

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**UMA METODOLOGIA PARA O ESTUDO DA DINÂMICA DE EIXOS ROTATIVOS DE
TRANSMISSÃO, COM APLICAÇÕES EM SEMI-EIXOS HOMOCINÉTICOS E EIXOS
CARDAN DE DUPLA SEÇÃO**

por

Wilson Toresan Junior

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2001

UMA METODOLOGIA PARA O ESTUDO DA DINÂMICA DE EIXOS ROTATIVOS DE TRANSMISSÃO, COM APLICAÇÕES EM SEMI-EIXOS HOMOCINÉTICOS E EIXOS CARDAN DE DUPLA SEÇÃO

por

Wilson Toresan Junior

Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Alberto Tamagna

Aprovada por:

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Prof. Dr. José Carlos Ferraz Hennemann

Prof. Dr. Arcanjo Lenzi

Prof. Dr. Alberto Tamagna
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 4 de Maio de 2001

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo amor e amizade.

À minha esposa e ao meu filho pelo carinho e compreensão.

Ao meu orientador Alberto Tamagna pela orientação.

Aos meus amigos e colegas do Grupo de Mecânica Aplicada pela orientação.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

RESUMO

O estudo de dinâmica de rotores é de fundamental importância para o projeto de equipamentos rotativos. Este fato deve-se a atual demanda por máquinas com melhores performances, menor tempo de manutenção e com condições de operação variáveis.

O custo elevado dos testes experimentais leva a considerar uma simulação numérica para verificar o projeto de equipamentos rotativos, sem a necessidade de realizar experimentos diferentes para cada tipo de variável a ser estudada.

Na indústria automobilística, há uma crescente necessidade de testar a confiabilidade dos componentes fabricados. Fenômenos vibratórios, como a ressonância dos componentes em relação às velocidades de rotação do motor, devem ser previstos. No entanto, em inúmeros casos, as características dinâmicas não são conhecidas até que se construam os protótipos e sejam realizadas avaliações experimentais. Esta experimentação é feita no veículo, com um custo elevado.

Há uma necessidade de métodos alternativos, que permitam o estudo do desempenho dinâmico dos componentes automotivos, ainda na fase de projeto, com menores custos.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia numérico-experimental para realizar uma análise de eixos rotativos de transmissão, dando-se ênfase em eixos Cardan e semi-eixos homocinéticos.

Vários métodos numéricos têm sido utilizados para o estudo de sistemas de eixos rotativos. Neste trabalho, o enfoque numérico é abordado utilizando-se o método das matrizes de transferência, apoiado em trabalhos experimentais e em resultados obtidos na pesquisa bibliográfica. Entre os tópicos de interesse, citam-se: o controle passivo de vibrações em eixos rotativos, utilizando o efeito giroscópico, a análise de vibrações em semi-eixos homocinéticos e em um eixo Cardan de dupla seção.

O objetivo da análise experimental é obter uma interação numérico-experimental para confirmar os resultados obtidos numericamente, validando a metodologia empregada.

As metodologias numérica e experimental utilizadas são apresentadas e discutidas, no intuito de obterem-se resultados e conclusões adequadas aos fenômenos estudados.

ABSTRACT

A Methodology to Study Dynamics of the Rotating Power Shaft Transmission with Applications in the Front Wheel Drive Shaft and Double Sections Cardan Shaft.

The field of rotordynamics is very important in the rotating equipment project field. This is due to the increasing demand for reliable machine performance and reduced maintenance over long periods of operation and under variable operating conditions.

The cost of experimental testing makes it practical to consider computer simulation to verify rotor bearing system designs without the necessity of building each design variation considered.

In the automotive industry, there is an increasing demand for testing the reliability of the manufactured components. Vibrational phenomenon, such as the components resonance in relation to the motor speed (velocity), must be considered. However, in many cases, the dynamic behaviour is unknown until a prototype is built and experimental evaluation is done in the vehicle, which can be expensive and time consuming.

Alternative methods are needed, in order to allow the dynamic behaviour study of the vehicle components in the design phase, therefore decreasing costs.

The aim of this study is the development of a numerical and experimental methodology to analyze power shaft transmissions, with emphasis to Cardan shafts and front wheel drive shafts.

Several numerical methods have been used in the rotordynamics analysis. In this work, the transfer matrix method is used as the numerical approach, which is compared with experimental results and the literature. The main applications are the passive vibration control of rotating shaft using gyroscopic effect, the vibration analysis of front wheel drive shafts and vibration of Cardan shafts.

The aim of experimental analysis is to obtain results to confirm the values of numerical analysis, confirming the scientific value of the methodology developed.

The numerical and experimental methodologies presented have been discussed by mean of the results obtained in this work.

ÍNDICE

	Pág.
1. Introdução	1
1.1 Objetivos	1
1.1.1 Integração Universidade-Empresa	1
1.1.2 Contribuição ao Aperfeiçoamento e Redução do Custo do Projeto de Eixos Rotativos de Transmissão	1
1.1.3 Aplicação Imediata na Indústria	2
1.2 Trabalhos Anteriores	2
1.3 Trabalho Atual	5
1.3.1 Bancada Experimental para Testes de um Eixo Cardan.	6
1.3.2 Bancada Experimental para Estudo do Efeito Giroscópico em Eixos Rotativos.	6
1.4 Organização do Trabalho	7
2. Uma Análise de Eixos Rotativos de Transmissão – Metodologia Numérica	9
2.1 Dinâmica de Rotores	9
2.1.1 Objetivos da Análise em Dinâmica de Rotores	9
2.1.2 Modelos Matemáticos	10
2.1.3 Análise Linear.	10
2.1.4 Análise Não-Linear.	13
2.1.5 Instabilidade	15
2.2 Método Numérico	22
2.2.1 O Método dos Elementos Finitos	23
2.2.2 O Método das Matrizes de Transferência	25
2.2.3 Análise de Vibrações Livre e Forçadas – Desenvolvimento de um Software	38
2.2.4 Análise Numérica no Tempo Através do Método das Matrizes de Transferência	39
2.2.5 Vetor Estado.	41
2.2.6 Elemento Rótula com Rigidez Angular e Carga Aplicada.	41
2.2.7 Elemento Eixo sem Massa, com Variação de Comprimento + Massa Concentrada.	43
2.2.8 Matriz Rotacional.	45
2.2.9 Eixo sem Massa e sem Variação do Comprimento e Massa Concentrada com Momento Fletor Aplicado.	45
2.2.10 Mancal Central.	46
2.2.11 Aplicação do Método Proposto em Problemas Não Lineares – Vibrações Paramétricas	...

	Pág.
.....	47
2.2.12 O Método dos Elementos Finitos – Matrizes de Transferência.	48
3. Metodologia Experimental	52
3.1 Análise do Eixo com Rotação Nula.	52
3.1.1 Utilização de Transdutor Piezoelétrico: Acelerômetros.	52
3.1.2 Análise Dinâmica do Eixo.	54
3.1.3 Aplicação da Metodologia Experimental.	54
4. Um Estudo do Efeito Giroscópico no Controle Passivo de Vibrações em Eixos Rotativos Através da Metodologia Proposta	55
4.1 Histórico.	55
4.2 Objetivos e Resultados.	60
4.2.1 Análise Experimental.	60
4.2.2 Determinação dos Modos de Vibração e Frequências Naturais do Eixo com Rotação Nula.	62
4.2.3 Análise Numérica.	63
4.2.4 Resultados Numéricos – Vibração Torsional.	64
4.2.5 Resultados Numéricos – Vibração Lateral	64
4.3 Um Exemplo de Colapso de Eixo Rotativo com Efeito Giroscópico em Ressonância.	64
4.4 Discussão dos Resultados e do Método Aplicado.	67
5. Vibrações em Semi-Eixos Homocinéticos	70
5.1 Conceitos Básicos de um Semi-Eixo e Junta Homocinética.	70
5.1.1 Fontes de Excitação em um Veículo.	70
5.1.2 Fontes Internas.	71
5.1.3 Fontes Externas.	72
5.2 Os Modelos Físico e Matemático Propostos.	72
5.3 Resultados.	75
5.3.1 Dados de Entrada.	75
5.3.2 Vibração Angular ou Torsional.	75
5.3.3 Vibração por Flexão ou Transversal.	76
5.3.4 Variação da Frequência Natural devido à Aplicação de Torque.	77

	Pág.
5.3.5 Variação da Frequência Natural devido ao Movimento Axial da Junta Deslizante	77
5.3.6 Vibração Transversal Forçada com Variação Paramétrica.	78
6. Vibrações em Eixos Cardan de Seção Dupla	93
6.1 Introdução.	93
6.2 Aplicação de Eixos Cardan.	93
6.3 Determinação das Variáveis de Projeto de um Eixo Cardan.	94
6.4 Vibrações em Eixos Cardan.	95
6.4.1 Vibrações Induzidas pelas Juntas Universais.	95
6.4.2 Vibrações Induzidas pelo Tubo do Eixo Cardan.	97
6.4.3 Vibrações Induzidas pelo Sistema Traseiro de Transmissão.	97
6.5 Velocidade Crítica.	98
6.5.1 O Movimento de Precessão.	98
6.6 Resultados Experimentais e Numéricos.	101
6.6.1 Verificação Experimental e Instrumentação.	101
6.6.2 Metodologia para a Determinação dos Modos de Vibração e Frequências Naturais Experimentalmente	102
6.6.3 Medições com Rotações Nula do Eixo Cardan	102
6.6.4 Medições Dinâmicas no Eixo Cardan	102
6.6.5 Influência da Rotação na Aceleração dos Apoios do Eixo Cardan	115
6.6.6 Análise Numérica	115
6.6.7 Propriedades Mecânicas e Geométricas do Eixo Cardan de Dupla Seção Estudado	118
6.6.8 Discretização do Sistema	118
6.6.9 Vibração Angular ou Torsional	120
6.6.10 Vibração por Flexão ou Lateral	121
6.6.11 Resultados Experimentais – Vibração Torsional	121
6.6.12 Resultados Experimentais – Vibração Lateral.	121
6.6.13 Resultados Numéricos – Vibração Torsional.	138
6.6.14 Resultados Numéricos – Vibração Lateral: Eixo Cardan Alinhado e sem Movimento da Suspensão do Veículo.	138
6.6.15 Resultados Numéricos – Vibração Lateral: Eixo Cardan Inclinado 5 graus.	138
7. Conclusões	141

	Pág.
7.1 Objetivos.	141
7.2 O Método Experimental.	141
7.3 O Método Numérico.	141
7.4 Aplicações.	142
7.4.1 Efeito Giroscópico – Controle Passivo de Vibrações.	142
7.4.2 Vibrações em Semi-Eixos Homocinéticos.	143
7.4.3 Vibrações em um Eixo Cardan de Dupla Seção.	145
7.4.4 Resultados Experimentais.	145
7.4.5 Resultados Numéricos.	145
7.4.6 Considerações Gerais.	147
7.5 Proposta de Continuidade do Trabalho.	147
Referências Bibliográficas.	149
Apêndice I.	156
Apêndice II.	160

LISTA DE SÍMBOLOS

cfrq	frequência de variação de comprimento	[Hz]
cmp	comprimento	[m]
cp	função variação de comprimento no tempo	[m]
C	momento fletor secundário	[N.m]
E	módulo de Young	[N/m ²]
f _{asec}	força alternativa secundária de desbalanceamento	[N]
frq	frequência de variação de F(t)	[Hz]
F(t)	carga aplicada	[N]
FVC	frequência de variação de comprimento	[Hz]
i	número imaginário, $\sqrt{-1}$	
J	momento de inércia transversal de área	[m ⁴]
k _R	rigidez angular	[N/rad]
k _r	rigidez angular	[N/rad]
L	comprimento	[m]
m	massa	[Kg]
m _a	massa de componentes sob movimento alternativo	[Kg]
M	momento fletor	[N.m]
M _K	momento gerado por uma mola angular	[N.m/rad]
M _r	momento resistente à articulação	[N.m/rad]
MT	matriz de transferência	
par	percentual de variação de comprimento	
PCV	percentual de comprimento variado	
q	deslocamento transversal	[m]
r	raio da manivela	[m]
rig	rigidez transversal	[N/m]
S	autovalor complexo	[rad]
t	tempo	[s]
T	torque aplicado no eixo rotativo	[N.m]
V	esforço cortante	[N]
Y _{ij}	amplitudes em um espectro	[m]
Z	vetor de estado	
ZFR	zona de frequências ressonantes	[Hz]

α	ângulo da posição da manivela em relação ao eixo do cilindro	[rad]
β	deslocamento angular	[rad]
ϕ_{ij}	ângulos de fase em um espectro	[rad]
λ_R e λ_I	componentes real e imaginária de S	[rad]
$\theta(t)$	inclinação do elemento	[rad]
ω	frequência natural	[Hz]
ψ	giro	[rad]

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
2.1 Coordenadas de movimento de um elemento de massa do rotor	11
2.2 Coordenadas de movimento radial do eixo relativo ao suporte no estado de equilíbrio estático	11
2.3 Coeficientes de rigidez [K] e de amortecimento [C] do suporte	11
2.4 Sistema rotor com deslocamentos radiais e angulares, momento fletor e esforço cisalhante	14
2.5 Movimento harmônico generalizado do eixo em relação ao suporte	17
2.6 Modelo genérico de um sistema rotor	18
2.7 Modelo Ilustrativo dos elementos e estações utilizados na caracterização de um rotor pelo MMT	19
2.8 (a) Modelo proposto para a aplicação do método, (b) mapa de instabilidade do sistema.	21
2.9 Sistema rotor típico	23
2.10 Elementos de um sistema rotor. (a) Rotor; (b) Coordenadas locais para os elementos rotor e disco; (c) Coordenadas locais para o elemento mancal-rolamento; (d) Coordenadas locais para o elemento suspensão	24
2.11 Eixo elástico sem massa com um disco simples fixo e suportado por conjuntos mancais-rolamentos radialmente rígidos	27
2.12 Geometria do movimento de precessão devido ao desbalanceamento do sistema rotor, no disco.	27
2.13 Relações para o segmento de eixo elástico sem massa	29
2.14 Relações de equilíbrio para uma massa concentrada	31
2.15 Desbalanceamento para a i-ésima massa concentrada de um sistema rotor	32
2.16 Relações de equilíbrio para uma massa concentrada nos planos x-z e x-y	34
2.17 Modelo ilustrativo para descrever a metodologia proposta por Kumar et al., 1986	36
2.18 Diagrama funcional do software desenvolvido	39
2.19 Diagrama de corpo livre da rótula com rigidez angular e carga aplicada	42
2.20 (A) Discretização de um eixo em (C) elementos elásticos sem massa e (B) massas pontuais concentradas.	43
2.21 Desenho esquemático do diagrama de corpo livre de um sistema mancal com rigidez transversal e angular e força aplicada.	47
2.22 Representação esquemática da variação de comprimento no tempo para eixos utilizada na formulação das matrizes de transferência, para análise de vibrações no domínio do tempo.	48

	Pág.
2.23 Modelo de um sistema rotor com 3 (três) estações	49
3.1 Bancada de teste para o controle passivo de eixos rotacionais	53
4.1 Disco com movimentos de precessão em relação aos eixos y e z	57
4.2 Movimento dos discos nos planos (a) XZ e (b) XY	58
4.3 Bancada experimental para estudos do efeito giroscópico	61
4.4 <i>Layouts</i> utilizados nas análises de controle passivo do eixo rotativo	62
4.5 Configuração dos equipamentos de aquisição e bancadas de testes	62
4.6 Modelagem empregada na simulação numérica do sistema de eixo rotativo	63
4.7 Diagrama de Campbell para o eixo com um (1) disco tipo I	65
4.8 Diagrama de Campbell para o eixo com um (1) disco tipo II.	65
4.9 Diagrama de Campbell para o eixo com dois (2) discos tipo I.	66
4.10 Diagrama de Campbell para o eixo com dois (2) discos tipo II	66
4.11 Modos de vibração do deslocamento translacional do eixo com um (1) disco tipo I.	67
4.12 Conjunto eixo rotativo com dois discos I deformado plasticamente	68
4.13 Conjunto mancal-rolamento destruído	68
4.14 Base de fixação do conjunto mancal-rolamento	68
5.1 A) Vista espacial da aplicação de par de semi-eixos homocinéticos e B) vista frontal esquemática da aplicação de um semi-eixo homocinético na transmissão dianteira de um veículo automotor.	73
5.2 Representação de semi-eixo homocinético típico e nomenclatura.	73
5.3 Modelo de semi-eixo montado no veículo.	74
5.4 Gráfico do momento resistente da junta fixa.	74
5.5 Gráfico do momento resistente para a junta deslizante.	75
5.6 A primeira e segunda frequências ressonantes do modo torsional do semi-eixo homocinético.	76
5.7 Efeito do aumento da rigidez de articulação sobre a frequência natural.	77
5.8 Efeito do aumento do comprimento total do semi-eixo na primeira frequência natural de flexão.	78
5.9 (a) e (b) espectros de frequências e (c) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(100.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 1 Hz.	80

5.10 (a) e (b) espectros de frequências e (c) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(200.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 1 Hz. . . .	81
5.11 (a) e (b) espectros de frequências e (c) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(240.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 1 Hz. . . .	82
5.12 (a) e (b) espectros de frequências e (c) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(100.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 5 Hz. . . .	84
5.13 (a) e (b) espectros de frequências e (c) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(200.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 5 Hz. . . .	85
5.14 (a) e (b) espectros de frequências e (c) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(240.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 1 Hz. . . .	86
5.15 (a) e (b) espectros de frequências e (c) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(100.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 10 Hz. . . .	87
5.16 (a) espectros de frequências e (b) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(200.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 10 Hz.	88
5.17 (a) espectros de frequências e (b) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(240.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 10 Hz.	89
5.18 (a) e (b) espectros de frequências e (c) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(100.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 15 Hz. . . .	90
5.19 (a) espectros de frequências e (b) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(200.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 15 Hz.	91
5.20 (a) espectros de frequências e (b) sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um <i>firing</i> de $\sin(240.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 15 Hz.	92
6.1 Elementos de junta e conexão de eixos Cardan.	93
6.2 Junta universal operando deslocada angularmente.	96
6.3 Momento secundário e torque variável presentes no segmento de eixo Cardan inclinado, com $\theta_{entrada} = \theta_{saida}$	96
6.4 Movimento de precessão direta.	99
6.5 Movimento de precessão inversa.	99
6.6 Variação de tensão para um movimento de precessão direto	100
6.7 Variação de tensão para um movimento de precessão inversa	100
6.8 Bancada experimental e o eixo Cardan de dupla seção.	101
6.9 Modelo de eixo Cardan usado no experimento com os pontos de aplicação da carga de im -	

	Pág.
pacto (11), os pontos de varredura (1-10) e o ponto de referência (12).	102
6.10 Espectro instantâneo de frequências do ponto de varredura 1 da figura 6.9.	103
6.11 Gráfico do primeiro modo de vibração experimental em 103 Hz.	104
6.12 Gráfico do segundo modo de vibração experimental em 211.5 Hz.	104
6.13 Gráfico do terceiro modo de vibração experimental em 321.5 Hz.	105
6.14 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 45 Hz – mancal direito.	106
6.15 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 45 Hz – mancal central.	108
6.16 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 45 Hz – mancal esquerdo.	110
6.17 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 61 Hz – mancal direito.	112
6.18 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 61 Hz – mancal central.	114
6.19 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 61 Hz – mancal esquerdo.	115
6.20 Discretização do eixo Cardan. Modelos utilizados para simulação (A) no domínio da frequência e (B) no domínio do tempo.	120
6.21 Espectro do primeiro modo torsional do eixo Cardan de dupla seção.	121
6.22 Espectros de frequência do eixo Cardan alinhado axialmente. a) Primeiro e b) segundo modos laterais.	122
6.23 Diagramas de Campbell do eixo Cardan alinhado axialmente. a) Primeiro e b) segundo modos laterais.	123
6.24 Modos de vibração do eixo Cardan alinhado axialmente. a) Primeiro e b) segundo modos laterais.	124
6.25 Sinais no tempo para o eixo Cardan inclinado 5 graus e sem movimento da suspensão traseira.	125
6.26 Espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus e sem movimento da suspensão traseira.	126
6.27 Diagramas de fase para o eixo Cardan inclinado 5 graus e sem movimento da suspensão traseira.	127
6.28 Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 10 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 1% no conjunto de eixo-luva.	128
6.29 Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 10 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 3% no conjunto de eixo-luva.	129
6.30 Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de	

10 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 5% no conjunto de eixo-luva.	130
6.31 Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 100 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 1% no conjunto de eixo-luva.	131
6.32 Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 100 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 3% no conjunto de eixo-luva.	132
6.33 Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 100 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 5% no conjunto de eixo-luva.	133
6.34 Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 112 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de comprimento 1%, 3% e 5% no conjunto de eixo-luva.	134
6.35 Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 150 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de comprimento 1%, 3% e 5% no conjunto de eixo-luva.	135
6.36 Espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 150 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de comprimento 1%, 3% e 5% no conjunto de eixo-luva.	136
6.37 Mapa de estabilidade para o eixo Cardan de dupla seção, inclinado 5 graus, (A) sem movimento da suspensão traseira e (B) com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de comprimento de 1%, 3% e 5% no conjunto de eixo-luva.	137

LISTA DE TABELAS

	Pág.
3.1 Planilha para registro dos dados do ensaio.	53
4.1 Dados experimentais do sistema de eixo rotativo analisado.	61
4.2 Momentos de inércia de massa dos discos utilizados.	61
4.3 Frequências naturais experimentais obtidas para a estrutura sem rotação.	63
4.4 Frequências naturais torsionais dos vários <i>layouts</i> do eixo rotativo.	64
5.1 Relação entre rotação e velocidade do veículo.	71
5.2 Propriedades mecânicas e os valores dimensionais utilizados na discretização do conjunto semi-eixo homocinético.	76
5.3 Resultados experimentais obtidos por Kniest, 1994, para alteração de frequências naturais devido à aplicação de torque.	77
5.4 Variação da ZFR segundo o PCV, para uma FVC de 1 Hz.	79
5.5 Variação da ZFR segundo o PCV, para uma FVC de 5 Hz.	83
5.6 Variação da ZFR segundo o PCV, para uma FVC de 10 Hz.	83
6.1 Planilha para o primeiro modo de vibração: frequência natural de 103 Hz.	103
6.2 Planilha para o segundo modo de vibração: frequência natural de 211.5 Hz	104
6.3 Planilha para o terceiro modo de vibração: frequência natural de 321.5 Hz	105
6.4 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 45 Hz – mancal direito.	107
6.5 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 45 Hz – mancal direito.	108
6.6 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 45 Hz – mancal central.	109
6.7 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 45 Hz – mancal esquerdo.	111
6.8 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 45 Hz – mancal esquerdo.	112
6.9 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 61 Hz – mancal direito.	113
6.10 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 61 Hz – mancal central.	116
6.11 Autoespectro – inclinação 0° e 4° – rotação do Cardan: 61 Hz – mancal esquerdo.	117
6.12 Variação da aceleração transversal nos mancais de apoio em função da rotação do eixo Cardan.	117
6.13 Propriedades mecânicas do Segmento 1	118
6.14 Propriedades mecânicas do Segmento 2	118
6.15 Propriedades mecânicas do Segmento 3	118

	Pág.
6.16 Propriedades mecânicas da junta Cardan.	119
6.17 Propriedades mecânicas do mancal de apoio central.	119
6.18 Frequências naturais para o eixo Cardan de dupla seção, com rotações de 45 Hz e 61 Hz, resultados experimentais.	138

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia numérico-experimental para análise de eixos rotativos de transmissão. O enfoque numérico é abordado utilizando-se o MMT¹, sendo validado e complementado com trabalhos experimentais e por resultados obtidos na pesquisa bibliográfica.

O propósito desta metodologia é promover uma interação numérico-experimental que consiga amenizar os problemas gerados por um e outro método.

As metodologias numérica e experimental utilizadas, são apresentadas, aplicadas e discutidas, no intuito de obterem-se resultados e conclusões adequados aos fenômenos estudados.

Entre as aplicações de interesse, citam-se: o controle passivo de vibrações em eixos rotativos, utilizando o efeito giroscópico, análise de vibrações em eixos homocinéticos e em um eixo Cardan de dupla seção.

1.1 Objetivos

1.1.1 Integração Universidade-Empresa

No conceito atual, os campos de atuação importantes para a Universidade são os de pesquisa e extensão. Através destes dois tópicos, busca-se uma integração e uma interação com a comunidade.

O desenvolvimento de projetos que respondam aos problemas enfrentados pela sociedade e aprimorem os processos existentes, é uma função básica da Universidade. Este trabalho classifica-se como um bom exemplo desta conceituação, posto que cumpre as duas funções básicas. Como pesquisa, objetiva ampliar o campo de conhecimento sobre os assuntos enfocados. Na atividade de extensão, permite o intercâmbio de informações entre a Universidade e as empresas locais, as quais serão diretamente beneficiadas com os resultados das pesquisas, permitindo também a solidificação de processos efetivos de parcerias.

1.1.2 Contribuição ao Aperfeiçoamento e Redução do Custo do Projeto de Eixos Rotativos de Transmissão

Na indústria automobilística, há uma crescente necessidade de realização de testes de confiabilidade dos equipamentos produzidos. Fenômenos vibratórios, como a ressonância de componentes automotivos, em relação às velocidades de rotação do motor, devem ser previstos.

Nos últimos anos, observa-se um incremento, cada vez maior, na velocidade de rotação de eixos de transmissão, urgindo um estudo detalhado dos fenômenos que ocorrem em altas velocidades de rotação, como o efeito giroscópico e a necessidade de uma análise numérico-experimental mais aprimorada.

Atualmente, o projeto de eixos de transmissão considera os aspectos de segurança e confiabilidade, desde a fase de projeto. No entanto, em inúmeros casos, as características dinâmicas

¹Sigla utilizada para referir-se ao Método das Matrizes de Transferência.

não são conhecidas até que se construam alguns protótipos e se façam avaliações experimentais. Esta experimentação se faz, principalmente, no veículo, com um custo elevado, ou em máquinas de curta vida útil, também muito dispendiosas. Ainda assim, o número de incógnitas, sobre o funcionamento dos sistemas, fica elevado.

Há uma necessidade de métodos alternativos, que permitam o estudo do desempenho dinâmico dos componentes automotivos, ainda na fase de projeto, com menores custos. O MMT mostra-se uma boa alternativa, dada a sua facilidade de manuseio e menor complexidade que outros métodos, além de ter inserido em seus modelos, conclusões experimentais, que diminuem a necessidade de testes experimentais posteriores.

1.1.3 Aplicação Imediata na Indústria

Os resultados do projeto, por sua característica prática, podem ser aplicados imediatamente na indústria, sem a necessidade de grandes alterações ou adaptações.

A metodologia desenvolvida, por sua simplicidade, permite a utilização por qualquer operador, sem a exigência de um conhecimento aprofundado do assunto ou um grande tempo de treinamento.

Os dados experimentais utilizados na validação do programa, assim como os conhecimentos teóricos extraídos, auxiliarão de modo direto nas atividades de desenvolvimento de produto, por parte da indústria, dado o maior conhecimento que se terá a respeito dos componentes de transmissão.

1.2 Trabalhos Anteriores

Há algum tempo, vem sendo desenvolvida uma linha de pesquisa dirigida à análise de eixos rotativos de transmissão. Busca-se com isso responder a uma demanda, por parte de empresas privadas, de ferramentas necessárias ao projeto de tais sistemas.

Esta linha de pesquisa iniciou-se com Coutinho, 1994, onde o objetivo era propor um modelo de semi-eixo homocinético aplicável ao estudo paramétrico e de projeto preliminar, mas que ao mesmo tempo fosse numericamente confiável e com boa visualização do fenômeno vibratório. Na execução deste estudo, substituiu-se o semi-eixo homocinético por elementos discretos, tais como, elementos elásticos com massa distribuída, sem massa e elementos com massa concentrada. A partir destas discretizações, formularam-se as matrizes de transferência para cada um destes elementos. A comparação dos resultados obtidos pelo MMT com os resultados analíticos de autovalores e autovetores, permitiram comprovar o excelente desempenho do método. Na análise experimental de semi-eixos homocinéticos, os resultados obtidos pelo MMT corresponderam “satisfatoriamente”, portanto, o MMT possui a vantagem de oferecer um custo menor, ao contrário dos onerosos softwares comerciais de elementos finitos, disponíveis no mercado.

Coutinho obteve conclusões a respeito do desempenho dinâmico de semi-eixos homocinéticos e dos parâmetros essenciais à caracterização deste componente. Estas conclusões são descritas a seguir, objetivando a compreensão do estudo desenvolvido.

* O espectro de frequências, fornecido pelo programa elaborado a partir do MMT, com visualização gráfica na tela, de um modelo de semi-eixo homocinético, tendo como condições de contorno as forças e deslocamentos da suspensão do veículo em uma extremidade e a rigidez estrutural oferecida pelo conjunto motor-coxins na outra extremidade, mostraram-se variáveis não significativas, na obtenção das frequências naturais de flexão do sistema em estudo. Em função disso, a hipótese de considerar as condições de apoio coincidentes com os centros de articulação da junta homocinética é plenamente viável, na análise de semi-eixos.

* Verificou-se uma relativa dependência da frequência natural de vibração do semi-eixo em função do deslocamento do apoio, causada pelos movimentos da suspensão veicular. Por isso, recomenda-se que no estudo do projeto de semi-eixos homocinéticos, deva ser feita uma análise cuidadosa dos movimentos das suspensões, tais como, a correlação entre o movimento da junta deslizante e a frequência natural do semi-eixo.

* Comprovou-se, computacionalmente, a relação direta entre o aumento do torque aplicado ao semi-eixo homocinético e o aumento da frequência natural de flexão. Tal fenômeno ocorre devido à mudança de condições de contorno, provocado pelo aumento da rigidez da articulação da junta homocinética, devido ao aumento do atrito entre os elementos internos móveis na junta, em função do maior torque aplicado.

* Com relação aos componentes do conjunto semi-eixo homocinético, foi constatada a predominância das características mecânicas e geométricas do eixo de conexão, em comparação com os demais componentes do sistema. Qualquer variação em seus valores de rigidez, massa e comprimento, modifica significativamente os valores da frequência natural do semi-eixo homocinético.

* A posição relativa entre os centros de articulação das juntas, é importante para o estudo dinâmico do conjunto semi-eixo homocinético, pois define as distâncias dos pontos nodais nos modos de vibração flexional do sistema. A frequência natural do semi-eixo é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os apoios, que, neste caso, estão representados pelos centros de articulação das juntas homocinéticas.

* Conforme explicitado em parágrafo anterior, a rigidez de articulação das juntas homocinéticas influi significativamente nos valores de frequência de ressonância por flexão do semi-eixo. Este parâmetro pode ser associado às alterações de valores das frequências naturais causadas pela aplicação de torque ao sistema.

* Buscando obter uma componente que permita o deslocamento do pico de frequência de uma faixa de ressonância crítica para uma faixa de operação suave, foi estudado o projeto de dessintonizadores de frequência. Este componente constitui-se de um conjunto massa mola, que é acoplado ao eixo homocinético, com a função de deslocar o pico de frequência. Constatou-se que, para uma operação mais eficiente, o dispositivo deve ser posicionado no ponto de maior inclinação da estrutura, pois neste ponto obtém-se uma maior relação entre a variação da massa e a variação da frequência.

* Outra opção apresentada para a atenuação do fenômeno de ressonância é a aplicação de neutralizadores. Esses são compostos de um conjunto massa, mola e amortecedor, reduzindo a ampli-

tude da vibração. Observou-se que para um mesmo valor de rigidez do eixo de conexão, quanto maior a rigidez do neutralizador dinâmico, maior deve ser a massa do mesmo, para um mesmo grau de atenuação. Assim, deve-se trabalhar com valores mínimos de rigidez no neutralizador, a fim de diminuir o peso total do conjunto e aumentar a eficiência do sistema.

* Através do uso de neutralizador dinâmico, é possível alterar significativamente a amplitude das duas primeiras frequências naturais do semi-eixo homocinético, sem modificar no mesmo grau a amplitude da terceira frequência natural. Este fenômeno ocorre devido ao menor nível de energia vibratória relacionada com o terceiro modo.

Após, tem-se o artigo de Coutinho e Tamagna, 1996, no qual aborda-se a vibração flexional de semi-eixos homocinéticos, utilizando-se de ábacos adimensionais para auxílio em projeto.

Matos, 1997, buscou aprimorar e estender o trabalho iniciado, através de uma abordagem mais geral do fenômeno que ocorre em eixos de transmissão, pela contribuição da deformação por corte, inércia rotacional e efeito giroscópico na formulação das matrizes de transferência dos elementos, admitindo duas condições de excitação: livre sem amortecimento e forçada com amortecimento. Na análise de vibração livre sem amortecimento, procurou-se obter as frequências naturais e os modos de vibração dos elementos elásticos rotativos, definindo, através destes dados, a faixa de operação ótima do sistema. Na vibração forçada com amortecimento, apresentou-se como meta a aquisição do espectro de vibrações, ou seja, do perfil de amplitudes, obtidos em função da frequência de excitação, da força excitadora e do fator de amortecimento. Com isso, determinam-se as condições de operação crítica e as opções de otimização.

O tópico adicional principal em relação ao trabalho anterior é a introdução do efeito giroscópico na formulação matricial. O exame do efeito giroscópico visa estudar as interações dinâmicas que ocorrem sob a ação da velocidade rotacional, tais como as modificações sofridas pelos módulos da frequência e da amplitude.

Como aplicação, analisou-se o comportamento dinâmico de eixos Cardan, visando conhecer as variáveis que afetam o seu desempenho, estabelecendo um modelo simplificado. A seguir, são relatadas as principais conclusões obtidas por Matos, 1997.

* A confrontação dos valores obtidos pelo MMT com os resultados analíticos e os obtidos pelo método dos elementos finitos, apresentaram uma “boa concordância”.

* Uma vantagem adicional do MMT é a facilidade de visualizar o fenômeno em estudo, como por exemplo, a ação do efeito giroscópico sobre a amplitude da frequência, os gráficos modais e espectros de frequência. Desta forma, baseado nos resultados obtidos computacionalmente, adotam-se as medidas de controle preventivas necessárias, evitando riscos à integridade da estrutura.

* Uma restrição apresentada pelo MMT refere-se à análise de apoios e rótulas elásticas com elevada rigidez, pois o programa torna-se instável. Pestel e Leckie, 1963, haviam relatado este problema em seus estudos, relacionando como causa do problema o efeito multiplicador gerado por erros de arredondamento que a elevada rigidez introduz.

* A relação analítica entre o efeito giroscópico e a velocidade de rotação, raio de giração e deslocamentos angulares dos elementos que compõe o sistema, guardadas suas devidas proporções,

foram confirmadas numericamente pelo MMT.

* Observa-se, pelo MMT, a bifurcação do pico de frequência, com o aumento da velocidade de rotação. Quando o eixo está rotacionalmente estático, é apresentado um determinado valor de frequência. A medida que a velocidade aumenta, originando a ação do momento giroscópico, a frequência divide-se em dois valores de maior e menor módulo que o valor original. A frequência de menor módulo, via de regra, é chamada de frequência de precessão retrógrada. A frequência de maior módulo representa a precessão direta, sendo mais facilmente obtida em testes de campo do que anterior.

* Nas configurações usualmente utilizadas em sistemas automotivos, o efeito giroscópico não influencia no comportamento dinâmico de eixos Cardan, segundo os exemplos simulados no MMT.

* Um fator essencial na dinâmica de eixos Cardan é a rigidez dos apoios. A mudança no módulo desta grandeza altera significativamente os valores de frequência do conjunto.

* A massa das juntas não mostrou ser significativa na análise dinâmica de eixos Cardan. Entretanto, ressalta-se que as relações entre o comprimento dos terminais e o comprimento do eixo entre juntas, utilizados na simulação com o MMT, foram pequenas. Para relações entre eixos maiores, é possível que haja uma maior influência da massa das juntas.

* Observou-se que a relação entre o comprimento dos terminais e o comprimento do eixo entre juntas influenciam na frequência de ressonância do conjunto. Em pequenas relações, a frequência do eixo entre juntas é predominante. A medida que esta variação aumenta, a predominância diminui e a frequência começa a variar de forma não linear.

* A inércia rotacional da junta não participa de forma significativa na determinação da frequência de ressonância do eixo Cardan, do mesmo modo que a massa da junta.

1.3 Trabalho Atual

O estudo de eixos de transmissão, apesar das inúmeras pesquisas já desenvolvidas ou ainda em andamento, necessita, devido às peculiaridades de cada situação estudada, de respostas para alguns fenômenos, além de uma organização do que já foi trabalhado, visando auxiliar a utilização destas informações no dia-a-dia do engenheiro ou ainda em futuras pesquisas.

A contribuição deste trabalho é o desenvolvimento e a aplicação de uma metodologia que auxilie no estudo de eixos rotativos de transmissão. Como exemplos de aplicação, são estudados: um rotor de Jeffcott, como em Vance 1989, um eixo Cardan de dupla seção e um semi-eixo homocinético.

Seguindo a linha de pesquisa proposta, utilizou-se bancadas experimentais para promover os fenômenos físicos a serem analisados, sendo os resultados obtidos por estas bancadas confrontados com a análise numérica, baseada no método das matrizes de transferência.

Os pontos trabalhados são:

Características básicas da estrutura:

* Obtenção das frequências naturais e modos de vibração.

- * Determinação das velocidades críticas.
- * Obtenção dos deslocamentos e esforços internos

Controle passivo de vibrações

- * Estudar o efeito giroscópico em eixos rotativos.

Instabilidade dinâmica

* Implementação, no MMT, da análise de instabilidade dinâmica e sua aplicação em conjuntos de eixos Cardan e semi-eixos homocinéticos.

Análise de sistemas não lineares

- * Implementação de uma análise no domínio do tempo para o MMT.

1.3.1 Bancada Experimental para Testes de um Eixo Cardan

Entre os estudos relativos à eixos Cardan, tem-se os relativos à vibração transversal de juntas Cardan de Iwatsubo and Saigo, 1984, que analisam a vibração transversal de um sistema rotor acionado por uma junta Cardan, avaliando o efeito do torque transmitido na instabilidade dinâmica do sistema e concluindo que tanto a vibração paramétrica, quanto a auto-excitada manifestam-se devido ao torque de acionamento, e que a rigidez assimétrica dos apoios do rotor possui o efeito de estabilizar esta perturbação. Mais adiante Iwatsubo and Saigo, 1987, realizam o mesmo estudo para o caso de duas juntas Cardan, observando que nesse caso a rigidez assimétrica dos apoios do rotor nem sempre possui o efeito estabilizador. Rouston et al, 1992, projetaram e construíram uma bancada de testes para estudar a influência da junta Cardan na vibração torsional e transversal de eixos, constatando que as folgas, existentes na conexão entre os componentes do conjunto, afetam significativamente a frequência de ressonância torsional e que respostas de segunda ordem devido à variação paramétrica na junta Cardan dominam a resposta.

Neste trabalho um modelo experimental foi projetado e construído para estudar os efeitos da vibração em um eixo Cardan de dupla seção. Foi realizada uma análise para a determinação dos modos de vibração e frequências naturais no modelo. Foram realizadas, também, medições com o eixo Cardan em funcionamento, movido por um motor elétrico em diferentes rotações e posições angulares das juntas.

1.3.2 Bancada Experimental para Estudo do Efeito Giroscópico em Eixos Rotativos

A aplicação do MMT na análise de eixos elásticos em flexão pura é largamente difundida, porém existem poucas publicações sobre sua utilização no estudo do efeito giroscópico. Um dos trabalhos mais citados, na literatura técnica, sobre o efeito giroscópico é o de Den Hartog, 1947, onde apresenta uma descrição do fenômeno, formulando equações adimensionais, as quais são mostradas em forma gráfica, além disto, confirma a existência de uma rotação excêntrica inversa, a precessão retrógrada. Segue-se a ele Green, 1948, que realiza uma análise adimensional para

várias disposições de discos montados em eixos elásticos. Arnold and Maundes, 1961, escreveram uma obra bastante abrangente sobre o assunto, dando especial atenção à aplicação do fenômeno na engenharia. Rao, 1983, posteriormente, em sua obra, deduz uma matriz de transferência que considera o efeito giroscópico para um disco acoplado a um eixo em rotação. Mais recentemente, Sauer and Wolf, 1989, examinam a influência do efeito giroscópico em um eixo elástico com massa distribuída, utilizando o método dos elementos finitos, constatando o alargamento da faixa de frequência e a diminuição na amplitude de vibração, conforme o eixo aumenta a rotação.

Na bancada experimental utilizada, neste trabalho, foram construídos discos de aço com diferentes raios de giração, porém mesma massa, postados em pontos estratégicos do eixo, para obter-se uma variação coerente do efeito giroscópico produzido.

Realizaram-se ensaios no sistema com rotação nula e em movimento. No primeiro caso, para a aquisição das frequências naturais e modos de vibração, utilizou-se o método de resposta e impulso, descrito no Capítulo 3. Na análise dinâmica do sistema, um acelerômetro piezoelétrico é posto em uma das extremidades da estrutura, sobre um mancal, sendo o sinal enviado para um analisador de Fourier, onde visualiza-se o espectro produzido pelo eixo em movimento, determinando as possíveis frequências que caracterizam o sistema.

1.4 Organização do Trabalho

Com o objetivo de facilitar a compreensão da pesquisa desenvolvida, apresentam-se, de forma resumida, os métodos e objetivos a serem desenvolvidos em cada capítulo.

Optou-se por ordenar o trabalho em capítulos com tópicos diferentes, segundo o fenômeno em questão, contendo as metodologias utilizadas, resultados e discussões pertinentes.

No Capítulo 1, uma visão geral do trabalho é exposta, visando introduzir o leitor nos objetivos a serem alcançados, justificando a realização da pesquisa.

Uma vez que deseja-se implementar metodologias para análises numérica e experimental de eixos rotativos de transmissão, no Capítulo 2 são abordados os métodos numéricos utilizados no estudo de dinâmica de rotores, discutindo a opção pelo método das matrizes de transferência, apresentando-se o estado atual da arte e propondo a implementação de uma análise mais abrangente de sistemas rotativos. Dando sequência ao trabalho, no Capítulo 3, utilizando bancadas de testes, desenvolve-se a metodologia experimental a ser empregada no estudo de eixos rotativos de transmissão, que fornecerá resultados para validarem-se os valores obtidos numericamente.

No Capítulo 4 analisa-se numericamente e experimentalmente a ação do efeito giroscópico sobre um eixo rotativo, do tipo Jeffcott, em diferentes rotações, sendo projetada e construída uma bancada de testes, simulando o fenômeno desejado.

No Capítulo 6, faz-se uma revisão dos conceitos básicos do sistema eixo Cardan, salientando-se os fenômenos que ocorrem durante a sua operação. Ainda são apresentados e analisados os resultados numéricos e experimentais, obtidos através das metodologias expostas no Capítulo 2. No Capítulo 5, de forma semelhante ao Capítulo 6, o sistema de semi-eixo homocinético é analisado e discutido.

No Capítulo 7, são apresentadas e discutidas as conclusões.

2 UMA ANÁLISE DE EIXOS ROTATIVOS DE TRANSMISSÃO - METODOLOGIA NUMÉRICA

O objetivo deste capítulo é apresentar uma revisão dos conceitos fundamentais da dinâmica de rotores e, baseado nestes, apresentar o método numérico utilizado para obter as características dos sistemas rotativos em questão.

Na dinâmica de rotores, os métodos de análise podem ser analíticos, experimentais e numéricos. Os métodos analíticos disponíveis apresentam um grau de complexidade elevado, para sistemas reais mais elaborados, dificultando o processo de análise. Os métodos experimentais, embora representem diretamente o fenômeno estudado, demandam custos elevados, além de apresentarem dificuldades operacionais e de interpretação dos resultados obtidos em campos de testes. A simulação numérica vem complementar e oferecer um ponto de referência para análise experimental.

A questão a ser abordada pelo pesquisador é a seguinte: Qual a justificativa para utilizar um determinado método numérico, dentre as opções disponíveis?

Dando continuidade a um trabalho em análise de eixos rotativos, optou-se pela utilização do método das matrizes de transferência, devido à experiência adquirida em trabalhos anteriores, além da versatilidade do método para resolver problemas de estruturas em linha, como eixos rotativos. Uma metodologia experimental também é proposta no Capítulo 3. O objetivo final é a obtenção de um método numérico-experimental que permita a compreensão e a validação dos resultados obtidos na pesquisa.

2.1 Dinâmica de Rotores

A dinâmica de rotores fornece ferramentas de fundamental importância para a compreensão da dinâmica de equipamentos rotativos, cuja necessidade de performance e de longos períodos de operação sem manutenção vem aumentando. A bibliografia existente é extensa e as pesquisas realizadas nos últimos 100 (cem) anos fizeram o conhecimento nesta área progredir consideravelmente, embora muitos problemas ainda necessitem de respostas.

O conhecimento das definições e teorias utilizadas, nesta ciência, são fundamentais para sua utilização como instrumento de pesquisa, os quais podem ser encontradas em obras literárias importantes desta área, como em Vance, 1989. A seguir encontram-se os objetivos, modelos e limitações da teoria utilizada.

2.1.1 Objetivos da Análise em Dinâmica de Rotores

Durante as fases de projeto, operação e manutenção de um equipamento rotativo, a dinâmica de rotores está direcionada para auxiliar nos seguintes objetivos:

- Determinar as frequências naturais e os modos de vibração associados.
- Determinar as velocidades críticas.

- Determinar as frequências de instabilidade do sistema.
- Otimização do sistema para atingir a performance desejada.

Este trabalho está direcionado para uma análise dinâmica na faixa de operação dos sistemas rotativos.

2.1.2 Modelos Matemáticos

Modelos matemáticos não representam os modelos físicos em sua totalidade, devido à complexidade envolvida nos problemas reais. A solução encontrada pelos pesquisadores teóricos foi considerar modelos com simplificações que não representam o fenômeno estudado em sua totalidade, entretanto, conduzindo a valores próximos à realidade. Na dinâmica de rotores, podemos classificar as análises realizadas em dois grandes grupos, segundo as aproximações propostas para os modelos matemáticos utilizados, i.e., análise linear e não-linear, que são discutidas a seguir.

2.1.3 Análise Linear

Para sistemas com menor grau de complexidade, i.e., pequenos deslocamentos, rigidez e amortecimento constantes, regime elástico, axi-simetria do sistema, carregamento harmônico, é justificado o fato de utilizar um modelo linear para representar um sistema rotativo e suas condições de contorno, como uma primeira aproximação para o fenômeno observado.

A seguir, estão relacionados alguns pesquisadores e seus trabalhos em modelos lineares para sistemas rotores.

Adams e Padovan, 1981, fazem uma revisão do modelo matemático linear para rotores. Com esta finalidade, adotam o método dos elementos finitos para discretizar o rotor e seus suportes, utilizando elementos de vigas, Timoshenko ou Euler, com seção circular e com 4 (quatro) graus de liberdade, 2 (dois) translacionais e 2 (dois) angulares, como na figura 2.1, aos quais são fixas massas rígidas e discos, simulando os acoplamentos existentes.

As equações do movimento para o sistema completo podem ser escritas na forma matricial das equações 2.1:

$$[M].\{\ddot{x}\} + [C].\{\dot{x}\} + [K].\{x\} = \{F(t)\} \quad (2.1)$$

$[M]$ é a matriz de massa;

$[C]$ e $[K]$ são as matrizes de amortecimento e rigidez, respectivamente;

$\{x\}$ é o vetor de deslocamento radial, relativo ao estado de equilíbrio estático da figura 2.2;

$\{F(t)\}$ é o vetor de força aplicada por elemento.

A matriz $[M]$ é simétrica, já as matrizes $[C]$ e $[K]$ são, geralmente, não-simétricas, devido às reações geradas pelo eixo rotativo em seus suportes, como na figura 2.3, descritos nas equações 2.2 e ao momento giroscópico, descrito nas equações 2.3. Os fenômenos de instabilidade e bifurcação do espectro de frequências, em sistemas rotativos, são consequências diretas destas não-simetrias.

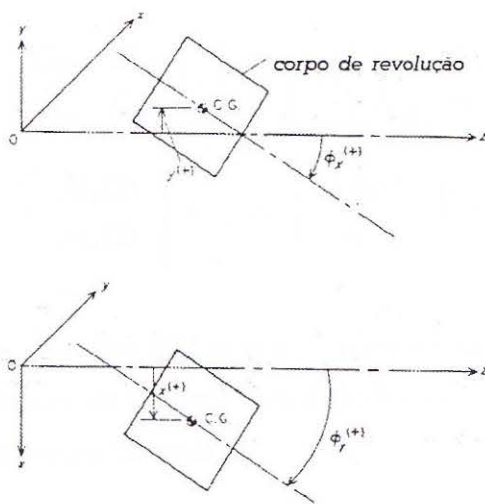


Figura 2.1: Coordenadas de movimento de um elemento de massa do rotor.

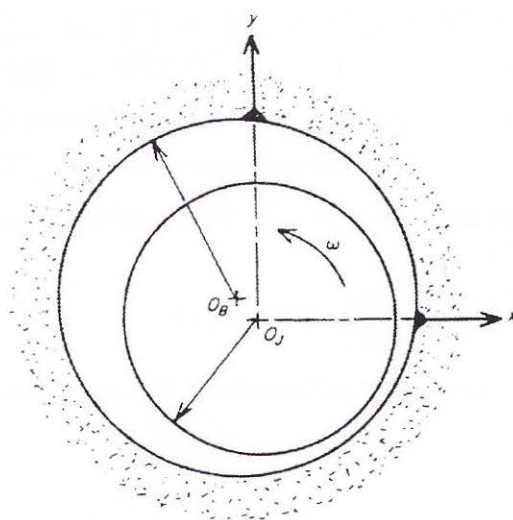


Figura 2.2: Coordenadas de movimento radial do eixo, relativo ao suporte no estado de equilíbrio estático.

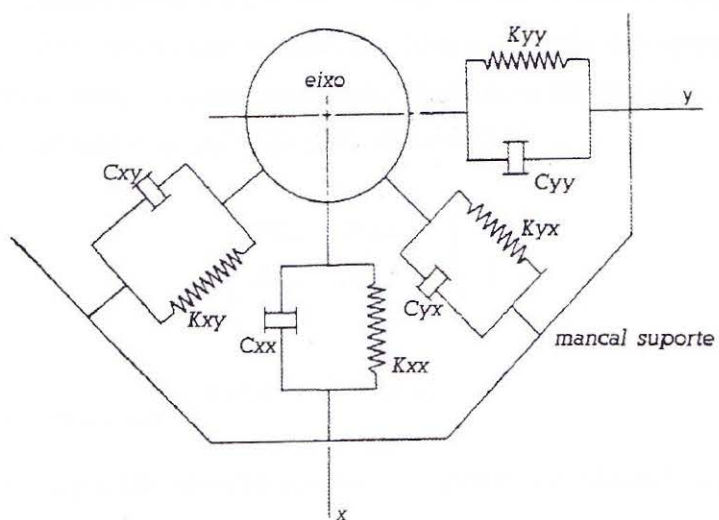


Figura 2.3: Coeficientes de rigidez [K] e de amortecimento [C] do suporte.

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \end{Bmatrix} = \omega \cdot I_p \cdot \begin{Bmatrix} -\dot{\phi}_y(t) \\ \dot{\phi}_x(t) \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

onde:

(f_x, f_y) :forças de interação dinâmica radiais entre o rotor e o suporte;

$\dot{\phi}_x(t)$ e $\dot{\phi}_y(t)$:velocidade de giro do elemento nas direções x e y;

I_p : momento de inércia transversal de massa;

ω : rotação;

$M_x(t)$ e $M_y(t)$:momentos giroscópicos relativos aos eixos x e y, respectivamente.

As matrizes $[C]$ e $[K]$, das equações 2.1, são decompostas em duas partes, uma simétrica, $[C]_s$, e outra anti-simétrica, $[C]_{as}$, i.e., $[C] = [C]_s + [C]_{as}$ e $[K] = [K]_s + [K]_{as}$, onde $[C]_s = \frac{[C]+[C]^T}{2}$, $[C]_{as} = \frac{[C]-[C]^T}{2}$, $[K]_s = \frac{[K]+[K]^T}{2}$ e $[K]_{as} = \frac{[K]-[K]^T}{2}$. Esta decomposição quantifica as forças conservativas, $[K]_s$ (matriz rigidez) e $[C]_{as}$ (matriz giroscópica), e as não conservativas, $[K]_{as}$ (matriz circulatória) e $[C]_s$ (matriz amortecimento).

Uma vez definida as equações diferenciais 2.1 e supondo uma solução harmônica, i.e.:

$$\{x\} = \{Y\} \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (2.4)$$

os autovalores, λ , e os autovetores, $\{Y\}$, associados, podem ser obtidos diretamente da equação característica:

$$(\lambda^2 \cdot [M] + \lambda \cdot [C] + [K]) \cdot \{Y\} = 0 \quad (2.5)$$

Adams, 1987, dando continuidade aos seus estudos em sistemas rotores, analisa os efeitos dinâmicos, em seus modelos linearizados, da inclusão de um termo de força, nas equações 2.2, dependente das acelerações envolvidas no sistema, com a intenção de explicar alguns fenômenos observados experimentalmente, os quais os modelos dinâmicos linearizados, de sistemas rotativos, não explicavam, apresentando o termo dado pela equação 2.6:

$$- \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

onde:

$M_{ij} = - \left. \frac{\partial F_i}{\partial \ddot{X}_j} \right|_{\{X\}=\{\dot{X}\}=\{\ddot{X}\}=0}$: é a matriz de massa;

$\{X\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$: vetor posição do eixo relativo ao suporte considerando a posição de equilíbrio;

$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}$: vetor força exercida pelo fluido.

Yu e Adams, 1989, propõe um modelo matemático linearizado para suportes de sistemas rotores que apresentem movimentos radiais e inclinações, devido a possíveis desalinhamentos entre o eixo rotativo e o suporte, simultaneamente. Salientam que este tipo de situação possui importância para suportes de grande comprimento axial. As equações e os modelos matemáticos utilizados são semelhantes aos descritos pelas equações 2.1, 2.2 e 2.3.

2.1.4 Análise Não-Linear

Em alguns problemas, não é possível analisar o sistema estudado através de sistemas lineares, sem prejuízo ao modelo. A existência de grandes deslocamentos, propriedades mecânicas, como amortecimento e rigidez não constantes, a não axi-simetria de algum componente, carregamento transiente ou não-periódico, conduzem a uma análise não-linear do problema.

Com algumas exceções, os problemas não-lineares podem ser resolvidos numericamente através de uma integração no tempo das equações diferenciais que regem o sistema. A seguir, destacam-se alguns trabalhos desenvolvidos neste tipo de análise.

Kirk et al., 1974, obtém as equações do movimento necessárias para calcular a resposta transiente de um rotor flexível com vários componentes acoplados, i.e., discos, juntas, massas de desbalanceamento, e suportado por um sistema mancal com propriedades não-lineares, através de princípios energéticos. Um sistema rotor flexível é representado como um conjunto de estações, cujas equações de forças são obtidas através da equação de Lagrange.

Lund, 1974-b, apresenta um método para a obtenção da resposta de um sistema rotor flexível genérico, suportado por um sistema de mancais com óleo, sujeita à cargas periódicas ou transientes.

Referenciando-se à figura 2.4, os deslocamentos translacionais em duas direções perpendiculares são x e y , com os correspondentes deslocamentos angulares θ e ϕ , que são funções da coordenada z ao longo do eixo longitudinal. O rotor está suportado por H suportes, representados por um conjunto de coeficientes de rigidez, $[K]$ e amortecimento $[B]$ nas direções x , y , θ e ϕ , equação 2.7, onde (R_x, R_y) são as forças de reação nas direções x e y e (R_θ, R_ϕ) são os momentos de reação nas direções angulares θ e ϕ .

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_\theta \\ R_\phi \end{Bmatrix}_h = - \left([K] + [B] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)_h \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix}_h \quad (2.7)$$

As equações diferenciais para cada elemento serão dadas pela equação 2.8:

$$A + \sum_{h=1}^H \delta(z - z_h) \cdot \left([K] + [B] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)_h \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_\theta \\ F_\phi \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Sendo:

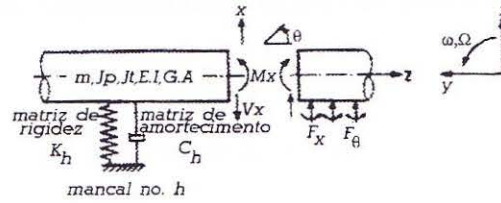


Figura 2.4: Sistema rotor com deslocamentos radiais e angulares, momento fletor e esforço cisalhante.

$$A = \begin{pmatrix} m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial V_x}{\partial Z} \\ m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial V_y}{\partial Z} \\ j_T \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \Omega \cdot j_P \frac{\partial \phi}{\partial t} + V_x - \frac{\partial M_x}{\partial Z} \\ j_T \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Omega \cdot j_P \frac{\partial \theta}{\partial t} + V_y - \frac{\partial M_y}{\partial Z} \end{pmatrix}$$

m : massa por unidade de comprimento;

j_P e j_T : momentos de inércia polar e transversal de massa;

Ω : rotação do sistema;

M_x e M_y : momentos de flexão;

V_x e V_y : esforços cisalhantes;

F_x , F_y , F_θ e F_ϕ : forças e momentos externos por unidade de comprimento;

$\delta(z)$: função unitária delta.

As equações de deformação para o eixo são as clássicas utilizadas para vigas:

$$\theta = \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{V_x}{\alpha \cdot G \cdot A} \quad (2.9)$$

$$M_x = E \cdot I \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.10)$$

e analogamente para ϕ e M_y .

A é a área da seção transversal, G é o módulo de cisalhamento, α é o fator de forma, I é o momento de inércia transversal de área e E é o módulo de Young.

Na ausência de carregamento, a solução geral da equação 2.8 será:

$$x = X_n \cdot e^{s_n \cdot t} \quad (2.11)$$

$$\theta = \Theta_n \cdot e^{s_n \cdot t} \quad (2.12)$$

$$M_x = M_{xn} \cdot e^{s_n \cdot t} \quad (2.13)$$

$$V_x = V_{xn} \cdot e^{s_n \cdot t} \quad (2.14)$$

e analogamente para y , ϕ , M_y e V_y .

X_n , Θ_n , M_{zn} e V_{zn} são as funções modais complexas, para o n-ésimo modo, associadas com os autovalores complexos:

$$s_n = \lambda_n + i.\omega_n \quad (2.15)$$

onde ω_n é a frequência natural amortecida e λ é fator de amortecimento exponencial.

Na presença de carregamento, é proposta uma técnica de análise modal modificada, pois devido a natureza não conservativa da rigidez e do amortecimento dos suportes do sistema, o método modal clássico, ver Meirovitch, 1967, não se aplica.

Adams, 1980, propõe um modelo de simulação, para problemas de vibrações harmônicas e transientes, aplicado a sistemas rotores em geral. O ponto central é compreender os efeitos gerados pela não linearidade presente no sistema, como a existência de grandes deslocamentos nos suportes das estruturas. Salienta que, em tais problemas, os modelos lineares existentes podem conduzir a resultados distorcidos, em relação ao fenômeno real. O método dos elementos finitos é utilizado para verificar a validade do modelo proposto, através de uma comparação com resultados experimentais.

2.1.5 Instabilidade

A instabilidade de um sistema rotativo é caracterizado por um movimento de precessão em uma frequência, na maioria dos casos, diferente da rotação do eixo. A palavra instabilidade significa que a amplitude do movimento tende a crescer sem limite, ocasionando danos à estrutura.

A fonte mais comum de vibração em um sistema rotor é devido a existência de desbalanceamento, produzindo uma vibração que é síncrona com a rotação do rotor. Porém, mesmo nos sistemas mais simples, surgem frequências não síncronas com a rotação do rotor, podendo ser subsíncronas, abaixo da velocidade de rotação, ou ainda supersíncronas, acima da velocidade de rotação, que são conhecidas como velocidades de rotação de instabilidade.

Em termos matemáticos, a instabilidade dinâmica está definida como a solução da equação diferencial linear do movimento, cujo autovalor complexo possui uma parte real positiva. A parte real do autovalor define o fator de crescimento da solução e a parte imaginária fornece a frequência natural amortecida, ou seja, a solução é uma função que descreve a variação da amplitude do movimento no domínio do tempo.

Na análise numérica, o método das matrizes de transferência por ser uma ferramenta adequada para a análise de sistemas em linha, como eixos rotativos de transmissão, é utilizado para o estudo da instabilidade de tais sistemas.

A discretização do sistema é realizada através dos elementos já existentes, Apêndice II, e dos elementos novos desenvolvidos.

Uma vez discretizado o sistema, obtém-se a matriz de transferência global, cujo determinante fornecerá os autovalores procurados, que serão utilizados na determinação da faixa de instabilidade do sistema, por meio do método de Routh-Hurwitz, descrito a seguir.

Utilizando esta metodologia, será possível analisar e estabelecer numericamente a faixa operacional de instabilidade dos sistemas estudados neste trabalho, tais como eixos Cardan de dupla seção e semi-eixos homocinéticos.

Se a dinâmica do sistema for descrita por uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes, então a equação característica para o sistema será da forma:

$$S^n + a_n.S^{n-1} + \dots + a_1.S + a_0 = 0 \quad (2.16)$$

As raízes desta equação definem os autovalores na forma: $S = \lambda_R + j.\lambda_I$, fornecendo uma resposta na forma: $A.e^{(\lambda_R + j.\lambda_I).t}$.

Onde λ_R e λ_I são as partes real e imaginária do autovalor, respectivamente.

Para determinar a instabilidade do sistema, emprega-se o conhecido critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, muito utilizado na análise de instabilidade de sistemas de controles lineares.

Se a parte real de um autovalor é positiva, este componente causará um crescimento exponencial na resposta com o tempo e indica, conseqüentemente, uma condição de instabilidade.

Podem existir sistemas rotativos onde o comportamento do sistema é descrito por uma equação diferencial do movimento não linear, nestes casos, o crescimento da amplitude do movimento em instabilidade pode cessar de crescer e estabilizar em um determinado momento. Um exemplo desta não linearidade pode ser a variação da rigidez e/ou amortecimento com a rotação do sistema ou com o tempo de funcionamento. A teoria linear pode prever a existência de instabilidade, porém não determina a amplitude final da instabilidade em sistemas com não linearidades.

A instabilidade pode ser autoexcitada, sustentada por forças externas, cujo caráter de influência determina-se pelo próprio processo de vibração, sendo subsíncrona, ou paramétrica, quando os parâmetros físicos do sistema variam no tempo, neste caso, as forças externas não influem diretamente sobre o movimento vibratório, se não variarem os parâmetros físicos do sistema, podendo ser síncrona ou não síncrona.

Em um sistema rotor-flexível, a instabilidade pode ser causada, entre outros, por:

- Excitação em ressonância (sistemas sem amortecimento);
- Atrito interno.
- Assimetria na parte rotativa.
- A ação do óleo lubrificante nos mancais.
- Não linearidade dentro do sistema rotacional.

A metodologia empregada para o cálculo dos valores de frequência de instabilidade em eixos rotativos, no domínio da frequência, é apresentada a seguir de forma esquemática no trabalho de Bansal e Kirk, 1975, juntamente com uma aplicação prática, confirmada pelo algoritmo desenvolvido neste trabalho.

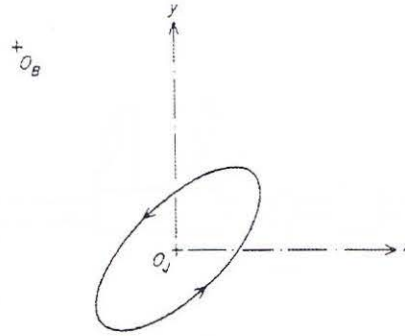


Figura 2.5: Movimento harmônico generalizado do eixo em relação ao seu suporte.

Adams e Padovan, 1981, em um excelente trabalho sobre o estado da arte em dinâmica de rotores, citam que foi Gustave DeLaval em 1895, o primeiro a demonstrar experimentalmente que um sistema rotor poderia alcançar faixas de operação superiores à primeira velocidade crítica. Não tardou para que outro cientista, Newkirk, 1925, descobrisse um novo limite de rotação o qual não poderia ser ultrapassado sem danos à estrutura, denominado de velocidade de instabilidade. Estabeleceu que tal fenômeno ocorria devido ao sistema rotor perder sua capacidade de amortecimento, o que ocorreria entre a segunda e a terceira velocidades críticas, geralmente.

A figura 2.5 apresenta o movimento harmônico de um eixo em relação ao seu suporte, tal que: $x = X \cdot \sin(\Omega \cdot t + \theta_x)$ e $y = Y \cdot \sin(\Omega \cdot t + \theta_y)$, sendo Ω a rotação do eixo, θ_x e θ_y os ângulos de fase, t o tempo e X e Y as amplitudes do movimento. Um bom entendimento do problema de instabilidade pode ser obtido se considerarmos as forças não conservativas da equação 2.1. Se a energia líquida E_L , em uma determinada rotação, absorvida pelo sistema, for negativa, o sistema é considerado estável, caso contrário é dito instável. As forças não conservativas do sistema são representadas pela equação 2.17.

$$\{P\} = -[C]_s \cdot \{\dot{X}\} - [K]_{as} \cdot \{X\} \quad (2.17)$$

$\{P\}$: vetor de forças não conservativas;

$[C]_s$: matriz de amortecimento;

$[K]_{as}$: matriz circulatoria;

$$\{X\} = \begin{pmatrix} X \cdot \sin(\Omega \cdot t + \theta_x) \\ Y \cdot \sin(\Omega \cdot t + \theta_y) \end{pmatrix}.$$

A energia líquida absorvida pelo sistema, por ciclo, em um movimento harmônico, pode ser expresso pela equação 2.18:

$$E_L = \oint \{P\} \cdot d\{X\} = -\pi \cdot \{\Omega \cdot [t_1 + t_2 + t_3] - t_4\} \quad (2.18)$$

onde:

$$t_1 = C_{xx}^s \cdot X^2$$

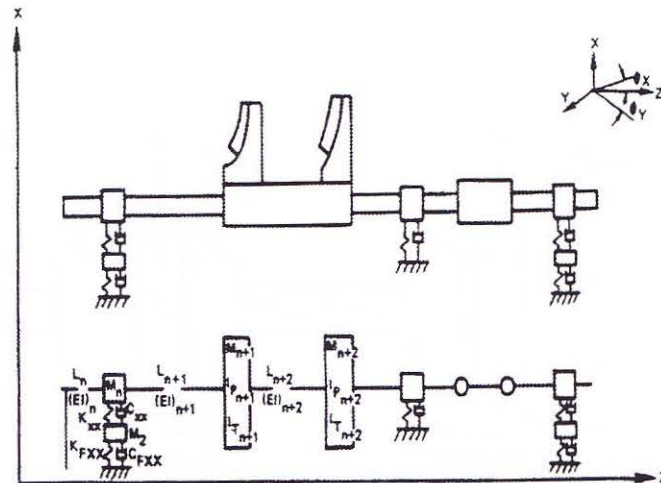


Figura 2.6: Modelo genérico de um sistema rotor.

$$t_2 = 2.C_{xy}^s.X.Y.\cos(\theta_x - \theta_y)$$

$$t_3 = C_{yy}^s.Y^2$$

$$t_4 = 2.K_{xy}^{ss}.X.Y.\sin(\theta_x - \theta_y)$$

Kimball, 1924, determinou experimentalmente que o amortecimento interno desestabiliza o movimento de precessão em rotações superiores a primeira velocidade crítica.

Lund, 1974-a, utilizando o MMT¹, estudou sistemas rotores flexíveis genéricos, suportados por mancais de óleo, com suas propriedades dinâmicas, coeficientes de amortecimento e de rigidez, linearizadas. Com os autovalores do sistema rotor calculados, estabeleceu uma faixa operacional instável, através do uso do decremento logarítmico.

Bansal e Kirk, 1975, utilizando uma técnica semelhante a Lund, 1974-a, determinam as velocidades críticas e de instabilidade de um sistema rotor-eixo-mancal. Através de um gráfico da rotação do eixo versus o decremento logarítmico, estabelecem um mapa que prediz em que faixa de operação ocorrerá a velocidade de instabilidade do sistema rotor, utilizando estes resultados para controlar e/ou eliminar as fontes de instabilidade e modificar os projetos dos conjuntos mancais-rolamentos e eixos.

Um sistema rotor genérico é apresentado na figura 2.6, onde eixo rotor é discretizado na forma de massas concentradas, chamadas de estações, conectadas por eixos elásticos sem massa.

Suportes constituídos por sistemas com filmes de óleo podem ser representados por 8 (oito)

¹MMT: Sigla para o Método das Matrizes de Transferência.

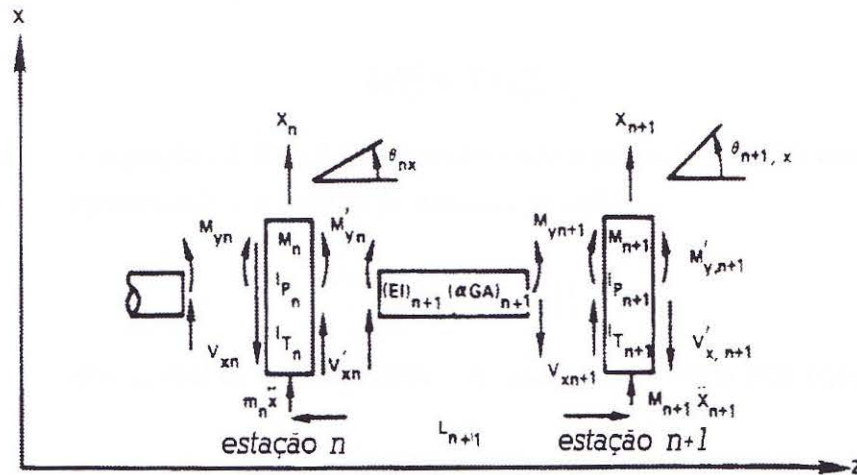


Figura 2.7: Modelo ilustrativo dos elementos e estações utilizados na caracterização de um rotor pelo MMT.

coeficientes de rigidez e amortecimentos linearizados, como na figura 2.3. Para aplicar o MMT, é necessário desenvolver matrizes que expressem o vetor de estado do lado direito de cada estação em termos do vetor de estado do lado esquerdo da mesma estação. Uma vez que o movimento do rotor é considerado nos planos X-Z e Y-Z, o vetor de estado $\{z\}$ possui 8 (oito) variáveis, 2 (dois) deslocamentos translacionais, 2 (duas) inclinações, 2 (dois) momentos de flexão e 2 (dois) esforços cisalhantes, logo, são necessárias matrizes de transferência de ordem 8 (oito). A figura 2.7 representa ilustrativamente esta situação, no plano X-Z.

Para o modelo da figura 2.6 são necessários três tipos de matrizes de transferência para representar o sistema rotativo completo, sendo estas: (a) matriz para o eixo elástico sem massa, (b) matriz para representar um disco considerado rígido e fino, com as devidas propriedades de massa e inércia e (c) a matriz que representa os suportes, neste caso um mancal com um filme de óleo.

Em condições de operação, as variáveis que constituem os vetores de estado são funções do tempo. Considerando um movimento harmônico elíptico para o rotor, como na figura 2.5, a solução do problema assume a forma: $\{z\} = |\{z\}| \cdot e^{st}$, onde $s = \lambda + i\Omega$, sendo λ o fator de decaimento e Ω a frequência natural amortecida. O vetor de estado do lado direito de uma estação, $\{z\}^R$, é relacionado com o vetor de estado do lado esquerdo, $\{z\}^L$, pela matriz de transferência $[H]$, que é função da variável complexa s , logo:

$$\{z\}^R = [H] \cdot \{z\}^L \quad (2.19)$$

Para um sistema rotor representado por n matrizes de transferência, o vetor de estado para o p -ésimo elemento ($1 \leq p \leq n$) é representado por:

$$\{z\}_p^R = [H] \cdot \{z\}_p^L \quad (2.20)$$

Além disto, para os elementos que fazem a conexão entre duas estações, as condições de com-

patibilidade geométrica e de equilíbrio das forças internas implicam em:

$$\{z\}_p^L = \{z\}_{(p-1)}^R \quad (2.21)$$

Combinando as equações 2.20 e 2.21 e substituindo p por n , o vetor de estado para a n -ésima estação pode ser representado em termos da primeira estação:

$$\{z\}_n^R = [\Phi] \cdot \{z\}_1^L \quad (2.22)$$

sendo $[\Phi]$ a matriz global de transferência, esta pode ser calculada pela equação

$$[\Phi] = [H]_n \cdot [H]_{n-1} \dots [H]_2 \cdot [H]_1 \quad (2.23)$$

O problema de valores de contorno, representado pela equação 2.22, pode ser reduzido a um problema de autovalor através do uso das condições de contorno de cada uma das extremidades do sistema rotor. O vetor de estado $\{z\}$ é dividido em dois vetores, i.e., de deslocamentos $\{z_D\}$ e de forças $\{z_F\}$, ou seja:

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} z_D \\ z_F \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

No modelo físico utilizado por Bansal e Kirk, 1975, na figura 2.6, tem-se a equação :

$$\{z_F\}_1 = \{z_F\}_n = \{0\} \quad (2.25)$$

Rearranjando a equação 2.22 em função da equação 2.24, tem-se a equação 2.26:

$$\begin{Bmatrix} z_D \\ z_F \end{Bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} z_D \\ z_F \end{Bmatrix}_1^L \quad (2.26)$$

onde:

$$[G_{11}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{51} & \phi_{52} & \phi_{53} & \phi_{54} \\ \phi_{61} & \phi_{62} & \phi_{63} & \phi_{64} \end{bmatrix}, [G_{12}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \phi_{15} & \phi_{16} & \phi_{17} & \phi_{18} \\ \phi_{25} & \phi_{26} & \phi_{27} & \phi_{28} \\ \phi_{55} & \phi_{56} & \phi_{57} & \phi_{58} \\ \phi_{65} & \phi_{66} & \phi_{67} & \phi_{68} \end{bmatrix}$$

$$[G_{21}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} \\ \phi_{71} & \phi_{72} & \phi_{73} & \phi_{74} \\ \phi_{81} & \phi_{82} & \phi_{83} & \phi_{84} \end{bmatrix}, [G_{22}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \phi_{35} & \phi_{36} & \phi_{37} & \phi_{38} \\ \phi_{45} & \phi_{46} & \phi_{47} & \phi_{48} \\ \phi_{75} & \phi_{76} & \phi_{77} & \phi_{78} \\ \phi_{85} & \phi_{86} & \phi_{87} & \phi_{88} \end{bmatrix}$$

Aplicando a equação 2.25 na equação 2.26, tem-se a relação $[G_{21}] \cdot \{z_D\}_1^L = \{0\}$. Para obter a

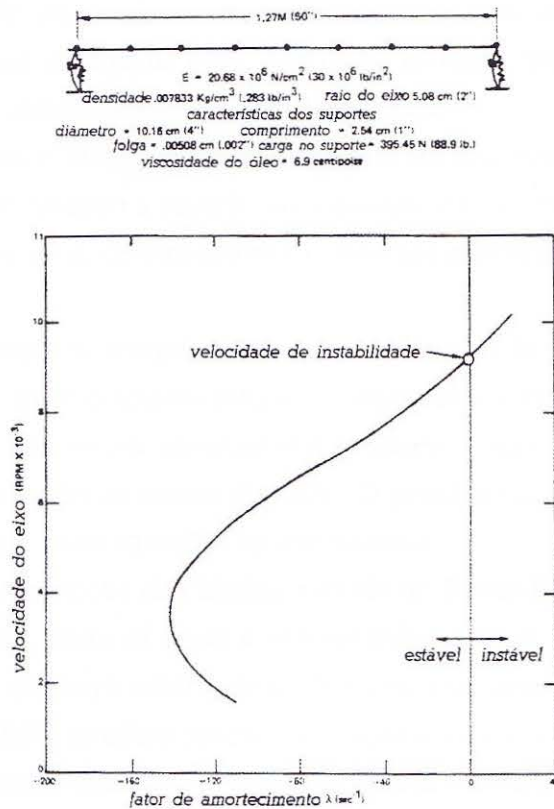


Figura 2.8: (a) Modelo proposto para a aplicação do método, (b) mapa de instabilidade do sistema.

solução não trivial, o determinante de $\{G_{21}\}$ deve ser igual a 0 (zero), ou seja:

$$\det[G_{21}] = 0 \quad (2.27)$$

A equação 2.27 representa um polinômio $p(s)$ de ordem $2n$, onde n é o número de graus de liberdade do sistema. As raízes deste polinômio ocorrem em pares complexos conjugados, representando os autovalores do sistema, associados aos respectivos modos de vibração

Os autovalores calculados, $s_n = \lambda_n + i.\Omega_n$, indicam se o sistema é instável, quando λ_n é positivo, ou se é estável, quando λ_n é negativo.

Bansal e Kirk, 1975, propõe um exemplo ilustrativo de sua metodologia, para a determinação da instabilidade de um sistema rotativo, apresentado na figura 2.8.

O sistema consiste de um eixo elástico com massa distribuída uniformemente e suportado por dois mancais com filme de óleo idênticos. Os efeitos de cisalhamento e efeito giroscópico foram desconsiderados. A rotação de instabilidade calculada foi de 9210 rpm, como mostrado na figura 2.8-(b). Estes valores são confirmados pelo algoritmo desenvolvido neste trabalho.

Childs, 1976, desenvolve um modelo computacional eficiente para a simulação de problemas transientes de uma classe de sistemas rotores flexíveis e não simétricos. O rotor é discretizado como um conjunto de n corpos rígidos conectados entre si por elementos elásticos sem massa.

Murphy e Vance, 1983, aperfeiçoaram a técnica desenvolvida por Lund, 1974, principalmente no que diz respeito ao método de obtenção dos autovalores.

Muszynska, 1986, propõe um modelo matemático de rotor com simetria axial suportado por um mancal rígido e outro com sistema de óleo, sem carga aplicada, analisando as velocidades de precessão e de instabilidade obtidas, inclusive experimentalmente.

Chen e Ku, 1990, estudam a instabilidade dinâmica de um eixo rotativo sujeito a um carregamento axial periódico e considerando a atuação do momento giroscópico, através do método dos elementos finitos. A teoria de vigas de Timoshenko é utilizada para representar o efeito do esforço de cisalhamento.

Chang e Cheng, 1993, citam os pesquisadores que trabalharam teoricamente com o efeito de-sestabilizador causado pelo amortecimento interno e analisam o comportamento dinâmico não-linear de um eixo uniforme flexível, de material viscoelástico, rotação constante e simplesmente apoiado, com um disco localizado no centro do eixo. O princípio de Hamilton, ver Meirovitch, 1967, é utilizado para obterem-se as equações do movimento.

Afolabi, 1995, discute a limitação do clássico método de Routh-Hurwitz para análise de instabilidade de sistemas rotores, entre as quais a não aplicabilidade do método para sistemas não amortecidos. Propõe, então, um novo critério de análise linear de instabilidade.

Siddiqui e Golnaraghi, 1996, estudam sistemas giroscópicos de dois graus de liberdade, com o objetivo de controlar vibrações e analisar a instabilidade. Em tais sistemas, o estudo da instabilidade foi realizado utilizando-se aproximações linearizadas e o método de Liapunov.

Wettergren e Olsson, 1996, estudam o comportamento dinâmico e a instabilidade de um sistema rotor composto por um eixo flexível assimétrico com amortecimento viscoso interno e suportado por mancais anisotrópicos. Determinam que a instabilidade pode ser evitada, utilizando-se os valores adequados para os amortecimentos interno e externo, rigidez assimétrica do eixo e a anisotropia dos mancais.

Em Chen, 1997, o comportamento dinâmico de um sistema rotor-suporte é descrito pelas equações de movimento geradas a partir de expressões que quantificam as energias existentes na estrutura. As características dinâmicas do sistema são fortemente influenciadas pela distribuição de energia presente, através da qual é possível identificar as fontes de vibração indesejáveis. O cálculo das distribuições energéticas é implementado em um programa, baseado em elementos finitos, para dinâmica de rotores.

Kang et al., 1997, desenvolvem um método das matrizes de transferência modificado para estudar a instabilidade de sistemas rotores não simétricos.

2.2 Método Numérico

Os métodos dos elementos finitos (MEF) e das matrizes de transferência (MMT), têm sido aplicados com êxito nos estudos realizados na área de dinâmica de rotores. O MMT tem-se mostrado mais adequado, pela relação custo computacional versus qualidade da resposta, para o estudo de estruturas em linha, como rotores, porém, apresenta problemas de instabilidade numérica em alguns casos, como relatam Pestel e Leckie, 1963. O MEF, por outro lado, apresenta respostas mais precisas, devido a uma melhor qualidade dos modelos matemáticos empregados, porém o

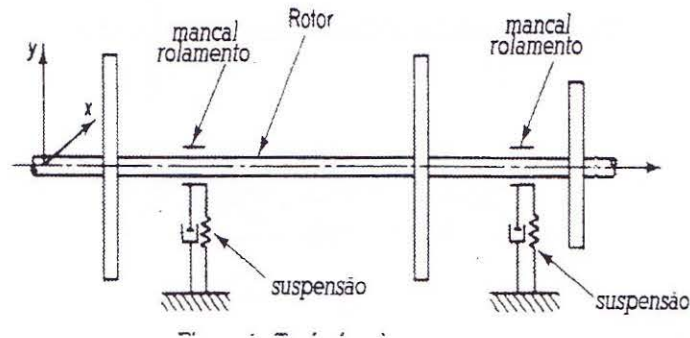


Figura 2.9: Sistema rotor típico.

custo computacional torna-se demasiado elevado, quando comparado com o MMT. Alguns pesquisadores apresentam modelos matemáticos que mesclam os dois métodos citados, obtendo bons resultados, como Nikolajsen et. al, 1980, porém com um custo computacional ainda elevado.

Neste trabalho, optou-se pelo MMT, por tratar-se de um método flexível e de fácil implementação computacional, sem prejuízos que comprometam a análise dos sistemas rotativos, alvos desta pesquisa, i.e., eixos Cardan e semi-eixos homocinéticos. A seguir, apresenta-se uma revisão bibliográfica, com a finalidade de fornecer uma fonte de esclarecimento sobre os métodos discutidos.

2.2.1 O Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos tem sido desenvolvido em paralelo com o avanço computacional nos últimos trinta anos. No campo dos elementos finitos, citam-se os trabalhos pioneiros de Ruhl, 1972 e Nelson et. al, 1976.

Akela et al., 1986, implementam a equação de Timoshenko de uma viga para incluir a variação de área ao longo do eixo rotativo e as forças geradas pela introdução de um disco no sistema.

Kim e Lee, 1986, utilizando uma técnica de redução matricial para o método dos elementos finitos, analisam sistemas rotores com elevado número de graus de liberdade e complexidade, com sucesso.

Ramamurti e Pradeep Simha, 1987, utilizam o método dos elementos finitos para calcular as velocidades críticas de eixos rotativos, considerando a ação do efeito giroscópico gerado por discos presentes no sistema.

Firoozian e Stanway, 1989, fazem uma revisão dos métodos numéricos aplicados em dinâmica de rotores, discutindo a utilização dos pacotes de softwares comerciais e suas limitações. Ao desenvolverem um software para análise de sistemas rotores, fazem a opção pelo método dos elementos finitos, comparando os resultados obtidos com as soluções analíticas e com as obtidas pelo método das matrizes de transferência.

Um típico sistema rotor, como o da figura 2.9, é dividido em três subsistemas: rotor, mancal-rolamento e suspensão. Cada subsistema é analisado isoladamente e, após, combinados para a obtenção do sistema global.

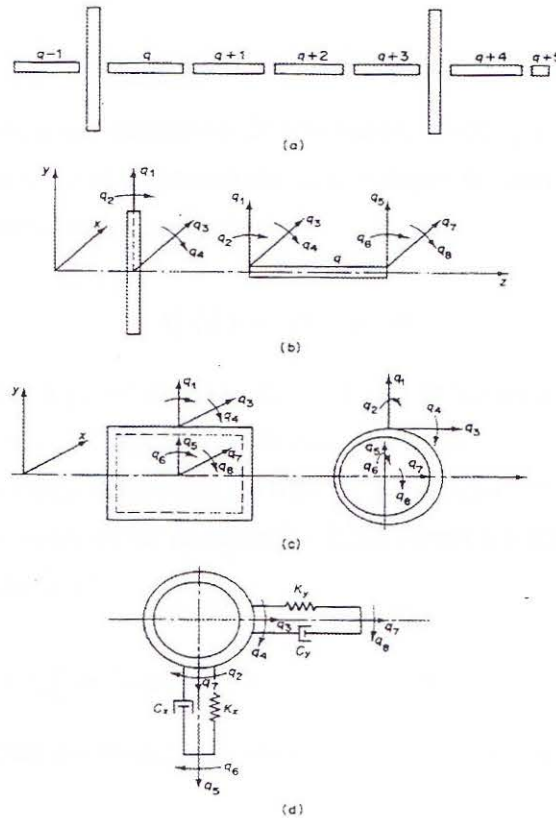


Figura 2.10: Elementos de um sistema rotor. (a) Rotor; (b) Coordenadas locais para os elementos rotor e disco; (c) Coordenadas locais para o elemento mancal-rolamento; (d) Coordenadas locais para o elemento suspensão.

O rotor é dividido em um determinado número de eixos e discos, figura 2.10 (a). Os sistemas de coordenadas locais para estes elementos são mostrados na figura 2.10 (b). Uma vez respeitadas as condições de contorno, as energias potenciais e cinéticas envolvidas são determinadas, a partir das quais, utilizando o princípio de Hamilton, as equações do movimento são determinadas.

Uma vez que as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são determinadas para cada elemento do sistema rotor, aplicando as condições de compatibilidade, obtém-se as equações globais da estrutura, representadas pela equação 2.28:

$$[M].\{\ddot{x}\} + [C].\{\dot{x}\} + [K].\{x\} = \{F\} \quad (2.28)$$

$[M]$, $[K]$ e $[C]$: matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento;

$\{F\}$: vetor força aplicado nas coordenadas globais.

Reescrevendo as equações 2.28 de uma forma mais adequada para a determinação dos autovalores, obtém-se a equação 2.29 :

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

A equação 2.29 pode ser reescrita em uma forma resumida, ou seja, equação 2.30:

$$[A].\{\dot{a}\} + [B].\{a\} = \{c\} \quad (2.30)$$

A equação 2.30 é o tradicional problema de autovalor, desde que $\{c\}$ seja considerado nulo. Para um problema de vibração livre e assumindo uma solução do tipo: $\{a\} = e^{st}.\{\phi\}$, a equação 2.30 pode ser reescrita na forma da equação 2.31:

$$s.[A].\{\phi\} + [B].\{\phi\} = 0 \quad (2.31)$$

Os autovalores calculados a partir da equação 2.31 são da forma $s = \lambda + i.\omega$, que possuem o mesmo significado que as raízes do polinômio da equação 2.16.

Quando é aplicada uma carga harmônica do tipo $\{F\} = \{f_o\}.e^{i.\omega.t}$, a solução da equação 2.28 será $\{x\} = \{x_o\}.e^{i.\omega.t}$, que, substituída na equação 2.28, fornece a equação para o deslocamento do sistema rotor, i.e., equação 2.32:

$$\{x_o\} = [-\omega^2.[M] + i.\omega.[C] + [K]]^{-1}.\{f_o\} \quad (2.32)$$

Para problemas transientes no tempo, são utilizados os métodos tradicionais de integração no tempo.

Edney et al., 1990, propõe um modelo de elementos finitos modificado para o estudo de dinâmica de rotores.

Udupa e Varadan, 1990, aplicam o método dos elementos finitos com esquemas de hierarquias para vigas rotativas em vibração livre.

Craggs, A., 1993, modela um mancal hidrodinâmico, utilizando elementos finitos, e analisa o efeito da distribuição da rigidez do mancal na velocidade crítica do eixo rotativo.

Um bom trabalho de revisão bibliográfica e aplicação do método dos elementos finitos, pode ser encontrado em Chen e Ku, 1990.

2.2.2 O Método das Matrizes de Transferência

O método das matrizes de transferência foi primeiramente introduzido, em uma forma elementar, por Holzer, 1921, para cálculos de frequências naturais torsionais de eixos, partindo do fato de que, para uma grande quantidade de problemas de engenharia, os sistemas em vibração estão arranjados em linha e que o comportamento em cada ponto deste é influenciado pelo comportamento apenas dos pontos vizinhos. Exemplos típicos são as vibrações torsionais, laterais e longitudinais de vigas e eixos.

Myklestad, 1944, e Prohl, 1945, desenvolveram métodos, de uma forma similar a Holzer, para o cálculo de frequências naturais por flexão pura de diversas estruturas.

Neste método, um sistema em linha é dividido em subsistemas com propriedades elásticas e dinâmicas simples. A formulação matemática é em termos de:

- a) vetor estado, que é uma matriz coluna dos deslocamentos e das forças internas;
- b) matriz de transferência de ponto, que encerra as propriedades dinâmicas do subsistema;

c) matriz de transferência de campo, que define as propriedades elásticas do subsistema;

O cálculo se processa em termos dessas quantidades, de um extremo a outro do sistema, e as frequências naturais são estabelecidas, satisfazendo às condições apropriadas de contorno, ou seja, matematicamente como demonstrado por Bansal e Kirk, 1975 nas equações 2.19 até 2.27, descrito anteriormente.

Thomson, 1950, foi o pioneiro na utilização de tabulação matricial para matrizes de transferência. Após, Koenig, 1961, Guenther e Lovejoy, 1961, incluem matrizes com os efeitos de amortecimento e rigidez para rolamentos com filmes de óleo.

Pestel e Leckie, 1963, desenvolvem e expandem a aplicação do método em sua forma matricial, para o cálculo de frequências naturais por flexão pura, modos de vibração e resposta à excitações harmônicas forçadas.

Lund e Orcutt, 1967, modificam o método das matrizes de transferência para permitir a utilização de um elemento com massa distribuída continuamente e investigam analiticamente e experimentalmente as vibrações desbalanceadas de um rotor.

Para a análise de sistemas rotores complexos, o uso de elementos finitos leva a um proibitivo custo de tempo computacional. Com o intuito de minimizar este problema, sem perder qualidade nos resultados, Dokainish, 1972, introduziu uma técnica de condensação de matrizes de transferência e elementos finitos, em um momento onde a única ferramenta válida para a análise de problemas não lineares era o método dos elementos finitos.

Lund, 1974 e Bansal e Kirk, 1975, aplicam o método das matrizes de transferência na análise modal, calculando as frequências naturais amortecidas e analisando a instabilidade de rotores suportados por rolamentos com filmes de óleo.

Inagaki et al. , 1980, propôs um esquema para o método das matrizes de transferência para determinar a resposta harmônica em sistema rotores, suportados por rolamentos, onde considera-se o efeito da inércia transversal.

Lund, 1980, apresenta um esquema para estimar a sensibilidade das velocidades críticas de um rotor, e utilizar esta informação para melhorar o projeto do rotor.

Rao, 1983, publicou uma obra importante no estudo de problemas de dinâmica de rotores, utilizando e elaborando matrizes de transferência na obtenção de resultados no domínio da frequência. A seguir, no intuito de esclarecer a aplicação do MMT em eixos rotativos, é apresentado alguns dos resultados obtidos por Rao.

Considere-se um disco de massa M , fixo no meio de um eixo elástico sem massa, suportado por conjuntos mancais rolamentos radialmente rígidos, como na figura 2.11.

O centro geométrico do disco está no ponto E e o centro de gravidade no ponto G , distante de a do ponto E . O sistema é considerado simétrico, a velocidade angular, ω , e a de precessão, ν , são iguais, caracterizando um movimento de precessão síncrono. Na figura 2.12 é mostrada a geometria do movimento de precessão devido ao desbalanceamento do sistema rotor.

K e C são a rigidez e o amortecimento viscoso do sistema rotor. As equações do movimento são:

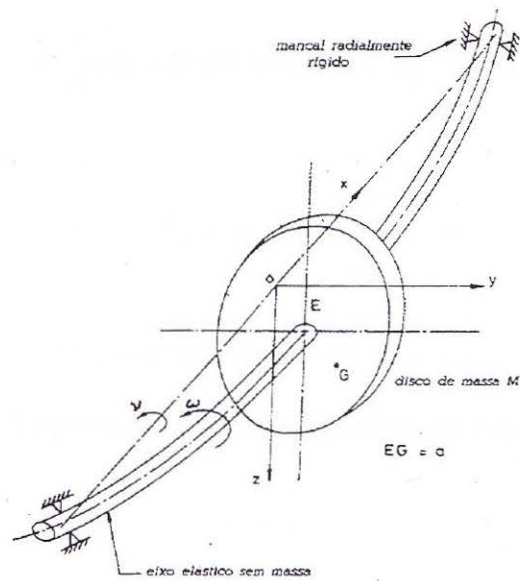


Figura 2.11: Eixo elástico sem massa com um disco simples fixo e suportado por conjuntos mancais-rolamentos radialmente rígidos.

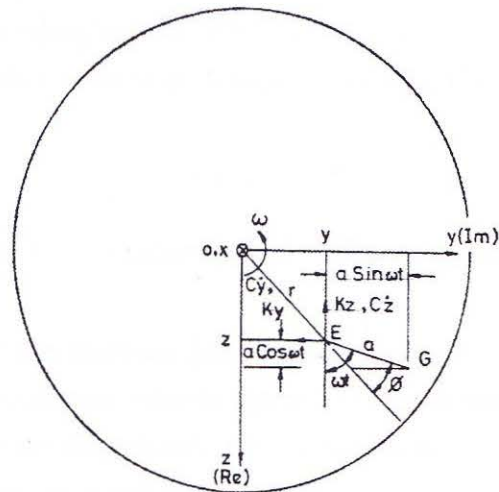


Figura 2.12: Geometria do movimento de precessão devido ao desbalanceamento do sistema rotor, no disco.

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2}(z + a \cdot \cos(\omega \cdot t)) + C \cdot \frac{dz}{dt} + K \cdot z = 0 \quad (2.33)$$

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2}(y + a \cdot \sin(\omega \cdot t)) + C \cdot \frac{dy}{dt} + K \cdot y = 0 \quad (2.34)$$

ou ainda

$$M \cdot \ddot{z} + C \cdot \dot{z} + K \cdot z = M \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2.35)$$

$$M \cdot \ddot{y} + C \cdot \dot{y} + K \cdot y = M \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.36)$$

O raio que caracteriza o movimento de precessão pode ser expresso por :

$$r = z + i \cdot y \quad (2.37)$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

Combinando as equações 2.35, 2.36 e 2.37 obtém-se:

$$M \cdot \ddot{r} + C \cdot \dot{r} + K \cdot r = M \cdot \omega^2 \cdot a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (2.38)$$

A solução da equação 2.38 é dada por:

$$r = R \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - \phi)} \quad (2.39)$$

onde $R = \frac{M \cdot \omega^2 \cdot a}{\sqrt{(K - M \cdot \omega^2)^2 + C^2 \cdot \omega^2}}$.

Ao escrever a solução da equação 2.38, considerou-se a rotação de precessão, ν , síncrono e direto, i.e., com mesmo sentido e módulo da rotação do eixo, ω . Uma solução mais geral seria:

$$r = R \cdot e^{i \cdot (\nu \cdot t - \phi)} \quad (2.40)$$

Se o movimento de precessão for síncrono, porém inverso, sentido contrário à rotação, tem-se que $\nu = -\omega$.

Obtenção das matrizes de transferência para eixo elástico sem massa e massa concentrada: a utilização do MMT, no caso do sistema rotor da figura 2.11, necessita de elementos que discretizem o eixo e o disco. O eixo pode ser discretizado por elementos de massas concentradas interligadas por elementos de eixos elásticos sem massa. Estes dois elementos são descritos a seguir, ficando a discretização do disco para o Capítulo 4.

A figura 2.13 mostra as relações de equilíbrio para um elemento que representa um segmento de eixo elástico sem massa, de onde tem-se:

$$V_{zi}^L = V_{z,i-1}^R \quad (2.41)$$

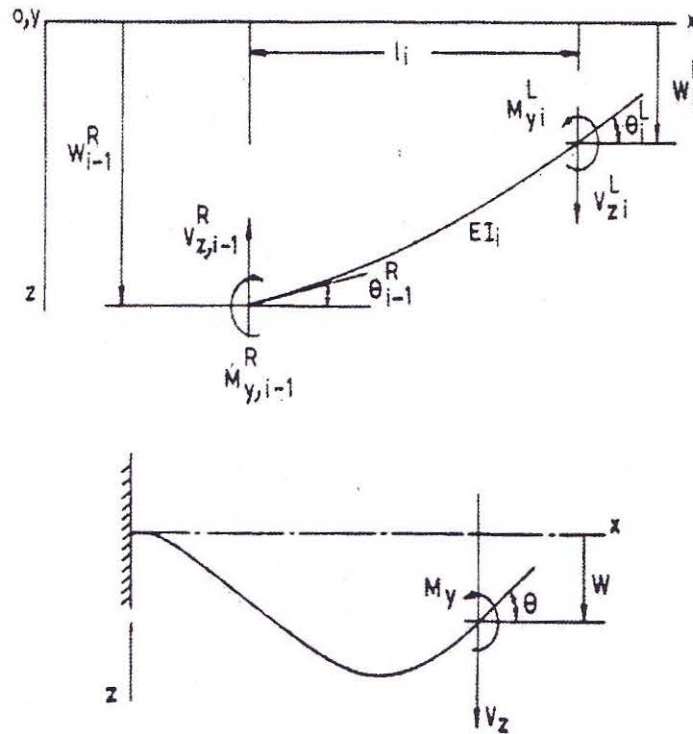


Figura 2.13: Relações para o segmento de eixo elástico sem massa.

$$M_{yi}^L = M_{y,i-1}^R + V_{zi}^L \cdot l_i \quad (2.42)$$

V : esforço cortante;

M : momento fletor.

Da teoria de vigas e a partir da figura 2.13 obtém-se as relações:

$$w = -\frac{M \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{V \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (2.43)$$

$$\theta = \frac{M \cdot l}{E \cdot I} + \frac{V \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} \quad (2.44)$$

onde:

w : deslocamento;

θ : giro do segmento;

E : módulo de Young;

I : momento de inércia de área transversal.

Usando as equações 2.43 e 2.44, pode-se obter as relações para w e θ :

$$w_i^L = w_{i-1}^R - \theta_{i-1}^R \cdot l_i - M_{yi}^L \cdot \frac{l_i^2}{2 \cdot E \cdot I_i} + V_{zi}^L \cdot \frac{l_i^3}{3 \cdot E \cdot I_i} \quad (2.45)$$

$$\theta_i^L = \theta_{i-1}^R + M_{yi}^L \cdot \frac{l_i}{E \cdot I_i} - V_{zi}^L \cdot \frac{l_i^2}{2 \cdot E \cdot I_i} \quad (2.46)$$

Utilizando as equações 2.41 e 2.42 nas equações 2.45 e 2.46, obtém-se:

$$-w_i^L = -w_{i-1}^R + \theta_{i-1}^R \cdot l_i + M_{y,i-1}^R \cdot \frac{l_i^2}{2 \cdot E \cdot I_i} + V_{z,i-1}^R \cdot \frac{l_i^3}{6 \cdot E \cdot I_i} \quad (2.47)$$

$$\theta_i^L = \theta_{i-1}^R + M_{y,i-1}^R \cdot \frac{l_i}{E \cdot I_i} + V_{z,i-1}^R \cdot \frac{l_i^2}{2 \cdot E \cdot I_i} \quad (2.48)$$

As equações 2.41, 2.42, 2.47 e 2.48, combinadas, fornecem as relações em forma de matrizes de transferência:

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \theta \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} & \frac{l^3}{6 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 1 & \frac{l}{E \cdot I} & \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} -w \\ \theta \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_{i-1}^R \quad (2.49)$$

ou simbolicamente:

$$\{S\}_i^L = [F]_i \cdot \{S\}_{i-1}^R \quad (2.50)$$

$\{S\}$: vetor de estado;

$[F]$: matriz de transferência de campo.

A figura 2.14 mostra as relações de equilíbrio para uma massa, em uma estação i , que fornece a seguinte matriz de transferência:

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \theta \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m \cdot p^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} -w \\ \theta \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_i^L \quad (2.51)$$

onde p é a frequência natural do sistema.

ou simbolicamente:

$$\{S\}_i^R = [P]_i \cdot \{S\}_i^L \quad (2.52)$$

$\{S\}$: vetor de estado;

$[P]$: matriz de transferência de ponto.

Os efeitos giroscópicos foram negligenciados, na figura 2.14.

Começando do extremo esquerdo do sistema representado pela figura 2.11, e chamando esta estação de $\{S\}_o$, obtém-se:

$$\{S\}_1^L = [F]_1 \cdot \{S\}_o$$

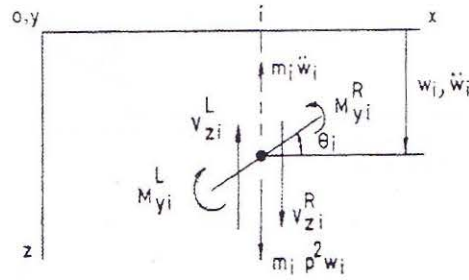


Figura 2.14: Relações de equilíbrio para uma massa concentrada.

$$\{S\}_1^R = [P]_1 \cdot \{S\}_1^L = [P]_1 \cdot [F]_1 \cdot \{S\}_o$$

$$\{S\}_2^L = [F]_2 \cdot \{S\}_1^R = [F]_2 [P]_1 \cdot [F]_1 \cdot \{S\}_o$$

...

$$\{S\}_{n+1} = [F]_{n+1} \cdot [P]_n \cdot [F]_n \cdot [P]_{n-1} \dots [F]_1 \cdot \{S\}_o = [U] \cdot \{S\}_o \quad (2.53)$$

A matriz $[U]$ é a matriz de transferência global. A equação 2.53 pode ser expandida na forma:

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \theta \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_{n+1}^R = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} -w \\ \theta \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_o^L \quad (2.54)$$

Para o sistema da figura 2.11 tem-se que:

$$w_o^L = w_{n+1}^R = 0 \quad (2.55)$$

$$M_{y,n+1}^R = M_{y,o}^L = 0 \quad (2.56)$$

Aplicando as condições de contorno 2.55 e 2.56 na equação 2.54, obtém-se:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{12} & u_{14} \\ u_{32} & u_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.57)$$

A equação 2.57 fornece as frequências naturais do sistema. Os modos de vibração correspondentes podem ser determinados assumindo-se $\theta_o = 1$, ficando $V_{zo} = -\frac{u_{12}}{u_{14}}$, e assim consecutivamente até a estação n .

No caso da análise ser feita em um sistema tridimensional o vetor de estado $\{S\}$ deve ser

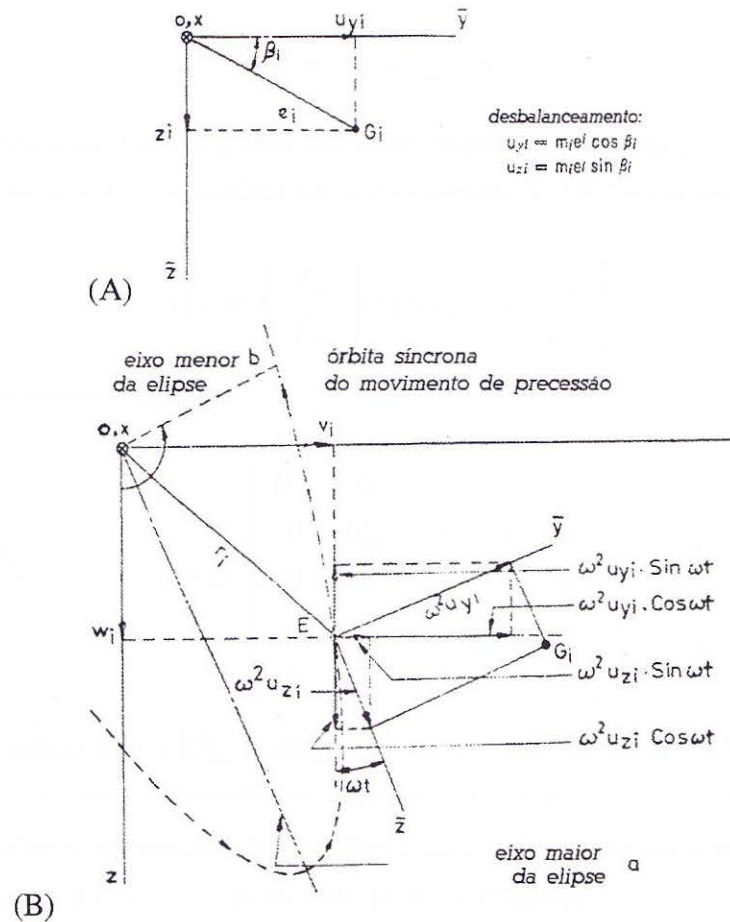


Figura 2.15: Desbalanceamento para a i -ésima massa concentrada de um sistema rotor.

definido para os planos $x - y$, $\{S\}_z$, e $x - z$, $\{S\}_y$:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_z \\ S_y \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

A matriz de transferência global fica, então:

$$[U] = \begin{bmatrix} U_z & 0 \\ 0 & U_y \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

onde: $[0]$ é uma matriz nula e $[U]_z$ e $[U]_y$ são as matrizes de transferência global para os planos $x - y$ e $x - z$, respectivamente.

A figura 2.15 mostra a configuração utilizada para representar o desbalanceamento do sistema para um caso de análise tridimensional.

A excentricidade na estação i está definida em função da distância e_i e do ângulo β_i . O desbalanceamento é representado por:

$$u_{yi} = m_i \cdot e_i \cdot \cos(\beta_i) \quad (2.60)$$

$$u_{zi} = m_i \cdot e_i \cdot \sin(\beta_i) \quad (2.61)$$

Em geral, a resposta na direção y será diferente daquela na direção z . Para os planos $x - y$ e $x - z$, as respostas do sistema consistirão em componentes de seno e cosseno, ou seja:

$$\{S\}_z = \begin{Bmatrix} S_{zc} \\ S_{zs} \end{Bmatrix}; \{S\}_y = \begin{Bmatrix} S_{yc} \\ S_{ys} \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

e a matriz de transferência global:

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{zc} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{zs} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{yc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{ys} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

onde: $[0]$ é uma matriz nula e $[U]_z = [U]_{zc} \cdot \cos(\omega \cdot t) + [U]_{zs} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ e $[U]_y = [U]_{yc} \cdot \cos(\omega \cdot t) + [U]_{ys} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ são as matrizes de transferência global para os planos $x - y$ e $x - z$, respectivamente.

A figura 2.16 fornece as relações de equilíbrio para uma massa concentrada, gerando desbalanceamento nos planos $x - z$ e $x - y$, de onde pode-se escrever:

$$V_{zi}^R = V_{zi}^L - m_i \cdot \omega^2 \cdot w_i - \omega^2 \cdot u_{zi} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega^2 \cdot u_{yi} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.64)$$

$$V_{yi}^R = V_{yi}^L - m_i \cdot \omega^2 \cdot v_i - \omega^2 \cdot u_{yi} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \omega^2 \cdot u_{zi} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.65)$$

A deflexão, w , inclinação, θ e o momento fletor, M são contínuos e com mesmo módulo na esquerda e direita da estação i . Devido à natureza da força desbalanceadora considerada nas equações 2.64 e 2.65, com termos em seno e cosseno, as quantidades que definem os vetores de estado, i.e., w , θ , M_y , V_z , v , ϕ , M_z e V_y serão escritas da forma:

$$w = w_c \cdot \cos(\omega \cdot t) + w_s \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.66)$$

$$\theta = \theta_c \cdot \cos(\omega \cdot t) + \theta_s \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.67)$$

$$M = M_c \cdot \cos(\omega \cdot t) + M_s \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.68)$$

$$V = V_c \cdot \cos(\omega \cdot t) + V_s \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.69)$$

Logo, as equações 2.64 e 2.65 são reescritas na forma:

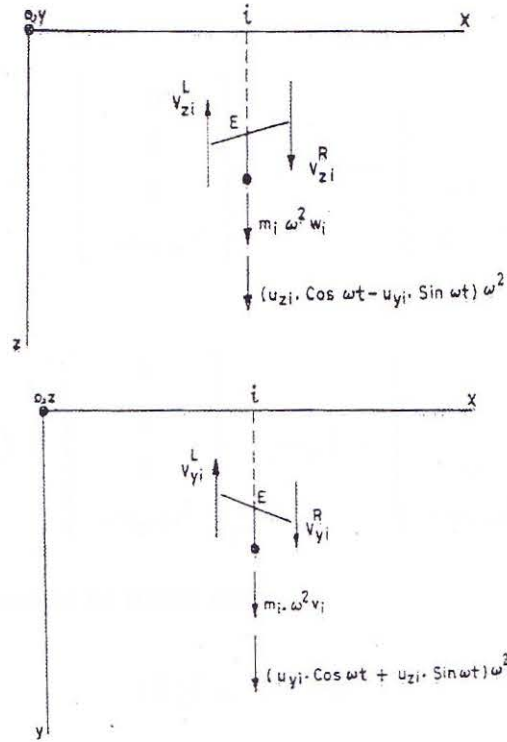


Figura 2.16: Relações de equilíbrio para uma massa concentrada nos planos x-z e x-y.

$$V_{zic}^R = V_{zic}^L - m_i \cdot \omega^2 \cdot w_{ic} - \omega^2 \cdot u_{zi} \quad (2.70)$$

$$V_{zis}^R = V_{zis}^L - m_i \cdot \omega^2 \cdot w_{is} + \omega^2 \cdot u_{yi} \quad (2.71)$$

$$V_{yic}^R = V_{yic}^L - m_i \cdot \omega^2 \cdot v_{ic} - \omega^2 \cdot u_{yi} \quad (2.72)$$

$$V_{yis}^R = V_{yis}^L - m_i \cdot \omega^2 \cdot v_{is} - \omega^2 \cdot u_{zi} \quad (2.73)$$

Para a estação i , tem-se então:

$$\begin{Bmatrix} S_{zc} \\ S_{zs} \\ S_{yc} \\ S_{ys} \\ 1 \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & m_{zc} \\ 0 & P & 0 & 0 & m_{zs} \\ 0 & 0 & P & 0 & m_{yc} \\ 0 & 0 & 0 & P & m_{ys} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_{zc} \\ S_{zs} \\ S_{yc} \\ S_{ys} \\ 1 \end{Bmatrix}_i^L \quad (2.74)$$

onde $[P]$ é a matriz de transferência de ponto, equação 2.51, com p substituído por ω e:

$$\{m_{zc}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -u_z \cdot \omega^2 \end{Bmatrix}_i ; \{m_{zs}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_y \cdot \omega^2 \end{Bmatrix}_i$$

$$\{m_{yc}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -u_y \cdot \omega^2 \end{Bmatrix}_i ; \{m_{ys}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -u_z \cdot \omega^2 \end{Bmatrix}_i$$

A equação 2.74 pode ser escrita na forma matricial:

$$\{\bar{S}\}_i^R = [\bar{P}] \cdot \{\bar{S}\}_i^L \quad (2.75)$$

Murphy e Vance, 1983, apresentam um novo método baseado em matrizes de transferência para a determinação de autovalores complexos, para sistemas rotores.

Yim et al., 1986, inclui aplicação de força axial e torque constantes.

Gu, 1986, propôs um método de integração direta para matrizes de transferência aplicado à dinâmica de rotores.

Kumar et al., (1986), introduz o método das matrizes de transferência aplicado no domínio do tempo, para respostas dinâmicas de estruturas em geral, onde comprova que, com o uso de um algoritmo de integração numérica no tempo apropriado, a aplicação das matrizes de transferência pode ser estendido ao domínio do tempo e para análises não-lineares de sistemas dinâmicos.

A formulação proposta por Kumar et al. utiliza as convenções tradicionais do MMT, onde uma estrutura contínua é dividida em um certo número de subsistemas. Como ilustração, é apresentado o sistema da figura 2.17.

O modelo da figura 2.17 é representado por um subsistema de duas partes. Uma parte representa as estações nas quais as massas são discretizadas, onde as forças $f(t)$ e deslocamentos $x(t)$ externos são considerados. A outra parte representa as propriedades elásticas e de amortecimento, conectando as estações com massas adjacentes. Portanto, o n-ésimo subsistema consiste em ter: massa m_n , deslocamento x_n , velocidade \dot{x} , aceleração \ddot{x} , rigidez, k_n e amortecimento c_n . Os extremos do elemento elástico-amortecido possui deslocamentos x_n e x_{n-1} . Os índices L e R são utilizados para designar as quantidades a esquerda e direita dos elementos.

Para o n-ésimo subsistema, em um instante qualquer de tempo t_i , as equações de movimento são dadas pela equação 2.76:

$$m_n(t_i) \cdot \ddot{x}_n(t_i) = \tau_n^R(t_i) - \tau_n^L(t_i) + f_n(t_i) \quad (2.76)$$

sendo:

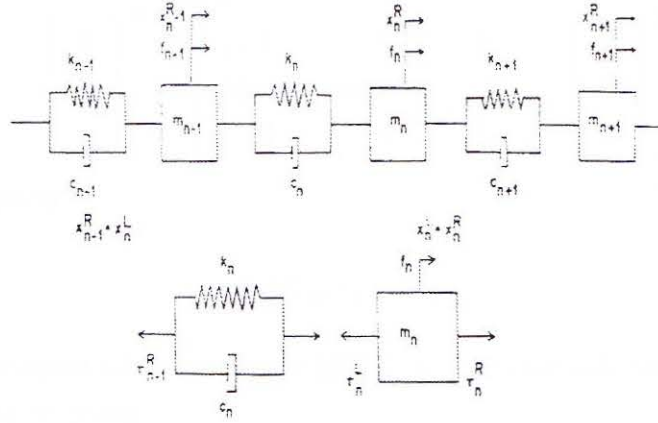


Figura 2.17: Modelo ilustrativo utilizado para descrever a metodologia proposta por Kumar et al., 1986.

$$\tau_n^L = k_n(t_i) \cdot [x_n^L(t_i) - x_{n-1}^R(t_i)] + c_n(t_i) \cdot [\dot{x}_n^L(t_i) - \dot{x}_{n-1}^R(t_i)] \quad (2.77)$$

Além disto, as equações de compatibilidade do sistema fornecem:

$$x_n^R = x_n^L \quad (2.78)$$

$$\tau_n^L = \tau_{n-1}^R \quad (2.79)$$

Normalmente, no MMT, devido à consideração do movimento ser harmônico, a aceleração \ddot{x} e a velocidade \dot{x} são expressas como $-\omega^2 \cdot x_n$ e $\omega \cdot x_n$, respectivamente. Porém, se o movimento não for harmônico, esta hipótese não é válida, limitando o MMT. Para solucionar este problema, é proposto que \ddot{x} e \dot{x} sejam representadas por funções lineares de x_n , na forma das equações 2.80 e 2.81:

$$\ddot{x}_n(t_i) = A_n(t_i) \cdot x_n + B_n \quad (2.80)$$

$$\dot{x}_n(t_i) = D_n(t_i) \cdot x_n + E_n \quad (2.81)$$

Reescrevendo as equações 2.76 e 2.77, tem-se as equações 2.82 e 2.83:

$$m_n \cdot [A_n \cdot x_n + B_n] = \tau_n^R - \tau_n^L + f_n \quad (2.82)$$

$$\tau_n^L = k_n \cdot [x_n^L - x_{n-1}^R] + c_n \cdot [(D_n \cdot x_n + E_n)^L - (D_{n-1} \cdot x_{n-1} + E_{n-1})^R] \quad (2.83)$$

As equações 2.78 e 2.82 geram as equações 2.84, na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x \\ \tau \\ 1 \end{Bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_n \cdot A_n & m_n \cdot B_n & -f_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ \tau \\ 1 \end{Bmatrix}_n^L \quad (2.84)$$

ou na forma compacta:

$$\{v\}_n^R = [P]_n \cdot \{v\}_n^L \quad (2.85)$$

Seguindo as convenções adotadas para o MMT, $\{v\}_n$ é chamado de vetor de estado e $[P]_n$ matriz de transferência de ponto.

Combinando as equações 2.79 e 2.83 tem-se as equações 2.86 :

$$\begin{Bmatrix} x \\ \tau \\ 1 \end{Bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} \frac{k_n + c_n \cdot D_{n-1}^R}{(k_n + c_n \cdot D_n^L)} & \frac{1}{(k_n + c_n \cdot D_n^L)} & \frac{-c_n \cdot (E_n^L - E_{n-1}^R)}{(k_n + c_n \cdot D_n^L)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ \tau \\ 1 \end{Bmatrix}_n^L \quad (2.86)$$

ou na forma compacta:

$$\{v\}_n^L = [F]_n \cdot \{v\}_{n-1}^R \quad (2.87)$$

a matriz $[F]_n$ é a matriz de transferência de campo.

A matriz de transferência, $[T]_n$, que relaciona as extremidades do subsistema, pode ser formulada combinando-se as equações 2.85 e 2.87, como na equação 2.88:

$$\{v\}_n^R = [P]_n \cdot [F]_n \cdot \{v\}_{n-1}^R = [T]_n \cdot \{v\}_{n-1}^R \quad (2.88)$$

Então, para determinar a matriz de transferência global, $[T]$, do sistema completo, tem-se a equação 2.89:

$$[T] = \prod_{i=0}^n T_i \quad (2.89)$$

Uma vez que $[T]$ é determinada, são aplicadas as condições de contorno do sistema e é determinado o vetor de estado $\{v\}_o$. Utilizando repetidamente a equação 2.88, determinam-se os vetores de estado para cada subsistema no intervalo de tempo t_i . As velocidades, \dot{x} e as acelerações \ddot{x} , para t_i , são determinadas através das equações 2.80 e 2.81. O processo, então, é repetido para um intervalo de tempo t_{i+1} , e assim consecutivamente.

Subbiah et al., 1987, aplica o método desenvolvido por Kumar et. al, 1986, à sistemas rotores dinâmicos não-lineares com cargas transientes.

David et. al., 1987, mostrou que a técnica de balanceamento incorporado ao método das matrizes de transferência pode ser utilizado para analisar sistemas paramétricos.

Subbiah et al., 1988, propôs uma combinação dos métodos de elementos finitos e matrizes de transferência para análise de sistemas não-lineares com comportamento dinâmico

Lee et al., 1991, utilizam um método de matrizes de transferência modificado para análise de um sistema rotor-mancal linear e flexível. A modificação diz respeito a obtenção da matriz de transferência de um eixo, o qual é obtida considerando o eixo com uma distribuição contínua de massa, além de obter graficamente as órbitas síncronas e não síncronas, em pontos distintos do eixo rotativo, dos movimentos de precessão.

Kang et al., 1994, apresentam um método baseado nas matrizes de transferência, modificado, aplicado em uma análise harmônica de sistemas rotores assimétricos. A inércia rotacional, efeito giroscópico, inércia transversal e momento fletor estão incluídos.

Wu e Yang, 1995, desenvolvem um método de matrizes de transferência estendido para análise de vibrações laterais e torsionais acopladas de um eixo rotativo, considerando a existência de amortecimento e carregamento externo.

Subrahmanyam e Garg, 1997, desenvolvem um algoritmo numérico, utilizando matrizes de transferência, com o objetivo de analisar o comportamento dinâmico de vigas flexíveis sujeitas a qualquer condição de contorno e efeitos mais complexos, como deformação cisalhante, inércia rotacional, diferentes suspensões e descontinuidades na estrutura.

2.2.3 Análise de Vibrações Livre e Forçadas - Desenvolvimento de um Software

Atualmente, existem ofertas de softwares comerciais para o estudo de dinâmica de rotores. Qual a necessidade, então, de desenvolver um programa matemático, uma vez que já existem trabalhos prontos? Verifica-se que, além dos softwares comerciais serem dispendiosos, são *fechados*, não permitindo, ao pesquisador, acesso ao seu *kernel*, o que dificulta a análise do fenômeno, uma vez que não se sabe quais as limitações da teoria e do algoritmo empregados. Outro ponto que deve-se destacar, é que os softwares existentes não abrangem todas as análises que se desejam realizar.

Utilizando os conceitos de matrizes de transferência, foram elaborados conjuntos de programas computacionais para resolverem problemas de dinâmica de estruturas em linha.

O programa está subdividido em três ramos principais: vibrações livres e vibrações forçadas com amortecimento, no domínio da frequência e análise de vibrações em geral no domínio do tempo. No Apêndice I são encontrados os elementos atualmente implementados, resultado do trabalho de pesquisadores como Holzer, 1921, Myklestad, 1944, e Prohl, 1945, Pestel e Leckie, 1963, e Rao, 1983.

A linha de desenvolvimento do programa está direcionada para a pesquisa em eixos rotativos de transmissão, como eixos Cardan, juntas universais e semi-eixos homocinéticos.

Na atual versão, o programa possibilita a obtenção e análise de espectros de frequência, velocidades críticas, frequências naturais e modos de vibração, deslocamentos e esforços internos, cálculo de instabilidade e diagramas de fase e sinais no tempo.

Neste trabalho implementam-se rotinas ao programa que possibilitem análises de características não lineares, como cargas arbitrárias e propriedades físicas não constantes e que proporcionem a possibilidade de estudo do comportamento de instabilidade do sistema, tanto para vibração trans-

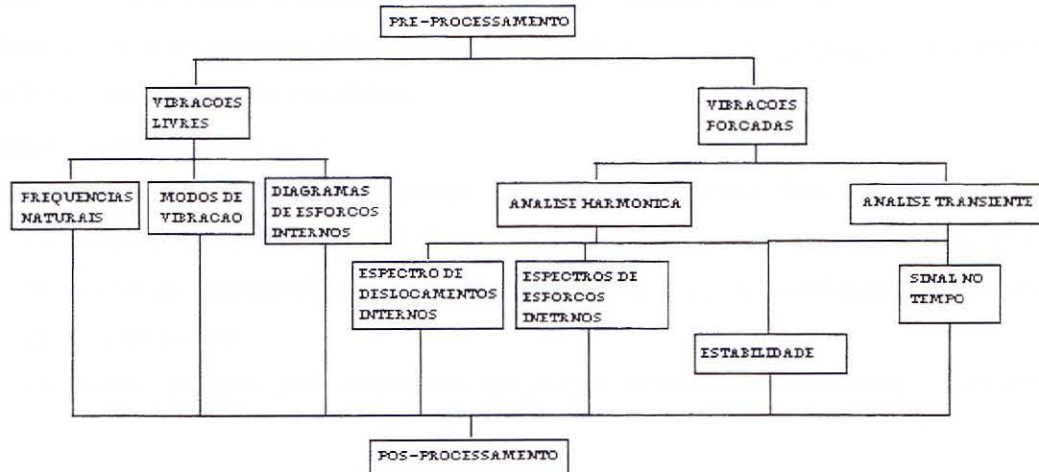


Figura 2.18: Diagrama funcional do software desenvolvido.

versal, como torsional. Na figura 2.18 apresenta-se um diagrama funcional do software desenvolvido.

No estudo de dinâmica de rotores, a diversificação dos problemas a serem pesquisados evidencia a necessidade de uma pesquisa peculiar para cada situação. Em eixos rotativos de transmissão, como eixos Cardan, juntas universais e semi-eixos homocinéticos, há uma necessidade, por parte dos fabricantes e pesquisadores, de um desenvolvimento de elementos que discretizem o sistema, de forma a esclarecer os fenômenos vibratórios existentes. Como exemplo, cita-se o momento secundário, existente em um junta universal de um eixo Cardan, fundamental no estudo do fenômeno vibratório, quando o eixo Cardan opera deslocado angularmente através da junta universal. Nos Capítulos 5 e 6, são discutidos mais detalhadamente as características importantes para as implementações de novos elementos que auxiliarão no estudo de eixos de transmissão. Uma pesquisa bibliográfica, na área de dinâmica de rotores, serviu como indicador de que esta contribuição é importante no estudo de eixos de transmissão rotativos.

A seguir são apresentados o método para análise dinâmica com solução no domínio do tempo, juntamente com as matrizes de transferência desenvolvidas, implementadas no programa global, para sistemas em linha.

2.2.4 Análise Numérica no Tempo Através do Método das Matrizes de Transferência

Utiliza-se o método convencional das matrizes de transferência em conjunção com a solução numérica para resolver problemas no tempo, descritos por equações diferenciais.

A resposta dinâmica, em diferentes intervalos de tempo t_i , pode ser calculada para cada subsistema da estrutura analisada, seguindo os passos do algoritmo proposto:

- (1) Discretização da estrutura analisada em um determinado número de subsistemas;
- (2) Os subsistemas podem ser constituídos de massas puntuais concentradas, também chamadas de estações, onde as forças aplicadas e os deslocamentos do sistema serão determinados, e por

segmentos elásticos sem massa, que conectam duas massas puntuais adjacentes;

(3) Determina-se o intervalo de tempo a ser analisado: $t_{inicial} \leq t_i \leq t_{final}$ e o incremento de tempo Δt utilizado na integração numérica;

(4) Inicia-se a integração: $i = 1$;

(5) Conhecendo as propriedades mecânicas e as grandezas geométricas do sistema no tempo t_i e aplicando as condições iniciais $q(t_{i-1})$ (deslocamento), $\dot{q}(t_{i-1})$ (velocidade) e $\ddot{q}(t_{i-1})$ (aceleração), determinam-se as quantidades $A_n(t_i)$, $B_n(t_i)$, $D_n(t_i)$ e $E_n(t_i)$ utilizadas no processo de integração numérica no tempo;

(6) Neste trabalho optou-se pelo método de integração numérica de Newmark β que determina:

$$A_n(t_i) = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \quad (2.90)$$

$$B_n(t_i) = -\frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot [q(t_{i-1}) + \Delta t \cdot \dot{q}(t_{i-1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \Delta t^2 \cdot \ddot{q}(t_{i-1})] \quad (2.91)$$

$$D_n(t_i) = \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \quad (2.92)$$

$$E_n(t_i) = \dot{q}(t_{i-1}) + \Delta t \cdot [(1 - \gamma) \cdot \ddot{q}(t_{i-1}) + \gamma \cdot B_n] \quad (2.93)$$

com $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$.

(7) No método convencional de matrizes de transferência, como considera-se o sistema realizando um movimento harmônico, a aceleração $\ddot{q}(t_i)$ e a velocidade $\dot{q}(t_i)$ são expressos por:

$$\dot{q}(t_i) = \omega \cdot q_n \quad (2.94)$$

e

$$\ddot{q}(t_i) = -\omega^2 \cdot q_n \quad (2.95)$$

Porém, para sistemas que não realizam movimento harmônico, as equações 2.94 e 2.95 não se aplicam, limitando a aplicação do método.

Para contornar este problema, considera-se que para qualquer instante de tempo t_i , a velocidade, $\dot{q}(t)$, e a aceleração, $\ddot{q}(t)$, para um dado grau de liberdade, q_n , de um subsistema n , podem ser expressos como uma função linear do grau de liberdade q_n , ou seja:

$$\ddot{q}_n(t_i) = A_n(t_i) \cdot q_n(t_i) + B_n(t_i) \quad (2.96)$$

$$\dot{q}_n(t_i) = D_n(t_i) \cdot q_n(t_i) + E_n(t_i) \quad (2.97)$$

(8) Uma vez que as equações diferenciais que representam o movimento são estabelecidas, as

relações 2.96 e 2.97 são aplicadas para cada um dos subsistemas. As relações resultantes, então, são reescritas em forma de matrizes de transferência, obtendo-se estas relações em função do tempo. Desta forma, seguindo o procedimento tradicional do método das matrizes de transferência, como descrito nas equações 2.19 até 2.27, como relatado por Bansal e Kirk, 1975, obtém-se a matriz de transferência e o vetor de estado, para cada subsistema, no intervalo de tempo t_i , aplicando as condições de contorno adequadas.

(9) Com $\dot{q}(t_i)$ e $\ddot{q}(t_i)$ determinados, estes são utilizados como as novas condições iniciais no tempo t_{i+1} ;

(10) Reinicializa-se o processo de integração: $i = i + 1$;

(11) O processo repete-se até atingir-se o tempo t_{final} .

O procedimento relatado fornece uma poderosa ferramenta de análise para dinâmica de rotores, no domínio do tempo, para sistemas lineares e, principalmente, para sistemas não lineares.

Baseado neste conceito, são desenvolvidas novas matrizes de transferência para representar os fenômenos que ocorrem no tempo, em especial, para análise de eixos Cardan e semi-eixos homocinéticos. A seguir são apresentadas as matrizes de transferência desenvolvidas e suas características, sendo aplicadas nos Capítulos 5 e 6.

2.2.5 Vetor Estado

As matrizes de transferência desenvolvidas são relativas ao vetor de estado 2.98, onde q é o deslocamento transversal, ψ é o giro, M é o momento fletor e V é o esforço cortante.

$$\left\{ \begin{array}{c} q \\ \psi \\ M \\ V \\ 1 \end{array} \right\}_i^j \quad (2.98)$$

obs: o índice j é a posição do vetor de estado em relação à estação considerada, i.e., (e) lado esquerdo ou (d) lado direito, e o índice i é a posição da estação na estrutura global.

2.2.6 Elemento Rótula com Rigidez Angular e Carga Aplicada

Esta matriz de transferência de ponto, matriz 2.99, é representada por uma massa concentrada com rigidez angular e uma carga aplicada, em uma determinada frequência. Representa as juntas Cardan e homocinéticas. Variáveis:

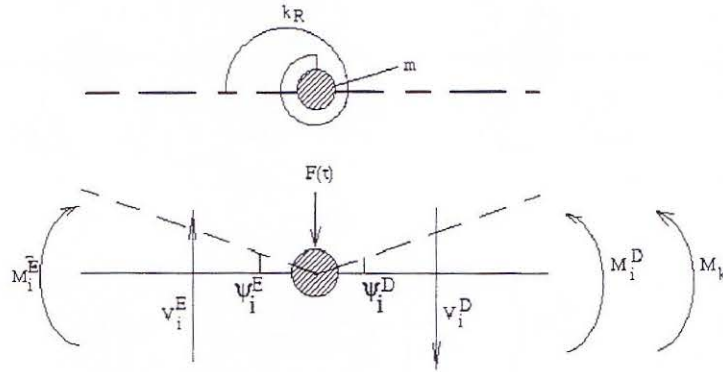


Figura 2.19: Diagrama de corpo livre da rótula com rigidez angular e carga aplicada.

m	massa concentrada
k_R	rigidez angular
M_k	momento gerado pela mola angular
$A(t)$ e $B(t)$	valores de integração
$F(t)$	carga aplicada
t	tempo

Um desenho esquemático da rótula pode ser visto na figura 2.19.

$$q_i^d = q_i^e$$

$$\psi_i^d = \psi_i^e + \frac{M_k}{k_R}$$

$$M_i^d = M_i^e = M_k$$

$$V_i^d = V_i^e + m.\ddot{q}_i^e - F(t) = V_i^e + m.(A(t).q_i^e(t) + B(t)) - F(t)$$

Matricialmente tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m.A(t) & 0 & 0 & 1 & m.B(t) - F(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

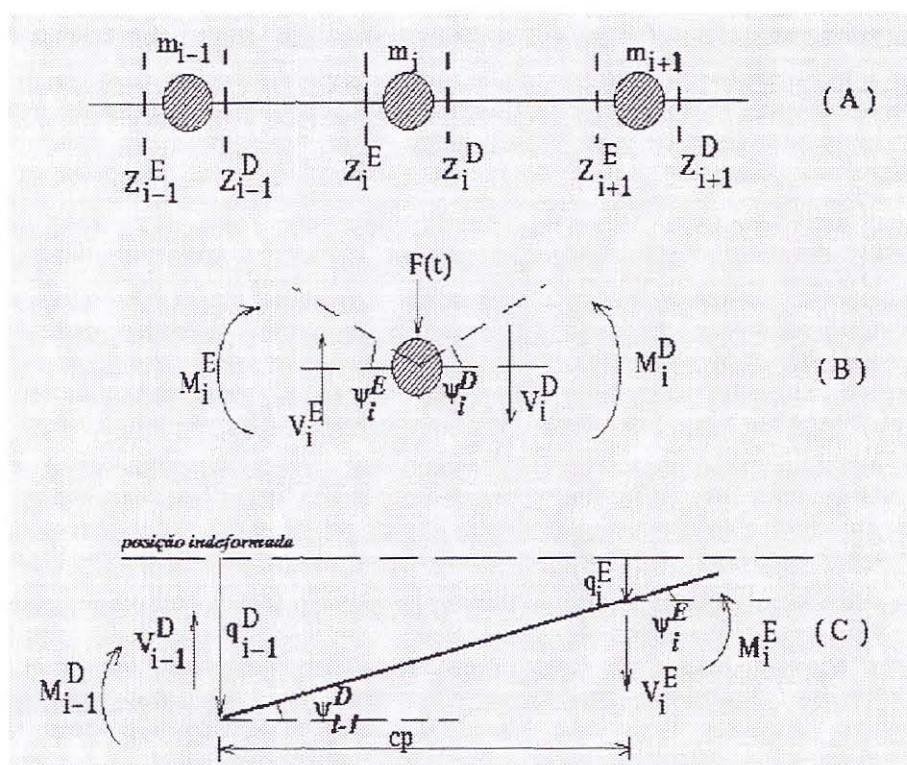


Figura 2.20: (A) Discretização de um eixo em (C) elementos elásticos sem massa e (B) massa pontuais concentradas.

2.2.7 Elemento Eixo sem Massa, com Variação de Comprimento + Massa Concentrada

Esta matriz de transferência é o resultado da condensação das matrizes de transferência de ponto, de uma massa concentrada e de campo, de um eixo elástico sem massa com uma variação de comprimento cp , que é uma função do comprimento, percentual e frequência de variação do comprimento original e do tempo de análise. Está representada pela matriz 2.102 e os desenhos esquemáticos são mostrados na figura 2.20. Variáveis:

cmp	comprimento original do segmento
par	percentual de variação do comprimento
cfrq	frequência de variação de cmp
t	tempo
cp	função de cmp, par, cfrq e t
E	módulo de Young
J	momento de inércia transversal de área
F	amplitude da carga concentrada
frq	frequência de aplicação de F
A(t) e B(t)	valores de integração

Tanto o eixo Cardan de dupla seção, quanto o semi-eixo homocinético fazem uso desta matriz de transferência, que representa a variação do comprimento dos elementos presentes nestes sistemas.

Para a matriz de ponto de uma massa concentrada, figura 2.20-(B), com carregamento, tem-se:

$$q_i^d = q_i^e$$

$$\psi_i^d = \psi_i^e$$

$$M_i^d = M_i^e$$

$$V_i^d = V_i^e + m.\ddot{q}_i - F.\sin(frqt) = V_i^e + m.(A(t).q_i^e + B(t)) - F.\sin(frqt)$$

ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m.A(t) & 0 & 0 & 1 & m.B(t) - F.\sin(frqt) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Para a matriz de campo de um eixo elástico sem massa, figura 2.20-(C), com uma variação de comprimento cp , tem-se a matriz 2.101, cuja demonstração, considerando-se uma análise no domínio da frequência, pode ser encontrada em Pestel e Leckie, 1963.

$$\begin{bmatrix} 1 & -cp & \frac{-cp^2}{2.E.J} & \frac{-cp^3}{6.E.J} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{cp}{E.J} & \frac{cp^2}{2.E.J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & cp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

A condensação das matrizes 2.100 e 2.101 forma a matriz de transferência 2.102.

$$\begin{bmatrix} 1 & -cp & \frac{-cp^2}{2.E.J} & \frac{-cp^3}{6.E.J} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{cp}{E.J} & \frac{cp^2}{2.E.J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & cp & 0 \\ a1 & -a1.cp & -a1.\frac{cp^2}{2.E.J} & -a1.\frac{cp^3}{6.E.J} + 1 & a2 - F.\sin(frqt) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

com $a1 = m.A(t)$ e $a2 = m.B(t)$

2.2.8 Matriz Rotacional

Quando algum elemento do eixo rotativo analisado desalinha-se dos demais elementos, esta inclinação é representada matematicamente pela matriz de transferência rotacional 2.103, como é o caso do segmento de eixo Cardan que conecta as duas juntas Cardan existentes no conjunto estudado. Variáveis:

$\theta(t)$: é a inclinação do elemento de eixo em questão, podendo ser variável no tempo.

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

2.2.9 Eixo sem Massa e sem Variação do Comprimento e Massa Concentrada com Momento Fletor Aplicado

A matriz de transferência apresentada na matriz 2.104 representa um eixo elástico sem massa. A matriz de transferência 2.105, representa-se uma massa concentrada com um momento fletor atuante. Os diagramas de corpo livre são semelhantes aos da figura 2.20. Variáveis:

L	comprimento do segmento
E	módulo de Young
J	momento de inércia transversal de área
C	momento fletor
t	tempo
ω	rotação do segmento de eixo
m	massa concentrada
A(t) e B(t)	valores de integração
F	carga aplicada
f(t)	função relacionada à F

Para o eixo sem massa e com comprimento fixo no tempo tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -L & \frac{-L^2}{2.E.J} & \frac{-L^3}{6.E.J} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{E.J} & \frac{L^2}{2.E.J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Para a massa concentrada com momento fletor aplicado tem-se:

$$q_i^d = q_i^e$$

$$\psi_i^d = \psi_i^e$$

$$M_i^d = M_i^e - C \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$V_i^d = V_i^e + m \cdot \ddot{q}_i^e - F \cdot f(t) = V_i^e + m \cdot (A(t) \cdot q_i^e + B(t)) - F \cdot f(t)$$

ou matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -C \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ m \cdot A(t) & 0 & 0 & 1 & m \cdot B(t) - F \cdot f(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

2.2.10 Mancal Central

Esta matriz de transferência foi desenvolvida para representar o mancal central de apoio do eixo Cardan de dupla seção. Basicamente é uma matriz de transferência de ponto que representa um conjunto massa mola com rigidez angular e transversal, com o adicional de uma força aplicada que representa a reação do mancal central ao momento secundário atuando sobre a junta Cardan.

Onde:

k_r	rigidez angular
rig	rigidez transversal
m	massa concentrada
A(t) e B(t)	valores de integração
F	carga aplicada resultante do momento secundário
t	tempo
f(t)	função relacionada à F

$$q_i^d = q_i^e$$

$$\psi_i^d = \psi_i^e$$

$$M_i^d = k_r \cdot \psi_i^e + M_i^e$$

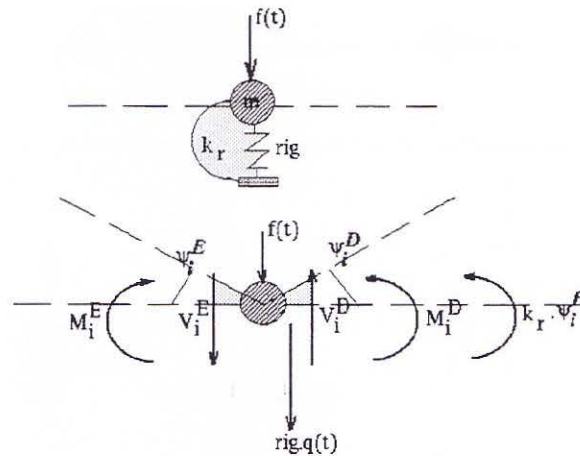


Figura 2.21: Desenho esquemático do diagrama de corpo livre de um sistema mancal com rigidez transversal e angular e força aplicada.

$$V_i^d = V_i^e + m \cdot \ddot{q}_i^e - F \cdot f(t) + rig \cdot q_i^e = V_i^e + m \cdot (A(t) \cdot q_i^e(t) + B(t)) - F \cdot f(t) + rig \cdot q_i^e$$

ou matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 1 & 0 & 0 \\ m \cdot A(t) + rig & 0 & 0 & 1 & m \cdot B(t) - F \cdot f(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

2.2.11 Aplicação do Método Proposto em Problemas Não Lineares - Vibrações Paramétricas

Calcular a solução de equações diferenciais com coeficientes que variam no tempo é uma tarefa complexa, justificando um tratamento numérico, como o método proposto neste trabalho.

Uma vez que o método das matrizes de transferência proposto é baseado em uma discretização no domínio do tempo, os sistemas que possuem parâmetros que variam no tempo e outros tipos de não linearidades podem ser simulados.

Entre os fenômenos não lineares de interesse em dinâmica de rotores, encontram-se as propriedades de rigidez e amortecimento dos suportes de eixos rotativos que variam ao longo do tempo, seja devido a rotação do rotor ou às propriedades do material que constitui o suporte.

Neste trabalho, os tipos de não linearidades analisados serão a variação da rigidez de eixos rotativos, devido a este realizar um movimento de rotação ao mesmo tempo em que seu comprimento varia no tempo, e ainda, o estudo de cargas externas aplicadas em frequências que não são relacionadas com a rotação do eixo.

As matrizes de transferência 2.99 até 2.106 representam a teoria desenvolvida que será utilizada

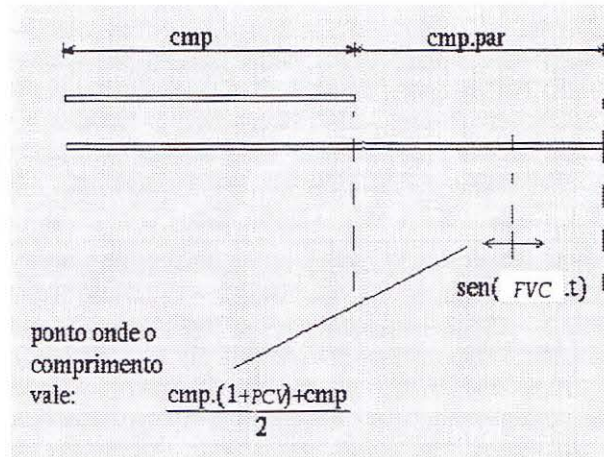


Figura 2.22: Representação esquemática da variação de comprimento no tempo para eixos utilizada na formulação das matrizes de transferência, para análise de vibrações no domínio do tempo.

para estudar os fenômenos não lineares nas aplicações propostas, i.e., vibrações paramétricas em semi-eixos homocinéticos e em eixos Cardan de dupla seção.

Visando esclarecer a técnica adotada, na imposição de variação de comprimento das estruturas analisadas para o estudo de vibrações paramétricas, a seguir é apresentada a formulação utilizada.

A variação de comprimento no tempo (cp) adotada é uma função da frequência de oscilação imposta do comprimento (FVC), do percentual do comprimento original que será variado (PCV) e do tempo (t). A equação 2.107 descreve que o comprimento variado no tempo é harmônico com uma frequência de variação (FVC) e com uma variação de amplitude em torno de um valor médio definido pelo percentual de comprimento que o sistema irá variar (PCV).

$$cp = \left(\frac{cmp.(1 + PCV) + cmp}{2} \right) \cdot \left(1 + \frac{PCV}{2} \cdot \sin(FVC.t) \right) \quad (2.107)$$

Este valor de cp é o adotado nas matrizes de transferência para análises de vibração paramétrica. O algoritmo desenvolvido possui flexibilidade para mudanças deste valor, caso o problema analisado exija.

A figura 2.22 mostra esquematicamente a idéia proposta.

Em relação às cargas aplicadas, caberá ao usuário definir a frequência de aplicação desta, conforme o problema exigir.

Nos Capítulos 5 e 6, problemas não lineares são analisados, onde os modelos numéricos propostos são aplicados.

2.2.12 O Método dos Elementos Finitos-Matrizes de Transferência

Alguns pesquisadores apresentam modelos matemáticos que mesclam os dois métodos citados, obtendo bons resultados, como Nikolajsen et. al, 1980.

Subbiah et al., 1988, propõe uma nova aproximação para analisar o comportamento dinâmico de um sistema rotor no domínio do tempo, através da combinação do método dos elementos finitos

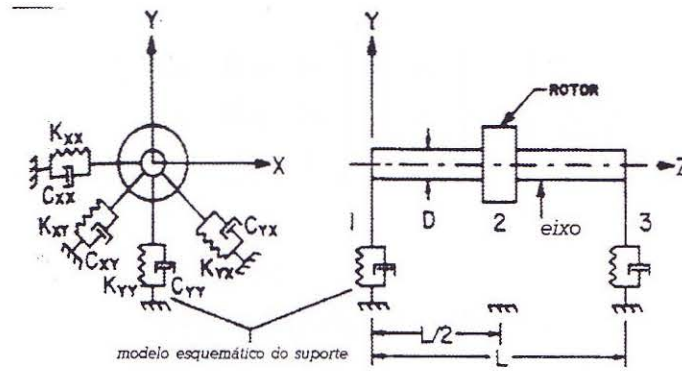


Figura 2.23: Modelo de um sistema rotor com 3 (três) estações.

e matrizes de transferência. Considerando um sistema rotor com três estações, como na figura 2.23, onde o sistema é discretizado através de elementos que representam o eixo, o disco e o conjunto mancal-rolamento.

Baseado no método dos elementos finitos, as equações de movimento para cada elemento, com 2 (dois) nós, da figura 2.23, será:

$$[M^e] \cdot \{\ddot{q}(t)\} + [C^e] \cdot \{\dot{q}(t)\} + [K^e] \cdot \{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.108)$$

onde

$[M^e] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{8 \times 8}$, $[C^e] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{8 \times 8}$ e $[K^e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_{8 \times 8}$ são as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do elemento;

$\{F^e(t)\} = \{f_1 : f_2\}_{8 \times 1}$: vetor de forças;

$\{q(t)\} = \{x_1, \theta_1, y_1, \phi_1 : x_2, \theta_2, y_2, \phi_2\}$: vetor de deslocamentos.

$\{x_1, x_2\}$ e $\{y_1, y_2\}$: deslocamentos transversais nas direções x e y ;

$\theta_1 = \frac{\partial x_1}{\partial z_1}$, $\theta_2 = \frac{\partial x_2}{\partial z_2}$ e $\phi_1 = \frac{\partial y_1}{\partial z_1}$, $\phi_2 = \frac{\partial y_2}{\partial z_2}$

De forma similar àquela adotada por Kumar et al., 1986, \ddot{q} e \dot{q} são aproximados por funções lineares de q , fornecendo uma nova equação:

$$[M^e] \cdot \{A_n(t_i) \cdot q_n + B_n(t_i)\} + [C^e] \cdot \{D_n(t_i) \cdot q_n + E_n(t_i)\} + [K^e] \cdot \{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.109)$$

ou ainda

$$[[M^e] \cdot A_n(t_i) + [C^e] \cdot D_n(t_i) + [K^e]] \cdot \{q_n(t_i)\} + [M^e] \cdot \{B_n(t_i)\} + [C^e] \cdot \{E_n(t_i)\} = \{F(t_i)\} \quad (2.110)$$

Expandindo a equação 2.110, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & v_1 \\ K_{21} & K_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.111)$$

onde

$$[K_{11} = m_{11}.A_n + c_{11}.D_n + k_{11}] \quad (2.112)$$

$$[K_{12} = m_{12}.A_n + c_{12}.D_n + k_{12}] \quad (2.113)$$

$$[K_{21} = m_{21}.A_n + c_{21}.D_n + k_{21}] \quad (2.114)$$

$$[K_{22} = m_{22}.A_n + c_{22}.D_n + k_{22}] \quad (2.115)$$

$$v_1 = m_{11}.B_1 + m_{12}.B_2 + c_{11}.E_1 + c_{12}.E_2 \quad (2.116)$$

$$v_2 = m_{21}.B_1 + m_{22}.B_2 + c_{21}.E_1 + c_{22}.E_2 \quad (2.117)$$

A equação 2.111 é reescrita:

$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ f_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{12}^{-1}.K_{11} & K_{12}^{-1} & s_1 \\ K_{21} - K_{22}.K_{12}^{-1}.K_{11} & K_{22}.K_{12}^{-1} & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ f_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.118)$$

onde

$$s_1 = -K_{12}^{-1} \cdot (m_{11}.B_1 + m_{12}.B_2 + c_{11}.E_1 + c_{12}.E_2)$$

$$s_2 = -K_{22}.K_{12}^{-1} \cdot (m_{11}.B_1 + m_{12}.B_2 + c_{11}.E_1 + c_{12}.E_2) +$$

$$+ m_{21}.B_1 + m_{22}.B_2 + c_{21}.E_1 + c_{22}.E_2$$

ou na forma reduzida

$$\{u\}_2^L = [S] \cdot \{u\}_1^R \quad (2.119)$$

Para um elemento que representa um eixo uniforme com dois nós, $[S]$ é a matriz de transferência e $\{u\}$ é o vetor de estado. O restante do processo é idêntico ao apresentado por Kumar et al.,

1986.

Stephenson et al., 1989, analisam a variação da seção de eixos em sistemas rotores, utilizando os métodos dos elementos finitos e matrizes de transferência, propondo algumas alterações nos modelos matemáticos antecessores.

Yu e Craggs, 1995, apresentam um método de matrizes de transferência baseado em modelos de elementos finitos para o estudo de dinâmica de estruturas em linha e submetidas a carregamento harmônico. Este trabalho é uma complementação do trabalho de Subbiah et al., 1988.

3 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Neste capítulo, descrevem-se os procedimentos experimentais empregados no estudo de eixos rotativos de transmissão. Os resultados obtidos com esses procedimentos podem ser encontrados nos capítulos posteriores. Uma excelente revisão de conceitos e bibliografia, na área de dinâmica de rotores, podem ser encontradas em Vance, 1989 e, com poucas exceções, nos trabalhos citados por este autor.

Através da análise experimental, adquire-se dados diretamente dos modelos de eixos rotativos estudados, desta forma, obtendo subsídios para uma comparação com os valores obtidos, seja numericamente ou analiticamente, ao mesmo tempo em que estes resultados auxiliam o pesquisador a adquirir um *sentimento* físico mais refinado dos fenômenos estudados. Subdividiu-se este tópico em dois itens principais, isto é, análise de eixo com rotação nula e dinâmica, visando-se obter as frequências naturais, velocidades críticas, modos de vibração e deformações inerentes ao sistema. Optou-se, devido a facilidade de manuseio e experiência já adquirida com tais transdutores, pela utilização de acelerômetros piezoelétricos, como sensores de medição.

3.1 Análise do Eixo com Rotação Nula

O objetivo deste tipo de ensaio é determinar as características do modelo de eixo rotativo de transmissão sem nenhum tipo de carga diferente do próprio peso.

3.1.1 Utilização de Transdutor Piezoelétrico: Acelerômetros. Descrição do Método

Optou-se pelo método da excitação através de impacto, de forma semelhante à empregada por Rios, 1994. A principal vantagem do método é a ampla faixa de frequências que podem ser excitadas, permitindo a obtenção de várias frequências ressonantes.

O eixo deve ser discretizado em um determinado número de pontos, que variam em número e localização, conforme as necessidades da pesquisa. São utilizados dois acelerômetros para a aquisição de sinais. O acelerômetro de referência ou fixo, é posto em um dos pontos discretizados no eixo e permanece fixo neste ponto. O acelerômetro de varredura ou móvel, a cada impacto aplicado, varia a sua posição ao longo de todos os pontos discretizados no eixo. O impacto deve ser aplicado em um ponto onde não existam nodos (pontos de deslocamento nulo), evitando a não obtenção de alguma frequência ressonante. Os dois acelerômetros estão conectados a canais diferentes de um sistema que adquire e trata os sinais gerados por estes, o Analisador de Foürier, conforme a figura 4.5. A cada impacto aplicado, são obtidos, em pontos diferentes, os espectros instantâneos de frequência e de fase do sinal, gerado pelos acelerômetros, que possibilitarão a obtenção das frequências características do sistema, dos modos de vibração, das amplitudes da onda associada a cada uma das frequências e da largura dos picos nos espectros de frequência.

Os dados obtidos são levados para tratamento em planilhas, como a tabela 3.1, onde estão organizados de acordo com o ponto e à frequência considerados. Estes dados são a amplitude da

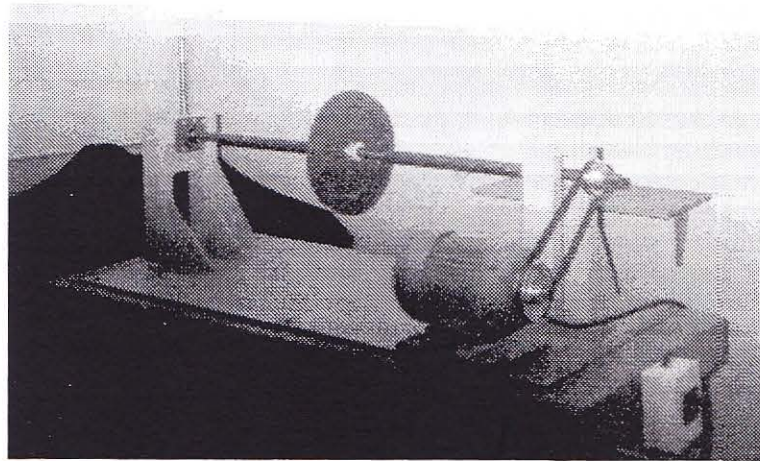


Figura 3.1: Bancada de teste para o controle passivo de eixos rotacionais.

ponto	amplitude (mV)		ângulo de fase		q_{ij}	sinal	$\overline{q_{ij}}$
	referência	varredura	referência	varredura			
0	0.000	0.000	0.0	0.0	0.000		0.000
1	0.759	0.904	151.9	-78.3	1.190	(-)	-1.190
2	0.400	0.533	-13.5	-166.2	1.333	(-)	-1.333

Tabela 3.1: Planilha para registro dos dados do ensaio.

onda e o ângulo de fase para os dois canais. Na última coluna destas planilhas, encontra-se o vetor de deslocamentos nodais (relativos) dos pontos de medição que definem a forma modal para cada uma das frequências analisadas.

Os modos de vibração fundamentais do modelo são obtidos mediante a uma relação entre os sinais gerados pelos acelerômetros de varredura e o de referência. Cada um dos modos de vibração do modelo podem ser obtidos dividindo-se a amplitude do espectro, correspondente ao acelerômetro de varredura, pelo valor do espectro do acelerômetro de referência, isto para cada uma das localizações do acelerômetro de varredura. O valor do espectro deve ser medido no pico correspondente à frequência cujo modo se quer determinar. Genericamente, pode-se estabelecer a seguinte expressão para este fim:

$$q_{ij} = \frac{Y_{ij}^{varredura}}{Y_{i1}^{referencia}} \quad (3.1)$$

onde q_{ij} representa o deslocamento correspondente ao j -ésimo ponto de tomada da medição relativo ao i -ésimo modo de vibração, e os termos $Y_{ij}^{varredura}$ e $Y_{i1}^{referencia}$ correspondem às amplitudes dos picos da i -ésima frequência natural no j -ésimo ponto de medição nos espectros instantâneos de varredura e referência, respectivamente. Os vetores de deslocamentos que definem as formas modais estão compostos por deslocamentos relativos, correspondendo ao ponto de referência o deslocamento unitário.

No referente ao sentido do deslocamento relativo, este é obtido através da análise do valor e sinal do ângulo de fase. Este é obtido do espectro instantâneo de fases das acelerações medidas. É atribuído sinal positivo (+) ao deslocamento do ponto que tiver um ângulo de fase, entre o sinal do

acelerômetro de varredura e de referência, na frequência analisada, de $0^\circ \pm 70^\circ$. Da mesma maneira é considerado um sinal negativo (-) para o deslocamento relativo do ponto, quando apresenta um ângulo de fase entre os dois acelerômetros de $180^\circ \pm 70^\circ$. As condições antes mencionadas podem ser resumidas da seguinte forma:

$$\phi_{ij} = \phi_{i1}^{referencia} - \phi_{ij}^{varredura} \quad (3.2)$$

onde $\phi_{i1}^{referencia}$ e $\phi_{ij}^{varredura}$ são os ângulos de fase na i-ésima frequência natural no j-ésimo ponto de medição dos respectivos acelerômetros de referência e varredura, e ϕ_{ij} é a diferença dos anteriores para dita frequência e respectivo ponto de medição.

No Capítulo 6, onde estuda-se o comportamento dinâmico de eixos Cardan, é apresentado um desenho esquemático da posição e utilização dos acelerômetros, figura 6.9, utilizando a metodologia experimental proposta.

3.1.2 Análise Dinâmica do Eixo

Em uma análise dinâmica de eixos de transmissão, a utilização de acelerômetros piezoelétricos para a obtenção de espectros de frequência e sinal no tempo é bastante difundida pela sua versatilidade e facilidade de manuseio. Fixa-se o acelerômetro em pontos sem rotação do eixo em movimento, normalmente os mancais que suportam todo o sistema. Assim como na análise de eixos com rotação nula, o acelerômetro é conectado a um canal de um sistema que adquire e trata o sinal obtido, no caso um Analisador de Fôurier.

Através do sinal adquirido e tratado, identificam-se as frequências características do sistema, permitindo desta forma determinar as frequências ressonantes e as frequências de rotação do eixo e suas harmônicas.

3.1.3 Aplicação da Metodologia Experimental

Nos Capítulos 4, 5 e 6, podem ser encontrados os resultados obtidos empregando-se a metodologia apresentada neste capítulo.

4 UM ESTUDO DO EFEITO GIROSCÓPICO NO CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES EM EIXOS ROTATIVOS ATRAVÉS DA METODOLOGIA PROPOSTA

No estudo de dinâmica de rotores, a presença de vibrações excêntricas, evidencia a necessidade de um controle destas, de forma a obter-se uma resposta mais favorável.

As formas de controle de vibrações, segundo Inman, 1994, podem ser de forma passiva ou ativa. Um sistema de controle ativo, basicamente, utiliza-se de um mecanismo de controle externo ou ativo (eletrônico, por exemplo) como forma de controlar a resposta. Por outro lado, o controle passivo depende de uma mudança de um parâmetro físico fixo (passivo) na estrutura. Resumindo, o controle ativo depende de uma medida instantânea da resposta do sistema, enquanto que o passivo não necessita.

Este capítulo está direcionado para o estudo numérico e experimental do controle passivo de vibrações em eixos rotativos, através da utilização o efeito giroscópico.

4.1 Histórico

A necessidade de equipamentos rotativos mais leves e de menor custo fez com que estes atinxissem rotações próximas e até superiores às velocidades críticas do sistema. Como estas rotações geram vibrações nocivas ao sistema, surge a necessidade de um estudo do controle dos parâmetros que influenciam estes movimentos.

Inman, 1992, em um excelente trabalho sobre vibrações, apresenta as teorias e metodologias empregadas no controle de vibrações nos mais variados sistemas. Destaca as formas de controle, ativo e passivo, definindo matematicamente o problema.

O avanço da tecnologia eletrônica, embora ainda com um custo elevado, tem gerado muitos avanços na área de controle ativo de vibrações. A seguir destacam-se alguns trabalhos.

Nagaya et al., 1987, apresentam um método de controle ativo de vibrações de eixos rotativos, quando estes atingem as suas velocidades críticas, através de suportes que fazem uso de metais com memória. Neste método, a vibração no eixo, devido aos movimentos de precessão, é controlada aumentando e diminuindo a rigidez do suporte, o que pode ser obtido através de mudanças de temperatura dos metais que constituem este. Resultados numéricos e experimentais são apresentados.

Baz et al., 1990, descrevem um sistema de controle ativo para vibrações longitudinais em eixos rotativos de transmissão. O sistema consiste de um mecanismo pneumático de ar comprimido. Um modelo teórico que avalia as interações dinâmicas entre o eixo e o controlador é proposto, sendo os resultados validados por trabalhos experimentais.

Turkstra e Semercigil, 1993, propõe um modelo de suspensão ativa para controle de vibrações. Este sistema consiste de um apoio com rigidez variável e com posição, ao longo do eixo, que varia conforme suas características dinâmicas. O método dos elementos finitos é utilizado na análise numérica, cujos resultados são comparados com os dados obtidos experimentalmente.

Yang, 1994, estuda o controle ativo de eixos rotativos com presença de efeito giroscópico,

através de um sistema de sensores e atuadores que respondem proporcionalmente à rotação do eixo, adicionando ou reduzindo a quantidade de amortecimento atuante na estrutura. Uma análise teórica é desenvolvida para auxiliar no procedimento experimental.

Turkstra e Semercigil, 1997, utilizam um apoio com posição variável ao longo do eixo rotativo, como meio de controlar as vibrações que surgem no sistema, ao operar nas faixas de velocidades críticas. Os resultados numéricos confirmam a funcionabilidade do mecanismo proposto.

Millsaps e Reed, 1998, mostram que a energia vibratória total de um sistema rotativo, passando por suas velocidades críticas, pode ser reduzida através do controle da aceleração rotacional. Os resultados teóricos são confirmados experimentalmente por um modelo de eixo rotativo com um disco adicionado ao sistema.

Antkowiak e Nelson, 1998, desenvolvem uma solução numérica, utilizando um modelo em elementos finitos, para controle ativo de turbinas, através do uso de mancais com suspensão magnética.

No estudo do controle passivo, embora em menor número, podem ser encontrados trabalhos interessantes do ponto de vista de sua aplicabilidade na indústria, devido a sua flexibilidade e baixo custo.

Cunningham et al., 1975, examinam a influência do amortecimento, em mancais a óleo que suportam eixos rotativos, no deslocamento e força transmitidos, nas faixas operacionais onde ocorrem as velocidades críticas, verificando a possibilidade da aplicação dos resultados obtidos em sistemas rotativos, com uma única massa concentrada, em sistemas com várias massas concentradas e, ainda, analisam os procedimentos adotados no projeto de mancais a óleo.

Roberts e Kaya, 1987, realizam uma análise experimental do controle de vibrações em eixos rotativos, utilizando um mancal com um sistema de rolamento apoiado em suportes com filmes de óleo. Este mancal é colocado em uma posição intermediária do sistema, introduzindo amortecimento à estrutura. Como resultado, obtém a influência do amortecimento, que o mancal com filme de óleo introduz, nas diferentes faixas de operação do sistema rotativo, em suas velocidades críticas. Uma revisão bibliográfica sobre trabalhos, em controle de vibrações, que utilizam este tipo de mecanismo é apresentada.

Coutinho, 1994, utilizando ábacos adimensionais, estuda a utilização de conjuntos massa-mola-amortecedor como neutralizadores e dessintonizadores dinâmicos de vibrações em semi-eixos homocinéticos.

Este capítulo está direcionado à aplicação das metodologias experimental e numérica, propostas, no estudo e aplicação de uma das formas mais simples, de baixo custo e eficazes de controle passivo em sistemas rotativos, o efeito giroscópico.

O efeito giroscópico em eixos rotativos e a possibilidade de sua utilização como controlador passivo de vibrações, tornaram este fenômeno físico uma fonte de pesquisa importante em dinâmica de rotores.

Den Hartog, 1947, apresenta uma descrição do efeito giroscópico, formulando equações adimensionais, mostradas de forma gráfica e confirma a existência da rotação excêntrica inversa.

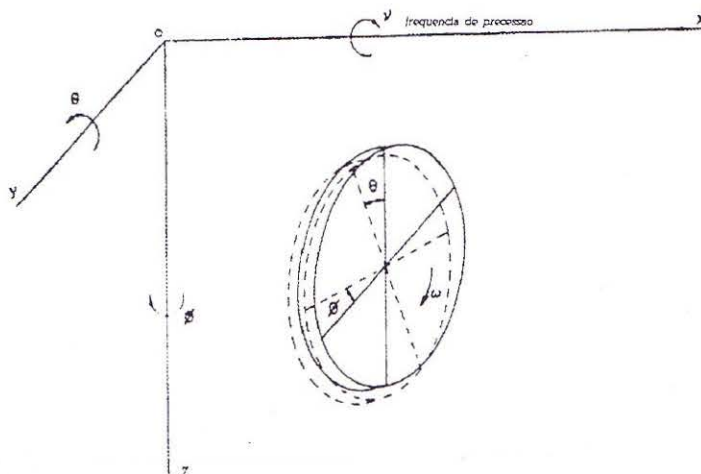


Figura 4.1: Disco com movimentos de precessão em relação aos eixos y e z .

Green, 1948, apresenta gráficos adimensionais para várias disposições de discos montados em eixos elásticos. Assume que o disco seja pouco espesso, rígido e rigidamente montado do eixo, com pequenos deslocamentos e despreza possíveis desbalanceamentos.

Arnold e Maundes, 1961, escreveram uma obra abrangente sobre o assunto, dando atenção à aplicação do fenômeno na engenharia.

Rao, 1983, deriva uma matriz de transferência que considera o efeito giroscópico para um disco acoplado a um eixo em rotação. A ação do efeito giroscópico é máxima quando o disco gerador de forças giroscópicas está localizado nos pontos nodais, realizando um movimento translacional e giro flexional, máximos neste ponto, por outro lado, é inexistente quando colocado nos pontos anti-nodais, pois realiza um movimento translacional, não executando giro flexional.

Considera-se um disco como sendo o i -ésimo elemento de um sistema rotor, que possui uma velocidade angular ω e movimento de precessão em relação aos eixos y e z , com amplitudes θ , inclinação do eixo no plano $x - z$, e ϕ , inclinação do eixo no plano $x - y$, respectivamente, como mostra a figura 4.1. A velocidade de precessão é ν (rad/s). Os momentos de inércia de massa polar e transversal são I_p e I_t .

O disco é mostrado projetado no plano $x - z$ na figura 4.2 (a), onde possui um rotação ω em torno do eixo $o - x$. Devido ao movimento precessional em torno do eixo $o - y$, surge um momento giroscópico dado por:

$$T_z = I_p \cdot \omega \cdot \dot{\theta} \quad (4.1)$$

A projeção do disco no plano $x - y$, figura 4.2 (b), de forma semelhante, gera um momento giroscópico dado por:

$$T_y = I_p \cdot \omega \cdot \dot{\phi} \quad (4.2)$$

Para vibrações livres tem-se:

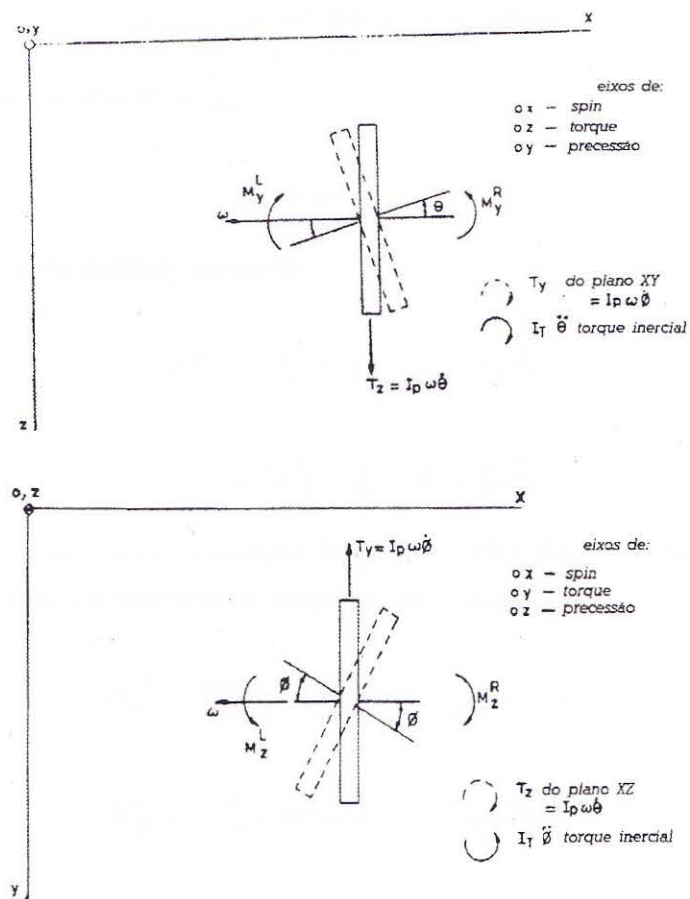


Figura 4.2: Movimentos do disco nos planos (a) XZ e (b) XY.

$$I_t \cdot \ddot{\theta} + I_p \cdot \omega \cdot \dot{\phi} = 0 \quad (4.3)$$

$$I_t \cdot \ddot{\phi} - I_p \cdot \omega \cdot \dot{\theta} = 0 \quad (4.4)$$

Também, tem-se que:

$$\theta = \theta_o \cdot e^{(i \cdot \nu \cdot t)} \quad (4.5)$$

$$\phi = \phi_o \cdot e^{i \cdot (\nu \cdot t - \frac{\pi}{2})} = -i \cdot \phi_o \cdot e^{(i \cdot \nu \cdot t)} \quad (4.6)$$

Se o movimento for circular $\theta_o = \phi_o$:

$$\nu = \frac{I_p}{I_t} \cdot \omega \quad (4.7)$$

Das figuras 4.2 (a) e (b) pode-se escrever:

$$M_{yi}^R = M_{yi}^L + I_p \cdot \omega \cdot \dot{\phi}_i + I_t \cdot \ddot{\theta}_i \quad (4.8)$$

$$M_{zi}^R = M_{zi}^L - I_p \cdot \omega \cdot \dot{\theta}_i + I_t \cdot \ddot{\phi}_i \quad (4.9)$$

Devido às condições descritas na equação 2.62, Rao, 1983, descreve que as equações 4.8 e 4.9 podem ser reescritas, para um movimento síncrono, utilizando:

$$M_{yi}^R = M_{yic}^R \cdot \cos(\omega \cdot t) + M_{yis}^R \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4.10)$$

$$M_{yi}^L = M_{yic}^L \cdot \cos(\omega \cdot t) + M_{yis}^L \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4.11)$$

$$I_p \cdot \omega \cdot \dot{\phi}_i = I_p \cdot \omega^2 \cdot (-\phi_{ic} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \phi_{is} \cdot \cos(\omega \cdot t)) \quad (4.12)$$

$$I_t \cdot \ddot{\theta}_i = -I_t \cdot \omega^2 \cdot (\theta_{ic} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \theta_{is} \cdot \sin(\omega \cdot t)) \quad (4.13)$$

e

$$M_{zi}^R = M_{zic}^R \cdot \cos(\omega \cdot t) + M_{zis}^R \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4.14)$$

$$M_{zi}^L = M_{zic}^L \cdot \cos(\omega \cdot t) + M_{zis}^L \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4.15)$$

$$-I_p \cdot \omega \cdot \dot{\theta}_i = -I_p \cdot \omega^2 \cdot (-\theta_{ic} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \theta_{is} \cdot \cos(\omega \cdot t)) \quad (4.16)$$

$$I_t \cdot \ddot{\phi}_i = -I_t \cdot \omega^2 \cdot (\phi_{ic} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \phi_{is} \sin(\omega \cdot t)) \quad (4.17)$$

Reescrevendo as equações 4.8 e 4.9:

$$M_{yic}^R = M_{yic}^L + I_p \cdot \omega^2 \cdot \phi_{is}^L - I_t \cdot \omega^2 \cdot \theta_{ic}^L \quad (4.18)$$

$$M_{yis}^R = M_{yis}^L - I_p \cdot \omega^2 \cdot \phi_{ic}^L - I_t \cdot \omega^2 \cdot \theta_{is}^L \quad (4.19)$$

$$M_{zic}^R = M_{zic}^L - I_p \cdot \omega^2 \cdot \theta_{is}^L - I_t \cdot \omega^2 \cdot \phi_{ic}^L \quad (4.20)$$

$$M_{zis}^R = M_{zis}^L + I_p \cdot \omega^2 \cdot \theta_{ic}^L - I_t \cdot \omega^2 \cdot \phi_{is}^L \quad (4.21)$$

Considerando um movimento síncrono e a equação 2.75, a matriz de transferência para o disco, com efeito giroscópico será obtida acrescentando os termos:

$$\bar{P}_{3,2} = \bar{P}_{7,6} = \bar{P}_{11,10} = \bar{P}_{15,14} = -I_t \cdot \omega^2$$

$$-\bar{P}_{3,14} = \bar{P}_{7,10} = \bar{P}_{11,6} = -\bar{P}_{15,2} = -I_p \cdot \omega^2$$

Para o plano $x - z$, somente, a matriz de transferência de ponto para uma massa concentrada, equação 2.52, torna-se:

$$[P]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (I_p - I_t) \cdot p^2 & 1 & 0 \\ m \cdot p^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Sauer e Wolf, 1989, examinam a influência do efeito giroscópico em um eixo elástico com a massa distribuída, utilizando o método dos elementos finitos, constatando o alargamento da faixa de frequência e a diminuição na amplitude de vibração, conforme o eixo aumenta a rotação.

4.2 Objetivos e Resultados

4.2.1 Análise Experimental

Foi projetada e construída uma bancada experimental para simulação do efeito giroscópico em um eixo rotativo, conforme mostrado na figura 4.3.

O sistema proposto consiste em uma plataforma de aço de 1300 mm x 600 mm de dimensão, isolado sobre uma mesa vibratória. Dois braços, também de aço, estão soldados à base com 400

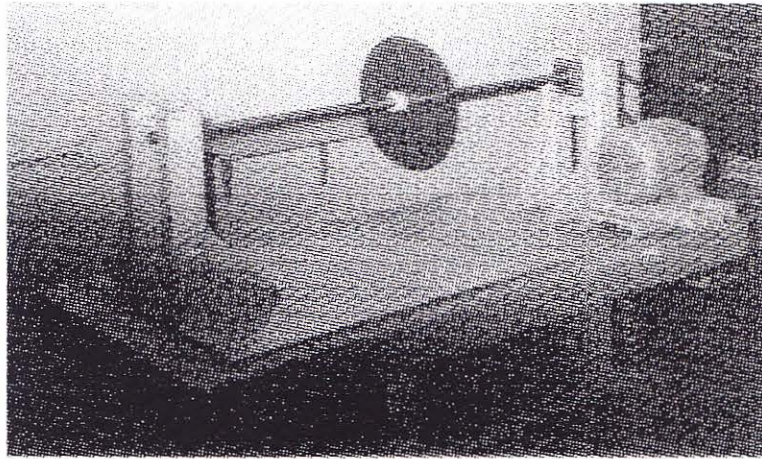


Figura 4.3: Bancada experimental para estudos do efeito giroscópico.

módulo de Young (N/m^2)	2.068×10^{11}
módulo de cisalhamento (N/m^2)	0.790×10^{11}
densidade (kg/m^3)	7850
massa (kg/m^3)	3.978
diâmetro (m)	0.0254
área da seção transversal (m^2)	5.0671×10^{-4}

Tabela 4.1: Dados experimentais do sistema de eixo rotativo analisado.

mm x 200 mm, onde foram parafusados os mancais. O eixo rotativo utilizado é de aço e possui 1309 mm de comprimento e 25,4 mm de diâmetro. Na tabela 4.1 estão descritos suas características. O sistema de transmissão de rotação consiste de um jogo de correias e polias acopladas a um motor de 3450 rpm e 2 cv de potência.

Foram construídos discos de aço para serem posicionados no eixo, de mesma massa, aproximadamente 3,7 Kg, porém de diferentes raios, fornecendo momentos giroscópicos diferentes para a análise.

Os momentos de inércia de massa polar e transversal, para cada um dos dois (2) tipos de discos utilizados estão na tabela 4.2.

Além da variação dos raios dos discos, consideram-se três (3) *layouts* diferentes para as análises experimentais. O eixo isolado, com um (1) disco no centro e com dois discos, conforme a figura 4.4.

disco I	
momento de inércia transversal de massa ($kg.m^2$)	9.10×10^{-3}
momento de inércia polar de massa ($kg.m^2$)	1.82×10^{-2}
disco II	
momento de inércia transversal de massa ($kg.m^2$)	3.68×10^{-3}
momento de inércia polar de massa ($kg.m^2$)	4.80×10^{-3}

Tabela 4.2: Momentos de inércia de massa os discos utilizados.

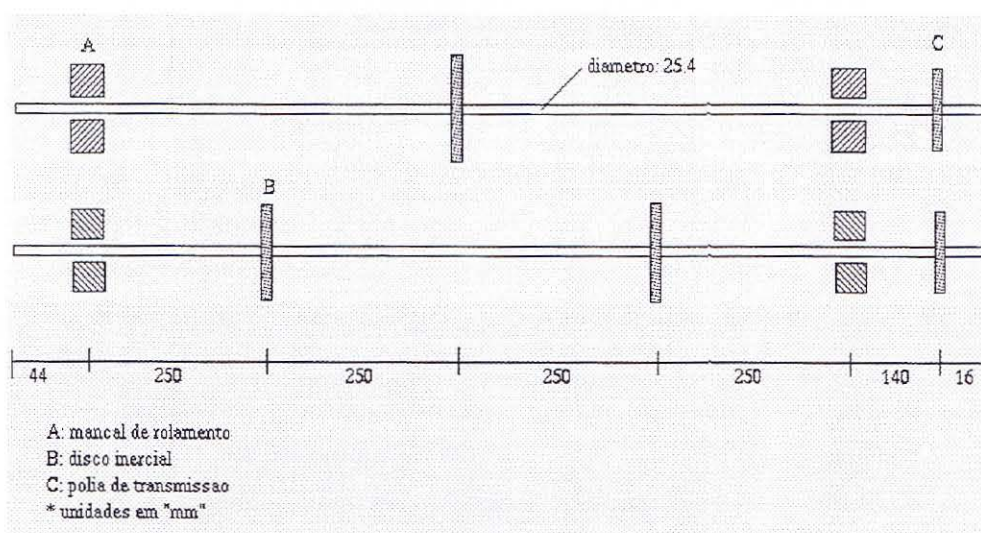


Figura 4.4: Layouts utilizados nas análises de controle passivo do eixo rotativo.

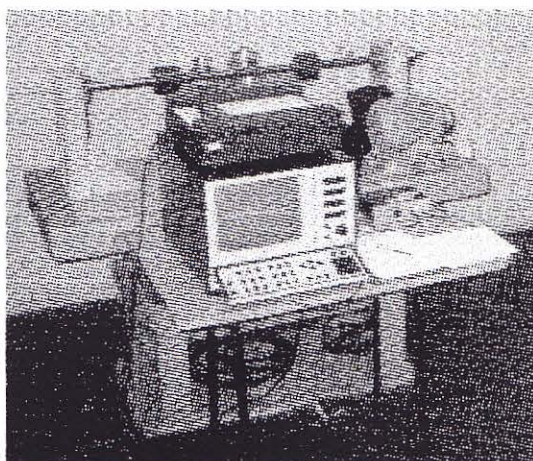


Figura 4.5: Configuração dos equipamentos de aquisição e bancada de testes.

4.2.2 Determinação dos modos de vibração e frequências naturais do eixo com rotação nula

Para aquisição de frequências naturais e modos de vibração, utiliza-se o método de resposta e impulso, segundo a técnica utilizada por Rios, 1994, descrita no Capítulo 3. Dois acelerômetros piezoelétricos, cujas características encontram-se no Apêndice II, são conectados ao eixo e a uma interface, Analisador de Fourier, que adquire e trata os sinais obtidos, conforme a figura 4.5.

Esta montagem experimental permite verificar as faixas de frequências ressonantes e os modos de vibração. Os modos são obtidos através da relação entre os dois canais de medição conectados aos acelerômetros colocados no eixo, o qual é dividido em doze (12) pontos, igualmente espaçados, com um acelerômetro fixo na extremidade e outro variando de posição na estrutura.

Registrando-se, em cada ponto, as frequências, amplitudes e os ângulos de fase fornecidos pelos acelerômetros, através do Analisador de Fourier, obtém-se graficamente os modos de vibração do eixo.

Os valores das frequências naturais, para o eixo sem rotação, estão apresentados na tabela 4.3. Determinaram-se o primeiro e o segundo modos com este método, sendo idênticos aos obtidos

ESTRUTURA	frequências naturais (Hz)		
	primeira	segunda	terceira
eixo	46	163	268
eixo + um disco I	29	170	255
eixo + um disco II	30	158	251
eixo + dois discos I	27	85	245
eixo + dois discos II	31	91	241

Tabela 4.3: Frequências naturais experimentais obtidas para a ESTRUTURA sem rotação.

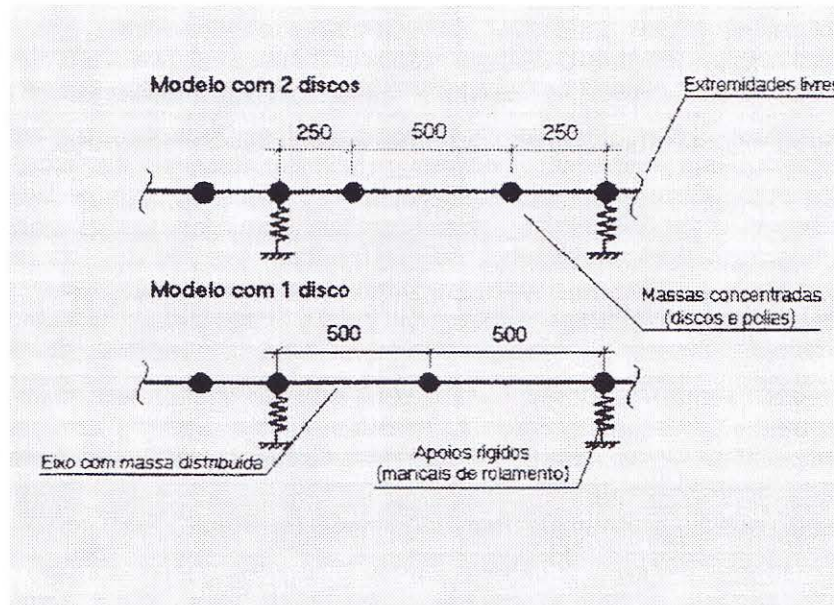


Figura 4.6: Modelagem empregada na simulação numérica do sistema de eixo rotativo.

na análise numérica, apresentados na figura 4.11.

4.2.3 Análise Numérica

A análise numérica é realizada segundo a metodologia descrita no Capítulo 2, a partir do método das matrizes de transferência. A discretização do sistema está apresentada na figura 4.6.

Os elementos utilizados na discretização podem ser encontrados no Apêndice I e estão relacionados a seguir para vibração lateral e torsional:

Vibração lateral:

Elemento 7.3: representa o eixo rotativo. Utiliza a formulação de viga de Timoshenko, ver Meirovitch, 1967, e ainda simula o efeito giroscópico.

Elemento 7.4: representa os discos utilizados no sistema. Inclui as forças giroscópicas. Os discos inerciais são considerados massas concentradas, com momentos de inércia específicos, logo produzindo efeito giroscópico diferente, quando o eixo estiver girando.

Elemento 7.5: esta matriz é utilizada para representar os conjuntos mancais-rolamentos que sustentam o eixo rotativo. Empregou-se uma rigidez linear de 10^9 N/m^2 .

ESTRUTURA	frequências naturais (Hz)	
	primeira	segunda
eixo	628	1897
eixo + um disco I	87	1189
eixo + um disco II	165	1205
eixo + dois discos I	66	161
eixo + dois discos II	127	312

Tabela 4.4: Frequências naturais torsionais dos vários *layouts* do eixo rotativo.

Vibração Torsional:

Elemento 7.13: representa o eixo rotativo.

Elemento 7.15: representa os discos utilizados no sistema. Inclui as forças giroscópicas.

4.2.4 Resultados numéricos - Vibração torsional:

As frequências naturais torsionais para os diferentes *layouts* do eixo rotativo estão apresentados na tabela 4.4.

4.2.5 Resultados numéricos - Vibração lateral:

Entre os resultados importantes fornecidos pelo método numérico estão os diagramas que contém as curvas de frequências de precessão versus rotação do sistema, também conhecidos como diagramas de Campbell, excelentes para visualização de velocidades críticas e atuação do efeito giroscópico.

Nas figuras 4.7 até 4.10 são apresentados os diagramas de Campbell para as estruturas analisadas, onde os diferentes *layouts* do sistema estão sujeitos a rotações de 0 Hz a 300 Hz.

Os modos de vibrações dos deslocamentos internos e forças internas também podem ser obtidos pelo método numérico adotado, fornecendo informações importantes sobre estas grandezas, como a localização dos maiores módulos destas.

Na figura 4.11 apresentam-se os gráficos dos modos de vibração dos deslocamentos translacionais do sistema estudado.

4.3 Um Exemplo de Colapso de Eixo Rotativo com Efeito Giroscópico em Ressonância

A análise experimental realizada, proposta neste capítulo, proporcionou o acompanhamento de um colapso do sistema de eixo rotativo, em seu segundo modo de vibração lateral.

O objetivo deste item é descrever como ocorreu o processo de colapso da estrutura estudada. A figura 4.12 mostra o conjunto eixo rotativo com dois discos I, deformado plasticamente.

As duas primeiras velocidades críticas laterais do eixo rotativo, com este *layout*, são 31 Hz e 96 Hz, conforme está apresentado na figura 4.9.

Logo que o motor é acionado, o eixo começa a girar e acelerar para atingir a rotação nominal do motor de 57.5 Hz ou 3450 rpm. A passagem pelo primeiro modo lateral é verificada visualmente,

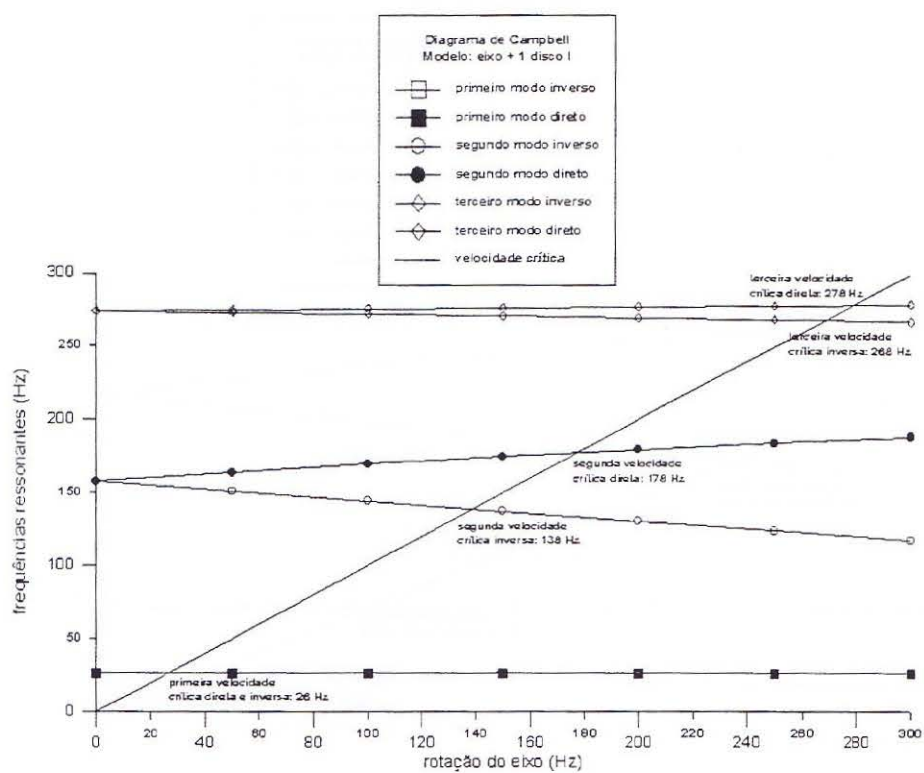


Figura 4.7: Diagrama de Campbell para o eixo com um (1) disco tipo I.

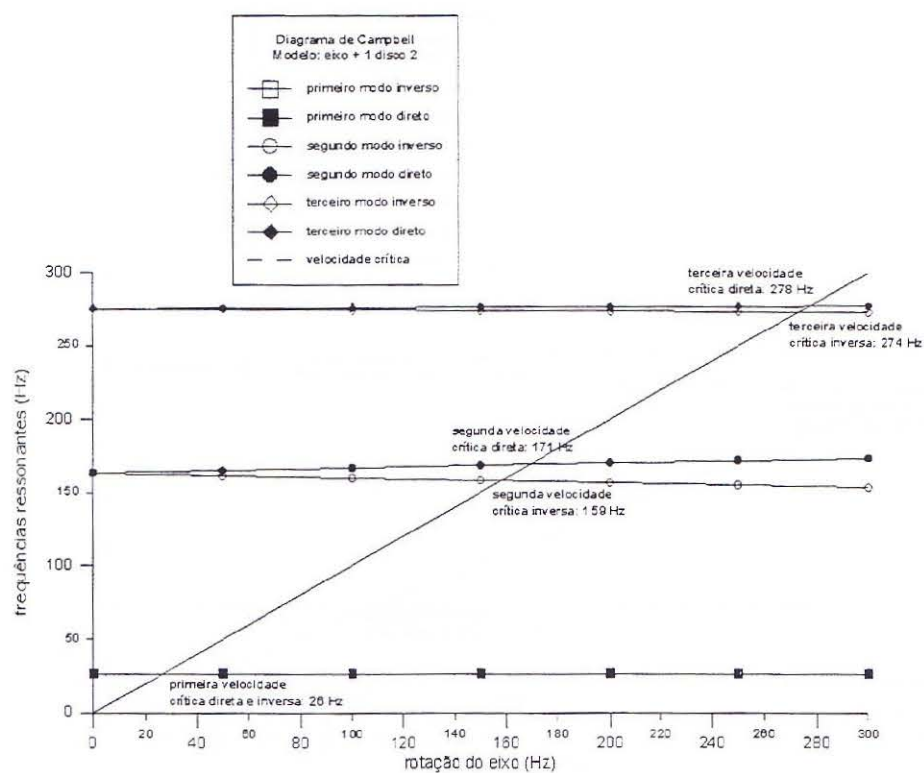


Figura 4.8: Diagrama de Campbell para o eixo com um (1) disco tipo II.

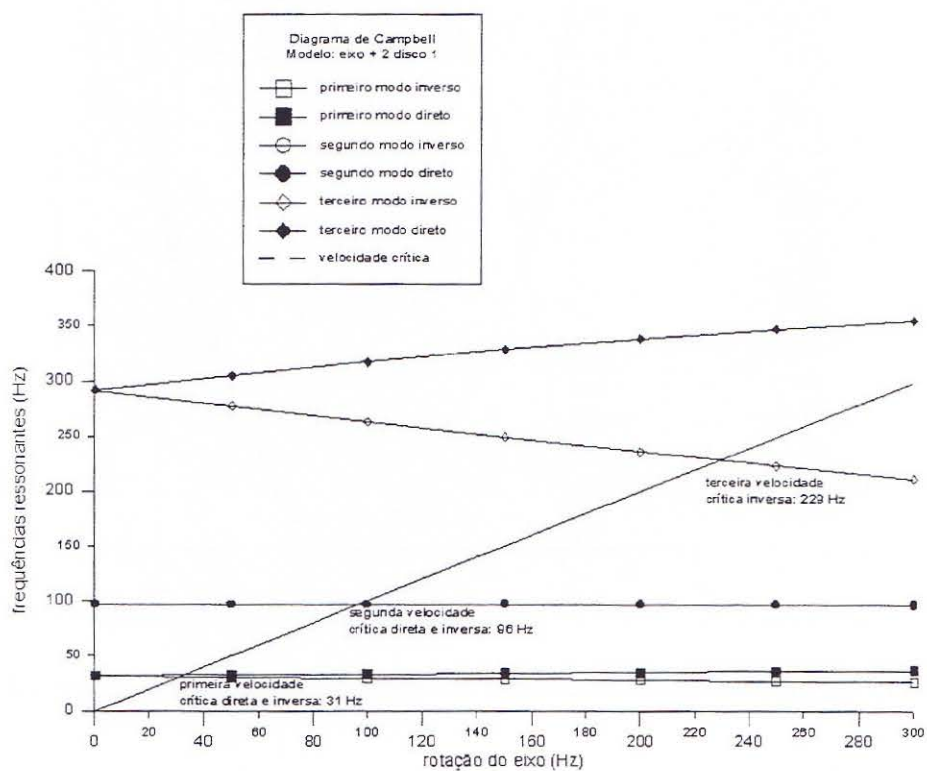


Figura 4.9: Diagrama de Campbell para o eixo com dois (2) discos tipo I.

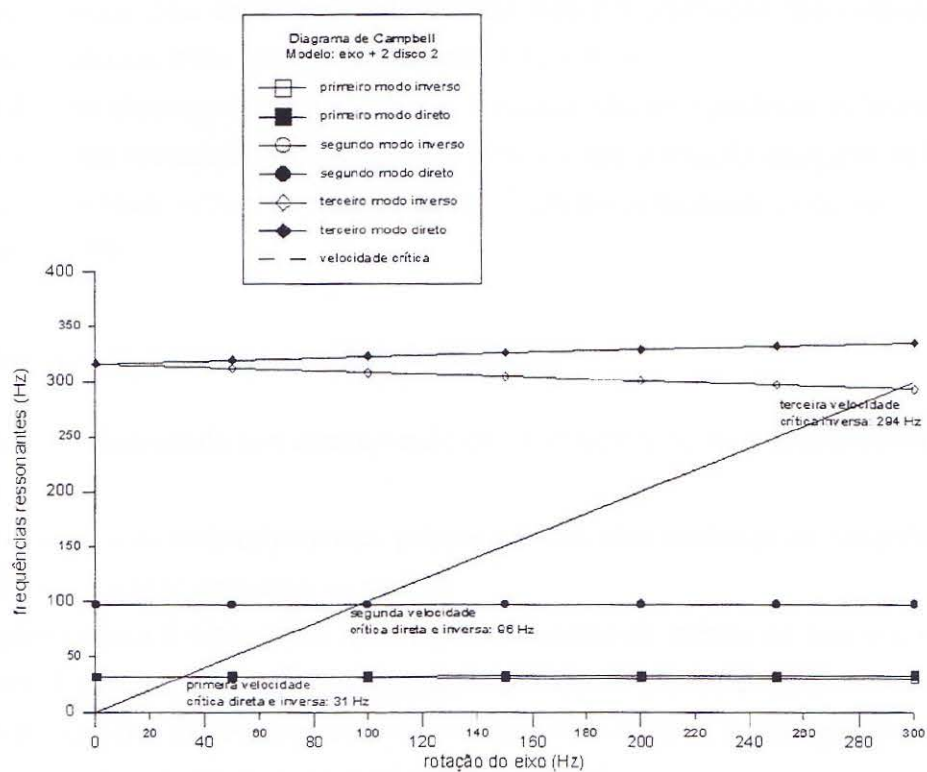


Figura 4.10: Diagrama de Campbell para o eixo com dois (2) discos tipo II.

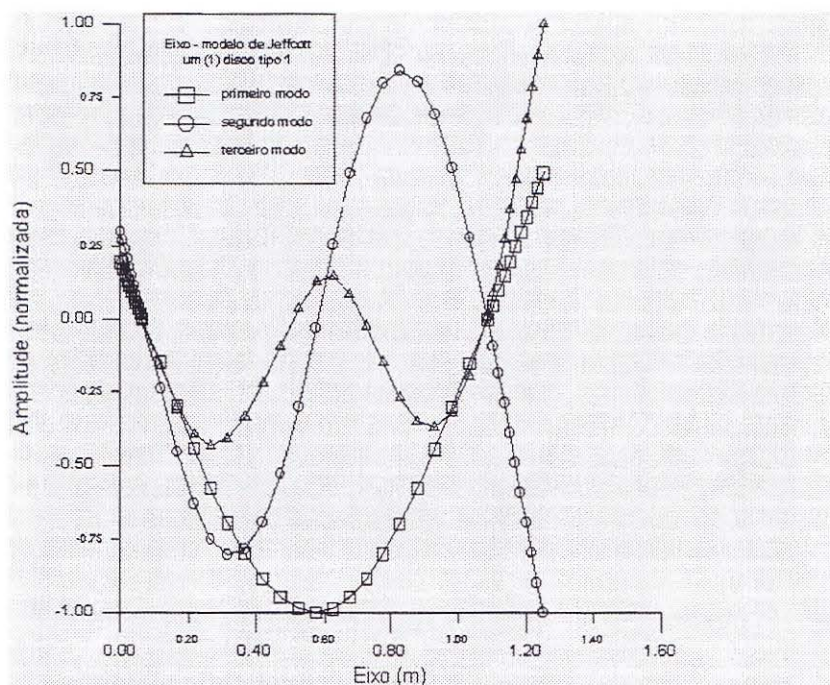


Figura 4.11: Modos de vibração do deslocamento translacional do eixo com um (1) discos tipo 1.

pela movimento de precessão lateral apresentado. Entretanto, o eixo continua acelerando e o movimento de precessão logo cessa. Quando a rotação atinge valores acima de 90 Hz, próximo da segunda velocidade crítica lateral do eixo, a estrutura entra em um movimento de precessão, que caracteriza o segundo modo de vibração lateral, resultando em um processo de colapso em poucos segundos, que provoca uma deformação plástica do eixo e a destruição dos conjuntos mancais-rolamentos, mostrado em mais detalhes nas figuras 4.13 e 4.14.

A conclusão que chegou-se foi que o motor utilizado não teve potência suficiente para fazer o eixo girar com uma aceleração suficiente para permitir que a rotação atingisse valores maiores que a segunda velocidade crítica do eixo rotativo. Trabalho semelhante pode ser encontrado em Millsaps e Reed, 1998.

4.4 Discussão dos Resultados e do Método Aplicado

A metodologia empregada tem demonstrado coerência entre os valores experimentais e numéricos obtidos.

A adição de discos ao sistema provoca, primeiramente, uma mudança nas frequências naturais do sistema, devido à adição de massa ao mesmo.

O efeito giroscópico é dependente da rotação, momento de inércia de massa e inclinação do sistema rotativo. Logo, para obter-se uma alteração de valores críticos do eixo rotativo, o momento de inércia e a posição dos discos devem ser combinadas com o modo de vibração em questão, para assim chegar a um controle passivo mais otimizado possível.

Percebe-se, nos diagramas de Campbell, a bifurcação das frequências ressonantes laterais, a medida que a rotação aumenta, devido à presença do efeito giroscópico. Quanto maior o raio de

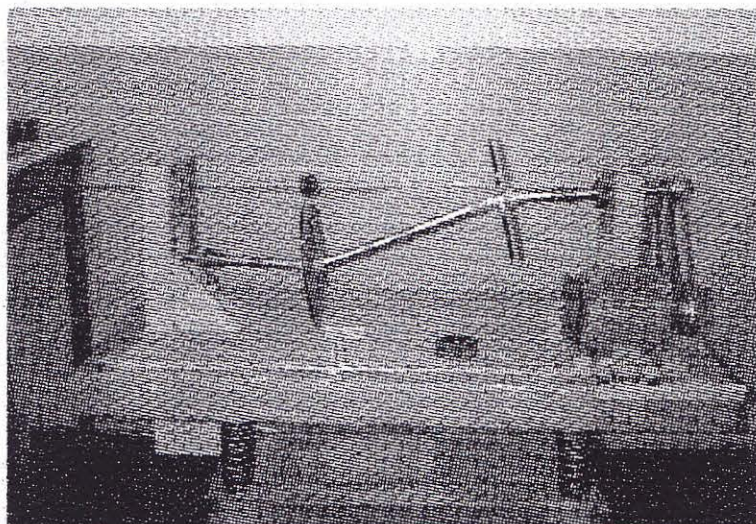


Figura 4.12: Conjunto eixo rotativo com dois discos I, deformado plasticamente.

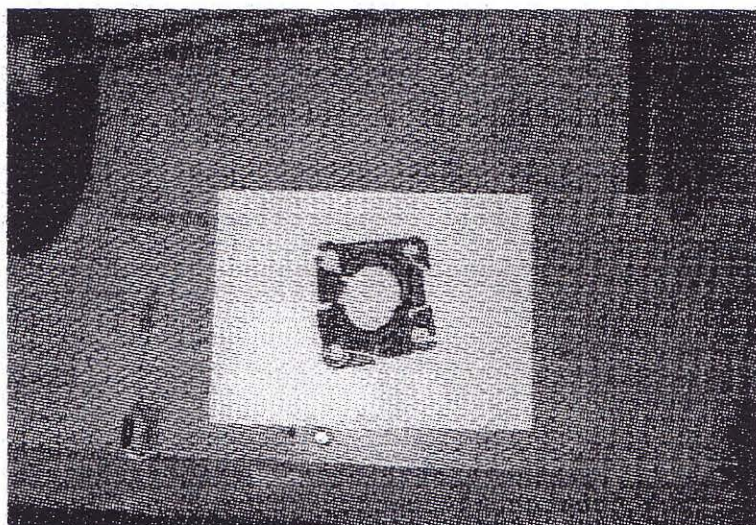


Figura 4.13: Conjunto mancal-rolamento destruído.

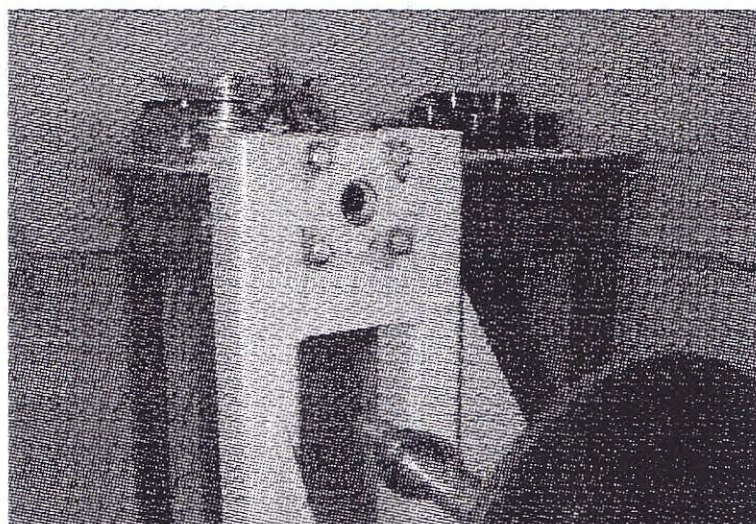


Figura 4.14: Base de fixação do conjunto mancal-rolamento.

giração dos discos, maior será a bifurcação das frequências no diagrama de Campbell. O *layout* com um disco afeta o segundo e o terceiro modos e com dois discos afeta o primeiro e terceiro modos, devido a forma destes modos ressonantes.

O fenômeno da bifurcação da frequência ressonante ocorre devido a existência de precessões direta, mesmo sentido de rotação que o eixo, e inversa, sentido oposto da rotação do eixo. As figuras 4.7 à 4.10 mostram que as precessões inversas ocorrem antes das precessões diretas.

No Capítulo 6, é apresentado um tópico onde discute-se o problema da velocidade crítica, sendo mostrado graficamente os movimentos de precessão direto e inverso nas figuras 6.5, 6.4, 6.7 e 6.6. Analisando as formas de precessão direta e inversa, percebe-se que a última é mais nociva ao sistema rotativo, pois ao contrário da precessão direta, as tensões existentes trocam de sinal ao longo de uma rotação, evidenciando um processo de fadiga. Entretanto as amplitudes da precessão inversa são menores, compensando.

A aceleração com que a rotação aumenta, ao ultrapassar as velocidades críticas, é uma característica importante a ser considerada em eixos rotativos onde ocorre este problema. A análise experimental demonstrou que quanto maior os momentos de inércia de massa envolvidos no sistema rotativo, tanto mais acelerado o sistema deve ser ao ultrapassar as faixas operacionais de velocidade crítica, favorecendo assim a segurança estrutural do eixo rotativo.

Os modos de vibração torsionais tiveram suas frequências ressonantes sensivelmente alteradas devido ao momento de inércia de massa polar elevado introduzido pelos discos adicionados ao sistema. Tais modos não foram sentidos no experimento, pois a única fonte de excitação presente era devido ao desbalanceamento do conjunto eixo-discos.

Até a rotação de 300 Hz nenhum dos *layouts* apresentou valores na faixa de instabilidade.

5 VIBRAÇÕES EM SEMI-EIXOS HOMOCINÉTICOS

A redução de ruídos e vibrações é um tema atual na pesquisa e desenvolvimento na indústria automobilística, pois são critérios importantes na avaliação do projeto e construção de um automóvel.

O conjunto semi-eixo homocinético é um dos componentes mecânicos que pode apresentar características dinâmicas indesejáveis durante o funcionamento do veículo. Com o objetivo de analisar estas características, Kniest, 1994 e Coutinho, 1994, realizaram estudos numéricos e experimentais em semi-eixos homocinéticos.

Coutinho, 1994, faz uma introdução aos conceitos e características básicas de um semi-eixo homocinético, analisando os parâmetros que influenciam no comportamento dinâmico do sistema. O método das matrizes de transferência é utilizado para simular o funcionamento do semi-eixo homocinético, utilizando uma proposta de modelo matemático, comparando as respostas obtidas com os resultados experimentais obtidos por Kniest, 1994.

A contribuição deste capítulo para o estudo de semi-eixos homocinéticos é propor um estudo numérico, com a utilização de matrizes de transferência, no domínio do tempo, destacando a influência das vibrações paramétricas do comprimento do semi-eixo homocinético, simultaneamente com os ângulos de funcionamento das juntas homocinéticas.

Visando simplificar a análise proposta, os resultados obtidos são referentes a um semi-eixo homocinético de um veículo de tração dianteira com motor 1.6, 4 cilindros, longitudinal. Este sistema foi estudado por Coutinho, 1994, facilitando a comparação com os resultados obtidos neste capítulo.

5.1 Conceitos Básicos de um Semi-Eixo e Junta Homocinética

Em um automóvel de tração dianteira, a transmissão de potência do motor até as rodas dianteiras é realizada pelo conjunto embreagem, caixa de câmbio, diferencial e semi-eixos homocinéticos. As funções de um semi-eixo homocinético são de transmitir potência mecânica do diferencial até as rodas e absorver todos os movimentos relativos entre estas e o diferencial, o que é obtido através dos movimentos angulares e axiais das juntas homocinéticas. Uma introdução aos conceitos básicos de um semi-eixo homocinético pode ser encontrada em Coutinho, 1994 e Kniest, 1994.

5.1.1 Fontes de Excitação em um Veículo

É comum o estudo de vibrações em sistemas mecânicos segundo as fontes de excitação que as originam. Em um veículo automotor existem múltiplas fontes de vibração, que são classificadas em dois grupos: fontes internas e externas. As fontes internas originam-se dos componentes sob movimento alternativo e rotação, incluindo o conjunto formado pelas rodas e pneus, transmissão e motor. As fontes externas são as irregularidades do solo e as de origem aerodinâmicas.

O semi-eixo homocinético é um dos possíveis caminhos de transmissão das vibrações prove-

rotação do motor (rpm)	<i>firing</i> (Hz)	velocidade do carro (km/h)		
		marcha 3	marcha 4	marcha 5
2000	67	42	62	80
3000 - (50 Hz)	100	63	90	112
4000	133	83	120	144
5000	166	103	150	176
6000 - (100 Hz)	200	125	180	200

Tabela 5.1: Relação entre rotação e velocidade do veículo.

nientes do motor até o interior do veículo. O principal componente desta vibração é o movimento transversal do semi-eixo, originado pela força secundária rotativa de desbalanceamento, que excita a junta deslizante conectada ao diferencial. Quando a frequência de excitação proveniente do motor coincide com a frequência natural transversal do semi-eixo, a carga radial de vibração transmitida para a carroceria, através da junta fixa, aumenta repentinamente, devido à ressonância, resultando num incremento do nível de vibração e de ruído no interior do veículo.

5.1.2 Fontes Internas

Dentre as fontes de excitação interna, destaca-se aquela proveniente do movimento alternativo de desbalanceamento do motor, que será estudada e aplicada neste trabalho.

Conforme Shigley, 1969, em um motor de quatro tempos e quatro cilindros em linha, existe uma força alternativa secundária de desbalanceamento ou *firing*, atuando na mesma direção dos eixos dos cilindros, dada pela equação:

$$F_{asec} = m_a \cdot \frac{r^2}{L} \cdot \omega^2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \quad (5.1)$$

Onde:

F_{asec} : força alternativa secundária de desbalanceamento ou *firing*

m_a : massa dos componentes sob movimento alternativo

r : raio da manivela

L : comprimento da biela

ω : frequência de rotação do motor

α : ângulo da posição da manivela em relação ao eixo do cilindro

Esta força de desbalanço induz uma vibração do bloco na direção do eixo dos cilindros com uma frequência correspondente ao dobro da frequência de rotação do motor. Na tabela 5.1 são mostrados os valores desta força (f_{asec}) para o sistema analisado.

Conforme Kniest, 1994, os valores máximos de torque e potência para um motor quatro cilindros ocorrem numa faixa de 3000 rpm (50 Hz) a 6000 rpm (100 Hz), induzindo o motorista a utilizar o motor nesta faixa de rotações. Portanto, o *firing* ocorre principalmente numa faixa de 100 Hz a 200 Hz.

5.1.3 Fontes Externas

O movimento de um automóvel em uma pista irregular provoca um movimento de oscilação no sistema de suspensão, sendo compensado pelo movimento angular das juntas homocinéticas fixas e deslizantes e pela variação de comprimento do semi-eixo, através de um deslizamento axial, permitido na junta deslizante.

Coutinho, 1994, analisou a influência da variação do comprimento do semi-eixo homocinético e dos ângulos das juntas homocinéticas na primeira frequência natural de flexão, uma vez que as demais frequências de ressonância de flexão e de torção encontram-se fora da faixa de operação do veículo.

5.2 Os Modelos Físico e Matemático Propostos

O modelo físico analisado está na figura 5.1, onde são mostradas duas diferentes perspectivas do conjunto de transmissão para um carro de tração dianteira.

As juntas homocinéticas permitem, por construção, a transmissão de torque do eixo motriz ao eixo movido sem variações de velocidade angular, independentemente da variação do ângulo entre os eixos. A evolução do projeto, permitiu o deslizamento axial, uma característica fundamental para absorver o movimento de sobe e desce das rodas em função das irregularidades do piso, ou seja, a capacidade do semi-eixo de aumentar ou diminuir o seu comprimento operacional.

A configuração básica em veículos com tração dianteira apresenta o uso de dois semi-eixos homocinéticos, um para cada roda motriz. Cada um destes semi-eixos possui duas juntas homocinéticas. No lado da roda, conectada ao cubo da roda, é instalada uma junta homocinética chamada fixa, enquanto no lado da transmissão localiza-se a junta homocinética deslizante, acoplada ao diferencial, ambas unidas por um eixo de interconecção.

Na figura 5.2, mostra-se em detalhe o conjunto semi-eixo e juntas homocinéticas, que têm a concepção básica de uma rótula.

As juntas homocinéticas fixas são montadas no lado da roda motriz dos veículos de tração dianteira e podem suportar esforços axiais, possuindo a capacidade de articulação de até 45° .

Além da capacidade de articulação de até 22° , a junta deslizante possui uma liberdade de deslocamento axial de até 50 mm.

O modelo matemático proposto para representar o comportamento físico do conjunto semi-eixo homocinético é semelhante ao utilizado por Coutinho, 1994, com algumas modificações para permitir a análise no tempo da variação de comprimento do semi-eixo em função do movimento da suspensão. A seguir, descrevem-se os elementos propostos para representar o modelo físico em funcionamento e suas peculiaridades.

Coutinho, 1994, obteve resultados com o modelo da figura 5.3 que lhe permitiram concluir que as vibrações da suspensão e do conjunto motor-transmissão-coxins não interferem, na prática, na obtenção da frequência natural do semi-eixo, principalmente considerando-se a primeira frequência lateral, podendo-se analisar o semi-eixo como um sistema isolado. A partir desta conclusão, o

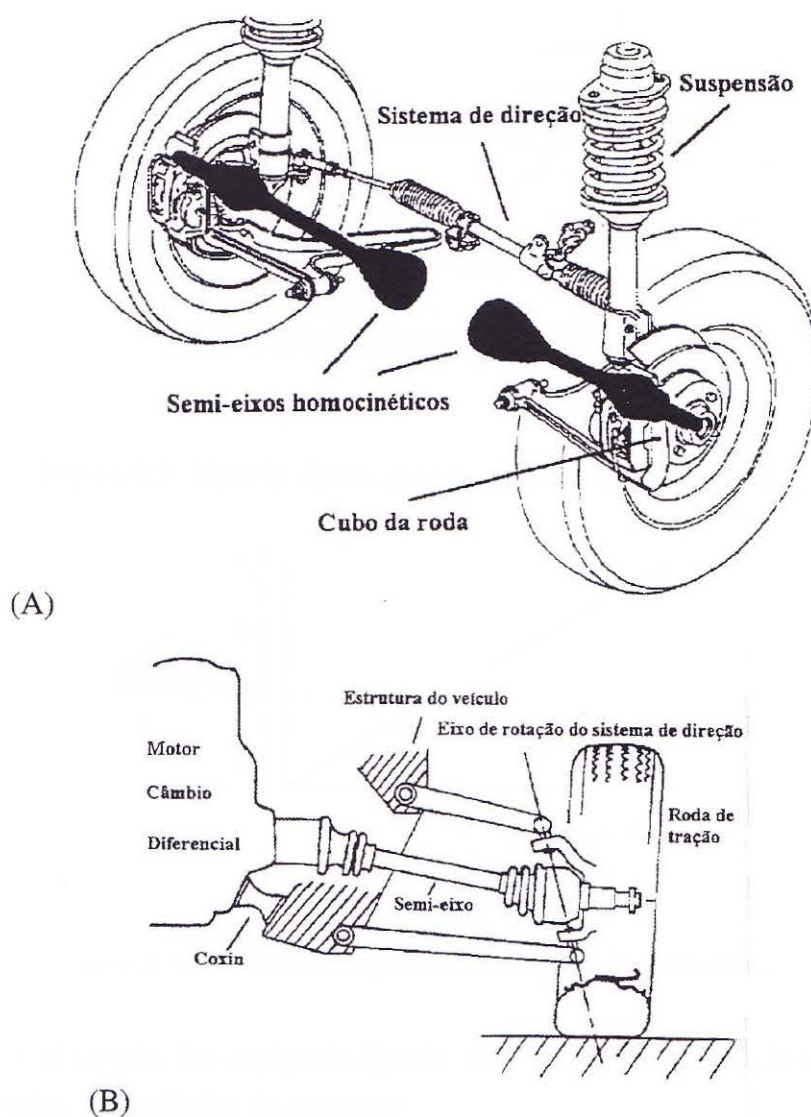


Figura 5.1: A) Vista espacial da aplicação de um par de semi-eixos homocinéticos e B) vista frontal esquemática da aplicação de um semi-eixo homocinético na transmissão dianteira de um veículo automotor.

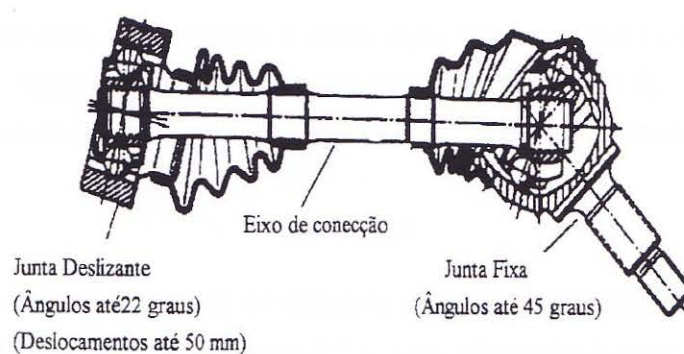


Figura 5.2: Representação de um semi-eixo homocinético típico e sua nomenclatura.

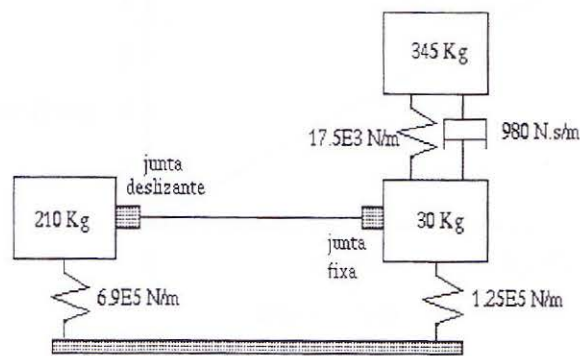


Figura 5.3: Modelo de um semi-eixo montado no veículo.

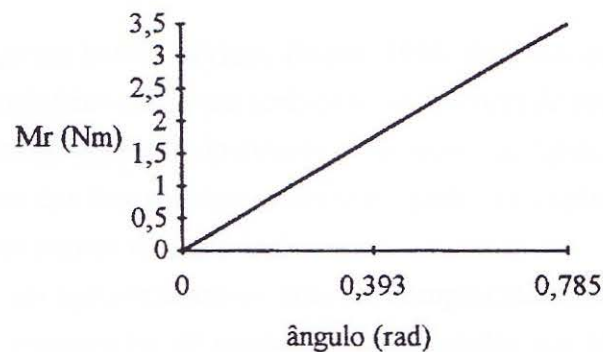


Figura 5.4: Gráfico do momento resistente da junta fixa.

sistema que deseja-se estudar fica composto apenas pelo semi-eixo e juntas homocinéticas fixa e deslizante, respeitadas as condições de contorno.

A principal dificuldade no modelamento do semi-eixo homocinético é representar o comportamento dinâmico das juntas homocinéticas. Utiliza-se um elemento tipo rótula elástica, elemento 7.6 do Apêndice I, onde as características dinâmicas das juntas homocinéticas são representadas por um sistema massa-mola com massa genérica m , amortecimento viscoso c e uma rigidez à flexão k_R .

A rigidez k_R , representa a resistência à articulação da junta proveniente do atrito entre os componentes internos, originando um momento resistente à articulação M_r . Este momento aparece quando a junta é articulada de um ângulo θ , e seu valor é dado pela equação 5.2:

$$M_r = k_R \cdot \theta \quad (5.2)$$

De acordo com a empresa fabricante do conjunto semi-eixo homocinético estudado, o valor de M_r é dado, para a junta fixa, segundo a figura 5.4 e, para a junta deslizante, conforme a figura 5.5.

O momento resistente da articulação, devido à flexão das mangas de borracha, é outra possível fonte de resistência à articulação das juntas homocinéticas. Coutinho, 1994, obteve um valor de 0.8 N.m para um ângulo de 20° , e, por ser desprezível, quando comparado com o momento

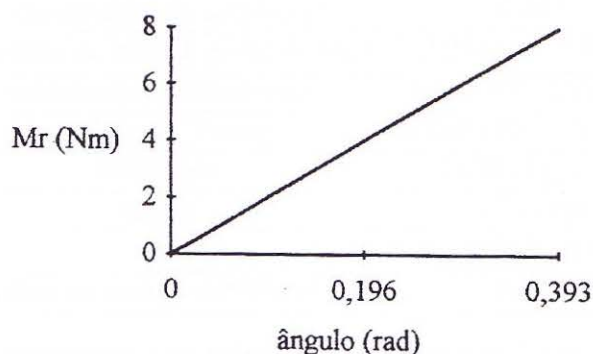


Figura 5.5: Gráfico do momento resistente para a junta deslizante.

resistente de articulação das juntas proveniente das forças de atrito dos componentes internos, foi desconsiderado.

Ainda em relação às juntas homocinéticas, Kniest, 1994, descreve que a aplicação do torque no conjunto semi-eixo homocinético causa um acréscimo nos valores de suas frequências ressonantes. Sugere que o torque pode ser representado através do aumento de rigidez nas articulações, ou seja, a modificação dos valores das frequências ressonantes pode ser explicada pela modificação das condições de contorno nos pontos de articulação.

O eixo de conexão, não apresenta maior grau de complexidade, sendo representado por um modelo de parâmetros concentrados de massas puntuais unidas por barras elásticas sem massa, Apêndice I, elementos 7.1 e 7.4. O eixo de conexão pode variar seu comprimento, neste trabalho, segundo uma função harmônica. A matriz de transferência utilizada para descrever este comportamento será identificada a seguir.

5.3 Resultados

Neste item são analisadas as frequências ressonantes de torção e flexão. São realizadas comparações com os resultados obtidos por Kniest, 1994 e Coutinho, 1994.

5.3.1 Dados de Entrada

Na tabela 5.2 estão relacionados as propriedades mecânicas e os valores dimensionais utilizados na discretização do conjunto semi-eixo homocinético.

5.3.2 Vibração Angular ou Torsional

Uma das propostas iniciais de estudo do conjunto semi-eixo homocinético era a necessidade de acoplamento dos graus de liberdade angulares e translacionais. Entretanto, a continuação da pesquisa demonstrou que o modelo proposto por Kniest, 1994, de transformar o torque aplicado no semi-eixo em uma alteração no momento resistente das juntas homocinéticas, é adequado à situação, o que levou este pesquisador a não acoplar as matrizes de transferência utilizadas. Outra

comprimento do semi-eixo	0.483
momento de inércia polar de área	$3.256 \times 10^{-8} \text{ (m}^4\text{)}$
módulo de cisalhamento	$8.04 \times 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)}$
módulo de Young	$2.068 \times 10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)}$
densidade	$7850 \text{ (kg/m}^3\text{)}$
massa	1.71 (kg)
raio	0.012 (m)
amortecimento estrutural	0.001

Tabela 5.2: Propriedades mecânicas e os valores dimensionais utilizados na discretização do conjunto semi-eixo homocinético.

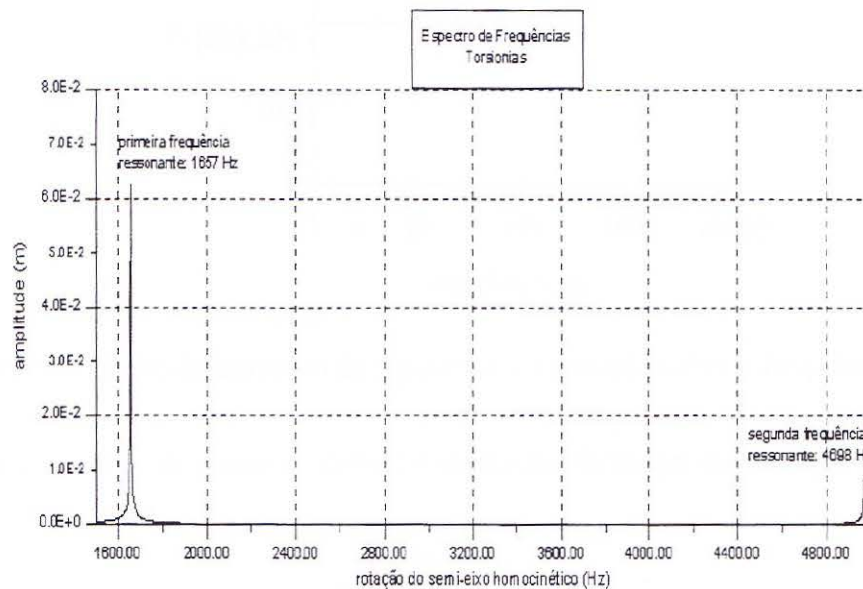


Figura 5.6: A primeira e a segunda frequências ressonantes do modo torsional do semi-eixo homocinético.

questão levantada foi determinar em que faixa de operação atuavam as frequências ressonantes torsionais, o que é abordado a seguir.

O modelo adotado considera os elementos 7.14 e 7.15 do Apêndice I. A análise é realizada sem variação do comprimento do semi-eixo. O resultado obtido é mostrado na figura 5.6 e apresenta as duas primeiras frequências ressonantes de torção: 1657 Hz e 4698 Hz. As frequências obtidas encontram-se distantes da faixa de operação do veículo e das fontes de excitação, sendo descartadas neste trabalho.

Foram utilizados 101 elementos na discretização do sistema, o ponto de aplicação de carga e de medição de deslocamento angular foi o ponto central do semi-eixo. As amplitudes que aparecem na figura 5.6 são devido à um torque de 1 N.m.

5.3.3 Vibração por Flexão ou Transversal

Kniest, 1994 e Coutinho, 1994, obtiveram as frequências naturais laterais do conjunto semi-eixo homocinético estudado e ainda as possíveis relações destas com a variação de comprimento e

torque (N.m)	0	20	40	60	80	100	120	140
frequência (Hz)	206.7	227.4	241.7	247.9	249.3	251.3	253.9	256.5
torque (N.m)	160							
frequência (Hz)	261.1	265.0	267.1	271.1	271.9			

Tabela 5.3: Resultados experimentais obtidos por Kniest, 1994, para alteração de frequências naturais devido à aplicação de torque.

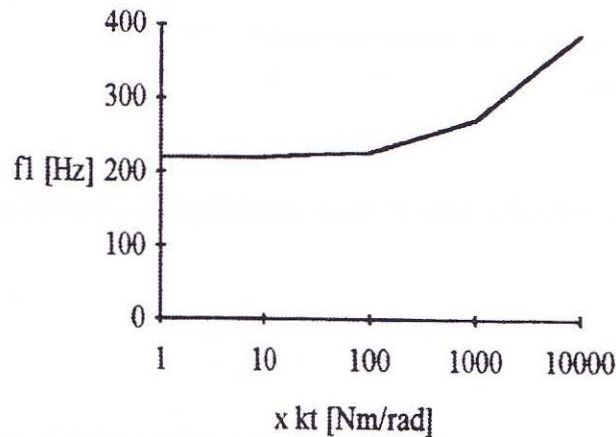


Figura 5.7: Efeito do aumento da rigidez de articulação sobre a frequência natural.

mudança nas condições de contorno devido a aplicação de torque ou variação da posição angular das juntas.

5.3.4 Variação da Frequência Natural devido à Aplicação de Torque

Kniest, 1994, obteve experimentalmente resultados que mostram a variação positiva, aumento de valor, da primeira frequência natural transversal com o aumento do torque, como mostra a tabela 5.3. Observa-se que a frequência natural aumenta em até 28%.

Estes resultados foram confirmados numericamente por Coutinho, 1994, que obteve o gráfico da figura 5.7, relacionando o torque aplicado ao semi-eixo e o crescimento da primeira frequência natural, permitindo concluir que a alteração da rigidez das juntas, devido ao fato de exclusivamente possuir um movimento angular, pode ser desconsiderado.

Então, a hipótese sugerida por Kniest, 1994, será adotada sem maiores problemas nas simulações realizadas neste capítulo.

5.3.5 Variação da Frequência Natural devido ao Movimento Axial da Junta Deslizante

A junta deslizante possui a propriedade de acomodar os movimentos relativos entre as rodas e o diferencial, devido aos movimentos de suspensão, por isso a mesma possibilita um deslizamento axial do eixo de conexão. Coutinho, 1994, a fim de avaliar a influência do aumento do comprimento total do semi-eixo na primeira frequência ressonante de flexão, realizou uma análise numérica do sistema e obteve a figura 5.8, onde observa-se um aumento de 6.5% para uma aumento de

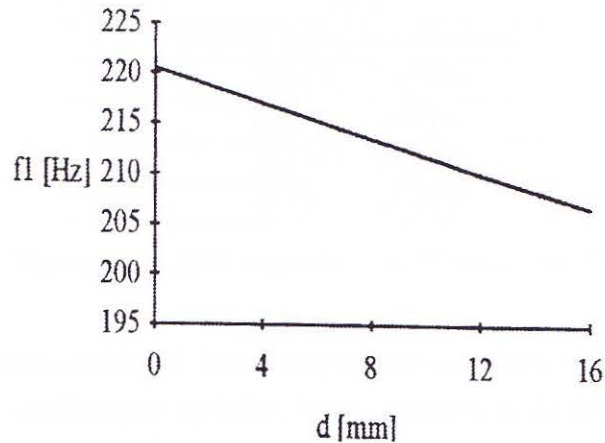


Figura 5.8: Efeito do aumento do comprimento total do semi-eixo na primeira frequência natural de flexão.

comprimento de 16mm.

5.3.6 Vibração Transversal Forçada com Variação Paramétrica

O trabalho de Coutinho, 1994, ao considerar a alteração da primeira frequência natural devido à variação do comprimento do semi-eixo, o fez de forma estática, isto é, para cada comprimento fixo é investigada a frequência ressonante resultante.

A proposta deste item é analisar a influência da variação no tempo do comprimento do semi-eixo, em uma determinada frequência de variação, que irá depender do movimento da suspensão, e a relação desta variação com a força alternativa secundária de desbalanceamento ou *firing* e, ainda, com o percentual de variação do comprimento, visando aproximar a análise do processo real.

Cartmell, 1990, explicita que um sistema com excitação externa e variação paramétrica temporal é um problema complexo se não houver uma relação entre as frequências ocorrentes destas, justificando um tratamento numérico.

Antes de iniciar a análise, convém estabelecer os parâmetros que serão utilizados.

Como explicitado no início deste capítulo, o conjunto semi-eixo homocinético estudado possui um comprimento de 483 mm e sua junta homocinética deslizante permite um deslocamento angular de até 22.5° . Uma análise trigonométrica fornece, então, que para o pneu do automóvel permanecer em sua posição, o semi-eixo deve aumentar cerca de 8% seu comprimento, para um ângulo máximo das juntas homocinéticas de 22.5° .

Segundo Gillespie, 1992, é razoável considerar-se a existência de oscilações nas pistas de tráfego entre 0 e 15 Hz, sendo, portanto, esta a faixa de frequência de variação utilizada para o movimento da suspensão, e, então, para a variação do comprimento do semi-eixo.

As matrizes de transferência utilizadas para os elementos propostos podem ser encontrados no Capítulo 2, nas matrizes 2.106 e 2.102.

Os resultados obtidos numericamente com o método das matrizes de transferência, juntamente com os elementos propostos, são mostrados nas figuras 5.9 à 5.20 e discutidos a seguir.

PCV	ZFR
0%	240 Hz (frequência natural)
1%	236 Hz - 240 Hz
3%	230 Hz - 240 Hz
5%	222 Hz - 242 Hz
8%	212 Hz - 243 Hz

Tabela 5.4: Variação da ZFR segundo o PCV, para uma FVC de 1 Hz.

A análise dos resultados obtidos é feita comparando os sinais nos domínios do tempo e da frequência em função dos parâmetros variados, isto é, frequência do firing, frequência de variação paramétrica do comprimento e o percentual do comprimento variado.

Simularam-se aplicações de frequências de *firing* de 100 Hz, 200 Hz e 240 Hz, percentual de comprimento variado de 0 %, 1 %, 3 %, 5 % e 8 % com uma frequência de variação deste comprimento de 1 Hz, 5 Hz, 10 Hz e 15 Hz.

Não havendo variação de comprimento, os espectros obtidos demonstram a existência das frequências de excitação e primeira de ressonância de maneira clássica, confirmando a validade do algoritmo, que utiliza o método matrizes de transferência desenvolvido para análise no domínio do tempo, uma vez que fornece um resultado próximo ao obtido pelo mesmo método, porém no domínio da frequência, ver tabela 5.3 para um torque aplicado de 40 N.m. A primeira frequência natural lateral encontrada foi de 240 Hz, estando as demais frequências ressonantes fora da faixa de operação do conjunto semi-eixo homocinético.

A figura 5.9 mostra as respostas em frequência e no tempo do semi-eixo homocinético em estudo, acoplado a um motor com 50 Hz (3000 rpm) de rotação, 100 Hz de *firing*, variando seu comprimento de 0% a 8%, com uma frequência de variação de comprimento (FVC) de 1 Hz. O percentual de comprimento variado (PCV), no tempo, gera uma *zona de frequências ressonantes (ZFR)*, que será tanto mais larga, quanto maior for o PCV, como está explicitado na tabela 5.4:

No caso da figura 5.9, como a frequência de *firing* não atingiu nenhuma ZFR, o semi-eixo homocinético não apresenta amplitudes maiores.

Ainda considerando uma FVC de 1 Hz, são apresentados os gráficos das figuras 5.10 e 5.11, onde estão atuando frequências de *firing* de 200 Hz e 240 Hz, respectivamente.

Na figura 5.10, verifica-se que as ZFR são semelhantes às da figura 5.9. A proximidade entre as frequências de *firing* e ressonante gera um aumento das amplitudes no espectro de frequências e até um fenômeno de batimento, como mostra o sinal no tempo. O problema do batimento aumenta com o PCV.

A figura 5.11 mostra um semi-eixo homocinético em ressonância para um PCV de 0%. O sinal no tempo indica que um aumento no PCV possibilita a estabilização do sinal, em um determinado tempo inicial, desestabilizando após.

Seguindo a mesma abordagem anterior, nas figuras 5.12, 5.13 e 5.14, tem-se situações onde existem frequências de *firing* de 100 Hz, 200 Hz e 240 Hz, respectivamente, com uma FVC de 5 Hz.

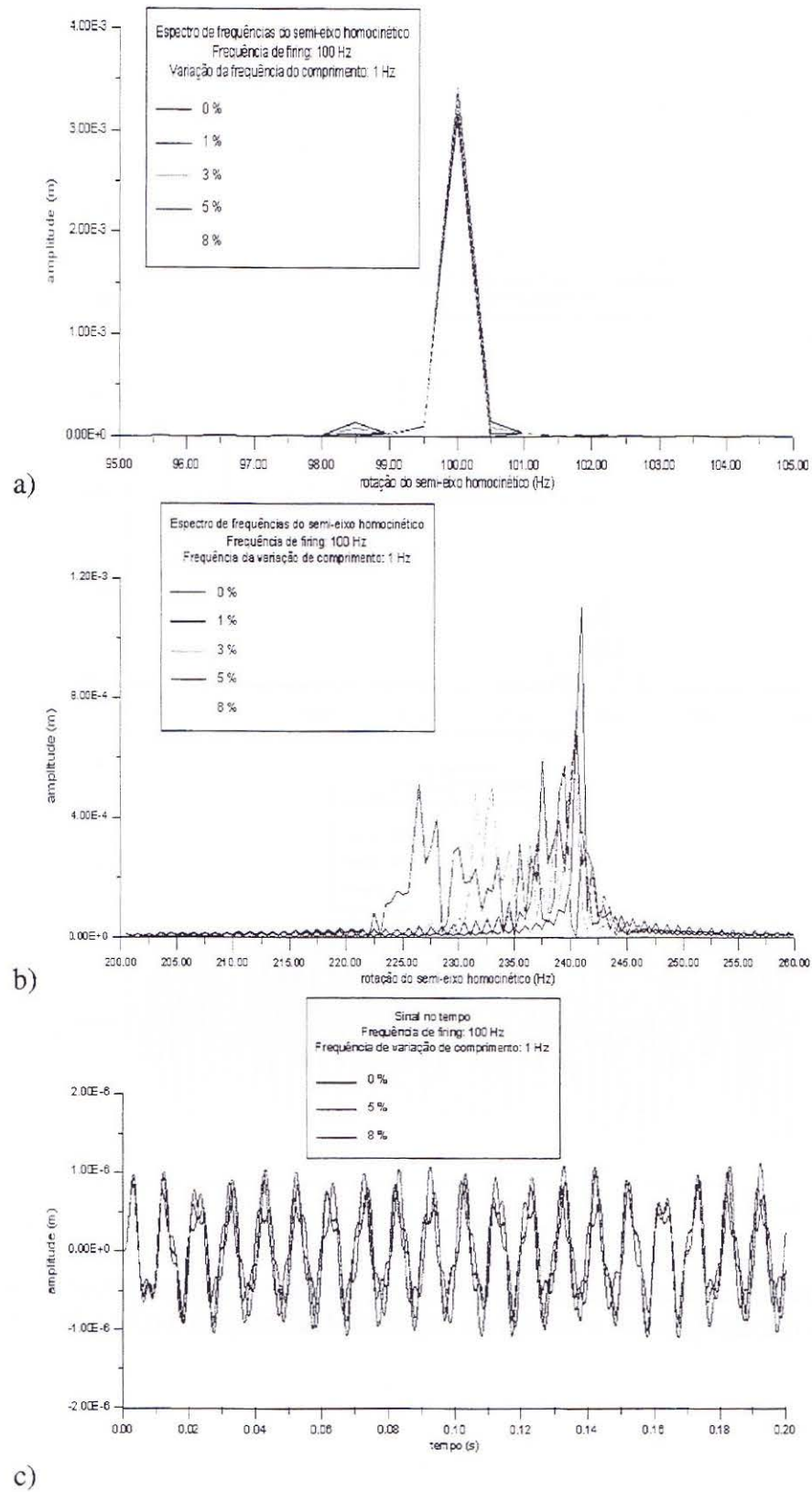


Figura 5.9: (a) e (b), espectros de frequências e (c), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(100.2\pi t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 1 Hz.

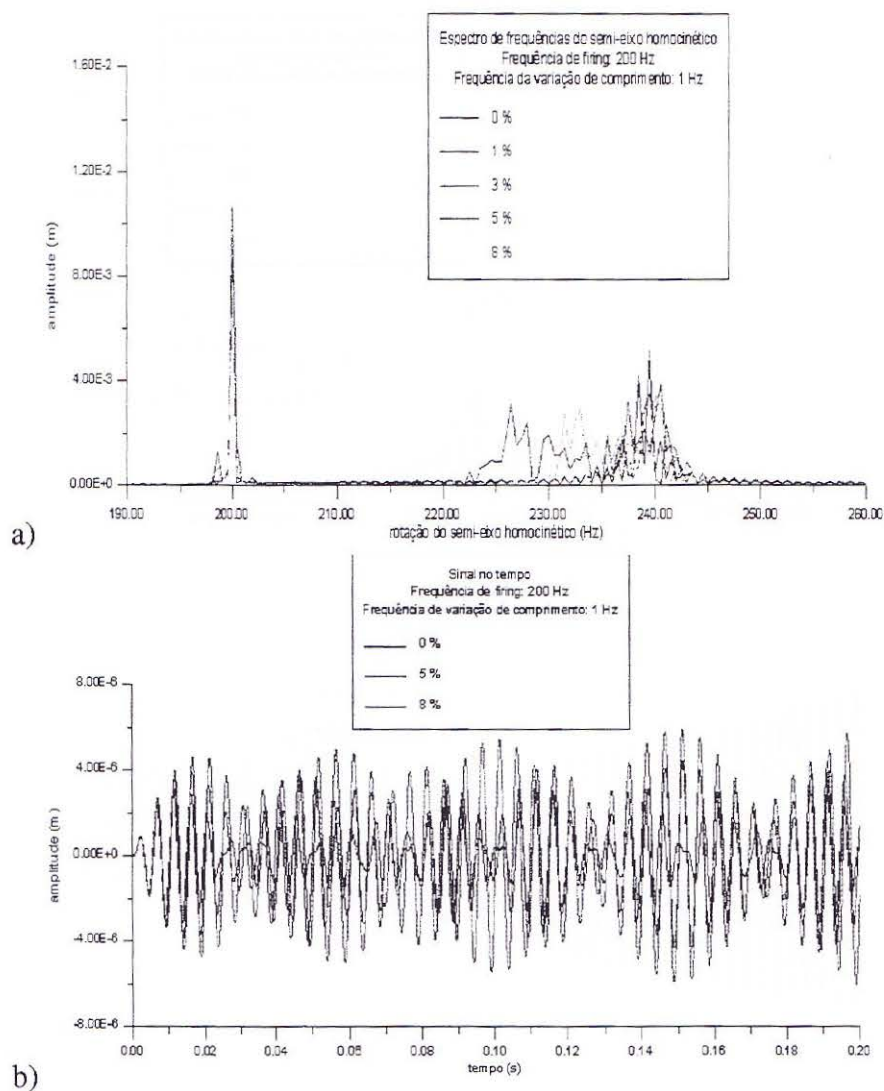


Figura 5.10: (a), espectro de frequências e (b), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(200.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 1 Hz.

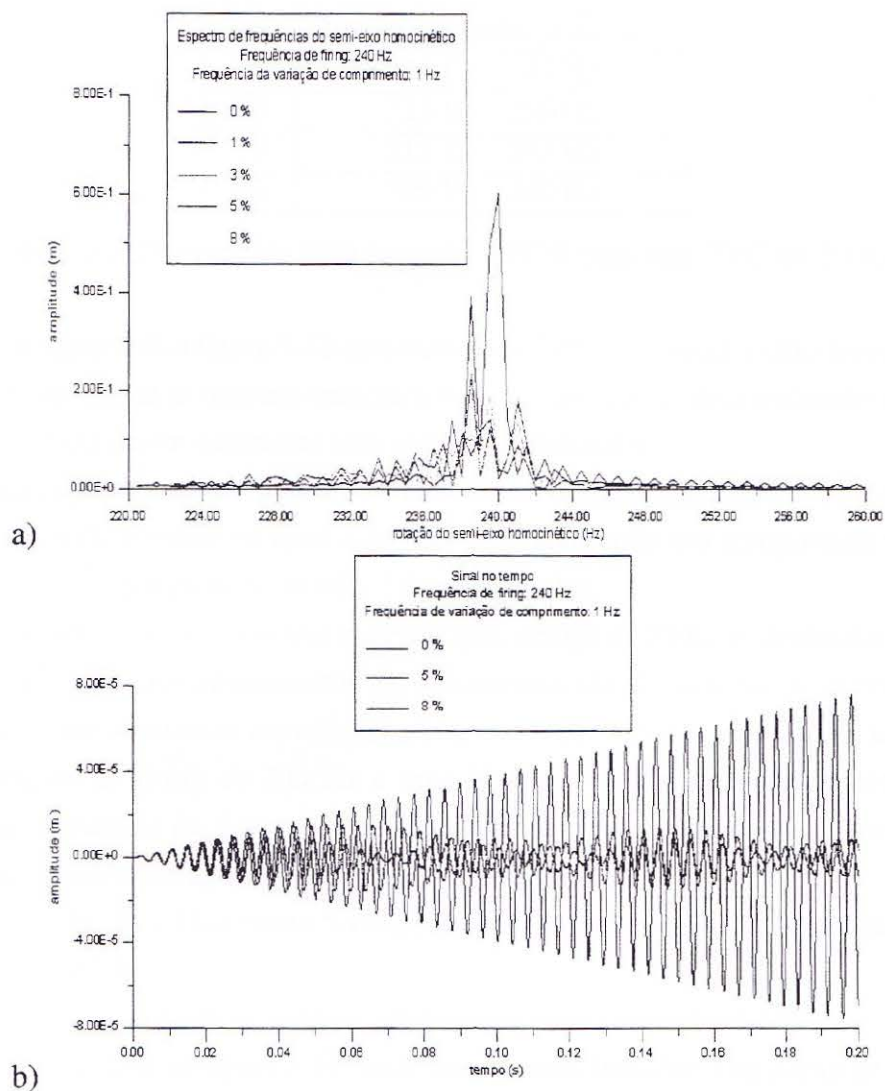


Figura 5.11: (a), espectro de frequências e (b), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(240.2\pi t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 1 Hz.

PCV	ZFR
0%	240 Hz (frequência natural)
1%	233 Hz - 245 Hz
3%	225 Hz - 247 Hz
5%	217 Hz - 248 Hz
8%	207 Hz - 249 Hz

Tabela 5.5: Variação da ZFR segundo o PCV, para uma FVC de 5 Hz.

PCV	ZFR
0%	240 Hz (frequência natural)
1%	230 Hz - 245 Hz
3%	223 Hz - 250 Hz
5%	212 Hz - 255 Hz
8%	199 Hz - 260 Hz

Tabela 5.6: Variação da ZFR segundo o PCV, para uma FVC de 10 Hz.

Em relação a figura 5.9, a figura 5.12 apresenta uma ZFR mais larga, como mostra a tabela 5.5.

A figura 5.13 apresenta as mesmas características da figura 5.10, diferenciando-se, em pequena escala, pela existência de um batimento com maiores amplitudes.

A ressonância apresentada na figura 5.14 destaca-se daquela apresentada na figura 5.11, pelo fato de que para um PCV maior ou igual a 3% deixa de apresentar um comportamento ressonante, tornando-se estável, no tempo de 0 (zero) a 1 (um) segundos.

A partir da figura 5.15, já é possível concluir que, dentro da ZFR, as distâncias entre os picos de frequências, nos espectros apresentados até o momento, são diretamente proporcionais às FVC, o mesmo podendo ser constatado em relação a largura da ZFR, como indicado na tabela 5.6.

Para frequências de *firing* de 200 Hz e uma FVC de 10 Hz, como na figura 5.16, a ZFR aproxima-se da frequência de *firing*, provocando o fenômeno de batimento, o que ocorre quando a frequência de excitação aproxima-se da frequência natural.

Assim como na figura 5.14, a figura 5.17 apresenta comportamentos anti-ressonantes para PCV maiores ou igual que 3%.

A figura 5.18 segue os padrões estabelecidos nas figuras 5.9, 5.12 e 5.15.

O alargamento da ZFR na figura 5.19, onde tem-se uma frequência de *firing* de 200 Hz e uma FVC de 15 Hz, no caso de um PCV de 8%, aumenta a amplitude do batimento observado na figura 5.16.

As características estabilizantes do PCV, são confirmadas na figura 5.20, para valores maiores ou iguais a 3%, no intervalo de 1 segundo.

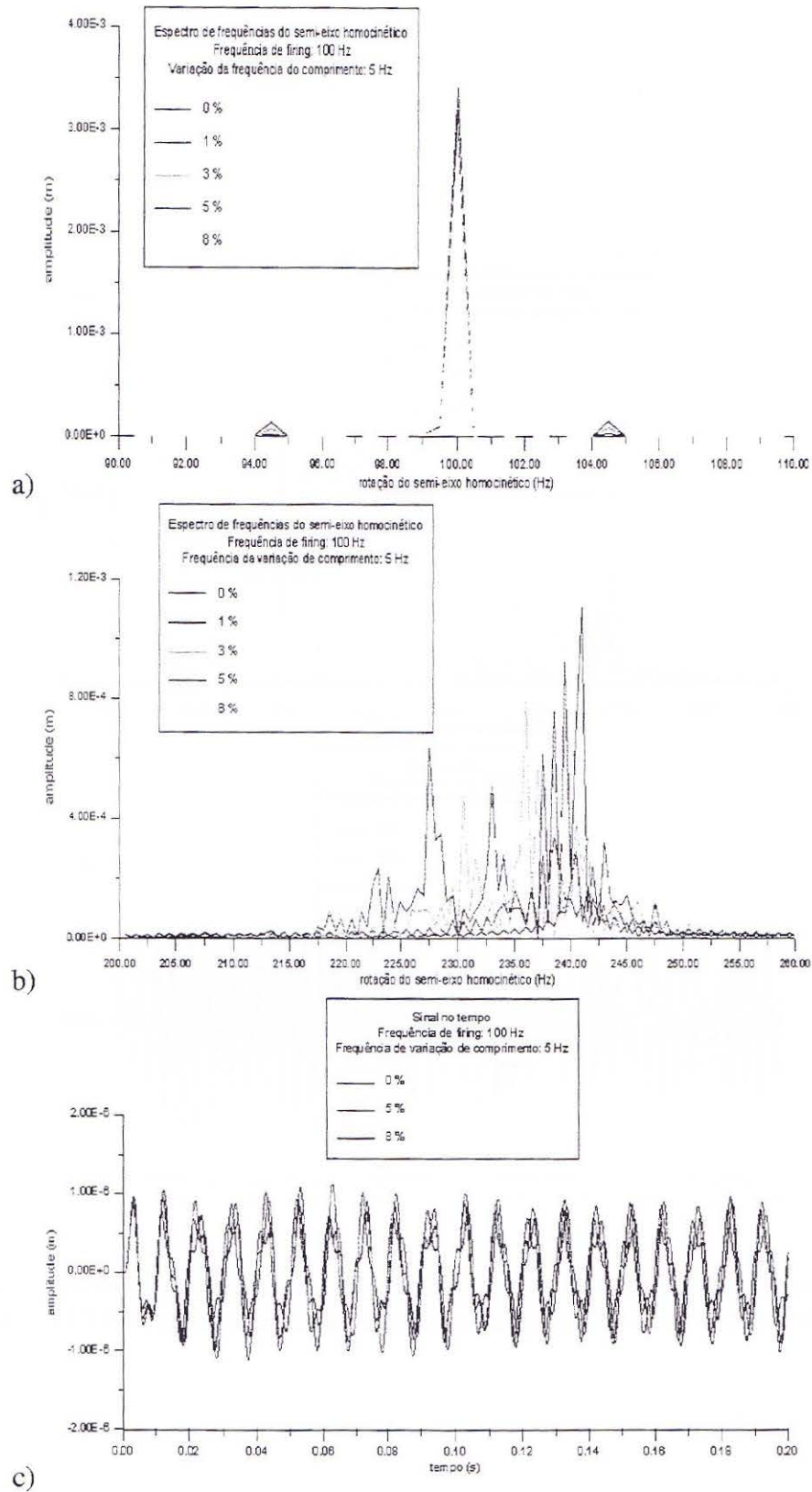


Figura 5.12: (a) e (b), espectros de frequências e (c), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(100.2\pi t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 5 Hz.

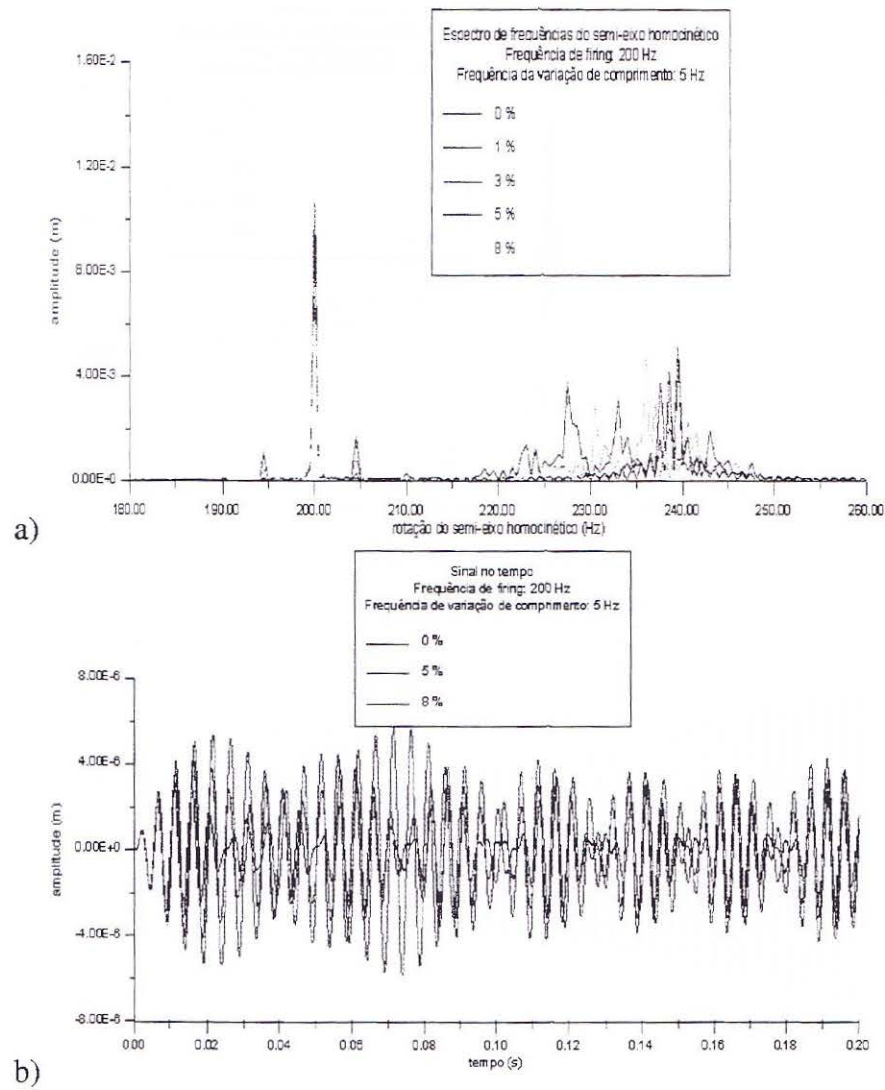


Figura 5.13: (a), espectro de frequências e (b), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(200.2\pi t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 5 Hz.

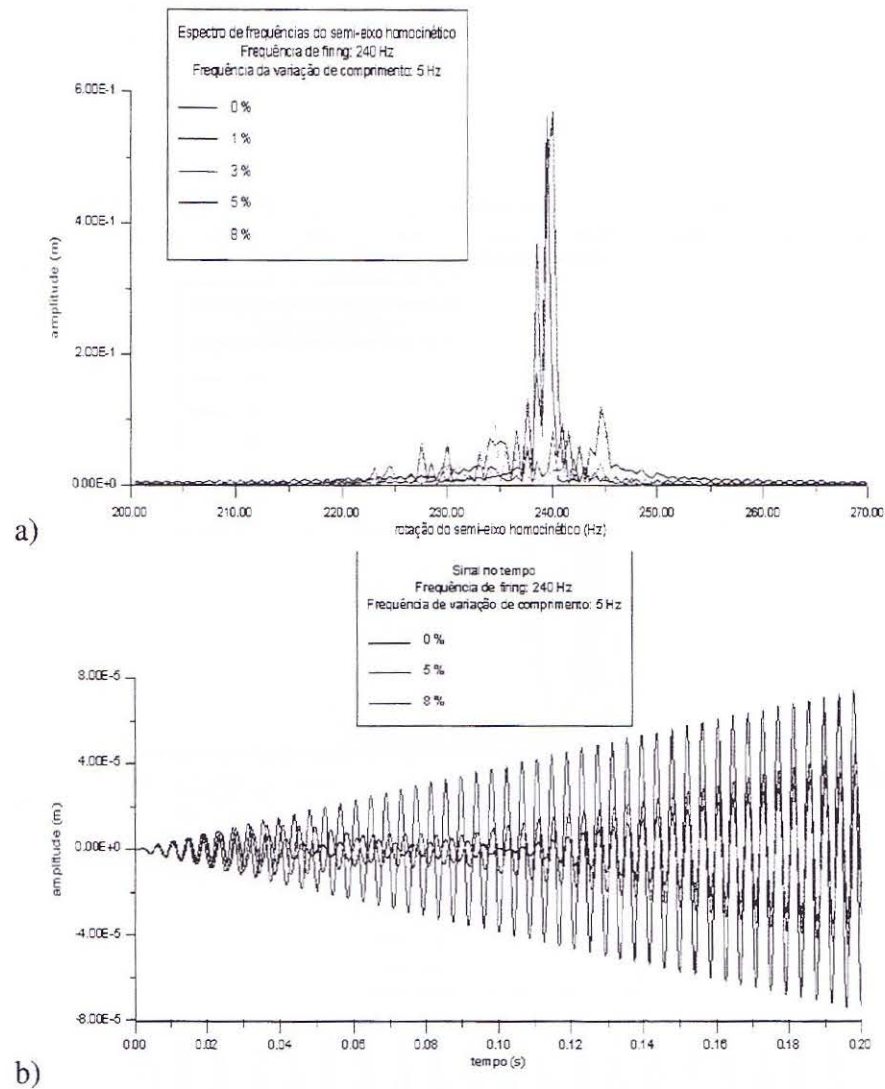


Figura 5.14: (a), espectro de frequências e (b), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(240.2\pi t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 5 Hz.

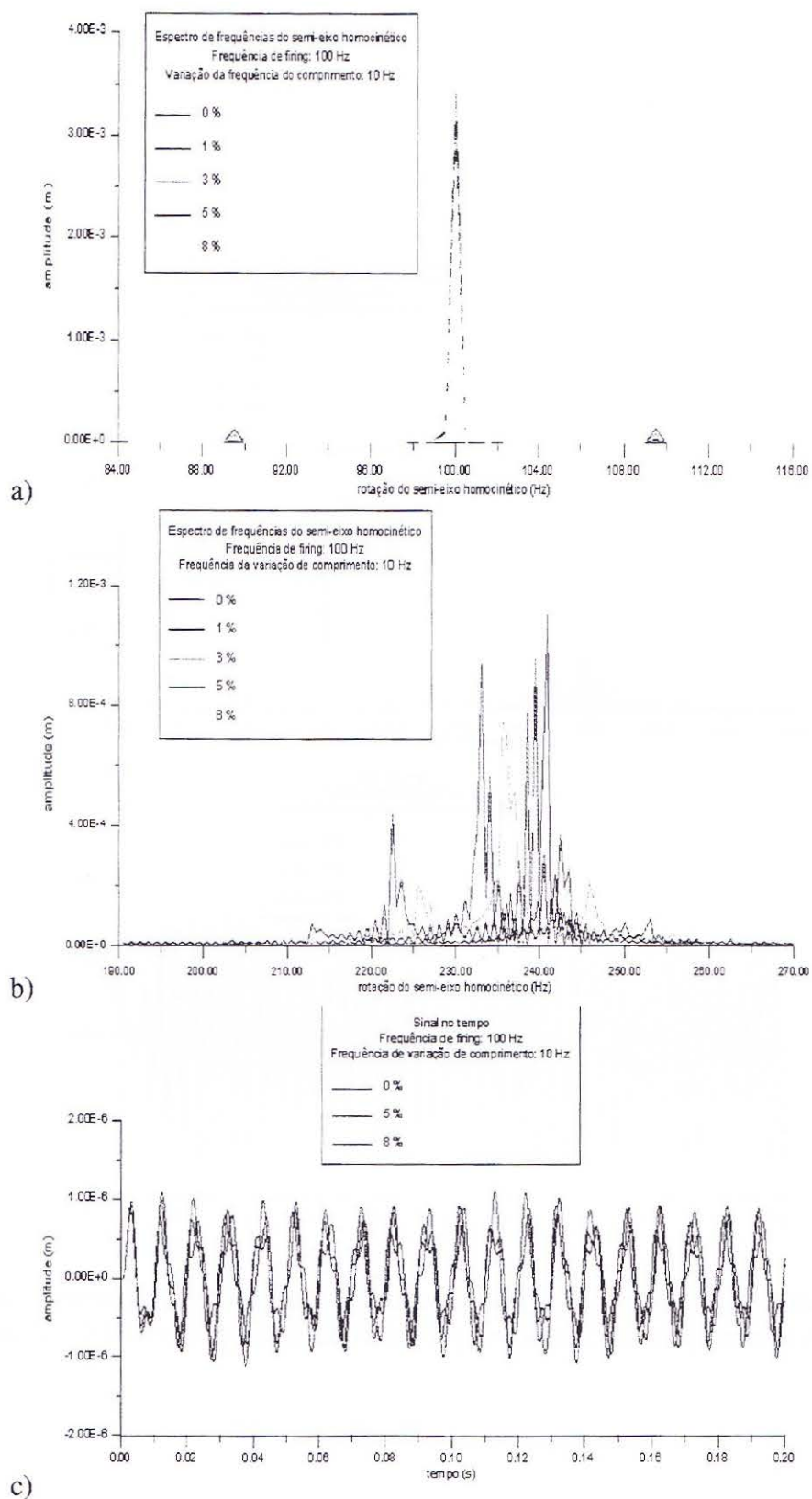


Figura 5.15: (a) e (b), espectros de frequências e (c), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(100.2 \cdot \pi \cdot t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 10 Hz.

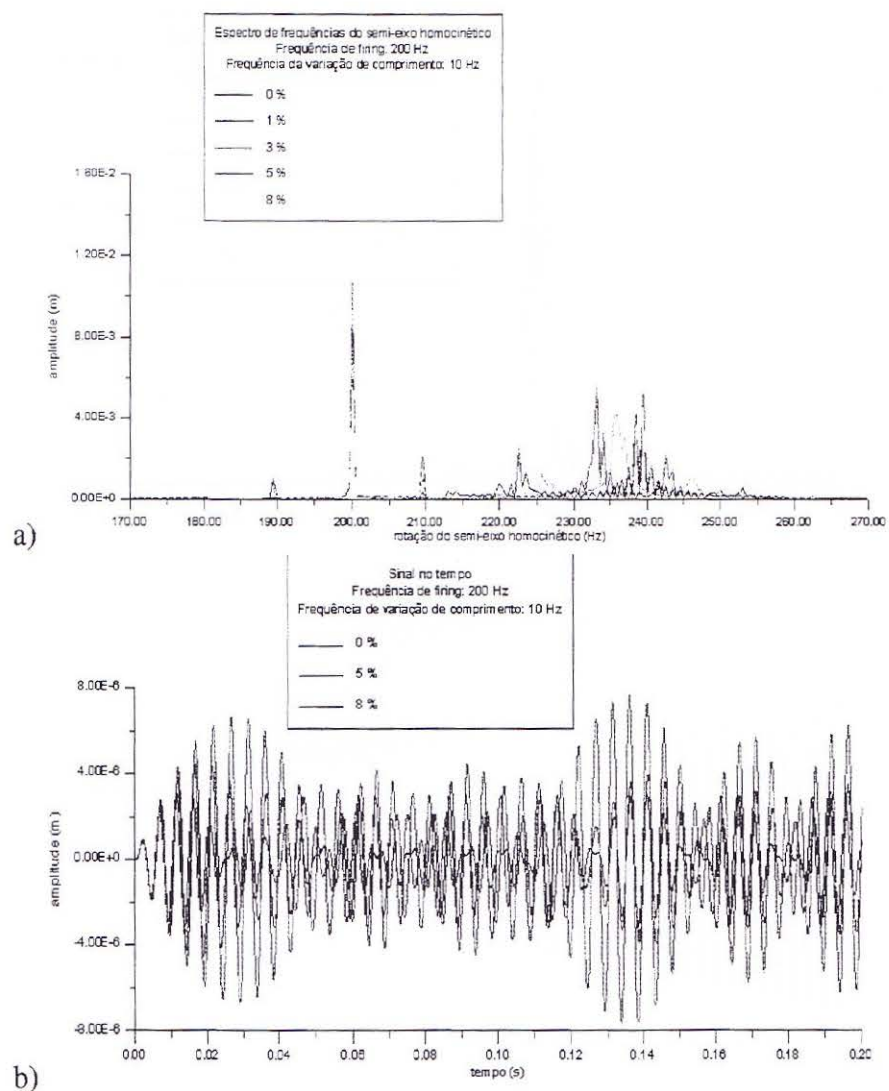


Figura 5.16: (a), espectro de frequências e (b), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(200.2.PI.t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 10 Hz.

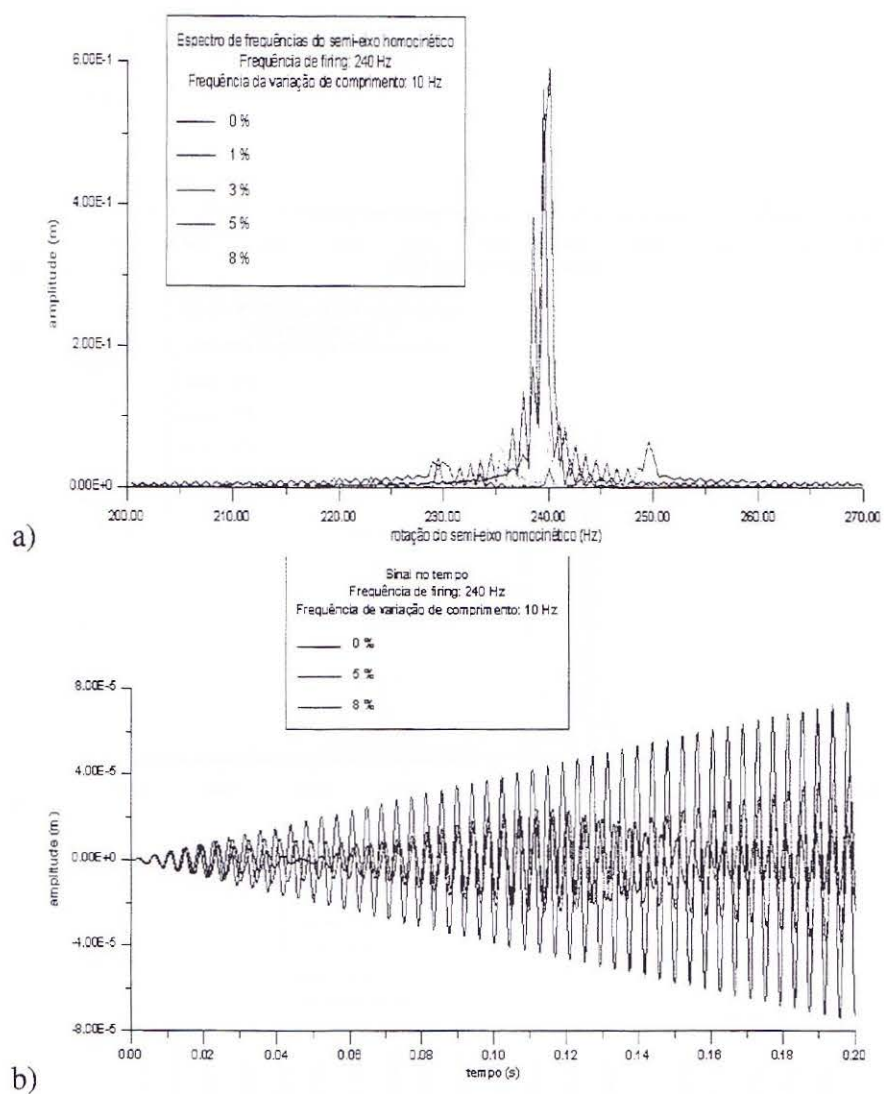


Figura 5.17: (a), espectro de frequências e (b), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(240.2\pi t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 10 Hz.

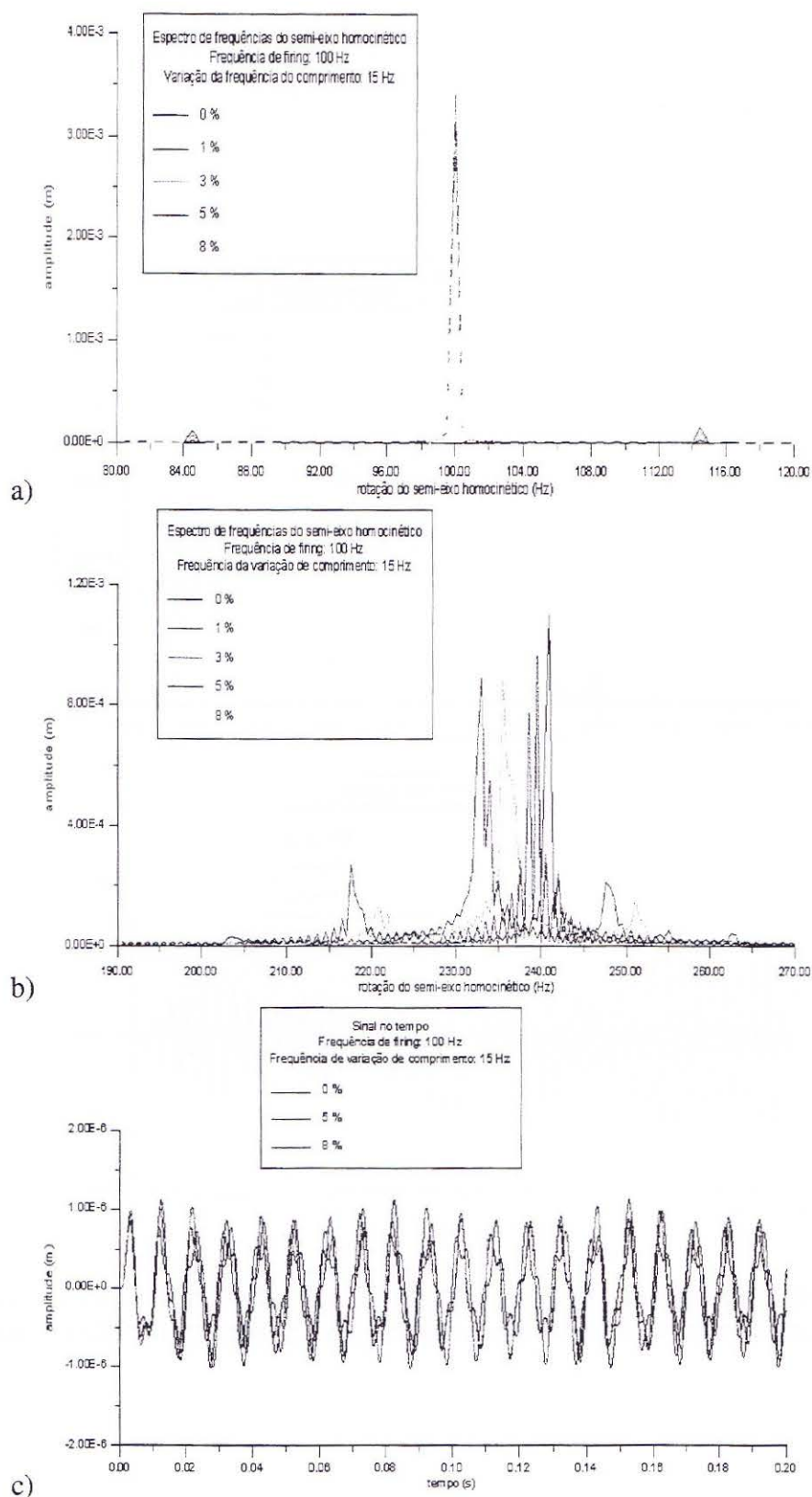


Figura 5.18: (a) e (b), espectros de frequências e (c), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(100.2 \cdot \pi \cdot t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 15 Hz.

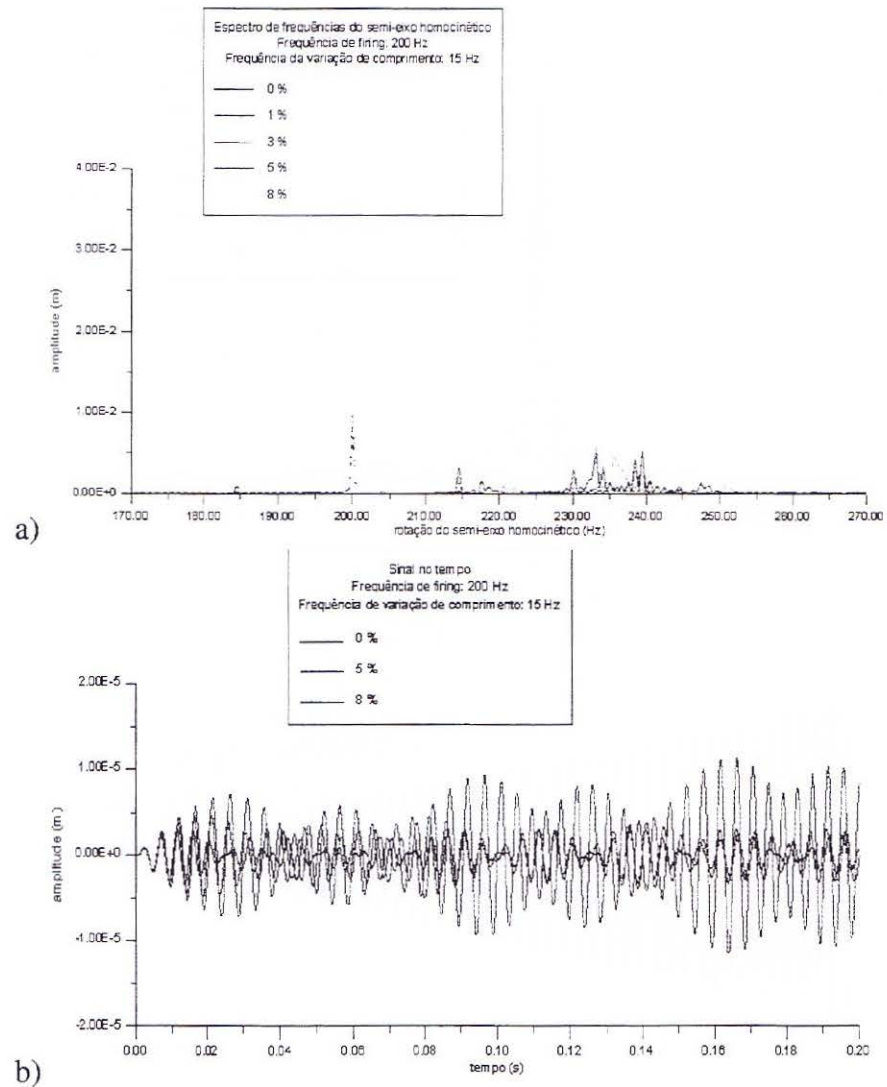


Figura 5.19: (a), espectro de frequências e (b), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(200.2\pi t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 15 Hz.

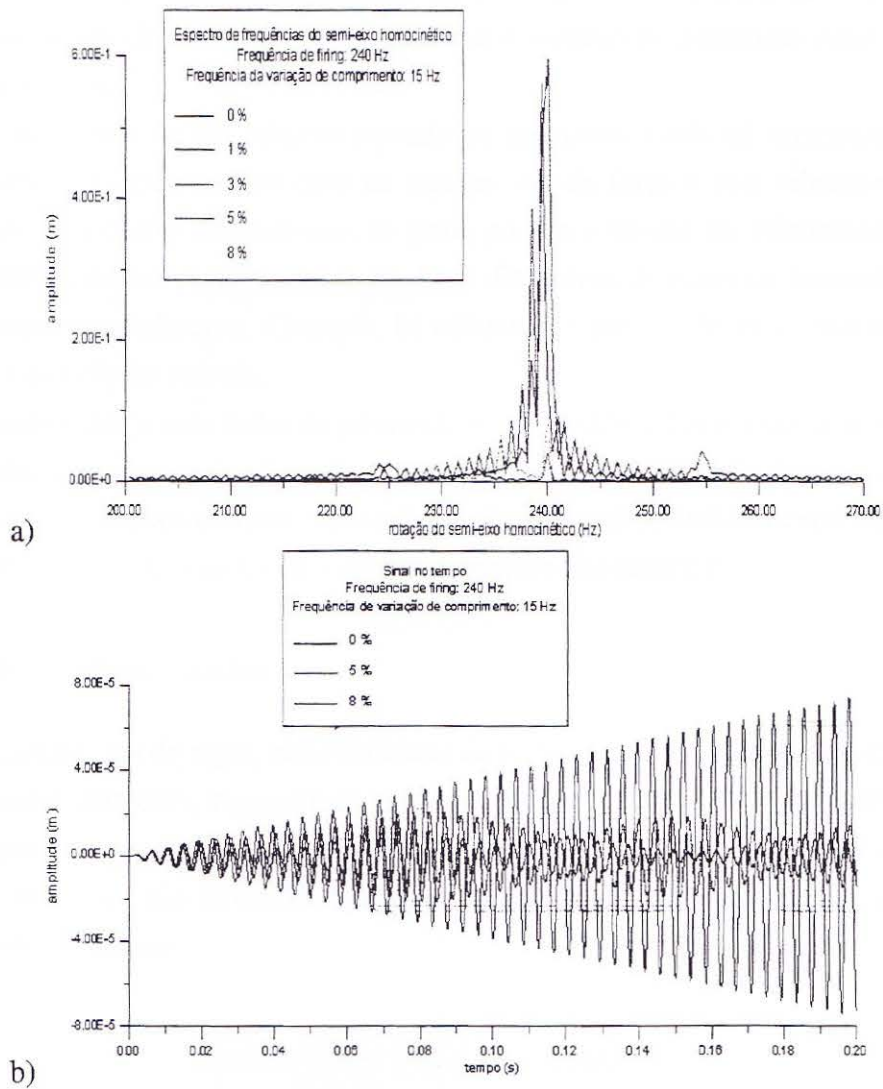


Figura 5.20: (a), espectro de frequências e (b), sinal no tempo de um semi-eixo homocinético com um firing de $\sin(240.2\pi t)$ e frequência de variação paramétrica de comprimento de 15 Hz.

6 VIBRAÇÕES EM EIXOS CARDAN DE SEÇÃO DUPLA

6.1 Introdução

O funcionamento de eixos Cardan, baseia-se em determinadas características de suas construções.

O comportamento de um sistema dinâmico de transmissão automotivo é complexo e a mensuração das grandezas que integram o sistema são de difícil realização por diversos fatores, como geometrias complexas, difícil acesso, custos elevados, interações dinâmicas entre os vários componentes, entre outros.

Apesar da existência de um número elevado de pesquisas, ainda há uma necessidade de um estudo das interações dinâmicas no trem de transmissão de força e suas vibrações e ruídos, que são transferidos para outros subsistemas, os quais podem e devem ser minimizados. Muitos esforços foram direcionados para construir modelos dinâmicos de eixos de transmissão de forças, validando-os experimentalmente. Contudo, há dificuldade para medir esses movimentos rotacionais do Cardan no próprio veículo.

Dando continuidade a esta linha de pesquisa, foi projetada e construída uma bancada experimental para estudar os efeitos de vibração em um eixo Cardan. O modelo de eixo Cardan ensaiado vem apresentando vibrações e ruídos indesejáveis. Realizaram-se análises experimental e numérica, para a determinação dos modos de vibração e frequências naturais.

6.2 Aplicação de Eixos Cardan

Os eixos Cardan, via de regra, são elementos de acionamento utilizados em veículos de tração traseira com motor dianteiro, transmitindo potência entre a caixa de câmbio e o diferencial.

O eixo Cardan é constituído por um eixo tubular, na extremidade do qual estão montadas duas juntas Cardan, que são terminais (garfos) ligados entre si por uma cruzeta, que permitem a articulação destes terminais.

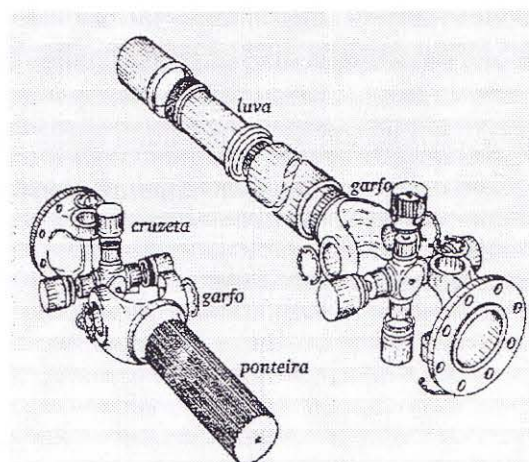


Figura 6.1: Elementos de junta e conexão de eixos Cardan.

Essa ligação permite que ambos os eixos, cujos terminais estão ligados à cruzeta, girem solidários, mesmo que não estejam alinhados, cumprindo a função básica do eixo Cardan que é a capacidade de transmitir torque, enquanto o ângulo entre o eixo de entrada e o de saída é constantemente alterado.

Além disso, o eixo Cardan deve ter a capacidade de variar seu comprimento, acompanhando o movimento do veículo sobre as ondulações do terreno, o que é conhecido como capacidade de deslizamento, o que é realizado por meio de componentes, as luvas, com entalhados de encaixe.

6.3 Determinação das Variáveis de Projeto de um Eixo Cardan

O projeto de um eixo Cardan deve considerar as funções básicas que esse deve desempenhar durante a vida útil para o qual foi planejado. Para tanto, devem ser estabelecidos seus limites e performance desejados.

Estes limites podem ser estabelecidos através da experiência obtida com a prática na construção de tais sistemas, bancadas experimentais, simulando o funcionamento do sistema ou através de um modelo matemático. O ideal seria buscar a complementação dos resultados entre si, validando ambas as análises.

Uma vez estabelecidos os limites de operação e os dados paramétricos do sistema, estes servirão de guia para obter-se uma otimização da vida útil e da performance do eixo Cardan. Entre as principais características que devem ser levadas em consideração, podem-se citar:

- Transmissão de torque.
- Velocidade operacional.
- Ângulo operacional das juntas universais.
- Torque transmitido pelas juntas universais.
- Limite da excitação inercial. (Produzida pela oscilação de torque aplicado, resultante da inércia do eixo Cardan sendo acelerado com movimento não uniforme.)
- Limite de excitação do momento secundário. (Produzido pelas juntas universais transmitindo torque, deslocadas angularmente.)
- Variação do comprimento do eixo Cardan.
- Folgas existentes.
- Meio ambiente operacional.
- Propriedades mecânicas.

6.4 Vibrações em Eixos Cardan

Segundo o Manual da SAE, 1979, os problemas de vibração existentes no sistema de transmissão em um veículo automotor de tração traseira com motor dianteiro, estão classificados segundo a origem da fonte de excitação. Basicamente, existem quatro fontes de vibração em sistemas de transmissão de forças. A origem destas fontes pode ser proveniente:

1. das juntas universais.
2. das conexões entre o motor e o eixo Cardan.
3. do tubo que compõe o eixo Cardan.
4. do sistema traseiro de transmissão.

Neste trabalho, não será abordado as fontes provenientes do segundo tipo, descrito anteriormente.

6.4.1 Vibrações Induzidas pelas Juntas Universais

O fato das juntas universais não transmitirem velocidade constante, irá induzir vibrações com frequências que serão duas vezes o valor da frequência rotacional do eixo Cardan, dentre as quais destacam-se:

- **Vibração Torsional:** gerada pela combinação de velocidade não constante de um eixo Cardan com juntas universais operando com deslocamento angular. O efeito de uma ou mais juntas universais operando em série pode ser estudada considerando-se um ângulo equivalente para as juntas. Para reduzir as vibrações torsionais para um nível aceitável, a geometria do sistema de transmissão pode ser alterada, permitindo a alteração do ângulo equivalente das juntas.

- **Vibração Inercial:** gerada quando ocorre uma oscilação do torque resultante da inércia do eixo Cardan, sendo acelerado com um movimento não uniforme, acelerando e desacelerando, devido a um excessivo valor dos ângulos formados pelas juntas universais. As vibrações inerciais podem ser reduzidas, diminuindo-se o ângulo equivalente das juntas e/ou as dimensões do eixo Cardan, por exemplo, um eixo Cardan de menor comprimento e diâmetro de tubo e um sistema de transmissão com menor ângulo equivalente de juntas, será menos suscetível às vibrações inerciais.

Também podem induzir vibrações com frequências de mesmo valor que a frequência de rotação do eixo Cardan, descrita a seguir:

- **Vibração por Momento Secundário:** Quando uma junta universal opera deslocada angularmente de um ângulo θ , como na figura 6.2, um movimento não uniforme é desenvolvido, isto é, enquanto o garfo condutor está operando com uma velocidade angular uniforme ω , o garfo conduzido realiza uma rotação não uniforme com relação ao deslocamento β_1 , velocidade ω_1 e aceleração angulares.

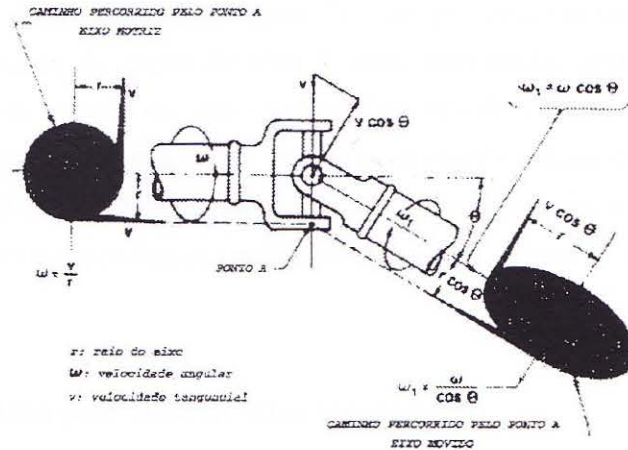


Figura 6.2: Junta universal operando deslocada angularmente.

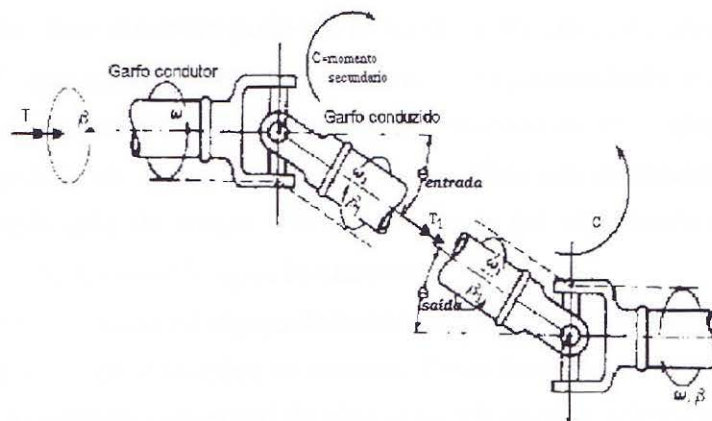


Figura 6.3: Momento secundário e torque variável presentes no segmento de eixo cardan inclinado, com $\theta_{entrada} = \theta_{saída}$.

A velocidade e o deslocamento angular médios são uniformes. Se o garfo condutor realiza um giro completo, o garfo conduzido também o faz. Entretanto, durante este giro, o deslocamento, velocidade e aceleração angulares não são transmitidos uniformemente através da junta universal.

Esta característica, peculiar da junta universal, de transmissão cinemática não uniforme, gera relações cinemáticas e dinâmicas diferenciadas para este elemento.

Quando uma junta Cardan transmite torque em um determinado ângulo de operação θ , um momento fletor oscilante, de mesma frequência que a rotação do eixo cardan, é produzido pela mudança de direção da aplicação deste torque, e pode ser calculado como:

$$C = T \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\theta) \quad (6.1)$$

β é o deslocamento angular e C o momento secundário, mostrado na figura 6.3. Este momento fletor oscilará entre o seu valor máximo e nulo a cada 90 graus, sendo que quando este for nulo a carga aplicada nos apoios, devido ao momento fletor, terá seu valor máximo.

Este tipo de vibração difere da torsional pelo fato de que atua em um plano perpendicular à este, e é sentido pelos pontos de apoio do eixo Cardan, ocorrendo, neste último caso, em uma frequência que é o dobro da rotação do eixo Cardan. Este tipo de vibração é mais crítico em eixos Cardan de três ou mais juntas universais, pois utilizam um número maior de apoios intermediários, que são mais suscetíveis à este distúrbio. Existem tabelas que auxiliam o projetista a respeitar os limites máximos aceitáveis de momentos secundários, segundo o tipo de veículo, vide manual da SAE, 1979.

6.4.2 Vibrações Induzidas pelo Tubo do Eixo Cardan

Estes distúrbios são atribuídos ao projeto e desbalanceamento do eixo Cardan.

- Vibração sonora ou *ringing*: peculiar em eixos Cardan tubulares de aço. Quando um eixo Cardan tubular está submetido à uma fonte de excitação de aproximadamente 100 Hz, esse produz um som metálico audível, resultante da amplificação da vibração longitudinal, que constitui o distúrbio mencionado. Este distúrbio pode ser reduzido, para um nível aceitável, através da instalação de um “linear”, que constitui-se de um material com propriedades que auxiliam no controle de vibrações indesejadas, como ruídos, internamente colocado no tubo de aço.

- Ruído gerado pela luva: gerado quando a luva realiza um deslizamento ao mesmo tempo em que sofre uma aplicação de torque. Este ruído pode ser amenizado diminuindo-se a força necessária para a luva deslocar-se longitudinalmente.

- Velocidade crítica: Quando há algum desbalanceamento do eixo Cardan, surgem forças rotacionais excêntricas que geram vibrações no sistema. Essas forças excêntricas atingem seus valores máximos, quando a frequência rotacional do eixo coincide com as primeiras frequências de ressonância do sistema, estas rotações são chamadas de velocidades críticas (geralmente ocorrem nos primeiros modos de flexão). Importante salientar que a proximidade da velocidade crítica já é suficiente para gerar danos à estrutura.

O controle das vibrações, ocasionadas ao atingir-se a velocidade crítica, requer uma estrutura bem balanceada e uma faixa de operação do sistema suficientemente distante do valor crítico. Tais metas são atingidas controlando-se as propriedades geométricas e físicas do sistema de eixo Cardan, como densidade, comprimento e diâmetro do material.

O eixo Cardan deve ser projetado de forma que a velocidade crítica do sistema de transmissão seja não coincidente com a velocidade de operação. O manual da SAE, 1979, recomenda valores de 15% da faixa de operação.

6.4.3 Vibrações Induzidas pelo Sistema Traseiro de Transmissão

Estes distúrbios constituem-se dos ruídos gerados pelo sistema traseiro de transmissão, ocorrendo em campos de 350-650 Hz e são gerados por folgas no sistema diferencial do eixo traseiro e problemas na manufatura de peças.

A origem dos ruídos em eixos tubulares traseiros pode ser torsional e transversal, sendo uma

prática comum a utilização de atenuadores de vibração, visando amenizar estas formas de vibrações.

Como exemplos de atenuadores de vibrações torsionais citam-se:

- os sintonizadores, que consistem em anéis de elastômeros montados concêntricamente, externa ou internamente, ao tubo que constitui o eixo Cardan;
- discos inerciais, que consistem em discos que alteram as propriedades inerciais do eixo Cardan.

6.5 Velocidade Crítica

Em determinadas velocidades, os eixos rotativos tornam-se dinamicamente instáveis e ocorrem vibrações de elevadas amplitudes que podem resultar em danos para o sistema. Esse fenômeno ocorre devido às forças excêntricas de desbalanceamento. Estas velocidades são conhecidas como críticas, e ocorrem quando a velocidade rotacional do eixo Cardan coincide com a frequência natural do eixo.

Apesar do cuidado despendido durante as fases de projeto e construção do eixo Cardan, o centro de massa não coincide com o eixo de rotação. Existindo uma excentricidade na distribuição da massa, uma força centrífuga é produzida, gerando uma vibração no sistema, também conhecida na literatura estrangeira como *whirling*, isto é, velocidade de precessão.

Ao realizar o movimento de precessão, os pontos do eixo irão deslocar-se de sua posição neutra. As forças centrífugas serão contrapostas pelas forças elástica interna e de amortecimento do eixo.

Além das propriedades elásticas e geométricas do eixo, as condições de contorno e suportes são importantes na análise de um sistema de eixo Cardan. Estes suportes, normalmente possuem alguma resiliência e, por isso, geram vibrações características próprias. Com o acoplamento do eixo Cardan e de seus suportes, são gerados muitos modos de vibração.

6.5.1 O Movimento de Precessão

Uma característica de qualquer eixo de transmissão de veículo automotor é a forma elíptica de movimento rotacional excêntrico que esse realiza ao atingir a sua velocidade crítica, também conhecido como precessão. Este movimento é síncrono por natureza, possuindo a mesma frequência de rotação que o eixo, podendo ser definida como um movimento elíptico orbital superposto ao movimento rotacional do eixo em relação ao seu eixo neutro.

A condição de precessão pode ser na mesma direção da rotação do eixo, direta, figura 6.4, ou ainda na direção oposta à do eixo, inversa, figura 6.5.

O movimento de precessão é elíptico pelo fato dos suportes do sistema não possuírem simetria em suas propriedades.

O eixo Cardan, nas figuras 6.5 e 6.4, possui uma rotação ω_r e está apoiado em ambos extremos por suportes não simétricos. Também é assumido que a força centrífuga produzida pelo desbalanceamento do eixo é suficiente para causar uma flexão do eixo Cardan de forma que o seu centro

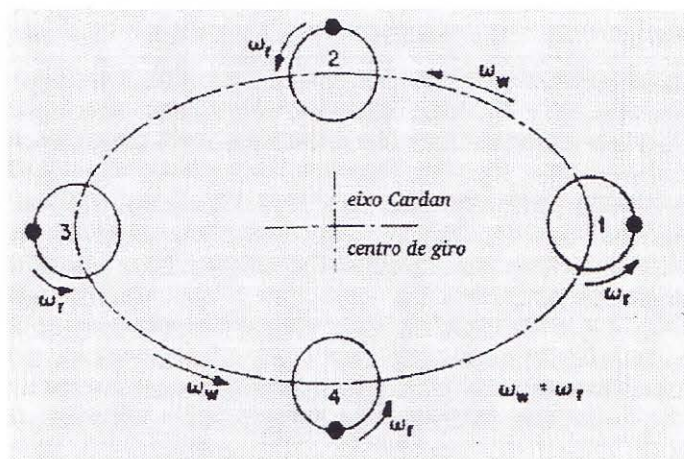


Figura 6.4: Movimento de precessão direta.

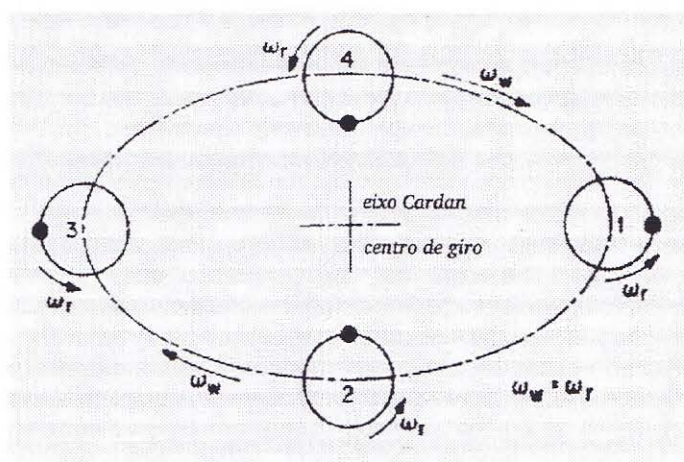


Figura 6.5: Movimento de precessão inverso.

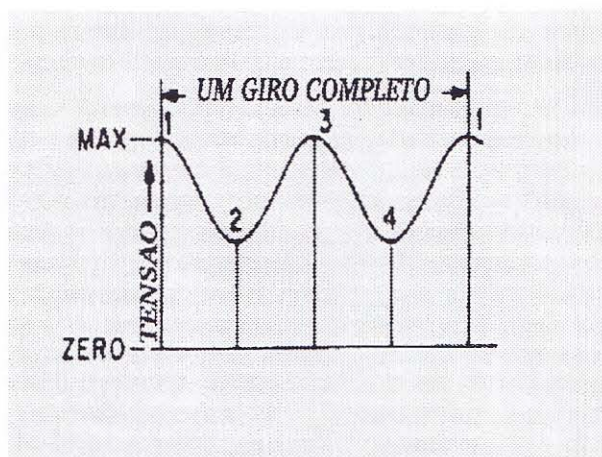


Figura 6.6: Variação de tensão para um movimento de precessão direto.

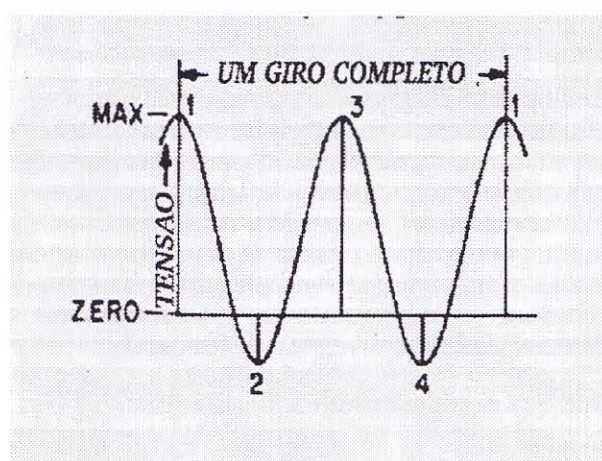


Figura 6.7: Variação de tensão para um movimento de precessão inverso.

de gravidade é deslocado nas direções horizontal e vertical em relação ao centro de giro do eixo. Esta condição é conhecida como movimento de precessão, ou seja, o eixo realiza uma rotação em torno de uma linha longitudinal que passa pelo seu centro de gravidade, enquanto que o seu centro de gravidade realiza um movimento de translação em torno de sua linha neutra, descrevendo uma elipse com um rotação ω_w . A frequência de precessão será a mesma da rotação do eixo. O que determinará se o movimento de precessão será direto ou inverso serão os parâmetros do sistema.

Quando um eixo realiza um movimento de precessão, surgem tensões de flexão que variam ao longo do tempo. Apesar do valor destas tensões estarem abaixo do valor limite de resistência do material, essas podem resultar em falhas por fadiga depois de algum tempo.

Na figura 6.6 observa-se a variação de tensão para um movimento de precessão direto.

Para uma rotação completa do eixo, a frequência de oscilação da tensão é o dobro da frequência de rotação e ocorrem apenas tensões de mesmo sinal, e para o movimento de precessão inverso a mudança se faz na forma de variação da tensão, que muda de sinal, como mostra a figura 6.7.

No movimento de precessão inverso, as falhas por fadiga serão maior, além de ser mais suscetível a instabilidade. Percebe-se, então, que este movimento de precessão é mais nocivo ao sistema que a precessão direta, quando as condições de precessão forem iguais. Porém, o movimento de

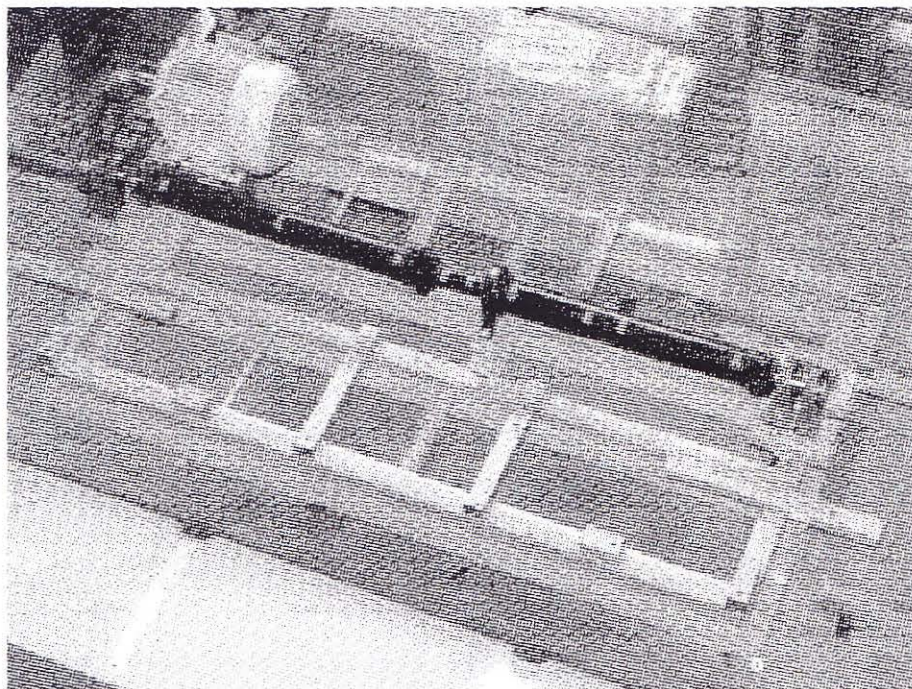


Figura 6.8: Bancada experimental e o eixo Cardan de dupla seção.

precessão inverso, normalmente, possui uma amplitude menor que o direto. Resultados experimentais tem mostrado que a precessão inversa, para um mesmo modo de vibração, ocorre antes da precessão direta.

6.6 Resultados Experimentais e Numéricos

O propósito de analisar experimentalmente um sistema de transmissão do tipo eixo Cardan é obter uma avaliação compreensiva de cada componente e do conjunto como um todo. Os resultados experimentais são importantes, a medida que esses irão validar ou não os resultados obtidos numericamente, compatibilizando o projeto do sistema à aplicação para o qual será requisitado.

6.6.1 Verificação Experimental e Instrumentação

Utilizou-se uma bancada experimental giratória, fixa em uma base de concreto, onde estudou-se experimentalmente o comportamento de um eixo Cardan de seção dupla, conforme é mostrado na figura 6.8. O eixo Cardan foi analisado nas disposições alinhado, ou seja, as juntas Cardan não estão deslocadas angularmente e com uma inclinação de 5 graus, como mostra a figura 6.20.

A rotação do eixo Cardan é determinada pela relação dos diâmetros das polias usadas no eixo do motor acionador, de 10 CV, e no eixo Cardan, conectadas por uma correia de borracha.

Foram utilizados, nas extremidades do eixo Cardan, duplos mancais de rolamento de esferas, fixos na base por intermédio de parafusos, simulando um engaste.

Na fixação central do sistema, utilizou-se o próprio mancal central do eixo Cardan. A nível de segurança, foram instaladas telas de proteção, permitindo usar rotações mais elevadas para o eixo Cardan.

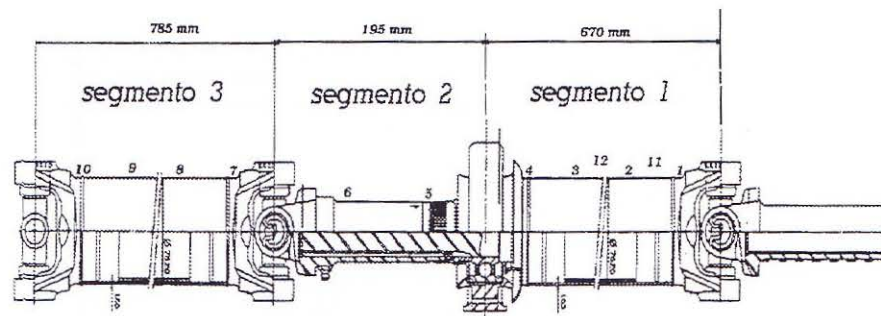


Figura 6.9: Modelo de eixo Cardan usado no experimento com os pontos de aplicação da carga de impacto (11), os pontos de varredura (1-10) e o ponto de referência (12).

O sistema de eixo Cardan analisado é utilizado em um veículo tipo camionete de uso geral, porte médio. Neste veículo, devido ao seu comprimento, faz-se necessário o uso de um eixo Cardan do tipo seção dupla, ou seja, divide-se em dois eixos, conectados por uma luva deslizante, sendo fixo por um mancal central.

O balanceamento do eixo Cardan é realizado individualmente, na fábrica.

Para os fins de medição no experimento, foi empregado a metodologia descrita no Capítulo 2, para análise dinâmica de eixos em rotação, utilizando-se acelerômetros.

As características técnicas dos acelerômetros utilizados estão no Apêndice II.

6.6.2 Metodologia para a Determinação dos Modos de Vibração e Frequências Naturais Experimentalmente

Optou-se pelo método de excitação através de uma carga de impacto, descrito no Capítulo 2. Esta carga foi aplicada com um dispositivo de borracha, em 10 (dez) pontos diferentes, uniformemente esparsados pelo eixo Cardan, conforme a figura 6.9.

6.6.3 Medições com Rotação Nula do Eixo Cardan

O acelerômetro de referência foi colocado no extremo do tubo do eixo Cardan e o de varredura em dez pontos diferentes, conforme mostra a figura. 6.9.

Nas figuras 6.10 até 6.13 e nas tabelas 6.1 até 6.3, apresentam-se os resultados gráficos e as tabelas de aquisição obtidos para o eixo Cardan de seção dupla da figura 6.8 com rotação nula.

6.6.4 Medições Dinâmicas no Eixo Cardan

A análise é realizada a partir dos espectros obtidos do eixo Cardan em duas rotações: 45 Hz e 61 Hz, e inclinações de zero e 5 graus, sendo registrados os sinais gerados em três pontos distintos do eixo, ou seja, nos dois mancais dos extremos e no mancal central. Além das frequências naturais do sistema, são registrados a rotação do motor, a rotação transmitida ao eixo Cardan e seus harmônicos.

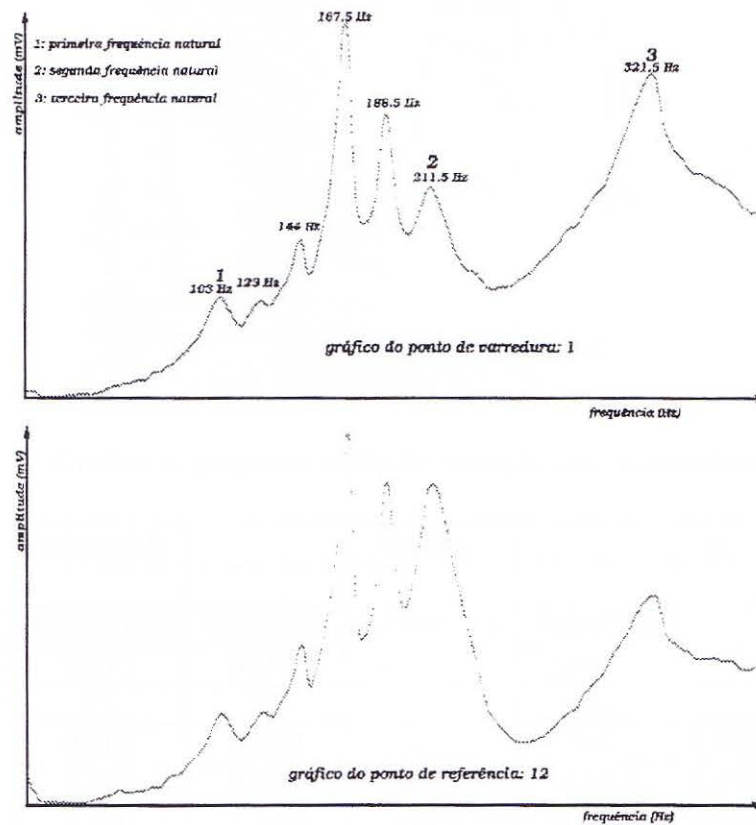


Figura 6.10: Espectro instantâneo de frequências do ponto de varredura 1 da figura 6.9.

ponto	posição (mm)	amplitude		ângulo		q_{ij}	sinal	\bar{q}_{ij}
		referência (mV)	varredura (mV)	referência (graus)	varredura (graus)			
		Y_A	Y_B	ϕ_A	ϕ_B			
0	0	0.000	0.000	0.0	0.0	0.000		0.000
1	50	0.356	0.272	-60.0	124.0	0.764	(-)	-0.764
2	250	0.438	0.406	-78.3	119.3	0.927	(-)	-0.927
3	450	0.336	0.178	-55.9	132.2	0.530	(-)	-0.530
4	630	0.214	0.094	-125.3	38.3	0.439	(-)	-0.439
5	720	0.280	0.063	-32.5	129.3	0.225	(-)	-0.225
6	810	0.406	0.173	5.3	145.1	0.426	(-)	-0.426
7	915	0.324	0.199	-146.4	-102.0	0.614	(+)	0.614
8	1115	0.546	0.288	117.4	141.1	0.527	(+)	0.527
9	1315	0.580	0.361	157.4	164.2	0.622	(+)	0.622
10	1515	0.860	0.597	107.3	98.0	0.691	(+)	0.691
11	1565	0.000	0.000	0.0	0.0	0.000		0.000

Tabela 6.1: Planilha para o primeiro modo de vibração: frequência natural de 103 Hz.

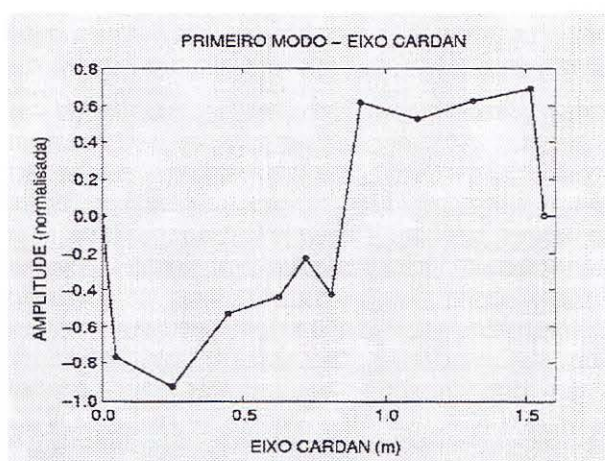


Figura 6.11: Gráfico do primeiro modo de vibração experimental em 103 Hz.

Ponto	Posição (mm)	Amplitude		Ângulo		q_{ij}	Sinal	\bar{q}_{ij}
		Referência (mV)	Varredura (mV)	Referência (graus)	Varredura (graus)			
		Y_A	Y_B	ϕ_A	ϕ_B			
0	0	0.000	0.000	0.0	0.0	0.000		0.000
1	50	1.040	0.496	-56.0	-156.2	0.477	(-)	-0.557
2	250	1.560	1.180	-52.1	138.8	0.756	(-)	-0.882
3	450	1.400	1.200	-139.3	45.9	0.857	(-)	-1.000
4	630	0.965	0.638	-149.7	28.2	0.661	(-)	-0.771
5	720	1.780	0.998	-34.0	144.2	0.561	(-)	-0.655
6	810	2.910	0.292	126.8	-167.0	0.101	(+)	0.118
7	915	2.820	1.390	-75.8	21.9	0.493	(+)	0.575
8	1115	2.900	1.240	-13.7	-100.7	0.428	(+)	0.499
9	1315	2.270	0.329	-34.5	-45.6	0.145	(+)	0.169
10	1515	3.040	0.492	72.7	41.5	0.161	(+)	0.188
11	1565	0.000	0.000	0.0	0.0	0.000		0.000

Tabela 6.2: Planilha para o segundo modo de vibração: frequência natural de 211.5 Hz.

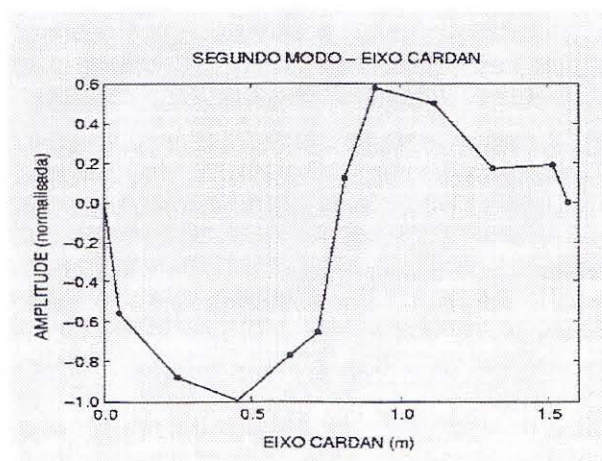


Figura 6.12: Gráfico do segundo modo de vibração experimental em 211.5 Hz.

Ponto	Posição (mm)	Amplitude		Ângulo		q_{ij}	Sinal	\bar{q}_{ij}
		Referência (mV)	Varredura (mV)	Referência (graus)	Varredura (graus)			
0	0	0.000	0.000	0.0	0.0	0.000		0.000
1	50	0.759	0.904	151.9	-78.3	1.190	(-)	-1.190
2	250	0.400	0.533	-13.5	-166.2	1.333	(-)	-1.333
3	450	0.351	0.191	175.7	-29.4	0.544	(-)	-0.544
4	630	0.309	0.239	7.0	67.1	0.773	(+)	0.773
5	720	0.263	0.695	-125.9	-76.8	2.640	(+)	2.640
6	810	0.810	0.445	7.5	43.0	0.549	(+)	0.549
7	915	0.292	0.219	-172.2	47.2	0.750	(-)	-0.750
8	1115	0.346	0.536	314.0	18.0	1.549	(-)	-1.549
9	1315	0.624	0.326	-39.8	-179.5	0.522	(-)	-0.522
10	1515	1.150	0.115	61.1	108.6	0.100	(+)	0.100
11	1565	0.000	0.000	0.0	0.0	0.000		0.000

Tabela 6.3: Planilha para o terceiro modo de vibração: frequência natural de 321.5 Hz.

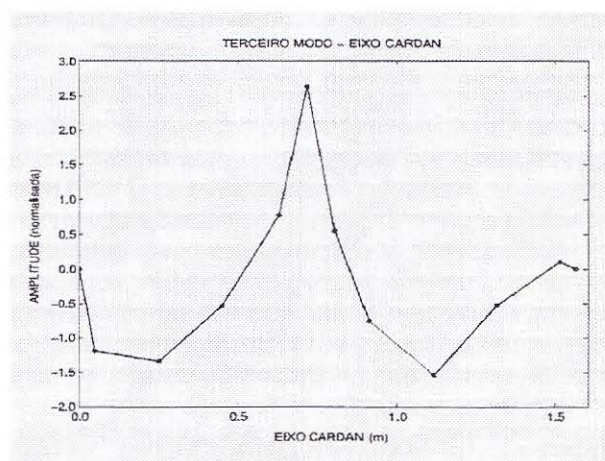


Figura 6.13: Gráfico do terceiro modo de vibração experimental em 321.5 Hz.

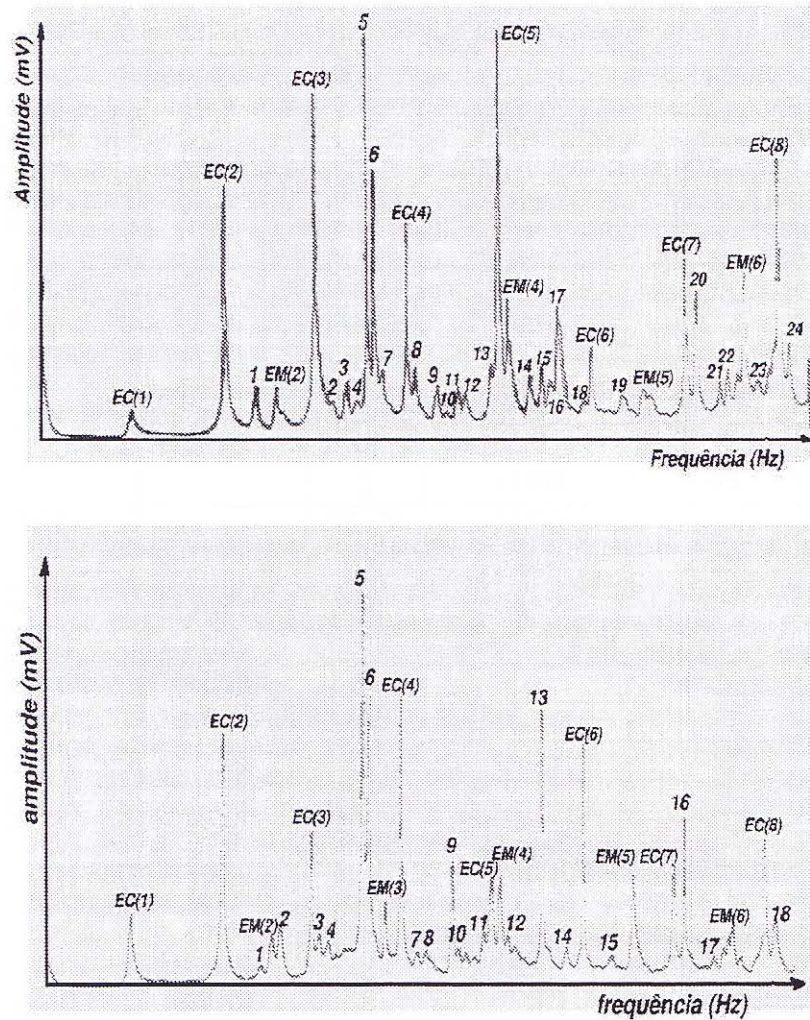


Figura 6.14: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 45 Hz - mancal direito.

Nas tabelas 6.5 até 6.11, identificam-se as frequências obtidas nos ensaios dinâmicos do eixo Cardan, mostradas nos espectros de frequências das figuras 6.14 até 6.19. Utilizaram-se as expressões “—” para frequências que não tiveram sua origem estabelecida, “EC” para a rotação do eixo Cardan e suas harmônicas e “EM” para a rotação do motor e suas harmônicas.

	Inclinação 0°			Inclinação 4°		
	Frequência	Amplitude		Frequência	Amplitude	Fonte
	(Hz)	(mV)		(Hz)	(mV)	
Ponto						
EC(1)	45.0		EC(1)	45.0		eixo Cardan
EC(2)	90.0		EC(2)	90.0		harmônico
1	105.0	1.77				1ª FREQ. NAT.
			1	110.0	0.844	—
EM(2)	115.5	1.82	EM(2)	115.5	2.12	harmônico
			2	119.0	1.98	—
EC(3)	135.0		EC(3)	135.0		harmônico
			3	139.0	2.20	—
2	143.5	0.99	4	143.5	1.57	—
3	150.0	1.88				—
4	155.5	1.16				—
5	160.5	17.60	5	161.0	11.1	—
6	164.0	7.02	6	164.5	7.37	—
7	168.0	2.11				—
			EM(3)	172.5	3.15	harmônico
EC(4)	180.0		EC(4)	180.0		harmônico
8	184.5	2.39				—
			7	189.5	1.40	—
9	195.0	1.79	8	193.0	1.48	—
10	200.0	0.85				—
11	205.5	1.74	9	206.0	4.22	—
12	209.0	1.49	10	209.0	1.66	2ª FREQ. NAT.
13	221.5	2.34	11	222.0	2.08	—
EC(5)	225.0		EC(5)	225.0		harmônico
EM(4)	229.5	4.12	EM(4)	230.0	3.72	harmônico
			12	234.0	2.01	—
14	240.0	1.99				—
15	246.0	2.25				—
16	250.0	1.78	13	251.0	8.09	—
17	254.0	3.49				—
18	266.5	1.32	14	263.0	1.69	—
EC(6)	270.0		EC(6)	270.0		harmônico
19	285.0	1.31	15	285.5	1.40	—
EM(5)	295.5	1.55	EM(5)	296.5	3.78	harmônico
EC(7)	315.0		EC(7)	315.0		harmônico

Tabela 6.4: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 45 Hz - mancal direito.

	Inclinação 0°			Inclinação 4°		
	Frequência	Amplitude		Frequência	Amplitude	Fonte
	(Hz)	(mV)		(Hz)	(mV)	
Ponto						
20	321.0	4.08	16	321.5	5.46	3ª FREQ. NAT.
21	332.0	1.68				—
22	336.0	2.05	17	336.0	1.35	—
EM(6)	344.5	4.35	EM(6)	345.0	2.30	harmônico
23	351	1.59				—
EC(8)	360		EC(8)	360.0		harmônico
24	366	2.59	18	366.5	2.54	—
Total	44.9 mV		Total	34.8 mV		

Tabela 6.5: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 45 Hz - mancal direito.

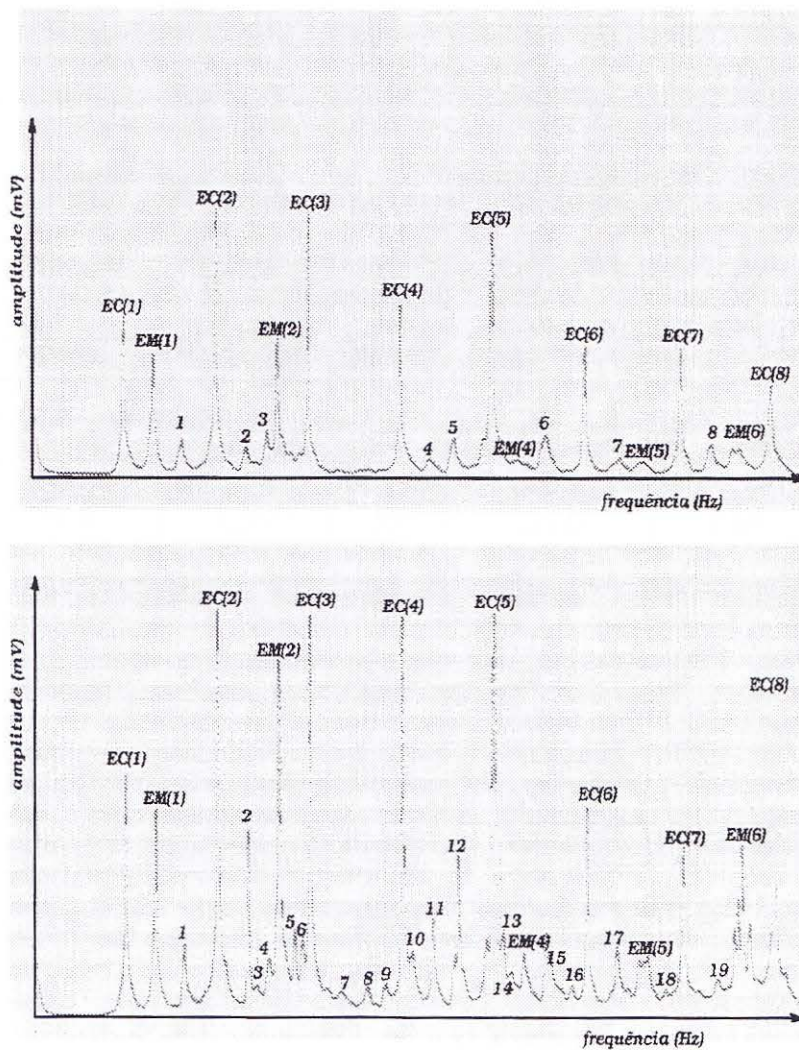


Figura 6.15: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 45 Hz - mancal central.

	Inclinação 0°			Inclinação 4°		
	Frequência	Amplitude		Frequência	Amplitude	Fonte
	(Hz)	(mV)		(Hz)	(mV)	
EC(1)	45.0		EC(1)	45.0		eixo Cardan
EM(1)	58.3		EM(1)	58.3		motor
1	74.0	1.46	1	74.0	1.46	—
EC(2)	90.0		EC(2)	90.0		harmônico
2	105.0	1.28	2	105.0	3.05	1ª FREQ. NAT.
			3	109.0	0.682	—
3	115.5	1.67	4	115.5	1.16	—
EM(2)	116.6		EM(2)	116.6		harmônico
			5	127.5	1.60	—
			6	131.5	1.48	—
EC(3)	135.0		EC(3)	135.0		harmônico
			7	150.0	0.60	—
			8	163.0	0.66	—
			9	172.5	0.86	—
EC(4)	180.0		EC(4)	180.0		harmônico
			10	185.0	1.20	—
4	195.5	0.95	11	195.5	1.68	—
5	207.0	1.30	12	208.0	2.67	2ª FREQ. NAT.
EC(5)	225.0		EC(5)	225.0		harmônico
			13	230.0	1.56	—
			14	232.0	0.91	—
EM(4)	233.2		EM(4)	233.2		harmônico
6	251.0	1.51	15	251.0	1.49	—
			16	263.0	0.74	—
EC(6)	270.0		EC(6)	270.0		harmônico
7	288.5	0.916	17	285.5	1.39	—
EM(5)	291.5		EM(5)	291.5		harmônico
			18	308.0	.63	—
EC(7)	315.0		EC(7)	315.0		harmônico
8	331.0	1.18	19	332.5	0.81	—
EM(6)	342.5	1.21	EM(6)	341.5	1.68	harmônico
EC(8)	360.0		EC(8)	360.0		harmônico
Total	27.0 mV		Total	29.9 mV		

Tabela 6.6: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 45 Hz - mancal central.

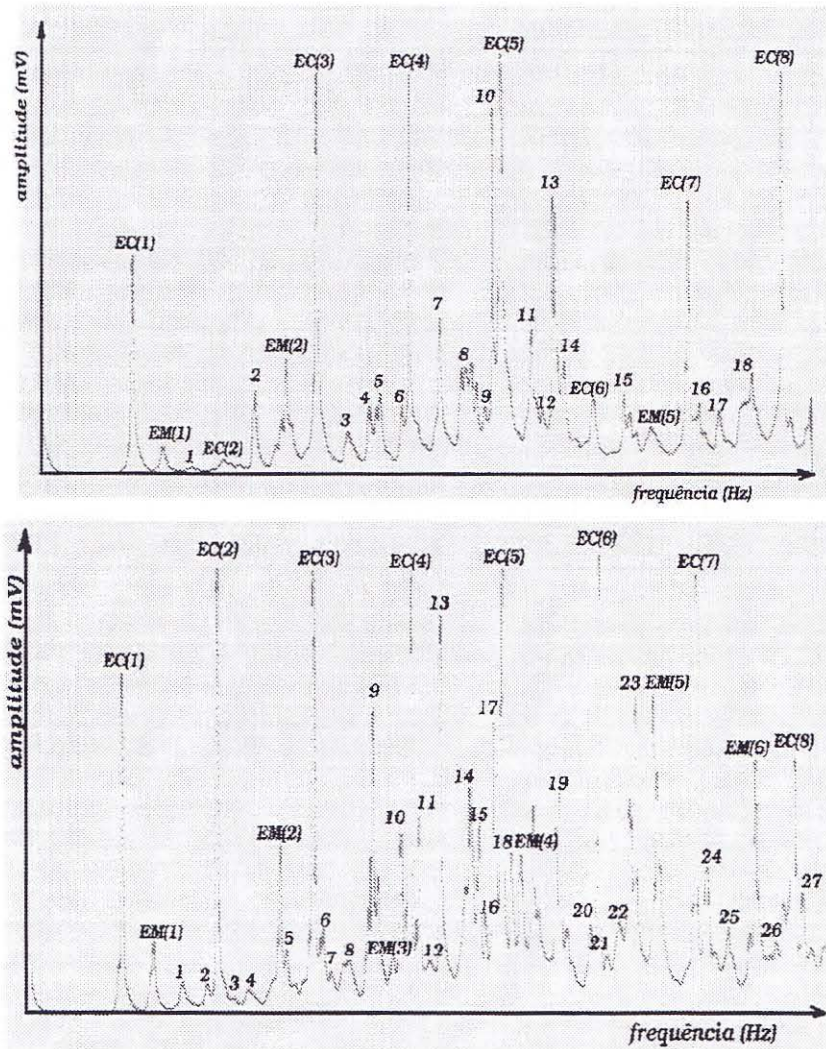


Figura 6.16: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 45 Hz - mancal esquerdo.

	Inclinação 0°			Inclinação 4°		
	Frequência	Amplitude		Frequência	Amplitude	Fonte
	(Hz)	(mV)		(Hz)	(mV)	
EC(1)	45.0		EC(1)	45.0		eixo Cardan
EM(1)	58.3		EM(1)	58.3		motor
1	74.0	0.36	1	74.0	0.71	—
			2	86.0	0.74	—
EC(2)	90.0		EC(2)	90.0		harmônico
			3	94.5	0.61	—
2	105.0	1.97	4	105.0	0.58	1ª FREQ. NAT.
EM(2)	116.6		EM(2)	116.6		harmonico
			5	123.5	1.19	—
EC(3)	135.0		EC(3)	135.0		harmônico
			6	140.0	1.6	—
			7	144.0	0.86	—
3	150.0	1.13	8	150.0	0.99	—
4	160.5	1.61	9	163	4.43	—
5	166.0	1.79				—
			EM(3)	173.0	1.15	harmônico
6	176.5	1.71	10	176.5	2.79	—
EC(4)	180.0		EC(4)	180.0		harmônico
			11	185.0	2.98	—
			12	191.0	0.87	—
7	195.0	2.96	13	195.0	5.42	—
8	211.0	2.39	14	209.5	3.43	2ª FREQ. NAT.
			15	214.0	2.90	—
9	217.5	1.64	16	217.5	1.76	—
10	221.5	6.53	17	222.0	6.07	—
EC(5)	225.0		EC(5)	225.0		harmônico
			18	230.0	2.37	—
			EM(4)	234.5	2.41	harmônico
11	240.5	2.88				—
12	246.0	1.43				—
13	251.0	5.11	19	253.0	3.13	—
14	256.0	2.38				—
			20	267.0	1.52	—
EC(6)	270.0		EC(6)	270.0		harmônico
			21	275.5	1.05	—
			22	281.5	1.45	—

Tabela 6.7: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 45 Hz - mancal esquerdo.

	Inclinação 0°			Inclinação 4°		
	Frequência	Amplitude		Frequência	Amplitude	Fonte
	(Hz)	(mV)		(Hz)	(mV)	
Ponto						
15	285.0	1.86	23	288.5	4.33	—
EM(5)	291.5		EM(5)	296.5	4.56	harmônico
EC(7)	315.0		EC(7)	315.0		harmônico
16	321.5	1.60	24	321.5	2.10	3ª FREQ. NAT.
17	330.0	1.48	25	331.0	1.42	—
			EM(6)	343.5	3.83	harmônico
18	346.5	2.18				—
			26	353.5	1.26	—
EC(8)	360.0		EC(8)	360.0		harmônico
			27	365.5	2.10	—
Total	38.6 mV		Total	39.8 mV		

Tabela 6.8: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 45 Hz - mancal esquerdo.

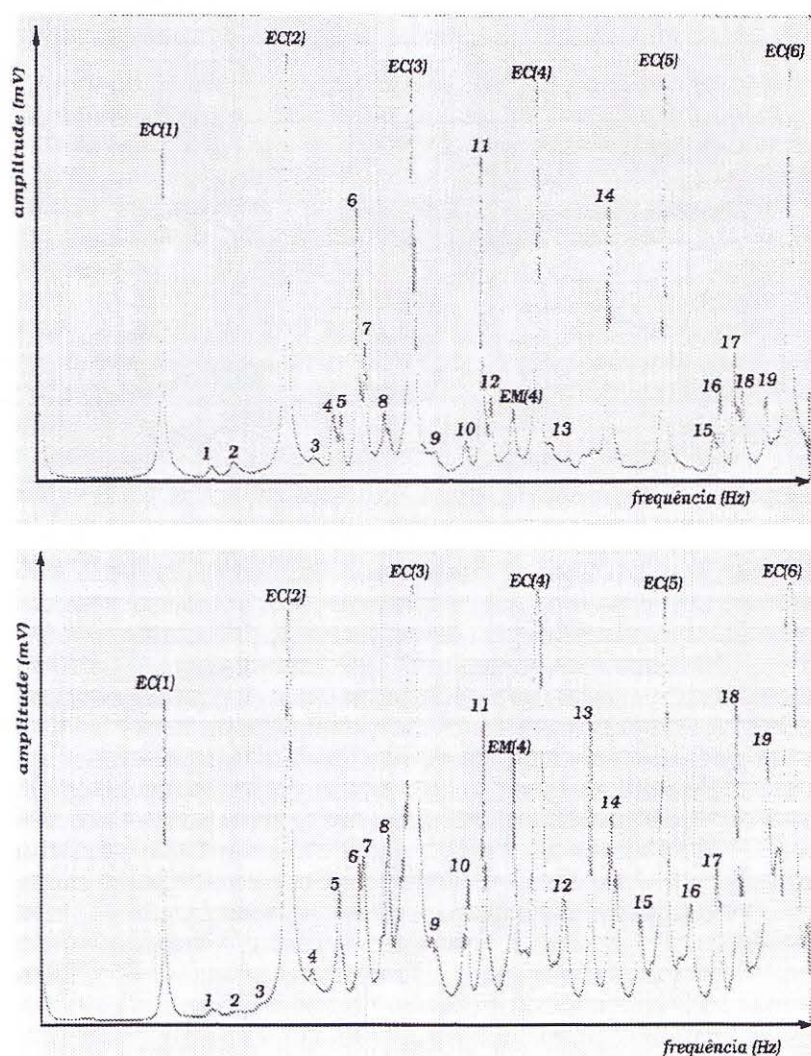


Figura 6.17: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 61 Hz - mancal direito.

	Inclinação 0°			Inclinação 4°		
	Frequência (Hz)	Amplitude (mV)		Frequência (Hz)	Amplitude (mV)	Fonte
EC(1)	61.0		EC(1)	61.0		eixo Cardan
1	86.0	0.49	1	85.5	0.35	—
2	97.0	0.53	2	97.5	0.27	1ª FREQ. NAT.
			3	110.0	0.36	—
EC(2)	122.0		EC(2)	122.0		harmônico
3	135.0	0.68	4	134.0	0.92	—
4	145.0	1.24	5	147.0	1.96	—
5	149.5	1.42				—
6	156.5	4.31	6	156.5	2.35	—
7	160.5	2.34	7	159.0	2.11	—
8	170.5	1.44	8	171.5	2.43	—
EC(3)	183.0		EC(3)	183.0		harmônico
9	196.5	0.65	9	193.0	1.27	—
10	210.5	0.87	10	210.0	2.09	2ª FREQ. NAT.
11	217.5	4.96	11	217.5	3.95	—
12	222.0	1.69				—
EM(4)	233.0	1.43	EM(4)	232.5	3.53	harmônico
EC(4)	244.0		EC(4)	244.0		harmônico
13	251.5	0.84	12	256.0	1.73	—
			13	269.0	3.93	—
14	279.0	4.35	14	279.0	2.86	—
			15	293.5	1.69	—
EC(5)	305.0		EC(5)	305.0		harmônico
			16	318.5	1.61	3ª FREQ. NAT.
15	330.5	1.00	17	330.0	2.04	—
16	333.0	1.76				—
17	340.0	2.40	18	340.0	4.08	—
18	344.5	1.62				—
19	355.5	1.71	19	355.0	3.49	—
EC(6)	366.0		EC(6)	366.0		harmônico
Total	43.0 mV		Total	64.4 mV		

Tabela 6.9: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 61 Hz - mancal direito.

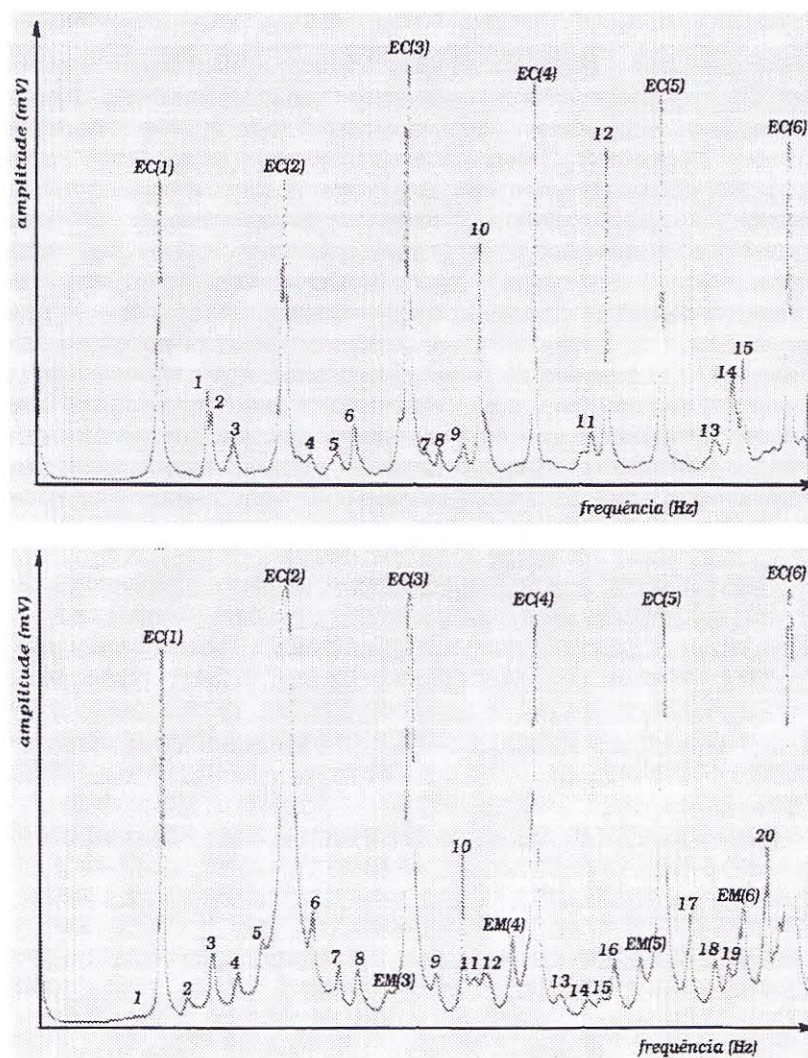


Figura 6.18: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 61 Hz - mancal central.

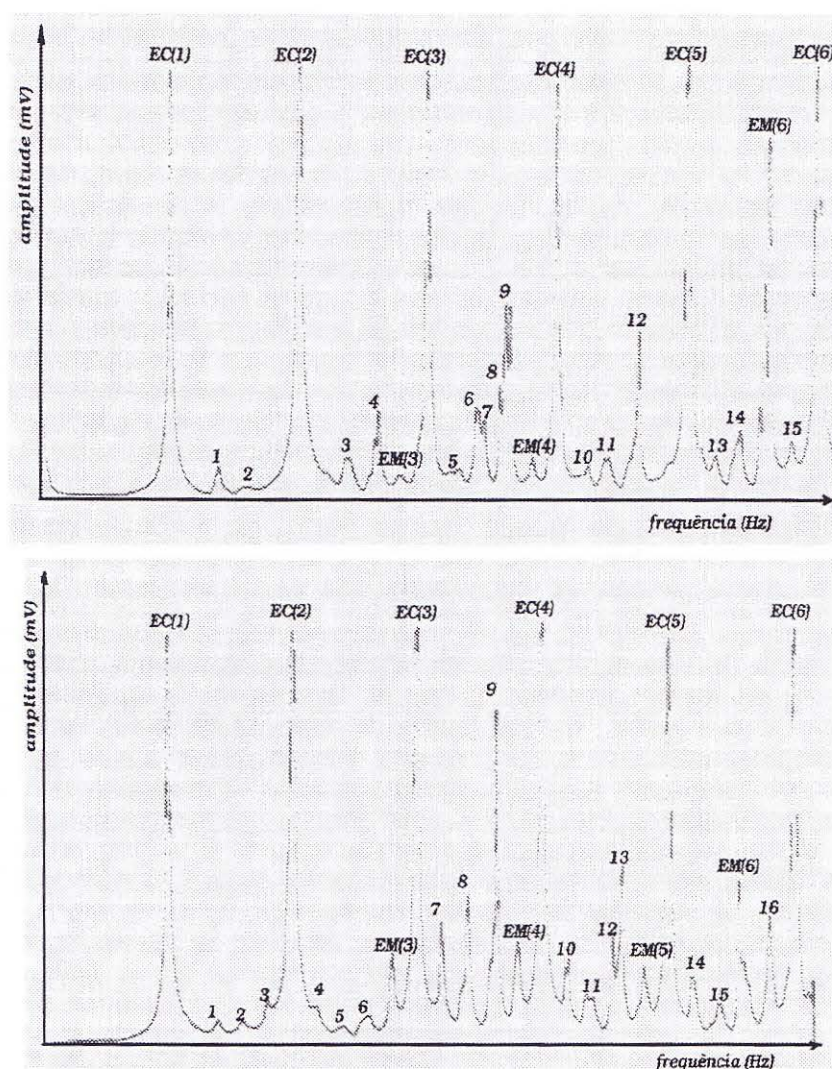


Figura 6.19: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 61 Hz - mancal esquerdo.

6.6.5 Influência da Rotação na Aceleração dos Apoios do Eixo Cardan

Constatou-se que a aceleração transversal dos mancais é diretamente influenciada pela rotação do eixo Cardan. Mediram-se as acelerações nos mancais das extremidades e central, em duas rotações distintas, chegando-se a tabela 6.12.

6.6.6 Análise Numérica

O método das matrizes de transferência, MMT, é utilizado como ferramenta numérica para análise das frequências naturais, velocidades críticas, esforços internos, deslocamentos e modos de vibração de um eixo Cardan. Foram, também, implementados a análise temporal do sistema, permitindo assim uma análise não linear, e a análise da estabilidade do sistema. A seguir, apresentam-se os resultados obtidos e os valores utilizados na simulação do eixo Cardan de dupla seção.

Os resultados obtidos numericamente auxiliarão, juntamente com os dados experimentais, na confirmação das propriedades que caracterizam o sistema.

	Inclinação 0°			Inclinação 4°		
	Frequência	Amplitude		Frequência	Amplitude	Fonte
	(Hz)	(mV)		(Hz)	(mV)	
			1	49.5	0.34	—
EC(1)	61.0		EC(1)	61.0		eixo Cardan
			2	73.0	0.75	—
1	84.5	2.65				—
2	86.0	2.12	3	86.0	1.59	—
3	97.5	1.54	4	98.5	1.25	1ª FREQ. NAT.
			5	110.5	1.81	—
EC(2)	122.0		EC(2)	122.0		harmônico
4	134.0	0.89	6	135.0	2.3	—
5	147.0	1.14	7	147.0	1.49	—
6	156.5	1.78	8	156.5	1.48	—
			EM(3)	171.5	0.93	harmônico
EC(3)	183.0		EC(3)	183.0		harmônico
7	192.5	0.96	9	195.0	1.18	—
8	198.0	1.26				—
9	210.5	1.39	10	208.0	3.49	2ª FREQ. NAT.
			11	214.0	1.14	—
10	217.5	5.88	12	218.0	1.19	—
			EM(4)	232.5	1.99	harmônico
EC(4)	244.0		EC(4)	244.0		harmônico
			13	256.5	0.80	—
11	271.5	1.55	14	269.0	0.71	—
12	278.5	7.75	15	275.0	0.78	—
			16	281.0	1.71	—
			EM(5)	294.0	1.59	harmônico
EC(5)	305.0		EC(5)	305.0		harmônico
			17	318.5	2.38	3ª FREQ. NAT.
13	330.5	1.36	18	330.0	1.14	—
14	339.5	3.07	19	336.0	1.30	—
EM(6)	344.0	3.36	EM(6)	343.0	2.26	harmônico
			20	355.0	3.51	—
EC(6)	366.0		EC(6)	366.0		harmônico
Total	38.5 mV		Total	85.5 mV		

Tabela 6.10: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 61 Hz - mancal central.

Inclinação 0°			Inclinação 4°			
	Frequência	Amplitude		Frequência	Amplitude	Fonte
	(Hz)	(mV)		(Hz)	(mV)	
EC(1)	61.0		EC(1)	61.0		eixo Cardan
1	84.5	0.87	1	86.0	0.62	—
2	97.5	0.33	2	98.5	0.56	1ª FREQ. NAT.
			3	110.5	1.01	—
EC(2)	122.0		EC(2)	122.0		harmônico
			4	134.0	0.79	—
3	145.5	0.88	5	147.0	0.41	—
4	160.5	1.55	6	156.5	0.65	—
EM(3)	170.5	0.69	EM(3)	171.5	1.79	harmônico
EC(3)	183.0		EC(3)	183.0		harmônico
5	199.0	0.69	7	195.0	2.07	—
6	206.5	1.77	8	208.0	2.54	—
7	210.5	1.51				2ª FREQ. NAT.
8	217.5	2.12				—
9	222.0	3.15	9	222.5	5.15	—
EM(4)	233.0	0.98	EM(4)	232.5	1.77	harmônico
EC(4)	244.0		EC(4)	244.0		harmônico
10	260.0	0.78	10	257.5	1.66	—
11	267.5	0.93	11	266.5	1.10	—
12	283.0	2.80	12	279.0	2.11	—
			13	283.5	2.94	—
			EM(5)	294.0	1.51	harmônico
EC(5)	305.0		EC(5)	305.0		harmônico
13	319.0	0.97	14	317.5	1.46	3ª FREQ. NAT.
14	330.5	1.31	15	330.5	0.92	—
EM(6)	344.0	5.27	EM(6)	340.0	2.73	harmônico
15	355.0	1.06	16	355.0	2.17	—
EC(6)	366.0		EC(6)	366.0		harmônico
Total	58.9 mV		Total	62.9 mV		

Tabela 6.11: Autoespectro - inclinação 0° e 4° - rotação do cardan: 61 Hz - mancal esquerdo

rotação do eixo Cardan	45 Hz	61 Hz
mancal direito - 0°	44.9 mV	43.0 mV
mancal direito - 4°	34.8 mV	64.4 mV
mancal central - 0°	27.0 mV	38.5 mV
mancal central - 4°	29.9 mV	85.5 mV
mancal esquerdo - 0°	38.6 mV	58.9 mV
mancal esquerdo - 4°	39.8 mV	62.9 mV

Tabela 6.12: Variação da aceleração transversal nos mancais de apoio em função da rotação do eixo Cardan.

SEGMENTO 1	
comprimento (m)	0.67
massa (kg)	2.03
momento de inércia transversal de área (m^4)	$2.6859 \cdot 10^{-7}$
momento de inércia transversal de massa ($kg \cdot m^2$)	$7.1748 \cdot 10^{-4}$
momento de inércia polar de área (m^4)	$5.3718 \cdot 10^{-7}$
momento de inércia polar de massa ($kg \cdot m^2$)	$1.2318 \cdot 10^{-4}$
raio (m)	$3.76 \cdot 10^{-2}$
área da seção transversal (m^2)	$3.864 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.13: Propriedades mecânicas do Segmento 1.

SEGMENTO 2	
comprimento (m)	0.195
massa (kg)	2.32
momento de inércia transversal de área (m^4)	$1.84 \cdot 10^{-7}$
momento de inércia transversal de massa ($kg \cdot m^2$)	$2.81 \cdot 10^{-4}$
momento de inércia polar de área (m^4)	$3.68 \cdot 10^{-7}$
momento de inércia polar de massa ($kg \cdot m^2$)	$5.61 \cdot 10^{-4}$
raio (m)	$2.2 \cdot 10^{-2}$
área da seção transversal (m^2)	$1.52 \cdot 10^{-3}$

Tabela 6.14: Propriedades mecânicas do Segmento 2.

6.6.7 Propriedades Mecânicas e Geométricas do Eixo Cardan de Dupla Seção Estudado

Nas tabelas 6.13 até 6.17 são apresentadas as propriedades mecânicas e as grandezas geométricas do eixo Cardan de dupla seção estudado, que está apresentado na figura 6.9.

6.6.8 Discretização do sistema

A discretização do sistema é fundamental para atingir os objetivos em uma análise numérica, pois quanto mais próximo da realidade, mais precisos serão os resultados.

O algoritmo desenvolvido permite análises no domínio do tempo e da frequência. Como a abordagem analítica é diferente nos algoritmos utilizados, elementos diferentes foram implementados na análise numérica, para cada situação. Neste capítulo os elementos implementados serão

SEGMENTO 3	
comprimento (m)	0.785
massa (kg)	2.378
momento de inércia transversal de área (m^4)	$2.6859 \cdot 10^{-7}$
momento de inércia transversal de massa ($kg \cdot m^2$)	$8.4048 \cdot 10^{-4}$
momento de inércia polar de área (m^4)	$5.3718 \cdot 10^{-7}$
momento de inércia polar de massa ($kg \cdot m^2$)	$1.4429 \cdot 10^{-4}$
raio (m)	$3.76 \cdot 10^{-2}$
área da seção transversal (m^2)	$3.864 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.15: Propriedades mecânicas do Segmento 3.

JUNTA CARDAN	
massa (kg)	2.038
rigidez angular ($\frac{N}{rad}$)	~ 0
momento de inércia polar de massa ($kg.m^2$)	~ 0
momento de inércia transversal de massa ($kg.m^2$)	~ 0

Tabela 6.16: Propriedades mecânicas da junta Cardan.

MANCAL DE APOIO CENTRAL	
massa (kg)	2.756
rigidez transversal algoritmica ($\frac{N}{m}$)	$4.5.10^{-6}$
rigidez angular ($\frac{N}{rad}$)	~ 0

Tabela 6.17: Propriedades mecânicas do mancal de apoio central.

apenas citados, deixando uma descrição mais detalhada para o Capítulo 2.

No MMT, os elementos utilizados na discretização do sistema encerram as propriedades dinâmicas e as relações de equilíbrio. Os elementos que foram implementados no programa desenvolvido estão no Apêndice I.

Considerando apenas às vibrações laterais:

Para análise no domínio da frequência, foram utilizados 3 (três) classes de elementos na discretização do eixo Cardan, ver figura 6.20- (A):

Elemento 1: representa os eixos tubulares e o conjunto eixo-luva do eixo Cardan, Apêndice I, elementos 7.1 e 7.4.

Elemento 2: representa as juntas universais ou juntas Cardan, Apêndice I, elemento 7.7.

Elemento 3: representa o mancal central, Apêndice I, elemento 7.5.

Na análise no domínio do tempo, foram utilizados 4 classes de elementos na discretização do eixo Cardan, ver figura 6.20- (B):

Elemento 4: representa os segmentos tubulares do eixo, permitindo uma variação de inclinação em relação às juntas universais, simulando a existência de um momento secundário em seus extremos devida à esta variação de inclinação, Capítulo 2, matrizes 2.104 e 2.105.

Elemento 5: representa as juntas universais ou juntas Cardan, Capítulo 2, matriz 2.99.

Elemento 6: representa o conjunto eixo-luva que faz a conexão entre os 2 (dois) eixos Cardan que constituem o sistema de eixo Cardan de dupla seção. Simula a variação de comprimento no tempo devido à inclinação do elemento 4, resultado do movimento da suspensão do veículo, Capítulo 2, matriz 2.102.

Elemento 7: representa o mancal central. Simula a aplicação de uma carga com uma frequência que é duas vezes o valor da frequência de rotação, Capítulo 2, matriz 2.106.

Em ambas as representações, as condições de contorno são de apoio simples.

Para simular o comportamento dinâmico do eixo Cardan de dupla seção da forma mais coerente possível com sua realidade operacional, algumas considerações relativas aos parâmetros que constituem o conjunto eixo Cardan estudado, baseadas na pesquisa bibliográfica, como o trabalho de Gillespie, 1992, são utilizadas. A inclinação do segmento 3, que conecta o diferencial traseiro

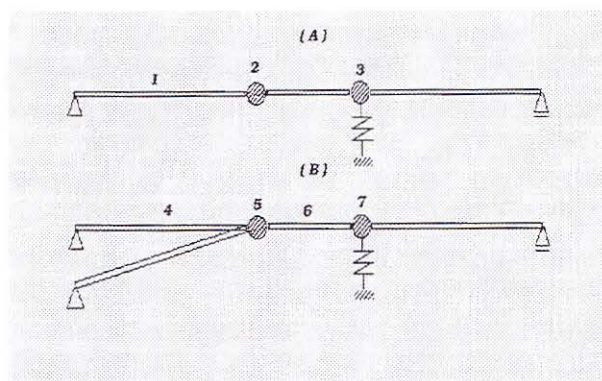


Figura 6.20: Discretização do eixo Cardan. Modelos utilizado para simulação (A) no domínio da frequência e (B) no domínio do tempo.

do veículo à junta Cardan, ligada ao conjunto eixo-luva é de 5 (cinco) graus. Como a suspensão traseira, que ajuda a sustentar o sistema traseiro de transmissão, realiza um movimento vertical devido às irregularidades no piso onde circula o veículo, este movimento é transferido para o eixo Cardan como uma variação da inclinação do segmento 3, que por sua vez gera uma variação no comprimento do conjunto eixo-luva com a frequência e amplitudes diretamente proporcionais. Este movimento é aproximado por uma função harmônica com valores de frequência de 1Hz, 5Hz, 10Hz e 15Hz, seguindo os resultados propostos no trabalho de Gillespie, 1992. Adotam-se, também, variações de amplitude na inclinação do segmento 3 de 1 grau, 3 graus e 5 graus. O conjunto de cada uma das combinações cruzadas, destas variações no tempo são utilizadas para representar numericamente o comportamento dinâmico do eixo Cardan na sua faixa operacional. Estas variações geométricas do conjunto eixo Cardan, devido à variação da inclinação do segmento 3 no tempo, geram, também, flutuações no valor do momento secundário atuante, pois este é dependente da rotação do sistema e da inclinação do segmento 3.

Considerando apenas às vibrações torsionais:

Foi realizado apenas análise no domínio da frequência e, para atingir este objetivo, utilizou-se 3 (três) classes de elementos na discretização do eixo Cardan, ver figura. 6.20- (A):

Elemento 1: representa os eixos tubulares e a luva do eixo Cardan, Apêndice I, elemento 7.14.

Elemento 2: representa as juntas universais ou juntas Cardan, Apêndice I, elemento 7.15.

Elemento 3: representa o mancal central, Apêndice I, elemento 7.15.

6.6.9 Vibração Angular ou Torsional

A vibração torsional em um eixo Cardan de dupla seção pode ocorrer por dois motivos:

1- ângulos diferentes entre as juntas Cardan que limitam o segmento de eixo inclinado, i.e., entre a luva deslizante e o diferencial traseiro;

2- variação da aceleração angular inercial devido ao fato do eixo Cardan estar inclinado, acarretando uma velocidade angular constante de entrada e uma velocidade angular de saída variável, conforme já foi abordado anteriormente.

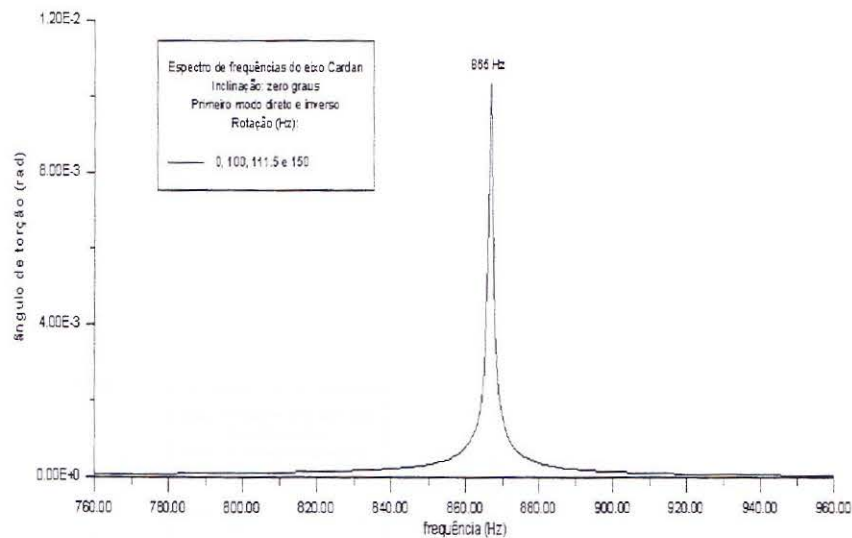


Figura 6.21: Espectro do primeiro modo torsional do eixo Cardan de dupla seção.

Neste trabalho, devido ao modelo experimental proposto, somente o segundo item foi considerado.

Na figura 6.21 é mostrado o espectro de frequências para o primeiro modo torsional, onde é identificada a frequência fundamental torsional com um valor de 865 Hz.

Uma análise com o eixo Cardan inclinado e com variação de comprimento não indicou nenhuma alteração nos valores obtidos pela figura 6.21.

6.6.10 Vibração por Flexão ou Lateral

A análise numérica da vibração lateral do eixo Cardan é dividida em dois grupos:

1- eixo Cardan alinhado axialmente e sem movimentos da suspensão traseira, conforme a figura 6.20- (A);

2- eixo Cardan com sua parte traseira inclinada e movimentos da suspensão traseira, conforme a figura 6.20- (B).

Nas figuras 6.22 até 6.24 estão apresentados os resultados numéricos para o eixo Cardan alinhado axialmente e sem movimentos da suspensão traseira e, nas figuras 6.25 até 6.37 são apresentados os resultados para o eixo Cardan desalinhado axialmente, com os movimentos da suspensão traseira e sem os movimentos da suspensão.

6.6.11 Resultados Experimentais - Vibração Torsional

Não foram realizados ensaios experimentais para a determinação das frequências torsionais.

6.6.12 Resultados Experimentais -Vibração lateral

A figura 6.10 fornece as três primeiras frequências naturais para o eixo Cardan alinhado axialmente e sem movimentos da suspensão traseira com rotação nula: 103 Hz, 211.5 Hz e 321.5

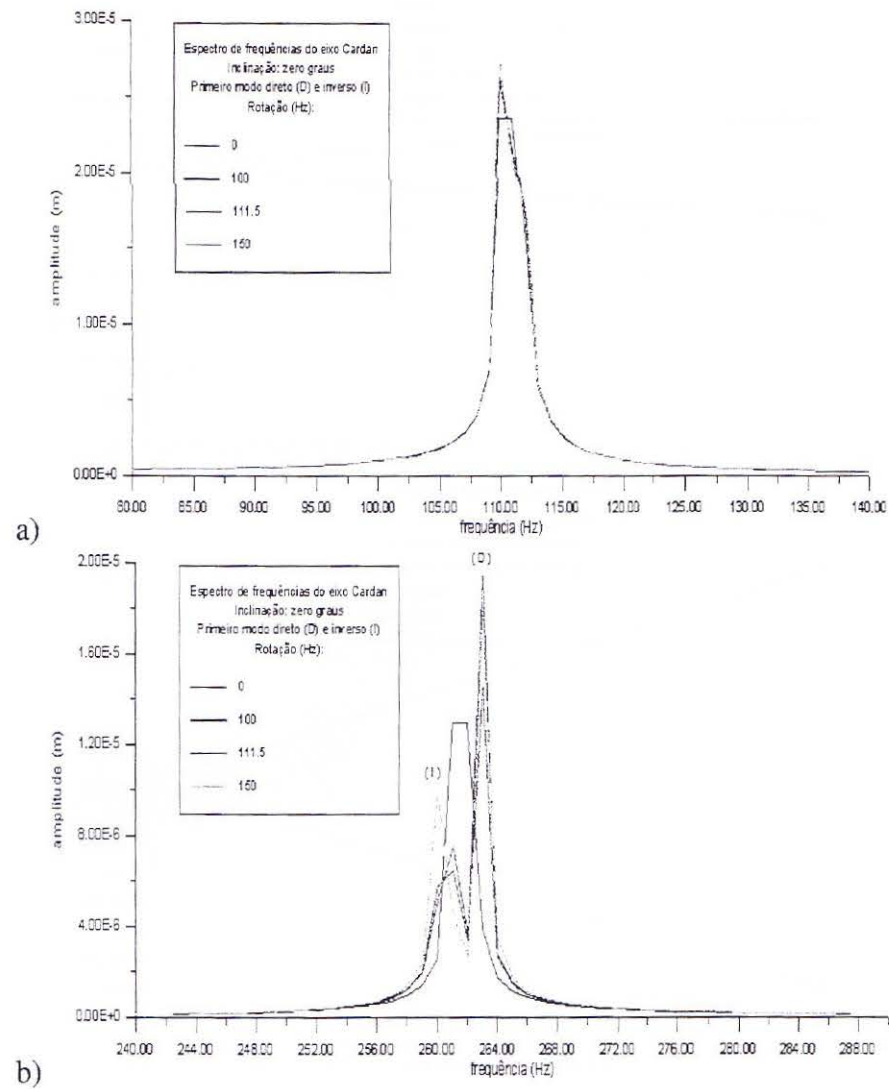


Figura 6.22: Espectros de frequências do eixo Cardan alinhado axialmente. a) Primeiro e b) segundo modos laterais.

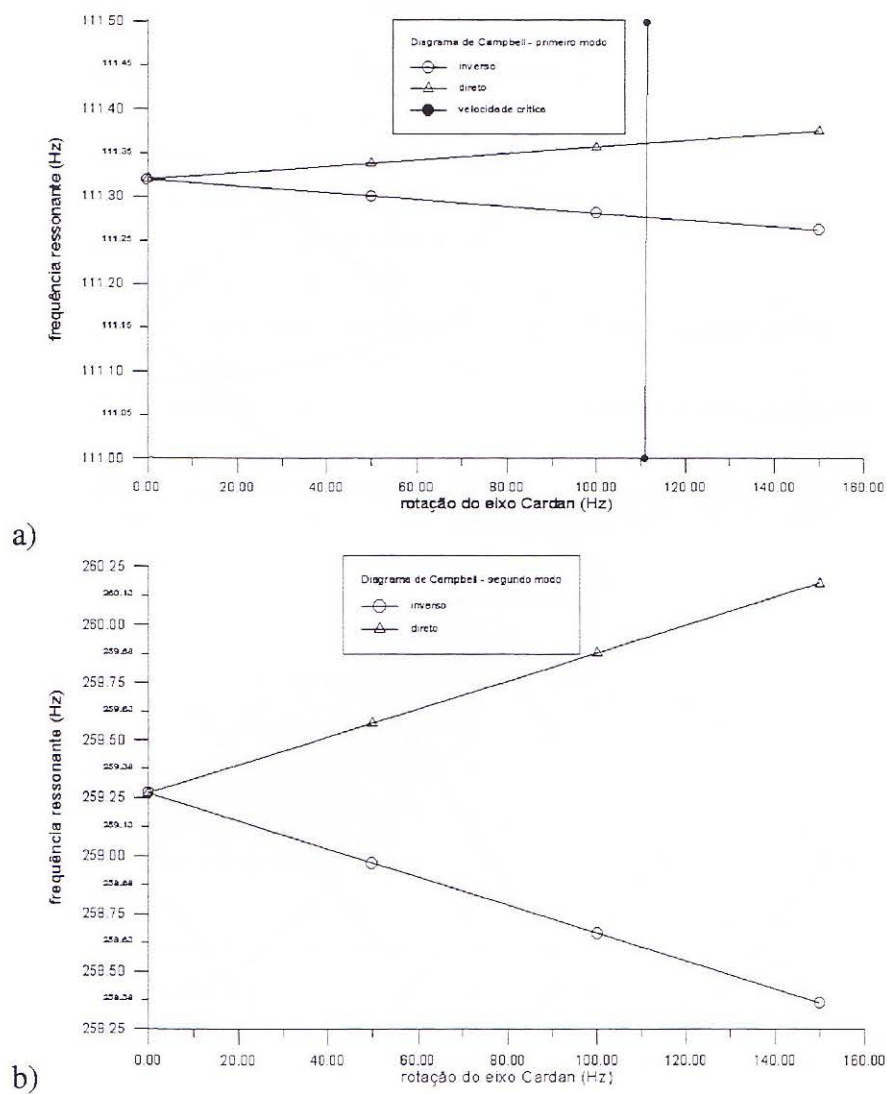


Figura 6.23: Diagramas de Campbell do eixo Cardan alinhado axialmente. a) Primeiro e b) segundo modos laterais.

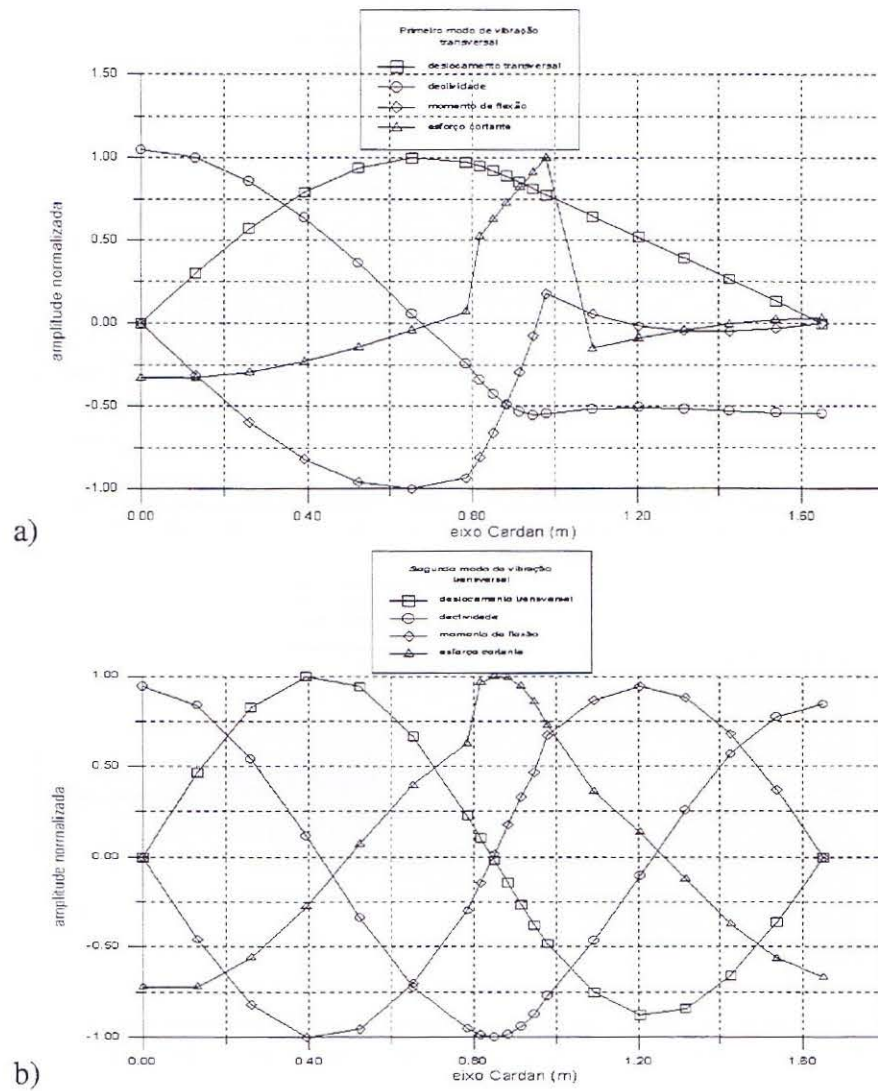


Figura 6.24: Modos de vibração do eixo Cardan alinhado axialmente. a) Primeiro e b) segundo modos laterais.

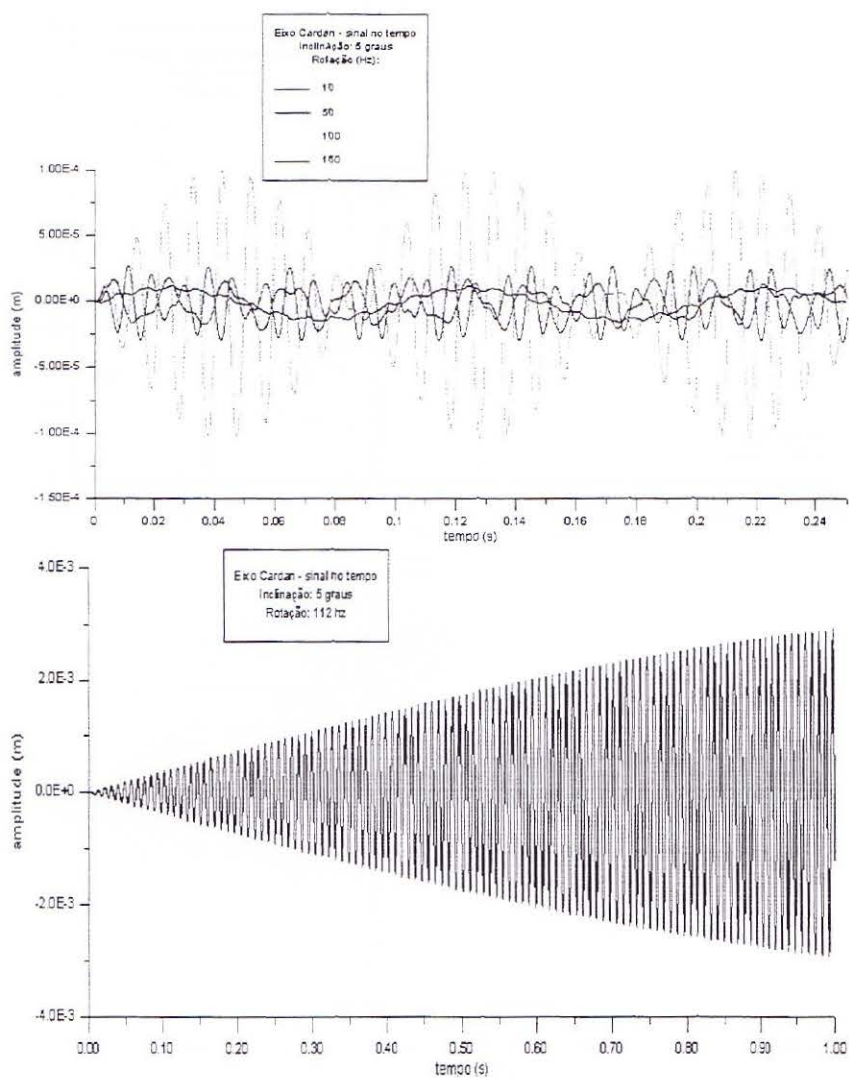


Figura 6.25: Sinais no tempo para o eixo Cardan inclinado 5 graus e sem movimento da suspensão traseira.

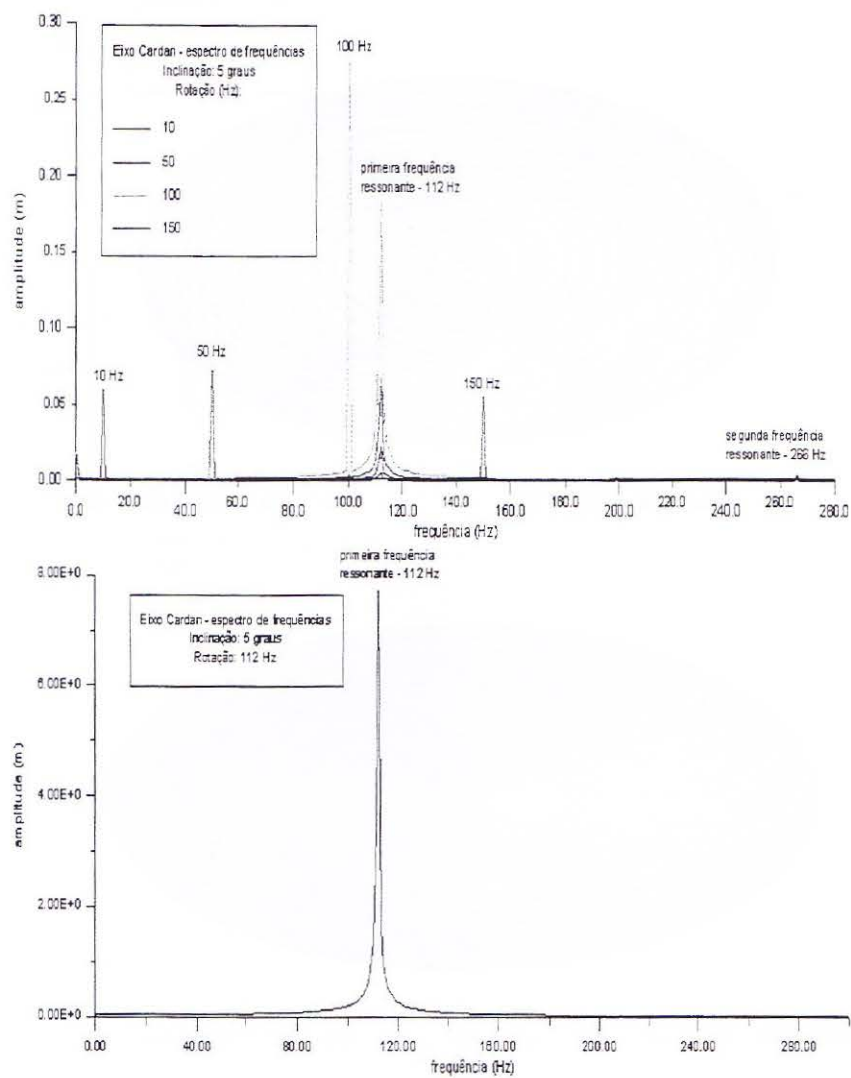


Figura 6.26: Espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus e sem movimento da suspensão traseira.

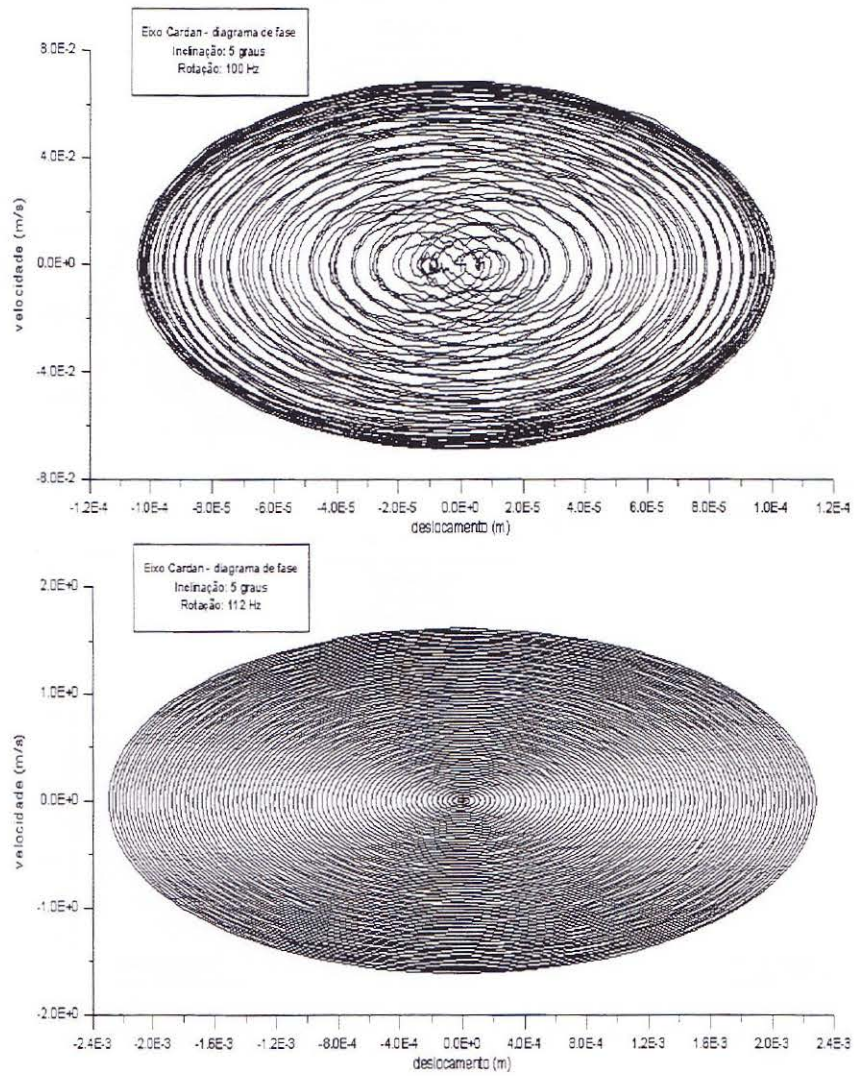


Figura 6.27: Diagramas de fase para o eixo Cardan inclinado 5 graus e sem movimento da suspensão traseira.

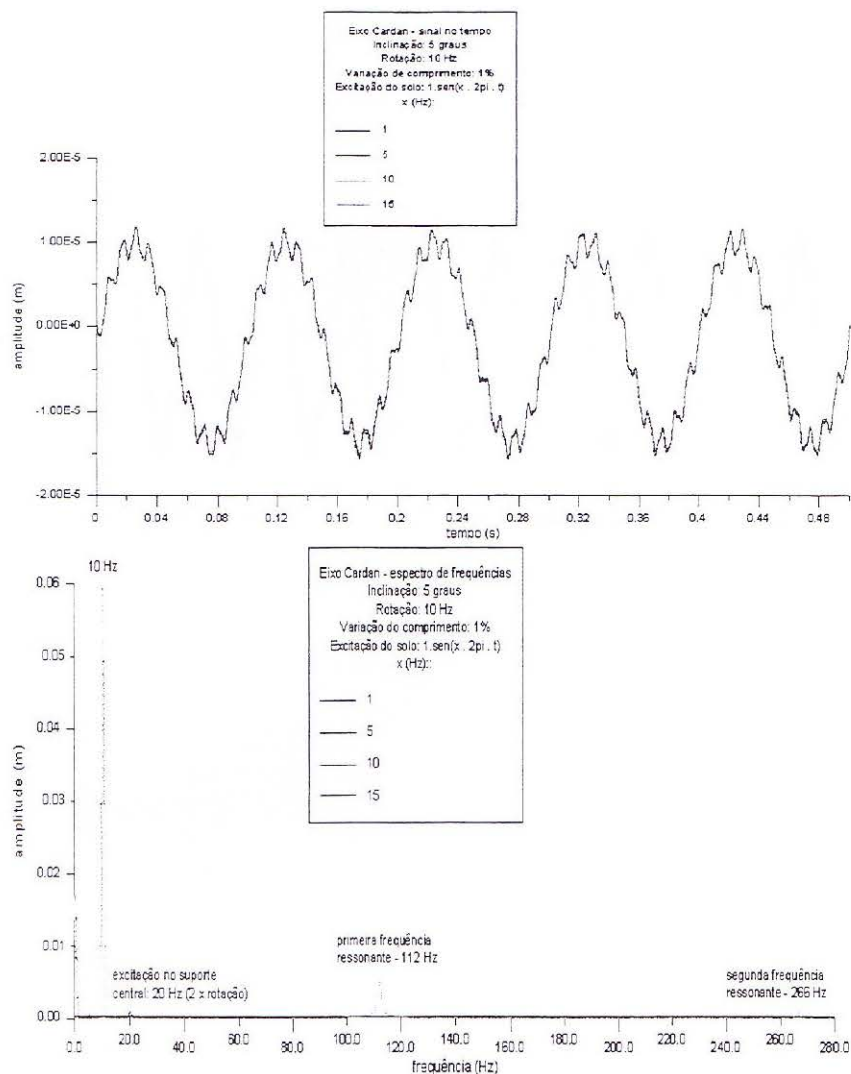


Figura 6.28: Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 10 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 1 % no conjunto de eixo-luva.

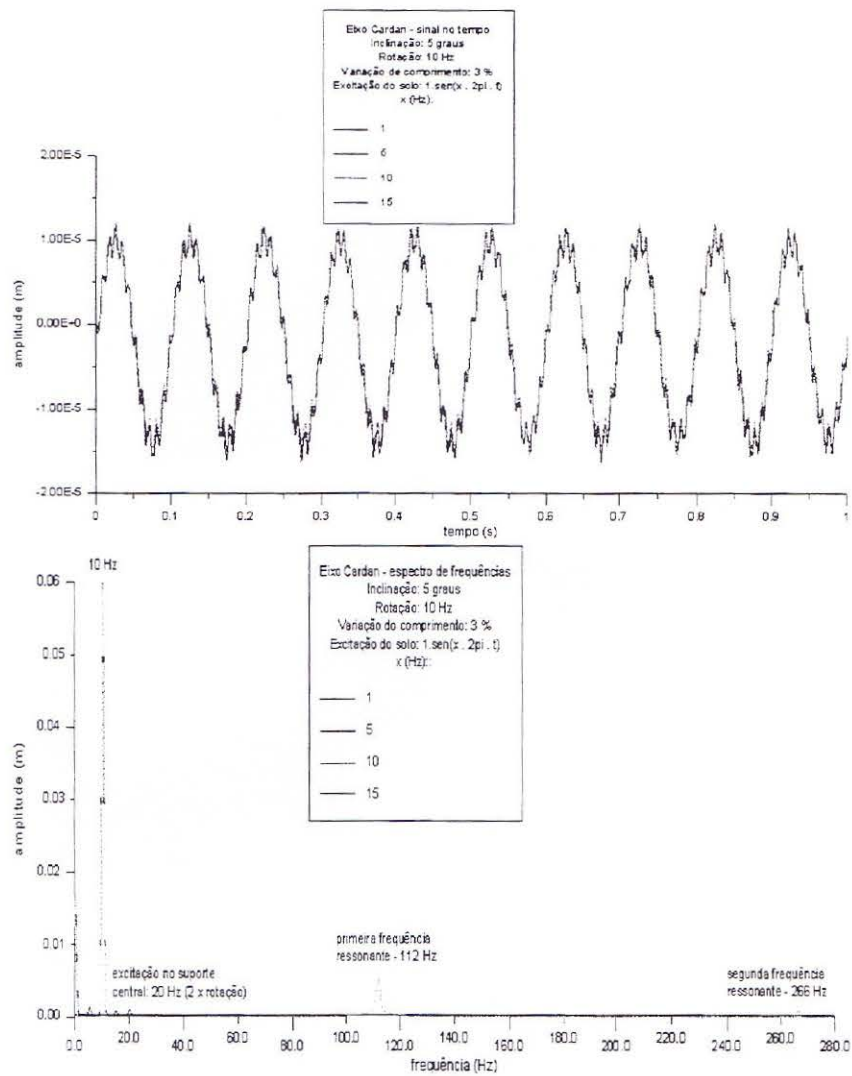


Figura 6.29: Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 10 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 3 % no conjunto de eixo-luva.

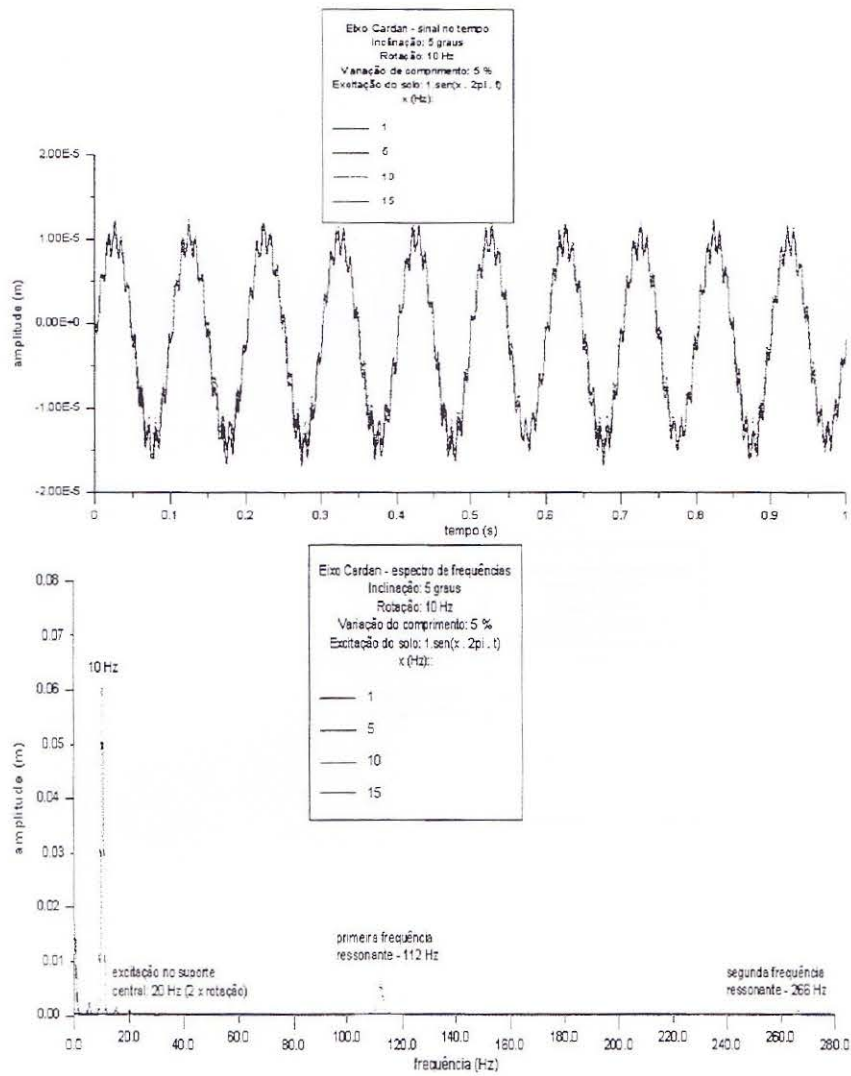


Figura 6.30: Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 10 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 5 % no conjunto de eixo-luva.

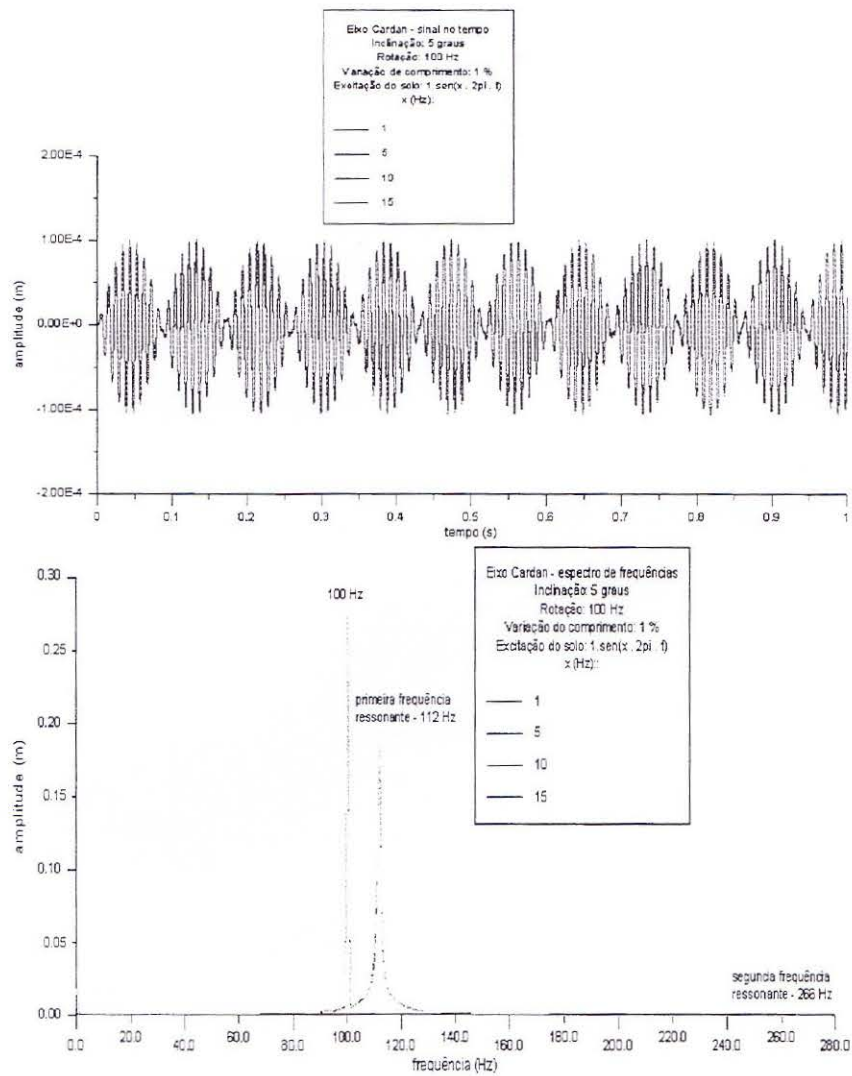


Figura 6.31: Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 100 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 1 % no conjunto de eixo-lua.

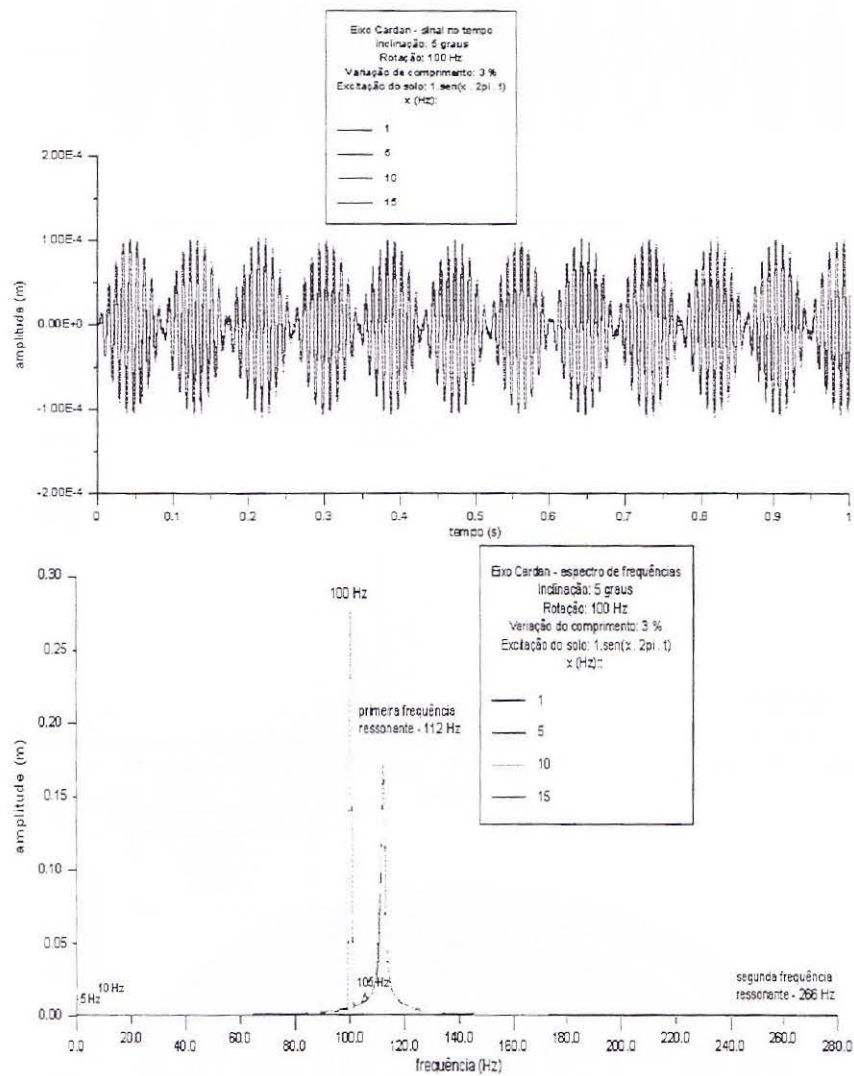


Figura 6.32: Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 100 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de 3 % no conjunto de eixo-luva.

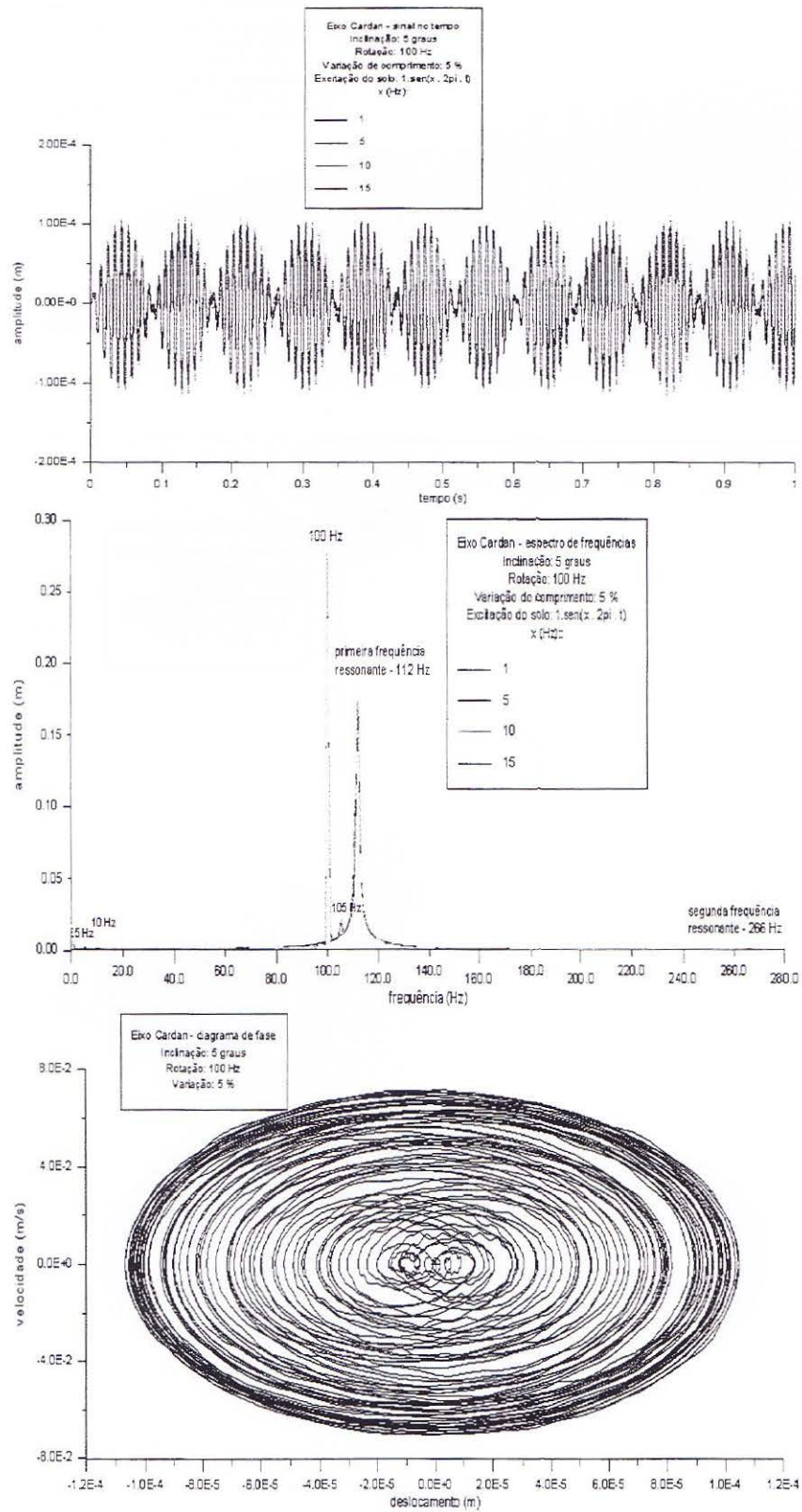


Figura 6.33: Sinais no tempo e espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 100 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de comprimento de 5 % no conjunto de eixo-luva.

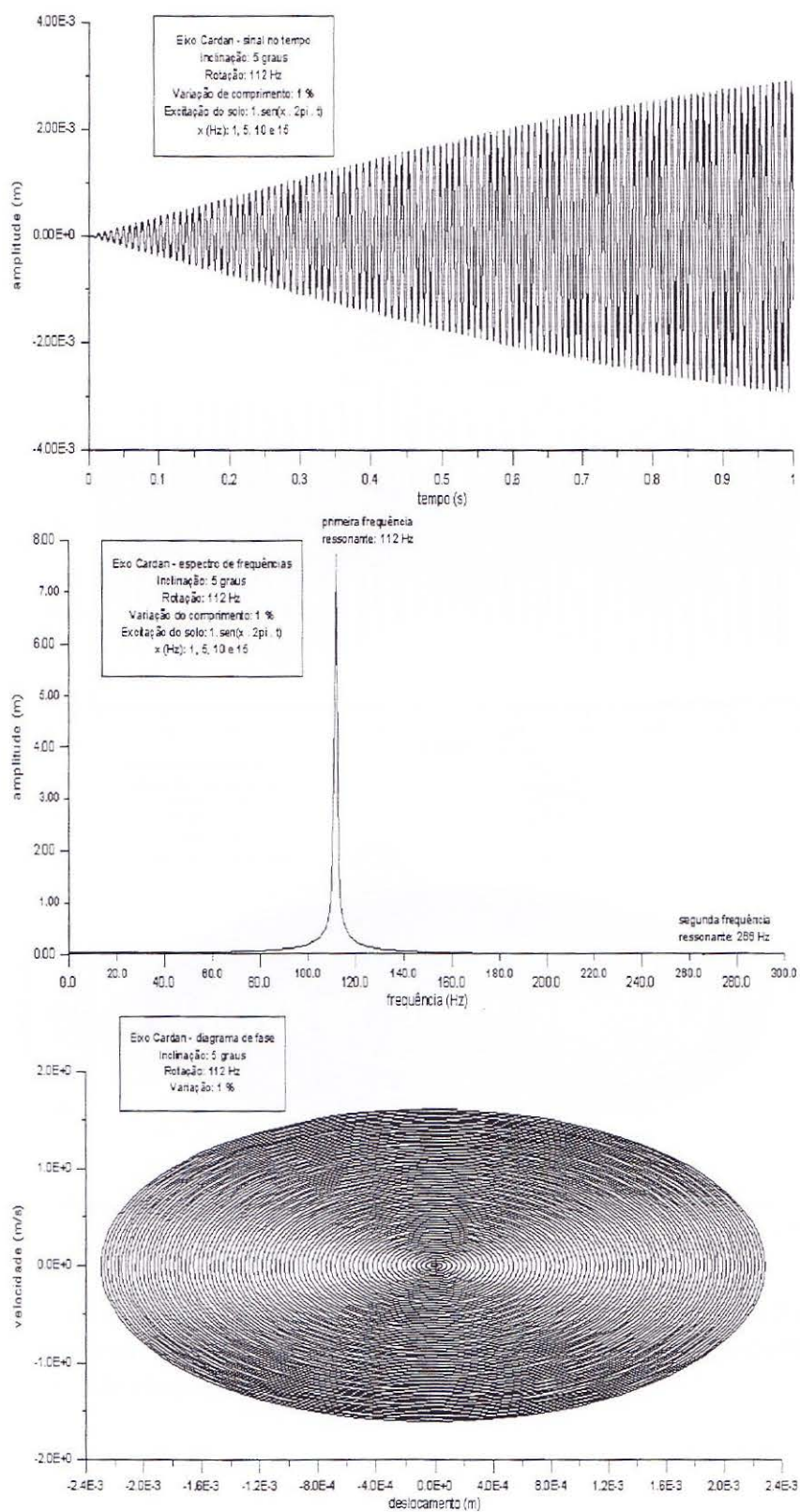


Figura 6.34: Sinais no tempo, espectros de frequência e diagrama de fase para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 112 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de comprimento de 1%, 3% e 5 % no conjunto de eixo-luva.

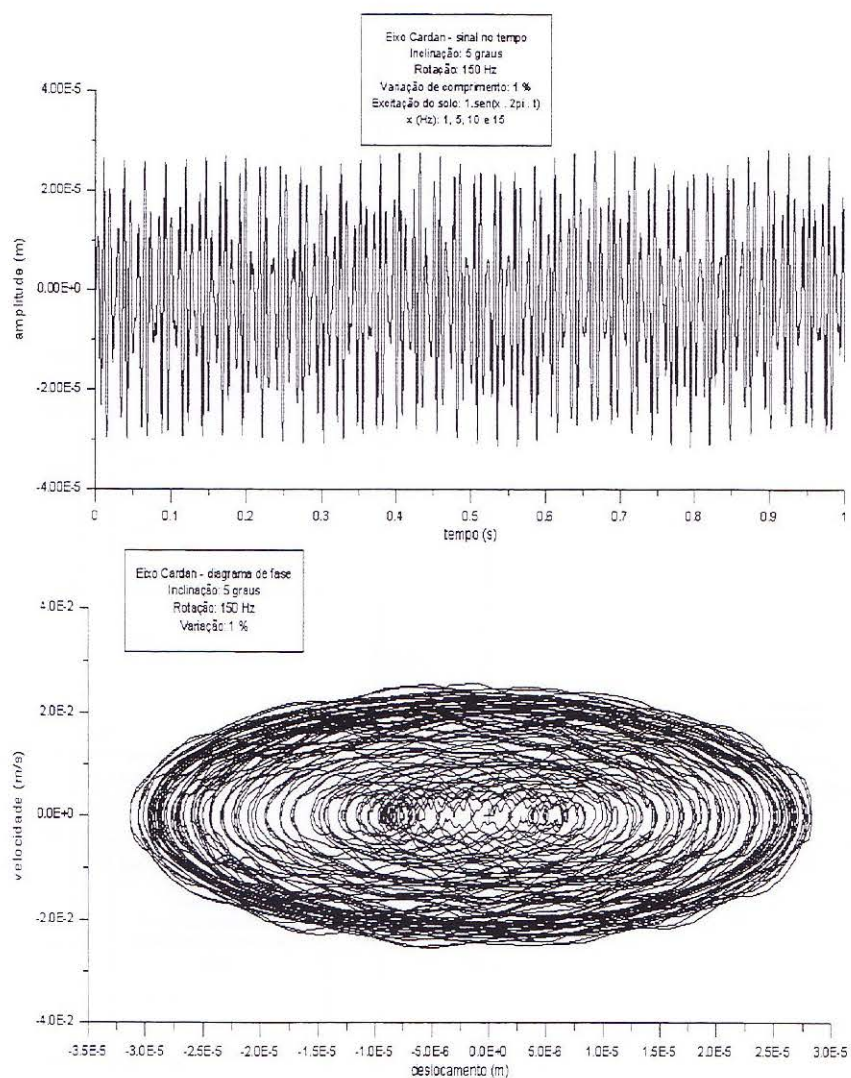


Figura 6.35: Sinais no tempo e diagrama de fase para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 150 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de comprimento de 1%, 3% e 5 % no conjunto de eixo-luva.

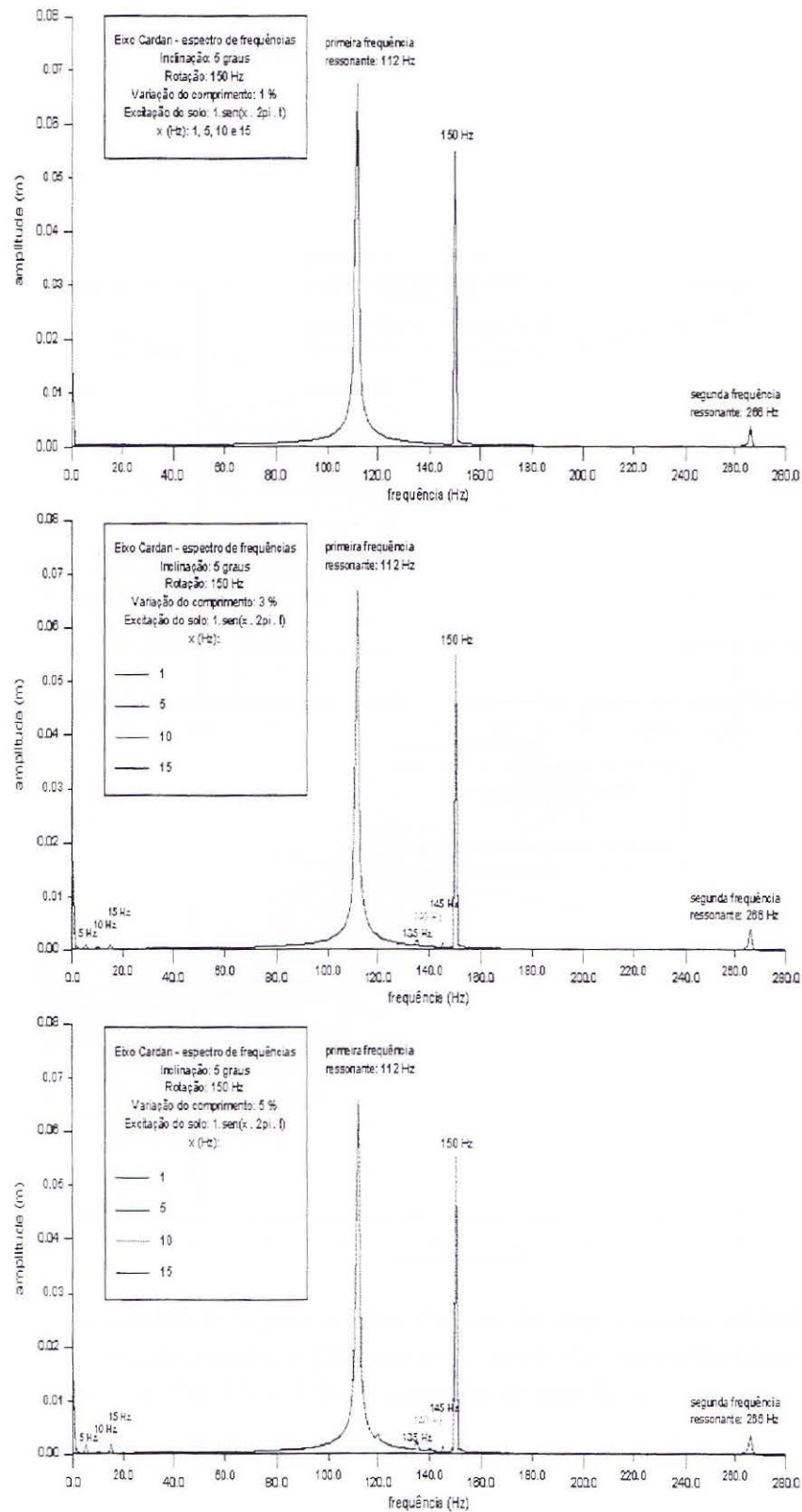


Figura 6.36: Espectros de frequência para o eixo Cardan inclinado 5 graus, rotação de 150 Hz e com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de comprimento de 1%, 3% e 5% no conjunto de eixo-luva.

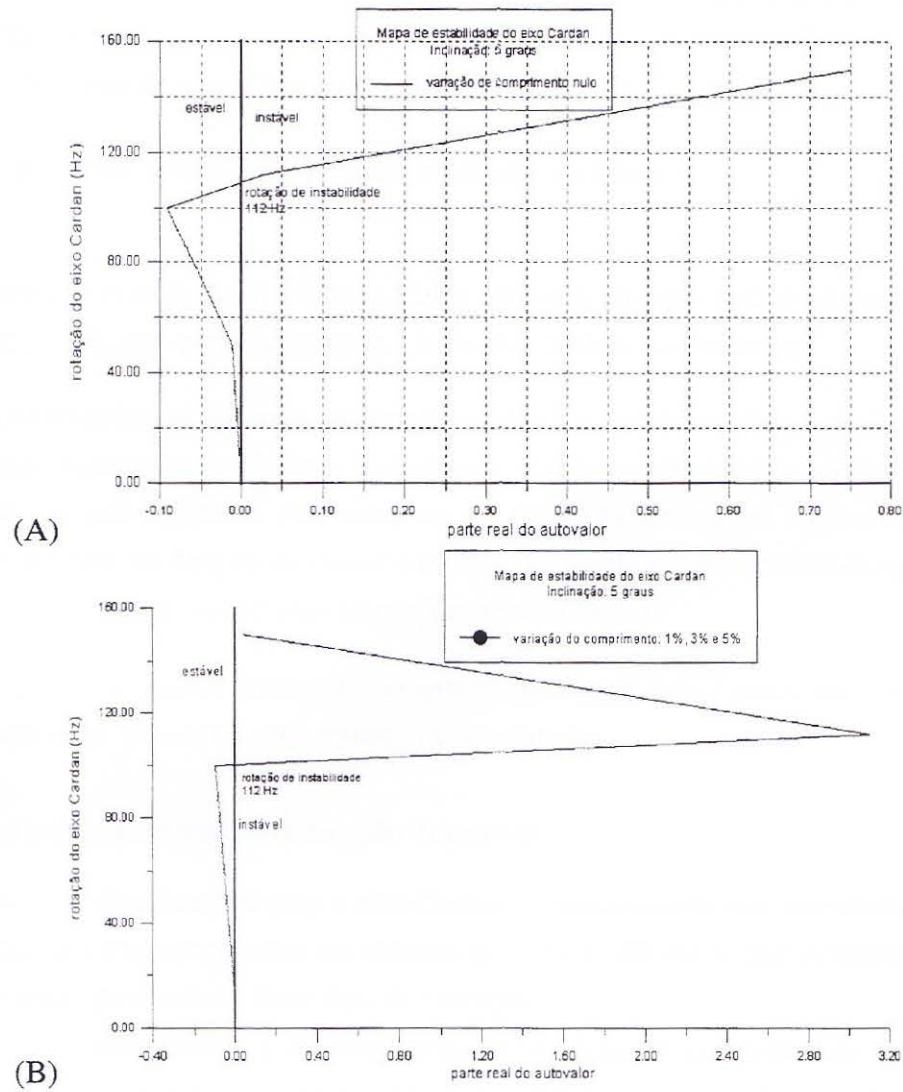


Figura 6.37: Mapa de estabilidade para o eixo Cardan de dupla seção, inclinado 5 graus, (A) sem movimento da suspensão traseira e (B) com movimento da suspensão traseira que gera uma variação de comprimento de 1%, 3% e 5 % no conjunto de eixo-luva.

rotação do eixo Cardan (Hz)	45	61
primeira frequência natural (Hz)	105	97
segunda frequência natural (Hz)	209	210
terceira frequência natural (Hz)	321	318

Tabela 6.18: Frequências naturais para o eixo Cardan de dupla seção, com rotações de 45 Hz e 61 Hz, resultados experimentais.

Hz. As demais frequências obtidas não foram identificadas diretamente, são elas: 123 Hz, 144 Hz, 167.5 Hz e 188.5 Hz.

A análise dinâmica do eixo Cardan com rotações de 45 Hz e 61 Hz indicaram:

- As três primeiras frequências naturais, mostradas na tabela 6.18.
- O aumento da rotação de 45 Hz para 61 Hz alterou a primeira frequência natural, reduzindo esta em $\pm 10\%$, sem afetar a segunda e a terceira frequências naturais.
- Além das frequências naturais, os espectros identificam as rotações do motor, do eixo Cardan e suas harmônicas. Algumas frequências obtidas não tiveram sua origem identificada, devendo ser, por hipóteses, provenientes: de folgas existentes em alguns componentes do sistema, da base de fixação do motor e/ou do eixo Cardan, dos mancais de apoio e ainda de possíveis frequências associadas ao conjunto eixo Cardan.
- A alteração do ângulo de inclinação do sistema, de 0 grau para 5 graus, não alterou os valores das frequências naturais e suas respectivas amplitudes.

6.6.13 Resultados Numéricos - Vibração Torsional

A primeira frequência natural para o eixo Cardan alinhado axialmente calculada foi de 865 Hz, estando distante da faixa operacional do sistema, de 0 Hz a 100 Hz, o que descarta a necessidade de um estudo mais aprofundado deste tipo de vibração.

A variação do comprimento e da frequência de variação de comprimento não alteraram os valores obtidos para o caso mais simples, onde o eixo Cardan estava alinhado axialmente.

Estes resultados levaram a desconsiderar o acoplamento entre os modos torsionais e laterais, considerando, para isso, um momento secundário atuando no eixo cardan, quando da análise de vibrações laterais.

6.6.14 Resultados Numéricos - Vibração Lateral: Eixo Cardan Alinhado e sem Movimento da Suspensão do Veículo.

Utilizam-se 4 (quatro) rotações para o eixo Cardan nesta simulação: 0 Hz, 100 Hz, 112 Hz e 150 Hz. As frequências naturais obtidas foram:

111 Hz - primeira frequência natural direta e inversa

Para valores de rotação do eixo Cardan menores que 100 Hz:

262 Hz - segunda frequência natural direta e inversa

Para valores de rotação do eixo Cardan maiores que 100 Hz, o efeito giroscópico, presente no sistema, afeta em 1% os valores calculados, diferenciando mais os modos ressonantes direto e inverso

260 Hz - segunda frequência natural direta

263 Hz - segunda frequência natural inversa

As frequências naturais inversas ocorrem para um valor menor de frequência e com amplitudes menores que as frequências diretas.

Algumas conclusões importantes podem ser retiradas dos diagramas modais, figura 6.24, do eixo Cardan de seção dupla:

O primeiro modo de vibração translacional, obtido numericamente, não corresponde ao obtido experimentalmente. A justificativa para este fato é que a metodologia aplicada, discutida no Capítulo 3, deste trabalho, em alguns casos produz valores de difícil interpretação. No caso do eixo Cardan, os sinais gerados experimentalmente forneceram ângulos de fase, que são usados na determinação dos modos de vibração, em intervalos onde sua interpretação é complexa. Optou-se, por este motivo, por considerar como correto o modo obtido numericamente. O segundo e terceiros modos numérico e experimental foram concordantes.

Identificaram-se os locais onde ocorrem os valores máximos e complementares de momento fletor e esforço cortante no eixo Cardan, quando em ressonância:

Para o primeiro modo de vibração, o mancal central de apoio é o ponto mais solicitado pelo esforço cortante e o segmento 1 o mais solicitado pelo momento fletor. No segundo modo de vibração, os segmentos 1 e 3 possuem os valores máximos de momento fletor, ficando o conjunto eixo-luva com o valor máximo de esforço cortante.

6.6.15 Resultados Numéricos - Vibração Lateral: Eixo Cardan Inclinado 5 Graus.

As duas primeiras frequência naturais calculadas foram : 112 Hz e 266 Hz tanto para o sistema com movimento da suspensão traseira, quanto para o sistema sem este movimento. A inclinação do eixo Cardan, por gerar um momento secundário, aumentou a amplitude do movimento, quando comparado com o eixo inclinado.

A medida em que a rotação aumenta, aproximando-se da frequência fundamental, verifica-se um aumento na amplitude, atingindo um estágio de *batimento*, como mostram as figuras 6.31, 6.32 e 6.33, para o eixo Cardan com uma rotação de 100 Hz, até atingir a primeira frequência natural, onde encontra-se a maior amplitude do movimento.

A variação de comprimento do conjunto eixo-luva é pequeno se comparado com o comprimento total do eixo Cardan, por este motivo a variação desta grandeza, na escala em que acontece, não altera as frequências naturais estudadas.

Com o aumento das amplitudes de variação do comprimento do conjunto eixo-luva, surgem *zonas de frequências*, próximas às frequências naturais e de excitação, com valores distantes destas

de valores múltiplos das frequências com que o comprimento do conjunto eixo-luva varia. Tais valores poderiam ser nocivos ao sistema, porém na escala de amplitude em que ocorrem no eixo Cardan podem ser desconsideradas.

O modelo numérico proposto possui apenas amortecimento estrutural e esta característica indicou que o sistema ao alcançar a primeira velocidade crítica, também estará atingindo a velocidade de instabilidade. Esta característica pode ser observada nos sinais no tempo e diagrama de fase para uma rotação igual a primeira frequência natural de 112 Hz, figura 6.34.

Os valores para variação de comprimento e suas respectivas frequências de variação, no conjunto eixo-luva não influenciaram os valores obtidos para determinação da velocidade de instabilidade, mostrados na figura 6.37.

Os diagramas de fase, para sistemas onde ocorre o fenômeno de batimento, mostram uma figura com valores que alternam entre seus máximos e mínimos, diferindo da zona de instabilidade onde os valores crescem sem limites.

7 CONCLUSÕES

7.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de metodologias experimental e numérica que forneçam ferramentas de análise eficazes para o engenheiro que trabalha com dinâmica de rotores e a aplicação destas metodologias em casos práticos, como controle passivo de vibrações, eixos cardan e semi-eixos homocinéticos. Com este intuito, na metodologia numérica, foram aperfeiçoados os algoritmos existentes e desenvolveram-se novas técnicas e elementos. Na parte experimental, foram construídas bancadas de teste, onde foram obtidos resultados importantes que validaram e complementaram os resultados numéricos.

7.2 O Método Experimental

A metodologia experimental proposta consiste em duas partes: análises de eixos de transmissão com rotação nula e dinâmica. Na análise com rotação nula, determinam-se os modos de vibração e as frequências naturais. Na análise dinâmica, determinaram-se as frequências ressonantes associadas às diferentes rotações e fenômenos relacionados.

Construíram-se bancadas experimentais onde é aplicada a metodologia proposta, isto é, no estudo do efeito giroscópico e em um eixo Cardan de dupla seção.

A técnica experimental utiliza transdutores piezoelétricos, também chamados de acelerômetros, conectados a um sistema de aquisição e tratamento de dados que faz a interface com o pesquisador. Este equipamento fornece uma ferramenta confiável para o estudo de eixos rotativos, não apresentando maiores dificuldades no seu manuseio, desde que respeitadas e compreendidas as suas características e faixas de utilização.

A interpretação dos sinais obtidos é uma tarefa complexa, cabendo ao pesquisador estar atento aos fenômenos que estão ocorrendo e saber classificá-los. Neste trabalho, assim como em vários trabalhos que constam na bibliografia, nem sempre é possível identificar de forma completa o sinal obtido, indicando que dificuldades vão existir.

Os resultados obtidos são de grande utilidade, uma vez que servem de base de comparação para as demais metodologias empregadas.

7.3 O Método Numérico

Em dinâmica de rotores, as metodologias numéricas empregadas constituem-se, na maioria dos casos, em matrizes de transferência e/ou elementos finitos. Neste trabalho, optou-se pela utilização do método das matrizes de transferência (MMT) pelo seu potencial de análise de sistemas em linha, como no caso de eixos rotativos, e pela facilidade de implementação numérica.

Tradicionalmente o MMT é utilizado em análises no domínio da frequência, o que, para sistemas com comportamentos mais complexos, é um fator limitador. Por este motivo, baseado em

trabalhos anteriores, foram aperfeiçoados e desenvolvidos algoritmos que, utilizando matrizes de transferência, pudessem simular o comportamento de sistemas rotativos no domínio do tempo, ampliando a quantidade de fenômenos físicos analisados.

Importante destacar que, como em qualquer simulação numérica, ao representar um modelo físico através de um modelo matemático, é necessário fazer simplificações, desde que não sejam comprometidos os resultados.

Embora a metodologia desenvolvida permita uma simulação em um espaço tridimensional, devido às aplicações propostas, os sistemas de eixos rotativos simulados foram considerados axi-simétricos, o que permite uma análise em apenas um plano.

Tanto na análise do domínio do tempo, quanto da frequência, os parâmetros utilizados para caracterizar a estrutura simulada devem ser criteriosos, uma vez que o algoritmo, em alguns casos, demonstrou problemas de instabilidade numérica.

Os resultados foram concordantes com aqueles obtidos experimentalmente, demonstrando a eficácia da metodologia desenvolvida. A metodologia numérica, uma vez respaldada pela comprovação experimental, permite realizar simulações que experimentalmente seriam tarefas complexas e inviáveis em termos de custos financeiros, o que transforma esta ferramenta em uma poderosa interface para o pesquisador.

7.4 Aplicações

No desenvolvimento de uma metodologia de pesquisa, as aplicações práticas são de fundamental importância para validar e dar credibilidade ao processo, e ainda, sua demonstração facilita a tarefa para um futuro usuário. Com este objetivo, são apresentados a seguir os resultados e conclusões obtidas nas aplicações da metodologia proposta.

7.4.1 Efeito Giroscópico - Controle Passivo de Vibrações

Um sistema de eixo rotativo simples com diferentes *layouts*, que consistiam de discos com mesma massa e diferentes raios colocados em um eixo rotativo, foi utilizado para estudar o efeito giroscópico e sua utilização no controle passivo de vibrações. As conclusões obtidas foram as seguintes:

Vibração Torsional

- Os modos de vibração torsionais tiveram suas frequências ressonantes sensivelmente alteradas devido ao momento de inércia de massa polar elevado introduzido pelos discos adicionados ao sistema.
- Estes modos não foram sentidos no experimento, pois a única fonte de excitação presente era devido ao desbalanceamento do conjunto eixo-discos.

Vibração Lateral

- A adição de discos ao sistema provoca, primeiramente, uma mudança nas frequências naturais do sistema, devido à adição de massa ao mesmo.
- O efeito giroscópico é diretamente proporcional à rotação, momento de inércia de massa e inclinação do sistema rotativo. Logo, para obter-se uma alteração de valores críticos do eixo rotativo, o momento de inércia e a posição dos discos devem ser combinados com o modo de vibração em questão, para assim, em uma determinada rotação, chegar a um controle passivo mais otimizado possível.
- Observa-se o fenômeno da bifurcação das frequências ressonantes devido a existência de duas precessões rotacionais distintas, para cada frequência natural, isto é, direta, mesmo sentido de rotação que o eixo, e inversa, sentido oposto da rotação do eixo.
- Analisando as formas de precessão direta e inversa, percebe-se que a última é mais nociva ao sistema rotativo, pois ao contrário da precessão direta, as tensões existentes trocam de sinal ao longo de uma rotação, evidenciando um processo de fadiga. Entretanto, as amplitudes da precessão inversa são menores que da precessão direta, compensando este problema.
- Os diagramas de Campbell apresentados demonstram que a medida que a rotação aumenta e quanto maior o raio de giração dos discos, maior será a bifurcação das frequências ressonantes, devido à presença do efeito giroscópico.
- A adição de discos ao eixo rotativo com a finalidade de controlar passivamente as velocidades críticas é válida. Entretanto, nota-se que ao adicionar estes elementos com momentos de inércia elevados ao sistema, este torna-se mais susceptível à danos, ao passar pelas velocidades críticas, necessitando de uma aceleração angular mais alta, evitando assim problemas de colapso.
- Nas rotações utilizadas, não foram detectadas velocidades de instabilidade no sistema eixo-disco rotativos.

7.4.2 Vibrações em Semi-Eixos Homocinéticos

A contribuição deste trabalho para o estudo de semi-eixos homocinéticos é um estudo numérico, com a utilização de matrizes de transferência, no domínio do tempo, destacando a influência das vibrações paramétricas do comprimento do semi-eixo homocinético, simultaneamente com os ângulos de funcionamento das juntas homocinéticas.

Visando simplificar a análise, os resultados obtidos são referentes a um semi-eixo homocinético de um veículo de tração dianteira com motor 1.6, 4 cilindros, longitudinal.

A simulação de torque aplicado ao sistema pode ser representado através de mudanças nos valores de rigidez das juntas homocinéticas, sem perda de qualidade nas respostas, evitando, assim, a necessidade de um acoplamento de matrizes de transferência laterais e torsionais, que tornaria o processo numérico mais lento.

As duas primeiras frequências ressonantes torsionais foram determinadas e concluiu-se que estas não atuavam na faixa operacional do semi-eixo homocinético, ficando, por este motivo, a análise direcionada para o estudo de vibrações laterais.

A análise dos resultados obtidos é feita comparando os sinais nos domínios do tempo e da frequência em função dos parâmetros variados, isto é, frequência do *firing*, frequência de variação paramétrica do comprimento e o percentual do comprimento variado.

Simularam-se aplicações de frequências de *firing* de 100 Hz, 200 Hz e 240 Hz, percentual de comprimento variado de 0 %, 1 %, 3 %, 5 % e 8 %, com uma frequência de variação deste comprimento de 1 Hz, 5 Hz, 10 Hz e 15 Hz.

Não havendo variação de comprimento, o espectro obtido demonstra a existência das frequências de excitação e de ressonância de maneira clássica. A primeira frequência natural lateral encontrada foi de 240 Hz, estando as demais frequências ressonantes fora da faixa de operação do conjunto semi-eixo homocinético.

A variação do comprimento do semi-eixo em conjunto com a força rotativa secundária desbalanceadora resulta em alguns aspectos interessantes:

- A frequência de ressonância, para o sistema com variação de comprimento, torna-se uma *zona de ressonância*, onde coexistem frequências ressonantes ao sistema.
- A faixa que abrange esta *zona de ressonância* é influenciada pelo percentual de comprimento variado, sendo diretamente proporcional a este. A largura desta faixa possui valores que vão, aproximadamente, do valor da frequência natural sem variação do comprimento até um valor da frequência natural, do mesmo sistema, calculada para um comprimento aumentado em um valor igual ao seu percentual variado.
- As frequências ressonantes, dentro da *zona de ressonância*, estão distantes, entre si, de um valor igual à frequência de variação paramétrica do comprimento.
- Com relação às amplitudes das frequências dentro da zona de ressonância, estas aumentam de valor a medida em que se aumenta o valor da frequência do *firing* e da variação paramétrica do comprimento.
- Surgem frequências, não ressonantes, próximas à frequência de excitação da força rotativa secundária de desbalanceamento, distantes desta de um valor igual à frequência de variação paramétrica de comprimento.
- Os sinais no tempo para um *firing* com frequência de 100 Hz mostram-se estáveis. A medida que a frequência do *firing* aproxima-se da primeira frequência natural do sistema, por exemplo os sinais no tempo para um *firing* com 200 Hz, os valores no tempo mostram o aumento da amplitude e a existência de um *batimento*. Estes batimentos possuem maiores amplitudes a medida em que aumenta o percentual do comprimento variado e a frequência de variação paramétrica de comprimento.

- Um caso especial a ser analisado é quando a frequência do *firing* encontra-se muito próxima da frequência natural do sistema com comprimento fixo. Neste caso, a *zona de ressonância* possui frequências onde o sistema possui condições de instabilidade. O aumento do percentual de comprimento variado possui um efeito de diminuir a instabilidade ou até estabilizar a estrutura. A frequência de variação paramétrica do comprimento, a medida que aumenta, torna o sistema mais instável.

Os resultados obtidos demonstram que existem casos nos quais não é possível analisar o conjunto semi-eixo homocinético sem considerar os efeitos da variação dinâmica do comprimento do semi-eixo, sem prejuízos consideráveis aos resultados.

7.4.3 Vibrações em um Eixo Cardan de Dupla Seção

Foram determinados os modos de vibração e as frequências naturais torsionais e laterais do eixo Cardan de dupla seção. Identificou-se que apenas a primeira frequência natural lateral possui valores na faixa de operação do sistema mencionado, e, por isso, recebeu uma atenção privilegiada.

Os resultados numéricos e experimentais indicam como valores para a primeira velocidade crítica lateral a faixa de (100 ± 10) Hz, estando dentro da rotação operacional do veículo que utiliza este sistema de eixo Cardan.

7.4.4 Resultados Experimentais

A análise experimental foi feita em uma bancada experimental onde o eixo Cardan foi analisado com rotação nula, 45 Hz e 61 Hz, alinhado axialmente e com uma inclinação, da parte traseira, de 5 graus, sem considerar possíveis movimentos da suspensão traseira do veículo.

O aumento da rotação de 45 Hz para 61 Hz alterou a primeira frequência natural, reduzindo esta em $\pm 10\%$, sem afetar a segunda e terceira frequências naturais.

Além das frequências naturais, os espectros identificam a rotação do motor, eixo Cardan e suas harmônicas. Algumas frequências obtidas não tiveram sua origem identificada, devendo ter sua origem provenientes de folgas existentes em alguns componentes do sistema, na base de fixação do motor e/ou do eixo Cardan, nos mancais de apoio e frequências associadas ao conjunto eixo Cardan.

A alteração do ângulo de inclinação do sistema, de 0 grau para 5 graus, não alterou os valores das frequências naturais e suas respectivas amplitudes.

7.4.5 Resultados Numéricos

Os resultados obtidos levaram a desconsiderar o acoplamento entre os modos torsionais e laterais, considerando, para isso, um momento secundário atuando no eixo cardan, quando da análise de vibrações laterais.

O sistema mostrou-se muito sensível a determinadas variáveis que caracterizam o eixo Cardan, como a rigidez do mancal central de apoio, rigidez das juntas Cardan, comprimento e espessura

do tubo do eixo e principalmente as condições de contorno. Recomenda-se cautela na definição destes valores.

Obtiveram-se resultados para os modelos de eixo Cardan alinhado axialmente e com a parte traseira inclinada 5 graus, confirmando os resultados experimentais.

O algoritmo de análise no tempo implementado, juntamente com as novas matrizes de transferência, desenvolvidas para representar de forma mais próxima da realidade o comportamento do eixo cardan estudado, permitiram um estudo do sistema com variáveis dinâmicas, relacionadas com o movimento da suspensão traseira do veículo, que acarreta numa contínua variação de comprimento e inclinação da estrutura.

Eixo Cardan alinhado e sem movimento da suspensão do veículo

- Para valores de rotação do eixo Cardan maiores que 100Hz, o efeito giroscópico, presente no sistema, afeta em 1% os valores calculados, diferenciando mais os modos ressonantes direto e inverso
- As frequências naturais inversas ocorrem para um valor menor de frequência e com amplitudes menores que as frequências diretas.
- O primeiro modo de vibração translacional, obtido numericamente, não corresponde ao obtido experimentalmente. A justificativa para este fato é que a metodologia aplicada, discutida no Capítulo 2, deste trabalho, em alguns casos produz valores de difícil interpretação. No caso do eixo Cardan, os sinais gerados experimentalmente forneceram ângulos de fase, que são usados na determinação dos modos de vibração, em intervalos onde sua interpretação é complexa. Optou-se, por este motivo, por considerar como correto o modo obtido numericamente. O segundo e terceiros modos numérico e experimental foram concordantes.
- Identificaram-se os locais onde ocorrem os valores máximos e complementares de momento fletor e esforço cortante no eixo Cardan, quando em ressonância: para o primeiro modo de vibração o mancal central de apoio é o ponto mais solicitado pelo esforço cortante e o segmento 1 o mais solicitado pelo momento fletor. No segundo modo de vibração, os segmentos 1 e 3 possuem os valores máximos de momento fletor, ficando o conjunto eixo-luva com o valor máximo de esforço cortante.

Eixo Cardan inclinado 5 graus

- As duas primeiras frequências naturais calculadas foram semelhantes para o sistema com movimento da suspensão traseira e para o sistema sem este movimento. A inclinação do eixo Cardan, por gerar um momento secundário, aumentou a amplitude do movimento, quando comparado com o eixo sem inclinação.
- A medida em que a rotação aumenta, aproximando-se da frequência fundamental, verifica-se um aumento na amplitude, atingindo um estágio de *batimento* para o eixo Cardan com

uma rotação de 100 Hz, até atingir a primeira frequência natural, onde encontra-se a maior amplitude do movimento.

- A variação de comprimento do conjunto eixo-luva é pequeno se comparado com o comprimento total do eixo Cardan, por este motivo a variação desta grandeza, na escala em que acontece, não altera as frequências naturais estudadas.
- Com o aumento das amplitudes de variação do comprimento do conjunto eixo-luva, surgem *zonas de frequências*, próximas às frequências naturais e de excitação, com valores distantes destas de valores múltiplos das frequências com que o comprimento do conjunto eixo-luva varia. Tais valores poderiam ser nocivos ao sistema, porém na escala de amplitude em que ocorrem no eixo Cardan podem ser desconsideradas.
- O modelo numérico proposto possui apenas amortecimento estrutural e esta característica indicou que o sistema ao alcançar a primeira velocidade crítica, também estará atingindo a velocidade de instabilidade. Esta característica pode ser observada nos sinais no tempo e diagrama de fase para uma rotação igual a primeira frequência natural de 112 Hz.
- Os valores para variação de comprimento e suas respectivas frequências de variação, no conjunto eixo-luva não influenciaram os valores obtidos para determinação da velocidade de instabilidade.
- Os diagramas de fase mostraram-se ferramentas úteis na análise energética do sistema e no problema de instabilidade da estrutura

7.4.6 Considerações Gerais

A metodologia aplicada obteve êxito ao analisar o sistema de eixo Cardan de dupla seção, uma vez que as ferramentas numéricas e experimentais desenvolvidas foram ao encontro de resultados coerentes com o sistema estudado.

Os sistemas de transmissão de força do tipo eixo Cardan são muito utilizados na indústria automobilística e possuem um número elevado de diferentes *layouts* utilizados, que devem ser adaptados a cada situação para o qual são projetados. Cada aplicação de eixo Cardan possui características bastante peculiares, necessitando muitas vezes de propostas de análise que sejam sensíveis a estas características. Neste enfoque, a metodologia trabalhada oferece ao engenheiro pesquisador uma ferramenta poderosa de análise.

7.5 Proposta de Continuidade do Trabalho

O campo de pesquisas em dinâmica de rotores é extenso, e, por este motivo, o trabalho desenvolvido nesta tese desempenha um importante papel em projetos experimentais e numéricos, uma vez que possui flexibilidade para fornecer resultados nas mais diferentes situações.

Especificamente, em relação aos tópicos abordados neste trabalho, algumas sugestões de estudos e desenvolvimentos seriam interessantes, como:

- Incluir a possibilidade de os discos, analisados no controle passivo de vibrações, possuírem flexibilidade e modos próprios de vibração.
- Analisar a variação do comprimento dos eixos analisados, no domínio do tempo, segundo uma função aleatória, visando aproximar os modelos propostos da situação real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, M. L., 1980. "Non-Linear Dynamics of Flexible Multi-Bearing Rotors", **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 71(1), 129-144.

Adams, M. L. and Padovan, J., 1981. "Insights Into Linearized Rotor Dynamics", **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 76(1), pp. 129-142.

Adams, M. L., 1987, "Insights Into Linearized Rotor Dynamics, Part 2.", **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 112(1), pp. 97-110.

Akela, S. and Craggs, A., 1986, "Modifications to a Timoshenko Beam-Shaft Finite Element to Include Internal Disks and Changes in Cross Section", **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 106(2), pp. 227-239.

Antkowiak, B. M. and Nelson, F. C., 1998, "Rotordynamic Modeling of an Actively Controlled Magnetic Bearing Gas Turbine Engine", **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power**, Vol. 120, pp. 621-625.

Arnold, r. N. and Maundes, L., 1961, **Gyrodynamics and Its Engineering Applications**. Academic Press, NY.

Afolabi, D., 1995. "Sylvester's Eliminant and Stability Criteria for Gyroscopic Systems", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 182(2), pp. 229-244.

Almeida, Márcio Tadeu, 1987. **Vibrações Mecânicas para Engenheiros**.

Bansal, P. N. and Kirk, R. G., 1975, "Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems", **ASME Journal of Engineering for Industry**, Vol. 97, pp. 1325-1332.

Baz, A.; Gilheany, J. and Steimel, P., 1990. "Active Vibration Control of Propeller Shafts", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 136(3), 361-372.

Cartmell, Matthew, 1990. **Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations**.

Chang, C. O. and Cheng, J. W, 1993. "Non-Linear Dynamics and Instability of a Rotating Shaft-Disk System", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 160(3), 433-454.

Chen, L.-W and Ku, D.-M, 1990. "Dynamic Stability Analysis of a Rotating Shaft by the Fi-

nite Element Method”, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 143(1), pp. 143-151.

Chen, W. J., 1997. “Energy Analysis to the Design of Rotor-Bearing Systems”, **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power**, Vol. 119, pp. 411-417.

Childs, D. W., 1976, “A Modal Transient Simulation Model for Flexible Asymmetric Rotors”, Transactions of ASME, **Journal of Engineering for Industry**, February, pp. 312-319.

Coutinho, L. F., 1994, **Análise de Vibrações por Flexão de Semi-Eixos Homocinéticos**. Dissertação, M. Eng., PROMEC-UFRGS, 114 p.

Coutinho, L. F. e Tamagna, Alberto, 1996, “Flexural Vibrations Analysis of Constant Velocity Halfshafts”, **SAE paper#960725**.

Craggs, A., 1993, “Effect of Distributed Bearing Stiffness on the Critical Speeds of Shafts”, **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 160(3), 559-565.

Cunningham, Robert E.; Fleming, David P. and Gunter, Edgar J., 1975, “Design of Squeeze-Film Damper for a Multi-Mass Flexible Rotor”, ASME **Journal of Engineering for Industry**, November, pp. 1383-1389.

David, J. W., Mitchell, L. D. and Daw, J. W., 1987, “Using Transfer Matrices for Parametric System Forced Response”, ASME **Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, Vol. 109, pp. 356-360.

Den Hartog, J. P., 1947., **Mechanical Vibrations**, McGraw-Hill, NY.

Dokainish, M. A., 1972, “A New Approach for Plate Vibrations: Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique”, ASME **Journal of Engineering for Industry**, Vol. 94, pp. 526-530.

Edney, S. L.; Fox, C. H. J. and Williams, E. J., 1990, “Tapered Timoshenko Finite Elements for Rotors Dynamics Analysis”, **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 137(3), 463-481.

Firoozian, R and Stanway, R., 1989, “Design and Application of a Finite Element Package for Modelling Turbomachinery Vibrations”, **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 134(1), 115-137.

Gillespie, Thomas D., 1992. **Fundamentals of Vehicle Dynamics**.

Green, R. B., 1948, " Gyroscopic Effects on the Critical Speeds of Flexible Rotors". **Journal of Applied Mechanics**, ASME, v.15, n.4, pp.369-375.

Gu, Jialiu, 1986, "An Improved Transfer Matrix-Direct Integration Method for Rotor Dynamics", **ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, Vol. 108, pp. 183-188.

Guenther, T. G. and Lovejoy, D. C., 1961, "Analysis for Calculating Lateral Vibration Characteristics of Rotating Systems with Any Number of Flexible Supports: Part 2 - Application of the Method of Analysis", **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 28, pp. 591-600.

Holzer, H., 1921, "**Die Berechnung der Drehschwingungen**", Berlin: Springer-Verlag.

Inagaki, T.; Kanki, H. and Shiraki, K., 1980, "Response Analysis of a General Asymmetric Rotor-Bearing System", **ASME Journal of Mechanical Design**, Vol. 102, pp. 147-157.

Inman, Daniel J., 1992. **Vibration with Control Measurement and Stability**, Prentice-Hall International Editions, Buffalo, New York.

Iwatsubo, T. and Saigo, M., 1984, " Transverse Vibration of a Rotor System Driven by a Cardan Joint", **Journal of Sound and Vibration**, 95(1), pp.9-18.

Iwatsubo, T. and Saigo, M., 1987, " Transverse Vibration of a Rotor System Driven by Two Cardan Joint", **Journal of Sound and Vibration**, 114(3), pp.405-416.

Kang, Y; Lee, An-Chen and Shih, Yuan-Pin, 1994, "A Modified Transfer Matrix Method for Asymmetric Rotor-Bearing Systems", **Journal of Vibration and Acoustics**, Vol. 116, pp. 309-317.

Kang, Y.; Lee, Y, -G and Chen, S, -C, 1997. "Instability Analysis of Unsymmetrical Rotor-Bearing Systems Using the Transfer Matrix Method", **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 199(3), pp. 381-400.

Kim, Y. D. and Lee, C. W., 1986, "Finite Element Analysis of Rotor Bearing Systems Using Modal Transformation Matrix", **Journal of Sound and Vibration**, 111(3), pp.441-456.

Kimball, A. L., 1924. "Internal Friction Theory of Shaft Whirlings", **General Electric Review**, Vol. 17, pp 244-251.

Kirk, R. G. and Gunter, E. J., 1974. Transient Response of Rotor-Bearing Systems , **Journal**

of **Engineering for Industry**, may, pp. 682-693.

Kniest, R. R., 1994. **Estudo do Comportamento Dinâmico de Semi-Eixo Homocinético com o Uso de Análise Modal**. Dissertação de Mestrado, UFRGS, POA-RS.

Koenig, E. C., 1961, "Analysis for Calculating Lateral Vibration Characteristics of Rotating Systems with Any Number of Flexible Supports: Part 1 - The Method of Analysis", **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 28, pp. 585-590.

Kumar, A. Selva and Sankar, T. S., 1986, "A New Transfer Matrix Method for Response Analysis of Large Dynamic Systems", **Computers & Structures**, Vol. 23, No. 4, pp. 545-552.

Inman, D. J., 1989, **Vibration with Control Measurement and Stability**.

Lee, A-C.; Kang, Y. and Liu, S-L., 1991, "A Modified Transfer Matrix Method for Linear Rotor-Bearing Systems", **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 58, pp. 776-783.

Lund, J. W. and Orcutt, F. K., 1967, "Calculations and Experiments on the Unbalance Response of Flexible Rotor", **ASME Journal of Engineering for Industry**, Vol. 89, No. 4, pp. 785-796.

Lund, J. W., 1974-a, "Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid Film Bearings", **ASME Journal of Engineering for Industry**, Vol. 96, pp. 509-517.

Lund, J. W., 1974-b, "Modal Response of a Flexible Rotor in Fluid -Film Bearings", **ASME Journal of Engineering for Industry**, Vol. 96, pp. 525-533.

Lund, J. W., 1980, "Sensitivity of the Critical Speeds of a Rotor to Changes in Design", **ASME Journal of Mechanical Design**, Vol. 102, pp. 115-121.

Matos D. F. S., 1997, **Matriz de Transferência na Análise Dinâmica de Eixos Elásticos Considerando o Efeito Giroscópico**, Dissertação, M. Eng., PROMEC-UFRGS, 132 p.

Meirovitch, Leonard, 1967, **Analytical Methods in Vibrations**, Ed. The Macmillan Company.

Millsaps, K. T. and Reed, G. L., 1998, "Reducing Lateral Vibrations of a Rotor Passing Through Critical Speeds by Acceleration Scheduling", **ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power**, Vol. 120, pp. 615-620.

Murphy, B. T. and Vance, J. M., 1983, "An Improved Method for Calculating Critical Speeds

and Rotordynamics Stability of Turbomachinery”, **ASME Journal of Engineering for Power**, Vol. 103, pp. 591-595.

Muszynska, A., 1986. “Whirl and Whip-Rotor/Bearing Stability Problems”, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 110(3), pp. 443-462.

Myklestad, N. O., 1944, “A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Wings and Other Types of Beams”, **J. Aero. Sci.**, April, pp.153-162.

Nagaya, K.; Takeda, S.; Tsuki, Y. and Kumaido, T., 1987, “Active Control Method for Passing Through Criticcal Speeds of Rotating Shafts by Changing Stiffnesses of the Supports with use of Memory Metals”, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 113(2), pp. 307-315.

Nelson, H. D. and Mc Vaugh, J. M., 1976, “The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Element Method”, **Journal of Engineering of Industry**, May, pp. 593-600.

Newkirk, T. L. and Taylor, H. D., 1925. “Shaft Whipping Due to Oil Action in Journal Bearings”, **General Electric Review**, Vol. 28, pp. 559-568.

Nikolajsen, J. L. and Holmes, R., 1980, “The Vibration of a Multi-Bearing Rotor”, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 72(3), pp. 343-350.

Pestel, E. C. and Leckie, F. A., 1963, **Matrix Methods in Elastomechanics**. McGraw-Hill.

Prohl, M. A., 1945, “A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors” , **ASME Journal of Applied Mechanics**, Vol. 67, pp. A-142-A-148.

Rajalinghan, C.; Ganesan, N. and Prabhu, B. S., 1986, “Conditions for Backward Whirling Motion of a Flexible Rotor Supported on Hydrodynamic Journal Bearings”, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 111(1), pp. 29-36.

Ramamurti, V. and Pradeep Simha, A. R., 1987, “Finite Element Calculation of Critical Speeds of Rotation of Shafts with Gyroscopic Action of Discs”, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 117(3), pp. 578-582.

Rao, J. S., 1983, **Rotordynamics**. Wiley Eastern, New Delhi, 224 p.

Rios, R. D., 1994, **Determinação das Propriedades Dinâmicas das Estruturas Mediante o Emprego de Modelos em Escala Reduzida**. Dissertação, M. Eng., PROMEC-UFRGS.

Roberts, J. B. and Kaya, 1987, "Vibration Control of a Flexible Transmission Shaft by Means of a Squeeze-Film Damper: An Experimental Investigation", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 113(2), pp. 329-345.

Routson, R. L.; Starkey, J. M.; Wang, P and Davies, P, 1992, "Torsional and Translational Vibrations of a Drive Shaft Systems with a Cardan Joint", DE v.47, **Flexible Mechanisms, Dynamics and Analysis**, ASME, pp.533-542.

Ruhl, R. L. and Booker, J. F., 1972, "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turbo-rotor Systems", **Journal of Engineering for Industry**, Transactions of ASME, February, p. 126.

SAE Manual, 1979. **Universal Joints and Driveshaft Design Manual. Advances in Engineering Series**, No. 7. Society of Automotive Engineers Inc.

Sauer, G. and Wolf, M., 1989, "Finite Element Analysis of Gyroscopic Effects". **Finite Elements in Analysis and Design**, n.5, pp.131-140.

Shigley, J. E., 1969, **Dinâmica das Máquinas**, Ed. Edgard Blücher Ltda., São Paulo.

Siddiqui, S. A. Q. and Golnaraghi, M. F., 1996. "A New Vibration Regulation Strategy and Stability Analysis for a Flexible Gyroscopic System", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 193(2), pp. 465-481.

Stephenson, R. K.; Rouch, K. E. and Arora, R., 1989. "Modelling of Rotors with Axisymmetric Solid Harmonic Elements" , **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 131(3), pp. 431-443.

Subbiah, R. and Rieger, N. F., 1987, "On the Transient Analysis of Rotor-Bearing Systems", **Proc. of Rotating Machinery Dynamics**, Vol. II, pp. 525-536.

Subbiah, R.; Kumar, A. S. and Sankar, T. S., 1988, "Transient Dynamic Analysis of Rotors Using the Combined Methodologies of Finite Elements and Transfer Matrix ", **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 55, pp. 448-452.

Subrahmanyam, K. B. and Garg, A. K., 1997. "Uncoupled Flexural Vibrations of Straight Beams with All Possible Boundary Conditions Treated by a Transfer Matrix Method", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 204(3), pp. 397-419.

Thomson, W. T., 1950, **Vibration Problems in Engineering**, D. Van Nostrand, Toronto, 3.

ed., pp. 324-331.

Turkstra, T. P. and Semercigil, S. E., 1993, "An Add-On Suspension for Controlling the Vibrations of Shafts Accelerating to Supercritical Speeds", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 163(2), pp. 327-341.

Turkstra, T. P. and Semercigil, S. E., 1997, "Vibration Control for a Flexible Transmission Shaft with an Axially Sliding Support", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 206(4), pp. 605-610.

Udapa, K. M. and Varadan, T. K., 1990, "Hierarchical Finite Element Method for Rotating Beams", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 138(3), pp. 447-456.

Vance, J. M., 1989. **Rotordynamics of Turbomachinery**.

Wettergren, H. L. and Olsson, K. -O., 1996, "Dynamic Instability of Rotating Asymmetric Shaft with Internal Viscous Damping Supported in Anisotropic Bearings", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 195(1), pp. 75-84.

Wu, J. -S. and Yang, I. -H., 1995, "Computer Method for Torsion-and-Flexure-Coupled Forced Vibration of Shafting System with Damping", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 180(3), pp. 417- 435.

Yang, B., 1994, "Vibration Control of Gyroscopic Systems Via Direct Velocity Feedback", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 175(4), pp. 525-534.

Yim, K. B., Noah, S. T. and Vance, J. M., 1986, "Effects of Tangential Torque on the Dynamics of Flexible Rotors", *Trans. ASME* **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 53, pp. 711-718.

Yu, H. and Adams, M. L., 1989, "The Linear Model for Rotor-Dynamic Properties of Journal Bearings and Seals with Combined Radial and Misalignment Motions", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 131(3), pp. 367-378.

Yu, J-Y and Craggs, A., 1995, "Transfer Matrix Method for Finite Element Models of a Chain-Like Structure Under Harmonic Excitations", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 187(1), pp. 169-175.

APÊNDICE I - CATÁLOGO DE MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA

Variáveis

A : área da seção transversal (m^2)

c : constante de amortecimento viscoso ($\frac{N.s}{m}$)

E : módulo de Young ($\frac{N}{m^2}$)

g : constante de amortecimento estrutural

G : módulo de cisalhamento ($\frac{N}{m^2}$)

i : unidade imaginária ($\sqrt{-1}$)

i_x : raio de giração da seção transversal em relação a coordenada x (m)

i_y : raio de giração da seção transversal em relação a coordenada y (m)

I_p : momento de inércia de massa polar ($Kg.m^2$)

I_t : momento de inércia de massa transversal ($Kg.m^2$)

J : momento de inércia de área (m^4)

k : constante de rigidez transversal ($\frac{N}{m}$)

k_r : constante de rigidez flexural ($\frac{N.m}{rad}$)

k_R : constante de rigidez de articulação de uma rótula ($\frac{N}{m}$)

l : comprimento (m)

m : massa (Kg)

M : momento fletor ($N.m$)

T : momento torsor ($N.m$)

V : força cortante (N)

w : deslocamento (m)

κ : fator de correção para deformação por corte

ϕ : ângulo de torção (rad)

μ : massa por unidade de comprimento ($\frac{Kg}{m}$)

ρ : densidade ($\frac{Kg}{m^3}$)

ψ : deslocamento angular (rad)

ω : frequência natural ($\frac{rad}{s}$)

Ω : velocidade angular ($\frac{rad}{s}$)

Vibrações Transversais

Vetor de Estado

$$\begin{bmatrix} -w \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}$$

Matrizes de Campo

Elemento elástico sem massa

$$\begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2.E.J} & \frac{l^3}{6.E.J} - \frac{l}{k.G.A} \\ 0 & 1 & \frac{l}{E.J} & \frac{l^2}{2.E.J} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Elemento elástico com massa homogeneamente distribuida

$$\begin{bmatrix} c_0 & l.c_1 & a.c_2 & a.l.c_3 \\ \frac{\beta^4.c_3}{l} & c_0 & \frac{a.c_1}{l} & a.c_2 \\ \frac{\beta^4.c_2}{a} & \frac{\beta^4.l.c_3}{a} & c_0 & l.c_1 \\ \frac{\beta^4.c_1}{a.l} & \frac{\beta^4.c_2}{a} & \frac{\beta^4.c_3}{l} & c_0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

onde:

$$a = \frac{l^2}{E.J}$$

$$\beta^4 = \frac{\mu.\omega^2.l^4}{E.J}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}.(\cosh \beta + \cos \beta)$$

$$c_1 = \frac{1}{2.\beta}.(\sinh \beta + \sin \beta)$$

$$c_2 = \frac{1}{2.\beta^2}.(\cosh \beta + \cos \beta)$$

$$c_3 = \frac{1}{2.\beta^3}.(\sinh \beta + \sin \beta)$$

Elemento elástico com massa distribuída e efeito giroscópico (teoria de Timoshenko)

$$\begin{bmatrix} c_0 - \sigma.c_2 & l.[c_1 - (\sigma + \tau).c_3] & a.c_2 & \frac{a.l}{\beta^4}.[-\sigma.c_1 + (\beta^4 + \sigma^2).c_3] \\ \frac{\beta^4.c_3}{l} & c_0 - \tau.c_2 & \frac{a}{l}.(c_1 - \tau.c_3) & a.c_2 \\ \frac{\beta^4.c_2}{a} & \frac{l}{a}.[-\tau.c_1 + (\beta^4 + \tau^2).c_3] & c_0 - \tau.c_2 & l.[c_1 - (\sigma + \tau).c_3] \\ \frac{\beta^4}{a.l}.(c_1 - \sigma.c_3) & \frac{\beta^4.c_2}{a} & \frac{\beta^4.c_3}{l} & c_0 - \sigma.c_2 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

onde:

$$a = \frac{l^2}{E.J}$$

$$c_0 = \Lambda.(\lambda_2^2.\cosh \lambda_1 + \lambda_1^2.\cos \lambda_2)$$

$$c_1 = \Lambda.\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}.\sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}.\sin \lambda_2\right)$$

$$c_2 = \Lambda.(\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2)$$

$$c_3 = \Lambda.\left(\frac{1}{\lambda_1}.\sinh \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2}.\sin \lambda_2\right)$$

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

$$\lambda_{1,2} = +\sqrt{\beta^4 + \frac{1}{4}.(\sigma - \tau)^2} \pm \frac{1}{2}.(\sigma + \tau)$$

$$\tau = -\frac{\mu.l^2.\omega^2}{E.J}.(i_x^2.constante - i_y^2)$$

Matrizes de Ponto

Elemento massa puntual com efeito giroscópico

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega \cdot (I_p \cdot \Omega - I_t \cdot \omega) & 1 & 0 \\ m \cdot \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Elemento massa puntual com molas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 1 & 0 \\ m \cdot \omega^2 - k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Elemento massa puntual com mola e amortecedor viscoso

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 1 & 0 \\ m \cdot \omega^2 - k + i \cdot c \cdot \omega & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Elemento rótula elástica com massa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m \cdot \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Elemento rótula elástica com amortecimento

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_R + i \cdot (g \cdot k_r + c \cdot \Omega)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m \cdot \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Elemento mola-massa acoplados

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m \cdot \omega^2 - k + k_d & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

onde:

$$k_d = \frac{k_{12} \cdot m_k \cdot \omega^2}{k_{12} - m_k \cdot \omega^2}$$

Elemento mola-massa e amortecedor acoplados

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m.\omega^2 - k + k_d & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

onde:

$$k_d = \frac{1}{(k_{12} - m.\omega^2)^2 + c_{12}^2.\omega^2} \cdot [m.\omega^2 \cdot [k_{12} - k_{12}.m.\omega^2 - c_{12}^2.\omega^2] + i.(c_{12}.m^2.\omega^5)]$$

A1.14 - Elemento disco flexível com efeito giroscópico

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 \cdot \left(\frac{I_p.\Omega.\omega - I_t.\omega^2}{I_p.\Omega.\omega - I_t.\omega^2 + k_3} \right) & 1 & 0 \\ k_1 \cdot \frac{m.\omega^2}{m.\omega^2 + k_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

A1.15 - Elemento junta elástica com efeito giroscópico

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_r} & 0 \\ 0 & \omega \cdot (I_p.\Omega - I_t.\omega) & 1 & 0 \\ m.\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Vibrações Torsionais

Vetor de Estado

$$\begin{bmatrix} \phi \\ T \end{bmatrix}$$

Matrizes de Campo

Elemento elástico com massa distribuída

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & \frac{1}{G.J} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \\ -\mu.l.i_x^2.\omega^2 \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$\beta = l.\omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

Elemento elástico sem massa

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{G.J} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Matriz de Ponto

Elemento massa rotacional

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I_t.\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

APÊNDICE II - ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS DOS TRANSDUTORES UTILIZADOS NOS PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Transdutores Piezoelétricos

Acelerômetro I

Marca: Endevco

Modelo: 2217E

Serial No: NC34

Massa: 45g

Calibração: 72mV por 1G a 23°C/50Hz

Acelerômetro II

Marca: Brüel & Kjaer

Modelo: 4338

Serial No: 442183

Massa: 63g

Calibração: 98mV por 1G a 23°C/50Hz