \frac{1-\alpha}{N} \eta_s(0) \right] \frac{1}{N+1} [(1 - \eta_s(0)) - \eta_s(0)] H_s(0) \\
&+ N^2 \left[ \frac{\beta}{N} (1 - \eta_s(N)) + \frac{1-\beta}{N} \eta_s(N) \right] \frac{1}{N+1} [(1 - \eta_s(N)) - \eta_s(N)] H_s(1) \\
&= \frac{N^2}{N(N+1)} H_s(0) \left\{ \alpha [(1 - \eta_s(0))^2 - \eta_s(0)(1 - \eta_s(0))] \right. \\
&+ (1 - \alpha) [\eta_s(0)(1 - \eta_s(0)) - \eta_s(0)^2] \left. \right\} + \frac{N^2}{N(N+1)} H_s(1) \\
&\times \left\{ \beta [(1 - \eta_s(N))^2 - \eta_s(N)(1 - \eta_s(N))] + (1 - \beta) [\eta_s(N)(1 - \eta_s(N)) - \eta_s(N)^2] \right\} \\
&= \frac{N^2}{N(N+1)} [\alpha (1 - \eta_s(0))^2 - (1 - \alpha) \eta_s(0)^2] H_s(0) \\
&+ \frac{N^2}{N(N+1)} [\beta (1 - \eta_s(N))^2 - (1 - \beta) \eta_s(N)^2] H_s(1) \\
&= \frac{N^2}{N(N+1)} (\alpha - \eta_s(0)) H_s(0) + \frac{N^2}{N(N+1)} (\beta - \eta_s(N)) H_s(1).
\end{aligned}$$

# Apêndice A

## A definição de solução fraca para a Equação (2.2)

O intuito desta seção é de servir como motivação para a definição de solução fraca da Equação 2.2. Alertamos que o que faremos aqui possui caráter informal.

Lembramos aqui a forma da equação hidrodinâmica:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t(u) = \Delta \rho_t(u), & \forall (t, u) \in [0, T] \times [0, 1] \\ \rho(0, u) = \gamma(u) & \forall u \in [0, 1] \\ \partial_u \rho_t(0) = -\alpha + \rho_t(0), & \forall t \in [0, T] \\ \partial_u \rho_t(1) = \beta - \rho_t(1), & \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

Fixe  $t \in [0, T]$  e  $H \in C^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$ . Como  $\rho_0(u) = \gamma(u)$ , esperamos poder escrever algo da forma

$$\langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle = \langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \rho_0, H_0 \rangle = \int_0^t \partial_s \langle \rho_s, H_s \rangle ds. \quad (\text{A.1})$$

A partir daí, podemos intuir que  $\partial_s \langle \rho_s, H_s \rangle = \langle \partial_s \rho_s, H_s \rangle + \langle \rho_s, \partial_s H_s \rangle$ . Agora, se  $\rho$  é solução, vale  $\partial_s \rho_s = \Delta \rho_s$ , com isto, obtemos

$$\partial_s \langle \rho_s, H_s \rangle = \langle \Delta \rho_s, H_s \rangle + \langle \rho_s, \partial_s H_s \rangle. \quad (\text{A.2})$$

O próximo passo consiste em fazer uma integração por partes no termo  $\langle \Delta \rho_s, H_s \rangle$ , para obtermos

$$\langle \Delta \rho_s, H_s \rangle = \partial_u \rho_s(1) H_s(1) - \partial_u \rho_s(0) H_s(0) - \langle \partial_u \rho_s, \partial_u H_s \rangle.$$

Fazendo uma nova integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \Delta \rho_s, H_s \rangle &= \partial_u \rho_s(1) H_s(1) - \partial_u \rho_s(0) H_s(0) \\ &\quad - \rho_s(1) \partial_u H_s(1) + \rho_s(0) \partial_u H_s(0) \\ &\quad + \langle \rho_s, \Delta H_s \rangle.\end{aligned}$$

Observe que nossa equação também satisfaz as condições  $\partial_u \rho_s(0) = -\alpha + \rho_s(0)$  e  $\partial_u \rho_s(1) = \beta - \rho_s(1)$ . Com isso, vale

$$\begin{aligned}\langle \Delta \rho_s, H_s \rangle &= \langle \rho_s, \Delta H_s \rangle \\ &\quad + \rho_s(0) \partial_u H_s(0) - \rho_s(1) \partial_u H_s(1) \\ &\quad + H_s(0)(\alpha - \rho_s(0)) + H_s(1)(\beta - \rho_s(1)).\end{aligned}\tag{A.3}$$

Juntando as equações (A.1), (A.2), e (A.3), obtemos

$$\begin{aligned}\langle \rho_t, H_t \rangle - \langle \gamma, H_0 \rangle &= \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta) H_s \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \{ \rho_s(0) \partial_u H_s(0) - \rho_s(1) \partial_u H_s(1) \} ds \\ &\quad + \int_0^t \{ H_s(0)(\alpha - \rho_s(0)) + H_s(1)(\beta - \rho_s(1)) \} ds.\end{aligned}$$

# Apêndice B

## O espaço $D_{\mathcal{M}}[0, T]$

### B.0.1 A métrica de Skorohod

Seja  $\mathcal{E}$  um espaço métrico separável e completo com a métrica  $\varphi$ . Denotamos por  $D_{\mathcal{E}}[0, T]$  o espaço das funções  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{E}$  que são contínuas à direita e tem limite à esquerda.

Seja  $\Lambda$  o espaço de todas as bijeções contínuas e estritamente crescentes  $\lambda : [0, T] \rightarrow [0, T]$ . Vamos nos referir aos elementos de  $\Lambda$  como *reparametrizações*. Definimos, para  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\|\lambda\| := \sup_{s < t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|$$

Podemos então definir uma métrica em  $D_{\mathcal{E}}[0, T]$  colocando, para  $f, g \in D_{\mathcal{M}}[0, T]$ ,

$$d_0(f, g) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left\{ \|\lambda\|, \sup_{0 \leq t \leq T} \varphi(f(t), (g \circ \lambda)(t)) \right\}.$$

Em [1] o leitor pode encontrar a demonstração de que a equação acima de fato define uma métrica em  $D_{\mathcal{E}}[0, T]$  que torna esse espaço separável e completo. No entanto, é mais conveniente trabalhar com a seguinte métrica:

$$d(f, g) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left\{ \|\lambda - I\|_{\infty}, \sup_{0 \leq t \leq T} \varphi(f(t), (g \circ \lambda)(t)) \right\},$$

onde  $I : [0, T] \rightarrow [0, T]$  é a função identidade. Prova-se que  $D_{\mathcal{E}}[0, T]$  não é completo com a métrica  $d$  e que as métricas  $d$  e  $d_0$  são equivalentes.

O lema a seguir segue da definição da métrica  $d$ :

**Lema B.0.6.** *Sejam  $f_n, f \in D_{\mathcal{E}}[0, T]$ . Então  $f_n \rightarrow f$  na topologia de Skorohod se e somente se existem reparametrizações  $\lambda_n \in \Lambda$  tais que  $|\lambda_n(t) - t| \rightarrow 0$  uniformemente em  $t$  e  $f_n \circ \lambda_n \rightarrow f$  uniformemente.*

## B.0.2 $\mathcal{M}$ é um espaço métrico compacto

Sejam  $K$  um espaço métrico compacto,  $C(K)$  o espaço de Banach das funções reais contínuas definidas em  $K$  e  $\mathcal{M}$  o conjunto das medidas finitas em  $K$  com massa limitada por 1.

Podemos identificar  $\mathcal{M}$  com um subconjunto do espaço dual de  $C(K)$  tomando, para  $f \in C(K)$  e  $\mu \in \mathcal{M}$ ,  $\langle \mu, f \rangle = \int_K f d\mu$ . Note que  $\|\mu\| = \mu(K) = \langle \mu, 1 \rangle$ , onde  $\|\cdot\|$  é a norma do espaço dual. Coloque em  $\mathcal{M}$  a topologia da convergência fraca de medidas. Com a identificação  $\mathcal{M} \subset C(K)^*$ , essa topologia corresponde à topologia fraca estrela. Pelo teorema de Banach-Alaoglu,  $\mathcal{M}$  é relativamente compacto. Como  $C(K)$  é separável e  $\mathcal{M}$  é limitado, a topologia fraca estrela de  $\mathcal{M}$  pode ser metrizada.

Uma métrica que gera a topologia fraca estrela pode ser obtida da seguinte forma (ver [2] para a demonstração): tome um conjunto enumerável  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  denso em  $\{f \in C(K) : \|f\| \leq 1\}$ . Para  $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ , defina

$$d(\mu, \nu) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle \mu, g_k \rangle - \langle \nu, g_k \rangle|$$

Com essa métrica,  $\mathcal{M}$  é um espaço métrico compacto, portanto completo e separável<sup>1</sup>. Com isso podemos colocar em  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$  a métrica de Skorohod definida na Seção B.0.1, tornando  $D_{\mathcal{M}}[0, T]$  um espaço métrico também separável e completo.

## B.0.3 Continuidade e convergência em $D_{\mathcal{M}}[0, T]$

**Lema B.0.7.** *Sejam  $(\pi_t^N)_{N \in \mathbb{N}}$ ,  $\pi_t \in D_{\mathcal{M}}[0, T]$  tais que  $\pi_t^N \rightarrow \pi_t$  na topologia de Skorohod. Então  $\pi_t^N \Rightarrow \pi_t$  para quase todo  $t$ , incluindo  $t = 0$  e  $t = T$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema B.0.6 existem reparametrizações  $\lambda_N \in \Lambda$  tais que  $\lambda_N(s)$  converge a  $s$  uniformemente em  $s$  e tais que  $\pi_{\lambda_N(s)}^N \Rightarrow \pi_s$  para todo  $s$ . Note que como  $\lambda_N(0) = 0$  e  $\lambda_N(T) = T$  para todo  $N$  já temos  $\pi_0^N \Rightarrow \pi_0$  e  $\pi_T^N \Rightarrow \pi_T$ .

Fixe  $t \in [0, T]$  tal que  $\pi_t$  é contínua em  $t$ . Observe que o conjunto dos  $t$  possíveis tem medida de Lebesgue total em  $[0, T]$  pois uma função càdlàg tem no máximo enumeráveis pontos de descontinuidade. Afirimo que  $\pi_t^N \Rightarrow \pi_t$ . Seja  $d$  a métrica que induz a convergência fraca em  $\mathcal{M}$ . Então

$$d(\pi_t, \pi_t^N) \leq d(\pi_t, \pi_{\lambda_N^{-1}(t)}) + d(\pi_{\lambda_N^{-1}(t)}, \pi_t^N).$$

<sup>1</sup>Sabemos que  $\mathcal{M}$  é relativamente compacto em  $C(K)^*$  com a topologia fraca estrela. Que  $\mathcal{M}$  é fechado é uma consequência do Teorema da Representação de Riesz

Note que

$$|t - \lambda_N^{-1}(t)| \leq \sup_{s \in [0, T]} |s - \lambda_N^{-1}(s)| = \sup_{s \in [0, T]} |s - \lambda_N(s)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Com a continuidade de  $\pi$  em  $t$  obtemos  $\lim_{N \rightarrow \infty} d(\pi_t, \pi_{\lambda_N^{-1}(t)}) = 0$ . Analogamente

$$d(\pi_{\lambda_N^{-1}(t)}, \pi_t^N) \leq \sup_{s \in [0, T]} d(\pi_{\lambda_N^{-1}(s)}, \pi_s^N) = \sup_{s \in [0, T]} d(\pi_s, \pi_{\lambda_N(s)}^N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

□

A proposição a seguir mostra que várias funções que aparecem ao longo do texto estão bem definidas.

**Proposição B.0.8.** *Sejam  $H \in L^1[0, T] \times [0, 1]$  e  $\pi \in D_{\mathcal{M}}[0, T]$ . Então a função  $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$\phi(s) = \int_0^1 H(s, u) d\pi_s(u)$$

é mensurável.

*Demonstração.* É suficiente mostrar a proposição quando  $H$  é a função indicadora de um retângulo  $[a, b] \times [c, d]$  em  $[0, T] \times [0, 1]$ . Nesse caso temos

$$\phi(s) = \pi_s[c, d] \mathbf{1}_{[a, b]}(s).$$

Basta mostrar que  $s \mapsto \pi_s[c, d]$  é mensurável. Mas pelo Teorema de Portman-teau a função  $\mu \mapsto \mu[c, d]$  definida em  $\mathcal{M}$  é semicontínua superiormente, portanto mensurável. Por outro lado a função  $s \mapsto \pi_s$  é càdlàg, logo mensurável também. Segue que a composição  $s \mapsto \pi_s[c, d]$  é mensurável, como queríamos demonstrar. □

**Proposição B.0.9.** *Fixe uma função  $H \in C[0, T] \times [0, 1]$ . A função  $\Phi : D_{\mathcal{M}}[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\Phi_H(\pi) = \int_0^T \int_{[0, 1]} H(s, u) d\pi_s(u) ds$$

é contínua.

*Demonstração.* Tome  $(\pi_s^N)_{N \in \mathbb{N}}$  e  $\pi \in D_{\mathcal{M}}[0, 1]$  tais que  $\pi_s^N \rightarrow \pi_s$  na topologia de Skorohod. Já demonstramos que  $\pi_s^N \rightarrow \pi_s$  para quase todo  $s$ . Logo, para quase todo  $s$  também vale

$$\int_{[0, 1]} H(s, u) d\pi_s^N(u) ds \rightarrow \int_{[0, 1]} H(s, u) d\pi_s(u) ds.$$

O resultado segue por convergência dominada. □

# Apêndice C

## Ferramentas de Análise

**Lema C.0.10.** *O conjunto  $C^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$  é separável com a norma  $\|H\|_\infty + \|\partial_t H\|_\infty + \|\partial_u H\|_\infty + \|\Delta H\|_\infty$ . Além disso, o subconjunto enumerável denso pode ser tomado em  $C^{1,3}([0, T] \times [0, 1])$*

Uma demonstração pode ser encontrada no Lema 5 do artigo [12].

**Lema C.0.11.** *Sejam  $(a_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_N)_{N \in \mathbb{N}}$  e  $(c_N)_{N \in \mathbb{N}}$  sequências de números não-negativos com  $c_N \uparrow \infty$ . Então*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c_N} \log(a_N + b_N) = \max \left\{ \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c_N} \log a_N, \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c_N} \log b_N \right\}.$$

*Demonstração.* Usando  $a_N + b_N \geq a_N$  e  $a_N + b_N \geq b_N$ , é fácil ver que o lado esquerdo da igualdade acima é maior ou igual ao lado direito. Resta mostrar a desigualdade contrária:

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c_N} \log(a_N + b_N) &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c_N} \log 2 \max\{a_N, b_N\} \\ &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c_N} \log \max\{a_N, b_N\} \\ &= \max \left\{ \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c_N} \log a_N, \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c_N} \log b_N \right\}. \end{aligned}$$

□



# Apêndice D

## Resultados sobre Processos de Markov

Dadas duas medidas finitas  $\mu$  e  $\pi$  num espaço de medida  $E$ , definimos a entropia de  $\mu$  em relação a  $\pi$  por

$$H(\mu|\pi) := \sup_f \left\{ \int_E f d\mu - \log \left( \int_E e^f d\pi \right) \right\},$$

onde o sup é tomado sobre as funções  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  limitadas e  $\langle \mu, f \rangle$  denota a integral da função  $f$  com respeito à medida  $\mu$ . Sejam  $\alpha > 0$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Pela definição da entropia temos

$$\begin{aligned} \int_E \alpha f d\mu &\leq H(\mu|\pi) + \log \left( \int_E e^{\alpha f} d\pi \right) \\ \Rightarrow \int_E f d\mu &\leq \frac{1}{\alpha} H(\mu|\pi) + \frac{1}{\alpha} \log \left( \int_E e^{\alpha f} d\pi \right). \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

A desigualdade (D.1) é chamada *Desigualdade da Entropia*.

Quando o espaço  $E$  é enumerável e  $\mu$  é absolutamente contínua com relação a  $\pi$  a entropia  $H(\mu|\pi)$  tem uma fórmula explícita:

$$H(\mu|\pi) = \sum_{x \in E} \mu(x) \log \frac{\mu(x)}{\pi(x)}. \quad (\text{D.2})$$

A demonstração dessa fórmula pode ser encontrada no Teorema 8.3 de [5].

O seguinte lema é fundamental no decorrer do texto

**Lema D.0.12.** *Sejam  $\nu_\alpha^N$  a probabilidade Bernoulli produto de parâmetro  $\alpha$  no espaço  $\{0, 1\}^N$  e  $\mu_N$  uma probabilidade qualquer em  $\{0, 1\}^N$ . Então*

$$H(\mu_N|\nu_\alpha^N) \leq K(N + 1),$$

onde  $K$  é uma constante que depende somente de  $\alpha$ .

*Demonstração.* Usando a fórmula explícita (D.2) para a entropia obtemos (denotando por  $a \wedge b$  o mínimo entre dois números  $a$  e  $b$ )

$$\begin{aligned} H(\mu_N | \nu_\alpha^N) &= \sum_{\eta \in \{0,1\}^{J_N}} \mu_N(\eta) \log \frac{\mu_N(\eta)}{\nu_\alpha^N(\eta)} \\ &\leq \sum_{\eta} \mu_N(\eta) \log \frac{1}{[\alpha \wedge (1-\alpha)]^{N+1}} \\ &= (N+1) \log \left( \frac{1}{\alpha \wedge 1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

□

**Lema D.0.13 (Feynman-Kac).** *Sejam  $(X_s)_{s \geq 0}$  uma cadeia de Markov com espaço de estados enumerável  $E$  e gerador infinitesimal  $L$  e  $V : [0, \infty) \times E \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Suponha que a cadeia é reversível em relação à medida invariante  $\pi$ . Então*

$$\mathbb{E}_\pi \left[ \exp \left\{ \int_0^t V(s, X_s) ds \right\} \right] \leq \exp \left\{ \int_0^t \Gamma_s ds \right\},$$

onde

$$\Gamma_s = \sup_{\|f\|_{L^2(\pi)} \leq 1} \{ \langle V_s, f^2 \rangle_\pi + \langle Lf, f \rangle_\pi \}. \quad (\text{D.3})$$

A demonstração da fórmula de Feynman-Kac pode ser encontrada em [5], Apêndice 1, Lema 7.2.

**Lema D.0.14 (Forma de Dirichlet).** *Considere um processo de Markov com espaço de estados finito  $E$  e semigrupo  $(P_t)_{t \geq 0}$ , reversível com respeito à medida  $\nu$  em  $E$ . Seja  $L$  a matriz do gerador infinitesimal e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Então*

$$\langle Lf, f \rangle_\nu = -\frac{1}{2} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} L(\eta, \xi) [f(\eta) - f(\xi)]^2 \nu(\eta)$$

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned} \langle P_t f, f \rangle_\nu &= \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} P_t(\eta, \xi) f(\xi) f(\eta) \nu(\eta) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} P_t(\eta, \xi) \{ [f(\xi) - f(\eta)]^2 - f(\xi)^2 - f(\eta)^2 \} \nu(\eta) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Usando a reversibilidade, isto é,  $\nu(\eta)P_t(\eta, \xi) = \nu(\xi)P_t(\xi, \eta)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} P_t(\eta, \xi) f(\eta)^2 \nu(\eta) &= \sum_{\xi \in E} \sum_{\eta \in E} \nu(\xi) P_t(\xi, \eta) f(\eta)^2 \\ &= \sum_{\eta \in E} \nu(\eta) f(\eta)^2. \end{aligned}$$

Além disso, como  $\nu$  é medida invariante,

$$\sum_{\xi \in E} \sum_{\eta \in E} P_t(\eta, \xi) f(\xi)^2 \nu(\eta) = \sum_{\xi \in E} \nu(\xi) f(\xi)^2.$$

Substituindo as duas últimas identidades em (D.4) obtemos

$$\langle P_t f - f, f \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} P_t(\eta, \xi) [f(\xi) - f(\eta)]^2 \nu(\eta).$$

Note que as parcelas com  $\eta = \xi$  são nulas, de forma que, denotando por  $I$  a matriz identidade, podemos escrever a expressão acima como

$$-\frac{1}{2} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} \frac{1}{t} [P_t(\eta, \xi) - I(\eta, \xi)] [f(\xi) - f(\eta)]^2 \nu(\eta).$$

Finalmente, calculamos

$$\begin{aligned} \langle Lf, f \rangle_\nu &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \langle P_t f - f, f \rangle_\nu \\ &= \lim_{t \downarrow 0} -\frac{1}{2} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} \frac{1}{t} [P_t(\eta, \xi) - I(\eta, \xi)] [f(\xi) - f(\eta)]^2 \nu(\eta) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\eta \in E} \sum_{\xi \in E} L(\eta, \xi) [f(\xi) - f(\eta)]^2 \nu(\eta). \end{aligned}$$

□

**Corolário D.0.15.** *Seja  $L_N = L_{N,0} + L_{N,b}$  o gerador infinitesimal definido na Introdução. Então*

$$\langle N^2 L_{N,0} f, f \rangle_{\nu_\alpha^N} = -\frac{N^2}{2} \sum_{x=0}^{N-1} \int [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)]^2 d\nu_\alpha^N(\eta)$$

*e*

$$\begin{aligned}\langle N^2 L_{N,b} f, f \rangle_{\nu_\alpha^N} &= -\frac{N^2}{2} \int \left[ \frac{1-\alpha}{N} \eta(0) + \frac{\alpha}{N} (1-\eta(0)) \right] [f(\eta^0) - f(\eta)]^2 d\nu_\alpha^N(\eta) \\ &\quad - \frac{N^2}{2} \int \left[ \frac{1-\alpha}{N} \eta(N) + \frac{\alpha}{N} (1-\eta(N)) \right] [f(\eta^N) - f(\eta)]^2 d\nu_\alpha^N(\eta) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] BILLINGSLEY, P. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, 1968.
- [2] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [3] EVANS, L. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [4] FRANCO, T.; GONÇALVES, P.; NEUMANN, A. *Phase transition of a Heat equation with Robin's boundary conditions and exclusion process*. Aceito para publicação em Transactions of the American Mathematical Society. Disponível em <http://arxiv.org/abs/1210.3662> [acesso em 19 maio 2013].
- [5] KIPNIS, C.; LANDIM, C. *Scaling limits of interacting particle systems*. Springer, 1999.
- [6] KORALOV, L.; SINAI, Y. *Theory of Probability and Random Processes*. Springer, 2012.
- [7] LEVIN, D.; PERES, Y. ; WILMER, E. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 2009.
- [8] NEUMANN, A. *Hydrodynamical Limit and Large Deviation Principle for the Exclusion Process with Slow Bonds*. 2011. 159p. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.
- [9] REVUZ, D.; YOR, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, 2010.
- [10] ROGERS, L.C.G.; WILLIAMS, D. *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 1: Fundamentals* 2a edição, John Wiley & Sons, 1994.

- [11] VARADHAN, S.R.S. *Probability Theory*. Courant Lecture Notes in Mathematics, 2000.
- [12] WHITNEY, H. *Analytic Extensions of Differentiable Functions Defined in Closed Sets*. Transactions of the American Mathematical Society, 1933.