

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução Analítica da Equação de Multigrupo
de Cinética de Nêutrons em Geometria
Cartesiana e Cilíndrica Unidimensionais**

por

Fernando Rodrigues de Oliveira

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena
Orientador

Porto Alegre, Janeiro de 2013.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Oliveira, Fernando Rodrigues de

Solução Analítica da Equação de Multigrupo de Cinética de Nêutrons em Geometria Cartesiana e Cilíndrica Unidimensionais / Fernando Rodrigues de Oliveira.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2013.

78 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2013.

Orientador: Menna Barreto de Vilhena, Marco Túlio

Dissertação: Fenômenos de Transporte
Fenômenos de transporte, Equação de cinética, coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas, GITT

Solução Analítica da Equação de Multigrupo de Cinética de Nêutrons em Geometria Cartesiana e Cilíndrica Unidimensionais

por

Fernando Rodrigues de Oliveira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Túllio Menna Barreto de Vilhena

Banca examinadora:

Dr. Fernando Carvalho da Silva
COPPE - UFRJ

Dr. Daniela Buske
UFPel

Dra. Cynthia Feijó Segatto
PPGMAp - UFRGS

Dissertação apresentada
24/01/2013.

Prof^a Dr^a Maria Cristina Varrialle
Coordenadora

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	x
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 EQUAÇÃO DE MULTIGRUPO DE CINÉTICA DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS	5
2.1 Equação de difusão de nêutrons	5
2.2 Equação de cinética de difusão de nêutrons	8
3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CINÉTICA ESPACIAL PARA GEOMETRIA CARTESIANA	11
3.1 Caso monoenergético com um grupo de precursor de nêutrons atrasados	11
3.2 Resultados numéricos	19
3.3 Solução para o modelo de dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados	24
3.4 Resultados numéricos	30

4	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CINÉTICA ESPACIAL PARA GEOMETRIA CILÍNDRICA	38
4.1	Solução para nêutrons monoenergéticos com um grupo de precursor de nêutrons atrasados	38
4.2	Resultados numéricos	45
4.3	Solução para o modelo de dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados	51
4.4	Resultados numéricos	57
5	SOLUÇÃO GENÉRICA DA EQUAÇÃO DE CINÉTICA ESPACIAL PARA A GEOMETRIA CARTESIANA, A CILÍNDRICA E A ESFÉRICA	65
6	CONCLUSÃO E PROBLEMAS EM ABERTO	68
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	70
	APÊNDICE A	73

Lista de Figuras

Figura 2.1	Representação que discretiza a variável energia em G grupos. . .	5
Figura 3.1	Geometria cartesiana	19
Figura 3.2	Gráfico do fluxo em função da variável espacial para alguns instantes	22
Figura 3.3	Gráfico do fluxo em função de x e t	22
Figura 3.4	Gráfico da concentração de precursores de nêutrons atrasados em função de x e t	23
Figura 3.5	Tempo computacional em função do número de termos da série truncada	23
Figura 3.6	Gráfico do fluxo ϕ_1 em função da variável espacial para alguns instantes.	34
Figura 3.7	Gráfico do fluxo ϕ_2 em função da variável espacial para alguns instantes.	35
Figura 3.8	Gráfico do fluxo rápido em função de x e t	36
Figura 3.9	Gráfico do fluxo térmico em função de x e t	36
Figura 3.10	Gráfico da concentração de precursores $C_1(x, t)$ em função de x e t	37
Figura 3.11	Gráfico do tempo computacional em função de N	37
Figura 4.1	Geometria cilíndrica	46

Figura 4.2	Gráfico do fluxo de nêutrons em função da variável espacial para alguns instantes	48
Figura 4.3	Gráfico do fluxo de nêutrons em função de x e t	49
Figura 4.4	Gráfico da concentração de precursores de nêutrons atrasados em função de x e t	50
Figura 4.5	Gráfico do tempo computacional em função de N	50
Figura 4.6	Gráfico do fluxo rápido de nêutrons ϕ_1 em função da variável espacial para alguns instantes	62
Figura 4.7	Gráfico do fluxo térmico de nêutrons ϕ_2 em função da variável espacial para alguns instantes	62
Figura 4.8	Gráfico do fluxo rápido de nêutrons em função de r e t	63
Figura 4.9	Gráfico do fluxo térmico de nêutrons em função de r e t	63
Figura 4.10	Gráfico da concentração de precursores de nêutrons atrasados $C_1(r, t)$ em função de r e t	64
Figura 4.11	Gráfico do tempo computacional em função de N	64

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Constante de decaimento e fração de nêutrons atrasados para cada grupo de energia do U^{235}	9
Tabela 3.1	Parâmetros nucleares.	19
Tabela 3.2	Convergência do fluxo de nêutrons com relação a ϵ	20
Tabela 3.3	Convergência do fluxo de nêutrons com relação ao número de termos da série.	21
Tabela 3.4	Parâmetros nucleares considerando 2 grupos de energia.	31
Tabela 3.5	Parâmetros nucleares referentes aos nêutrons atrasados.	31
Tabela 3.6	Fluxo de nêutrons rápidos considerando o valor de ϵ	32
Tabela 3.7	Fluxo de nêutrons térmicos considerando o valor de ϵ	32
Tabela 3.8	Fluxo de nêutrons rápidos considerando o número de termos da série.	33
Tabela 3.9	Fluxo de nêutrons térmicos considerando o número de termos da série.	33
Tabela 3.10	Concentração de nêutrons considerando o número de termos da série.	34
Tabela 4.1	Parâmetros nucleares.	46
Tabela 4.2	Fluxo de nêutrons e a concentração de precursores com relação à ϵ	47
Tabela 4.3	Fluxo de nêutrons com relação ao número de termos da série	48

Tabela 4.4	Parâmetros nucleares considerando 2 grupos de energia.	57
Tabela 4.5	Parâmetros nucleares referentes aos nêutrons atrasados.	58
Tabela 4.6	Fluxo de nêutrons rápidos considerando o valor de ϵ	58
Tabela 4.7	Fluxo de nêutrons térmicos considerando o valor de ϵ	59
Tabela 4.8	Concentração de precursores de nêutrons considerando o valor de ϵ	59
Tabela 4.9	Fluxo para o grupo de nêutrons rápidos considerando o número de termos da série.	60
Tabela 4.10	Fluxo de nêutrons térmicos considerando o número de termos da série.	60
Tabela 4.11	Concentração de precursores do grupo 1 considerando o número de termos da série.	61

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$: seção de choque diferencial de espalhamento.
- $\Sigma_{sg'g}$: seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g .
- Σ_{sg} : seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g .
- Σ_{ag} : seção de choque macroscópica de absorção no grupo g .
- $\phi_g(\mathbf{r}, t)$: fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t .
- S_g : termo de fonte de nêutrons no grupo g .
- D_g : coeficiente de difusão de nêutrons no grupo g .
- v_g : velocidade dos nêutrons do grupo g .
- $D_g(\mathbf{r}, t)$: coeficiente de difusão na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t .
- $\Sigma_{ag}(\mathbf{r}, t)$: seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t .
- $\Sigma_{sg'g}(\mathbf{r}, t)$: seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' para o grupo g no tempo t .
- χ_g : espectro de fissão no grupo g .
- $\nu_{g'}$: número médio de nêutrons emitidos na fissão causada por nêutrons do grupo g' .
- $\Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t)$: seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' no tempo t .

- $S_g^{ext}(\mathbf{r}, t)$: fonte externa de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t .
- $\nu\Sigma_{fg}\phi_g(\mathbf{r}, t)$: taxa de produção de nêutrons por fissão no grupo g .
- U_{92}^{235} : isótopo do elemento químico Urânio.
- λ_i : constante de decaimento do i -ésimo grupo de precursores de nêutrons atrasados.
- β_i : fração de nêutrons atrasados do i -ésimo grupo de precursores de nêutrons atrasados.
- β : fração total de nêutrons atrasados.
- $C_i(\mathbf{r}, t)$: concentração do i -ésimo grupo de precursores de nêutrons atrasados na posição \mathbf{r} no tempo t .
- χ_g^p : espectro de fissão do grupo g para os nêutrons prontos.
- χ_g^d : espectro de fissão do grupo g para os nêutrons atrasados.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma solução analítica para a equação de cinética unidimensional de difusão de nêutrons, para o modelo de dois grupos de energia, nas geometrias cartesiana e cilíndrica, pelo método espectral. A ideia básica desta metodologia consiste na expansão da solução para os fluxos de nêutrons rápido e térmico, assim como, a solução para as concentrações de precursores de nêutrons atrasados, em séries de autofunções adequadamente escolhidas para a geometria considerada, ou seja, funções seno para a cartesiana e Bessel para a cilíndrica. Dessa maneira, substituem-se estas expansões na equação de cinética, integrando a equação resultante multiplicada pelas autofunções apropriadas à geometria estudada e, ao usar a propriedade da ortogonalidade, obtemos uma equação diferencial matricial linear de primeira ordem com solução conhecida. Assim, ao lançar mão das autofunções adequadas, mostramos a generalidade desta metodologia para solução deste tipo de problema nas geometrias consideradas. Por fim, apresentamos simulações numéricas e comparações com resultados da literatura para os fluxos de nêutrons e concentrações de nêutrons atrasados.

ABSTRACT

In this work, we report an analytical solution for the kinetic one-dimensional neutron diffusion equation for the two-group energy model, in cartesian and cylindrical geometry, by the spectral method. The basic idea of the proposed methodology, relies on the expansion of the fast and thermal neutron fluxes, as well, the delay neutron precursors concentrations, in a series of eigenfunctions, properly selected for the geometry considered, we mean sine functions for cartesian geometry and Bessel functions for cylindrical geometry. Replacing these expansions in the kinetic equation, taking moments and using the ortogonality property, we come out with a linear first order matrix differential equation with a well known solution. Actually, we have shown the generality of the proposed methodology to work out this kind of problem for the geometries considered using properly the eigenfunctions. Finally, we present numerical simulations and comparisons against literature results for the neutron fluxes and delayed neutron precursors concentrations.

1 INTRODUÇÃO

O modelo de cinética de reatores que envolve a equação da difusão de nêutrons é útil para analisar pequenos transientes no contexto da teoria de reatores nucleares. Em muitas abordagens encontradas na literatura, são usados esquemas numéricos para encontrar soluções aproximadas. Por causa do caráter rígido dessas equações, esses modelos numéricos demonstram uma elevada dificuldade de convergência para a solução. Mesmo sofisticadas técnicas de aceleração da convergência estão limitadas a uma certa precisão. Com estas observações, objetivamos nesse trabalho construir soluções que não são afetadas pela técnica numérica.

Matematicamente, as equações de cinética são do tipo *Stiff* pelo envolvimento de amplas diferenças nas ordens de grandeza da escala de tempo nos fenômenos físicos, e esse fato é o que as torna de difícil solução. Nessa teoria, as equações de cinética se dividem em duas: a pontual e a espacial, sendo que a primeira é um modelo simplificado que assume um fluxo de nêutrons com distribuição espacial fixa no tempo. Quando as equações têm coeficientes constantes, as soluções analíticas são facilmente estabelecidas [1][2], mas elas tornam-se complicadas quando os coeficientes variam com o tempo. Por assumir uma distribuição espacial fixa, a solução se restringe a reatores muito pequenos nos quais a distribuição espacial não fica sensível a mudanças locais nas propriedades do reator e, como essas mudanças são fundamentais, o modelo se torna inadequado para vários tipos de situações. Os experimentos feitos por Yasinsky e Henry [3] demonstraram a inadequabilidade das equações da cinética pontual e a necessidade de modelos mais sofisticados, o que despertou o interesse para a questão dos problemas de cinética espacial. Com isso, foram feitas muitas análises comparativas entre a cinética pontual e a espacial, proporcionando uma maior compreensão da aplicabilidade de cada modelo.

No livro de Keepin [4], temos um dos primeiros trabalhos a estudar a cinética de reatores, o que proporcionou desenvolver uma gama de métodos para a obtenção da solução desse tipo de problema. Destacamos, dentre esses métodos, o método quase-estático [5] [6], no qual é considerado uma densidade de nêutrons como um produto de uma função amplitude - dependente do tempo, usando escalas curtas de tempo - e uma função forma - dependente de todas as variáveis inclusive do tempo só que com escalas longas. Há também os métodos modais [7] [8] e nodais [9], os quais tratam a parte espacial separadamente, o primeiro tratando a parte temporal por amplitudes modais (método modal), e o segundo trabalhando com constantes de acoplamento nodais (método nodal). Podemos encontrar em Kaplan et. al. [10] uma revisão de métodos numéricos e analíticos e, em Sutton e Aviles [11], encontramos uma revisão sobre métodos utilizados para cálculos em cinética espacial.

Devido à importância como referência no desenvolvimento e qualificação de códigos numéricos, tem-se dado uma grande atenção aos métodos analíticos. A explicação para tal atenção é que pode-se verificar a confiabilidade do método numérico utilizado, pois além de separar os efeitos numericamente induzidos daqueles causados pelo próprio modelo, ainda determina as suas limitações [12].

O trabalho feito por Case et al. [13] é citado por Oliveira [14] como o primeiro *benchmark* analítico em teoria de transporte. Recentemente Petersen et al. [15] resolveram a equação de cinética pontual de difusão de nêutrons para a geometria cartesiana em um modelo de dois grupos de energia pela técnica da transformada de Laplace. Em outro trabalho, Gonçalves et al. [16] e Vilhena et al. [17] resolveram a equação do transporte de nêutrons em geometria cilíndrica considerando espalhamento anisotrópico e isotrópico, usando a transformada de Hankel.

Neste trabalho, apresentamos uma solução analítica para as equações de cinética unidimensional tanto em geometria cartesiana quanto em geometria ci-

lândrica, através da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada GITT (*Generalized Integral Transform Technique*) combinada com a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias resultante. A técnica da GITT está bem estabelecida para resolver analiticamente equações diferenciais lineares para uma grande classe de problemas na área da Física e da Engenharia. A abordagem principal desse método consiste em construir transformações a partir dos termos adjuntos do laplaciano encontrado nesse tipo de problema. Assim, podemos escrever a solução como uma expansão em série de autofunções ortonormais obtidas da solução de um problema de Sturm-Liouville construído a partir dos termos adjuntos. A ortogonalidade das autofunções completa as transformações, para pensar esse método nos valem os livros de Cotta e Mikhaylov [18] e Cotta [19][20].

Em um primeiro momento, aplicamos a técnica às equações de cinética de nêutrons para as duas geometrias, considerando um caso unidimensional, monoenergético e com um grupo de nêutrons atrasados. Como, na derivação para a concentração de precursores de nêutrons atrasados determinamos uma equação linear de primeira ordem na variável temporal e espacial, introduzimos um termo de difusão fictícia multiplicado por um valor pequeno ϵ para tornar possível a aplicação da GITT, procedimento este, que nos permite resolver o conjunto de equações pelo método discutido. Em um segundo momento, obtemos uma equação diferencial matricial simples de solução bem conhecida, nos propiciando fazer para cada geometria, o mesmo procedimento para obter a solução, considerando agora dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados. O trabalho apresenta, ao final de cada análise, simulações numéricas com análise de resultados obtidos com precisão controlada pela ordem de truncamento da série. Para fins de complemento, fizemos uma comparação entre as duas diferentes geometrias abordadas até então, sugerindo um comportamento semelhante entre as duas soluções quando consideramos valores suficientemente grandes da variável espacial.

A presente dissertação está estruturada da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos a derivação do modelo físico a ser estudado nos capítulos posteriores; no capítulo 3 implementamos a metodologia para o problema de cinética de difusão de nêutrons considerando a geometria cartesiana, juntamente com resultados obtidos; no capítulo 4, implementamos a metodologia proposta considerando a geometria cilíndrica, juntamente com resultados obtidos; no capítulo 5, fizemos uma comparação entre os dois tipos de geometrias abordadas, conjecturando um aspecto semelhante entre as soluções para um valor suficientemente grande da variável espacial. Por fim, no capítulo 6, encontra-se a conclusão para este trabalho, assim como uma problematização ainda presente no campo da Matemática Aplicada.

2 EQUAÇÃO DE MULTIGRUPO DE CINÉTICA DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS

Neste capítulo, apresentaremos a derivação da equação de nêutrons para o modelo multigrupo, bem como, a equação de cinética espacial em geometria cilíndrica e cartesiana.

2.1 Equação de difusão de nêutrons

Para derivar as equações de difusão de nêutrons na formulação de multigrupos, uma das maneira mais simples é aplicar o conceito do balanço de nêutrons para um grupo de energia dado, equilibrando as formas com que os nêutrons podem entrar ou sair desse dado grupo. Ao utilizar uma aproximação de multigrupos de energia, discretizamos a variável energia em G grupos/intervalos como representado na figura (2.1):

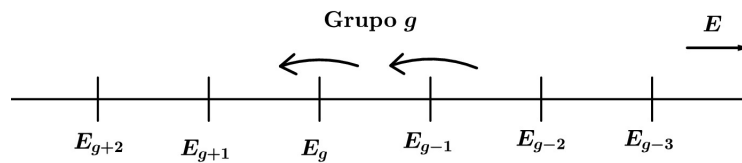


Figura 2.1: Representação que discretiza a variável energia em G grupos.

Esse equilíbrio pode ser representado através do esquema abaixo:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \text{Taxa de variação temporal} \\ \text{do fluxo de nêutrons} \\ \text{no grupo } g \end{array} \right] &= - \left[\begin{array}{c} \text{Perda devido} \\ \text{à fuga} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Perda devido à} \\ \text{absorção no grupo } g \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{c} \text{Espalhamento de} \\ \text{nêutrons para fora} \\ \text{do grupo } g \end{array} \right] &+ \left[\begin{array}{c} \text{Espalhamento de} \\ \text{nêutrons para} \\ \text{dentro do grupo } g \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Fonte de} \\ \text{nêutrons} \\ \text{no grupo } g \end{array} \right] \end{aligned}$$

Deve ser notado que levamos em conta o fato de que a colisão de espalhamento pode alterar a energia do nêutron e, portanto, removê-lo do grupo g . Vamos caracterizar a probabilidade de espalhamento de nêutrons de um grupo g' para o grupo g por uma aproximação da seção de choque diferencial de espalhamento e, assim, caracterizamos por $\Sigma_{sg} = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_s^{gg'}$.

Iremos definir similarmente uma seção de choque de absorção no grupo g denotada por Σ_{ag} e um termo de fonte S_g como uma taxa de nêutrons produzidos no grupo g por uma fonte. Por último, temos o coeficiente de difusão do grupo g , representado por D_g . Assim, se combinarmos todos esses termos, encontramos uma expressão matemática que representa esse balanço:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g = \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g - \Sigma_{ag} - \Sigma_{sg} + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} + S_g \quad g = 1, 2, \dots, G \quad (2.1)$$

se considerarmos o termo de fonte devido à fissão, então podemos escrever:

$$S_g = \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + S_g^{ext} \quad (2.2)$$

Com isso, podemos escrever as equações multigrupo de energia da difusão de nêutrons como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{ag}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) - \left(\sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sgg'}(\mathbf{r}, t) \right) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ &+ \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg'g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + S_g^{ext}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

para $g, g' \in \{1, 2, \dots, G\}$, onde:

$\phi_g(\mathbf{r}, t)$ representa o fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t ;

v_g representa a velocidade dos nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t ;

$D_g(\mathbf{r}, t)$ representa o coeficiente de difusão na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t ;

$\Sigma_{ag}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t ;

$\Sigma_{sgg'}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g para o grupo g' no tempo t ;

$\Sigma_{sg'g}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' para o grupo g no tempo t ;

χ_g representa a fração de nêutrons que aparece no grupo g ;

$\nu_{g'}$ representa o número médio de nêutrons emitidos na fissão do grupo g' ;

$\Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' no tempo t e

$S_g^{ext}(\mathbf{r}, t)$ representa a fonte externa de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t .

Para o caso de dois grupos de energia, da equação (2.3) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot D_1(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_1(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{a1}(\mathbf{r}, t) \phi_1(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{s1} \phi_1(\mathbf{r}, t) \\ &+ \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_{sg'g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + S_1(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot D_2(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_2(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{a2}(\mathbf{r}, t) \phi_2(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{s2} \phi_2(\mathbf{r}, t) \\ &+ \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_{sg'g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + S_2(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Em ambas as equações, assume-se que os nêutrons aparecem instantaneamente após a fissão. O termo $\nu \Sigma_{fg} \phi_g(\mathbf{r}, t)$ representa a taxa de produção de nêutrons por fissão no grupo g e tem dimensão de nêutrons dada por cm^3 por segundo. O que ocorre na realidade é que existe uma fração de nêutrons que são produzidos no decaimento dos produtos de fissão que ocorre subsequente aos produtos de fissão. Os nêutrons produzidos na fissão são chamados de nêutrons prontos, já os nêutrons originários deste decaimento são chamados de nêutrons atrasados.

2.2 Equação de cinética de difusão de nêutrons

Os nêutrons atrasados não têm as mesmas propriedades que os nêutrons prontos produzidos diretamente da fissão, uma delas é que a energia média dos nêutrons prontos é maior do que a energia média dos nêutrons atrasados [7]. Há pelo menos um impacto importante no ciclo de vida do nêutron relacionado aos nêutrons atrasados: o fato de que os nêutrons atrasados têm probabilidade menor de fuga do núcleo por "nascerem" com energias mais baixas e, assim, viajam distâncias mais curtas. De acordo com a sua meia-vida, podemos reunir os produtos de fissão em 6 grupos. A tabela abaixo mostra a fração de nêutrons atrasados para o combustível U_{92}^{235} .

Tabela 2.1: Constante de decaimento e fração de nêutrons atrasados para cada grupo de energia do U^{235} .

Grupo (U^{235})	Constante de decaimento $\lambda_i(s^{-1})$	Fração β_i
1	0,0124	0,00022
2	0,0305	0,00142
3	0,111	0,00127
4	0,310	0,00257
5	1,14	0,00075
6	3,01	0,00027

Por definição, $\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$. Logo, pela tabela acima, para o Urânio U_{92}^{235} temos $\beta = 0,0065$, o que significa que os nêutrons atrasados correspondem a 0,65% dos nêutrons produzidos por fissão desse elemento. Importante ressaltar que para uma escala de tempo maior, essa porcentagem é significativa. Agora vamos definir um conjunto de equações que descrevem a dependência temporal da concentração de precursores de nêutrons atrasados no entanto devemos avaliar os mecanismos de perda e ganho dos precursores. Na mesma tabela 2.1, apresentamos algumas constantes de precursores de nêutrons atrasados.

O balanço da variação temporal é dado pela produção do precursor através da fissão e pela perda causada pelo posterior decaimento. Os nêutrons produzidos pelo grupo i , considerando G grupos de energia, podem ser contabilizados da seguinte forma: multiplicando a taxa de produção de nêutrons na fissão (soma das taxas de produção de nêutrons em cada grupo de energia) pela fração de nêutrons atrasados, de forma que para $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ tem-se:

$$\sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \quad (2.6)$$

Já a perda é dada pela taxa de decaimento do precursor que pode ser expressa como o produto da concentração do precursor $C_i(\mathbf{r}, t)$ e da sua respectiva constante de decaimento λ_i para $i \in \{1, \dots, 6\}$

Portanto, a equação de balanço que representa a variação temporal da concentração de precursores, considerando G grupos de energia e $i \in \{1, \dots, 6\}$, é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) = -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \quad \text{para } i = 1, \dots, 6 \quad (2.7)$$

Se incluirmos os nêutrons atrasados através da fração de nêutrons atrasados β_i e da taxa de decaimento λ_i para cada precursor, junto com a inclusão da equação de balanço para a concentração de precursores e definindo a seção de choque macroscópica de remoção no grupo g como $\Sigma_{Rg}(\mathbf{r}, t) = \Sigma_{ag}(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{sg}(\mathbf{r}, t)$, temos, considerando o modelo de multigrupo de energia sem fonte externa, as equações multigrupo da cinética espacial dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{Rg}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \sum_{g'=1}^G (1 - \beta) \chi_g^p \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^P \chi_g^d \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) &= \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde χ_g^p e χ_g^d são os espectros de fissão do grupo g para, respectivamente, os nêutrons prontos e os nêutrons atrasados.

Essas equações que descrevem o fluxo de nêutrons em um reator, incluindo os nêutrons atrasados, servirão de objeto de estudo desse trabalho.

3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CINÉTICA ESPACIAL PARA GEOMETRIA CARTESIANA

Neste capítulo, pretendemos desenvolver a solução para o sistema de equações derivadas do capítulo anterior, considerando o problema unidimensional em geometria cartesiana. Para isso, iremos considerar um domínio homogêneo, simplificado da seguinte forma: $D(x) = D$, $\Sigma_a(x) = \Sigma_a$, $\Sigma_f(x) = \Sigma_f$ e $\Sigma_{sg}(x) = \Sigma_{sg}$. Ao definir essa simplificação, consideramos dois casos: o primeiro com um grupo de energia e um grupo de precursores, e segundo com 2 grupos de energia (térmico e rápido) e 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados.

3.1 Caso monoenergético com um grupo de precursor de nêutrons atrasados

Para exemplificar a ideia do método proposto, vamos considerar o sistema de equações abordado no capítulo anterior. A equação (2.8), com todas as suposições, pode ser escrita como exposta a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) &= D \nabla^2 \phi(x, t) - \Sigma_a \phi(x, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(x, t) + \lambda C(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C(x, t) &= -\lambda C(x, t) + \beta \nu \Sigma_f \phi(x, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Como $\nabla^2 \phi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) &= D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) + [(1 - \beta) \nu \Sigma_f - \Sigma_a] \phi(x, t) + \lambda C(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C(x, t) &= -\lambda C(x, t) + \beta \nu \Sigma_f \phi(x, t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $t > 0$ e $0 < x < L$, com as seguintes condições de contorno, $\phi(0, t) = 0 = \phi(L, t)$ e com as condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned}\phi(x, 0) &= \phi_0(x) \\ C(x, 0) &= \frac{\beta\nu\Sigma_f}{\lambda}\phi_0(x)\end{aligned}\tag{3.3}$$

aqui $\phi_0(x)$ denota o fluxo de nêutrons no tempo inicial, e como temos apenas um grupo de precursores, usamos a média $\lambda^{-1} = \beta^{-1} \sum_{i=1}^6 \beta_i \lambda_i^{-1}$.

Antes de iniciarmos a resolução desse sistema, vamos primeiramente adicionar o seguinte termo:

$$\epsilon \nabla^2 C(x, t) = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x, t)\tag{3.4}$$

com o objetivo de aplicar o método espectral GITT [19] para resolver o problema. Assim, vamos considerar um novo sistema de equações, onde o valor de ϵ é muito pequeno e positivo, afim de a solução do novo problema tender à solução do problema inicial. Para a concentração também iremos assumir as condições de contorno homogêneas.

Portanto, o sistema dado em (3.2) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) &= D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) + [(1 - \beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a] \phi(x, t) + \lambda C(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C(x, t) &= \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x, t) - \lambda C(x, t) + \beta\nu\Sigma_f \phi(x, t)\end{aligned}\tag{3.5}$$

A existência de um termo de difusão na equação da concentração de precursores permite a aplicação do método GITT expandindo o fluxo de nêutrons e a concentração de precursores em termos das autofunções $\left\{ \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\}_{n=1}^N$

Em consonância com a nossa análise, definiremos o que é um conjunto ortogonal de funções e uma norma.

Definição 3.1.1 (Conjunto ortogonal). Diz-se que um conjunto de funções com valores reais $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots\}$ é **ortogonal** em um intervalo $[a, b]$ se

$$(f_m, f_n) = \int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

Definição 3.1.2. A **norma**, ou comprimento generalizado, de uma função f_n em um intervalo $[a, b]$ é $\|f_n(x)\| = \sqrt{(f_n, f_n)}$, ou mais precisamente

$$\|f_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b f_n^2(x) dx}$$

Com essas definições temos uma propriedade importante para as auto-funções determinadas anteriormente:

Proposição 3.1.1. O conjunto $\{\text{sen}(\gamma_1 x), \text{sen}(\gamma_2 x), \dots, \text{sen}(\gamma_n x), \dots\}$ é um conjunto ortogonal no intervalo $[0, L]$, e $\|\text{sen}(\gamma_n x)\| = \sqrt{\frac{L}{2}}$, onde $\gamma_n = \frac{n\pi}{L}$.

Prova A demonstração se dá avaliando a seguinte integral:

$$\int_0^L \text{sen}(\gamma_n x) \text{sen}(\gamma_m x) dx$$

Primeiramente analisando o $m \neq n$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^L \text{sen}(\gamma_n x) \text{sen}(\gamma_m x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L [\cos((\gamma_n - \gamma_m)x) - \cos((\gamma_n + \gamma_m)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}[(\gamma_n - \gamma_m)x]}{\gamma_n - \gamma_m} - \frac{\text{sen}[(\gamma_n + \gamma_m)x]}{\gamma_n + \gamma_m} \right]_0^L \\ &= \frac{L}{2} \left[\frac{\text{sen}((n - m)\pi)}{(n - m)\pi} - \frac{\text{sen}((n + m)\pi)}{(n + m)\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

Se $m = n$, temos

$$\begin{aligned}
\|\text{sen}(\gamma_n x)\|^2 &= \int_0^L \text{sen}^2(\gamma_n x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L 1 - \cos(2\gamma_n x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\text{sen}(2\gamma_n x)}{2\gamma_n} \right]_0^L \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(L - \frac{\text{sen}\left(2\frac{n\pi}{L}L\right)}{2\frac{n\pi}{L}} \right) - \left(0 - \frac{\text{sen}(0)}{2\frac{n\pi}{L}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(L - \frac{\text{sen}(2n\pi)}{2\frac{n\pi}{L}} \right) \right] \\
&= \frac{L}{2} \Rightarrow \\
\|\text{sen}(\gamma_n x)\| &= \sqrt{\frac{L}{2}}
\end{aligned}$$

Antes de supormos uma possível solução para (3.5), atentamos para a seguinte definição:

Definição 3.1.3. *Se $\{f_n(x)\}$ é um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[a, b]$ com a propriedade de que $\|f_n(x)\| = 1$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, então $\{f_n(x)\}$ é chamado um **conjunto ortonormal** no intervalo $[a, b]$.*

Portanto, podemos concluir direto da definição que o conjunto

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\gamma_1 x), \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\gamma_2 x), \dots, \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\gamma_n x), \dots \right\}$$

é um conjunto ortonormal. Com isso, vamos supor como uma possível solução para (3.5) uma série que envolve um produto de autofunções ortonormais no espaço por funções no tempo, ou seja, vamos supor que:

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \text{sen}(\gamma_n x) \tag{3.6}$$

$$C(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \text{sen}(\gamma_n x) \tag{3.7}$$

Nosso procedimento é substituir as equações (3.6) e (3.7) no sistema de equações dado em (3.5), lembrando que determinamos autofunções de modo que satisfaça $\frac{d^2}{dx^2}\zeta_n(x) = -\gamma_n^2\zeta_n(x)$, com isso temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) &= -vD \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2) \varphi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&+ v[(1-\beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a] \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&+ v\lambda \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

e para a segunda equação:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) &= -\epsilon \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2) \xi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&- \lambda \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&+ \beta\nu\Sigma_f \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

O próximo passo consiste em multiplicar as equações (3.8) e (3.9) por $\sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}(\gamma_m x)$, $m \in \mathbb{N}$ fixo, e depois integrar a variável espacial em todo o intervalo, em outras palavras aplicar o operador integral:

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L (\cdot) \operatorname{sen}(\gamma_m x) dx \tag{3.10}$$

reagrupando os termos temos

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_n(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} v [D(\gamma_n^2) + \Sigma_a - (1 - \beta)\nu\Sigma_f] \varphi_n(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [-v\lambda] \xi_n(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx = 0 \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_n(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [-\beta\nu\Sigma_f] \varphi_n(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [\epsilon\gamma_n^2 + \lambda] \xi_n(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx = 0 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Já observamos que as funções $\text{sen}(\gamma_n x)$ são ortogonais em $[0, L]$, assim podemos concluir que todos os termos da série para os quais $m \neq n$ a integral $\int_0^L \text{sen}(\gamma_n x) \text{sen}(\gamma_m) dx$ vale zero. Logo, quando $m = n$ temos um sistema de equações diferenciais ordinárias dado por:

$$\frac{d}{dt} \varphi_n(t) + v [D(\gamma_n^2) + \Sigma_a - (1 - \beta)\nu\Sigma_f] \varphi_n(t) + [-v\lambda] \xi_n(t) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \xi_n(t) + [-\beta\nu\Sigma_f] \varphi_n(t) + [\epsilon\gamma_n^2 + \lambda] \xi_n(t) = 0 \quad (3.14)$$

Se truncarmos a série na ordem N , podemos representar o sistema de forma matricial como abaixo:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (3.15)$$

para $1 \leq n \leq N$, nos quais \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes diagonais de ordem N , que podemos representar por

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{a_{n,n}\}, \text{ onde } a_{n,n} = v \left[D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \Sigma_a - (1 - \beta)\nu\Sigma_f \right] \\ \mathbf{B} &= \{b_{n,n}\}, \text{ onde } b_{n,n} = [-v\lambda] \\ \mathbf{C} &= \{c_{n,n}\}, \text{ onde } c_{n,n} = [-\beta\nu\Sigma_f] \\ \mathbf{D} &= \{d_{n,n}\}, \text{ onde } d_{n,n} = [\epsilon\gamma_n^2 + \lambda] \end{aligned}$$

Dessa maneira, notamos que a equação (3.15) é uma equação matricial linear homogênea de primeira ordem e pode ser escrita como

$$\mathbf{X}'(t) + \mathbf{F}\mathbf{X}(t) = \vec{0} \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}'(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

assim podemos verificar que a matriz \mathbf{F} também pode ser expressa como

$$\begin{pmatrix} v[D\gamma_1^2 + \Sigma_a - (1 - \beta)\nu\Sigma_f] & 0 & 0 & -v\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & v[D\gamma_N^2 + \Sigma_a - (1 - \beta)\nu\Sigma_f] & 0 & \dots & -v\lambda \\ -\beta\nu\Sigma_f & 0 & 0 & \epsilon\gamma_1^2 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\beta\nu\Sigma_f & 0 & \dots & \epsilon\gamma_N^2 + \lambda \end{pmatrix}$$

No qual, para esse tipo de sistema, temos a solução bem conhecida como

$$\mathbf{X} = e^{-\mathbf{F}t}\mathbf{X}(0) \quad (3.18)$$

em que a condição inicial $\mathbf{X}(0)$ é o vetor

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} \varphi_n(0) \\ \xi_n(0) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

e aplicando o mesmo operador para as condições iniciais, temos

$$\begin{aligned} \phi_0(x) = \phi(x, 0) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(0) \text{sen}(\gamma_n x) \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_0(x) \text{sen}(\gamma_m x) dx &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(0) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \Rightarrow \\ \varphi_n(0) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_0(x) \text{sen}(\gamma_n x) dx. \end{aligned} \quad (3.20)$$

com $n = m$. Com o mesmo raciocínio para $\xi_n(0)$, temos

$$\xi_n(0) = \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\epsilon (\gamma_n)^2 + \lambda} \varphi_n(0) \quad (3.21)$$

Com a nossa solução quase pronta, alertamos que para problemas matriciais nos quais os autovalores da matriz \mathbf{F} são distintos, podemos então expressar a exponencial de matriz dada em (3.18) como

$$e^{-\mathbf{F}t} = \mathbf{Y}e^{-\mathbf{D}_g t}\mathbf{Y}^{-1} \quad (3.22)$$

onde \mathbf{Y} é a matriz dos autovetores de \mathbf{F} , \mathbf{D}_g é a matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{F} e \mathbf{Y}^{-1} é a inversa de \mathbf{Y} . Assim, podemos reescrever a solução $\mathbf{X}(t)$ como:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}e^{-\mathbf{D}_g t}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}(0). \quad (3.23)$$

3.2 Resultados numéricos

Para validar a metodologia proposta na seção anterior, resolveremos computacionalmente, usando o software MATLAB, um problema considerando os parâmetros nucleares da tabela abaixo:

Tabela 3.1: Parâmetros nucleares.

D [cm]	0,96343
v [cm/s]	$1,1035 \times 10^7$
Σ_a [cm^{-1}]	$1,5843 \times 10^{-2}$
$\nu\Sigma_f$ [cm^{-1}]	$3,3303 \times 10^{-2}$
β	0,0065
λ [s^{-1}]	0,0764467

Importante lembrar que nesse capítulo estamos considerando um tipo de placa plana (geometria cartesiana) para meio homogêneo, com condições de contorno dadas por $\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0$, e tamanho de placa $L = 20$ cm como indicado abaixo:

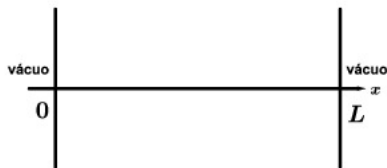


Figura 3.1: Geometria cartesiana

Para o fluxo inicial $\phi_0(x)$, usaremos $\phi_0(x) = 1,2$ nêutrons/ cm^2s . Vamos primeiramente usar os cálculos com o objetivo de mostrar a convergência da solução do problema transformado, fazendo ϵ tender a zero. Para isso, fizemos os valores de ϵ variarem de 10^{-4} até 10^{-11} com 2 termos da série para o ponto $x = 10cm$ e

$t = 2s$. Os resultados podem ser observados na tabela (3.2). Podemos notar que para $\epsilon = 10^{-10}$ e $\epsilon = 10^{-11}$ o fluxo é igual até a décima quinta casa decimal.

Tabela 3.2: Convergência do fluxo de nêutrons com relação a ϵ .

ϵ	$\phi(10, 2) [cm^{-2}s^{-1}]$
10^{-4}	0,043701628494462
10^{-5}	0,043701822591200
10^{-6}	0,043701842000072
10^{-7}	0,043701843935804
10^{-8}	0,043701844134206
10^{-9}	0,043701844149465
10^{-10}	0,043701844157098
10^{-11}	0,043701844157098

Agora verificaremos a convergência de acordo com o número de termos da série. Na tabela (3.3) mostramos os valores de $\phi(10, 2)$ obtidos através do aumento do número de termos em até 200 e considerando $\epsilon = 10^{-10}$. Por inspeção, percebemos que há uma precisão de 8 casas decimais utilizando os primeiros 150 termos da série, o que dá uma precisão de 8 algarismos significativos para $\epsilon = 10^{-10}$, exceto pelo erro de arredondamento.

Tabela 3.3: Convergência do fluxo de nêutrons com relação ao número de termos da série.

N	$\phi(10, 2) [cm^{-2}s^{-1}]$
2	0,043701844157098
10	0,043300325203548
20	0,043293900832785
30	0,043294858060102
40	0,043294543942724
50	0,043294684586088
60	0,043294609324553
70	0,043294654312047
80	0,043294625243956
90	0,043294645079552
100	0,043294630927969
150	0,043294669886628
200	0,043294667371870

Depois de mostrada a convergência do método, fizemos um gráfico para o fluxo de nêutrons em função da variável espacial, para tempos diferentes, que está representado na figura (3.2). Para o gráfico do fluxo em função de x e t , dado na figura (3.3), observamos a medida que o tempo aumenta, o fluxo diminui, ou seja, quando o tempo tende ao infinito o comportamento do fluxo tende a solução estacionária. Um comportamento semelhante é observado para a concentração de precursores no gráfico da figura (3.4).

O gráfico da figura (3.5) mostra o tempo computacional gasto em função do número de termos da série truncada.

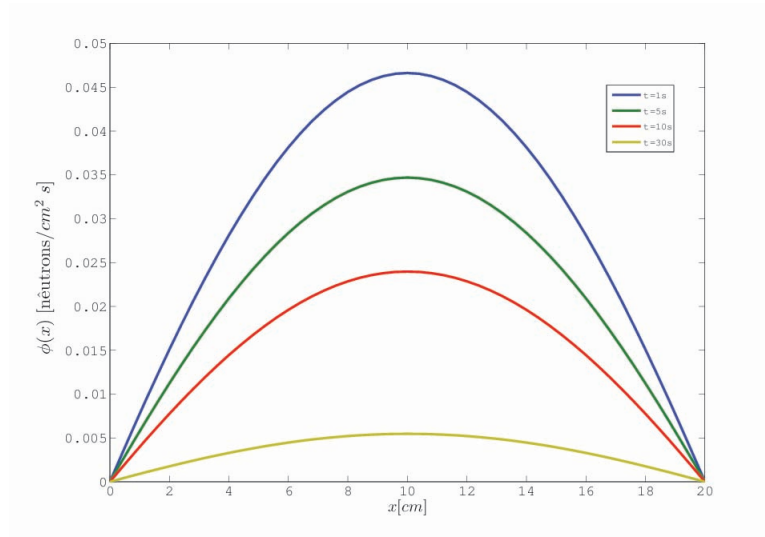


Figura 3.2: Gráfico do fluxo em função da variável espacial para alguns instantes

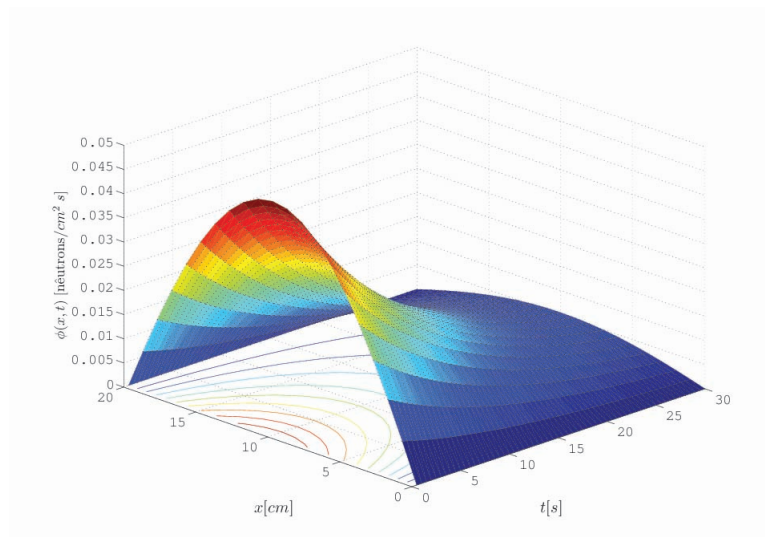


Figura 3.3: Gráfico do fluxo em função de x e t

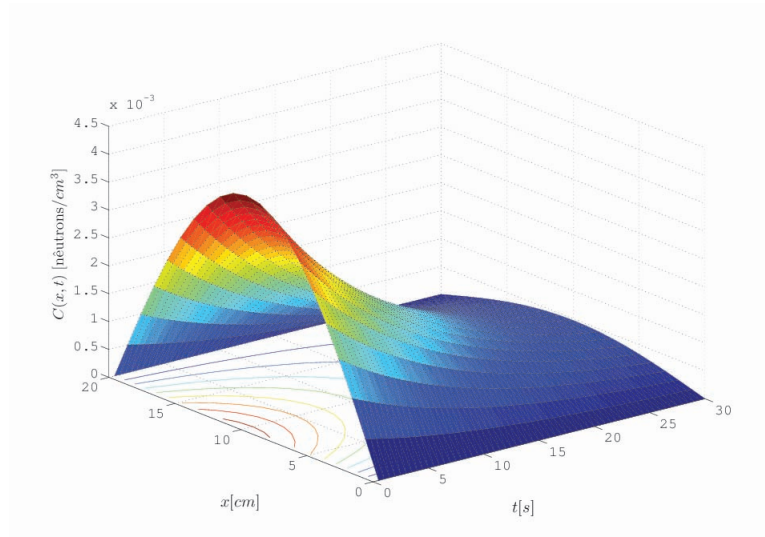


Figura 3.4: Gráfico da concentração de precursores de nêutrons atrasados em função de x e t

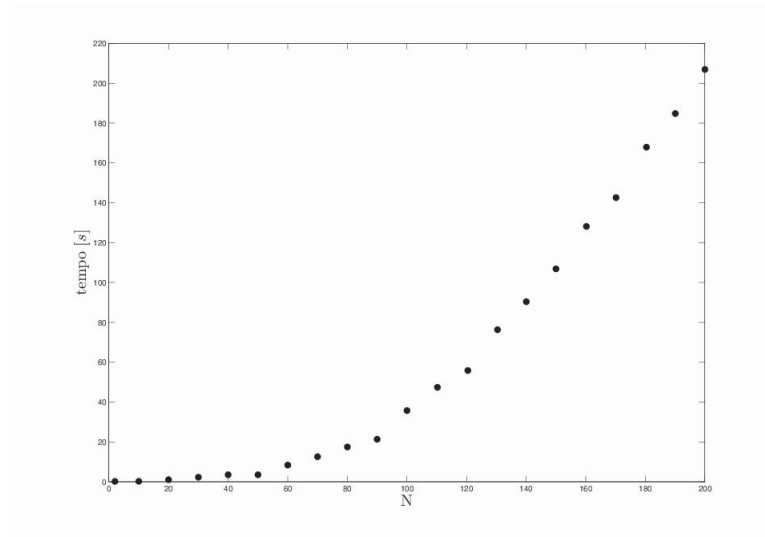


Figura 3.5: Tempo computacional em função do número de termos da série truncada

3.3 Solução para o modelo de dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados

Nessa seção, abordaremos a metodologia para o caso de dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados. Consideraremos para esse tipo de aplicação, o grupo 1 de energia como o grupo rápido, e o grupo 2 como o térmico. O limite de energia do grupo térmico é escolhido suficientemente alto para que o espalhamento do grupo 2 para o grupo 1 possa ser ignorado.

De acordo com as equações dadas em (2.8) e reagrupando termos, temos para esse caso o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(x, t) &= D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_1(x, t) + [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f1} - (\Sigma_{a1} + \Sigma_{s21})] \phi_1(x, t) \\ &+ [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21}] \phi_2(x, t) + \chi_1^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(x, t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(x, t) &= D_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_2(x, t) + [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f2} - (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12})] \phi_2(x, t) \\ &+ [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f1} + \Sigma_{s12}] \phi_1(x, t) + \chi_2^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(x, t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(x, t) + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(x, t) - \lambda_i C_i(x, t) \quad i = 1 \dots 6 \quad (3.26)$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(x, 0) &= \phi_{1,0}(x) \\ \phi_2(x, 0) &= \phi_{2,0}(x) \\ C_i(x, 0) &= \frac{\beta_i}{\lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_{1,0}(x) + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_{2,0}(x)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Em um procedimento semelhante ao que foi abordado para o caso monoenergético, introduziremos o termo de difusão fictícia na equação para a concentração de precursores (3.26), e assim temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) &= \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_i(x, t) + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(x, t) + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(x, t) \\ &- \lambda_i C_i(x, t) \quad i = 1 \dots 6 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Com isso, vamos resolver o conjunto de equações formado por (3.24), (3.25) e (3.28), supondo que o fluxo para o grupo rápido, o fluxo para o grupo térmico e as concentrações possam ser expandidas nas seguintes séries:

$$\phi_1(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \quad (3.29)$$

$$\phi_2(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \quad (3.30)$$

$$C_i(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \quad i = 1 \dots 6 \quad (3.31)$$

Ao substituir as expansões (3.29), (3.30) e (3.31) nas equações dadas em (3.24), (3.25) e (3.28), e ao lembrar que as autofunções satisfazem $\frac{d^2}{dx^2} [\text{sen}(\gamma_n x)] = -(\gamma_n)^2 \text{sen}(\gamma_n x)$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) &= -v_1 D_1 \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n)^2 \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f1} - (\Sigma_{a1} + \Sigma_{s21})] \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21}] \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ &+ v_1 \chi_1^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) &= -v_2 D_2 \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n)^2 \varphi_{2,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&+ v_2 [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f_2} - (\Sigma_{a_2} + \Sigma_{s_{12}})] \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&+ v_2 [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f_1} + \Sigma_{s_{12}}] \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&+ v_2 \chi_2^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \right) \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{i,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) &= -\epsilon \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n)^2 \xi_{i,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
+ \beta_i \nu_1 \Sigma_{f_1} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) &+ \beta_i \nu_2 \Sigma_{f_2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&- \lambda_i \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Na mesma linha do método, aplicamos o operador integral (3.10) nas equações (3.32), (3.33) e (3.34), e reagrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} v_1 [D_1(\gamma_n)^2 \\
&+ (\Sigma_{a_1} + \Sigma_{s_{21}}) - (1 - \beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f_1}] \varphi_{1,n}(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\
&+ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [-v_1 ((1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f_2} + \Sigma_{s_{21}})] \varphi_{2,n}(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\
&+ \frac{2}{L} \sum_{i=1}^6 [-v_1 \chi_1^d] \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx = 0 \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [-v_2 ((1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f1} \\
+ \Sigma_{s12})] \varphi_{1,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} v_2 [D_2(\gamma_n)^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) \\
- (1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f2}] \varphi_{2,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
+ \frac{2}{L} \sum_{i=1}^6 [-v_2 \chi_2^d] \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx = 0 \quad (3.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{i,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
+ [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}] \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
+ [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}] \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
+ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [\epsilon(\gamma_n)^2 + \lambda_i] \xi_{i,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx = 0 \quad i = 1..6 \quad (3.37)
\end{aligned}$$

pela ortogonalidade das autofunções, temos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_{1,n}(t) + v_1 [D_1(\gamma_n)^2 + (\Sigma_{a1} + \Sigma_{s21}) - (1 - \beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f1}] \varphi_{1,n}(t) \\
+ [-v_1 ((1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21})] \varphi_{2,n}(t) \\
+ \sum_{i=1}^6 [-v_1 \chi_1^d \lambda_i] \xi_{i,n}(t) = 0 \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_{2,n}(t) + [-v_2 ((1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f1} + \Sigma_{s12})] \varphi_{1,n}(t) \\
+ v_2 [D_2(\gamma_n)^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) - (1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f2}] \varphi_{2,n}(t) \\
+ \sum_{i=1}^6 [-v_2 \chi_2^d \lambda_i] \xi_{i,n}(t) = 0 \quad (3.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\xi_{i,n}(t) + [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}] \varphi_{1,n}(t) + [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}] \varphi_{2,n}(t) \\
+ [\epsilon(\gamma_n)^2 + \lambda_i] \xi_{i,n}(t) = 0 \quad i = 1 \dots 6 \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Da mesma forma que na seção anterior, tomamos \mathbf{O} como a matriz nula e as seguintes matrizes diagonais:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \{a_{n,n}\}, \text{ onde } a_{n,n} = v_1 \left[D_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + (\Sigma_{a1} + \Sigma_{s21}) - (1 - \beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f1} \right] \\
\mathbf{B} &= \{b_{n,n}\}, \text{ onde } b_{n,n} = [-v_1 ((1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21})] \\
\mathbf{C}_i &= \{c_{n,n}^i\}, \text{ onde } c_{n,n}^i = [-v_1 \chi_1^d \lambda_i], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{D} &= \{d_{n,n}\}, \text{ onde } d_{n,n} = [-v_2 ((1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f1} + \Sigma_{s12})] \\
\mathbf{E} &= \{e_{n,n}\}, \text{ onde } e_{n,n} = v_2 \left[D_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) - (1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f2} \right] \\
\mathbf{F}_i &= \{f_{n,n}^i\}, \text{ onde } f_{n,n}^i = [-v_2 \chi_2^d \lambda_i], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{G}_i &= \{g_{n,n}^i\}, \text{ onde } g_{n,n}^i = [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{H}_i &= \{h_{n,n}^i\}, \text{ onde } h_{n,n}^i = [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{J}_i &= \{j_{n,n}^i\}, \text{ onde } j_{n,n}^i = \left[\epsilon \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \lambda_i \right], \text{ para } i = 1 \dots 6
\end{aligned}$$

temos como resultado a seguinte equação matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_6 \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F}_1 & \dots & \mathbf{F}_6 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{J}_1 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_6 & \mathbf{H}_6 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (3.41)$$

para $n = 1 \dots N$, onde N é a ordem de truncamento da série.

Assim como no caso monoenergético, a equação (3.41) pode ser escrita como

$$\mathbf{X}'(t) + \mathbf{M}\mathbf{X}(t) = \vec{0} \quad (3.42)$$

com:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{X}'(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_6 \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F}_1 & \dots & \mathbf{F}_6 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{J}_1 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_6 & \mathbf{H}_6 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_6 \end{pmatrix}$$

e que, por sua vez, essa equação tem a solução bem conhecida

$$\mathbf{X}(t) = e^{-\mathbf{M}t}\mathbf{X}(0) \quad (3.44)$$

no qual $\mathbf{X}(0)$ é o vetor

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}(0) \\ \varphi_{2,n}(0) \\ \xi_{1,n}(0) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(0) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

onde:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,n}(0) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_{1,0}(x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\ \varphi_{2,n}(0) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_{2,0}(x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\ \xi_{i,n}(0) &= \frac{\beta_i}{\epsilon(\gamma_n)^2 + \lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \varphi_{1,n}(0) + \nu_2 \Sigma_{f2} \varphi_{2,n}(0)]; \quad i = 1 \dots 6 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Se os autovalores da matriz \mathbf{M} forem distintos, podemos expressar a solução dada em (3.44) como

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y} e^{-\mathbf{D}_{\mathbf{g}} t} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{X}(0) \quad (3.47)$$

onde \mathbf{Y} é a matriz dos autovetores de \mathbf{M} , \mathbf{Y}^{-1} é a sua inversa e $\mathbf{D}_{\mathbf{g}}$ é a matriz diagonal de autovalores de \mathbf{M} .

Portanto, a solução do sistema formado pelas equações (3.24), (3.25) e (3.28) é determinada pelas relações dadas em (3.29), (3.30) e (3.31), no qual a variável temporal é determinada pela fórmula (3.47), quando ϵ tende a zero.

3.4 Resultados numéricos

Visto que todos os nêutrons de fissão são gerados no grupo rápido, vamos considerar que $\chi_1^p = 1 = \chi_1^d$ e $\chi_2^p = 0 = \chi_2^d$ e também que $\Sigma_{s21} = 0$. Assim,

calcularemos o fluxo de nêutrons para o problema de cinética com 2 termos da série e com os parâmetros nucleares apresentados nas tabelas (4.4) e (4.5), com a espessura $L = 160\text{cm}$ e a condição inicial $\phi_{1,0} = 1,2$ nêutrons/ cm^2s e $\phi_{2,0} = 1$ nêutrons/ cm^2s , respectivamente para o fluxo rápido e o térmico.

Tabela 3.4: Parâmetros nucleares considerando 2 grupos de energia.

Parâmetro	Grupo 1	Grupo 2
D [cm]	1,0	0,5
v [cm/s]	10^7	3×10^5
Σ_{ag} [cm^{-1}]	0,02	0,08
$\Sigma_{g \rightarrow g+1}$ [cm^{-1}]	0,01	0
$\nu_g \Sigma_{fg}$ [cm^{-1}]	0,005	0,099

Tabela 3.5: Parâmetros nucleares referentes aos nêutrons atrasados.

i	β_i	λ_i [s^{-1}]
1	0,00022	0,0124
2	0,00164	0,0305
3	0,00147	0,111
4	0,00296	0,31
5	0,00086	1,14
6	0,00032	3,01

Ao realizar a análise dos resultados mostrados nas tabelas (3.6) e (3.7), verificamos a confirmação esperada, tanto para o fluxo rápido e para o fluxo térmico da a inexistência de difusão de precursores de nêutrons atrasados no limite quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Tabela 3.6: Fluxo de nêutrons rápidos considerando o valor de ϵ .

ϵ	$\phi_1(x, t)$ [nêutrons/ cm^2s]
10^{-4}	0,166138219110949
10^{-5}	0,166138224875204
10^{-6}	0,166138225449026
10^{-7}	0,166138225508665
10^{-8}	0,166138225513674
10^{-9}	0,166138225515924
10^{-10}	0,166138225517056

Tabela 3.7: Fluxo de nêutrons térmicos considerando o valor de ϵ .

ϵ	$\phi_2(x, t)$ [nêutrons/ cm^2s]
10^{-4}	0,018420495100365
10^{-5}	0,018420495739449
10^{-6}	0,018420495803069
10^{-7}	0,018420495809680
10^{-8}	0,018420495810235
10^{-9}	0,018420495810484
10^{-10}	0,018420495810610

Logo após, fizemos a análise da convergência da solução, relacionada ao número de termos da solução em série. Para isto, utilizamos o valor $x = \frac{L}{2} = 80cm$, tempo $t = 1s$ e aumentamos N até 200. Temos os resultados para o fluxo ϕ_1 representados na tabela (3.8), dessa forma podemos observar que, considerando uma soma de 200 termos, obtemos uma precisão de 5 algarismos significativos. Já para o fluxo ϕ_2 , os resultados podem ser vistos na tabela (3.8), e podemos observar que com o mesmo número de termos, há uma precisão de 9 algarismos (8 dígitos significativos).

Tabela 3.8: Fluxo de nêutrons rápidos considerando o número de termos da série.

N	$\phi_1(x, t)$ [nêutrons/ cm^2s]
2	0,166138225513
10	0,142335248367
20	0,141424344556
30	0,141571566602
40	0,141522274363
50	0,141544674193
100	0,141536086119
150	0,141537336348
200	0,141536932493

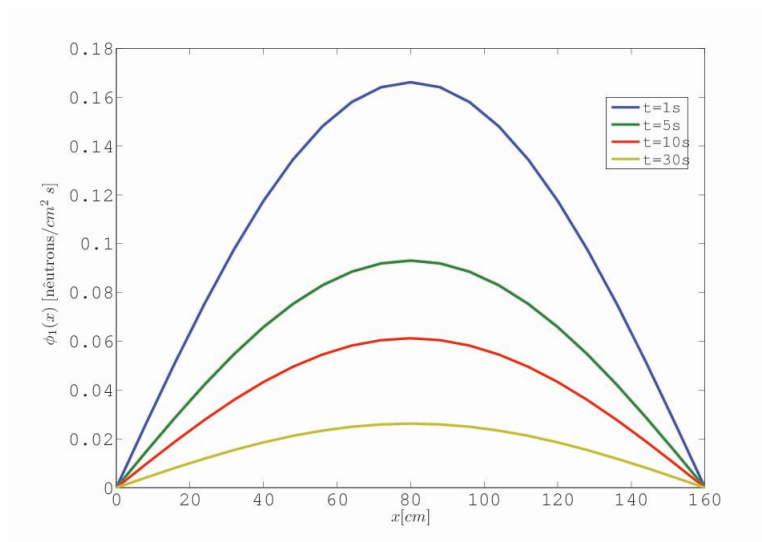
Tabela 3.9: Fluxo de nêutrons têrmicos considerando o número de termos da série.

N	$\phi_2(x, t)$ [nêutrons/ cm^2s]
2	0,018420495810
10	0,015793994395
20	0,015714900167
30	0,015722896927
40	0,015721224628
50	0,015721726995
100	0,015721589293
150	0,015721594668
200	0,015721594245

Tabela 3.10: Concentração de nêutrons considerando o número de termos da série.

N	$C_1(x, t)$ [nêutrons/cm ³]
2	0,002343357307
10	0,001956532053
20	0,001782090348
30	0,001879515123
40	0,001811247893
50	0,001863930903
100	0,001828801033
150	0,001848321957
200	0,001834656727

Nesse momento nos interessa saber como funciona o comportamento do fluxos (rápido e térmico) como função do espaço e do tempo. Nas figuras (3.6) e (3.7), podemos analisar esse comportamento dos fluxos rápido e térmico em função do espaço para quatro valores diferentes de tempo: $t = 1 s$, $t = 5 s$, $t = 10 s$ e $t = 30 s$.

Figura 3.6: Gráfico do fluxo ϕ_1 em função da variável espacial para alguns instantes.

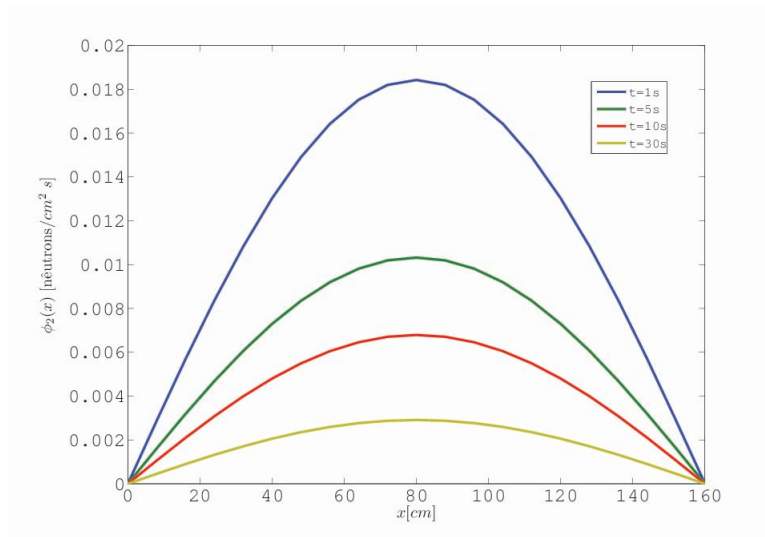


Figura 3.7: Gráfico do fluxo ϕ_2 em função da variável espacial para alguns instantes.

Em ambos os casos, notamos a diminuição do fluxo com o aumento do tempo, além do fato de que o fluxo rápido é maior quando comparado com o fluxo térmico. Para melhorar a visualização, as figuras (3.8), (3.9) e (3.10) mostram em um gráfico o comportamento do fluxo rápido, o comportamento do fluxo térmico e o comportamento da concentração de um dos grupos de precursores, em função de x e t . O gráfico (3.11) mostra o tempo computacional gasto em função N .

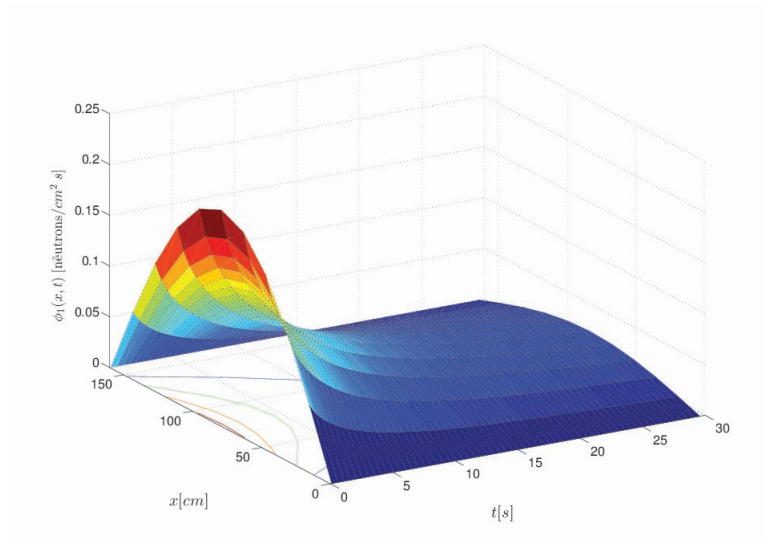


Figura 3.8: Gráfico do fluxo rápido em função de x e t .

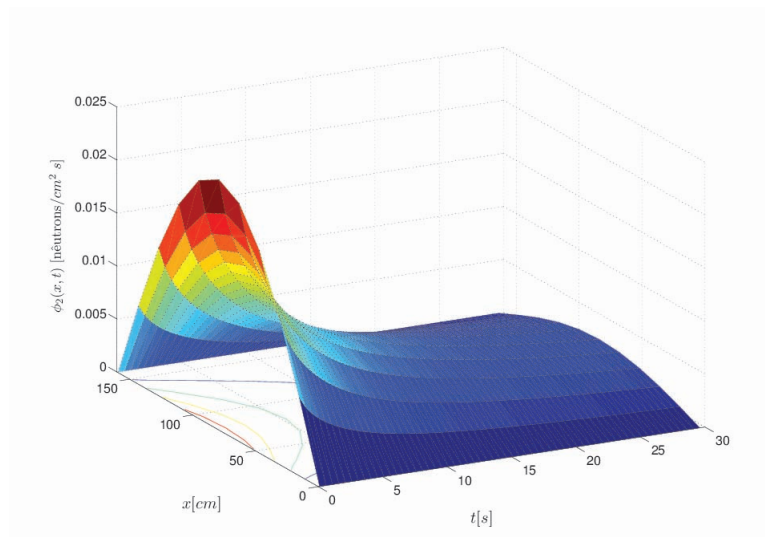


Figura 3.9: Gráfico do fluxo térmico em função de x e t .

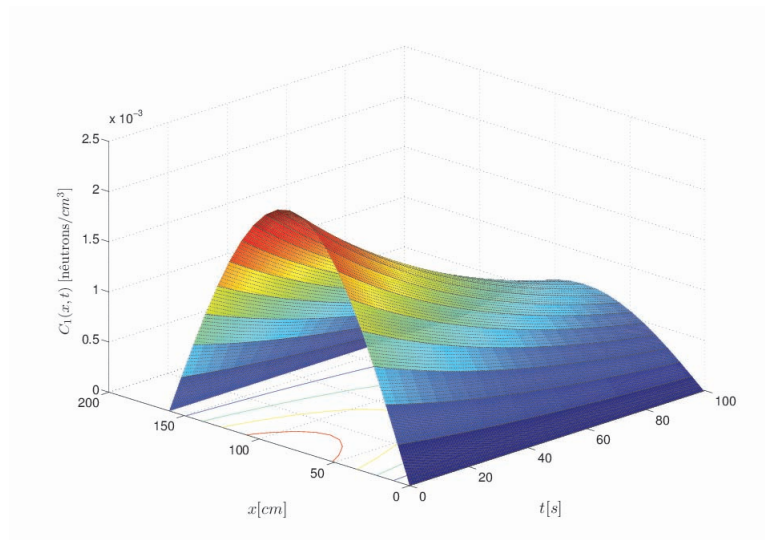


Figura 3.10: Gráfico da concentração de precursores $C_1(x, t)$ em função de x e t .

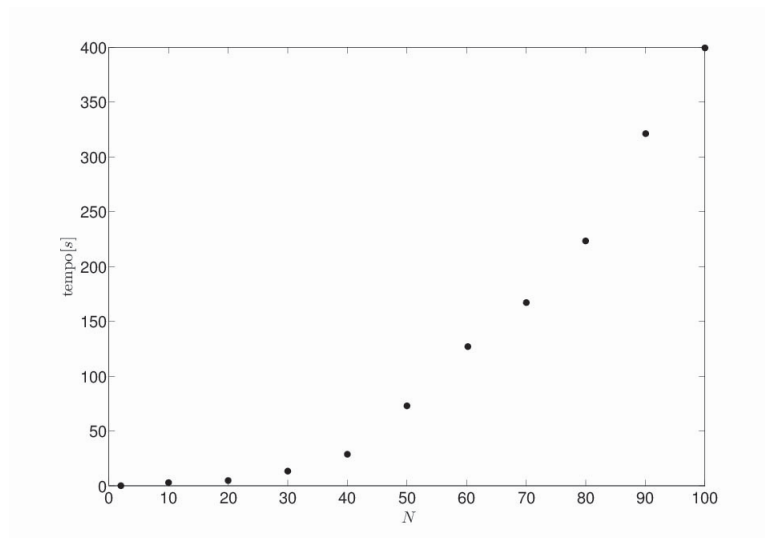


Figura 3.11: Gráfico do tempo computacional em função de N .

4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CINÉTICA ESPACIAL PARA GEOMETRIA CILÍNDRICA

Neste capítulo, a abordagem será sobre a solução da equação do sistema obtido no segundo capítulo, mas considerando um problema unidimensional em geometria cilíndrica. Nossa intenção aqui é considerar um domínio homogêneo e, partir daí, obter uma solução tanto para o caso monoenergético com 1 grupo de precursores quanto para o caso de 2 grupos de energia com 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados.

4.1 Solução para nêutrons monoenergéticos com um grupo de precursor de nêutrons atrasados

Conforme previamente mostrado, a equação de cinética em geometria cilíndrica é descrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) &= D \nabla^2 \phi(r, t) - \Sigma_a \phi(r, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(r, t) + \lambda C(r, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C(r, t) &= -\lambda C(r, t) + \beta \nu \Sigma_f \phi(r, t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde r é a variável espacial em coordenadas cilíndricas e o operador ∇^2 é tal que

$$\nabla^2 \phi(r, t) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, t) \quad (4.2)$$

com isso, o sistema de equações pode ser representado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) &= D \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, t) \right] - \Sigma_a \phi(r, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(r, t) \\ &\quad + \lambda C(r, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C(r, t) &= -\lambda C(r, t) + \beta \nu \Sigma_f \phi(r, t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $t > 0$ e $0 < r < R$, com as seguintes condições de contorno: $\phi(R, t) = 0$ e $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r, t) < \infty$. As condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned}\phi(r, 0) &= \phi_0(r) \\ C(r, 0) &= \frac{\beta\nu\Sigma_f}{\lambda}\phi_0(r)\end{aligned}\quad (4.4)$$

aqui $\phi_0(r)$ denota o fluxo de nêutrons no tempo inicial, enquanto que

$$\lambda^{-1} = \beta^{-1} \sum_{i=1}^6 \beta_i \lambda_i^{-1}.$$

Novamente, como vamos aplicar o método GITT para resolver o problema, adicionamos o termo a seguir na concentração de precursores:

$$\epsilon \nabla^2 C(r, t) = \epsilon \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} C(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} C(r, t) \right] \quad (4.5)$$

onde ϵ é um valor positivo muito pequeno, pelo propósito de fazer com que a solução desse sistema tenda a solução do sistema inicial. A partir disso, nosso novo sistema de equações será dado por

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) &= D \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, t) \right] + [(1 - \beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a \phi(r, t)] \phi(r, t) \\ &\quad + \lambda C(r, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C(r, t) &= \epsilon \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, t) \right] - \lambda C(r, t) + \beta\nu\Sigma_f \phi(r, t)\end{aligned}\quad (4.6)$$

Vamos assumir as mesmas condições de contorno para a concentração de precursores. Da mesma maneira que antes, o problema auxiliar

$$\frac{d^2}{dr^2} \zeta(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \zeta(r) + \gamma^2 \zeta(r) = 0 \quad (4.7)$$

com condições de contorno dadas por

$$\lim_{r \rightarrow 0} \zeta(r) < \infty \quad (4.8)$$

$$\zeta(R) = 0 \quad (4.9)$$

tem como solução as autofunções $\zeta_n(r) = J_0(\gamma_n r)$, que é conhecida como a *função de Bessel de primeira espécie de índice 0*. Para um melhor entendimento, recomendamos a leitura do apêndice A.

Para a aplicação do método GITT, vamos recordar as propriedades da função de Bessel de primeira espécie de ordem 0, para isso consideraremos a seguinte definição:

Definição 4.1.1 (Conjunto ortogonal/Função peso). *Diz-se que um conjunto de funções $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, é **ortogonal em relação a uma função peso** $z(x)$ em um intervalo $[a, b]$ se*

$$\int_a^b z(x)f_m(x)f_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

Com essa definição, temos a seguinte propriedade das autofunções de Bessel:

Proposição 4.1.1. *O conjunto $\{J_0(\gamma_1 r), J_0(\gamma_2 r), \dots, J_0(\gamma_n r), \dots\}$ é um conjunto ortogonal com respeito à função $z(r) = r$ no intervalo $[0, R]$, e*

$$\|J_0(\gamma_n r)\| = \sqrt{\int_0^R r J_0^2(\gamma_n r) dr} = \frac{R}{\sqrt{2}} J_1(\alpha_n), \text{ onde } \gamma_n = \frac{\alpha_n}{R} \text{ e } \alpha_n > 0 \text{ satisfaz } J_0(\alpha_n) = 0.$$

Prova Supõe $u = J_0(\gamma_n r)$ e $w = J_0(\gamma_m r)$, com $n \neq m$ e γ_n, γ_m constantes. Sabemos que u e w satisfazem as equações:

$$ru'' + u' + (\gamma_n)^2 ru = 0 \quad (4.10)$$

$$rw'' + w' + (\gamma_m)^2 rw = 0 \quad (4.11)$$

Multiplicando a equação (4.10) por v , a equação (4.11) por w , e subtraindo as duas equações, temos

$$(u''v - uv'') + (u'v + uv') = (\gamma_m^2 - \gamma_n^2)ruv$$

ou

$$\frac{d}{dr} \{r(u'v - uv')\} = (\gamma_m^2 - \gamma_n^2)ruv$$

integrando ambos os lados, temos

$$(\gamma_m^2 - \gamma_n^2) \int r u v \, dr = r(u'v - uv')$$

logo

$$\int r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) \, dr = \frac{r}{\gamma_m^2 - \gamma_n^2} [\gamma_n J_0'(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) - \gamma_m J_0'(\gamma_m r) J_0(\gamma_n r)] \quad (4.12)$$

colocando os limites de integração em (4.12), concluímos que o conjunto requerido é ortogonal, ou seja:

$$\int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) \, dr = \frac{R}{\gamma_m^2 - \gamma_n^2} [\gamma_n J_0'(\alpha_n) J_0(\alpha_m) - \gamma_m J_0'(\alpha_m) J_0(\alpha_n)] = 0$$

Para $m = n$, primeiramente multiplicamos a equação (4.10) por $2ru'$:

$$\begin{aligned} 2ru' \frac{d}{dr} [ru'] + 2\gamma_n^2 r^2 uu' &= 0 \\ \frac{d}{dr} [r^2(u')^2 + \gamma_n^2 r^2 u^2] - 2\gamma_n^2 r u^2 &= 0 \end{aligned}$$

integrando em ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned} r^2(u')^2 + \gamma_n^2 r^2 u^2 &= 2\gamma_n^2 \int r u^2 \, dr \\ 2\gamma_n^2 \int r J_0^2(\gamma_n r) \, dr &= \gamma_n^2 r^2 J_0^2(\gamma_n) + r^2 \gamma_n^2 (J_0'(\gamma_n r))^2 \\ \int r J_0^2(\gamma_n r) \, dr &= \frac{r^2}{2} [J_0^2(\gamma_n r) + J_1^2(\gamma_n r)] \end{aligned}$$

em particular, aplicando o teorema fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} \|J_0(\gamma_n r)\|^2 &= \int_0^R r J_0^2(\gamma_n r) \, dr = \left[\frac{r^2}{2} [J_0^2(\gamma_n r) + J_1^2(\gamma_n r)] \right]_0^R \\ &= \frac{R^2}{2} [J_0^2(\alpha_n) + J_1^2(\alpha_n)] - 0 \\ &= \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_n) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Diante disso e de acordo com a definição (3.1.3), podemos afirmar que o conjunto

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{R J_1(\alpha_1)} J_0(\gamma_1 r), \frac{\sqrt{2}}{R J_1(\alpha_2)} J_0(\gamma_2 r), \dots, \frac{\sqrt{2}}{R J_1(\alpha_n)} J_0(\gamma_n r), \dots \right\} \quad (4.14)$$

é um conjunto ortonormal de funções em $r \in [0, R]$.

Como foi feito anteriormente, vamos supor como uma possível solução para (4.6) uma série que envolve um produto de autofunções ortonormais no espaço por funções no tempo, ou mais precisamente

$$\phi(r, t) = \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \quad (4.15)$$

$$C(r, t) = \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \quad (4.16)$$

Ao substituir as equações (4.15) e (4.16) no sistema de equações dado em (4.6) e lembrar que determinamos autofunções de modo que satisfaça o problema (4.7), ou seja, $\frac{d^2}{dr^2} \zeta_n(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \zeta_n(r) = -\gamma_n^2 \zeta_n(r)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} &= -vD \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2) \varphi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v [(1 - \beta) \nu \Sigma_f - \Sigma_a] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v \lambda \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

e para a segunda equação

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} &= -\epsilon \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2) \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} - \lambda \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v \lambda \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

De acordo com a resolução, multiplicaremos as equações (4.17) e (4.18) por $\frac{\sqrt{2}}{R} r \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1(\alpha_m)}$, $m \in \mathbb{N}$ fixo, e depois integraremos na variável espacial r em todo

o intervalo. Em outras palavras aplicaremos o operador integral

$$\frac{\sqrt{2}}{R} \int_0^R (\cdot) r \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1(\alpha_m)} dr \quad (4.19)$$

Ao reagrupar os termos, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_n(t) \frac{1}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\ + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v [D(\gamma_n^2) + \Sigma_a - (1 - \beta) \nu \Sigma_f]}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \varphi_n(t) \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\ & + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-v\lambda]}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \xi_n(t) \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr = 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_n(t) \frac{1}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\ & + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-\beta \nu \Sigma_f]}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \varphi_n(t) \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\ & + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\epsilon \gamma_n^2 + \lambda]}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \xi_n(t) \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Como as funções $J_0(\gamma_n r)$ são ortogonais com relação à função $z(r) = r$ no intervalo $[0, R]$, a integral $\int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr$ vale zero para $m \neq n$. Para $m = n$, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias, no qual ao truncarmos a série, na ordem N , representamos o sistema de forma matricial como abaixo

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (4.22)$$

onde $1 \leq n \leq N$, e as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são diagonais de ordem N , que podemos representar por:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \{a_{n,n}\}, \text{ onde } a_{n,n} = v \left[D \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 + \Sigma_a - (1 - \beta)\nu\Sigma_f \right] \\ \mathbf{B} &= \{b_{n,n}\}, \text{ onde } b_{n,n} = [-v\lambda] \\ \mathbf{C} &= \{c_{n,n}\}, \text{ onde } c_{n,n} = [-\beta\nu\Sigma_f] \\ \mathbf{D} &= \{d_{n,n}\}, \text{ onde } d_{n,n} = \left[\epsilon \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 + \lambda \right]\end{aligned}$$

Da mesma forma, a equação (4.22) é uma equação matricial linear homogênea de primeira ordem e pode ser escrita como

$$\mathbf{X}'(t) + \mathbf{F}\mathbf{X}(t) = \vec{0} \quad (4.23)$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}'(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (4.24)$$

Já vimos que esse tipo de sistema tem a solução

$$\mathbf{X} = e^{-\mathbf{F}t}\mathbf{X}(0) \quad (4.25)$$

onde a condição inicial $\mathbf{X}(0)$ é o vetor

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} \varphi_n(0) \\ \xi_n(0) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

aplicando o operador (4.19) para as condições iniciais, temos

$$\begin{aligned}\phi_0(r) = \phi(r, 0) &= \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(0) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \Rightarrow \\ \frac{\sqrt{2}}{R} \int_0^R \phi_0(r) r \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1(\alpha_m)} dr &= \frac{\sqrt{2}}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(0)}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \int_0^R J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \Rightarrow \\ \varphi_n(0) &= \frac{\sqrt{2}}{R J_1(\alpha_n)} \int_0^R \phi_0(r) r J_0(\gamma_n r) dr\end{aligned}$$

com $n = m$. Adotando o mesmo raciocínio e usando a equação (4.6), temos para $\xi_n(0)$:

$$\begin{aligned}0 &= -\epsilon \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma_n)^2 \xi_n(0)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\ &- \lambda \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n(0)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\ &+ \beta \nu \Sigma_f \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(0)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \Rightarrow \\ [\epsilon(\gamma_n)^2 + \lambda] \xi_n(0) &= \beta \nu \Sigma_f \varphi_n(0) \Rightarrow \\ \xi_n(0) &= \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\epsilon(\gamma_n)^2 + \lambda} \varphi_n(0)\end{aligned}\tag{4.27}$$

Para problemas matriciais, nos quais os autovalores da matriz \mathbf{F} são distintos, expressamos a exponencial de matriz dada em (4.25) como:

$$e^{-\mathbf{F}t} = \mathbf{Y} e^{-\mathbf{D}_{\mathbf{g}} t} \mathbf{Y}^{-1}\tag{4.28}$$

onde \mathbf{Y} é a matriz dos autovetores de \mathbf{F} , $\mathbf{D}_{\mathbf{g}}$ é a matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{F} e \mathbf{Y}^{-1} é a inversa de \mathbf{Y} . Portanto, temos a solução $\mathbf{X}(t)$, dada por:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y} e^{-\mathbf{D}_{\mathbf{g}} t} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{X}(0).\tag{4.29}$$

4.2 Resultados numéricos

Implementaremos computacionalmente a metodologia proposta para o caso cilíndrico considerando os parâmetros nucleares dados na tabela abaixo:

Tabela 4.1: Parâmetros nucleares.

D [cm]	0,96343
v [cm/s]	$1,1035 \times 10^7$
Σ_a [cm ⁻¹]	$1,5843 \times 10^{-2}$
$\nu\Sigma_f$ [cm ⁻¹]	$3,3303 \times 10^{-2}$
β	0,0065
λ [s ⁻¹]	0,0764467

Aqui consideraremos a geometria cilíndrica para um meio homogêneo. As condições de contorno do tipo $\phi(R, t) = 0$ e $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r, t) < \infty$; tamanho $R = 10$ cm de raio do cilindro como indicado na figura (4.1) e a condição inicial $\phi_0(x) = 1,2$ nêutrons/cm²s.

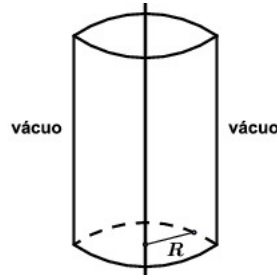


Figura 4.1: Geometria cilíndrica

O primeiro objetivo é usar os cálculos para validar a inexistência do termo de difusão na equação da concentração de precursores de nêutrons atrasados, fazendo ϵ variar de 10^{-4} até 10^{-11} . Assim, notamos que para $\epsilon = 10^{-10}$ e $\epsilon = 10^{-11}$ o fluxo é igual até a décima segunda casa decimal, enquanto a concentração de precursores é igual até a décima primeira casa decimal. No que concerne a aproximação numérica, a solução do problema resolvido com difusão fictícia para $\epsilon = 10^{-10}$ aproxima da solução obtida com $\epsilon = 10^{-11}$ em 10 algarismos significativos para o fluxo de nêutrons e em 9 algarismos significativos para a concentração de

precursores de nêutrons atrasados. Os resultados podem se verificados na tabela (4.2) a seguir.

Tabela 4.2: Fluxo de nêutrons e a concentração de precursores com relação à ϵ .

ϵ	$\phi(5, 1)$ [nêutrons/ $cm^2 s$]	$C(5, 1)$ [nêutrons/ cm^3]
10^{-4}	0,006871215305477	0,003943773042479
10^{-5}	0,006871767732914	0,003944238614898
10^{-6}	0,006871822981793	0,003944285182581
10^{-7}	0,006871828506692	0,003944289839509
10^{-8}	0,006871829059406	0,003944290305275
10^{-9}	0,006871829114314	0,003944290351754
10^{-10}	0,006871829121045	0,003944290356998
10^{-11}	0,006871829121559	0,003944290357430

Na tabela (4.3), mostramos os valores do fluxo de nêutrons para um ponto fixo do domínio em função do número de termos da série (N). Ao fazer N variar de 2 até 200, e considerar $\epsilon = 10^{-10}$, percebemos, por inspeção, que há uma precisão de 8 casas decimais utilizando os primeiros 150 termos da série. Devido a isso, há uma precisão de 6 algarismos significativos para $\epsilon = 10^{-10}$, exceto pelo erro de arredondamento e o erro de aproximação dos zeros da função de Bessel.

Tabela 4.3: Fluxo de nêutrons com relação ao número de termos da série

N	$\phi(5, 1)$ [neutrons/cm ² s]
2	0,0068718291210
10	0,0067718196847
20	0,0067702313203
30	0,0067704683018
40	0,0067703910121
50	0,0067704259665
100	0,0067704118191
150	0,0067704156403
200	0,0067704150139

Já a figura (4.2), mostra o gráfico do fluxo de nêutrons em função da variável espacial. Observamos que o comportamento do gráfico é esperado na medida em que quanto mais perto do centro do cilindro o fluxo é maior.

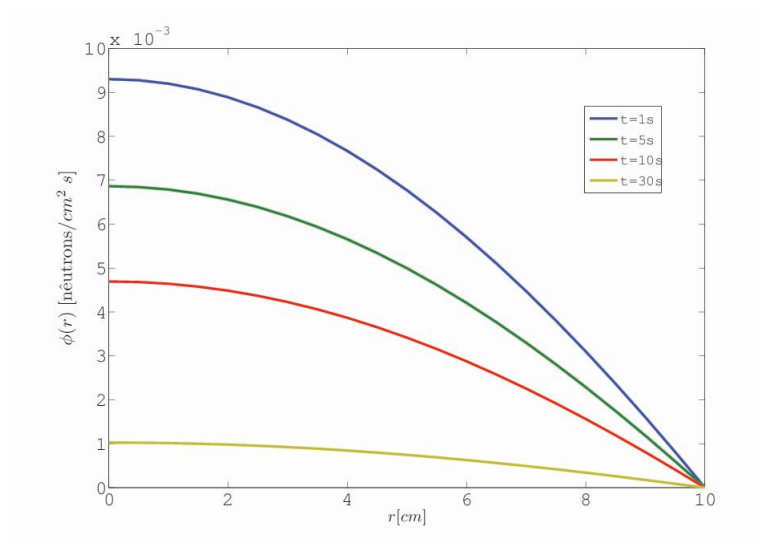


Figura 4.2: Gráfico do fluxo de nêutrons em função da variável espacial para alguns instantes

Para o gráfico do fluxo em função de x e t dado na figura (4.3), observamos novamente que a medida em que o tempo aumenta o fluxo diminui, ou seja o comportamento do fluxo tende à solução estacionária. Para a concentração de precursores, observamos um comportamento semelhante em relação à variável temporal detalhado no gráfico (4.4).

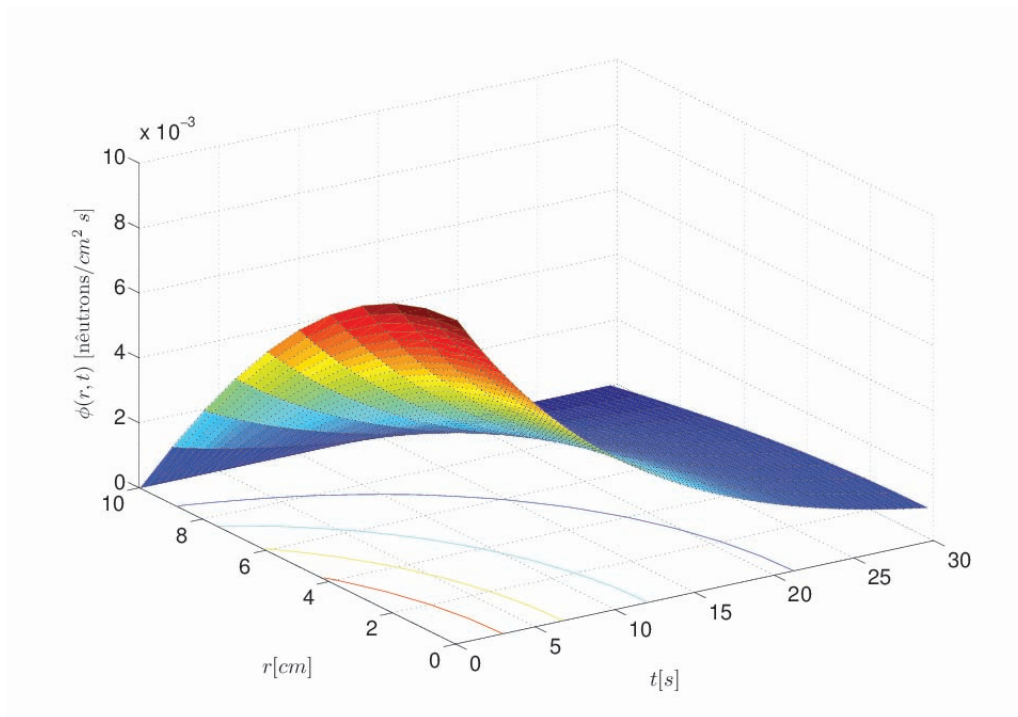


Figura 4.3: Gr\u00e1fico do fluxo de n\u00e9utrons em fun\u00e7\u00e3o de x e t

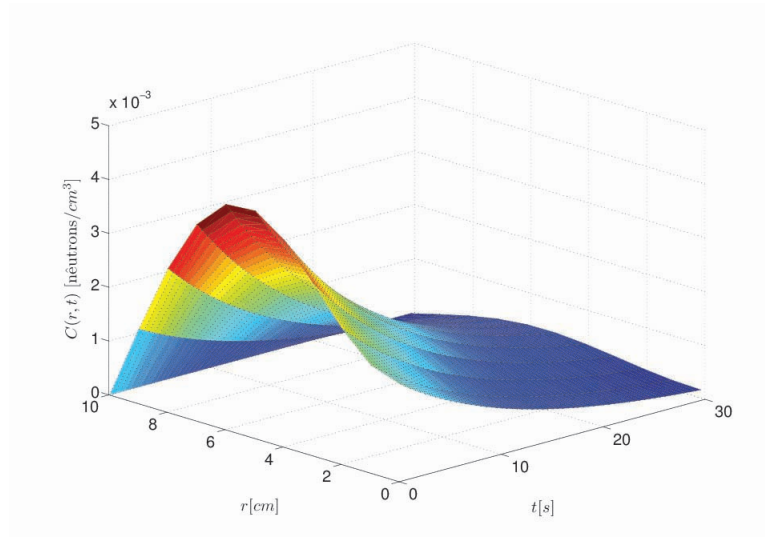


Figura 4.4: Gráfico da concentração de precursores de nêutrons atrasados em função de x e t

No gráfico (4.5), mostramos o tempo computacional gasto pelo código em função do número de termos da série (N).

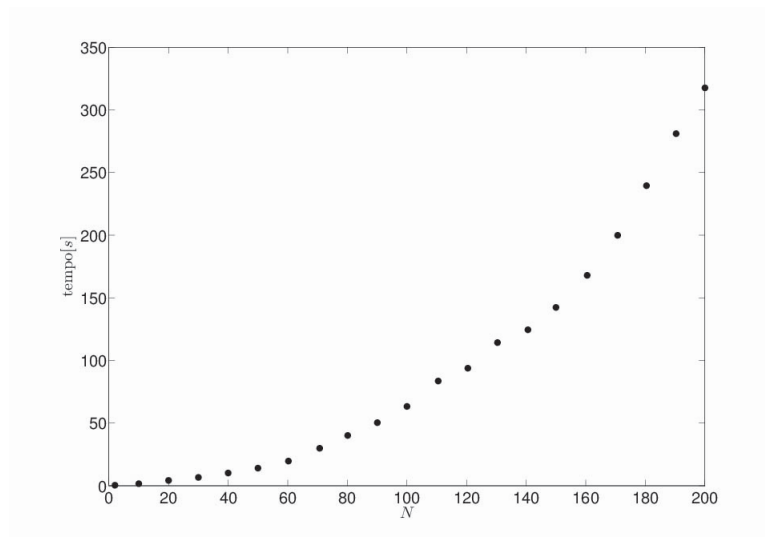


Figura 4.5: Gráfico do tempo computacional em função de N

4.3 Solução para o modelo de dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados

Para efeitos de comparação de resultados obtidos na seção anterior, em respeito ao valor de ϵ , nessa seção abordaremos a metodologia para o caso cilíndrico com 2 grupos de energia e 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados. Como na seção anterior, consideraremos nesse tipo de aplicação o grupo rápido de energia como grupo 1, e o grupo 2 como o térmico. O limite de energia do grupo térmico é escolhido suficientemente alto a fim de que o espalhamento do grupo 2 para o grupo 1 possa ser ignorado. Para efeitos da análise, consideraremos essa variável apenas na abordagem analítica.

De acordo com as equações dadas em (2.8), e reagrupando termos, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(r, t) &= D_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_1(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_1(r, t) \right] \\ &+ [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f1} - (\Sigma_{a1} + \Sigma_{s21})] \phi_1(r, t) \\ &+ [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21}] \phi_2(r, t) + \chi_1^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(r, t) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(r, t) &= D_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_2(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_2(r, t) \right] \\ &+ [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f2} - (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12})] \phi_2(r, t) \\ &+ [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f1} + \Sigma_{s12}] \phi_1(r, t) + \chi_2^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(r, t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(r, t) = \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(r, t) + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(r, t) - \lambda_i C_i(r, t) \quad i = 1 \dots 6 \quad (4.32)$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(r, 0) &= \phi_{1,0}(r) \\ \phi_2(r, 0) &= \phi_{2,0}(r) \\ C_i(r, 0) &= \frac{\beta_i}{\lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_{1,0}(r) + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_{2,0}(r)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ao introduzir um termo de difusão fictícia na equação da concentração de precursores de nêutrons atrasados, semelhante ao que foi feito no caso monoeenergético, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i(r, t) &= \epsilon \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} C_i(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_i(r, t) \right] + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(r, t) + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(r, t) \\ &- \lambda_i C_i(r, t) \quad i = 1 \dots 6 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Vamos resolver o conjunto de equações formado por (4.30), (4.31) e (4.34), supondo que o fluxo para o grupo rápido; o fluxo para o grupo térmico e as concentrações de precursores de nêutrons atrasados são funções que possam ser expandidas nas seguintes séries:

$$\phi_1(r, t) = \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \quad (4.35)$$

$$\phi_2(r, t) = \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \quad (4.36)$$

$$C_i(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \quad i = 1 \dots 6 \quad (4.37)$$

Ao substituir as expansões (4.35), (4.36) e (4.37) nas equações dadas em (4.30), (4.31), (4.34), e como as autofunções satisfazem $\frac{d^2}{dr^2} J_0(\gamma_n r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} J_0(\gamma_n r) = -(\gamma_n)^2 J_0(\gamma_n r)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} &= -v_1 D_1 \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n)^2 \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f1} - (\Sigma_{a1} + \Sigma_{s21})] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21}] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v_1 \chi_1^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{\sqrt{2}}{R} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} = -v_2 D_2 \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n)^2 \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \\
& + v_2 [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f_2} - (\Sigma_{a_2} + \Sigma_{s_{12}})] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \\
& + v_2 [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f_1} + \Sigma_{s_{12}}] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \\
& + v_2 \chi_2^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{\sqrt{2}}{R} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \right) \quad (4.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} = -\epsilon \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n)^2 \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \\
& + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f_1} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f_2} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \\
& - \lambda_i \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n x)}{J_1(\alpha_n)} \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Após aplicar o operador integral (4.19) nessas equações e reagrupando os termos, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) \frac{1}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} v_1 [D_1(\gamma_n)^2 \\
& + (\Sigma_{a_1} + \Sigma_{s_{21}}) - (1 - \beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f_1}] \frac{\varphi_{1,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} [-v_1 ((1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f_2} + \Sigma_{s_{21}})] \frac{\varphi_{2,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^6 [-v_1 \chi_1^d] \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{i,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr = 0 \quad (4.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}(t) \frac{1}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
+ & \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} [-v_2 ((1-\beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f1} + \Sigma_{s12})] \frac{\varphi_{1,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
+ & \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} v_2 [D_2(\gamma_n)^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) \\
- & (1-\beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f2}] \frac{\varphi_{2,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
+ & \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^6 [-v_2 \chi_2^d] \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{i,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr = 0 \quad (4.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{i,n}(t) \frac{1}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
+ & [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}] \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{1,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
+ & [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}] \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
+ & \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} [\epsilon(\gamma_n)^2 + \lambda_i] \frac{\xi_{i,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr = 0; \quad (4.43) \\
& i = 1 \dots 6
\end{aligned}$$

Pela ortogonalidade das autofunções com relação a função peso $z(r) = r$, temos o sistema de equações diferenciais dado como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) + v_1 [D_1(\gamma_n)^2 + (\Sigma_{a1} + \Sigma_{s21}) - (1-\beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f1}] \varphi_{1,n}(t) \\
+ [-v_1 ((1-\beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21})] \varphi_{2,n}(t) \\
+ \sum_{i=1}^6 [-v_1 \chi_1^d \lambda_i] \xi_{i,n}(t) = 0 \quad i = 1 \dots 6 \quad (4.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}(t) + [-v_2 ((1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f1} + \Sigma_{s12})] \varphi_{1,n}(t) \\
& + v_2 [D_2(\gamma_n)^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) - (1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f2}] \varphi_{2,n}(t) \\
& + \sum_{i=1}^6 [-v_2 \chi_2^d \lambda_i] \xi_{i,n}(t) = 0 \quad i = 1 \dots 6
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \xi_{i,n}(t) + [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}] \varphi_{1,n}(t) + [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}] \varphi_{2,n}(t) \\
& + [\epsilon(\gamma_n)^2 + \lambda_i] \xi_{i,n}(t) \quad i = 1 \dots 6
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Como anteriormente, podemos representar esse sistema de forma matricial

$$\mathbf{X}'(t) + \mathbf{M}\mathbf{X}(t) = \vec{0} \tag{4.47}$$

ou

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_6 \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F}_1 & \dots & \mathbf{F}_6 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{J}_1 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_6 & \mathbf{H}_6 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{4.48}$$

para $n = 1 \dots N$, onde N é a ordem de truncamento da série. Tomando \mathbf{O} como a matriz nula e as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}_i , \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{G}_i , \mathbf{H}_i e \mathbf{K}_i como matrizes diagonais definidas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \{a_{n,n}\}, \text{ onde } a_{n,n} = v_1 \left[D_1 \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 + (\Sigma_{a1} + \Sigma_{s21}) - (1 - \beta) \chi_1^p \nu_1 \Sigma_{f1} \right] \\
\mathbf{B} &= \{b_{n,n}\}, \text{ onde } b_{n,n} = [-v_1 ((1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21})] \\
\mathbf{C}_i &= \{c_{n,n}^i\}, \text{ onde } c_{n,n}^i = [-v_1 \chi_1^d \lambda_i], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{D} &= \{d_{n,n}\}, \text{ onde } d_{n,n} = [-v_2 ((1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f1} + \Sigma_{s12})] \\
\mathbf{E} &= \{e_{n,n}\}, \text{ onde } e_{n,n} = v_2 \left[D_2 \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) - (1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f2} \right] \\
\mathbf{F}_i &= \{f_{n,n}^i\}, \text{ onde } f_{n,n}^i = [-v_2 \chi_2^d \lambda_i], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{G}_i &= \{g_{n,n}^i\}, \text{ onde } g_{n,n}^i = [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{H}_i &= \{h_{n,n}^i\}, \text{ onde } h_{n,n}^i = [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{K}_i &= \{k_{n,n}^i\}, \text{ onde } k_{n,n}^i = \left[\epsilon \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 + \lambda_i \right], \text{ para } i = 1 \dots 6
\end{aligned}$$

esse sistema, por sua vez, tem a soluç~ao

$$\mathbf{X}(t) = e^{-\mathbf{M}t} \mathbf{X}(0) \quad (4.49)$$

no qual $\mathbf{X}(0)$ é o vetor

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}(0) \\ \varphi_{2,n}(0) \\ \xi_{1,n}(0) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(0) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

que tem componentes dadas por:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,n}(0) &= \frac{\sqrt{2}}{R J_1(\alpha_n)} \int_0^R \phi_{1,0}(r) r J_0(\gamma_n r) dr \\
\varphi_{2,n}(0) &= \frac{\sqrt{2}}{R J_1(\alpha_n)} \int_0^R \phi_{2,0}(r) r J_0(\gamma_n r) dr \\
\xi_{i,n}(0) &= \frac{\beta_i}{\epsilon (\gamma_n)^2 + \lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \varphi_{1,n}(0) + \nu_2 \Sigma_{f2} \varphi_{2,n}(0)] \quad i = 1 \dots 6 \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Se os autovalores da matriz \mathbf{M} forem distintos, podemos expressar a solução dada em (4.49) decompondo como

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}e^{-\mathbf{D}_{\mathbf{g}}t}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}(0) \quad (4.52)$$

onde \mathbf{Y} é a matriz dos autovetores de \mathbf{M} , \mathbf{Y}^{-1} é a sua inversa, e $\mathbf{D}_{\mathbf{g}}$ é a matriz diagonal de autovalores de \mathbf{M} .

Logo, a solução do sistema formado pelas equações (4.30), (4.31) e (4.34) é determinada pelas relações dadas em (4.35), (4.36) e (4.37), onde a variável temporal é determinada pela fórmula (4.52), para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno .

4.4 Resultados numéricos

Essencialmente todos os nêutrons de fissão são gerados no grupo rápido. Em decorrência vamos considerar os mesmos parâmetros usados para o caso da geometria cartesiana, ou seja $\chi_1^p = 1 = \chi_1^d$ e $\chi_2^p = 0 = \chi_2^d$, logo, o termo que envolve fissão aparece somente no grupo rápido. Consideraremos que $\Sigma_{s21} = 0$ e calcularemos o fluxo de nêutrons para o problema de cinética com os parâmetros apresentados nas tabelas (4.4) e (4.5), com espessura $R = 10 \text{ cm}$ e condição inicial $\phi_{1,0} = 1,2 \text{ nêutrons/cm}^2\text{s}$ e $\phi_{2,0} = 1 \text{ nêutrons/cm}^2\text{s}$, respectivamente para o fluxo rápido e térmico.

Tabela 4.4: Parâmetros nucleares considerando 2 grupos de energia.

Parâmetro	Grupo 1	Grupo 2
D [cm]	1,0	0,5
v [cm/s]	10^7	3×10^5
Σ_{ag} [cm^{-1}]	0,02	0,08
$\Sigma_{g \rightarrow g+1}$ [cm^{-1}]	0,01	0
$\nu_g \Sigma_{fg}$ [cm^{-1}]	0,005	0,099

Tabela 4.5: Parâmetros nucleares referentes aos nêutrons atrasados.

i	β_i	$\lambda_i [s^{-1}]$
1	0,00022	0,0124
2	0,00164	0,0305
3	0,00147	0,111
4	0,00296	0,31
5	0,00086	1,14
6	0,00032	3,01

Ao explorar os resultados para a posição $r = 4 \text{ cm}$ e instante $t = 1 \text{ s}$ mostrados nas tabelas (4.6), (4.7) e (4.8), asseguramos para o fluxo rápido, para o fluxo térmico e também para a concentração de precursores, a inexistência do termo de difusão nas equações das concentrações de precursores de nêutrons atrasados, no limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, o qual era esperado.

Tabela 4.6: Fluxo de nêutrons rápidos considerando o valor de ϵ .

ϵ	$\phi_1(r, t)$ nêutrons/ $[cm^2 s]$
10^{-4}	0,011163170012203
10^{-5}	0,011163223457804
10^{-6}	0,011163228802302
10^{-7}	0,011163229334548
10^{-8}	0,011163229389513
10^{-9}	0,011163229394586
10^{-10}	0,011163229395962

Tabela 4.7: Fluxo de nêutrons térmicos considerando o valor de ϵ .

ϵ	$\phi_2(r, t)$ nêutrons/[$cm^2 s$]
10^{-4}	$9,477233014521725 \times 10^{-4}$
10^{-5}	$9,477280418372300 \times 10^{-4}$
10^{-6}	$9,477285158208452 \times 10^{-4}$
10^{-7}	$9,477285630310662 \times 10^{-4}$
10^{-8}	$9,477285679358897 \times 10^{-4}$
10^{-9}	$9,477285683540774 \times 10^{-4}$
10^{-10}	$9,477285684912142 \times 10^{-4}$

Tabela 4.8: Concentração de precursores de nêutrons considerando o valor de ϵ .

ϵ	$C_1(r, t)$ nêutrons/[cm^3]
10^{-4}	0,002096683102932
10^{-5}	0,002096689406188
10^{-6}	0,002096690036445
10^{-7}	0,002096690099395
10^{-8}	0,002096690105769
10^{-9}	0,002096690106250
10^{-10}	0,002096690106214

Nas tabelas (4.9), (4.10) e (4.11) verificamos, para o mesmo ponto do domínio, a nossa solução com respeito ao número de termos da série, variando N até 150. Através dos resultados para o fluxo ϕ_1 , representados na tabela (4.9), podemos observar que, considerando uma soma de 150 termos, obtemos uma precisão de 5 algarismos significativos. Já para o fluxo ϕ_2 , os resultados podem ser vistos na tabela (4.10), onde verificamos que com o mesmo número de termos, há uma precisão de 9 algarismos (6 dígitos significativos).

Tabela 4.9: Fluxo para o grupo de nêutrons rápidos considerando o número de termos da série.

N	$\phi_1(r, t)$ nêutrons/ $[cm^2s]$
2	0,011163229394586
10	0,010997073187841
20	0,010999784543247
30	0,011000067698489
40	0,011000137245446
50	0,011000161334167
100	0,011000184960270
150	0,011000189392452

Tabela 4.10: Fluxo de nêutrons térmicos considerando o número de termos da série.

N	$\phi_2(r, t)$ nêutrons/ $[cm^2s]$
2	$9,477285683540774 \times 10^{-4}$
10	$9,435202337113514 \times 10^{-4}$
20	$9,435258825748660 \times 10^{-4}$
30	$9,435260796183376 \times 10^{-4}$
40	$9,435261005062316 \times 10^{-4}$
50	$9,435260393796483 \times 10^{-4}$
100	$9,435261018727959 \times 10^{-4}$
150	$9,435262818434221 \times 10^{-4}$

Tabela 4.11: Concentração de precursores do grupo 1 considerando o número de termos da série.

N	$C_1(r, t) [cm^{-2}s^{-1}]$
2	0,002096690106250
10	0,001739603248078
20	0,001789329710858
30	0,001806129232753
40	0,001814563818209
50	0,001819634516652
100	0,001829797402422
150	0,001833191004701

Mostramos o comportamento do fluxos (rápido e térmico) como função do espaço e do tempo nas figuras (4.6) e (4.7), analisando os fluxos rápido e térmico respectivamente em função do espaço para valores diferentes de tempo: $t = 1 s$, $t = 5 s$, $t = 10 s$ e $t = 30 s$. Nota-se, novamente, em comparação com o caso cartesiano que em ambos os casos há uma diminuição do fluxo com o aumento do tempo.

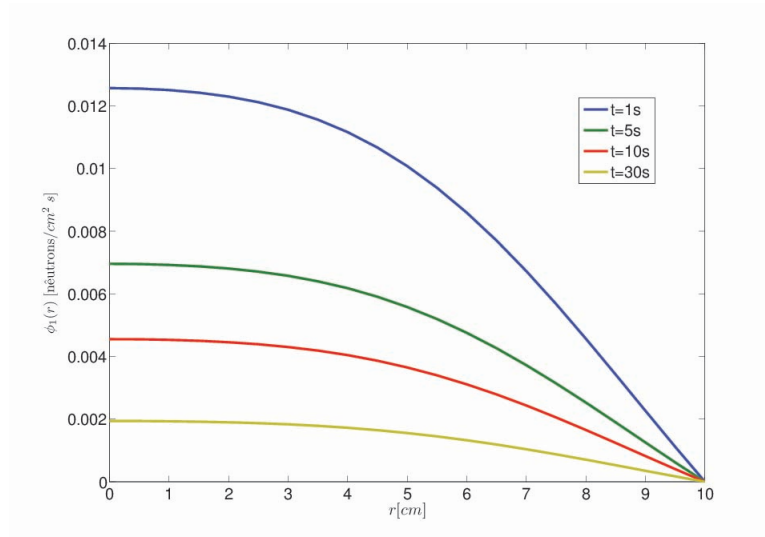


Figura 4.6: Gráfico do fluxo rápido de nêutrons ϕ_1 em função da variável espacial para alguns instantes

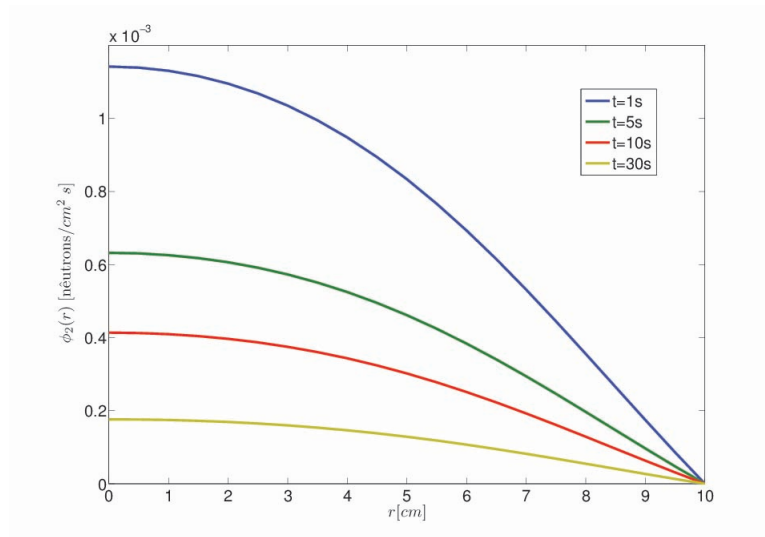


Figura 4.7: Gráfico do fluxo térmico de nêutrons ϕ_2 em função da variável espacial para alguns instantes

Para facilitar a visualização, as figuras (4.8), (4.9) e (4.10) mostram respectivamente os gráficos em função de r e t , do fluxo rápido; do fluxo térmico e

da concentração de um dos grupos de precursores de nêutrons atrasados. Notamos que o comportamento está de acordo com a suposição de que o maior fluxo de nêutrons encontra-se no centro do cilindro e vai diminuindo na fronteira do cilindro.

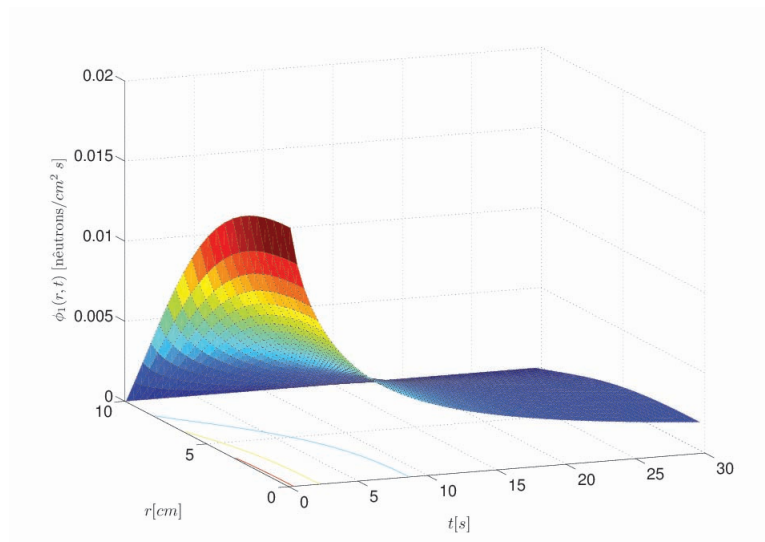


Figura 4.8: Gráfico do fluxo rápido de nêutrons em função de r e t

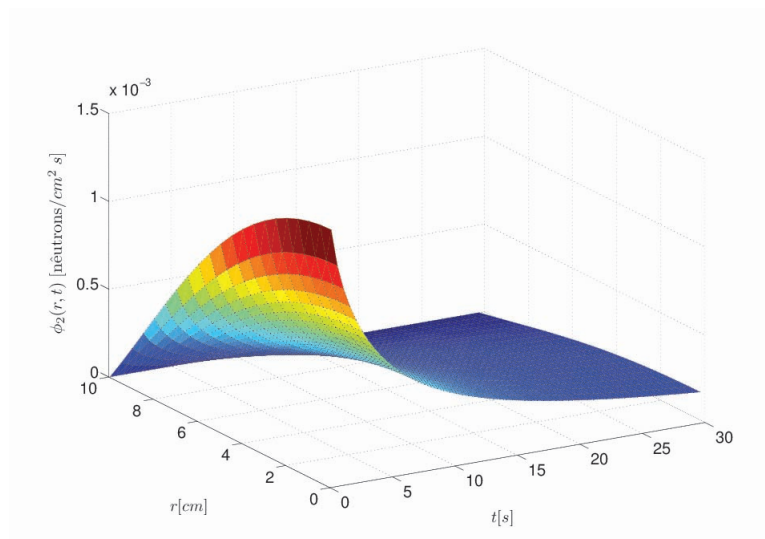


Figura 4.9: Gráfico do fluxo térmico de nêutrons em função de r e t

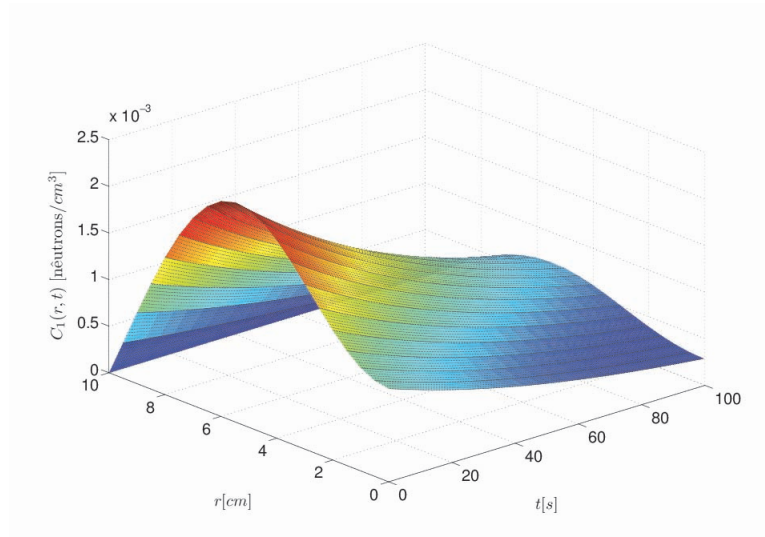


Figura 4.10: Gráfico da concentração de precursores de nêutrons atrasados $C_1(r, t)$ em função de r e t

O gráfico (4.11) mostra o tempo computacional gasto em função N .

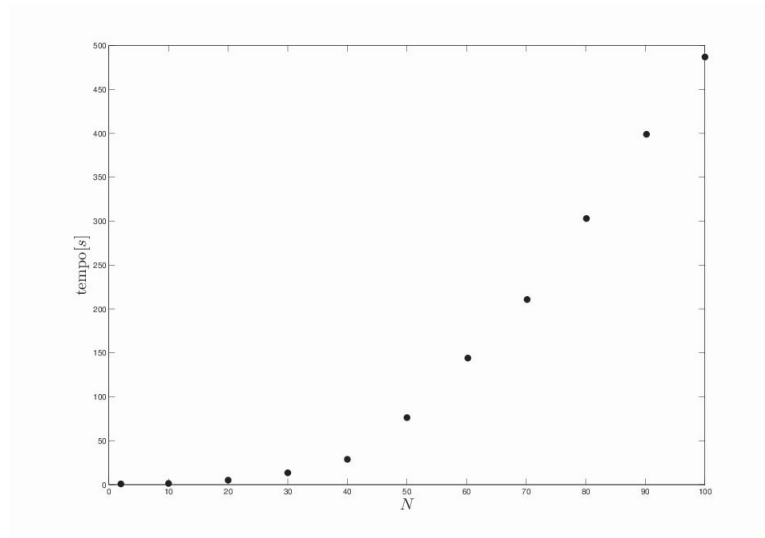


Figura 4.11: Gráfico do tempo computacional em função de N

5 SOLUÇÃO GENÉRICA DA EQUAÇÃO DE CINÉTICA ESPACIAL PARA A GEOMETRIA CARTESIANA, A CILÍNDRICA E A ESFÉRICA

Por todo o exposto no corrente trabalho, para as diferentes geometrias podemos expressar o problema abordado em (2.8), escrevendo assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(x, t) &= \Delta_\omega \cdot D_g \phi_g(x, t) - \Sigma_{Tg} \phi_g(x, t) + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'}(x, t) \\
&+ \sum_{g'=1}^G (1 - \beta) \chi_g^p \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + \sum_{i=1}^P \chi_g^d \lambda_i C_i(x, t) \\
\frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) &= \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} - \lambda_i C_i(x, t)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

onde o operador Δ_ω é definido por

$$\Delta_\omega = x^{-\omega} \partial_x (x^\omega \partial_x) \tag{5.2}$$

com

$$\Delta_\omega = \begin{cases} \partial_{xx}^2, & \text{se } \omega = 0 \\ x^{-1} \partial_x (x \partial_x), & \text{se } \omega = 1 \\ x^{-2} \partial_x (x^2 \partial_x), & \text{se } \omega = 2 \end{cases}$$

onde $\omega = 0, 1, 2$ indica o tipo de geometria do problema: cartesiano, cilíndrico ou esférico, respectivamente. Pelo método espectral, supomos que a solução pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
\phi_g(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{g,n}(t) \frac{\zeta_{\omega,n}}{\|\zeta_{\omega,n}(x)\|} \\
C_i(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \frac{\zeta_{\omega,n}}{\|\zeta_{\omega,n}(x)\|}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

onde:

$$\|\zeta_{\omega,n}(x)\| = \begin{cases} \sqrt{\frac{L}{2}}, & \text{se } \omega = 0 \\ \frac{R}{\sqrt{2}} J_1(\alpha_n), & \text{se } \omega = 1 \\ \sqrt{\frac{R}{2}}, & \text{se } \omega = 2 \end{cases}$$

As funções $\varphi_{g,n}(t)$ e $\xi_{i,n}(t)$ são autofunções no tempo, e $\zeta_{\omega,n}$ são autofunções no espaço que dependem do parâmetro ω , de acordo com a geometria do problema. Estas autofunções podem ser representadas como

$$\zeta_{\omega,n}(x) = \begin{cases} \text{sen}(\gamma_{0,n}x), & \text{se } \omega = 0 \\ J_0(\gamma_{1,n}x), & \text{se } \omega = 1 \\ \frac{1}{x} \text{sen}(\gamma_{2,n}x), & \text{se } \omega = 2 \end{cases}$$

no qual para cada autofunção é válido que $\Delta_\omega \zeta_{\omega,n} = -(\gamma_{\omega,n})^2 \zeta_{\omega,n}$, onde $\gamma_{\omega,n}$ são os autovalores associados as autofunções $\zeta_{\omega,n}$ dados por:

$$\gamma_{\omega,n} = \begin{cases} \frac{n\pi}{L}, & \text{se } \omega = 0 \\ \frac{\alpha_n}{R}, & \text{se } \omega = 1 \\ \frac{n\pi}{R}, & \text{se } \omega = 2 \end{cases}$$

A fim de resolver o sistema (5.1) pelo método espectral, introduz-se o termo de difusão na equação para a concentração de precursores representado pelo operador Δ_ω definido em (5.2):

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = \epsilon \Delta_\omega C_i(x, t) + \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} - \lambda_i C_i(x, t) \quad (5.4)$$

As condições iniciais para este problema são

$$\phi_g(x, 0) = \phi_{g,0}(x) \quad (5.5)$$

$$C_i(x, 0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \sum_{g=1}^G \nu_{\Sigma fg} \phi_{g,0}(x) \quad (5.6)$$

no qual as condições iniciais $\phi_{g,0}(x)$ são tomadas como uniformes em ambos os casos em nosso trabalho.

Com respeito à ortogonalidade, observamos que de acordo com a definição dada em (4.1.1), podemos padronizar para as diferentes geometrias:

$$\int_{\Omega_\omega} z_\omega(x) \zeta_{\omega,n}(\gamma_{\omega,n}x) \zeta_{\omega,m}(\gamma_{\omega,m}x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \|\zeta_{\omega,n}\|^2, & \text{se } n = m \end{cases}$$

onde Ω_ω é um compacto definido para cada geometria e a função $z_\omega(x) = x^\omega$ é a função peso com $\omega \in \{0, 1, 2\}$.

Posto isso, temos para cada uma das geometrias um sistema de equações diferenciais ordinárias, sendo que este podendo ser expresso matricialmente:

$$\mathbf{X}' = -\mathbf{M}\mathbf{X}$$

Com relação ao comportamento assintótico da função J_0 estar relacionado com a função seno [21], mais precisamente

$$J_0(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \left[\text{sen}\left(r + \frac{\pi}{4}\right) + p(r) \right] \quad (5.7)$$

com $p(r) \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$, conjecturamos para trabalhos futuros, a obtenção da solução do problema em coordenadas cilíndricas a partir da solução em coordenadas cartesianas, considerando o valor da variável espacial suficientemente grande.

6 CONCLUSÃO E PROBLEMAS EM ABERTO

No trabalho que ora se encerra, resolvemos analiticamente a equação de cinética unidimensional de difusão de nêutrons para modelo de multigrupo especializado para o caso de dois grupos de energia, tanto para a geometria cartesiana como para a cilíndrica, pelo método espectral, escolhendo adequadamente a base de funções para a geometria considerada. Cumpre ressaltar que, devido ao caráter matricial da solução proposta, observamos que sua generalização para problemas de cinética, cujos os quais requerem um maior número de grupos de energia, é imediata. Adicionamos como termo de difusão o produto do Laplaciano por um valor $\epsilon > 0$, valor esse muito pequeno para aplicar o método GITT e assim acabamos por mostrar a inexistência da difusão para a equação que modela a concentração de precursores de nêutrons atrasados. Devemos ainda lembrar que esta metodologia pode ser facilmente aplicada a este tipo de problema em sistema de coordenadas curvilíneas genéricas, bastando para tal considerar o conjunto de autofunções apropriadas. A justificativa para a afirmação de generalidade do método proposto, decorre do fato de que a equação matricial linear de primeira ordem, resultante da aplicação do método espectral, é única tanto para a geometria cartesiana como para a cilíndrica. De fato, a diferença fundamental decorre na obtenção dos componentes da matriz associada à equação transformada, que são calculadas usando as autofunções adequadas para a geometria. Importante destacar a validade desta solução para geometria esférica, bastando apenas utilizar o conjunto de autofunções adequadas, ou seja, $\left\{ \frac{\text{sen}(\gamma_n r)}{r} \right\}_{n=1}^N$, onde $\gamma_n = \frac{n\pi}{R}$. Entretanto, este problema não foi abordado neste trabalho devido à inexistência de reatores nucleares com essa geometria. Tendo em vista os bons resultados encontrados, a facilidade da implementação computacional desta solução, bem como o caráter analítico da mesma, no sentido que nenhuma aproximação é feita na derivação da solução, reforça a confiança da relevância da metodologia proposta na solução de problemas em cinética de reatores.

Portanto, sugerimos como trabalho futuro a extensão desta solução para este tipo de problema de cinética em domínio heterogêneo, bem como, para problemas de cinética de difusão multidimensional em geometria cilíndrica.

Referências Bibliográficas

- [1] ABOANBER, A.E. and HAMADA, Y.M. PWS: an efficient code system for solving space-independent nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*, 29(18):2159 – 2172, 2002.
- [2] ZHANG-SHENG, C., XUE-WEN, G., and LEI, Y. An Uniform Formula of Neutron Multiplication Calculation from Sub-Criticality to Prompt-Criticality with Step Change of Reactivity. *Nuclear Power Engineering*, 27:014 – 016, 2006.
- [3] YASINSKY, J.B. and HENRY, A.F. Some numerical experiments concerning space-time reactor kinetics behavior. *Nuclear Science Engineering*, 22:171 – 181, 1965.
- [4] KEEPIN, G.R. *Physics of nuclear kinetics*. Addison-Wesley series in nuclear science and engineering. Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
- [5] OTT, K.O. and MADELL, J.T. Quasistatic treatment of spatial phenomenon in reactor dynamics. *Nuclear Science and Engineering*, 26, 1966.
- [6] DULLA, S., MUND, E.H., and RAVETTO, P. The quasi-static method revisited. *Progress in Nuclear Energy*, 50(8):908 – 920, 2008.
- [7] STACEY, W.M. *Modal approximations: theory and an application to reactor physics*. Research monograph. M.I.T. Press, 1967.
- [8] LIMA, Z.R., SILVA, F.C., and ALVIM, A.C.M. A modal multidimensional kinetics method using pseudo-harmonics. *Annals of Nuclear Energy*, 36(6):752 – 759, 2009.

- [9] GROSSMAN, L.M. and HENNART, J.P. Nodal diffusion methods for space-time neutron kinetics. *Progress in Nuclear Energy*, 49(3):181 – 216, 2007.
- [10] KAPLAN, S., HENRY, A.F., MARGOLIS, S.G., and TAYLOR, J.J. Space-time reactor dynamics. *Proceedings of the Geneva Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy*, 4:41 – 50, 1964.
- [11] SUTTON, T.M. and AVILES, B.N. Diffusion theory methods for spatial kinetics calculations. *Progress in Nuclear Energy*, 30(2):119 – 182, 1996.
- [12] DULLA, S., RAVETTO, P., PICCA, P., and TOMATIS, D. Analytical benchmarks for the kinetics of accelerator-driven systems. *Joint International Topical Meeting on Mathematics & Computation and Supercomputing in Nuclear Applications*, 2007.
- [13] CASE, K.M. *Introduction to the theory of neutron diffusion*. Number v. 1 in *Introduction to the Theory of Neutron Diffusion*. Los Alamos Scientific Laboratory, 1954.
- [14] OLIVEIRA, F.L. Solução Analítica da Cinética Espacial do Modelo de Difusão para Sistemas Homogêneos Subcríticos acionados por Fonte Externa. Master's thesis, Instituto de Pesquisas Energéticas Nucleares, IPEN, 2008.
- [15] PETERSEN, C.Z. Aplicação da transformada de Laplace para determinação de condições de contorno tipo albedo para cálculos neutrônicos. Master's thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2008.
- [16] GONÇALVES, G.A., LEITE, S.Q.B., and VILHENA, M.T. Solution of the neutron transport problem with anisotropic scattering in cylindrical geometry by the decomposition method. *Annals of Nuclear Energy*, 36(1):98 – 102, 2009.

- [17] VILHENA, M.T., VELHO, H.F.C., SEGATTO, C.F., and GONÇALVES, G.A. *Analytical Solution of the One-dimensional Discrete Ordinates Equation by the Laplace and Hankel Integral Transform. Integral Methods in Science and Engineering*, chapter Chapter 41, pages 267–272. Birkhauser, 2004.
- [18] COTTA, R.M. and MIKHAYLOV, M.D. *Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation*. Wiley, 1997.
- [19] COTTA, R.M.H. *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. Taylor & Francis Group, 1993.
- [20] COTTA, R.M.H. *The Integral Transform Method in Thermal & Fluids Sciences & Engineering*. Begell House, 1998.
- [21] BOWMAN, F. *Introduction to Bessel Functions*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publ., 1958.

Apêndice A

A equação (4.7) pode ser escrita como

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} \zeta(r) + r \frac{d}{dr} \zeta(r) + \gamma^2 r^2 \zeta(r) = 0 \quad (\text{A.1})$$

a qual tem um ponto singular regular em $r_0 = 0$. Então, aplicando o método de Frobenius, procuramos uma solução da forma a seguir

$$\zeta(r) = r^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+s}, \text{ com } a_0 \neq 0 \quad (\text{A.2})$$

usando a substituição na equação (A.1), temos o seguinte

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) r^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) r^{n+s} + \gamma^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+s+2} &= 0 \Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+s)(n+s-1) + (n+s)] r^{n+s} + \gamma^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+s+2} &= 0 \Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)^2 r^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma^2 r^{n+s+2} &= 0 \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

já no primeiro somatório de (A.3) faz-se a troca de variável $k = n$, paralelamente, no segundo somatório, faz-se a troca $k = n + 2$, e então podemos observar o desenvolvimento abaixo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+s)^2 r^{k+s} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} \gamma^2 r^{k+s} &= 0 \\ \Rightarrow s^2 a_0 r^s + (s+1)^2 a_1 r^{s+1} + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+s)^2 a_k + \gamma^2 a_{k-2}) r^{k+s} &= 0 \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Como $a_0 \neq 0$, segue que:

$$s^2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$(s+1)^2 a_1 = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$(k+s)^2 a_k + \gamma^2 a_{k-2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

A equação (A.5) é a equação indicial e apresenta uma raiz dupla $s = 0$. Quanto a isso, pela equação (A.6) temos

$$a_1 = 0 \quad (\text{A.8})$$

e a fórmula de recorrência (A.7) se torna

$$\begin{aligned} k^2 a_k + \gamma^2 a_{k-2} &= 0, \quad k = 2, 3, 4, \dots \\ a_k &= -\frac{\gamma^2}{k^2} a_{k-2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Usando (A.8) e (A.9), e para $k = 2n + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 0 \\ a_2 &= -\frac{\gamma^2}{2^2} a_0 \\ a_4 &= \frac{\gamma^4}{2 \cdot 2 \cdot 2^4} a_0 \\ a_6 &= -\frac{\gamma^6}{(3 \cdot 2)(3 \cdot 2) \cdot 2^6} a_0 \\ a_8 &= \frac{\gamma^8}{(4 \cdot 3 \cdot 2)(4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 2^8} a_0 \\ &\vdots \\ a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2n} a_0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Portanto, concluímos que a seguinte função

$$\zeta(r) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{\gamma r}{2}\right)^{2n} \quad (\text{A.11})$$

satisfaz a o problema auxiliar dado em (4.7), no entanto, sabemos que a definição da *função de Bessel de primeira espécie de índice p* denotada por $J_p(r)$ [21] é definida como:

$$J_p(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + p + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+p} \quad (\text{A.12})$$

logo se $p = 0$, entendemos que J_0 é representado por:

$$J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \quad (\text{A.13})$$

ou, usando a identidade da função Γ , exposta abaixo

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (\text{A.14})$$

temos para $n \in \mathbb{N}$:

$$J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \quad (\text{A.15})$$

Das equações (A.11) e (A.15), podemos concluir que:

$$\zeta(r) = a_0 J_0(\gamma r) \quad (\text{A.16})$$

Sabemos que $\zeta_1(r) = J_0(\gamma r)$ é uma solução para (4.7). Agora, determinaremos uma solução para o mesmo problema que é linearmente independente da solução obtida em (A.16). Para isso, vamos supor a segunda solução ζ_2 como

$$\zeta_2(r) = u(r)\zeta_1(r) \quad (\text{A.17})$$

Como estamos supondo que satisfaz o problema (4.7), substituímos $\zeta_2' = u'\zeta_1 + u\zeta_1'$ e $\zeta_2'' = u''\zeta_1 + 2v'\zeta_1' + v\zeta_1''$, obtendo

$$r^2(u''\zeta_1 + 2u'\zeta_1') + rv'\zeta_1 + u(r^2\zeta_1'' + r\zeta_1' + \gamma^2 r^2\zeta_1) = 0 \quad (\text{A.18})$$

o que implica

$$(r^2\zeta_1)u'' = -(2r^2\zeta_1' + r\zeta_1)u' \quad (\text{A.19})$$

ao fazermos a troca de variável $w(r) = u'(r)$, dispomos do cálculo subsequente.

$$\frac{dw}{w} = -\left(2\frac{\zeta_1'}{\zeta_1} + \frac{1}{r}\right) dr \quad (\text{A.20})$$

Ao aplicarmos a integração em ambos os lados da igualdade, temos

$$\begin{aligned}\ln |w| &= -2 \ln |\zeta_1| - \ln r + \ln C \Rightarrow \\ w &= C \frac{1}{r (\zeta_1(r))^2}\end{aligned}\tag{A.21}$$

Diante disso, concluímos que a função u pode ser expressa como:

$$u = C \int \frac{1}{r (\zeta_1(r))^2} dr + D\tag{A.22}$$

Tomando $C = 1$ e $D = 0$, apresenta-se o seguinte:

$$\zeta_2(r) = \zeta_1(r) \int \frac{1}{r (\zeta_1(r))^2} dr\tag{A.23}$$

Como:

$$\begin{aligned}(\zeta_1(r))^2 &= (J_0(\gamma r))^2 \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{\gamma r}{2}\right)^{2n} \right]^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}(\gamma r)^2 + \frac{1}{64}(\gamma r)^4 + \dots \right) \left(1 - \frac{1}{4}(\gamma r)^2 + \frac{1}{64}(\gamma r)^4 + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\gamma r)^2 + \frac{3}{32}(\gamma r)^4 \dots\end{aligned}\tag{A.24}$$

podemos encontrar uma expansão para $\frac{1}{(\zeta_1(r))^2}$. Como $(\zeta_1(r))^2$ só envolve potências de (γr) com expoente par, o mesmo acontece com o seu inverso:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\zeta_1(r))^2} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(\gamma r)^2 + \frac{1}{64}(\gamma r)^4 + \dots} = b_0 + b_2(\gamma r)^2 + b_4(\gamma r)^4 + \dots \Rightarrow \\ 1 &= \left(1 - \frac{1}{4}(\gamma r)^2 + \frac{1}{64}(\gamma r)^4 + \dots \right) (b_0 + b_2(\gamma r)^2 + b_4(\gamma r)^4 + \dots) \Rightarrow \\ 1 &= b_0 \\ 0 &= b_2 - \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} \\ 0 &= b_4 - \frac{1}{4} + \frac{3}{32} \Rightarrow b_4 = \frac{5}{32}\end{aligned}$$

assim, temos a seguinte expansão:

$$\frac{1}{(\zeta_1(r))^2} = 1 + \frac{1}{2}(\gamma r)^2 + \frac{5}{32}(\gamma r)^4 + \dots\tag{A.25}$$

onde podemos escrever (A.23) como

$$\begin{aligned}\zeta_2(r) &= \zeta_1(r) \int \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2}(\gamma r)^2 \frac{5}{32}(\gamma r)^4 + \dots \right) dr \\ &= \zeta_1(r) \ln(\gamma r) + \zeta_1(r) \left[\frac{1}{4}(\gamma r)^2 + \frac{5}{128}(\gamma r)^4 + \dots \right]\end{aligned}\quad (\text{A.26})$$

note que:

$$\begin{aligned}J_0(\gamma r) \left[\frac{1}{4}(\gamma r)^2 + \frac{5}{128}(\gamma r)^4 + \dots \right] &= \\ \left(1 - \frac{1}{4}(\gamma r)^2 + \frac{1}{64}(\gamma r)^4 + \dots \right) \left(\frac{1}{4}(\gamma r)^2 + \frac{5}{128}(\gamma r)^4 + \dots \right) &= \\ = \frac{1}{4}(\gamma r)^2 - \frac{3}{128}(\gamma r)^4 + \dots &\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

Finalmente, determinamos uma expressão para a função linearmente independente com relação a $J_0(\gamma r)$ para o problema (A.1)

$$\zeta_2(r) = J_0(\gamma r) \ln(\gamma r) + \frac{1}{4}(\gamma r)^2 - \frac{3}{128}(\gamma r)^4 + \dots \quad (\text{A.28})$$

e novamente, de acordo com a definição da *função de Bessel de Neumann de segunda espécie de índice 0*, temos

$$\zeta_2(r) = Y_0(\gamma r) \quad (\text{A.29})$$

Em vista disso, encontramos a segunda solução para o problema auxiliar dado em (4.7), o que nos faz concluir que a solução geral para esse mesmo problema é dado por:

$$\zeta(r) = a_0 J_0(\gamma r) + a_1 Y_0(\gamma r) \quad (\text{A.30})$$

Desse modo, aplicando as condição de contorno (4.8) e sabendo que $J_0(0) = 1$, temos que:

$$a_1 = 0$$

pois

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} Y_0(\gamma r) = -\infty \quad (\text{A.31})$$

por outro lado, pela condição (4.9), obtemos:

$$\zeta(R) = a_0 J_0(\gamma R) = 0 \Rightarrow J_0(\gamma R) = 0 \Rightarrow \gamma_n = \frac{\alpha_n}{R} \quad (\text{A.32})$$

onde α_n é a n -ésima raiz positiva de J_0 . Assim, para cada autovalor $\gamma_n = \frac{\alpha_n}{R}$, temos associada as autofunções $\zeta_n(r) = J_0(\gamma_n r)$.