

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FERNANDA DE ABREU LIMA

ANÁLISE COMBINATÓRIA, RACIOCÍNIO LÓGICO E A  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

PORTO ALEGRE

2013

FERNANDA DE ABREU LIMA

ANÁLISE COMBINATÓRIA, RACIOCÍNIO LÓGICO E A RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para a obtenção de título de Licenciando em Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Banca Examinadora:

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana  
Instituto de Matemática – UFRGS

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso  
Instituto de Matemática - UFRGS

---

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke  
Instituto de Matemática - UFRGS

PORTO ALEGRE

2013

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente à minha família, meus pais Artur Lima e Regina Carvalho e a minha irmã Claudia Carvalho. Pessoas muito importantes que estiveram sempre ao meu lado. Sem vocês esse momento não estaria acontecendo.

Agradeço também a todos os amigos que se fizeram presentes nessa caminhada. Ao Ricardo Longaray, que esteve comigo durante essa etapa. Ao amigo historiador Rodrigo de Oliveira que me incentivou a buscar meu lugar na UFRGS. A todos os amigos e colegas, em especial para aqueles que mais me aturaram durante esses cinco anos de matemática: Gilberto Santos, Luciane Führ, Luciana Lima e Miuri Pestano. Sem vocês não teria graça!

Aos professores, responsáveis por muito do que aprendi nesse período. À minha orientadora, Professora Marilaine, aos Professores que compõem a banca, Professor Marcus e Professor Eduardo. Agradeço também ao Professor Chico e a Professora Elisabete Búrigo. Sem vocês também não teria graça!

Obrigada a todos que contribuíram para que este momento chegasse.

## RESUMO

Ao considerarmos a importância do raciocínio combinatório para a evolução do pensamento formal do aluno, buscamos uma teoria que permitisse ao aluno maiores possibilidades de desenvolver este raciocínio.

Deste modo nos identificamos com o método de ensino através da resolução de problemas proposto por George Pólya (1995) e então planejamos uma prática de ensino focada no desenvolvimento do raciocínio combinatório a partir de problemas extraídos dos bancos de questões e de provas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas, cuja exigência em termos de conteúdo fosse a utilização do princípio fundamental da contagem.

Neste trabalho buscamos justificar a importância dada ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, relacionando prática e teoria, a partir da análise dos dados advindos da prática, buscando compreender a maneira como o aluno interage com a resolução de problemas e verificando as possíveis evoluções apresentadas através da prática.

Palavras Chaves: Análise combinatória, raciocínio combinatório, raciocínio lógico, resolução de problemas.

## **ABSTRACT**

As we consider the importance of logical thinking to the evolution of formal thought the student, we seek a theory that allows the student more likely to develop this reasoning.

Thus we identify with the method of teaching through problem solving proposed by George Polya (1995) and then plan teaching practice focused on the development of logical thinking from problems extracted from the banks of issues and evidence for the Olympics Brazilian mathematics Public Schools, whose demand in terms of content were using the fundamental principle of counting.

In this work we justify the importance given to the development of logical thinking, linking theory and practice, from the analysis of data coming from practice, trying to understand how the student interacts with the troubleshooting and checking the possible evolutions presented through practice.

Key words: combinatorial analysis, combinatorial thinking, logical thinking, problem solving.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Resolução do problema 1 – Lista 1 Fonte: Material do Grupo 2 .....	27
Figura 2: Resolução do problema 1 – Lista 1 Fonte: Material do Grupo 3.....	28
Figura 3: Resolução do problema 1 – Lista 1 Fonte: Material do Grupo 4 .....	29
Figura 4: Resolução do problema 2 – Lista 1 Fonte: Material do Grupo 5 .....	29
Figura 5: Resolução do Problema 2 – Lista 1 Fonte: Material do Grupo 3 .....	30
Figura 6: Resolução do problema 3 – item b – Lista 1 Fonte: Material do Grupo 2.....	31
Figura 7: Resolução do problema 3 – item b – Lista 1 Fonte: Material do Grupo 1 .....	32
Figura 8: Resolução do problema da ficha 6 – item a Fonte: Material do Grupo 1 .....	34
Figura 9: Resolução do problema da ficha 6 – item b Fonte: Material do Grupo 1 .....	35
Figura 10: Resolução do problema da ficha 6 – item c Fonte: Material do Grupo 1 .....	35
Figura 11: Resolução do problema 1 – Lista 2 Fonte: Material do Aluno A1 .....	36
Figura 12: Resolução do problema 1 – Lista 2 Fonte: Material do Grupo 6.....	36

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	8
REFERENCIAL TEORICO.....	10
RACIOCINIO COMBINATÓRIO.....	10
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO DA MATEMÁTICA.....	12
O MÉTODO POR RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	14
METODOLOGIA.....	19
PRÁTICA DE ENSINO.....	20
ANÁLISE DO MATERIAL.....	27
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	37
BIBLIOGRAFIA.....	40
APÊNDICE A – Composição dos Grupos.....	42
APÊNDICE B – Lista de exercícios 1.....	43
APÊNDICE C – Material Auxiliar.....	44
APÊNDICE D – Fichas.....	45
APÊNDICE E – Lista de exercícios 2.....	50
APÊNDICE F – Questionário.....	51
ANEXO: AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA.....	52

## INTRODUÇÃO

Nossa pesquisa trata do ensino da análise combinatória a partir da resolução de problemas. O ensino da matemática muitas vezes é visto como ensino de algoritmos e cálculos, os quais geram uma sequência de passos a serem memorizados e aplicados de modo mecânico.

O ensino da combinatória no ensino médio pode ter um papel muito importante para o desenvolvimento intelectual do aluno, pois, ao trabalharmos em aula questões que envolvam raciocínio combinatório, estaremos contribuindo para o desenvolvimento de uma habilidade fundamental para a evolução de seu pensamento. Deste modo, é preciso que tenhamos um método diferente daquele que visa o ensinamento de algoritmos, o qual apresenta uma grande limitação para o ensino deste conteúdo.

Escolhemos desenvolver esta pesquisa através da resolução de problemas, pois compreendemos que este método de ensino, na área da combinatória, visa o desenvolvimento de tarefas que permitam ao aluno aprender a analisar uma situação, considerando todos os dados e informações, ampliando sua capacidade de compreensão quanto ao problema e quanto aos métodos de contagem utilizados, tornando o aluno capaz de incluir as adaptações que forem necessárias no procedimento.

A importância de permitir ao aluno que ele próprio construa seu conhecimento, compreendendo o que está fazendo e o motivo pelo qual está agindo, de tal maneira é explorada nas disciplinas de Laboratório e de Estágio em nosso curso, mas para mim, ficou evidente quando cursei a disciplina de Análise Combinatória I<sup>1</sup>. Nesse semestre tive a oportunidade de desconstruir conceitos mal formulados anteriormente para compreender o verdadeiro processo de contagem implícito nas fórmulas até então conhecidas, ou seja, enquanto aluna, passei pela experiência de compreender uma disciplina, a qual não atribuía mínimo significado. Até aquele momento não percebia o real significado das famosas fórmulas de combinatória.

A partir desta reflexão, observei que, na maioria das escolas em que realizei práticas de ensino ou outras atividades que me permitissem vivenciar a prática escolar, o ensino da

---

<sup>1</sup> Disciplina ministrada pela Prof. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana durante o segundo semestre de 2010.



análise combinatória era tratado de modo superficial, sendo consideradas apenas as fórmulas e exercícios que induziam a utilização das mesmas sem que fossem exploradas situações que enriqueceriam o pensamento combinatório.

Tendo em vista a carência da exploração do conteúdo no ensino médio e a experiência de aprendizagem que tive na universidade, surgiu a motivação para desenvolver a presente pesquisa: verificar como os alunos interagem com o ambiente gerado por uma proposta de ensino diferenciada, o ensino da combinatória a partir da resolução de problemas.

## REFERENCIAL TEORICO

No desenvolvimento desta análise teremos como referencial a teoria de resolução de problemas desenvolvida por Pólya (1995) e alguns trabalhos desenvolvidos a partir desta teoria, tais como, as pesquisas e escritos de Onuchic e Zuffi (2007), González (1998; 2005) e D'Ambrósio (2008). O desenvolvimento do pensamento formal definido por Piaget e Inhelder (1976) para justificar o tema da pesquisa e as definições de problema citadas por Roque (2006).

Além dos referenciais teóricos acima citados utilizamos outras pesquisas desenvolvidas sobre o ensino da Análise Combinatória e sobre a resolução de problemas como método de ensino, as quais serão mencionadas posteriormente.

## RACIOCINIO COMBINATÓRIO

O desenvolvimento do raciocínio combinatório, segundo Piaget e Inhelder (1976) é requisito para o desenvolvimento do pensamento formal.

Eles determinam as estruturas de conhecimento como estágios de desenvolvimento do pensamento intelectual, os quais progredem ordenadamente, de modo que o aluno parte de um estágio cujas estruturas de pensamento são mais limitadas para outro caracterizado por estruturas mais completas. O estágio mais avançado das estruturas de conhecimento é o operatório-formal, caracterizado pela capacidade de considerar todas as combinações de modo sistemático, coordenando as variações entre os componentes, sabendo apresentar as hipóteses formuladas e as implicações de cada consideração.

No desenvolvimento dessa estrutura o raciocínio combinatório torna-se fundamental, pois:

O pensamento formal opera em segunda, terceira, enésima... potência, através das relações das relações e das coordenações das coordenações das ações envolvidas na lógica das proposições. A combinatória abrange essa totalidade, sendo ela própria operação de segunda potência: "As permutações são seriações de seriações, as combinações são multiplicações de multiplicações, etc." (INHELDER; PIAGET apud DURO, 2012, p.23).

Seguindo essa teoria e considerando a importância dessa estrutura de conhecimento na formação do aluno, o ensino da combinatória pode ser considerado um meio de oportunizar essa evolução. Neste caso o objetivo do conteúdo é o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Diante deste objetivo, o uso de fórmulas, exercícios de fixação e definições prontas são insuficientes. É necessário um método que permita o desenvolvimento dessa estrutura, que oportunize ao aluno momentos reflexivos, que permita a construção do raciocínio sem limitar o conhecimento matemático.

Para repensar a metodologia de ensino visando o desenvolvimento do raciocínio combinatório podemos considerar a experiência apresentada no capítulo “Combinações de corpos químicos coloridos e incolores” da obra “Da lógica da criança à lógica do adolescente”, de Piaget e Inhelder (1976), na qual os participantes deveriam obter cores diferentes a partir da combinação de três substâncias químicas e um indicador, dentre as substâncias havia uma capaz de descolorar a mistura e outra que era neutra, influenciando apenas na tonalidade da mistura, mais escura ou mais clara. A inclusão dessas duas substâncias tornava mais complexa a resolução, pois não bastava apenas fazer todas as combinações dos elementos dois a dois, depois três a três e por fim considerando os quatro elementos, era preciso considerar todas as implicações que cada elemento gerava na mistura, para então chegar a conclusões sobre todas as possibilidades.

Considere importante essa experiência, pois na teoria apresentada foi uma maneira de avaliar o estágio de desenvolvimento do aluno participante. Fato que evidencia a relação que existe entre a combinatória e o desenvolvimento das estruturas do estágio operatório-formal.

De modo geral, a lição deste experimento é, portanto, a estreita correlação existente entre a construção ou estrutura de conjunto das operações combinatórias, de uma parte, e, de outro, as das operações formais ou interproposicionais. [...] Esta correlação é menos surpreendente, pelo fato de, no fundo, ser uma identidade: o sistema de operações proposicionais é, na realidade, uma combinatória. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.91).

Além disso, a experiência apresentada nos “indica” um método de ensino: A resolução de problemas. Neste caso o sujeito participante estava envolvido em uma situação nova em busca de meios para compreender o que aconteceria na combinação daquelas substâncias tendo que organizar os dados do problema, considerar a particularidade de cada substância para então fazer a contagem das possibilidades de modo sistemático.

## RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Proposta de ensino através da resolução de problemas é um tema abordado com frequência em pesquisas na área da Educação Matemática. Porém ao pensarmos em problema muitos significados distintos podem ser atribuídos, por esse motivo iniciaremos explorando a definição de problema adotada neste trabalho.

Ao utilizarmos problemas no ensino da matemática visando que o processo de aprendizagem ocorra do modo mencionado no item anterior, o problema não deve ser encarado como um exercício de fixação. Neste caso a situação apresentada é considerada um problema quando

a situação não é familiar, [...] e a solução exige um tratamento distinto de uma mera aplicação rotineira. Em termos de execução, quando sua resolução exige [...] a identificação de possíveis hipóteses e a verificação de sua exequibilidade, exigindo que o *sujeito* elabore condutas próprias através de capacidades de raciocínios autônomos. (CONTRERAS, apud GONZÁLEZ, 1998, p. 71; tradução e adaptação minha).

Deste modo, nesta análise, os problemas foram propostos, com a intenção de gerar questionamentos e estratégias desconhecidas, de inquietar o aluno e retirá-lo da zona de conforto gerada pela repetição de algoritmos em exercícios de fixação, oportunizando momentos propícios à construção do conhecimento matemático e do desenvolvimento de raciocínio.

Em outras palavras, consideramos que “um problema não é uma falta que virá a ser preenchida pelo conhecimento da solução preexistente, mas é uma criação, uma novidade, um vir-a-ser que traz à realidade algo que nunca existiu” (ROQUE, 2006, p. 141) através do esforço e desenvolvimento intelectual daquele que trabalha em sua solução, evitando que problema e solução sejam meras peças de encaixe, cabendo ao aluno o simples ato juntá-las.

Tendo determinado o que é um problema em nossa perspectiva vamos avaliar o papel do problema na matemática.

Albert Lautman, citado por Roque (2006) determina problema como o único a priori da matemática. Segundo Roque (2006), o filósofo define o a priori como uma ligação entre matemática e filosofia, defendendo que esta relação ocorre quando analisamos uma teoria

matemática “procurando identificar o problema que se encontra ao mesmo tempo definido e resolvido pela existência desta teoria” (ROQUE, 2006, p. 144), ou seja, a compreensão da matemática ocorre através de relações estabelecidas entre problemas e soluções.

“Este a priori problematizante da matemática se efetua juntamente com os esquemas lógicos que engendrarão suas soluções, sem nunca se deixar dominar. [...] Um dos exemplos mais simples do papel dos problemas em matemática é o fato de que ela evolui por conjecturas, e é justamente no processo de se demonstrar ou de se refutar uma conjectura que novas teorias são formuladas.” (Ibid, 2006, p. 143)

Além disso, a importância da utilização de problemas no processo de aprendizagem da matemática pode também ser verificada nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, o qual define o papel da matemática no ensino escolar, como disciplina que

contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 1998, p.40)

Seguindo este ideal, é fundamental que saibamos como conduzir a prática a partir da resolução de problemas, de modo que nossos objetivos sejam alcançados.

Para este trabalho utilizamos a teoria de Pólya (1995), o qual defende o método de ensino através de problemas e orienta o trabalho do professor visando um melhor aproveitamento deste método de ensino.

O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém. (POLYA, 1995, p. 124).

Em sua concepção é muito importante que o aluno seja protagonista da construção de seu próprio conhecimento, para ele “o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível” (PÓLYA, 1995, p. XVII), porém ao mesmo passo que defende essa autonomia que deve ser permitida ao aluno, também aponta a importância do papel do professor neste processo. “O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.” (POLYA, 1995, p. XVII), ou seja, o professor deve auxiliar o aluno de modo que a informação dada seja a mínima possível, mas que também seja suficiente para que ele possa seguir sozinho.

Essa maneira de conduzir as tarefas em sala de aula nos leva a negar atitudes tais como: apresentar correções antes que o aluno termine sua tarefa; utilizar explicações carregadas de exemplos, que podem ser encarados como uma prévia das tarefas que serão pedidas posteriormente; auxiliar o aluno resolvendo parcialmente o problema. A postura que adotamos como ideal neste trabalho, além de estar de acordo com a teoria de Pólya (1995) converge com a visão de Rancière (2002) a respeito do ato de ensino.

Explicar alguma coisa a alguém é, antes de mais nada, demonstrar-lhe que não pode compreendê-la por si só. Antes de ser o ato do pedagogo, a explicação é o mito da pedagogia, a parábola de um mundo dividido em espíritos sábios e espíritos ignorantes, espíritos maduros e imaturos, capazes e incapazes, inteligentes e bobos. O procedimento próprio do explicador consiste nesse duplo gesto inaugural: por um lado, ele decreta o começo absoluto — somente agora tem início o ato de aprender; por outro lado, ele cobre todas as coisas a serem aprendidas desse véu de ignorância que ele próprio se encarrega de retirar. (RANCIÈRE, 2002, p. 20)

## **O MÉTODO POR RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

A resolução de problemas, segundo Pólya (1995) é dividida essencialmente em quatro etapas, as quais podem ser consideradas como um suporte para o aluno que não está habituado com a busca por soluções, de modo genérico, com o intuito de oportunizar o desenvolvimento da habilidade em elaborar estratégias na resolução de problemas.

De modo resumido podemos dizer que na resolução de problemas

“Primeiro, temos que compreender o problema, temos que perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita, está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a”. (PÓLYA, 1995, p. 3)

Para descrevermos melhor as etapas vamos falar sobre as principais características de cada uma delas.

A primeira etapa, talvez o momento mais importante para o bom andamento das etapas seguintes, é caracterizada pela compreensão do enunciado e pelo interesse em buscar a solução. Este momento depende essencialmente do problema selecionado. A temática deve ser motivadora e a exigência deve ser adequada ao nível de desenvolvimento do pensamento do aluno, para que ele sinta vontade de compreendê-lo e de trabalhar em sua solução.

Ao trabalhar na compreensão, de acordo com Pólya (1995), o aluno precisará identificar “as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante” (PÓLYA, 1995, p.4), analisá-lo considerando as distintas perspectivas que possam ser exploradas, adotar uma notação que auxilie a manipulação dos dados e explorar as possibilidades de satisfazer a condicionante. Deste modo o aluno poderá partir para a segunda etapa tendo maiores chances de estabelecer uma estratégia coerente com a solução.

Porém, quanto ao interesse, acreditamos que mesmo sendo feita uma cuidadosa seleção de questões é provável que o aluno, acostumado a trabalhar com exercícios de fixação, ao receber problemas, da maneira como propomos, dedique pouco interesse em resolvê-lo. Percepção que intensifica ao observar na pesquisa de Onuchic e Zuffi (2007), que os alunos não habituados com esta metodologia apresentaram maior resistência ao iniciar as atividades que envolviam resolução de problemas.

Muitas vezes será necessário que o professor conceda tempo para que, no aluno desperte a vontade de dedicar-se a tarefa. “Ensinar a resolver problemas é educar a vontade. [...] o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela ideia essencial e a concentrar todo o seu potencial quando esta aparecer” (PÓLYA, 1995, p. 114).

Quando o aluno supera a primeira fase e começa a elaborar a estratégia para solucionar o problema, dizemos que ele está na segunda etapa: estabelecimento de um plano. É neste momento que o aluno determina quais cálculos pretende fazer, quais teoremas e definições são necessários para encontrar a incógnita, ou simplesmente define os procedimentos a serem feitos para encontrar a solução, de acordo com as necessidades do problema.

Como a intenção do ensino através da resolução de problemas é apresentar uma situação nova, para a qual o aluno não tenha a solução de antemão, é muito provável que o aluno tenha que pensar e repensar, construir e desconstruir seu planejamento muitas vezes, até encontrar o plano adequado.

De acordo com o nível de dificuldade em elaborar o plano para a resolução de um problema “teremos de variar, de transformar, de modificá-lo.” (PÓLYA, 1995, p. 6) Para que possamos relacionar este problema com outros menos complexos ou apenas conhecidos, pois

a partir da solução desses novos problemas, poderemos retornar ao problema original com novas ideias que contribuam para a solução procurada.

Neste momento utilizamos do raciocínio heurístico, o qual segundo Pólya (1995), é aquele que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta. Este raciocínio não é considerado final e rigoroso, mas sim provisório e plausível. E por esse motivo este raciocínio está relacionado com a busca de soluções, pois considerações provisórias que apresentem coerência com o que buscamos são indispensáveis para solucionarmos um problema.

Visando o bom andamento desta etapa, ao perceber dificuldades, o professor pode fazer questionamentos genéricos, que auxiliem o aluno a destacar o que é necessário resolver (a incógnita) e as condições impostas pelo enunciado, sugerindo uma decomposição do problema ou analogia com outros já trabalhados, mas sempre com distinção, para respeitar a parcela de trabalho do aluno.

Após elaborar um plano que o deixe convencido de que a partir do mesmo a solução do problema será determinada, o aluno está pronto para a execução do plano, terceira etapa dos passos de resolução de problemas.

A execução de um plano bem determinado em geral é mais simples do que as tarefas anteriores, mas não nos isenta de retornarmos ao passo anterior ao percebermos alguma falha de planejamento. Caso não tenhamos perturbações nessa etapa, precisaremos apenas dedicarmos à execução do plano elaborado. O professor pode deixar o aluno trabalhar sem interrompê-lo ou intervir mostrando que deve rever algum passo de seu plano.

Acreditamos que, existindo a possibilidade do erro ser descoberto pelo próprio aluno, o professor deve evitar intervir, pois ao compreender o erro, o aluno estará tomando conhecimento sobre as implicações da hipótese que formulou de modo inadequado. Se percebermos que o aluno está com muita dificuldade na execução por ter elaborado um plano incapaz de solucionar o problema, poderemos intervir, mas sempre buscando compreender como o aluno organizou suas ideias. Desse modo teremos a possibilidade de descobrir qual ponto precisa ser retomado, qual conceito precisa ser mais bem compreendido, qual hipótese precisa ser reformulada. Para que a intervenção realmente auxilie o aluno ela precisa desconstruir o que está mal formulado para construir do modo adequado.



Com a finalidade de consolidar o conhecimento que o aluno obteve e de ampliar sua capacidade de resolução de problema a quarta e última fase é proposta: o retrospecto. Neste passo o aluno deve fazer a verificação da resolução do problema, sendo que neste momento além de corrigir a solução apresentada ele poderá repensar o modo como conduziu seu plano e ao verificar sua estratégia também poderá perceber maneiras mais simples e eficazes de solucionar aquele problema.

A última fase da resolução de problemas apresentada por Pólya tem também o objetivo de conscientizar o aluno “que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução.” (PÓLYA, 1995, p. 10).

A partir dessa exploração o aluno perceberá a importância de seu trabalho e poderá valorizar propostas que lhe exijam esforço intelectual, permitindo que seu processo de aprendizagem seja mais sólido e enriquecido.

Os quatro passos apresentados anteriormente, foram elaborados pelo autor na década de 40 e até hoje muitos trabalhos, seminários e grupos de pesquisa tomam esta teoria como referencial ao propor o ensino da matemática através de problemas.

Observamos em trabalhos mais recentes, que versam sobre a evolução deste tema, que a resolução de problemas passou por muitos anos exercendo o mesmo papel de um exercício de fixação.

Segundo Beatriz D’Ambrósio (2008), o ensino da matemática por muito tempo ocorreu de modo que “o professor ensinava o conteúdo, aluno praticava aplicação” (D’AMBROSIO, 2008, p.1), mesmo os problemas eram vistos como exercícios de fixação. Apenas em 1933, Dewey ofereceu reflexões sobre a importância em propormos problemas vinculados à realidade do aluno. E alguns anos depois, em 1945, Pólya passou a influenciar o cenário da educação matemática. Porém a visão que temos hoje sobre as fases de resolução apresentadas por ele é bastante diferente do modo como foram interpretadas durante a década de 60 no Brasil.

Entre 1960 e 1990, de acordo com a análise de D’Ambrósio (2008) as etapas de Pólya (1995) integravam o livro didático, sendo importante que o aluno soubesse cada uma dessas etapas e demonstrasse cada uma ao resolver um problema. Ou seja, o foco era no conhecimento do método e não no desenvolvimento da habilidade como enfatizamos hoje.

A visão atual sobre os passos da resolução problema deve-se a análises mais aprofundadas de seu trabalho, as quais permitiram que percebêssemos a importância de suas contribuições, “Pólya estudava o trabalho de investigação dos matemáticos e propunha um ensino que criasse oportunidade para que os alunos se comportassem como matemáticos” (D’AMBROSIO, 2008, p.1)

Seguindo essa visão atual, o método de ensino da matemática através da resolução de problemas vem sendo um tema focado frequentemente em pesquisas e artigos em vários países. No Brasil podemos citar a pesquisa de Onuchic e Zuffi (2007). Sua contribuição advém de projeto<sup>2</sup> realizado visando melhorias no ensino da matemática em turmas de ensino médio de uma escola pública de São Paulo. No trabalho, as autoras citam diversos pesquisadores que defendiam o mesmo objetivo e citam o GTERP<sup>3</sup>, como referência na investigação e produção de materiais nessa linha de pesquisa.

Além destas fontes, consideremos outros trabalhos acadêmicos que versam sobre este mesmo tema. Acompanhar estes trabalhos foi importante para definirmos referenciais teóricos e para que pudéssemos definir melhor nosso objetivo. Entre estes se encontram a dissertação de Marina Duro (2012), que versa sobre a psicogênese do pensamento combinatório analisando a resolução de problemas através do método clínico de Piaget; a dissertação de Marcelio Adriano (2007), que verifica a eficiência da utilização de problemas geradores no ensino da matemática; o trabalho de conclusão de curso de Carla Soares (2010) que apresenta uma proposta de ensino da combinatória baseada em jogos; o trabalho de conclusão de curso de Fernando Abbott (2011), que consiste em um estudo sobre estratégias de resolução de problemas.

---

<sup>2</sup> Título do projeto: “DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO DE UMA PEDAGOGIA UNIVERSITÁRIA PARTICIPATIVA NO ENSINO MÉDIO: atividades com ênfase em Matemática, Ciências e Comunicação”, projeto originado pela Universidade de São Paulo, no município de São Carlos – SP. 2001 – 2005

<sup>3</sup> Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, coordenado por ONUCHIC desde 1992, na própria universidade de São Paulo, atua na investigação e aperfeiçoamento do método de ensino através da resolução de problemas.

## METODOLOGIA

O tema desta pesquisa surgiu a partir do interesse pela relação entre desenvolvimento do raciocínio lógico e o ensino da combinatória. Com base no estudo da teoria de resolução de problemas como método de ensino da matemática, nossas indagações intensificaram-se e assim foi possível definir nosso objetivo.

A maneira como o trabalho foi sendo desenhado, de acordo com a descrição de D'Ambrosio (2009), caracteriza a estrutura organizacional de uma pesquisa qualitativa, a qual busca relacionar prática e teoria, de modo que o foco seja a interação do aluno com o ambiente. Neste caso, é muito importante que o professor assuma o papel do pesquisador, registrando detalhadamente o andamento da prática para posteriormente poder estabelecer relações com a teoria.

A pesquisa qualitativa, diferente da quantitativa, não conta com dados estatísticos para fins conclusivos. Neste tipo de pesquisa, a “... validação é muito influenciada por critérios subjetivos [...] A análise dos dados depende de uma fundamentação teórica que, obviamente, depende do pesquisador e de suas interpretações.” (D’Ambrosio, 2009, p.104).

Para obtermos os dados da análise, organizamos uma prática de ensino que permitisse ao aluno elaborar estratégias para solucionar problemas, de modo que pudéssemos acompanhar a realização das tarefas propostas, relatando os procedimentos apresentados pelos alunos e interpretando cada detalhe na escrita, na fala, nos desenhos e nas interações, para conseguir estabelecer a relação entre teoria e prática.

A coleta de dados foi feita a partir da gravação do áudio de interações, dos relatos escritos pelos alunos e dos relatos de situações vivenciadas durante este período, os quais são expostos seguidos de nossa análise justificando nossas conclusões.

## PRÁTICA DE ENSINO

Para o desenvolvimento da análise foi elaborado um projeto sobre resolução de problemas de análise combinatória, apresentando situação com níveis de dificuldade distintos. Em geral, os problemas utilizados no projeto foram extraídos do Banco de Questões da OBMEP, questões desenvolvidas para os níveis I (ensino fundamental – séries iniciais) e II (ensino fundamental – séries finais).

Optamos por esta referência na seleção dos problemas, pois mesmo que o aluno já tivesse conhecimento sobre o conteúdo abordado na questão ele precisaria criar uma estratégia, escolhemos problemas que abordassem combinatória ou lógica. Os problemas da OBMEP não se limitam a uma simples aplicação de fórmulas e definições, eles apresentam situações, nas quais além do conteúdo são consideradas variações que exigem uma análise mais aprofundada.

O projeto foi desenvolvido em uma turma de segundo ano do ensino médio, em períodos noturnos, contando quatro encontros semanais desenvolvidos no período de 20 de março de 2013 a 17 de abril de 2013<sup>4</sup>. A turma era composta por 38 alunos, porém em média compareciam 25 alunos por aula. Normalmente os alunos que faltavam eram sempre os mesmos, permitindo que eu pudesse considerar a continuidade do trabalho com a maior parte da turma.

Além do objetivo da análise, o projeto buscava oportunizar momentos que contribuíssem para o desenvolvimento do raciocínio lógico e combinatório dos alunos, orientando-os através de questionamentos que os auxiliassem a pensar com maior autonomia.

O primeiro encontro do projeto aconteceu dia 20 de março de 2013. Para este dia o planejamento previa uma apresentação do projeto e em seguida uma sequência de problemas, para serem solucionados. A lista de problemas consta como apêndice desse material.

As questões trabalhadas neste primeiro dia foram:

---

<sup>4</sup> Na primeira semana de abril/2013 não tivemos aula na escola.

1. (OBMEP 2008) Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?
  
2. Há cinco estradas distintas ligando as cidades A e B e três estradas distintas ligando B e C e duas distintas ligando A e C, diretamente.
  - a) De quantas maneiras é possível chegar na cidade C se estivermos na cidade A?
  - b) De quantas maneiras é possível chegar na cidade C, saindo da cidade A e passando pela cidade B?
  
3. (OBMEP 2013) Nove pontos são desenhados em uma folha de papel, como mostrados na seguinte figura:



- a) De quantas maneiras é possível escolher três pontos colineares?
  
- b) De quantas maneiras é possível escolher quatro pontos de modo que três deles sejam colineares?

As tarefas 1 e 2 foram iniciadas e concluídas no primeiro encontro, a terceira tarefa ficou incompleta, os alunos conseguiram resolver o primeiro item, mas a solução do segundo não foi encontrada tão facilmente. Para que, neste item, os alunos elaborassem um plano de resolução, optamos por auxiliar na organização do processo de contagem.

Estas tarefas, assim como as demais realizadas neste projeto, foram todas desenvolvidas em equipes. A proposta de trabalho em grupos visava atingir um melhor

aproveitamento das atividades e da análise das mesmas. Essa ideia de trabalhar em grupo foi reforçada pelas experiências apresentadas por Onuchic e Zuffi (2007). Segundo seus relatos a comunicação intragrupal contribui positivamente nos processos metacognitivos e na análise, pois ao interagir com o grupo os alunos em “suas falas, acertos, dúvidas e angústias revelam uma tomada de consciência, em menor ou maior grau, [...] daquilo que estavam fazendo para atingir os objetivos propostos na tarefa” (ONUCHIC e ZUFFI, 2007, p. 87).

Deste modo, além de gerarmos ao observador um ambiente, no qual é possível analisar o aluno na busca da resolução de um problema agindo com maior naturalidade, oportunizamos ao aluno uma tarefa que contribua de modo amplo para o desenvolvimento de suas habilidades. Quando o aluno interage com seus colegas, é provável que ele procure as melhores maneiras para expor suas ideias, apresentando justificativas para convencê-los da validade de seus argumentos. Além disso, a realização de tarefas em grupo permite que os alunos possam comparar suas ideias e suas maneiras de trabalhar, enriquecendo o processo de aprendizado, pois a partir dessa comparação será possível que percebam a existência de diferentes maneiras de encontrar uma mesma solução.

No segundo encontro com a turma, dia 27 de março de 2013, incluímos no planejamento uma tabela com perguntas baseadas nas etapas de resolução de problemas. Esse novo recurso tratava de modo muito subjetivo das ações a serem desenvolvidas em cada uma das etapas de resolução. Este material foi elaborado principalmente para auxiliar o aluno a interpretar o problema e conscientizar que, após concluir o plano, é importante conferir e consolidar o que foi desenvolvido.

Ao entregar esse novo recurso, comentamos que aquela tabela era um material auxiliar, que a utilizariam para algumas atividades, mas que seu uso não seria permanente, depois de um tempo seria desnecessário, pois aquelas perguntas tornar-se-iam automáticas no processo. As perguntas a serem respondidas neste material eram:

- 1) O que preciso encontrar para solucionar o problema?
- 2) Como pensei em resolver?
- 3) Consegui solucionar? O que precisei repensar?
- 4) Quando conferi, percebi algum problema? Qual?

O material foi pouco utilizado, mas a exploração inicial contribuiu para orientação desejada. Em alguns problemas intervimos, através de exemplos e explicações antecipadas, pois compreendemos que os alunos não estão habituados com esse tipo de proposta e que correríamos o risco de limitar o trabalho do aluno por deixá-lo sem a atenção necessária nesse momento inicial.

Neste encontro a utilização deste material foi exemplificada juntamente com a resolução do problema 4, a qual exploramos com os alunos, pois estavam apresentando dificuldade na compreensão.

#### Problema 4:

4. (OBMEP 2013) Uma pulga, que está no ponto A de uma reta, pula exatamente 1 m de cada vez, sem nunca sair dessa reta.

a) Se a pulga quer chegar no ponto B localizado sobre a reta, a uma distância de 5 m à direita de A, com exatamente 7 pulos, de quantas maneiras ela pode fazer isso?

O início da utilização do material auxiliar foi proposto neste exercício. Porém os alunos não conseguiram encarar as perguntas como uma atividade paralela ao problema, eles estavam tratando como algo a ser feito depois, ou seja, “primeiro trato o problema como sempre faço e depois encontro estas respostas”.

Optamos então por conduzir a resolução deste problema, evitando apresentar respostas prontas, fazendo questionamentos sobre os aspectos do problema, tentando mostrar que um problema deve ser visto de distintas perspectivas enquanto buscamos compreendê-lo.

Orientar a resolução desse problema foi uma maneira de exemplificar a utilização do material auxiliar, afinal, a maioria das questões lançadas integravam-no. Desse modo, a utilidade daquelas perguntas, pôde ser compreendida e a aplicação verificada.

As demais atividades da lista 1 (Apêndice B) foram pouco exploradas, apenas alguns alunos trabalharam em sua solução. Por esse motivo foram transferidos, para as fichas utilizadas na tarefa seguinte, os problemas 5 e 6.

No encontro seguinte, a proposta foi trabalhar em grupos maiores e substituir a lista por fichas. Cada grupo recebeu uma ficha contendo um problema diferente, alguns abordando

princípios de contagem e outros abordando lógica, a tarefa do grupo era solucionar aquele problema utilizando o material auxiliar e apresentá-lo no fim da aula aos colegas.

Como, em média, cada grupo estava resolvendo dois problemas por aula, com a utilização da lista, fizemos fichas extras, para oportunizar continuidade da tarefa caso algum grupo concluísse rapidamente o problema proposto.

A apresentação da atividade foi incluída no planejamento, a partir do estudo das ideias de González (2005), pesquisador na área da Educação Matemática, que propõe a exposição de vídeos apresentando grupos solucionando problemas, para que o aluno, ao assistir, tenha a oportunidade de identificar-se com os participantes do vídeo repensando e comparando suas estratégias. Podendo assim, ampliar sua capacidade de resolução.

A partir dessa ideia e do quarto passo de resolução de Pólya, incluímos a apresentação das tarefas, pois para organizar a apresentação o grupo teria de contar como foi resolver aquele problema, o que garantiria a realização do retrospecto, permitindo que o próprio grupo repense suas atitudes, e durante a apresentação os demais alunos, ao assistirem essa exploração, poderiam também refletir sobre seus métodos e contribuir expondo novas ideias para a turma.

No entanto, na prática a apresentação foi feita por apenas um grupo, os alunos não gostaram desta parte da tarefa e fizeram o possível para evitá-la. Foi um pouco desagradável não atingir o objetivo da tarefa para a maioria da turma, poucos demonstraram envolvimento e perderam o interesse diante das dificuldades apresentadas pelos problemas, deixando indicado no material, respostas incompletas ou sem justificativas.

O único grupo que apresentou a solução, desempenhou uma parcela considerável da tarefa corretamente. Este grupo mostrou que é possível trabalhar deste modo, obtendo bons resultados. Acreditamos que, se tivéssemos mais tempo para a realização do projeto, seria possível que mais grupos também apresentassem um progresso significativo na aprendizagem da matemática através deste método.

Apesar de termos mais um encontro, julgamos melhor encerrar a atividade com as fichas na aula seguinte. Cuidando para a tarefa não fosse desvalorizada, no quarto encontro retomamos alguns dos conceitos abordados nas fichas, explorando os aspectos principais dos problemas. Afinal o trabalho não podia ser dito encerrado, estando incompleto.



Com a abordagem dos problemas, aproveitamos para falar sobre o princípio fundamental da contagem a partir das fichas 1 e 3, pois os problemas induziam fortemente a pensarmos em como fazer a contagem de configurações distintas e em como combiná-las respeitando restrições. Não exploramos fórmulas, nem conceitos, apenas orientamos a resolução, da mesma forma como agimos ao auxiliar na resolução do problema 4 no segundo encontro.

No último encontro, além de finalizar a tarefa das fichas fazendo uma breve retomada dos problemas trabalhados, três atividades foram propostas. Duas atividades relacionadas com a resolução de problemas, sendo a primeira de lógica e a segunda de análise combinatória, e uma terceira atividade com o intuito de avaliar o projeto. As duas atividades matemáticas foram:

1. O código secreto de um grupo de alunos é um número de três algarismos distintos diferentes de zero.

Descubra o código utilizando as informações a seguir.

- Nenhum algarismo correto.

- Só um algarismo correto na posição certa.

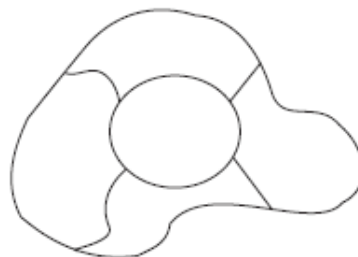
- Só um algarismo correto, mas na posição errada.

- Só um algarismo correto, mas na posição errada.

- Só um algarismo correto na posição certa.

**Código**   .

2. A figura mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarelo, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?



Estas atividades foram aplicadas para verificar se o projeto havia atingido um de seus objetivos: oportunizar uma prática que contribuísse para o desenvolvimento intelectual do aluno.

No primeiro problema o aluno teria que relacionar as informações dadas no enunciado, verificando a implicação de cada uma delas para chegar à conclusão final e no segundo problema teriam de avaliar qual método de contagem era adequado, considerando a restrição imposta.

A atividade avaliativa consistia em um questionário sobre o nível de dificuldade dos problemas trabalhados, reflexões sobre uma nova visão de problema e sobre o conhecimento de análise combinatória dos alunos, anterior a prática. O instrumento de avaliação foi aberto a críticas e sugestões, sendo este feito de modo individual e sem identificação.

Essa ferramenta foi utilizada para termos mais uma fonte de análise. Além do material produzido durante o projeto e das observações realizadas durante a prática achei importante a utilização de uma ferramenta mais informal, na qual, o aluno, pudesse expor seu pensamento sem medo de repreensões.

A prática foi satisfatória, gerando bons materiais e boas reflexões para a análise pretendida. Acreditamos que da mesma maneira que a prática descrita foi importante para a pesquisa também tenha contribuído positivamente para a turma participante.

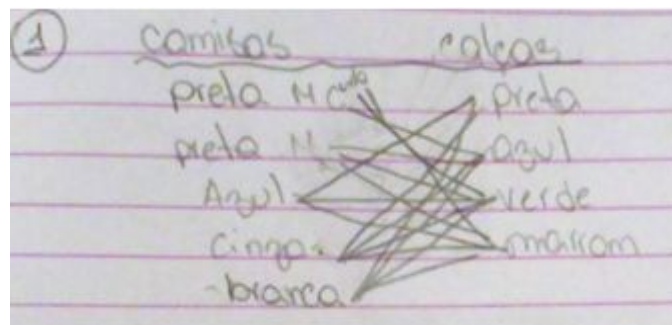
## ANÁLISE DO MATERIAL

Faremos uma análise do material produzido na prática citada anteriormente. Muitas tarefas foram propostas, mas nem todas geraram materiais consideráveis para este projeto. Por esse motivo apresentaremos uma seleção de soluções e de situações que julgamos de interesse para a análise.

O primeiro problema (enunciado na página 20) exigia a aplicação do princípio multiplicativo, porém apresentava uma restrição e uma condição, as quais poderiam ser satisfeitas de dois modos: analisar os casos separadamente com restrição ou considerar todas as possibilidades e excluir aquelas que não apresentavam os casos restritos.

Neste caso, alguns alunos apresentaram dificuldade na compreensão do problema. Compreendiam que precisávamos encontrar de quantas maneiras distintas poderíamos combinar as roupas, de modo que calça e camisa tivessem cores diferentes, mas muitos consideravam que a camiseta preta de manga curta era igual à camiseta preta de manga longa. Essa interpretação nos indica que poderiam estar com dificuldade em compreender que a diferença de cor deveria ocorrer ao mesmo tempo, ou seja, calça e camisa de mesma cor não deveriam ser consideradas, porém camisas distintas de mesma cor gerariam combinações distintas com calças de cores diferentes.

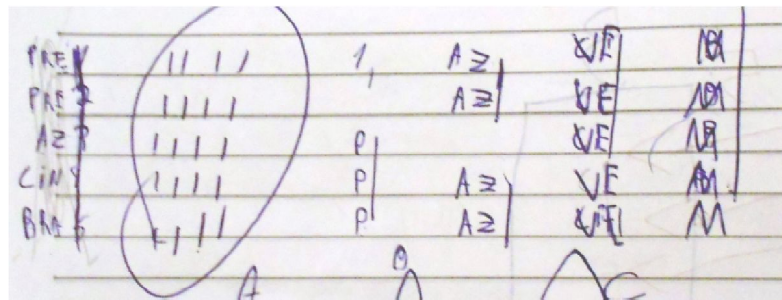
Após compreender o enunciado, a maioria dos alunos apresentou uma boa maneira de organizar os dados para contagem, porém alguns apresentaram maneiras confusas, que impediram a contagem. Seguem alguns dos esquemas elaborados pelos próprios alunos.



**Figura 1: Resolução do problema 1 – Lista 1**  
**Fonte: Material do Grupo 2**

Na figura 1, observamos que o grupo tinha consciência das informações e do que buscava, mas optou por um método de organização dos dados que não permitia que fosse feita a contagem. Ele precisaria rever o plano elaborado, seria necessário pensar em um modo sistemático para a contagem.

Na figura 2, é possível perceber que o grupo fez duas contagens diferentes, uma considerando todas as combinações possíveis e outra considerando a restrição.



**Figura 2: Resolução do problema 1 – Lista 1**  
**Fonte: Material do Grupo 3**

Podemos perceber a contagem sem a restrição, pois o grupo listou as cores de camisa à esquerda e marcou ao lado de cada uma um pequeno traço para cada uma das calças, encontrando vinte combinações. Porém, a figura apresenta outra contagem, na qual o aluno marca as cores de calças possíveis para a camisa, listada naquela linha, atendendo à restrição e possibilitando a contagem.

Na solução mostrada na figura 3, a ideia é semelhante à anterior, porém, neste caso, o grupo listou apenas uma camiseta preta, mas apresentou a contagem correta. Isso nos remete a ideia de que o aluno percebeu em algum momento que estava faltando considerar a outra camiseta preta e, para incluí-la na contagem, apenas acrescentou uma unidade para cada calça de cor distinta.

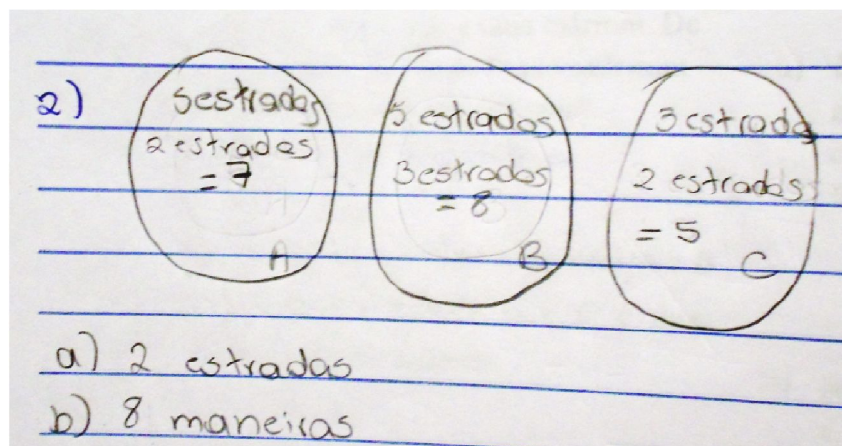
CAM	CAL	]
PRE	PRE	□
AZU	AZU	□
CIN	VER	□
BRA	MAR	□

**Figura 3: Resolução do problema 1 – Lista 1**  
**Fonte: Material do Grupo 4**

Neste exercício nenhum aluno optou por cálculos antes de gerar uma amostra das combinações, também não consideraram a possibilidade de efetuar a contagem de todos os casos para depois excluir os que não atendiam a restrição.

Apenas a partir do segundo problema (enunciado na página 21) alguns alunos perceberam que poderíamos determinar as possibilidades através do produto, sabendo diferenciar o uso do produto e adição naquele procedimento de contagem.

Foi possível perceber que o modo como o aluno esquematizou os dados do problema influenciou na escolha do princípio de contagem aplicado. Seguem alguns exemplos de resolução:



**Figura 4: Resolução do problema 2 – Lista 1**  
**Fonte: Material do Grupo 5**

Na figura 4, o grupo organizou os dados indicando quantas estradas têm ligação com a cidade A, com a cidade B e com a cidade C. Para o item a considerou apenas as estradas que ligavam diretamente as cidades A e C, sem perceber que neste caso deveríamos incluir todas as maneiras de chegar à cidade C, sem restrição alguma. Para o item b considerou a soma das

estradas que tinham ligação com a cidade B, aplicando o princípio aditivo enquanto deveria utilizar o princípio multiplicativo.

No exemplo da figura 5, o grupo organizou o desenho, representando as cidades e as estradas que ligavam uma cidade à outra, aplicando o princípio multiplicativo e o aditivo da maneira adequada. Enquanto neste esquema foi mais intuitiva a aplicação do princípio multiplicativo, na figura 4 notamos que não foi, pois não era possível visualizar que para cada estrada escolhida entre a cidade A e B existiriam outras 3 possibilidades de estradas para chegarmos à cidade C.

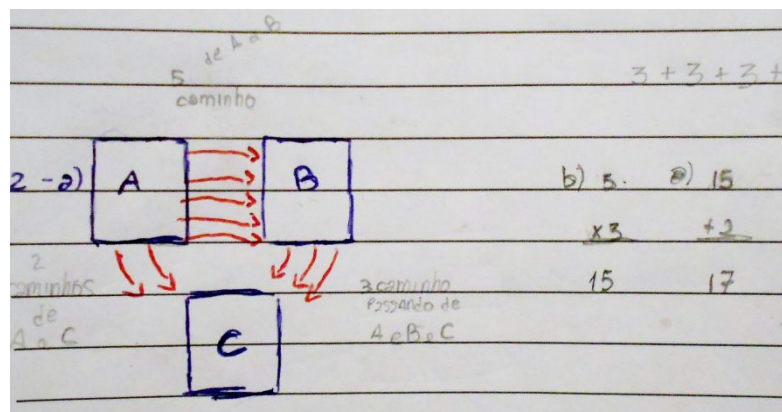
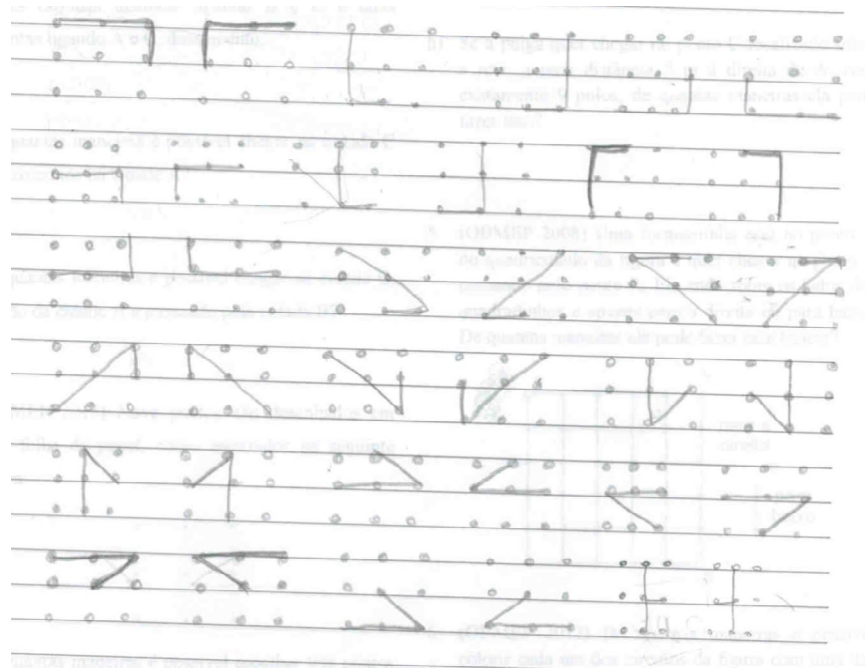


Figura 5: Resolução do Problema 2 – Lista 1  
Fonte: Material do Grupo 3

Para o terceiro problema (enunciado na página 21), novamente é necessária a utilização dos dois princípios. O primeiro item foi solucionado facilmente, os alunos analisaram, através de desenhos, as diferentes maneiras de escolhermos três pontos colineares e rapidamente encontraram o total de possibilidades. Porém o segundo item apresentou um maior nível de dificuldade, pois os alunos buscaram a solução da mesma forma, através da contagem de amostras representadas em desenhos, como podemos verificar na figura 6.



**Figura 6: Resolução do problema 3 – item b – Lista 1**  
**Fonte: Material do Grupo 2**

De modo geral, a turma optou por buscar a solução dessa forma, considerando sempre que o quarto ponto escolhido estivesse ligado ao segmento formado pelos três pontos colineares. Estas dificuldades nos indicam falhas na compreensão do problema e no plano adotado para fazer a contagem.

Apenas após algumas tentativas um aluno supôs que poderia escolher um ponto qualquer entre os seis pontos restantes. Segue a transcrição de trecho do diálogo que mantive com o aluno  $A_1$ :

Aluno  $A_1$ : “pego esses três aqui e mais esse aqui, posso?” O aluno  $A_1$  aponta 3 pontos colineares da primeira coluna e um quarto ponto na terceira coluna.

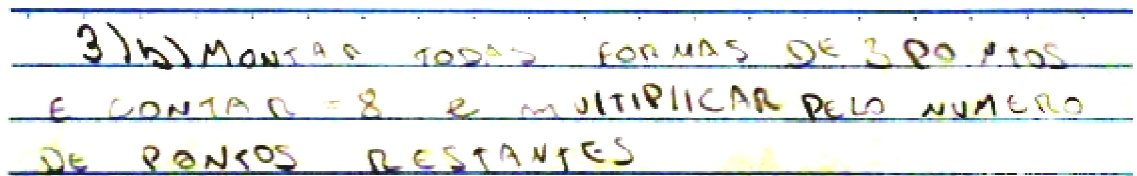
Eu: “Pode”

Aluno  $A_1$ : “Ai vou me perder mesmo, aí eu não sei contar”

Este aluno demonstra que além de ter compreendido o problema, percebeu que precisa “saber contar”, que para este caso, não é adequado obter a resposta contando as representações. Sua dificuldade agora é determinar um plano. Como fazer a contagem destas possibilidades?

Como toda a turma estava apresentando dificuldade para solucionar este problema, auxiliamos na busca pelo plano. Indicamos que pensássemos em um caso mais simples, em todas as maneiras de escolher quatro pontos sendo fixados três colineares. Escolhemos os três pontos colineares da segunda linha e então começamos verificar quais pontos poderíamos escolher como quarto ponto e assim conseguimos concluir que poderíamos escolher qualquer um dos seis pontos restantes e, por isso teríamos seis maneiras diferentes de escolher quatro pontos para aquele caso.

O próximo passo, que seria compreender que para cada três pontos colineares teríamos seis maneiras distintas de escolher o quarto ponto, ficou como tarefa para eles. O grupo 1, depois de pouco tempo, encontrou a resposta correta e justificou seus cálculos da maneira exposta na figura 7.



3) b) MONTAR TODAS FORMAS DE 3 PONTOS  
E CONTAR = 8 E MULTIPLICAR PELO NUMERO  
DE PONTOS RESTANTES

Figura 7: Resolução do problema 3 – item b – Lista 1  
Fonte: Material do Grupo 1

A quarta atividade (enunciado na página 23), como mencionei ao falar sobre a prática do projeto, foi bastante intrigante para os alunos. Para eles era impossível solucionar aquela questão.

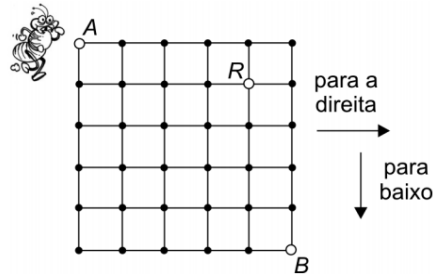
Iniciamos com falhas na compreensão, a tentativa inicial foi determinar o comprimento do pulo como  $7/5$ , desconsiderando a informação inicial de que cada pulo media exatamente um metro.

Apenas depois de muitos questionamentos os alunos perceberam que a pulga deveria pular uma vez para a esquerda para que fosse possível completar, com os sete pulos, o trajeto de 5 metros à direita de onde ela estava e que seria possível fazer esse trajeto de sete maneiras diferentes, pois o deslocamento para a esquerda poderia acontecer entre o primeiro e o sétimo pulo.

Para a atividade 5, alguns alunos apresentaram dificuldade em estabelecer um plano de contagem. Apenas o aluno  $A_2$  persistiu na busca da solução.



5. (OBMEP 2008) Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R. Ela anda sobre os lados dos quadrados e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?



Para ajudá-lo, tivemos que decompor o problema em dois casos mais simples: analisamos separadamente os caminhos de A até R e os caminhos de R até B.

Quando retornamos ao problema inicial, a pergunta feita foi: “Para cada caminho que eu fizer de A até R, quantos eu poderei escolher de R até B?” o aluno percebeu que, para cada escolha inicial, teríamos cinco maneiras de seguir do ponto R até o ponto B. E então, ele concluiu que a resposta era dada pelo produto entre o número de caminhos da primeira etapa e o número de caminhos da segunda etapa.

No encontro seguinte foi feita a atividade das fichas. Nesta tarefa, analisaremos o material do Grupo 1, o qual trata da resolução do problema da ficha 6.

### FICHA 6

Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.



- De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?
- De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?

c) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

Após algumas tentativas o grupo pediu para que verificasse se estavam corretos. O Aluno  $A_1$  havia apresentado o cálculo para o grupo, mas os demais colegas não compreenderam o raciocínio utilizado por ele.

A resposta estava correta, mas pedi para que explicassem como haviam encontrado aquele valor. O Aluno  $B_1$ , adiantou-se e explicou o que o aluno  $A_1$  tinha feito:

“Tem três ratos para seis casas, ele multiplicou 3 vezes o 6, né? [...]  $6 \times 6 \times 6$  [...] *como* tem três ratos e cada um pode entrar nas seis casas então ele multiplicou como se cada um tivesse entrado uma vez [...], mas dá mais, não? Se tem como entrar dois ou mais em uma *mesma* casa, daria mais formas ou não? Ah entendi! [...], o rato 1 pode entrar nas seis casas, o rato 2 pode entrar nas seis casas e o rato 3 pode entrar nas seis casas, cada um pode entrar seis vezes então ele multiplicou seis vezes.”

a) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

**Figura 8: Resolução do problema da ficha 6 – item a**  
Fonte: Material do Grupo 1

Apesar do uso inadequado de alguns termos, tais como “então ele multiplicou seis vezes” é possível perceber a maneira como o aluno concluiu ser aquele o cálculo correto. É importante observar que não houve intervenção neste caso, o próprio Aluno  $B_1$ , ao expor o modo como o Aluno  $A_1$  havia feito o cálculo, percebeu a justificativa que procurava. Além disso, foi capaz de levantar a hipótese de que o fato de dois ou mais ratos poderem entrar na mesma casa, aumentaria o número de maneiras.

Para o segundo item desta ficha, o aluno  $B_1$  novamente busca a verificação da resposta de seu grupo. Novamente a resposta estava correta e a justificativa de como o grupo havia chegado à solução foi:

“Se o rato 1 escolher a primeira casa, é uma casinha a menos para o outro *escolher*, aí digamos que ele escolheu outra *casinha*, faltam quatro só para o último. Daí eu pensei assim: 6 x as 5 opções do segundo x as 4 opções do outro.”

b) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

**Figura 9: Resolução do problema da ficha 6 – item b**  
Fonte: Material do Grupo 1

Ao explicar o raciocínio, o aluno B<sub>1</sub> aponta o mérito do aluno A<sub>1</sub>, pois ele explica que foi no momento em que o aluno A<sub>1</sub> percebeu que o segundo rato teria uma opção a menos para escolher que conseguiram determinar a solução.

No item C, a resposta foi dada da maneira exposta na figura 10.

c) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

$$6 \times 5 \times 2 = 60$$

**Figura 10: Resolução do problema da ficha 6 – item c**  
Fonte: Material do Grupo 1

Para obter este resultado foi considerado que: para o primeiro rato, existiam 6 possibilidades, para o segundo, 5 possibilidades e, para o terceiro, 2 possibilidades. Esse raciocínio, embora análogo ao aplicado nos dois primeiros itens, os levou à resposta indicada na figura 10, a qual não apresenta a solução do problema. Para solucionar esse item, deveria ter sido considerada a configuração das duplas de ratos. Como os alunos consideraram apenas as duplas formadas pelos ratos 1 e 3 e pelos ratos 2 e 3, esquecendo de contar as possibilidades entre os ratos 1 e 2, a resposta encontrada indica 2/3 de todas as possibilidades.

Como este grupo havia desenvolvido as demais tarefas de modo mais independente, apresentando argumentos válidos e o raciocínio correto para os casos anteriores, julgamos que teriam condições de continuar a busca pela solução. Apenas indicamos que deveriam revisar a solução do item c e deixamos a questão em aberto, para que os alunos pudessem pensar sobre a solução.

Na atividade seguinte, a maioria da turma apresentou rapidamente resultados corretos. Os dois resultados a seguir, apresentados nas figuras 11 e 12, incluíram justificativas em sua

resposta, mostrando que as informações do problema foram consideradas e que um plano foi elaborado para encontrar a solução.

1) O código secreto de um grupo de alunos é um número de três algarismos distintos diferentes de zero. Descubra o código utilizando as informações a seguir.

- Nenhum algarismo correto. *algarismos 1, 2, 3 descartados*

- Só um algarismo correto na posição certa. *algum algarismo correto*

- Só um algarismo correto, mas na posição errada. *confirmando o algarismo 6*

- Só um algarismo correto, mas na posição errada. *algarismos 4, 5 descartados*

- Só um algarismo correto na posição certa. *algarismos 3, 4 descartados*

Código

Figura 11: Resolução do problema 1 – Lista 2  
Fonte: Material do Aluno A1

1) O código secreto de um grupo de alunos é um número de três algarismos distintos diferentes de zero. Descubra o código utilizando as informações a seguir.

- Nenhum algarismo correto. *RISQUEI O NUMERO 1, 2, 3 de TODAS*

- Só um algarismo correto na posição certa. *SÓ UM NUMERO CORRETO*

- Só um algarismo correto, mas na posição errada. *SENDO QUE EM BAIXO TEM UM NUMERO CORRETO MAS NA POSIÇÃO ERRADA, COMO*

- Só um algarismo correto, mas na posição errada. *4, 5 TAMBÉM NÃO ESTÃO CORRETOS CORTEI ELES*

- Só um algarismo correto na posição certa. *TAMBÉM, SOBROU 7 NA POSIÇÃO ERRADA E O 8 NA CERTA*

Código

Figura 12: Resolução do problema 1 – Lista 2  
Fonte: Material do Grupo 6

A evolução na solução do exercício anterior também foi percebida no problema 2 da mesma lista. A maioria dos alunos aplicou corretamente o princípio multiplicativo, para descobrir de quantas maneiras era possível colorir o mapa, apenas pequenas dificuldades surgiram ao considerar as restrições, porém foram facilmente superadas.

Encerramos nossa análise com a exploração destes materiais, sendo estes uma amostra daqueles que apresentaram justificativas ou indicações dos procedimentos utilizados.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao fim desta análise, concluímos que é possível obter um retorno significativo ao trabalhar análise combinatória através da resolução de problemas, porém tanto a análise quanto a prática, apresentaram novos motivos para reflexões.

Na prática observamos que a proposta despertou o interesse dos alunos, porém percebemos que o interesse do aluno decrescia quando o nível de dificuldade do problema aumentava. Essa falta de interesse podia ser revertida, a partir de pequenos auxílios, através dos questionamentos propostos. Ao questionar os alunos, orientando-os nas etapas de resolução, muitas vezes, eles conseguiam ir adiante demonstrando muita satisfação em estar conseguindo trabalhar na solução.

Também foi possível perceber os alunos apresentando progresso, que embora pareçam pequenos, são muito significativos, tanto para eles como para nossa análise. Ao decorrer da prática, presenciamos alunos organizando melhor suas justificativas, questionando as implicações que alguma restrição trariam à solução, apresentando uma melhor compreensão do processo de contagem.

Quanto à prática, ao analisarmos a maioria dos resultados obtidos através da atividade das fichas, dois fatores podem ser considerados: A atividade talvez tenha sido feita muito cedo ou tenha faltado suporte para o aluno desenvolver melhores resultados.

Poderíamos aplicar uma atividade com a mesma estrutura novamente, depois de trabalharmos mais tempo com a resolução de problemas mais fáceis e verificar se os alunos teriam melhor desempenho. Poderíamos, também, ter mais professores envolvidos na tarefa, de modo que os grupos pudessem ser mais bem acompanhados. É provável que os grupos não tenham recebido a orientação necessária para poder seguir na resolução e desenvolver a parte da tarefa que lhes era cabível.

Para orientar um grupo era preciso compreender o modo como estavam desenvolvendo a solução, fazer questionamentos, esperar que apresentassem conclusões e argumentos. E essa, é uma tarefa que exige tempo, por esse motivo acredito que não foi possível dedicar essa atenção a todos os grupos, os quais solicitavam ajuda constantemente.

Mesmo não obtendo o retorno desejado desta tarefa, foi possível considerar aspectos que podem influenciar significativamente na prática, tais como a atuação do professor, o tempo que os alunos necessitam para sentir vontade de trabalhar com problemas e a seleção dos mesmos.

Porém, ao retornarmos aos problemas de mesmo nível dos trabalhados na lista 1 e mantendo a configuração de grupos menores, tivemos um retorno positivo da maioria dos alunos. Eles conseguiram encontrar as soluções de modo mais independente, apresentando justificativas para suas conclusões. Pudemos perceber, nestas atividades, que alguns alunos despreocuparam-se em ter um modelo a seguir, ou em ter uma orientação para saber como agir e simplesmente tentaram, buscaram um meio para encontrar a solução e desenvolveram as etapas planejadas.

Para nossas conclusões, também consideramos as respostas do questionário aplicado no último encontro. A partir dele, os alunos manifestaram suas opiniões sobre a proposta, e pelos escritos, foi possível considerar, que eles gostaram de trabalhar na resolução de problemas, mesmo considerando-os difíceis. A satisfação em encontrar a solução superou as dificuldades iniciais, inclusive um dos alunos comentou que gostou de trabalhar na solução do problema 1 da lista 2, pois teve mais facilidade em resolvê-lo. Fato este, que pode significar uma evolução ao trabalhar com problemas.

Notamos que alguns alunos demonstraram ter consciência da importância de trabalhar na solução antes de saber a resposta. Apenas um aluno reclamou da falta de exemplos e de explicações, o que é compreensível, afinal, enquanto nossa prática partia direto de um problema, as práticas, em geral, iniciam com explicações e exemplos para depois partirem para os exercícios.

Ainda no questionário alguns alunos citaram características importantes para a resolução de problemas ao responderem a pergunta: “Quando você for resolver um novo problema, você pensa em algo que deve ser avaliado antes de começar a resolvê-lo?” Seguem algumas das respostas:

“Sim, as várias maneiras de resolvê-los.”

“Primeiro deve-se avaliar as regras da pergunta.”

“Pensaria no que preciso usar para executar o problema.”

Estas respostas nos indicam que, possivelmente, alguns alunos apropriaram-se de algumas das etapas de resolução, porém de modo intuitivo. Nesta prática visamos que o aluno compreendesse o processo, mas sem se preocupar com a teoria, afinal este conhecimento é importante para o professor, o aluno não tem obrigação de compreender o que caracteriza cada etapa de resolução. Neste momento é importante que ele consiga orientar e organizar seu trabalho, sabendo explorar as informações do problema, verificando o que é necessário desenvolver para sua solução e também tendo consciência de que tanto problema como solução podem levar-nos a novas explorações.

Acreditamos que a prática, além de nos permitir analisar como o aluno interage com um problema de combinatória sem conhecimento de fórmulas e definições, também contribuiu para que os alunos atribuíssem sentido matemático a tarefas que não são diretamente relacionadas a fórmulas e cálculos, mostrando a importância do desenvolvimento do raciocínio antes da aplicação de algoritmos sem significados. Ou seja, a partir de uma experiência com a resolução de problemas foi possível desenvolver uma prática de ensino que oportunizasse a compreensão de procedimentos de contagem.

## BIBLIOGRAFIA

ABBOTT, Fernando. Estudo de caso sobre estratégias de resolução de problemas de matemática no Ensino Médio. Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS. Porto Alegre. 2011.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática MEC/SEF. Brasília. 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 16/06/2013.

D'AMBROSIO, Beatriz S. A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático. Miami University. Ohio. EUA. 2008. Disponível em: <[http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos\\_completos/completo1.pdf](http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo1.pdf)>. Acesso em: 23/12/12.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: Da teoria à prática. Editora Papirus. Campinas. 2009.

DIOGO, Marcelo. Problemas geradores no ensino-aprendizagem de matemática no ensino médio. Dissertação. UFRGS. Porto Alegre. 2007.

DURO, Mariana. Análise Combinatória e a construção de possibilidades: O raciocínio formal no Ensino Médio. Dissertação. UFRGS. Porto Alegre. 2012.

GONZÁLEZ, Fredy Enrique. Tendencias de investigación en resolución en e problemas matemáticos en Latino América. Revista educação em Questão, UFRN, Natal, v.24, n.10, p. 29 – 66. Set/dez 2005.

GONZÁLEZ, Fredy Enrique. Metacognición y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. Zetetiké, CEMPEM-FE/UNICAMP, v.6, n.9, p. 59-87. 1998

INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. Combinações de corpos químicos coloridos e incolores. In: \_\_\_\_\_. Da lógica da criança à lógica do adolescente. São Paulo: Pioneira, 1976. p. 81-91.

OBMEP. Banco de questões. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/>>. Acesso em: 17/03/13



ONUCHIC, Lourdes. ZUFFI, Edna. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 2007.

POLYA, George. A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático. Interciência. Rio de Janeiro. 1995. (Tradução e adaptação: ARAUJO, Heitor L.).

RANCIÈRE, Jacques. O mestre Ignorante: Cinco lições sobre a emancipação intelectual. Autêntica. Belo Horizonte. 2002.

ROQUE, Tatiana. Sobre a noção de problema. Lugar comum. 23-24. p. 135-146. RJ. (Jan 2006 – abr 2008)

SANTOS, José Plínio O.; ESTRADA, Eduardo Luis. Problemas resolvidos de Combinatória. Editora Ciência Moderna. Rio de Janeiro. 2007


SILVA, Carla. Estudo de caso sobre o pensamento combinatório de alunos do ensino médio. Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS. Porto Alegre. 2010.

**APÊNDICE A – Composição dos Grupos**

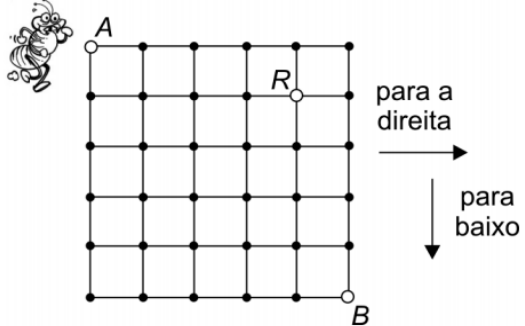
Grupo 1	Aluno A <sub>1</sub> Aluno B <sub>1</sub> Aluno C <sub>1</sub> Aluno D <sub>1</sub> Aluno E <sub>1</sub>
Grupo 2	Aluno A <sub>2</sub> Aluno B <sub>2</sub> Aluno C <sub>2</sub>
Grupo 3	Aluno A <sub>3</sub> Aluno B <sub>3</sub> Aluno C <sub>3</sub> Aluno D <sub>3</sub>
Grupo 4	Aluno A <sub>4</sub> Aluno B <sub>4</sub>
Grupo 5	Aluno A <sub>5</sub> Aluno B <sub>5</sub> Aluno C <sub>5</sub>
Grupo 6	Aluno A <sub>6</sub> Aluno B <sub>6</sub>

## APÊNDICE B – Lista de exercícios 1

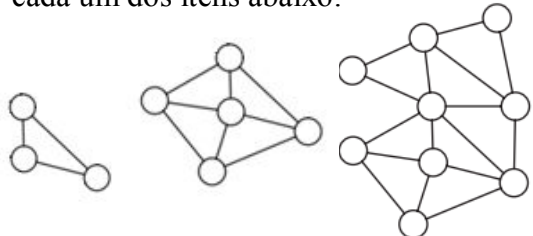
1. (OBMEP 2008 F1N1) Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?
2. Há cinco estradas distintas ligando as cidades A e B e três estradas distintas ligando B e C e duas distintas ligando A e C, diretamente.
  - a) De quantas maneiras é possível chegar na cidade C se estivermos na cidade A?
  - b) De quantas maneiras é possível chegar na cidade C, saindo da cidade A e passando pela cidade B?
3. (OBMEP 2013 BQ-N1) Nove pontos são desenhados em uma folha de papel, como mostrados na seguinte figura:
 



  - a) De quantas maneiras é possível escolher três pontos colineares?
  - b) De quantas maneiras é possível escolher quatro pontos de modo que três deles sejam colineares?
4. (OBMEP 2013 BQ-N2) Uma pulga, que está no ponto A de uma reta, pula exatamente 1 m de cada vez, sem nunca sair dessa reta.
  - a) Se a pulga quer chegar no ponto B localizado sobre a reta, a uma distância de 5 m à direita de A, com exatamente 7 pulos, de quantas maneiras ela pode fazer isso?
5. (OBMEP 2008 F1N2) Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R. Ela anda sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?
 



6. (OBMEP 2012 F1N1) De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes para cada um dos itens abaixo:
 



**APÊNDICE C – Material Auxiliar**

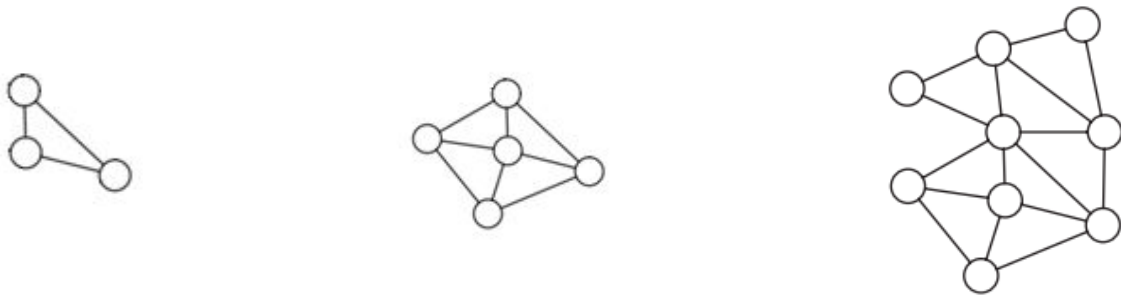
	PROBLEMA 1	PROBLEMA 2	PROBLEMA 3
O que preciso encontrar para solucionar o problema?			
Como pensei em resolver:			
Consegui solucionar? O que precisei repensar?			
Quando conferi percebi algum problema? Qual?			

Obs.: A orientação da folha que será entregue aos alunos será no modo paisagem.

## APÊNDICE D – Fichas

### FICHA 1 (utilizada na prática)

(OBMEP 2012 F1N1) De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes para cada um dos itens abaixo:



### FICHA 2 (não utilizada na prática)

(OBMEP 2012 BQ-N2) As peças da figura 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A figura 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da figura 2. De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

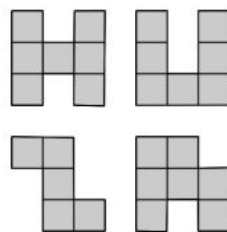


Figura 1

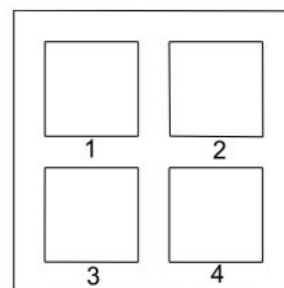


Figura 2

- (A) 1024
- (B) 1536
- (C) 2048
- (D) 3072
- (E) 4096

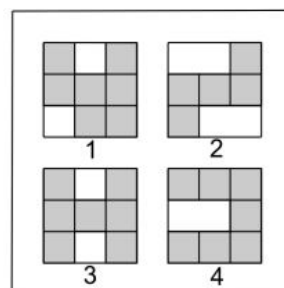
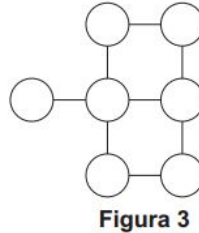
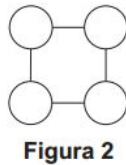
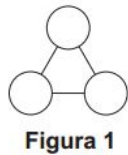


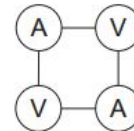
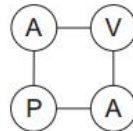
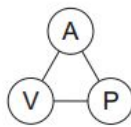
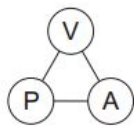
Figura 3

### FICHA 3 (utilizada na prática)

(OBMEP 2012 BQ-N1) Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.



Veja a seguir duas maneiras diferentes de colorir a figura 1 e duas maneiras diferentes de colorir a figura 2:



- De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 1?
- De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 2?
- De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 3?

### FICHA 4 (utilizada na prática)

(OBMEP 2010 F1N1) Alice foi à perfumaria e viu a tabela de preços, como na figura. Com R\$ 10,00 ela comprou um sabonete, um creme dental e um desodorante e ainda sobrou dinheiro. Podemos garantir que entre os artigos comprados havia

PREÇOS (R\$)			
	Sabonete	Creme dental	Desodorante
Pequeno	1,80	2,40	4,00
Médio	2,80	4,40	5,00
Grande	4,00	6,00	8,50

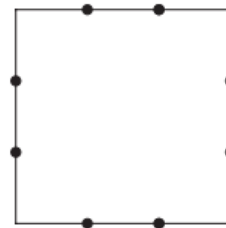
- um sabonete pequeno.
- um creme dental médio.
- um desodorante pequeno.

- D) um sabonete médio.  
E) um creme dental pequeno.

### **FICHA 5 (utilizada na prática)**

(OBMEP 2010 F1N2) Os oito pontos destacados na figura dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Quantos triângulos retângulos podem ser traçados com os três vértices nesses pontos?

- A) 8  
B) 12  
C) 16  
D) 24  
E) 32



### **FICHA 6 (utilizada na prática)**

(OBMEP 2011 F2N1) Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.

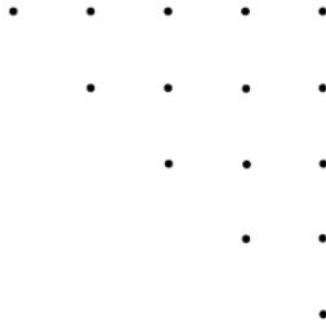


- d) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?
- e) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?
- f) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

**FICHA 7 (utilizada na prática)**

(OBMEP 2013 BQ-N2) **Quantos quadrados?**

O professor Ciconete desenhou no quadro os seguintes pontos:



Em seguida, ele perguntou aos seus alunos quantos quadrados com vértices em tais pontos é possível desenhar. Qual é a resposta correta para a pergunta do professor Ciconete?

**FICHA 8 (não utilizada na prática)**

(OBMEP 2011 F1N1) Gabriel comprou uma rosa, um cravo e um lírio e quer dar uma flor para cada uma de suas três amigas. Ele sabe que uma amiga não gosta de cravos, outra não gosta de lírios e a terceira não gosta de rosas. De quantas maneiras ele pode distribuir as flores de modo a agradar às três amigas?

**FICHA 9 (não utilizada na prática)**

(OBMEP 2012 F1N1) Amanda, Bianca e Carolina são amigas e têm idades diferentes. Sabe-se que, das sentenças a seguir, exatamente uma é verdadeira.

- I. Amanda e Carolina são mais jovens que Bianca.
- II. Amanda é mais velha que Bianca.
- III. Amanda é mais velha que Bianca e Carolina.
- IV. Amanda não é nem a mais nova nem a mais velha das amigas.



Qual das alternativas mostra o nome das três amigas em ordem crescente de idade?

- A) Amanda, Bianca, Carolina.
- B) Carolina, Bianca, Amanda.
- C) Bianca, Carolina, Amanda.
- D) Carolina, Amanda, Bianca.
- E) Amanda, Carolina, Bianca.

## APÊNDICE E – Lista de exercícios 2

**Exercício 1**

(OBMEP 2010 BQ-N1) O código secreto de um grupo de alunos é um número de três algarismos distintos diferentes de zero.

Descubra o código utilizando as informações a seguir.

- Nenhum algarismo correto.

- Só um algarismo correto na posição certa.

- Só um algarismo correto, mas na posição errada.

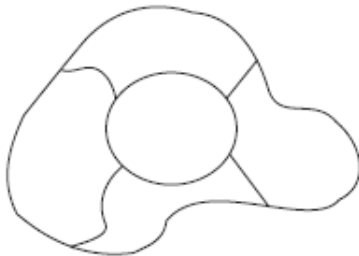
- Só um algarismo correto, mas na posição errada.

- Só um algarismo correto na posição certa.

**Código**   .

**Exercício 2**

(OBMEP 2010 BQ-N1) A figura mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarelo, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?



## APÊNDICE F – Questionário

1. Quanto ao nível de dificuldade:

a. O que você achou do nível de dificuldade das atividades?

---

---

b. Foi possível solucioná-las? Caso não tenha conseguido alguma conte qual foi problema.

---

---

2. Quanto ao aprendizado:

a. Quando você for resolver um novo problema, você pensa em algo que deve ser avaliado antes de começar a resolvê-lo?

---

---

b. Conte como faria para resolver um problema qualquer.

---

---

---

---

3. Quanto ao conteúdo.

a. Você já havia estudado análise combinatória em outras séries? Caso sim conte como foi.

---

---

---

4. Espaço livre:

a. Este espaço é para você falar sobre algo que tenha chamado sua atenção neste trabalho, sugerir melhorias, fazer reclamações e falar sobre o que gostou.

---

---

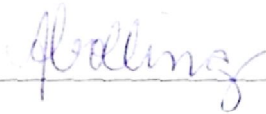
---

---

## ANEXO: AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA

### Autorização

Autorizo a acadêmica Fernanda de Abreu Lima, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a proceder, no Instituto Educacional Dom Diogo de Souza, à coleta de dados para futuras análises e obtenção de resultados relacionados com a aprendizagem em Matemática, a fim de desenvolver seu Trabalho de Conclusão de Curso.



---

Instituto Educacional Dom Diogo de Souza

INSTITUTO ESTADUAL  
DOM DIOGO DE SOUZA  
Portaria Nº 06907 - D. O. - 11/12/2009  
Resolução CEED Nº 253/2009  
Porto Alegre - RS