UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Jean Rodrigo Teixeira de Teixeira

SOBRE AS REGRAS DE SINAIS DOS NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS

Porto Alegre
2013

Jean Rodrigo Teixeira de Teixeira

SOBRE AS REGRAS DE SINAIS DOS NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luisa Rodriguez Doering

Porto Alegre
2013

Jean Rodrigo Teixeira de Teixeira

SOBRE AS REGRAS DE SINAIS DOS NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luisa Rodriguez Doering

Banca Examinadora

____

Prof.ª Dr.ª Luisa Rodriguez Doering – Orientadora
Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof.ª Dr.ª Bárbara Seelig Pogorelski
Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Instituto de Matemática – UFRGS

AGRADECIMENTOS

A Deus, e a seu Filho Unigênito Jesus Cristo, que me deu a vida eterna, que é a razão de minha existência, e a quem eu devo toda honra, glória e louvor para sempre.

A meus pais Sérgio e Celestina, aos quais eu amo muito, que me criaram com muito amor e carinho, e me sustentaram até aqui, para que eu tivesse condições de fazer essa faculdade, e que sempre me aconselharam e me apoiaram em todas as minhas decisões.

A minha namorada e futura esposa Andressa, a qual eu conheci em meio à faculdade e que também amo muito, de uma forma especial, e que sempre esteve ao meu lado desde o momento em que estamos juntos.

Aos meus amigos, que estiveram junto comigo durante essa caminhada, sempre me trazendo alegrias, e que também fazem parte desse momento.

A professora doutora Luisa Rodriguez Doering, minha orientadora neste trabalho, e não apenas deste, mas minha orientadora durante todo período em que eu estive com bolsa de iniciação científica na UFRGS, pelo incentivo e pelas explicações durante todo meu período acadêmico.

A professora doutora Bárbara Seelig Pogorelski e ao professor doutor Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, por participarem da banca examinadora e contribuírem para minha formação.

A professora Miriam Lewgoy, por ter me cedido uma turma para aplicação da parte prática deste trabalho, ter me auxiliado durante as aulas, e ter gentilmente escrito um parecer descritivo sobre as aulas que contribuiu para este trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivos aprofundar o estudo das regras de sinais dos números inteiros, tendo em vista o ensino deste conteúdo; levantar e analisar possíveis dificuldades dos alunos; e melhorar nossa prática em sala de aula. Estudamos a história e a construção formal dos números inteiros, bem como alguns aspectos epistemológicos e de ensino. Realizamos também uma prática de ensino-aprendizagem com alunos de um 7º ano de uma escola pública de Porto Alegre, baseada na ideia de os números inteiros serem uma extensão dos números naturais, e que, portanto, as propriedades básicas de comutatividade, associatividade, elemento neutro e distributividade dos números naturais, são preservadas nos números inteiros. Percebemos que algumas das dificuldades dos alunos são as mesmas dificuldades que os matemáticos do passado tiveram, enquanto esses números ainda não haviam sido legitimados, e que a prática de ensino adotada é bastante interessante, podendo também ser aplicada nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Regra de sinais. Números negativos.

ABSTRACT

This work has the objectives of deepening the study of the rules signals integer numbers, in view of the teaching of this content; of search and analyze students possible difficulties; and of improving our practice in the classroom. We studied the history and the formal construction of the integer numbers, as well as some epistemological and teaching aspects. Was also made a practice of teaching-learning with 7th grade students of a public school in Porto Alegre, based on the idea of the integer numbers being an extension of natural numbers, and that, therefore, the basic properties of commutativity, associativity, neutral element and distributivity of natural numbers should be preserved in integer numbers. We realized that some of the students difficulties are the same that mathematicians of the past had, while those numbers had not yet been legitimized, and that the adopted practice of teaching is quite interesting, having application in the final years of elementary school and in high school.

Keywords: Teaching math. Rule signals. Negative numbers.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No tempo em que eu fui aluno, nos ensinos fundamental e médio, posso dizer que praticamente nunca tive dificuldade em aprender qualquer conteúdo de matemática, em particular, não tive dificuldades com os números negativos, e nunca tive questionamentos profundos sobre esse assunto.

Certa vez, quando eu estava cursando pré-vestibular para entrar na UFRGS, um aluno fez a seguinte pergunta ao professor: "porque um número negativo multiplicado por outro negativo resultava um número positivo?" O professor respondeu que essa era uma questão meio filosófica, e não se estendeu muito no assunto. Naquela época eu não havia percebido o impacto da pergunta feita pelo aluno, e esse fato, embora tenha ficado na minha memória, passou batido naquele momento, como se fosse uma questão "óbvia".

Em outra ocasião, já na universidade conversei sobre essa questão com um amigo meu que também sempre teve facilidade em aprender matemática, e para ele parecia uma questão óbvia, mas trocando ideias, vimos que não era tão simples. Naquela época ainda não tínhamos uma noção clara do que era uma demonstração matemática, de estabelecer axiomas e provar teoremas a partir deles, através de dedução lógica. A partir de então, essa questão começou, gradativamente, a aparecer com mais força na minha mente.

Depois de ter cursado alguns semestres, já era natural para mim que o produto $(-1)\cdot 1=(-1)$ fosse verdadeiro, pois eu tinha o -1, somado uma vez. Percebi que se o produto $(-1)\cdot(-1)=1$ não fosse verdadeiro, então a igualdade $3\cdot 2=(4-1)\cdot(3-1)=$ $=12-4-3+1=6$, proveniente da distributividade, não poderia ser verdadeira. Cabe ressaltar que, naquele período, eu não tomei essa ideia como sendo a justificativa do produto de números negativos, pois ainda não tinha clara a construção do conceito de número negativo.

Ao iniciar as disciplinas de estágio, me deparei com outro tipo de problema. Muitos dos alunos tinham dificuldades nas operações que envolviam números negativos. Fui monitor de uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental em Estágio I e fui regente em turmas de 1º e 3º anos do Ensino Médio em Estágio III, e em todas essas turmas havia vários alunos com dificuldades em operar com números negativos.

Ao ver os alunos com dificuldades para lidar com esses números (principalmente alunos que estavam acabando o Ensino Médio) refleti mais profundamente sobre o conjunto dos números inteiros. Além disso, as minhas atenções se voltaram cada vez mais para obter uma justificativa de que o produto de dois números negativos resulta em um número positivo para alunos do ensino fundamental e médio. Portanto, em minha mente havia um problema epistemológico sobre de onde surgiam e como funcionavam esses números, somado ao problema didático de ensinar esses números e as operações entre eles de uma forma compreensível, e foram esses dois problemas que me levaram a escolher esse assunto para meu trabalho de conclusão de curso.

Os objetivos principais deste trabalho são: aprofundar o estudo das regras de sinais dos números inteiros, tendo em vista o ensino deste conteúdo, levantar e analisar possíveis dificuldades que os alunos tenham em aprender este conteúdo e melhorar nossa prática em sala de aula no ensino deste conteúdo.

O segundo capítulo apresenta uma revisão bibliográfica de trabalhos publicados sobre números negativos, nos quais encontramos noções de história, de epistemologia e de ensino dos números negativos. Estudamos dois artigos, um capítulo de livro, dois trabalhos de conclusão de curso e uma dissertação.

O terceiro capítulo apresenta um estudo sobre a história dos números negativos, desde os seus primórdios na China, passando por gregos, hindus e árabes, chegando à Europa, até a sua legitimação no século XIX. Esse capítulo tem como objetivo mostrar as dificuldades pelas quais os matemáticos passaram durante toda história até chegarem a uma formulação lógica do conjunto dos números inteiros, que fosse fechada e não tivesse mais contradições.

O quarto capítulo apresenta a construção lógico-formal do conjunto dos números inteiros, tendo como base o livro *Fundamentos de Aritmética* de Hygino H. Domingues.

O quinto capítulo apresenta a proposta de ensino-aprendizagem e a sua respectiva prática, bem como uma análise da produção dos alunos. A prática foi aplicada em uma escola pública de Porto Alegre com alunos do 7º ano e foi baseada na ideia dos números inteiros serem uma extensão dos números naturais, e que, portanto, as propriedades básicas de comutatividade, associatividade, elemento neutro e distributividade dos números naturais, são preservadas nos números inteiros. É importante ressaltar que essa não é uma proposta para introdução dos números negativos, mas uma proposta para justificar as regras de sinais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresentamos resenhas e resumos de alguns trabalhos publicados sobre o assunto números negativos. Através deste estudo aprofundamos o entendimento sobre os números negativos, tanto na sua parte teórica, como no conhecimento de possíveis práticas para o futuro como professor de matemática. Além disso, ficamos cientes de possíveis dos alunos nesse conteúdo.

O texto *Construindo Matemática na sala de aula: uma experiência com os números relativos* de Megid (2010) relata experiências da própria professora com o ensino de números inteiros e suas operações para alunos de 6ª série. De acordo com Megid (2010), a ideia da pesquisa surgiu a partir de uma experiência em um elevador, onde a sua filha que estava na 5ª série não entendeu o que significava o andar -1 que aparece no quadro de alguns elevadores.

Megid (2010) usou várias atividades para tentar fazer com que seus alunos entendessem as operações com números inteiros. Para mostrar a necessidade dos números negativos, além da clássica atividade do saldo bancário, ela se utilizou de temperaturas máxima e mínima, fusos horários, saldo de gols em campeonato de futebol, gráfico de demissões e contratações e quadro de andares em um elevador, que foi o problema motivador da pesquisa. Para as operações de adição e subtração ela utilizou gráficos de lucros e prejuízos, um jogo de fichas coloridas onde uma cor representava os positivos e outra os negativos e o jogo Escopa do Zero. É interessante o fato de que para multiplicação e divisão ela não tenha feito atividades tão lúdicas como essas citadas, mas construiu as regras com os alunos por meio de algumas simples operações de produto no quadro. Para as operações de potenciação e radiciação ela fez os alunos estenderem as regras que eles já haviam entendido da multiplicação e divisão. Em todas as atividades realizadas, Megid (2010) buscou por meio de questionamentos que as conclusões sobre os conteúdos fossem obtidas pelos alunos..

Segundo Megid (2010) esta pesquisa foi feita pela própria professora, depois de 19 anos lecionando este conteúdo em sala de aula para turmas de 6ª série. No trabalho, ela mostra falas de alunos durante a sua prática que podem auxiliar qualquer professor a entender as dificuldades dos seus próprios alunos, e a ter um caminho para melhorar o ensino desse conteúdo. Por fim, ressaltamos o fato de que embora a professora tenha usado atividades lúdicas em muitos momentos, ela não usou um exemplo prático para ensinar a multiplicação com números negativos, o que é um indício das dificuldades que podemos ter ao tentar fazer isso.

O artigo *Números Negativos: Uma História de Incertezas* de Medeiros e Medeiros (1992) relata, de forma bem geral e resumida, a história dos números negativos. O objetivo dos autores neste artigo, como eles próprios afirmam é o seguinte:

> Trata-se tão somente de desenvolver, através de um estudo de caso, um exemplo de como a história da matemática pode fornecer indicações para se questionar a tão difundida visão de progresso linear da Matemática, isento de incertezas e contradições. (MEDEIROS A. e MEDEIROS C., 1992, p. 50).

Medeiros e Medeiros (1992) fazem menção dos números negativos aparecendo já na China por volta de 200 a.C. Nos gregos, eles citam uma aparição implícita na obra de Diofanto de Alexandria, embora os gregos tenham rejeitado os números negativos por sua preferência pela geometria. Eles colocam que parte dos hindus usavam esses números como débito e conforme Medeiros e Medeiros (1992, p.52) “Os negativos, assim como outras contribuições dos hindus foram passadas aos árabes que as transmitiram aos europeus”.

Medeiros e Medeiros (1992) mostram que o uso dos números negativos foi crescendo ao longo da história, enquanto iam surgindo novas aplicações para eles, mas que a sua aceitação como boa matemática não foi tão simples. Muitos matemáticos importantes rejeitaram veementemente esses números e alguns deles até tentaram provar a não existência deles. Segundo Medeiros e Medeiros (1992) essa perspectiva só foi mudar a partir dos trabalhos de George Peacock e o seu princípio de permanência das formas equivalentes, em que ele traça uma diferença entre álgebra aritmética e álgebra simbólica e estabelece que as propriedades básicas dos números naturais são preservadas nos números negativos.

Certamente podemos dizer que o objetivo principal do artigo foi atingido, pois mostra por uma pesquisa histórica apurada a não linearidade do conhecimento matemático. Com isso, Medeiros e Medeiros (1992) fala de cuidados que devemos tomar no ensino de matemática:

> Há um grande perigo em superenfatizar no ensino da Matemática o seu caráter dedutivo-postulacional, pois o elemento de invenção construtiva permanece como o núcleo de qualquer aquisição matemática, mesmo nos campos mais abstratos.
> Mais importante ainda; é atentar para o fato de que o aspecto intuitivo e o aspecto formal não caminham lado a lado. E que é preciso não menosprezar essa dimensão intuitiva que faz as pessoas usarem conceitos cuja fundamentação lógica ainda não está para elas disponível. (MEDEIROS A. e MEDEIROS C., 1992, p. 57).

Por fim, Medeiros e Medeiros (1992) se posicionam de uma forma equilibrada, sem querer que o ensino da matemática siga moldes exclusivamente históricos, mas também sem ignorar completamente o caminho que o conhecimento matemático percorreu até chegar ao tempo e espaço em que estamos.

O artigo *Um Outro Caso de Obstáculos Epistemológicos: o princípio de permanência* de Schubring (2007) retrata um pouco do debate ocorrido durante o século XIX em cima dos números negativos. O centro do debate era a plena aceitação da solução proposta por Hankel para o conceito e as operações com números inteiros.

Schubring (2007) mostra como o problema das operações com números negativos foi resolvido através da abordagem de Wilhelm A. Förstemann em 1817, que fez uma reflexão sobre a epistemologia da matemática, modificando os conceitos de número e grandeza. Depois, passando por Gauss, que também ajudou a disseminar essa nova epistemologia da matemática. Até chegar a Hermann Hankel, que assumindo esses conceitos, elaborou o seu princípio de permanência, em que ele preservava as propriedades básicas de associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro e distributividade dos números naturais nos números inteiros. Após a publicação de seu livro em 1867, Hankel, finalmente conseguiu que as operações sobre o domínio estendido dos números inteiros tivessem aceitação definitiva na comunidade dos matemáticos profissionais na Alemanha.

A seguir, Schubring (2007) apresenta um debate de mais de dois anos entre professores alemães. Ele mostra que embora no meio acadêmico o princípio de permanência tenha sido aceito de forma definitiva como a solução para o problema das operações entre números inteiros, a ideia acabou tornando-se um obstáculo epistemológico para os professores das escolas secundárias, como o próprio título do artigo diz. O debate é relatado com várias posições diferentes de professores alemães sobre as operações com inteiros, principalmente a multiplicação que é onde aparecem as maiores controvérsias. Nomes como J.C.V. Hoffmann, (fundador de uma das revistas sobre educação matemática da época, onde professores escreveram várias colunas e periódicos debatendo o assunto) J. Kober, Dr. Thieme, Eduard Härter aparecem de forma central no debate.

Schubring (2007) é claro em relação a sua proposta, mostrando uma pesquisa histórica sobre um curto espaço de tempo que é o século XIX, mais especificamente o final do século, onde houve um grande debate entre os professores já com os novos conceitos em cima dos números inteiros definidos. As ideias são expostas de forma clara, sucinta e objetiva. O debate mostrado por ele também é interessante para os dias de hoje, visto que permanece a discussão entre acadêmicos pesquisadores e professores de escola primária e secundária sobre quais conteúdos de matemática devem ser ensinados e de que maneira devem ser ensinados.

O trabalho de conclusão de curso *Estudando Dificuldades na Compreensão de Números Inteiros* de Meister (2009) teve como objetivos principais explicitados pelo autor:

> 1) Detectar e descrever algumas dificuldades presentes no processo de ensino-aprendizagem dos números inteiros;
> 2) Levantar e descrever propostas dinâmicas e inovadoras que auxiliem os educadores no ensino dos números inteiros;
> 3) Propor três experiências didáticas que tragam uma mudança na prática didática usual, buscando contribuir para melhoria do cenário encontrado. (MEISTER, 2009, p.2).

Para alcançar esses objetivos, Meister (2009) fez uma revisão bibliográfica de algumas dissertações sobre o ensino de números inteiros. Ele fez uma análise das propostas para o ensino de números inteiros contidas nessas dissertações, uma análise histórica dos números negativos, uma análise didática sobre como é ensinado esse conteúdo atualmente e uma análise das dificuldades de alunos do Colégio de Aplicação da UFRGS, através de uma entrevista e uma atividade com eles. Através essas análises, Meister (2009) traçou quais seriam as maiores dificuldades de alunos, professores e pesquisadores para a melhora do processo de ensino-aprendizagem de números inteiros, mostrando discordâncias em algumas das posturas tomadas por cada um deles. Além disso, há um espaço para discussão sobre a posição dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre o assunto.

Após essa análise teórica, Meister (2009) também fez uma prática através de três atividades que visavam uma compreensão maior dos alunos sobre os números inteiros e suas operações. Essas atividades foram o jogo de Pega Varetas, o uso de cartas para representar os números inteiros e um Quebra-Cabeça Numérico. Das três práticas, o uso de cartas para representar os números inteiros nos pareceu a mais interessante, pois com ela foi possível trabalhar as quatro operações fundamentais com números negativos de forma bastante clara.

Por fim, Meister (2009) faz considerações sobre as atividades práticas realizadas mostrando a validação de algumas hipóteses que ele havia pensado ao início do trabalho como a dificuldade dos alunos com os números inteiros e uma possível melhor compreensão do conteúdo através das práticas. O autor mostrou-se bem satisfeito com as práticas realizadas, principalmente pela participação dos alunos, algo que foi importante para validação de algumas de suas hipóteses.

O trabalho de conclusão de curso *Estratégias de Trabalho para a Aprendizagem de Operações com Números Inteiros* de Martini (2010) teve como objetivos principais explicitados pela autora:

> 1) Detectar e descrever algumas dificuldades presentes no entendimento do conteúdo referente a números inteiros, dando destaque à sua parte negativa.
> 2) Apresentar estratégias de trabalho visando auxiliar no tratamento deste conteúdo. (MARTINI, 2010, p.12)

Na parte teórica do trabalho, Martini (2010) começa relatando brevemente como os números negativos se desenvolveram na história, mostrando a origem dos números negativos e obstáculos para a compreensão e sistematização desses números. A autora também analisa algumas publicações contendo experiências de professores no ensino de números inteiros. Ela mostra algumas propostas para trabalhar esse conteúdo e também apresenta dificuldades que estes professores relataram em seus trabalhos. Ela também faz uma comparação entre aquilo que ela chama de matemática escolar e matemática cotidiana, comentando sobre como (na opinião dela e de alguns autores) os alunos manipulam esses números mais facilmente na prática cotidiana, onde eles trabalham mais com o concreto, do que na escola, onde se usam conceitos mais abstratos. Ao final desta parte teórica, também há um espaço para análise de sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), das Orientações Curriculares Nacionais (OCN) e de alguns livros didáticos para o ensino de números inteiros.

A prática do trabalho foi realizada com alunos de 6ª série (7º ano). Martini (2010) começou construindo um varal dos números inteiros onde ela colocava os números inteiros de acordo com a reta numérica. Ela trabalhou posicionamento, oposto, módulo e comparação de números na reta através do varal dos números. Trabalhou com temperaturas positivas e negativas, e também com andares negativos em um edifício. Todas essas atividades foram baseadas em experiências anteriores, publicadas por vários professores sobre o ensino de números inteiros.

É importante dizer que todo o trabalho tinha em vista as propriedades e as operações de adição e subtração entre números inteiros, portanto não foi abordado o assunto da multiplicação entre esses números. Por fim, Martini (2010) colocou a possibilidade de desenvolver propostas para o ensino das propriedades e de todas as operações com números inteiros.

A dissertação de mestrado *A Difícil Aceitação dos números Negativos: Um Estudo da Teoria dos Números de Peter Barlow (1776 - 1862)* de Anjos (2008) relata parte da história dos números negativos com um grande enfoque na matemática inglesa. Como a autora diz:

> ... propomos um estudo que ao direcionar o olhar sobre a obra de Peter Barlow – um dos últimos a não aceitar os números negativos – tentará entender as resistências históricas perante números negativos, pois o entendimento dessas resistências contribuirá para a construção de materiais que auxiliem o professor nas elaborações de atividades ministradas em sala de aula. (ANJOS, 2008, p.11)

Anjos (2008) dedica a primeira parte da dissertação para relatar o período de início da história dos números negativos, passando pelas antigas civilizações chinesa e hindu que já tinham uma ideia desses números, mas também passando por egípcios, gregos e árabes que não os aceitavam. Dessas primeiras civilizações, a autora destaca bastante os gregos, mostrando as filosofias de Platão e Aristóteles aplicadas ao entendimento matemático que os gregos tinham. Ao fim dessa primeira parte, a autora mostra o desenvolvimento desses números na Europa, passando por vários matemáticos importantes até chegar a Gauss no século XIX.

Após ter relatado de forma mais geral como os números foram se desenvolvendo, Anjos (2008) dedica uma atenção mais restrita a matemática inglesa entre os séculos XVII e XIX, mostra como surgiu e como se desenvolveu a comunidade científica inglesa e como o desenvolvimento desses números foi mais lento na Inglaterra do que na Itália por conta do comércio que existia na Itália. Nessa parte ela percorre desde a matemática desenvolvida por Newton até a matemática desenvolvida por George Peacock com o princípio de permanência das formas equivalentes que estabelecia a preservação das leis dos números positivos para os números negativos.

Por fim, Anjos (2008) se restringe ainda mais, concentrando-se em apenas um personagem inglês, que é Peter Barlow. Além de falar um pouco da vida de Barlow, a autora mostra que ele utilizava as regras de sinais, embora não aceitasse os números negativos. Ele manipulava esses números em equações indeterminadas, mas não os aceitava como raízes dessas equações e isso em pleno século XIX.

Assim, a autora mostra várias barreiras que surgiram durante a história para evidenciar a dificuldade de construir o conceito de número negativo. Com isso, ela tem o objetivo de fazer uma discussão sobre o ensino dos números negativos que ajude na superação das barreiras que os alunos têm quando estudam esse conteúdo.

3 SOBRE A HISTÓRIA DOS NÚMEROS NEGATIVOS

Para começar o estudo sobre a história dos números negativos, primeiro colocamos um relato mais global dado por Gonzalez (1990) da complexidade dessa história:

> ... a história de sua aceitação como números, foi um processo lento de avanços e retrocessos, de oscilações que vão de total rejeição, a aceitações como artifício de cálculo; tentativas frustradas de dar-lhes uma existência real. E essa história longa e agitada não terminou até o século passado. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 21, minha tradução)

Ao longo do capítulo, buscaremos trazer um relato mais ou menos linear de como se desenvolveram esses números ao longo da história até sua aceitação definitiva.

3.1 OS NÚMEROS NEGATIVOS NA CIVILIZAÇÃO CHINESA

De acordo com Medeiros e Medeiros (1992, p.50) “A origem histórica dos números negativos é incerta.” Apesar desse fato, podemos dizer que o que conhecemos de mais antigo sobre esses números está na obra chinesa *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, cerca de 200 a.C., em que esses números aparecem no contexto de problemas de equações lineares. (MEDEIROS E MEDEIROS 1992).

Segundo Anjos (2008), os chineses diferenciavam números positivos e negativos usando barras pretas representando os positivos e barras vermelhas representando os negativos. Possivelmente, eles trabalhavam dessa forma por causa de sua filosofia muito forte de opostos. Conforme Anjos (2008, p.16) “[...] a ideia de negatividade e positividade na matemática chinesa era a expressão de características complementares de um mesmo número [...]”. Assim, na matemática chinesa, os números negativos eram usados apenas como intermediários na execução de algum algoritmo, ou interpretação de alguma situação problema, mas não se aceitava a ideia de esses números serem soluções de uma equação. (ANJOS 2008).

3.2 OS NÚMEROS NEGATIVOS NA CIVILIZAÇÃO GREGA

De acordo com Anjos (2008, p.19) “[...] a ideia de número negativo não estava presente na civilização grega.” Isso possivelmente se deve ao fato da preferência dos gregos pela geometria, onde as coisas são representadas visualmente. Como Gonzalez (1990) diz:

> O Descobrimento das grandezas incomensuráveis foi possivelmente um determinante da orientação dos matemáticos gregos para a geometria em detrimento da aritmética e da álgebra. Talvez tenha sido a causa de que não concebessem os números negativos: não se lhes podia representar graficamente mediante um segmento. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 22-23, minha tradução)

Apesar de os gregos não aceitarem os números negativos, ainda assim eles deram uma contribuição importante para esses números, pois foram eles que estabeleceram a propriedade distributiva, usando representações geométricas de área. (GONZALEZ 1990). A propriedade distributiva tem um papel importante para os números inteiros, mas esse fato será visto mais à frente, no momento em que os números negativos estiverem sendo plenamente aceitos.

Um personagem importante na matemática grega foi Diofanto de Alexandria que viveu no século III. Diofanto é considerado por alguns o criador da álgebra, pois ele "abordou a resolução das equações algébricas sem recorrer à geometria." (GONZALEZ, 1990, p.23). É dessa ideia que surgem as equações diofantinas. Dessa forma, é possível que ele conhecesse a seguinte identidade algébrica:

$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$$

logo, pode-se supor que ele conhecia as regras de sinais, embora não apareçam de forma explícita em sua obra e só considerasse os casos onde $a > b$ e $c > d$. (GONZALEZ 1990).

3.3 OS NÚMEROS NEGATIVOS NA CIVILIZAÇÃO HINDU

Segundo Anjos (2008, p.16), "[...] a matemática hindu é reconhecida historicamente pelo trato sistemático dos números negativos." Eles aparecem pela primeira vez de forma explícita na obra de Brahmagupta no século VII. (ANJOS 2008). As regras de sinais que possivelmente já eram conhecidas anteriormente pelos gregos, por Diofanto, são usadas de forma sistemática nessa obra, mas aparecem como regras numéricas para números positivos e negativos como sendo entidades independentes. (ANJOS 2008). Conforme Boyer (1996, p.150), "[...] aqui achamos soluções gerais de equações quadráticas, inclusive duas raízes mesmo quando uma delas é negativa." Nessa obra, encontra-se uma aritmética sistematizada dos números negativos e do zero:

> Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador. (COLEBROOK apud BOYER, 1996, p. 150).

Aqui, cabe ressaltar que Brahmagupta afirmou que $0 \div 0 = 0$. Mesmo assim, esse fato mostra que os números negativos tinham aceitação pelos hindus, embora não plenamente como veremos mais a frente.

Os números negativos eram usados pelos hindus no contexto de dívida e também na astronomia. (GONZALEZ 1990). Isso mostra um pouco do caráter prático da matemática hindu. Além disso, de acordo com Gonzalez (1990), a aceitação dos números negativos como entidades independentes por parte dos hindus só foi possível, por não terem tanta preocupação com rigor e fundamentação lógica como os gregos tinham.

Mas a aceitação dos números negativos pelo povo hindu não foi plena. Um exemplo claro disso é Bhaskara. Bhaskara foi, segundo Boyer (1996, p.151), “[...] o mais importante matemático do século doze.” Mas, ele não aceitava raízes negativas como soluções de equações e sequer considerava usar esses números para resolvê-las. Em Medeiros e Medeiros (1992) aparece o seguinte sobre a relação de Bhaskara com as equações de segundo grau:

> O famoso Bhaskara, por exemplo, maior matemático hindu do século XII, resolveu a equação $x^2 - 45x = 250$, encontrando as soluções $x = 50$ e $x = -5$, mas mostrou-se cético quanto à validade da raiz negativa. (STRUIK, apud MEDEIROS E MEDEIROS, 1992, p. 51)
> Para ele o segundo valor não devia ser tomado por ser inadequado, pois as pessoas não aceitam raízes negativas. (REID, apud MEDEIROS E MEDEIROS, 1992, p. 51)

Dessa forma, temos que os números negativos foram aceitos parcialmente entre os hindus, desde uma aceitação plena por alguns até uma rejeição plena por outros.

3.4 OS NÚMEROS NEGATIVOS NO IMPÉRIO ÁRABE

Conforme Anjos (2008, p.26), [...] “a postura árabe diante do conhecimento matemático foi fortemente marcada pela mistura de várias influências.” Há textos traduzidos dos hindus, gregos e também dos chineses. (ANJOS 2008). Mas, assim como os gregos, os árabes não aceitavam os números negativos como números. Gonzalez (1990) mostra as possíveis razões pelas quais os árabes não aceitavam esses números:

> Os árabes tropeçaram no obstáculo que impediu durante séculos a aceitação dos números negativos como números, a saber, a identificação de número com grandeza. A recusa dos árabes, para os negativos foi suave, se limitaram a ignorar esses monstros sem suporte real, frutos da criatividade e imaginação dos hindus. Conheciam, sim, as regras para operar com os negativos, mas consideravam como indicativo de subtração. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 26, minha tradução)

Embora não aceitassem os números negativos, os árabes tiveram uma grande importância na álgebra, a ponto de, segundo com Boyer (1996), o título de “pai da álgebra” pertencer mais a AL-Khowarizmi do que a Diofanto. Além disso, de acordo com Medeiros e Medeiros (1992), foram os árabes que transmitiram a contribuição dos hindus sobre os números negativos aos europeus.

3.5 OS NÚMEROS NEGATIVOS NA EUROPA

Conforme Gonzalez (1990), durante a idade média, houve um período de desprezo total e, portanto, ocultação dos números negativos, tanto entre os árabes, como entre os europeus. Essa situação só começou a mudar no século XIV na Itália, com o surgimento de um sistema bancário com uma estrutura de crédito internacional que propiciou a utilização de números negativos. (MEDEIROS E MEDEIROS 1992). Além disso, a invenção da impressão fez a álgebra e aritmética dos árabes, por conta de seu caráter mais prático, ter uma popularização maior que a dos gregos. E esse desenvolvimento da álgebra trouxe os números negativos de volta a cena. (GONZALEZ 1990).

A partir desse momento, o uso dos números negativos passa a ser crescente, embora não a sua aceitação como boa matemática. (MEDEIROS E MEDEIROS 1992). No século XVII, embora não se aceitasse de forma definitiva os números negativos, segundo Gonzalez (1990, p.32) [...] “os números negativos depois de mostrarem a sua viabilidade e eficácia são aceitos e utilizados como artifícios de cálculo.” Além disso, nesse século também surgem as primeiras tentativas para justificar a existência, o uso e a validade desses números. (GONZALEZ 1990).

Durante o século XV, até o momento da legitimação definitiva dos números negativos, houve muitas opiniões divergentes de diversos matemáticos importantes sobre esses números. Alguns aceitavam, outros desprezavam, alguns tentaram dar justificativas que validassem esses números, outros tentaram dar justificativas que refutasse até mesmo a existência deles. Entre matemáticos importantes que rejeitaram esses números de forma parcial, ou até mesmo de forma plena, podemos citar: Nicolás Chuquet (1445-1500), Michael Stifel (1487-1567), Giordano Cardan (1501-1576), François Viète (1540-1603), Thomas Harriot (1560-1621), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Antoine Arnaud (1612-1694), Blaise Pascal (1623-1662), Gabriel Cramer (1704-1752), Jean D’Alembert (1717-1783), Francis Maseres (1731-1824), Lazare Carnot (1753-1823), Willian Frende (1757-1841), Willian Hamilton (1805-1865) e Augustus De Morgan (1806-1871). (GONZALEZ 1990) e (MEDEIROS E MEDEIROS 1992).

3.6 A JUSTIFICAÇÃO DOS NÚMEROS NEGATIVOS

A medida que o uso dos números negativos ia crescendo, se multiplicavam os esforços para legitimação desses números. Matemáticos importantes que aceitavam os números negativos tentaram legitimá-los, mas nenhum obteve sucesso até o século XIX. Segundo Schubring (2007, p.4), [...] "foi Lazare Carnot (1753-1823) que empreendeu pela primeira vez uma análise sistemática das diversas provas da regra dos sinais. Ele mostrou que todas essas provas são deficientes." Schubring (2007) descreve o problema conceitual que os matemáticos enfrentaram sobre os números negativos.

> O maior problema matemático envolvido pode se resumir assim: operar com números negativos implicava operar com um outro conceito de número que não aquele subjacente às operações comumente assumidas como geralmente válidas na aritmética. Foi preciso estender as operações da aritmética comum – então com os números inteiros – para o domínio maior de números que incluía os relativos. A necessidade de estender, a saber, redefinir as significações das operações foi concebida pelo filósofo francês Condillac como a diferença entre dois "dialetos" da língua da matemática: o dialeto da aritmética e o dialeto da álgebra. (SCHUBRING, 2007, p. 2-3)

A controvérsia entre os números negativos começou a ser resolvida através do matemático inglês George Peacock (1791-1858), que de acordo com Gonzalez (1990), fez a distinção entre a álgebra aritmética e a álgebra simbólica, e estabeleceu o princípio de permanência como conexão entre essa álgebras:

> Peacock, depois de distinguir entre álgebra aritmética – onde as letras representam números naturais, os símbolos $+$ e $-$ tem significado aritmético ordinário – e a álgebra simbólica – onde seguem atuando as leis da álgebra aritmética, mas se elimina a restrição aos naturais – estabeleceu a conexão entre elas a partir do que chamou de "princípio de permanência" que dizia: "Todos os resultados da álgebra aritmética que se deduzem por aplicação de suas regras, e que são gerais em sua forma, ainda que particulares em seu valor, são igualmente resultados da álgebra simbólica, onde são gerais tanto em seu valor como em sua forma." (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 48, minha tradução)

Por fim, o matemático alemão Hermann Hankel (1839-1873), em sua obra *Teoria do Sistema dos Números Complexos*, resolveu de forma definitiva a controvérsia dos números negativos:

> Hankel, retomando a iniciativa de Peacock, formulou o princípio de permanência das leis formais que estabelece o critério geral de algumas ampliações do conceito de número:
>
> 1. A palavra número responderá a símbolos ou agregados de símbolos que não necessariamente representam números do campo numérico previamente dado ou conhecido, mas que seu significado pode ser qualquer.
> 2. Se definirão para o novo campo numérico as operações fundamentais da aritmética (adição e multiplicação) e o conceito de igualdade, de maneira que se conservem as definições no campo menos amplos como caso particular das novas definições e que subsistam as leis formais de uniformidade, associativa, comutativa, distributiva e conservação de elemento neutro. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 48-49, minha tradução)

4 CONSTRUÇÃO LÓGICO-FORMAL DOS NÚMEROS INTEIROS

A nossa proposta de ensino-aprendizagem sobre números inteiros é baseada na extensão dos números naturais com a preservação das propriedades fundamentais; assim, resolvemos estudar os números inteiros do ponto de vista formal, já que a construção dos números inteiros não é um assunto estudado na graduação. Faremos essa construção, baseados no livro *Fundamentos de Aritmética* de Domingues (1991).

4.1 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS

Queremos que todas as expressões do tipo $a - b$ sejam válidas para qualquer $a, b \in \mathbb{N}$, de maneira que todas façam parte do mesmo conjunto. A ideia é que esse conjunto que vamos construir seja uma "extensão" de $\mathbb{N}$. Então, primeiramente, percebemos que por de trás de cada expressão do tipo $a - b$, existe o par ordenado $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Além disso, sabemos que se $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ e $c \geq d$, então vale a equivalência:

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

No conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definimos a relação $\sim$ para quaisquer $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que vale a equivalência:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Para a relação $\sim$ valem as seguintes propriedades:

- Reflexiva: $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, b) \sim (a, b)$.

Demonstração: de fato, pois $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, temos $a + b = b + a$, então $(a, b) \sim (a, b)$.

- Simétrica: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se $(a, b) \sim (c, d)$, então $(c, d) \sim (a, b)$.

Demonstração: de fato, pois $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$.

- Transitiva: $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então $(a, b) \sim (e, f)$.

Demonstração: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ e $(c, d) \sim (e, f) \Leftrightarrow c + f = e + d$. Somando f dos dois lados da primeira igualdade, temos que $a + d + f = b + c + f$, e somando b dos dois lados da segunda igualdade, temos que $c + f + b = e + d + b$. Assim, $a + d + f = b + c + f = c + f + b = e + d + b$, logo $a + d + f = e + d + b$, portanto $a + f = b + e$, então $(a, b) \sim (e, f)$.

Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e assim determina uma partição desse conjunto em classes de equivalência. Para cada $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indicaremos por $\overline{(a, b)}$ a classe de equivalência determinada por $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim:

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x, y) \sim (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + b = y + a\}.$$

O conjunto dos números inteiros, indicado por $\mathbb{Z}$, será o conjunto quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por $\sim$, isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência $\overline{(a, b)}$, para qualquer $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim:

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\sim} = \left\{\overline{(a, b)} \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\right\}.$$

Em particular, temos que para todo $m \in \mathbb{Z}$, tal que $m = \overline{(a, b)}$, se $a \geq b$, então $m = \overline{(a - b, 0)}$, e se $a \leq b$, então $m = \overline{(0, b - a)}$.

4.1.1 Adição no Conjunto dos Números Inteiros

Sejam $m = \overline{(a, b)}$ e $n = \overline{(c, d)}$ elementos de $\mathbb{Z}$. Chama-se soma de m com n, e se indica por $m + n$, o elemento de $\mathbb{Z}$ definido por:

$$m + n = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}.$$

Vamos mostrar que a soma está bem definida.

Suponhamos $m = \overline{(a, b)} = \overline{(a_1, b_1)}$ e $n = \overline{(c, d)} = \overline{(c_1, d_1)}$. Então, $m + n = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$ e $m + n = \overline{(a_1, b_1)} + \overline{(c_1, d_1)} = \overline{(a_1 + c_1, b_1 + d_1)}$. Entretanto, $(a, b) \sim (a_1, b_1)$ e $(c, d) \sim (c_1, d_1)$, então $a + b_1 = b + a_1$ e $c + d_1 = d + c_1$. Assim, $(a + b_1) + (c + d_1) = (b + a_1) + (d + c_1)$, ou $(a + c) + (b_1 + d_1) = (b + d) + (a_1 + c_1)$. Então, $\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a_1 + c_1, b_1 + d_1)}$. Logo, a relação dada por $(m, n) \to m + n$ é uma aplicação de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, e portanto é uma operação sobre $\mathbb{Z}$. Chamamos essa operação de adição em $\mathbb{Z}$.

Para a adição em $\mathbb{Z}$ valem as seguintes propriedades:

- Associativa: $\forall m, n, s \in \mathbb{Z}, (m+n)+s = m+(n+s)$.

Demonstração: se $m = \overline{(a,b)}$, $n = \overline{(c,d)}$ e $s = \overline{(e,f)}$, então $(m+n)+s =$
$= \left(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}\right) + \overline{(e,f)} = \overline{(a+c, b+d)} + \overline{(e,f)} = \overline{\left((a+c)+e, (b+d)+f\right)} =$
$= \overline{\left(a+(c+e), b+(d+f)\right)} = \overline{(a,b)} + \overline{(c+e, d+f)} = \overline{(a,b)} + \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right) =$
$= m+(n+s)$.

- Comutativa: $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m+n = n+m$.

Demonstração: se $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$, então $m+n = \overline{(a+c, b+d)} =$
$= \overline{(c+a, d+b)} = n+m$.

- Existência de elemento neutro: $e \in \mathbb{Z}$ é tal que $\forall m \in \mathbb{Z}, m+e = m$.

Demonstração: se $m = \overline{(a,b)}$ e $e = \overline{(0,0)}$ então $\overline{(a,b)} + \overline{(0,0)} = \overline{(a,0)} + \overline{(b,0)} = \overline{(a,b)}$, então $e = \overline{(0,0)}$ é o elemento neutro.

- Existência de oposto aditivo: $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists\, m' \in \mathbb{Z}$ tal que $m+m' = e$.

Demonstração: seja $m = \overline{(a,b)}$. Como $\overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(a+b, b+a)} = \overline{(0,0)}$, então $m' = \overline{(b,a)}$. Usaremos a notação: $-m = m'$.

- Lei do cancelamento: $\forall m, n, s \in \mathbb{Z}$, se $m+s = n+s$, então $m = n$.

Demonstração: $m = m+e = m+(s+s') = (m+s)+s' = (n+s)+s' = n+(s+s') =$
$= n+e = n$.

4.1.2 Subtração no Conjunto dos Números Inteiros

Sejam $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$ elementos de $\mathbb{Z}$. Chama-se diferença entre m e n, e se indica por $m-n$, o elemento de $\mathbb{Z}$, definido por:

$$m-n = m+(-n) = \overline{(a,b)} + \overline{(d,c)} = \overline{(a+d, b+c)}.$$

Como a subtração pode ser transformada em soma, ela está bem definida.
Logo, a relação dada por $(m,n) \to m-n$ é uma aplicação de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, e portanto é uma operação sobre $\mathbb{Z}$. Chamamos essa operação de subtração em $\mathbb{Z}$. Porém, para essa operação

não valem as propriedades associativa, comutativa e elemento neutro. Mostramos isso através de contra exemplos:

Ela não é associativa, pois $7-(3-2)=7-1=6 \neq 2=4-2=(7-3)-2$.

Ela não é comutativa, pois $7-3 \neq 3-7$.

Ela não admite elemento neutro, pois, se $7-n=7$, então $n=0$ e $0-n \neq n$.

4.1.3 Multiplicação no Conjunto dos Números Inteiros

Sejam $m=\overline{(a,b)}$ e $n=\overline{(c,d)}$ elementos de $\mathbb{Z}$. Chama-se produto de m com n, e se indica por mn, o elemento de $\mathbb{Z}$ definido por:

$$mn=\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)}.$$

Vamos mostrar que a multiplicação está bem definida.

Suponhamos $m=\overline{(a,b)}=\overline{(a_1,b_1)}$ e $n=\overline{(c,d)}=\overline{(c_1,d_1)}$. Então, $mn=\overline{(a,b)} \cdot$ $\cdot \overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)}$ e $mn=\overline{(a_1,b_1)}+\overline{(c_1,d_1)}=\overline{(a_1c_1+b_1d_1,a_1d_1+b_1c_1)}$. Entretanto, $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ e $(c,d) \sim (c_1,d_1)$, então $a+b_1=b+a_1$ e $c+d_1=d+c_1$. Assim, $c(a+b_1)=c(b+a_1)$, $a_1(c+d_1)=a_1(d+c_1)$, $d(a+b_1)=d(b+a_1)$ e $b_1(c+d_1)=b_1(d+c_1)$. $(ac+bd)+(a_1d_1+b_1c_1)=(bc+ad)+(a_1c_1+b_1d_1)$, então $\overline{(ac+bd,ad+bc)}=\overline{(a_1c_1+b_1d_1,a_1d_1+b_1c_1)}$. Logo, a relação dada por $(m,n) \to mn$ é uma aplicação de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, e portanto é uma operação sobre $\mathbb{Z}$. Chamamos essa operação de multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Para a multiplicação em $\mathbb{Z}$ valem as seguintes propriedades:

- Associativa: $\forall m,n,s \in \mathbb{Z}, (mn)s=m(ns)$.

Demonstração: se $m=\overline{(a,b)}$, $n=\overline{(c,d)}$ e $s=\overline{(e,f)}$, então $(mn)s=$

$=\left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}\right) \cdot \overline{(e,f)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)} \cdot \overline{(e,f)}=$

$=\overline{(ace+bde+adf+bcf,acf+bdf+ade+bce)}=$

$=\overline{(ace+adf+bcf+bde,acf+ade+bce+bdf)}=\overline{(a,b)} \cdot \overline{(ce+df,cf+de)}=$

$=\overline{(a,b)} \cdot \left(\overline{(c,d)} \cdot \overline{(e,f)}\right)=m(ns)$.

- Comutativa: $\forall m, n \in \mathbb{Z}, mn = nm$.

Demonstração: se $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$, então $mn = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} =$ $= \overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(ca + db, cb + da)} = \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)} = nm$.

- Existência de elemento neutro: $e \in \mathbb{Z}$ é tal que $\forall m \in \mathbb{Z}, me = m$.

Demonstração: se $m = \overline{(a,b)}$ e $e = \overline{(1,0)}$, então $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(1,0)} =$ $= \overline{(a \cdot 1 + b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1)} = \overline{(a,b)}$, então $e = \overline{(1,0)}$ é o elemento neutro.

- Distributiva: $\forall m, n, s \in \mathbb{Z}, m(n + s) = mn + ms$.

Demonstração: se $m = \overline{(a,b)}$, $n = \overline{(c,d)}$ e $s = \overline{(e,f)}$, então $m(n + s) =$ $= \overline{(a,b)} \cdot \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right) = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c + e, d + f)} =$
$= \overline{(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + bf)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)} + \overline{(ae + bf, af + be)} =$ $= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)} = mn + ms$.

- Integridade: $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, se $mn = 0$ então $m = 0$ ou $n = 0$.

Demonstração: se $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$ e $mn = 0$, então $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} =$ $= \overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(0,0)}$, então $ac + bd = 0$ e $ad + bc = 0$. Como $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, então $ac = 0$, $bd = 0$, $ad = 0$ e $bc = 0$. Como $ac = 0$, então $a = 0$ ou $c = 0$ e, como $bc = 0$, então $b = 0$, ou $c = 0$. Se $c \neq 0$, então $a = 0$, e $b = 0$, então $m = \overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$. Se supomos $d \neq 0$, temos o mesmo resultado. Se supomos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, temos $n = \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$.

4.1.4 Relação de Ordem no Conjunto dos Números Inteiros

Vimos na página 23 que para todo $m \in \mathbb{Z}$, tal que $m = \overline{(a,b)}$, se $a \geq b$, então $m = \overline{(a - b, 0)}$, e se $a \leq b$, então $m = \overline{(0, b - a)}$. Portanto, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $m = \overline{(c, 0)}$ ou $m = \overline{(0, c)}$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Assim, se

$$\overline{(0,0)} = 0,\ \overline{(1,0)} = +1,\ \overline{(2,0)} = +2,\ \overline{(3,0)} = +3...$$
$$\overline{(0,1)} = -1,\ \overline{(0,2)} = -2,\ \overline{(0,3)} = -3...$$

torna-se válido escrever

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$.

Chamamos $\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, \dots\}$ de conjunto dos números inteiros positivos.

Chamamos $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -2, -1, 0\}$ de conjunto dos números inteiros negativos.

Chamamos $\mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, \dots\}$ de conjunto dos números inteiros estritamente positivos.

Chamamos $\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$ de conjunto dos números inteiros estritamente negativos.

Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$. Dizemos que m é menor que ou igual a n e escrevemos $m \leq n$, se $n = m + s$ para algum $s \in \mathbb{Z}_+$. Neste caso, podemos dizer que n é maior do que ou igual a m e escrever $n \geq m$.

Dizemos que m é menor do que n e escrevemos $m < n$, se $n = m + s$, para algum $s \in \mathbb{Z}_+^*$. Neste caso, podemos dizer que n é maior do que m e escrever $n > m$.

Para a relação "menor do que ou igual a" em $\mathbb{Z}$ valem as seguintes propriedades:

- Reflexiva: $\forall m \in \mathbb{Z}, m \leq m$.

Demonstração: de fato, $m = m + 0$ e $0 \in \mathbb{Z}_+$.

- Antissimétrica: se $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.

Demonstração: Por hipótese, $m = n + s_1$, com $s_1 = \overline{(a, 0)}$, para algum $a \in \mathbb{N}$ e $n = m + s_2$, com $s_2 = \overline{(b, 0)}$, para algum $b \in \mathbb{N}$. Então, $m = n + s_1 = (m + s_2) + s_1 = m + (s_1 + s_2) = = m + \overline{(a + b, 0)}$, então $\overline{(a + b, 0)} = \overline{(0,0)}$, então $a + b = 0$, então $a = b = 0$, então $s_1 = s_2 = 0$, então $m = n$.

- Transitiva: se $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$.

Demonstração: Por hipótese, $n = m + s$, com $s = \overline{(a, 0)}$, para algum $a \in \mathbb{N}$ e $p = n + t$, com $t = \overline{(b, 0)}$, para algum $b \in \mathbb{N}$. Então, $p = n + t = (m + s) + t = m + (s + t)$. Como $s + t = \overline{(a + b, 0)} \in \mathbb{Z}_+$, então $m \leq p$.

- Tricotomia: se $m, n \in \mathbb{Z}$, então $m < n$, ou $m = n$, ou $m > n$.

Demonstração: basta mostrar que $m \leq n$ ou $n \leq m$. Seja $m = \overline{(a, 0)}$ e $n = \overline{(b, 0)}$. Se $a \leq b$, então $b = a + c$, para algum $c \in \mathbb{N}$, então $n = \overline{(b, 0)} = \overline{(a + c, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(c, 0)} = = m + \overline{(c, 0)}$, então $m \leq n$. Se $b \leq a$, procedendo de forma análoga, $n \leq m$. O caso $m = \overline{(0, a)}$ e $n = \overline{(0, b)}$ é análogo aos anteriores. Se $m = \overline{(a, 0)}$ e $n = \overline{(0, b)}$, então $m = \overline{(a, 0)} = \overline{(a + b, b)} = \overline{(0, b)} + \overline{(a + b, 0)} = n + \overline{(a + b, 0)}$, então $n \leq m$.

- Compatibilidade com a adição: se $m, n, p \in \mathbb{Z}$ e $m \leq n$, então $m + p \leq n + p$.

Demonstração: Por hipótese, $n = m + s$, para algum $s \in \mathbb{Z}_+$. Como $n + p = (m + s) + p = $ $= (m + p) + s$, então $\forall p \in \mathbb{Z}, m + p \leq n + p$.

- Compatibilidade com a multiplicação: se $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ e $0 \leq p$ então $mp \leq np$.

Demonstração: Por hipótese, $n = m + s$, com $s = \overline{(a, 0)}$, para algum $a \in \mathbb{N}$ e $p = \overline{(b, 0)}$, para algum $b \in \mathbb{N}$. Como $pn = pm + pr$ e $pr = \overline{(ab, 0)} \in \mathbb{Z}_+$, então $mp \leq np$.

4.2 IMERSÃO DOS NÚMEROS NATURAIS NOS NÚMEROS INTEIROS

Mostraremos como $\mathbb{N}$ faz parte de $\mathbb{Z}$. Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, uma função em que a lei é $f(a) = \overline{(a, 0)}, \forall a \in \mathbb{N}$, isto é,

$$f(0) = \overline{(0,0)} = 0,\ f(1) = \overline{(1,0)} = +1,\ f(2) = \overline{(2,0)} = +2...$$

então:

- $Im(f) = \{f(a) \mid a \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, ...\}$.
- Se $f(a) = f(b)$, então $\overline{(a, 0)} = \overline{(b, 0)}$, então $a = b$, então f é injetora.
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, f(a + b) = \overline{(a + b, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(b, 0)} = f(a) + f(b)$.
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, f(ab) = \overline{(ab, 0)} = \overline{(a, 0)} \cdot \overline{(b, 0)} = f(a)f(b)$.
- Se $a \leq b$, então $b = a + c$, para algum $c \in \mathbb{N}$, então $f(b) = \overline{(b, 0)} = \overline{(a + c, 0)} = $ $= \overline{(a, 0)} + \overline{(c, 0)} = f(a) + \overline{(c, 0)}$, então $f(a) \leq f(b)$.

Assim, nos aspectos algébricos e nas relações de ordem, $\mathbb{Z}_+$ é uma cópia de $\mathbb{N}$, obtida através da f. Então, podemos identificar $\mathbb{N}$ com $\mathbb{Z}_+$ e considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. A função f é chamada de imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$.

Nos números inteiros valem as seguintes regras de sinais:

- $\forall a, b \in \mathbb{Z}, (-a)b = -ab = a(-b)$.

Demonstração: $a \cdot b + (-a) \cdot b = (a - a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$, então $(-a)b$ é o oposto aditivo de ab, ou seja, $(-a)b = -ab$. Analogamente, $a(-b) = -ab$.

- $\forall a, b \in \mathbb{Z}, (-a)(-b) = ab$.

Demonstração: $a \cdot (-b) + (-a) \cdot (-b) = (a - a) \cdot (-b) = 0 \cdot (-b) = 0$, então $(-a)(-b)$ é o oposto aditivo de $-ab$, ou seja, $(-a)(-b) = ab$.

5 A PRÁTICA NA SALA DE AULA

Aplicamos uma prática com alunos de 7º ano, que haviam trabalhado há pouco as operações com números negativos. A prática teve a finalidade de justificar as regras de sinais utilizadas nos números inteiros, especialmente as da multiplicação.

Apresentamos as propriedades básicas dos números naturais – associativa, comutativa, existência de elemento neutro e distributiva – e comentamos a sua importância e utilidade através de exemplos. Estendemos essas propriedades para os números inteiros e então explicamos as regras de sinais, embasados nessas propriedades. Trabalhamos em uma lista de exercícios com várias somas, subtrações e multiplicações, e alguns problemas. Por fim, aplicamos um teste para analisar a compreensão dos alunos.

5.1 PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

As atividades foram planejadas para 5 períodos de 50 minutos cada, divididos em 3 aulas, sendo 1 período para a primeira aula, 2 períodos para a segunda aula e 2 períodos para a terceira aula. Nos três primeiros períodos, desenvolveremos os conteúdos programados, no quarto período trabalharemos uma lista de exercícios, e ao final do quinto período será aplicado um teste.

5.1.1 Primeira Aula

Vamos relembrar algumas propriedades importantes dos números naturais.

Associatividade.

Na Adição: $8 + (3 + 2) = (8 + 3) + 2$.

Na Multiplicação: $8 \cdot (3 \cdot 2) = (8 \cdot 3) \cdot 2$.

Vamos ressaltar que usamos essa propriedade muitas vezes e de maneira automática. A soma e o produto são operações binárias. Para somar três números, primeiro somamos dois deles e do resultado somamos com o terceiro número. Na multiplicação ocorre da mesma maneira. Assim, a associatividade é uma propriedade de fundamental utilidade para nós.

Comutatividade.

Na Adição: $4 + 6 = 6 + 4$.

Na Multiplicação: $4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$.

Vamos ressaltar que também usamos essa propriedade muitas vezes e de maneira automática. Quando fazemos uma soma ou uma multiplicação, não pensamos na ordem das parcelas ou dos fatores. Já temos em mente que a ordem das parcelas não altera a soma e a ordem dos fatores não altera o produto. Nós sabemos que não há diferença. Além disso, a comutatividade é útil como artifício de cálculo.

Exemplo: na multiplicação $135 \cdot 42$.

Quando armamos essa multiplicação, colocar o 42 abaixo do 135 facilita o cálculo, pois teremos menos operações a fazer.

Existência de Elemento Neutro.

Zero é o elemento neutro da Adição: $7 + 0 = 7$.

Um é o elemento neutro da Multiplicação: $7 \cdot 1 = 7$.

Em princípio, não faremos nenhum comentário sobre essa propriedade, pois a sua utilidade está mais relacionada a álgebra, conteúdo ainda não visto pelos alunos.

Distributividade da Multiplicação em relação à Adição:
$9 \cdot (5 + 1) = (9 \cdot 5) + (9 \cdot 1)$.

Vamos observar que diferentemente das propriedades vistas anteriormente, não usamos essa propriedade de forma tão automática, mas ela é muito importante para o que queremos fazer e também serve para facilitar o cálculo.

Exemplo: na multiplicação de $67 \cdot 11$.

Usando a distributividade, $67 \cdot 11 = 67 \cdot (10 + 1) = 67 \cdot 10 + 67 \cdot 1 = 670 + 67 =$ $= 737$.

Também é interessante observar o que acontece quando fazemos uma multiplicação onde os dois números tenham mais de uma casa decimal. Usando o mesmo exemplo $67 \cdot 11$.

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times\ \ 11 \\ \hline 67 \\ +670 \\ \hline 737 \end{array}$$

Observamos que o 0 de 670 é proveniente do produto de $67 \cdot 10 = 670$. Logo, o que fazemos numa multiplicação nada mais é do que uma aplicação da distributividade.

Para essa aula, também queremos fazer mais exemplos em que usamos essas propriedades.

5.1.2 Segunda Aula

Até aqui, tínhamos o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ dos números naturais. Agora, introduzimos o conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$ dos números inteiros, inserindo o oposto de cada número natural diferente de 0. Queremos que as propriedades, que antes valiam apenas para os números naturais, sejam válidas para todos os números inteiros. Desse modo, obteremos as regras de sinais para os números inteiros, fazendo uma extensão dessas propriedades dos números naturais para os números inteiros.

Assim, entraremos nas operações de adição, multiplicação e depois subtração. Decidimos não trabalhar com a divisão, por conta da possibilidade de sairmos dos números inteiros e entrarmos no campo dos racionais.

A adição de números inteiros pode ser entendida mais naturalmente através do conceito de ganho e dívida, onde um número positivo representa um ganho e o negativo uma dívida.

A adição de 2 números positivos é a mesma dos números naturais.

Exemplo: $4 + 6 = 10$.

Na adição de um número positivo com um número negativo, se o ganho for maior que a dívida, o resultado deve ser um ganho e se a dívida for maior que o ganho, o resultado deve ser uma dívida. Para obtermos o resultado, basta subtrairmos o valor absoluto maior pelo valor absoluto menor e o sinal do resultado será o do número com valor absoluto maior.

Exemplo 1: $4 + (-6) = -2$.

Exemplo 2: $(-4) + 6 = 2$.

Na adição de 2 números negativos, temos duas dívidas, e somando dívida com dívida, nosso resultado é uma dívida. Para obtermos o resultado, somamos os valores absolutos dos números e nosso resultado será um número negativo.

Exemplo: $(-4) + (-6) = -10$.

Na multiplicação precisaremos de um pouco de cuidado, pois os alunos ainda não tiveram o conteúdo de álgebra. Queremos responder a seguinte questão:

Porque um número positivo multiplicado por um número negativo resulta em um número negativo?

Para respondê-la, vamos calcular $(-3) \cdot 8$, usando as propriedades estudadas.

Sabemos que $3 \cdot 8 = 24$.

Da adição em $\mathbb{Z}$, sabemos que $3 = (6 + (-3))$.

Assim, $(6 + (-3)) \cdot 8 = 24$.

Usando a distributividade, $(6 \cdot 8) + ((-3) \cdot 8) = 24$.

Sabemos que $6 \cdot 8 = 48$.

Escreveremos $(-3) \cdot 8 = (?)$

Colocamos $(?)$, pois é o que queremos descobrir.

Assim, temos que $48 + (?) = 24$.

Da adição em $\mathbb{Z}$, sabemos que $(?) = -24$.

Portanto, $(-3) \cdot 8 =- 24$.

Usando a comutatividade da multiplicação, $8 \cdot (-3) =- 24$.

Observaremos que esse argumento vale em geral, ou seja, um número positivo multiplicado por um número negativo é um número negativo.

Assim, temos que $(+) \cdot (-) = (-)$ e pela comutatividade, $(-) \cdot (+) = (-)$.

Para a próxima pergunta, prosseguiremos de forma semelhante. Queremos responder a seguinte questão:

Porque um número negativo multiplicado por um número negativo resulta em um número positivo?

Para respondê-la, vamos calcular $(-3) \cdot (-1)$, usando as propriedades estudadas.

Sabemos que $3 \cdot 8 = 24$.

Da adição em $\mathbb{Z}$, sabemos que $3 = (6 + (-3))$.

Também sabemos que $8 = (9 + (-1))$.

Assim, $(6 + (-3)) \cdot (9 + (-1)) = 24$.

Usando a distributividade, $(6 \cdot 9) + ((-3) \cdot 9) + (6 \cdot (-1)) + ((-3) \cdot (-1)) = 24$.

Sabemos que $6 \cdot 9 = 54$.

Agora, também sabemos que $(-3) \cdot 9 = -27$.

Também sabemos que $6 \cdot (-1) = -6$.

Escreveremos $(-3) \cdot (-1) = (?)$

Novamente, colocamos $(?)$, pois é o que queremos descobrir.

Assim, $54 + (-27) + (-6) + (?) = 24$.

Da adição em $\mathbb{Z}$, sabemos que $54 + (-27) = 27$.

Também sabemos que $27 + (-6) = 21$.

Assim, temos que $21 + (?) = 24$.

Pela adição, sabemos que, $(?) = 3$.

Portanto, $(-3) \cdot (-1) = 3$.

Observaremos que esse argumento vale em geral, ou seja, um número negativo multiplicado por um número negativo é um número positivo.

Assim, temos que $(-) \cdot (-) = (+)$.

Podemos sempre reescrever a subtração como uma soma.

Exemplo de um número inteiro subtraindo um número positivo:

$(-7) - (5) = (-7) + (-1) \cdot (5) = (-7) + (-5) = -12$.

Exemplo de um número inteiro subtraindo um número negativo:

$(-7) - (-5) = (-7) + (-1) \cdot (-5) = (-7) + (5) = -2$.

Faremos uma aplicação. Usando as ferramentas que vimos, um cálculo como $393 \cdot 18$, pode ser feito mais rapidamente da seguinte forma:

$393 \cdot 18 = (400 - 7) \cdot (20 - 2) = 8000 - 800 - 140 + 14 = 7200 - 126 = 7074$.

Para essa aula, queremos fazer mais exemplos usando tudo o que vimos.

5.1.3 Terceira Aula

No primeiro momento, os alunos deverão fazer a seguinte lista de exercícios que será entregues a eles.

EXERCÍCIOS

1) Calcule as somas:

a) $327 + 48 =$

b) $174 + (-265) =$

c) $239 + (-68) =$

d) $(-31) + (-180) =$

e) $(-79) + 152 =$

2) Calcule os produtos:

a) $[20 + (-8)] \cdot 5 =$

b) $6 \cdot [40 + (-9)] =$

c) $[30 + (-3)] \cdot (-4) =$

d) $(-5) \cdot [200 + (-7)] =$

e) $[(-300) + 8] \cdot [70 + (-6)] =$

f) $[8 + (-60)] \cdot [100 + (-2)] =$

g) $[(-80) + 7] \cdot [(-1) + 90] =$

h) $(-72) \cdot 15 =$

i) $44 \cdot (-25) =$

j) $(-47) \cdot (-31) =$

k) $(-29) \cdot (-57) =$

3) Calcule as subtrações:

a) $743 - 82 =$

b) $(-694) - 35 =$

c) $98 - 336 =$

d) $(-110) - 71 =$

e) $(-93) - 221 =$

4) Problemas:

a) Um grupo de alunos pretende vender brigadeiros para custear sua formatura. O preço para comprar os ingredientes e fazer cada brigadeiro é de $R\$ \ 0,50$. Se venderem cada brigadeiro a $R\$ \ 2,00$, quanto obterão de lucro se venderem 200 brigadeiros?

b) Uma pessoa comprou um terreno com $38m$ de comprimento e $16m$ de largura. Ele vai construir uma casa usando $16m$ de comprimento e toda largura. A parte que sobrar do terreno será o pátio da casa. Quanto é a área do pátio da casa?

c) Calcule a área hachurada da figura abaixo:

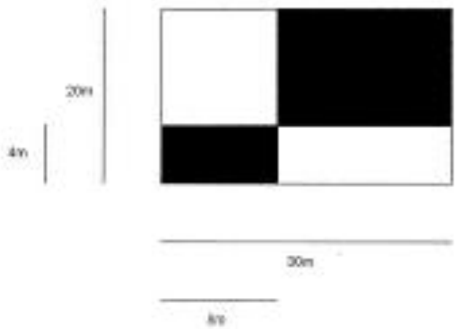

Figura 1 – Lista de Exercícios.

Na primeira parte do 2º período dessa aula, serão corrigidos os problemas com os alunos, e será dado o gabarito das demais questões. Depois disso, os alunos deverão fazer o seguinte teste.

TESTE

Calcule:

1) $(-456) + 93 =$

2) $461 - 572 =$

3) $[40 + (-3)] \cdot [(-5) + 50] =$

4) $(-86) \cdot 19 =$

Figura 2 – Teste.

5.2 RELATO DA PRÁTICA

As aulas práticas foram realizadas na Escola Estadual Anne Frank, que fica no bairro Bom Fim em Porto Alegre nos dias 6, 7, 9 e 13 de maio, durante o turno da manhã, com uma turma de 7º ano, sob a supervisão da professora de matemática, Miriam Lewgoy. Seriam apenas três dias de prática, mas devido a um problema na escola durante o dia 7, tivemos que estender a prática por mais um dia.

5.2.1 Primeira Aula

No primeiro dia de prática, que foi uma segunda-feira, estivemos com os alunos durante o 3º período, das $9{:}25$ às $10{:}15$. Nesse dia, compareceram 23 alunos. A professora me apresentou aos seus alunos, e explicou que eu era um aluno de faculdade, que estava ali pra executar um trabalho para concluir meu curso. Então eu me apresentei, dizendo meu nome e dizendo que sou aluno da UFRGS. Logo depois começamos a aula.

Começamos fazendo uma revisão sobre os números naturais, relembrando algumas propriedades importantes. Escrevemos no quadro a primeira propriedade que era associatividade e pedimos para que levantassem a mão, os alunos que nunca tinham ouvido falar dessa propriedade. Boa parte da turma levantou a mão. Então, prosseguimos falando sobre a associatividade através de exemplos no quadro.

Associatividade.

Na Adição: $8 + (3 + 2) = (8 + 3) + 2$.

Na Multiplicação: $8 \cdot (3 \cdot 2) = (8 \cdot 3) \cdot 2$.

Um dos alunos viu o exemplo da soma no quadro, e disse:

A[1]: “Essa conta é tão fácil que a fazemos direto.”

Respondemos que sempre fazemos dessa forma. Somamos dois números e do resultado, somamos com o terceiro. Como são números tão pequenos, fazemos tão automaticamente que nem percebemos isso.

Prosseguindo a aula, fomos para a segunda propriedade que era a comutatividade. Novamente, pedimos que levantassem a mão os alunos que nunca tinha ouvido falar dessa propriedade. Mais uma vez boa parte da turma levantou a mão. Então, prosseguimos de

[1] Legenda empregada: A: alunos.

maneira análoga a propriedade anterior, explicando a comutatividade através de exemplos no quadro.

Comutatividade.

Na Adição: $4 + 6 = 6 + 4$.

Na Multiplicação: $4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$.

Quando escrevemos o exemplo da soma, salientamos ainda mais a propriedade dizendo que os alunos conheciam isso como “a ordem das parcelas não altera a soma”. A professora, que acompanhou boa parte da aula, complementou com a multiplicação dizendo que “a ordem dos fatores não altera o produto”. Além disso, vimos que essa propriedade serve para facilitar o cálculo de um produto como $135 \cdot 42$. Então, perguntamos aos alunos se era mais fácil efetuar o cálculo com o 135 abaixo do 42, ou o contrário.

Os alunos responderam de forma unanime:

A: “O contrário, professor.”

Perguntamos o motivo de ser mais fácil fazer a conta com o 42 embaixo do 135. Eles até tentaram responder, mas ninguém teve uma resposta consistente. Então, mostramos o motivo de ser mais fácil calcular $135 \cdot 42$ com o 42 embaixo do 135. Observamos duas maneiras possíveis de fazer a conta:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{\times\ 135} \\ 210 \\ 1260 \\ \underline{+4200} \\ 5670 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} 135 \\ \underline{\times 42} \\ 270 \\ \underline{+5400} \\ 5670 \end{array}$$

Não chegamos a fazer a conta das duas maneiras no quadro, mas mostramos rapidamente aos alunos que quando fazemos $135 \cdot 42$ com o 135 embaixo, fazemos seis operações de multiplicação que são $5 \cdot 2$, $5 \cdot 4$, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 4$, $1 \cdot 2$ e $1 \cdot 4$ e duas somas, pois encontramos uma soma de três números que são 210, 1260 e 4200. Entretanto, quando colocamos o 42 abaixo do 135, continuamos tendo as mesmas seis multiplicações, mas apenas uma soma com os números 270 e 5400. Portanto, temos menos operações a fazer quando colocamos o número com menos algarismos como segundo fator, e é a propriedade comutativa que nos permite fazer das duas maneiras. Ainda mencionamos que talvez eles não percebessem tanta diferença no tempo de resolução de uma multiplicação de um número com três algarismos e um número de dois algarismos, mas se fizessem uma multiplicação como

$273158 \cdot 42$, em que temos um número com seis algarismos, eles notariam uma diferença bem maior no tempo que levariam para resolver.

Prosseguindo a aula, fomos para a propriedade da existência de elemento neutro.

Existência de Elemento Neutro.

Zero é o elemento neutro da Adição: $7 + 0 = 7$.

Um é o elemento neutro da Multiplicação: $7 \cdot 1 = 7$.

Não nos detivemos muito tempo nessa propriedade, e logo fomos para a próxima.

Diferentemente de como havíamos planejado, resolvemos mudar um pouco a ordem do que iríamos fazer neste momento. Antes de prosseguir com o conteúdo, solicitamos que algum aluno efetuasse o produto $67 \cdot 11$ no quadro. Apresentamos a seguir a solução do aluno.

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times \;\; 11 \\ \hline 67 \\ +67\,- \\ \hline 730 \end{array}$$

O aluno teve um pouco de dificuldade para efetuar o produto. Chamou-nos atenção o traço "–", colocado pelo aluno na execução do cálculo. Perguntamos para a turma qual a justificativa para esse traço. Nesse momento, a professora lembrou que a justificativa para colocarmos esse traço, é que a primeira parcela surge da multiplicação da unidade, e a segunda surge da multiplicação da dezena. Então, fomos para propriedade da distributividade.

Diferentemente do planejado, não usamos o exemplo $9 \cdot (5 + 1) = (9 \cdot 5) + (9 \cdot 1)$ e partimos direto para o produto que havíamos feito antes que era $67 \cdot 11$. Perguntamos se poderíamos escrever 11 como $1 + 10$. A turma, rapidamente, respondeu que sim. Perguntamos se $67 \cdot 11 = 67 \cdot (1 + 10)$. Novamente a turma concordou. Então, explicamos que por causa da propriedade distributiva $67 \cdot (1 + 10) = 67 \cdot 1 + 67 \cdot 10$.

Distributividade da Adição em relação à Multiplicação:

$67 \cdot (1 + 10) = 67 \cdot 1 + 67 \cdot 10$.

Perguntamos se os alunos lembravam a ordem das operações de uma expressão numérica e eles responderam corretamente, dizendo que primeiro fazemos a multiplicação, e depois a soma. Assim, $67 \cdot 11 = 67 \cdot (1 + 10) = 67 \cdot 1 + 67 \cdot 10 = 67 + 670 = 730$. Relembramos como um dos alunos havia resolvido essa mesma conta no quadro, e colocamos um zero no lugar do traço, pois o zero é o elemento neutro da soma. Segue abaixo a solução do produto $67 \cdot 11$:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times \;\; 11 \\ \hline 67 \\ +670 \\ \hline 737 \end{array}$$

Assim, mostramos que essa maneira de efetuar a multiplicação, nada mais é do que uma aplicação da propriedade distributiva, pois aquele traço colocado é de fato um zero, e surge do produto de $67 \cdot 10$.

Apresentamos um exemplo colaborativo. Solicitamos aos alunos dois números, com dois algarismos cada, para calcularmos o produto deles. Eles disseram 62 e 21. Então, calculamos o produto usando a propriedade distributiva:

$62 \cdot 21 = (60 + 2) \cdot (20 + 1) = 60 \cdot 20 + 60 \cdot 1 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 1 = 1200 + 60 + 40 + 2 =$
$= 1302.$

Utilizamos o algoritmo da multiplicação para efetuarmos o mesmo cálculo, para que os alunos percebessem que o resultado é o mesmo.

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times \;\;\; 21 \\ \hline 62 \\ +1240 \\ \hline 1302 \end{array}$$

Aproveitamos o tempo restante para falar sobre o que seria o início da nossa segunda aula. Escrevemos no quadro o conjunto dos números naturais, e o conjunto dos números inteiros, em que inserimos o oposto de cada número natural diferente de zero.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$.

A ideia agora era que as propriedades que antes valiam apenas para os números naturais, sejam válidas para todos os números inteiros. Para saber se a turma tinha conhecimento das regras de sinais da multiplicação, perguntamos qual é o sinal do resultado de um número negativo multiplicado por outro número negativo.

Eles responderam:

A: “Um número positivo, professor.”

Perguntamos se eles sabiam justificar isso. Unanimemente, a turma respondeu que não sabia. Então, dissemos que veríamos isso na próxima aula.

Por fim, fizemos um comentário sobre uma curiosidade da história da matemática. Perguntamos se eles sabiam de onde vinha o termo “negativo”. A maioria da turma respondeu que era por causa de os números serem menores do que zero, mas um aluno deu uma resposta diferente e muito interessante:

A: “Negativo tem a ver com negar o número.”

Então, dissemos que durante muito tempo esses números foram negados pelos matemáticos em relação a sua existência como números de fato, e que só no século XIX, eles conseguiram ter uma definição de como esses números funcionavam.

5.2.2 Segunda Aula

No segundo dia de prática, que foi uma terça-feira, a aula seria durante os dois últimos períodos da manhã, das $10:30$ às $12:10$, mas uma das professoras que teria aula para os nossos alunos antes da professora de matemática, ficou doente e não pode dar aula nesse dia. Esse fato fez com que a escola mudasse os períodos de matemática para o $2^{\text{º}}$ e $3^{\text{º}}$ períodos, das $8:35$ às $10:15$. A professora Miriam me ligou em meio a esses acontecimentos e permitiu que fizéssemos a prática a partir do momento em que eu chegasse à escola. Assim, estivemos com os alunos por cerca de meio período, que foi de $9:45$ até $10:15$. Nesse dia, compareceram 20 alunos.

Iniciamos com a adição, agora no conjunto dos números inteiros, através de exemplos. Comentamos rapidamente o caso em que temos uma soma de dois números positivos, pois é uma soma de números naturais, e isso eles já sabiam resolver.

Exemplo: $4 + 6 = 10$

Passamos para o caso em que temos uma soma de um número positivo e um negativo. Para que os alunos entendessem essa operação mais naturalmente, usamos a ideia de ganho e dívida, onde um número positivo representa um ganho e o negativo uma dívida.

Exemplo 1: $4 + (-6) = -2$

Exemplo 2: $(-4) + 6 = 2$

O primeiro exemplo tinha o objetivo de mostrar o que acontece quando se tem mais dívida do que ganho e o segundo exemplo, o que acontece quando se tem mais ganho do que dívida. Perguntamos aos alunos como resolver esses exemplos. A turma respondeu:

A: “Subtrai o “número” maior pelo menor e mantém o sinal do maior.”

É interessante perceber que aqui, os alunos não têm o conceito claro de número, pois eles estão desassociando o valor absoluto do número de seu respectivo sinal e atribuindo um sentido apenas de grandeza ao número. É natural que isso aconteça, dado o fato de que durante toda vida, os alunos trabalharam apenas com números positivos. Além disso, o conceito de número foi o que fez matemáticos, durante muitos anos, divergirem sobre a utilização desses números, como já foi visto na parte histórica desse trabalho.

Neste ponto, apenas mencionamos que eles usavam o valor absoluto do número. Preferimos não nos deter muito nesse assunto para não confundi-los, até mesmo por conta do tempo que tínhamos para essa prática, que não permite que nos detenhamos em cada detalhe que aparecer, embora isso nos mostre que para prática em sala de aula, pode ser interessante trabalhar de forma mais aprofundada a diferença entre um número e seu valor absoluto, antes de trabalhar as operações envolvendo números negativos.

Prosseguimos para o caso em que temos uma soma de dois números negativos. Falamos que uma dívida somada com outra dívida gerava uma dívida maior.

Exemplo: $(-4) + (-6) = -10$

Novamente, os alunos disseram que somavam os “números” e deixavam o sinal de menos. Neste momento, também ressaltamos, junto com a professora, a importância dos alunos não confundirem soma de números negativos com produto de números negativos.

Iniciamos a multiplicação em $\mathbb{Z}$ com o objetivo de justificar as regras de sinais da multiplicação. Colocamos a primeira pergunta importante sobre as regras de sinais.

Porque um número positivo multiplicado por um número negativo resulta em um número negativo?

Para responder a essa pergunta, calculamos $(-3) \cdot 8$, usando as propriedades estudadas. Executamos cada passo junto com os alunos.

Sabemos que $3 \cdot 8 = 24$.

Da adição em $\mathbb{Z}$, sabemos que $3 = (6 + (-3))$.

Assim, $(6 + (-3)) \cdot 8 = 24$.

Usando a distributividade, $(6 \cdot 8) + ((-3) \cdot 8) = 24$.

Sabemos que $6 \cdot 8 = 48$.

Escrevemos $\left(-3\right) \cdot 8 = (?)$.

Colocamos $(?)$, pois é o que queremos descobrir.

Assim, temos que $48 + (?) = 24$.

Então, perguntamos aos alunos que valor deve aparecer no lugar de $(?)$.

Alguns alunos responderam rapidamente:

A: “É o “-24”, professor.”

Uma reflexão importante é que os alunos ainda não tiveram o conteúdo de álgebra, mas mesmo assim não tiveram dificuldade em afirmar e acertar aquele que seria o “x” da questão.

Portanto, $(-3) \cdot 8 = -24$.

Usando a comutatividade da multiplicação, $8 \cdot (-3) = -24$.

Observamos que esse argumento valia em geral, ou seja, um número positivo multiplicado por um número negativo resulta em um número negativo.

Assim, temos que $(+) \cdot (-) = (-)$ e pela comutatividade, $(-) \cdot (+) = (-)$.

Por fim, ressaltamos o fato de que tudo isso acontecia a fim de preservar aquelas propriedades que vimos na primeira aula.

Ao final da aula, perguntamos à professora se ela poderia ceder o período de segunda-feira para o término da prática, e ela gentilmente cedeu.

5.2.3 Terceira Aula

No terceiro dia de prática, que foi uma quinta-feira, estivemos com os alunos durante o $4^{\underline{o}}$ e o $5^{\underline{o}}$ período, das $10:30$ às $12:10$. Nesse dia, compareceram 22 alunos. Prosseguimos falando sobre uma justificativa das regras de sinais da multiplicação. Colocamos a segunda pergunta importante sobre as regras de sinais.

Porque um número negativo multiplicado por um número negativo resulta em um número positivo?

Para responder a essa pergunta, calculamos $(-3) \cdot (-1)$, usando as propriedades estudadas. Novamente, executamos cada passo junto com os alunos.

Sabemos que $3 \cdot 8 = 24$.

Da adição em $\mathbb{Z}$, sabemos que $3 = (6 + (-3))$.

Também sabemos que $8 = (9 + (-1))$.

Assim, $(6 + (-3)) \cdot (9 + (-1)) = 24$.

Usando a distributividade, $(6 \cdot 9) + ((-3) \cdot 9) + (6 \cdot (-1)) + ((-3) \cdot (-1)) = 24$.

Sabemos que $6 \cdot 9 = 54$.

Agora, também sabemos que $(-3) \cdot 9 = -27$.

Também sabemos que $6 \cdot (-1) = -6$.

Escrevemos $(-3) \cdot (-1) = (?)$.

Novamente, colocamos $(?)$, pois é o que queremos descobrir.

Assim, $54 + (-27) + (-6) + (?) = 24$.

Da adição em $\mathbb{Z}$, sabemos que $54 + (-27) = 27$.

Também sabemos que $27 + (-6) = 21$.

Assim, temos que $21 + (?) = 24$.

Então, perguntamos aos alunos que valor somado com 21 dava 24.

Alguns alunos responderam rapidamente:

A: "É o "3", professor."

Logo, $(?) = 3$.

Portanto, $(-3) \cdot (-1) = 3$.

Observamos que esse argumento valia em geral, ou seja, um número negativo multiplicado por um número negativo resulta um número positivo.

Assim, temos que $(-) \cdot (-) = (+)$.

Novamente, ressaltamos o fato de que tudo isso acontecia a fim de preservar aquelas propriedades que vimos na primeira aula. Então, fomos para subtração em $\mathbb{Z}$.

Como já conhecemos a adição em $\mathbb{Z}$, a ideia é sempre reescrevermos a subtração como uma soma.

Exemplo de um número inteiro subtraindo um número positivo:

$(-7) - (5) = (-7) + (-1) \cdot (5) = (-7) + (-5) = -12$.

Os alunos tiveram dificuldade para entender aquele (-1). Eles sabiam a regra de trocar o sinal do número de dentro dos parênteses, mas não estavam entendendo aquele (-1), então, por conta do pouco tempo, e para não confundi-los, preferimos deixá-los apenas com a regra. Então, fomos para o segundo exemplo.

Exemplo de um número inteiro subtraindo um número negativo:

$(-7) - (-5) = (-7) + (-1) \cdot (-5) = (-7) + (5) = -2$.

Neste ponto, procuramos enfatizar mais a questão do (-1), visto que nós tínhamos um $-(-5)$ e parece que a regra $(-) \cdot (-) = (+)$ chama mais a atenção dos alunos, visto que essa regra parece ser a menos natural para eles. Talvez, fosse melhor trabalhar separadamente essa questão específica do (-1), antes de ensinar a subtração em $\mathbb{Z}$, ou trabalhar a ideia de oposto do número, sem mencionar o (-1).

Prosseguimos para uma aplicação da propriedade distributiva, depois que já havíamos visto a adição, a multiplicação e a subtração em $\mathbb{Z}$. Resolvemos o exemplo $393 \cdot 18$, passo a passo com a turma, e usando a distributividade:

$393 \cdot 18 = (400 - 7) \cdot (20 - 2) = 8000 - 800 - 140 + 14 = 7200 - 126 = 7074.$

Fizemos o mesmo exemplo, usando o algoritmo da multiplicação.

$$\begin{array}{r} 393 \\ \times \quad 18 \\ \hline 3144 \\ +3930 \\ \hline 7074 \end{array}$$

Por fim, entregamos a lista de exercícios que havíamos planejado para os alunos fazerem durante a aula, e depois levarem para terminar em casa. Em aula eles tiveram um pouco mais de 1 período para fazer, e enquanto eles resolviam os exercícios, passávamos de mesa em mesa para auxiliá-los. A professora também auxiliou alguns alunos a resolverem os exercícios. Duas dificuldades ficaram evidentes; nas somas, muitos faziam o cálculo certo, mas na hora de colocar a resposta, acabavam esquecendo o sinal de menos, outros, aplicavam a regra $(-) \cdot (-) = (+)$ que é da multiplicação para soma.

5.2.4 Quarta Aula

O quarto e último dia de prática, foi em uma segunda-feira, no o 3º período, das $9:25$ até as $10:15$ e compareceram 22 alunos. Corrigimos, no quadro, os problemas da lista de exercícios da aula anterior, e por fim aplicamos o teste planejado.

O primeiro problema dizia o seguinte:

a) Um grupo de alunos pretende vender brigadeiros para custear sua formatura. O preço para comprar os ingredientes e fazer cada brigadeiro é de $R\$\ 0{,}50$. Se venderem cada brigadeiro a $R\$\ 2{,}00$, quanto obterão de lucro se venderem 200 brigadeiros?

Figura 3 – Item a do exercício 4 referente a lista de exercícios.

Para iniciar a correção, lemos o problema, e perguntamos que resposta tinham encontrado. A maioria respondeu $R\$\ 400{,}00$, e uma menina, sentada bem na frente, respondeu $R\$\ 300{,}00$. Perguntamos aos que responderam $R\$\ 400{,}00$ a justificativa dessa resposta, e eles responderam que fizeram o produto $2 \cdot 200$. Perguntamos para a menina que respondeu $R\$ \, 300{,}00$ a justificativa da resposta dela, e ela explicou, corretamente, que era necessário subtrair o valor que foi vendido, pelo valor que foi gasto para fazer os brigadeiros.

O segundo problema dizia o seguinte:

b) Uma pessoa comprou um terreno com $38m$ de comprimento e $16m$ de largura. Ele vai construir uma casa usando $16m$ de comprimento e toda largura. A parte que sobrar do terreno será o pátio da casa. Quanto é a área do pátio da casa?

Figura 4 – Item b do exercício 4 referente a lista de exercícios.

A maioria da turma disse que não sabia como calcular a área. Resolvemos o exercício passo a passo, junto com os alunos. Primeiramente desenhamos a figura correspondente ao problema no quadro. Então, calculamos $38 - 16 = 22$ para determinar o comprimento do pátio. Depois, calculamos $22 \cdot 16 = 352$ para determinar a área do pátio.

O terceiro problema dizia o seguinte:

c) Calcule a área hachurada da figura abaixo:

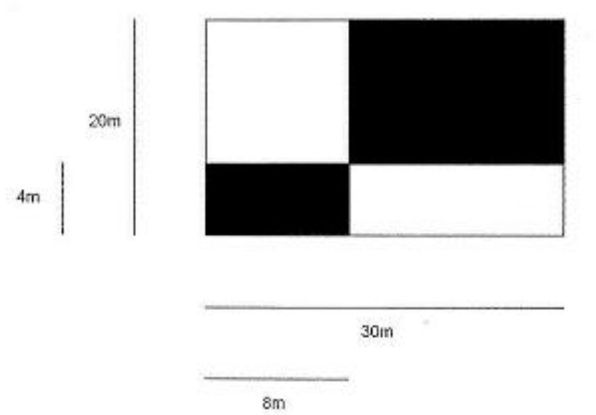

Figura 5 – Item c do exercício 4 referente a lista de exercícios.

Esse problema, um dos alunos já havia resolvido e mostrado na aula anterior (diferentemente do resto da turma, esse aluno sabia calcular a área de um retângulo). Então, desenhamos a figura no quadro, e solicitamos que o aluno explicasse sua solução.

A: “Primeiro, eu fiz $4 \cdot 8 = 32$ para calcular a área menor. Depois, eu subtraí 4 de 20 que deu 16 e subtraí 8 de 30 que deu 22. Depois calculei $16 \cdot 22 = 352$. Então, somei $32 + 352$ e cheguei em 384.”

Complementamos salientando a unidade de medida.

Por fim, colocamos o gabarito dos outros exercícios no quadro, e entregamos o teste para que os alunos resolvessem em 25 minutos.

5.3 ANÁLISE DOS TESTES

Nesta seção, apresentamos uma análise dos testes realisados pelos alunos, uma tabela de acertos, bem como uma análise de alguns tipos de erros apresentados. O teste tinha 4 questões, uma de adição, uma de subtração e duas de multiplicação de números inteiros, sendo que gostaríamos que os alunos resolvessem a questão 3, usando a propriedade distributiva. Todos os 22 alunos que compareceram à aula nesse dia, fizeram o teste.

O resultado do teste foi o seguinte: 7 alunos acertaram plenamente três questões, 9 alunos acertaram plenamente duas questões, 2 alunos acertaram plenamente uma questão e 4 alunos não acertaram plenamente nenhuma questão. Alguns erraram apenas um sinal, mas ninguém acertou todas as questões. Esses dados mostram que de fato, os alunos têm dificuldades em operar com os números negativos, e usar as regras de sinais. Segue a tabela de acertos e erros de cada aluno em cada questão.

Tabela 1 – Número de Acertos nas Questões

Alunos	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Nº de acertos
Aluno 1	√	×	√	×	2
Aluno 2	×	√	×	×	1
Aluno 3	√	√	×	√	3
Aluno 4	√	√	√	×	3
Aluno 5	√	√	×	×	2
Aluno 6	√	√	×	√	3
Aluno 7	√	√	×	×	2
Aluno 8	√	×	√	×	2
Aluno 9	√	√	×	√	3
Aluno 10	√	√	×	√	3
Aluno 11	√	√	×	√	3
Aluno 12	√	√	×	×	2
Aluno 13	√	√	×	×	2
Aluno 14	×	√	√	×	2
Aluno 15	×	√	×	√	2
Aluno 16	×	√	×	×	1
Aluno 17	√	√	×	×	2
Aluno 18	×	×	×	×	0
Aluno 19	×	×	×	×	0
Aluno 20	×	×	×	×	0
Aluno 21	×	×	×	×	0
Aluno 22	√	√	√	×	3
Nº de acertos	14	16	5	6	

Análise da questão 1:

$$1) \quad (-456) + 93 =$$

Figura 6 – Questão 1.

Essa questão era bastante simples. Os alunos deveriam subtrair o valor absoluto dos números, pois têm sinais diferentes, e depois colocar o sinal do número com maior valor absoluto na resposta final. Na figura 7, segue a solução correta dada pelo Aluno 1.

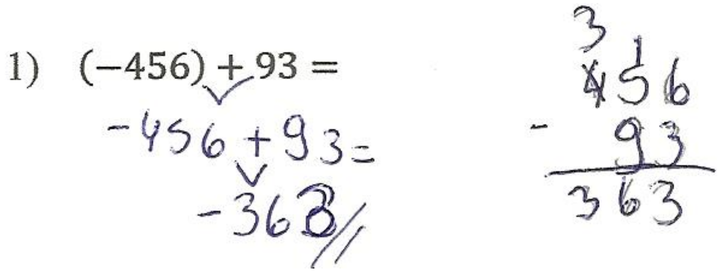

Figura 7 – Solução do Aluno 1 referente a questão 1.

Essa questão foi respondida corretamente por 14 alunos, 3 alunos erraram apenas o sinal do número na resposta final, 4 alunos erraram algum detalhe na subtração e 1 único aluno somou os valores absolutos dos números ao invés de subtraí-los. Os alunos erraram algum detalhe na subtração, possivelmente, devido a uma falta de atenção na hora da execução do cálculo; o mesmo pode ter ocorrido com os alunos que trocaram o sinal da resposta final, visto que alguns deles "esqueceram" o sinal de menos em todas as respostas que resultavam em números negativos. Até o início deste ano, os alunos só trabalhavam com números naturais, então não era necessário colocar sinal nos números. Além disso, talvez alguns alunos ainda não estejam adaptados a isso. O aluno que somou os valores absolutos dos números, possivelmente pensou que como era uma soma, ele deveria "somar" de algum modo. Na figura 8, segue a solução do Aluno 2, que somou os valores absolutos dos números, ao invés de subtraí-los.

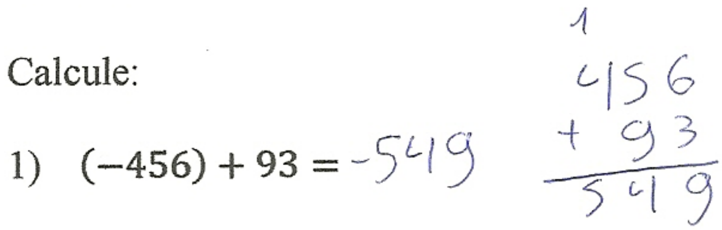

Figura 8 – Solução do Aluno 2 referente a questão 1.

Análise da questão 2:

2) $461 - 572 =$

Figura 9 – Questão 2.

Essa questão era semelhante a questão 1, e também bastante simples. A subtração poderia ser escrita como uma soma de números inteiros e assim o método de resolução seria idêntico a questão 1. Na figura 10, segue a solução correta dada pelo Aluno 3.

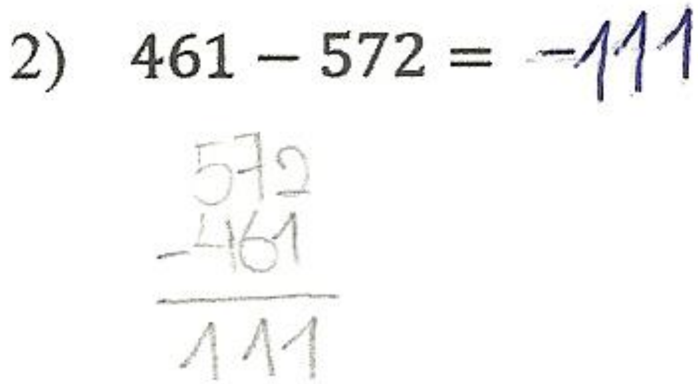

Figura 10 – Solução do Aluno 3 referente a questão 2.

Essa questão, foi respondida corretamente por 16 alunos, e incorretamente por 6 alunos, que erraram apenas o sinal da resposta final. Não há muitas análises a fazer sobre essa questão, a não ser, constatar o fato de que alguns alunos tiveram falta de atenção, e esqueceram o sinal de menos da resposta final, da mesma forma que na questão 1. Cabe dizer que alguns dos alunos que erraram o sinal do resultado da questão 1, acertaram na questão 2 e vice versa. Esse fato ressalta a falta de atenção dos alunos na resolução das questões. Nessa questão, talvez tivesse sido mais interessante colocar um número negativo subtraindo o 572, para ver se os alunos não confundiriam as regras de sinais da adição com as da multiplicação. Na figura 11, segue a solução do Aluno 1, que esqueceu do sinal de menos na resposta final.

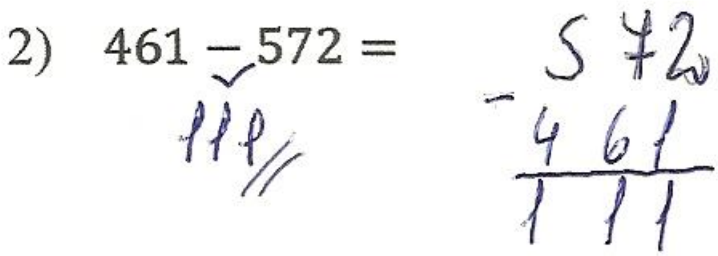

Figura 11 – Solução do Aluno 1 referente a questão 2.

Análise da questão 3:

$$3)\quad [40+(-3)]\cdot[(-5)+50]=$$

Figura 12 – Questão 3.

Essa questão era a mais difícil do teste. Havia pelo menos duas maneiras possíveis para resolvê-la. Uma maneira era calcular as somas dos números entre colchetes, e calcular o produto desses números resultantes das somas. Outra maneira era, usando a propriedade distributiva, multiplicar os números e depois somar os resultados, mas ninguém tentou fazer dessa forma. Na figura 13, segue a solução correta dada pelo Aluno 4.

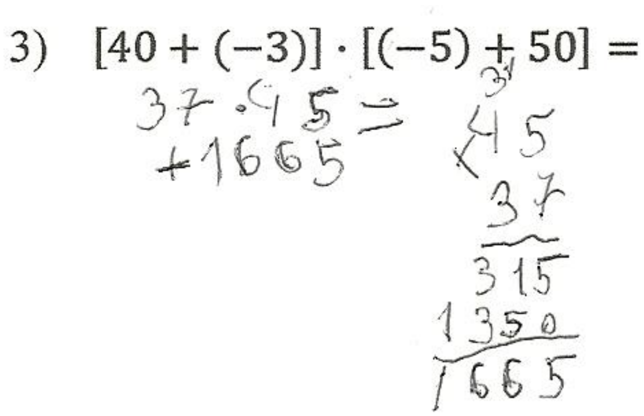

Figura 13 – Solução do Aluno 4 referente a questão 3.

Escolhemos essa solução para mostrar, pois ela apresenta o 0 de 1350, mostrando que esse aluno entendeu o que foi discutido em aula sobre o algoritmo da multiplicação. Outros alunos também mostraram o 0 nos seus cálculos.

Essa questão, foi respondida corretamente por 5 alunos. O fato de ser a questão em que houve o menor número de acertos ressalta o ponto de ser a questão mais difícil do teste. É uma tarefa difícil padronizar os alunos que responderam essa questão incorretamente, pois foram diversos tipos de erro. Essa era a única questão em que a resposta era um número positivo, e os alunos praticamente não erraram o sinal na resposta final. Portanto, esse fato mostra um possível esquecimento do sinal pelos alunos nas respostas anteriores. Embora não tenhamos erros de sinal nas respostas finais, temos erros de sinal nas somas, e dessa vez não foi por esquecimento, pois as somas resultavam em números positivos. Isso pode refletir uma dificuldade no entendimento das regras de sinais, pois é o produto de um número negativo por um positivo que resulta em um negativo, e não, necessariamente, a soma deles. Então, possivelmente alguns alunos aplicaram uma regra de sinal da multiplicação, na soma. Outros, calcularam as somas erradas, mas sem errar o sinal. Outros calcularam as somas, mas se confundiram em como prosseguir na expressão numérica. As demais respostas incorretas ocorreram no algoritmo da multiplicação, em que aparecem erros de tabuada. Na figura 14, segue a solução do Aluno 5, que embora tenha encontrado a resposta correta, calculou erroneamente as somas, talvez aplicando as regras de sinais da multiplicação, à soma.

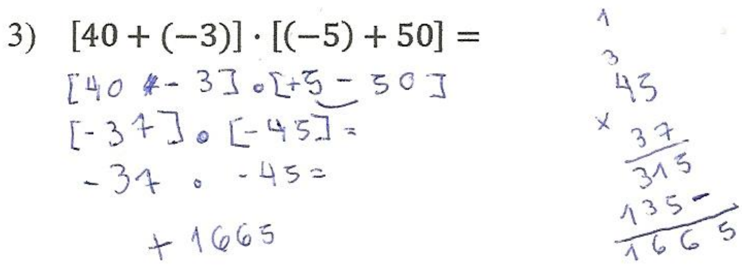

Figura 14 – Solução do Aluno 5 referente a questão 3.

Análise da questão 4:

$$4)\quad (-86)\cdot 19 =$$

Figura 15 – Questão 4.

Nessa questão, os alunos deveriam multiplicar o valor absoluto dos números, e depois colocar o sinal de menos na resposta final, de acordo com as regras de sinais da multiplicação. Na figura 16, segue a solução correta dada pelo Aluno 4.

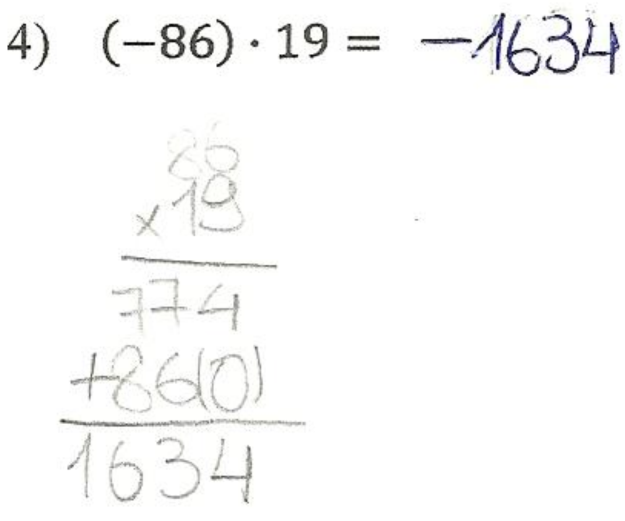

Figura 16 – Solução do Aluno 3 referente a questão 4.

Nessa questão, esse aluno também colocou o 0 de 860, mostrando que entendeu o que foi discutido em aula sobre o algoritmo da multiplicação. Outros alunos também mostraram esse 0 nos seus cálculos.

Essa questão, foi respondida corretamente por 6 alunos, 9 alunos erraram apenas o sinal do número na resposta final e os outros alunos cometeram erros de cálculo no algoritmo da multiplicação. Dessa vez, mais alunos cometeram erros de sinal, o que pode indicar ou um desconhecimento da regra de sinais da multiplicação, ou uma falta de atenção maior por conta de ser a última questão do teste. Os erros na execução da multiplicação possivelmente são pelos mesmos problemas já relatados na análise da questão 3. Na figura 17, segue a solução do Aluno 1, que esqueceu, ou não sabia qual era o sinal correspondente a resposta final da conta.

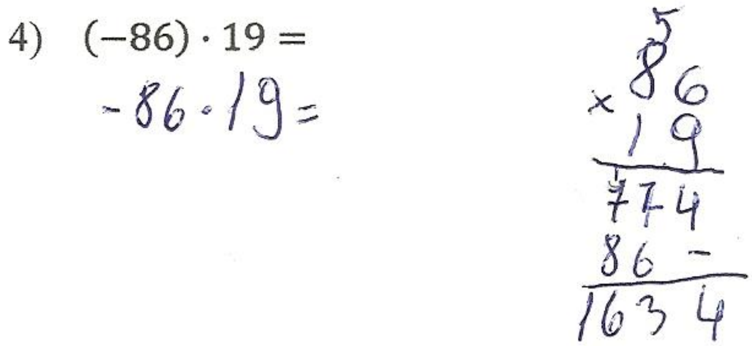

Figura 17 – Solução do Aluno 1 referente a questão 4.

Ainda não é possível concluir que tipos de dificuldades que podem surgir no aprendizado desse conteúdo, pois esses alunos ainda não tiveram o conteúdo de álgebra. Quando a álgebra for ensinada, eles serão obrigados a lidar com a propriedade distributiva, pois nem sempre conseguirão resolver os problemas da mesma forma que resolvem expressões numéricas, isto é, resolvendo primeiro o que aparece entre parênteses, depois fazendo multiplicações e divisões e por fim a adições e subtrações.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através deste trabalho, foi possível atingir os objetivos traçados, que eram os seguintes: aprofundar o estudo das regras de sinais dos números inteiros, tendo em vista o ensino deste conteúdo; levantar e analisar possíveis dificuldades que os alunos tenham em aprender este conteúdo; melhorar nossa prática em sala de aula no ensino deste conteúdo.

Aprofundamos o estudo das regras de sinais dos números inteiros, principalmente mergulhando na história dos números negativos, e entendendo muitas das controvérsias que esses números trouxeram aos grandes matemáticos até o século XIX. A construção lógico-formal também foi importante para entender passo a passo como o conjunto dos números inteiros foi formalizado. A revisão bibliográfica também teve papel importante nesse estudo mostrando possíveis práticas de ensino dos números negativos.

Através desse aprofundamento, entendemos que, de fato, as regras de sinais são uma convenção adotada pelos matemáticos, a fim de preservar as propriedades básicas de comutatividade, associatividade, elemento neutro e distributividade dos números naturais, nos números inteiros. E como essas regras de sinais são uma convenção, é difícil encontrar exemplos satisfatórios que contextualizem todas as operações com números negativos, e assim, ensinar esse conteúdo buscando esses tipos de situações. Dos exemplos citados na revisão bibliográfica, lembramos Megid (2010), que fez atividades lúdicas para contextualizar os números negativos, exceto para ensinar as regras de sinais da multiplicação e divisão, e Meister (2009), que fez uso de cartas para representar os números inteiros, atividade esta que de todas as práticas lúdicas vistas, nos pareceu ser a única a abordar satisfatoriamente as quatro operações fundamentais com números negativos. Além disso, percebemos que o conceito matemático de número, não é mais associado à ideia de grandeza, pois foi essa ideia que fez matemáticos rejeitarem os números negativos durante a história.

Levantamos e analisamos dificuldades dos alunos em relação aos números negativos, principalmente, através da prática realizada, nas resoluções dos exercícios e dos testes, onde pudemos perceber os tipos de erros que são cometidos pelos alunos. Também, durante as aulas expositivas, onde pudemos perceber dificuldades através das falas dos alunos. Na revisão bibliográfica, também analisamos práticas de outros professores, que nos auxiliaram a perceber algumas dificuldades dos alunos. Além disso, constatamos que algumas das dificuldades dos alunos, foram as dificuldades dos próprios matemáticos durante a história da matemática, no processo de constituição dos números negativos.

As dificuldades que foram levantadas e analisadas ao longo do trabalho foram: associar ao conceito de número, a ideia de grandeza; usar regras de sinais da adição na multiplicação e vice versa; dificuldade em entender que $-x = (-1)x$; “esquecimento” do sinal.

Através do entendimento correto de como é constituído o conjunto dos números inteiros, da prática realizada com alunos de 7º ano, e do parecer descritivo feito pela professora dos alunos, constatamos que esse tipo de prática pode atrair a atenção dos alunos, e que é possível de ser realizada até mesmo para alunos a quem essas operações ainda estão sendo introduzidas. Além disso, essa prática pode ser realizada nos anos finais do Ensino Fundamental e até mesmo no Ensino Médio, sem que seja algo repetitivo, visto que muitas vezes até no 3º ano do Ensino Médio, temos alunos com dificuldades nesse conteúdo e também que não é algo tão complicado que não possa ser entendido por eles. Sem contar o fato de que a partir do 8º ano, essa prática poderia ser realizada junto com o conteúdo de álgebra, o que a deixaria mais interessante ainda.

A favor dessa prática, também temos o fato de que muitos conteúdos são compreendidos de melhor forma, após um aprofundamento maior. Na geometria, por exemplo, as fórmulas fazem mais sentido depois que vemos de onde elas saem. Obviamente, não é o propósito demonstrar tudo da matemática nos ensinos fundamental e médio e nem há tempo hábil para isso, mas alguns conteúdos poderiam ser mais aprofundados com suas justificativas. Talvez seja este o caso dos números negativos, em que muitas lacunas são deixadas nos alunos.

Por fim, a realização deste trabalho contribuiu para responder alguns dos nossos importantes questionamentos sobre o ensino dos números negativos, agregando conhecimentos tanto de matemática, como de docência para o desafio que é a tarefa de ensinar este conteúdo. Assim, temos constituída uma melhora na nossa prática para ensinar esse conteúdo, com uma perspectiva de melhorar cada vez mais no futuro como docente.

REFERÊNCIAS

ANJOS, Marta Figueiredo dos. **A Difícil Aceitação dos Números Negativos: Um Estudo da Teoria de Números de Peter Barlow (1776-1862).** Natal: UFRN, 2008. 96 p. Dissertação de Mestrado em Ciências Naturais e Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética.** São Paulo: Atual, 1991.

GONZALEZ, J. L. **Numeros Enteros.** Madrid: Sintesis, 1990.

MARTINI, Grasiela. **Estratégias de Trabalho para a Aprendizagem de Operações com Números Inteiros.** Porto Alegre: UFRGS, 2010. Trabalho de Conclusão de Graduação de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide. Números Negativos: uma história de incertezas. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 7, n. 8, p. 49-59, 1992.

MEGID, Maria Auxiliadora B. A. Construindo matemática na sala de aula: uma experiência com os números relativos. In: FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela (Orgs.). **Por Trás da Porta, que Matemática Acontece?** Campinas, SP: Ílion, 2001. P. 159-204.

MEISTER, Julio C. **Estudando Dificuldades na Compreensão de Números Inteiros.** Porto Alegre: UFRGS, 2009. Trabalho de Conclusão de Graduação de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

SCHUBRING, Gert. Um outro caso de obstáculos epistemológicos: o princípio de permanência. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 20, n. 28, p. 1-20, 2007.

ANEXO

PARECER DA PROFESSORA MIRIAM LEWGOY SOBRE A PRÁTICA

O estagiário Jean teve uma ótima relação com a turma podendo realizar a sua prática, aplicando as justificativas da multiplicação, da adição e subtração dos inteiros, de forma clara e segura, vindo ao encontro do estudo até então trabalhado anteriormente pela titular da turma, que já tinha conhecimento das justificativas apontadas pelo estagiário. Os alunos colaboraram de forma participativa aproveitando para esclarecer suas dúvidas frente ao conteúdo estudado.

Miriam A. Lewgoy

12/05/13

Miriam A. Lewgoy