

Universidade Federal do Rio Gande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Desenvolvimento de ferramentas computacionais para  
análise de interação fluido-estrutura incluindo não  
linearidade geométrica

Felipe Schaedler de Almeida

Porto Alegre

2012

Felipe Schaedler de Almeida

**Desenvolvimento de ferramentas computacionais para  
análise de interação fluido-estrutura incluindo não  
linearidade geométrica**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia. Orientador: Prof. Dr. Armando Miguel Awruch.

Porto Alegre

2012

Snnnt, SCHAEHLER DE ALMEIDA, Felipe

Desenvolvimento de ferramentas computacionais para análise de interação fluido-estrutura incluindo não linearidade geométrica

245 páginas

Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

1. Aerodinâmica
2. Aeroelasticidade
3. Não linearidade geométrica
4. Elementos finitos
5. Análise de Estruturas de Materiais Compósitos

I. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Felipe Schaedler de Almeida

Desenvolvimento de ferramentas computacionais para  
análise de interação fluido-estrutura incluindo não  
linearidade geométrica

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de  
DOUTOR EM ENGENHARIA, na Área de Concenação de  
ESTRUTURAS, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e  
pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade  
Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 21 de Novembro de 2012

Prof.Armando Miguel Awruch  
D.Sc. COPPE/UFRJ  
Orientador

Prof.Luiz Carlos Pinto da Silva Filho  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**Comissão Julgadora:**

Prof. Inácio Benvegnu Morsch  
Dr. PPGEC/UFRGS

Prof. Paulo Roberto de Freitas Teixeira  
Dr. PPGEC/UFRGS

Prof. Sérgio Frascino Müller de Almeida  
PhD. University of Kansas

*À minha esposa Celine*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, prof. Armando Miguel Awruch, pelo incentivo ao meu ingresso no doutorado e pelo companheirismo na realização dos trabalhos.

Aos professores e funcionários do PPGEC, pelos conhecimentos transmitidos e pelo suporte às atividades desenvolvidas.

Aos companheiros de pós-graduação, em particular Gustavo Bono, Luis Felipe Espath, Sergio Cardozo e Marcelo Figueiredo, pelo convívio agradável e pela colaboração.

Às agências CAPES e CNPq pelo suporte financeiro concedido e ao CESUP/UFRGS pela disponibilização da infraestrutura computacional necessária à realização do trabalho.

À minha família e à família da minha esposa pelo incentivo incondicional.

Em especial, agradeço à minha esposa pelo amor e companheirismo, sem os quais seria incapaz de completar essa jornada.

# Resumo

Almeida, F.S. **Desenvolvimento de ferramentas computacionais para análise de interação fluido-estrutura incluindo não linearidade geométrica**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2012.

Esse trabalho trata da análise computacional de problemas aeroelásticos. Os casos de interesse envolvem escoamentos compressíveis em torno de estruturas de cascas de materiais compósitos laminados. A solução do problema de interação fluido-estrutura é conduzida por meio do esquema particionado denominado *improved serial staggered procedure* (ISS), o que permite a utilização de algoritmos independentes para a análise de cada componente do sistema. Um elemento triangular plano com três nós destinado à análise de cascas de materiais compósitos laminados é obtido com base na formulação de dois elementos de alta performance desenvolvidos para a análise de membranas e de placas. A flexibilidade ao corte transversal, a ausência de travamento por razão de aspecto em problemas com flexão no plano da casca são características do elemento. A análise dinâmica não linear é realizada através do procedimento corrotacional de conservação aproximada de energia (AECCP) que foi implementado com base na formulação corrotacional independente de elemento (*element independent CR formulation* – EICR). Essa abordagem permite que problemas transientes com grandes rotações e forte não linearidade geométrica sejam integrados por longos períodos de tempo, mantendo a estabilidade, a precisão e a eficiência da solução. A simulação do escoamento é realizada através do método explícito de Taylor-Galerkin de dois passos utilizando elementos finitos tetraédricos em malhas não estruturadas para a discretização espacial. As equações governantes do escoamento são dadas segundo a formulação lagrangeana-euleriana arbitrária (ALE), permitindo que malhas móveis sejam empregadas na análise dos problemas aeroelásticos. Um método simples e eficiente é adotado para a movimentação da malha do fluido com base na distância do nó às superfícies de contorno do escoamento. A utilização de malhas não coincidentes na discretização do fluido e da estrutura é possibilitada pelo emprego do esquema de projeção nodal para a transferência de informações entre os meios na região de interface. A apresentação, implementação e verificação de cada componente da ferramenta de análise é realizada independentemente graças à natureza do esquema de solução particionado. Por fim são analisados problemas de interação fluido-estrutura, onde as respostas obtidas são comparadas com resultados experimentais e numéricos de outros autores. Também são propostos e analisados novos problemas envolvendo estruturas de compósitos laminados.

Palavras chave: Aerodinâmica, Aeroelasticidade, Não linearidade geométrica, Elementos finitos, Análise de Estruturas de Materiais Compósitos

# Abstract

Almeida, F.S. **Development of computational tools for fluid-structure interaction analysis including geometrical nonlinearity** . Tese (Doutorado em Engenharia Civil) Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2012.

This work deals with computational analysis of aeroelastic problems, specifically those related to compressible flows around laminated composite shell structures. The fluid-structure problem is solved by a partitioned scheme called *improved serial staggered procedure* (ISS), allowing to use independent algorithms for the analysis of each system component. A 3-node triangular flat element for laminated composite shells is obtained based on the formulation of two high performance plate and membrane elements. Shear flexibility and no aspect ratio locking on in-plane bending problems are some of the element characteristics. The nonlinear dynamic analysis is performed using the approximately energy conserving corotational procedure (AECCP), which is implemented based on the element independent corotational formulation (EICR). This approach enables long time transient problems with strong nonlinearities and large rotations to be efficiently solved while keeping stability and accuracy. The flow simulation is performed by the explicit two step Taylor-Galerkin method employing tetrahedral finite elements in unstructured meshes for the space discretization. The flow governing equations are given in arbitrary lagrangian-eulerian formulation, enabling aeroelastic simulations with moving meshes. A simple and efficient method is adopted to move the fluid mesh based on the distance of each node to the boundary surfaces. Transference of information between non-matching fluid and structure meshes are performed by the node-projection scheme. Each component of the aeroelastic analysis tool is independently presented, implemented and verified due to the partitioned nature of the scheme adopted for the solution of the coupled system. Some aeroelastic problems are analyzed and results are compared to other experimental and numerical works. New problems of aeroelastic analysis of laminated composite structures are proposed and solved.

Keywords: Aerodynamics, Aeroelasticity, Geometric Nonlinearity, Finite elements, Analysis of Composite Structures

---

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>13</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>14</b>
1.1 Problemas de Interação fluido-estrutura . . . . .	18
1.2 Dinâmica de fluidos computacional . . . . .	21
1.3 Dinâmica de estruturas computacional . . . . .	24
1.4 Objetivos e organização do trabalho . . . . .	31
<b>2 Análise estrutural</b>	<b>33</b>
2.1 Formulação básica da análise estrutural . . . . .	35
2.2 Materiais compósitos laminados . . . . .	41
2.2.1 Comportamento mecânico de lâminas ortotrópicas . . . . .	42
2.2.2 Comportamento mecânico dos laminados . . . . .	46
2.3 Formulação estática linear local do elemento finito de casca . . . . .	51
2.3.1 Elemento finito de membrana . . . . .	54
2.3.2 Elemento finito de placa . . . . .	60
2.3.3 Elemento finito de casca . . . . .	70
2.4 Sistemas de referência na análise corrotacional de estruturas de materiais compósitos laminados . . . . .	72
2.4.1 Transformação de referencial para tensões, deformações e matrizes constitutivas . . . . .	80
2.5 Análise estática não linear geométrica: formulação corrotacional . . . . .	83
2.5.1 Formulação corrotacional independente de elemento . . . . .	86
2.6 Análise dinâmica não linear geométrica: formulação corrotacional . . . . .	104
2.6.1 Interpolação temporal das variáveis nodais . . . . .	107
2.6.2 Procedimento Corrotacional de Conservação Aproximada de Energia	110
<b>3 Simulação numérica de escoamentos compressíveis em malhas móveis</b>	<b>123</b>
3.1 Equações governantes do escoamento . . . . .	123
3.1.1 Descrição lagrangeana-euleriana arbitrária . . . . .	126
3.2 Método de Taylor-Galerkin de dois passos . . . . .	129
3.2.1 Discretização temporal . . . . .	129
3.2.2 Discretização espacial . . . . .	130
3.2.3 Condição de estabilidade . . . . .	133
3.2.4 Amortecimento numérico . . . . .	133
3.3 Atualização automática da malha . . . . .	134

---

<b>4</b>	<b>Acoplamento fluido-estrutura</b>	<b>138</b>
4.1	Esquema particionado para problemas de interação fluido-estrutura . . . .	141
4.2	Transferência de informação na interface fluido-estrutura . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Exemplos de aplicação</b>	<b>152</b>
5.1	Análise estática não linear geométrica de estruturas . . . . .	152
5.1.1	Casca laminada semicilíndrica sob carga pontual na extremidade . .	153
5.1.2	Painel laminado semicilíndrico rotulado . . . . .	156
5.1.3	Placa engastada com enrijecedor . . . . .	158
5.2	Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas . . . . .	160
5.2.1	Viga em balanço . . . . .	160
5.2.2	Resposta transiente não linear de um painel esférico laminado . . .	162
5.2.3	Placa engastada com enrijecedor . . . . .	165
5.2.4	Movimento livre de um cilindro curto . . . . .	168
5.2.5	Movimento livre de meio cilindro de material compósito . . . . .	172
5.3	Análise de escoamentos compressíveis . . . . .	173
5.3.1	Escoamento sobre a asa ONERA M6 . . . . .	173
5.3.2	Escoamento sobre um aerofólio com movimento oscilatório prescrito	179
5.4	Problemas de interação fluido-estrutura . . . . .	184
5.4.1	Escoamento sobre uma placa . . . . .	185
5.4.2	Oscilação de uma asa delta . . . . .	191
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>220</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>225</b>
<b>A</b>	<b> rotações finitas no espaço</b>	<b>235</b>
A.1	Uso de quaternions na representação de rotações finitas no espaço . . . . .	238
A.2	Variação das rotações . . . . .	242

---

# Lista de Figuras

2.1	Deformações normais segundo a FSDT . . . . .	37
2.2	Deformações de cisalhamento transversal segundo a FSDT . . . . .	38
2.3	Direções principais de uma lâmina de material compósito com reforço de fibras unidirecionais . . . . .	43
2.4	Ângulo $\alpha$ entre os sistemas de referência $x-y-z$ e 1-2-3. . . . .	44
2.5	Material compósito laminado . . . . .	47
2.6	Posição das lâminas ao longo da espessura do laminado . . . . .	48
2.7	Distribuição de tensões e deformações normais ao longo da espessura de um material compósito laminado . . . . .	49
2.8	Distribuição de tensões e deformações de cisalhamento trasversal ao longo da espessura de um material compósito laminado . . . . .	50
2.9	Graus de liberdade de membrana + placa = casca . . . . .	52
2.10	Variáveis geométricas do triângulo . . . . .	53
2.11	Deformações naturais . . . . .	57
2.12	Deslocamentos nodais e funções de interpolação em 1D usados nas funções de viga de compósito laminado de Timoshenko. . . . .	62
2.13	Elemento triangular auxiliar com 6 nós . . . . .	63
2.14	Sistemas de referência global e local . . . . .	73
2.15	Sistema de referência local em configuração deformada . . . . .	75
2.16	Sistema de referência do material . . . . .	78
2.17	Sistema de referência das lâminas . . . . .	80
2.18	Representação esquemática da formulação EICR como um pré-/pós-processador da biblioteca linear de elementos finitos . . . . .	87
2.19	Configurações base ( $\mathcal{C}^0$ ), corrotacional ( $\mathcal{C}^R$ ) e deformada ( $\mathcal{C}^D$ ) usadas na descrição CR . . . . .	88
2.20	Deslocamentos e rotações do elemento no plano . . . . .	90
2.21	Deformação artificial na configuração intermediária . . . . .	113
3.1	Regiões de descrição elueriana, lagrangeana e ALE na análise de escoamentos sobre corpos móveis . . . . .	127
3.2	Distância mínima de um ponto da malha ALE às superfícies de contorno. . . . .	137
4.1	Esquema do algoritmo ISS para problemas de interação fluido-estrutura . . . . .	145
4.2	Esquema dos passos do algoritmo ISS com subciclos para problemas de interação fluido-estrutura . . . . .	146
4.3	Transferência de dados baseada no esquema de projeção nodal . . . . .	151
5.1	Geometria e carregamento da casca semicilíndrica . . . . .	153
5.2	Malhas de elementos finitos para a casca semicilíndrica . . . . .	154

---

5.3	Deslocamento do ponto A considerando os laminados [90/0/90] e [0/90/0]	155
5.4	Deslocamento do ponto A obtidos pelas malhas 40×40 e 16×24.	155
5.5	Delocamento vertical na configuração deformada final para casca com laminado [90/0/90] (esquerda) e [0/90/0] (direita).	156
5.6	Painel laminado semicilíndrico rotulado	156
5.7	Deslocamento vertical do ponto A no painel semicilíndrico	157
5.8	Geometria da placa engastada com enrijecedor	158
5.9	Geometria, propriedades do material e carregamento	161
5.10	Deslocamento vertical da extremidade livre	161
5.11	Configurações deformadas da viga em balanço	162
5.12	Evolução da energia da viga em balanço	162
5.13	Geometria do painel esférico	163
5.14	Malha do painel esférico no plano $x-y$	164
5.15	Deslocamento central normalizado para o painel com laminado rígido a flexão $[0_2/\pm 30]_s$ .	164
5.16	Deslocamento central normalizado para o painel com laminado quasi-isotrópico $[0/\pm 45/90]_s$ .	165
5.17	Deslocamento central normalizado para o painel com laminado rígido a torção $[\pm 45/\mp 45]_s$ .	165
5.18	Placa engastada com enrijecedor com força transversal na extremidade livre	166
5.19	Deslocamento do ponto A para malhas com razão de aspecto 1	167
5.20	Malhas com razão de aspecto 1 para a placa engastada com enrijecedor	167
5.21	Malhas com razão de aspecto 2 e 4 para a placa engastada com enrijecedor	168
5.22	Deslocamento do ponto A para malhas com razão de aspecto 2 e 4	168
5.23	Geometria do cilindro curto e carregamento	169
5.24	Deslocamentos do ponto A nas direções X, Y e Z.	170
5.25	Velocidade do ponto A nas direções X, Y e Z.	171
5.26	Evolução da energia interna (i), cinética (k) e total (i+k) durante o movimento do cilindro.	171
5.27	Sequência de configurações do cilindro durante seu movimento.	171
5.28	Geometria e carregamento	172
5.29	Sequência de configurações durante o movimento	173
5.30	Evolução da energia interna e da energia cinética durante o movimento	173
5.31	Geometria da asa	174
5.32	Detalhes da malha de elementos finitos	175
5.33	Coefficiente de pressão sobre a superfície da asa	176
5.34	Velocidade do escoamento sobre a asa ONERA M6	177
5.35	Coefficiente de pressão em várias seções ao longo da asa ONERA M6	178
5.36	Malha não estruturada para cálculo do escoamento sobre o aerofólio NACA0012	180
5.37	Configuração inicial do escoamento sobre o aerofólio NACA0012 com $\alpha = 0,016^\circ$	181
5.38	Coefficiente de sustentação	182
5.39	Pressão e velocidade do escoamento sobre o aerofólio em diferentes $\alpha$	183
5.40	Geometria e condições de contorno para o escoamento sobre a placa	185
5.41	Malha para discretização do escoamento sobre a placa	186
5.42	Pressão em vários instantes de tempo (deformação da malha × 100)	188
5.43	Configuração deformada da placa (× 100) em vários instantes	188

5.44	Deslocamento vertical em $x = 0.35\text{m}$ . . . . .	189
5.45	Evolução da energia na placa . . . . .	189
5.46	Incremento de energia total em cada passo de tempo . . . . .	189
5.47	Deslocamento vertical em $x = 0.35\text{m}$ para as malhas M20 e M40 . . . . .	190
5.48	Deslocamento vertical em $x = 0.35\text{m}$ para as malhas M10 e M20 . . . . .	190
5.49	Deslocamento vertical em $x = 0.35\text{m}$ . . . . .	191
5.50	Geometria e malha da asa delta . . . . .	192
5.51	Malha da asa delta . . . . .	194
5.52	Detalhe da malha do fluido sobre a asa delta . . . . .	195
5.53	Modos e frequências naturais de vibração da asa de material isotrópico . . . . .	195
5.54	Deslocamento da ponta da asa de material isotrópico para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	196
5.55	Deslocamento da ponta da asa de material isotrópico para $q = 2,58 \text{ psi}$ na malha 2 . . . . .	197
5.56	Desempenho da paralelização para a malha 1 . . . . .	198
5.57	Tempo de processamento de um passo de tempo para cada $10^6$ nós . . . . .	199
5.58	Configuração deformada, força e momentos resultantes e ângulo de giro da ponta da asa isotrópica para $q = 2,98\text{psi}$ . . . . .	199
5.59	Deslocamento da ponta da asa de material isotrópico para $q = 2,98 \text{ psi}$ . . . . .	200
5.60	Pressão do escoamento sobre a configuração deformada ( $\times 10$ ) da asa isotrópica para $q = 2,98$ em $t = 0.1625\text{s}$ . . . . .	201
5.61	Giro da ponta da asa de material isotrópico para $q = 2,98 \text{ psi}$ . . . . .	202
5.62	Força resultante na direção $z$ na asa isotrópica para $q = 2,98 \text{ psi}$ . . . . .	202
5.63	Força resultante na direção $x$ na asa isotrópica para $q = 2,98\text{psi}$ . . . . .	203
5.64	Momentos resultantes $Mr_x$ e $Mr_y$ na asa isotrópica para $q = 2,98 \text{ psi}$ . . . . .	203
5.65	Número de passos de tempo do fluido por passo de tempo da estrutura na análise da asa isotrópica para $q = 2,98 \text{ psi}$ . . . . .	203
5.66	Modos e frequências de vibração da AO1 . . . . .	205
5.67	Modos e frequências de vibração da AO2 . . . . .	206
5.68	Deslocamento e giro da ponta da asa para o carregamento de flexão . . . . .	206
5.69	Deslocamento e giro da ponta da asa para o carregamento de torção . . . . .	207
5.70	Deslocamento da ponta da AO1 para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	207
5.71	Deslocamento e força resultante na direção $z$ na AO1 para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	208
5.72	Configuração deformada e força aerodinâmica $Fz$ sobre os nós da estrutura em $t=0,194\text{s}$ na AO1 para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	208
5.73	Deslocamento de pontos sobre a linha de um quarto de corda na AO1 para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	209
5.74	Ângulo de giro da seção transversal na AO1 para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	209
5.75	Deslocamento da ponta da AO1 para $q = 2,18 \text{ psi}$ . . . . .	210
5.76	Resultados da análise da AO2 para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	211
5.77	Configuração deformada da asa AO2 para $q = 2,58 \text{ psi}$ em $t=0,0192\text{s}$ . . . . .	211
5.78	Deslocamentos ao longo da AO2 para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	212
5.79	Resultados da segunda análise da AO2 para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	213
5.80	Deslocamentos ao longo da AO2 para $q = 2,58 \text{ psi}$ na segunda análise . . . . .	213
5.81	Força $F_z$ sobre a configuração de formada da AO2 para $q = 2,58 \text{ psi}$ em vários instantes de tempo . . . . .	214
5.82	Pressão no escoamento sobre a AO2 para $q = 2,58 \text{ psi}$ . . . . .	215
5.83	Deslocamento da ponta da AO2 para $q = 2,18 \text{ psi}$ . . . . .	216
5.84	Força aerodinâmica resultante nas direções $x$ e $z$ na AO2 para $q = 2,18 \text{ psi}$ . . . . .	216

5.85	Configuração final da AO2 ( $\times 10$ ) para $q = 2,18$ psi . . . . .	216
5.86	Deslocamentos $u_z$ , $\theta_x$ e $\theta_y$ na configuração final da AO2 para $q = 2,18$ psi .	217
5.87	Deslocamentos da AO2 para $q = 2,18$ psi . . . . .	217
5.88	Deslocamento $u_z$ para de várias cordas ( $y/L$ ) na configuração final da AO2 para $q = 2,18$ psi . . . . .	218
5.89	Comparação do deslocamento da ponta da AO2 para $q = 2,18$ psi em duas análises com parâmetros diferentes . . . . .	219
A.1	Rotação finita tridimensional . . . . .	236
A.2	Transformações entre representações de rotações finitas . . . . .	242

---

# Lista de Tabelas

5.1	Deslocamento final do ponto A obtidos com malhas e elementos diferentes .	160
5.2	Propriedades mecânicas dos materiais ortotrópicos . . . . .	204
5.3	Propriedades mecânicas adimensionalizadas por $E_2$ . . . . .	204
5.4	Propriedades dos materiais ortotrópicos adimensionalizadas pelas propriedades do aço . . . . .	205

---

# Capítulo 1

## Introdução

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional voltada à análise de problemas aeroelásticos. No decorrer do texto serão discutidas as teorias que descrevem esses problemas bem como os métodos numéricos empregados no desenvolvimento dos algoritmos construídos para a simulação computacional. Conforme esclarecido a seguir, o estudo aqui apresentado trata do caso específico de escoamentos compressíveis e dá ênfase às estruturas formadas por cascas e placas de materiais compósitos laminados. Nesse capítulo introdutório será apresentada apenas uma visão geral dos tópicos abordados no trabalho. Discussões mais detalhadas sobre cada assunto, assim como a bibliografia relacionada, são apresentadas separadamente nos capítulos que seguem, conforme descrito na Seção 1.4.

O problema aeroelástico trata do estudo do escoamento de ar sobre estruturas flexíveis considerando os efeitos de interação entre o meio sólido e o meio fluido. Essa interação é determinada pelos carregamentos que o escoamento impõe sobre a estrutura e pelas modificações no escoamento causados pela configuração deformada da estrutura. Nesse contexto, a análise do problema aeroelástico emprega conceitos de duas disciplinas tradicionalmente desenvolvidas e estudadas separadamente. Uma dessas disciplinas é a dinâmica de fluidos, que tem como objetivo descrever o campo de velocidades e de pressão desenvolvido durante o escoamento de um fluido. O problema aerodinâmico é o caso particular da dinâmica de fluidos que trata de escoamentos externos (com o fluido envolvendo um sólido) em que o fluido é o ar. A outra disciplina envolvida é a dinâmica estrutural, que visa prever o desenvolvimento de forças internas e o movimento

---

---

de estruturas quando estas são submetidas a forças externas ou a deslocamentos impostos em certas regiões do seu contorno.

Há muito o entendimento do comportamento de fluidos e estruturas interessa à civilização. Desde o início, a experimentação tem sido uma ferramenta importante para a condução dos estudos nessas áreas. A evolução desse processo conduziu à identificação das relações constitutivas de cada meio e ao estabelecimento de teorias que descrevem o comportamento do fluido e da estrutura através de equações diferenciais. No entanto, para aplicações práticas de engenharia que apresentam condições de contorno complexas raramente se tem a solução dessas equações diferenciais. O tratamento desses problemas só é possível com o emprego de métodos numéricos que permitem a obtenção de soluções aproximadas com níveis satisfatórios de precisão. Essa forma de abordagem ganhou maior impulso com o advento dos computadores, pois estes tornaram possível a solução de problemas envolvendo grande número de operações. A crescente disponibilidade de recursos computacionais permitiu que aplicações cada vez mais complexas fossem realizadas, incentivando o desenvolvimento contínuo de algoritmos mais eficientes. Os esforços no sentido da aplicação integrada de conceitos físicos, métodos numéricos e ciência da computação levaram ao surgimento de novos ramos da ciência como a física computacional e a engenharia computacional. Os estudos desenvolvidos nessas áreas não têm como único objetivo a modelagem mais apropriada para os fenômenos importantes envolvidos no problema. Também são de interesse a elaboração de métodos numéricos mais precisos, estáveis e eficientes para a solução dos problemas. Além disso, esses métodos devem ser transcritos na forma de algoritmos a serem implementados em códigos computacionais obtendo a maior eficiência possível em arquiteturas de computadores específicas, como no caso da computação paralela em clusters de alto desempenho.

Assim como tradicionalmente o estudo da dinâmica de fluidos e de estruturas é desenvolvido em separado, a abordagem computacional dessas duas áreas também se estabeleceu em duas disciplinas denominadas dinâmica de estruturas computacional (DEC) e a dinâmica de fluidos computacional (DFC, ou CFD do inglês *Computational Fluid Dynamics*). A DEC teve um desenvolvimento muito rápido, logo se estabelecendo como ferramenta de análise aplicada em projetos nas mais variadas áreas da engenharia. O método dos elementos finitos (MEF) (Zienkiewicz e Taylor, 2000) é a técnica mais

---

empregada para a solução aproximada dos problemas de mecânica estrutural. A DFC teve uma evolução mais tardia devido à natureza não linear dos fenômenos envolvidos no escoamento de fluidos e ao grande esforço computacional demandado para a solução desses problemas. Dentre os métodos mais usualmente aplicados à simulação numérica de escoamentos estão o método das diferenças finitas, o método dos volumes finitos e o método dos elementos finitos. Existem ainda outros métodos desenvolvidos mais recentemente com aplicações tanto na DEC quanto na DFC. Dentre esses estão variações do método dos elementos finitos, como o método dos elementos finitos estendido (XFEM) (Moës et al., 1999), uma gama de métodos sem malha (*meshless methods*) tais como o método de Galerkin livre de elemento (*element-free Galerkin*) (Belytschko et al., 1994) e mais recentemente os métodos de análise isogeométrica (*Isogeometric methods*) (Cottrell et al., 2009). No entanto, devido à sua maturidade, apenas os métodos mais tradicionais listados anteriormente costumam figurar nos programas comerciais voltados à análise computacional nas duas áreas em questão.

Tanto a DEC quanto a DFC tem ganho importância nas áreas de pesquisa e de projeto de engenharia. Essas técnicas vêm sendo aplicadas com grande sucesso na substituição ou no emprego em conjunto com métodos experimentais. Esse avanço se deve tanto ao aprimoramento dos algoritmos utilizados na solução quanto ao crescimento vertiginoso dos recursos computacionais disponíveis.

A análise numérica é uma ferramenta de grande relevância nos projetos de engenharia por fornecer informações do produto na fase inicial do seu desenvolvimento. Nessa etapa existe mais liberdade para introdução de modificações sem que haja um impacto significativo no tempo e no custo do desenvolvimento. O estudo de muitas alternativas de projeto através de ensaios é cada vez menos usual devido à demanda de tempo, equipamentos e recursos financeiros necessários para a construção dos protótipos, realização dos ensaios e análise dos resultados. Dessa forma apenas as poucas soluções candidatas ao projeto final, que resultaram de estudos numéricos anteriores, costumam ser analisadas através de ensaios. Outro ponto positivo da análise computacional é a obtenção de dados sobre todo o domínio do problema, permitindo um entendimento mais completo dos fenômenos presentes na aplicação em estudo. Isso fornece informações que podem ser usadas na definição das alterações necessárias para a otimização do projeto. Em métodos experimentais isso

---

não é possível, pois nesses casos as informações são fornecidas apenas em alguns poucos pontos onde os instrumentos de aquisição de dados são instalados. Problemas de precisão também podem ocorrer na realização de ensaios por questões de instrumentação ou por dificuldades em respeitar a similaridade em todos os aspectos (dimensões, massa, rigidez, velocidade etc.) quando modelos reduzidos são empregados.

Em certos casos a análise computacional pode ser a única alternativa para o estudo de fenômenos. O impedimento da realização de experimento pode ter razões éticas, como na área de bioengenharia, a exemplo dos estudos sobre o sistema cardiovascular, ou políticas como no desenvolvimento de armas nucleares. Também existem impedimentos de ordem prática devido à incapacidade de reprodução em laboratório, o que ocorre por exemplo em estudos sobre eventos cosmológicos.

Com a maturidade dos métodos de análise computacional problemas cada vez mais complexos vêm sendo abordados. Dentre esses novos desafios estão os problemas de interação fluido-estrutura. Embora técnicas experimentais possam ser empregadas para a avaliação desses problemas, sua aplicação fica cada vez mais restrita pelos motivos já elencados acima. Dessa forma, a possibilidade de análise desses problemas através de técnicas computacionais é de grande interesse para o desenvolvimento de projetos em muitas áreas da engenharia.

Nas formas mais simplificadas de análise dos problemas aeroelásticos as deformações da estrutura e os efeitos aerodinâmicos são avaliados separadamente. Em uma primeira etapa métodos experimentais, analíticos ou numéricos são empregados para determinar a ação do escoamento sobre a superfície “molhada” da estrutura, que é mantida imóvel. Em seguida são avaliados os efeitos do escoamento sobre a estrutura tomando as forças aerodinâmicas obtidas anteriormente como carregamento externo. Contudo, essa abordagem não é satisfatória nas situações em que os deslocamentos decorridos na estrutura modificam significativamente seu formato aerodinâmico. Nesses casos o escoamento também é alterado com conseqüente modificação na pressão exercida pelo fluido sobre a estrutura, que por sua vez sofre novos deslocamentos (Clark et al., 2004). Esse efeito ocorre simultaneamente em um processo que se estabelece ao longo do tempo, podendo convergir a uma configuração permanente com equilíbrio entre as forças internas da estrutura e as forças externas exercidas pelo fluido, ou prosseguir em um regime transiente. Assim, é

---

imprescindível a análise do problema aeroelástico de forma acoplada, considerando o efeito mútuo entre os meios.

A determinação da configuração de equilíbrio entre a estrutura deformada e o escoamento pode ser de bastante interesse em muitas situações. Essa análise leva a uma definição mais precisa dos esforços gerados na estrutura, permitindo um maior refinamento no seu projeto. Além disso, características aerodinâmicas como os coeficientes (ou forças) de sustentação e de arrasto podem variar consideravelmente entre a configuração inicial e a configuração deformada, com possível degradação do desempenho aerodinâmico. O conhecimento do comportamento da estrutura quando não é estabelecido um regime estacionário no problema aeroelástico também é muito importante. Uma das principais preocupações no projeto de estruturas submetidas aos efeitos aeroelásticos está relacionado a fenômenos de instabilidade. Isso ocorre quando o efeito do escoamento sobre a estrutura provoca o aumento indefinido dos deslocamentos, causando sua ruptura. Tais fenômenos são denominados na literatura internacional como *flutter* e *buffeting*, dependendo de sua origem (Clark et al., 2004). A verificação da ocorrência de instabilidades de origem aeroelástica faz parte do projeto de estruturas civis de grande flexibilidade como edificações muito altas ou grandes pontes estaiadas (ou suspensas), bem como de estruturas aeronáuticas desenvolvidas para operar em altas velocidades.

Dadas as questões de eficiência e segurança relacionadas acima, existe grande interesse no desenvolvimento de ferramentas computacionais capazes de analisar problemas aeroelásticos. Além da modelagem da estrutura e do fluido também é preciso considerar corretamente os efeitos de interação que definem a influência simultânea de um meio sobre o outro. Para tanto, muitos estudos vem sendo realizados no intuito de desenvolver algoritmos para solução de problemas de interação-fluido estrutura.

## 1.1 Problemas de Interação fluido-estrutura

A aeroelasticidade é um caso particular dos problemas de interação fluido-estrutura, que por sua vez são um tipo de problema envolvendo sistemas acoplados. Entende-se por sistema acoplado um conjunto de componentes que interagem dinamicamente, com cada componente influenciando o comportamento dos demais. Os problemas de

---

interação controle-estrutura e interação termo-mecânica são exemplos de outros problemas envolvendo sistemas acoplados de interesse para a engenharia. No que se refere aos problemas de interação fluido-estrutura outros casos específicos podem ser relacionados além do problema aeroelástico. Essas diferenças estão relacionadas ao tipo de fluido envolvido (como a água nos problemas de hidroelasticidade), à forma do escoamento (interno ou externo) e aos fenômenos relevantes tanto na estrutura quanto no fluido (impacto, propagação de ondas acústicas, cavitação etc.). Todas essas características têm importância na intensidade da influência que um meio exerce sobre o comportamento do outro. Esse fator é determinante na escolha da forma mais conveniente de tratamento para cada tipo de problema acoplado.

No caso do sistema acoplado estudado nesse trabalho existe uma interação fraca entre os meios. Tal fato se deve à baixa massa específica do fluido em comparação com a da estrutura. Essa característica é muito relevante na escolha do tipo de algoritmo a ser empregado na solução do problema aeroelástico. A divisão básica entre os algoritmos de solução de problemas acoplados se dá entre esquemas monolíticos e esquemas particionados (Felippa et al., 2001).

No primeiro tipo todos os sistemas devem ser discretizados segundo o mesmo método e avançados simultaneamente em cada passo da análise. Isso garante uma ótima precisão e estabilidade a esses métodos, tornando-os muito convenientes para a abordagem de sistemas com forte interação ou quando essa interação ocorre em todo o domínio analisado (interação entre efeitos mecânicos e efeitos térmicos ou eletromagnéticos). No entanto, também existem inconvenientes na adoção de métodos monolíticos. Devido à grande diferença no comportamento do fluido e da estrutura cada um desses meios é mais eficientemente analisado através de um método particular. O emprego de um único método para discretização dos dois meios tende a tornar os esquemas monolíticos muito ineficientes em termos computacionais. Adicionalmente existe a possibilidade de surgimento de problemas de instabilidade numérica devido à ocorrência de matrizes mal condicionadas nas análises realizadas utilizando métodos implícitos.

A forma alternativa de tratamento de problemas acoplados é dada pelos esquemas particionados (Piperno e Farhat, 2001; Felippa et al., 2001). Nesse caso, cada sistema é avançado independentemente e em estágios distintos durante a análise. Essa característica

---

permite que cada meio seja discretizado segundo métodos diferentes. Com isso podem ser aplicadas as técnicas mais eficientes que vêm sendo desenvolvidas para o tratamento de problemas de dinâmica estrutural e de dinâmica de fluidos. Os esquemas particionados também facilitam a modelagem de cada um dos meios por malhas que não são coincidentes na interface fluido-estrutura. Com isso, a malha da estrutura não precisa ser construída com um refinamento igual ao exigido para a malha do fluido na região da camada limite. O emprego do método de discretização mais eficiente para o fluido e para a estrutura e o uso de malhas adequadas à modelagem de cada meio tendem a proporcionar uma boa eficiência computacional aos esquemas particionados. Outro benefício do emprego desse tipo de esquema é que os algoritmos previamente implementados de forma independente para a análise de cada um dos meios podem ser facilmente integrados ao algoritmo de solução do problema acoplado, agilizando a construção, a verificação e o aprimoramento dos códigos. Toda essa flexibilidade de discretização trazida pelos esquemas particionados vem acompanhada de restrições relacionadas à estabilidade e precisão das análises. Isso ocorre porque a interação entre os meios é considerada apenas de forma aproximada através de transferência de informação na região de interface e em instantes distintos. Quando as malhas não são coincidentes ainda deve ser empregado um algoritmo próprio para a transferência dessas informações.

Apesar dessas dificuldades, os métodos particionados têm sido empregados com sucesso na análise de problemas aeroelásticos (Lesoinne e Farhat, 1996; Farhat e Lesoinne, 2000; Farhat et al., 2003). Um ponto importante para esse sucesso é a fraca interação existente entre os meios, pois dessa forma os erros introduzidos pelas aproximações do acoplamento no esquema particionado não inviabilizam a análise. Muitos avanços vêm sendo obtidos no desenvolvimento de novos algoritmos e na definição de condições a serem atendidas na solução do problema aeroelástico por meio de esquemas particionados. Esse progresso está relacionado à satisfação de compatibilidade de movimentos e equilíbrio de forças na interface fluido-estrutura bem como na conservação da energia trocada entre os meios. Com isso os problemas podem ser resolvidos com passos de tempo razoavelmente grandes, preservando a eficiência e a precisão do esquema.

---

## 1.2 Dinâmica de fluidos computacional

A dinâmica de fluidos é um tema presente em grande parte das áreas de atuação na engenharia. Exemplos disso são os problemas de hidrodinâmica relacionados à indústria naval ou à hidráulica na engenharia civil, os problemas de aerodinâmica encontrados na indústria aeroespacial e os processos de escoamento bifásicos em meios porosos que são de interesse para a indústria de exploração de petróleo, além de inúmeras outras aplicações. Em todos esses casos a compreensão de como o escoamento do fluido se desenvolve é de grande importância.

O escoamento de fluidos é um fenômeno natural de grande complexidade, podendo ocorrer de maneira caótica, como no caso dos escoamentos turbulentos. A descrição matemática mais geral do comportamento dos fluidos é dada pelas equações de Navier–Stokes (N-S) Krause et al. (2004). Em alguns casos o comportamento do fluido pode ser satisfatoriamente analisado através de modelos simplificados que consideram escoamentos não viscosos ou irrotacionais, descritos através equações de Euler e de Laplace, respectivamente. Abordagens distintas são dadas aos problemas em que os efeitos da compressibilidade do fluido são desprezíveis, conduzindo a versões compressíveis e incompressíveis das equações governantes do escoamento. Além disso, o caso mais geral de escoamentos turbulentos, caracterizados pela aleatoriedade do movimento das partículas, são normalmente tratados através de formulações aproximadas. Uma das abordagens nessas situações é realizada pelas equações médias de Reynolds (*Reynolds-averaged Navier-Stokes equations* – RANS) que considera uma média temporal das equações governantes do escoamento. Mais recentemente, no contexto de simulações numéricas, também vem sendo empregadas formulações denominadas de simulação de grandes vórtices (*large eddy simulation* – LES), que reproduzem diretamente as grandes escalas do escoamento e modelam o efeito das pequenas escalas através de médias espaciais (ver Braun (2007) para uma revisão mais detalhada sobre modelos de turbulência). Nas duas aproximações é necessária a introdução de modelos de turbulência que incorporam na análise o efeito da parcela de escoamento que não é reproduzida diretamente.

Embora várias teorias estejam disponíveis para descrever o comportamento dos fluidos, a solução analítica das equações governantes do escoamento só é possível até o momento

---

para poucos casos com geometria e condições iniciais e de contorno muito simples. Nesse contexto, os problemas complexos de engenharia são tratados através da realização de ensaios ou de simulação computacional. A primeira abordagem tem sido empregada há muitos anos com bons resultados. No entanto, a realização dos ensaios demanda muito tempo e recursos, o que limita o número de estudos realizados em cada projeto. As técnicas experimentais também podem apresentar problemas de precisão relacionados à aquisição dos dados e à manutenção de todas as similaridades entre a escala real do problema e a escala reduzida do experimento. Todos esses pontos inconvenientes presentes na realização de ensaios impulsionaram o desenvolvimento dos métodos de dinâmica de fluidos computacional (DFC), que ao longo do tempo se tornaram mais precisos, robustos e eficientes, atingindo maturidade suficiente para serem empregados na análise de escoamentos em problemas práticos de engenharia. Um reflexo disso é a existência de uma série de programas comerciais disponíveis atualmente para esse fim. O crescimento impressionante dos recursos computacionais também é um fator decisivo para a popularização das técnicas computacionais na engenharia. Através da abordagem computacional um grande número de análises podem ser realizadas para diversas soluções candidatas ao projeto, consumindo menos tempo e a custos mais baixos se comparados aos das técnicas experimentais. Dessa forma os métodos computacionais tem se tornado uma ferramenta muito importante na engenharia, principalmente para as fases iniciais do desenvolvimento de produtos.

Uma das primeiras abordagens numéricas para a análise de escoamentos foi realizada através do método das diferenças finitas (MDF). A facilidade de implementação e a alta eficiência computacional desse método em termos de memória e de processamento o tornaram muito popular nos anos iniciais da DFC. No entanto, sua aplicação tem muitas limitações devido a restrições quanto à complexidade das geometrias e das condições de contorno que podem ser consideradas. Dadas as restrições do MDF, muitos trabalhos se seguiram no intuito de adaptar outros métodos numéricos aos problemas de DFC. Dentre os métodos que atingiram maiores sucessos tendo ampla aceitação atualmente estão o método dos volumes finitos (MFV) e o método dos elementos finitos (MEF). Esse último teve seu desenvolvimento inicial direcionado ao tratamento de problemas de elasticidade, sendo posteriormente adaptado para a análise de escoamentos. Uma das grandes vantagens do MEF é a possibilidade abordar problemas com geometrias e

---

condições contorno complexas, embora sua demanda computacional tenda a ser maior do que a de outras técnicas aplicadas na DFC.

Vários esquemas foram desenvolvidos para o tratamento de problemas de dinâmica de fluidos no contexto do MEF. Dentre as abordagens mais exitosas na simulação de escoamentos compressíveis em altas velocidades (advectivos-dominantes) podem ser relacionados o esquema de *Taylor-Galerkin* (Donea, 1984), o esquema de *Galerkin com linhas características* (Zienkiewicz e Codina, 1995) e o método *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SPUG) (Hughes e Tezduyar, 1984). No âmbito do Centro de Mecânica Aplicada e Computacional (CEMACOM), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC-UFRGS), e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC-UFRGS), uma vasta experiência foi adquirida em relação à aplicação do método de Taylor-Galerkin na análise de escoamentos compressíveis. Isso se deu através dos trabalhos de dos Santos (1993), Burbridge (1999), Teixeira (2001), Kessler (2002), Bono (2008) e Masuero (2009), sendo portanto o caminho natural a ser seguido na abordagem de problemas aeroelásticos desenvolvido nesse trabalho.

O método de Taylor-Galerkin consiste em uma adaptação dos métodos de Lax-Wendroff, desenvolvidos originalmente para o MDF, para aplicação segundo MEF. Nesse procedimento a discretização temporal é realizada através da substituição das derivadas temporais presentes nas equações governantes do escoamento por expansões em série de Taylor das variáveis de conservação. Em seguida, o método dos elementos finitos é utilizado para realizar a discretização espacial do problema. Tais procedimentos podem ser empregados de formas distintas, resultando em algumas variantes do método. Segundo apresentado por Yoon et al. (1998) o método de Taylor-Galerkin pode originar procedimentos de integração explícitos ou implícitos, dependendo de como as expansões em série de Taylor são realizadas. O esquema de integração temporal também pode ser de um passo (Donea, 1984) ou dois passos (Kawahara e Hirano, 1983). Além disso, esquemas com diferentes níveis de precisão temporal podem ser obtidos seguindo a abordagem do método de Taylor-Galerkin, como é discutido em Colin e Rudgyard (2000).

A dificuldade em tratar os problemas de dinâmica de fluidos onde os processos advectivos são predominantes é amplamente reconhecida Zienkiewicz et al. (2005); Löhner (2001). Nesses casos a qualidade da solução fica comprometida pela ocorrência de oscilações na

---

solução. No intuito de contornar tais problemas alguns esquemas de estabilização da solução ou de dissipação numérica vêm sendo empregados. O amortecimento da solução através da inclusão de viscosidade artificial é uma das abordagens mais usuais para estabilizar as soluções obtidas pelo método de Taylor–Galerkin.

A capacidade de lidar com contornos móveis é uma característica essencial para que um algoritmo de simulação de escoamentos seja empregado em problemas de interação fluido-estrutura. O uso da formulação lagrangeana–euleriana arbitrária (ALE) Hughes et al. (1981); Donea et al. (1982) para a descrição do movimento é uma das abordagens mais bem sucedidas para atingir essa condição. Nessa formulação, o meio contínuo se movimenta através da malha como é característico das formulações eulerianas, mas a malha pode se mover independentemente do fluido, adaptando-se aos deslocamentos dos corpos imersos no escoamento. Assim, as características interessantes das formulações lagrangeana e euleriana são condensadas para a análise de escoamentos com contornos móveis.

### 1.3 Dinâmica de estruturas computacional

A dinâmica de estruturas computacional (DEC) é a linha da ciência que busca modelar o comportamento dinâmico de estruturas através de métodos numéricos. Nos problemas de dinâmica de estruturas são considerados os efeitos inerciais, as forças reativas internas devido às deformações (elásticas ou inelásticas) e, em alguns casos, os processos dissipativos (amortecimento estrutural).

Estruturas são normalmente formadas por elementos que apresentam uma ou duas dimensões preponderantes, denominados barras (elementos lineares) ou placas e cascas (elementos descritos por superfícies planas ou curvas, respectivamente). Tais características permitem que o comportamento das estruturas seja descrito através de equações mais simples do que as empregadas para o caso geral de mecânica dos sólidos. Essas simplificações são introduzidas através da imposição de condições cinemáticas, que estabelecem a forma como os deslocamentos ocorrem na estrutura. O uso de diferentes condições cinemáticas leva às várias teorias empregadas para descrever o comportamento de cada um desses elementos estruturais. No caso das barras, as teorias mais amplamente empregadas são a teoria de viga de Bernoulli e a teoria de viga de Timoshenko, sendo a última mais

---

adequada para os casos em que as deformações por corte transversal são importantes. No que se referem à descrição do comportamento de placas as teorias mais empregadas são as de Kirchhoff e de Rössner–Mindlin. Essa última é voltada ao tratamento de placas que apresentam maior flexibilidade ao corte.

Embora a análise de estruturas através das teorias da mecânica dos sólidos seja possível, essa prática não é usual. A solução analítica das equações diferenciais que descrevem a mecânica dos sólidos só é conhecida para poucas situações com geometria e condições de contorno simples. Historicamente as hipóteses simplificadoras empregadas nas teorias de estruturas tem sido essenciais para a solução manual dos problemas reais de engenharia estrutural. Em consequência disso, é prática corrente o uso de teorias de resistência dos materiais baseadas em resultantes de tensões (forças e momentos) consideradas nas teorias de vigas e placas.

Mesmo com o advento dos métodos numéricos e a crescente capacidade computacional que possibilitam a análise de componentes estruturais discretizados como sólidos, ainda há muitas vantagens no emprego das teorias de estruturas. A geração de malhas de elementos finitos e a interpretação dos dados resultantes da análise numérica são muito mais fáceis quando são empregados elementos finitos para estrutura (elementos de barra, placa ou casca) em vez de elementos finitos de “volume” desenvolvidos com base nas teorias de mecânica dos sólidos. O número de elementos necessários para discretizar uma mesma estrutura também é muito menor quando elementos finitos de estrutura são empregados, o que se reflete em melhor eficiência computacional. Dessa forma, a análise de estruturas com grande número de componentes estruturais, que normalmente ocorrem em projetos de engenharia, é tradicionalmente realizada através de elementos finitos de estrutura. Existem exceções à essa prática nos casos em que o comportamento mecânico da estrutura não pode ser corretamente representados pelas teorias mencionadas anteriormente. Essas situações ocorrem principalmente em regiões localizadas, como na ligação entre elementos estruturais ou nos pontos de concentração de tensões. Nesses casos é possível a aplicação conjunta de modelos de sólido tridimensional com elementos de vigas, placas ou cascas.

Assim como os métodos de análise de estruturas se aprimoraram ao longo das últimas décadas, também ocorreram grandes avanços na tecnologia dos materiais. O trabalho com materiais compósitos está dentre as linhas de desenvolvimento de materiais que

---

apresentaram maior sucesso. Os compósitos são formados por mais de um material que são unidos de forma a trabalharem em conjunto apresentando desempenho superior ao dos componentes quando empregados separadamente (Daniel e Ishai, 1994). No campo da engenharia estrutural os compósitos que mais se destacam são aqueles formados por matrizes poliméricas reforçadas com fibras contínuas unidirecionais de alto desempenho (fibras de vidro, de carbono, de Kevlar, de boro, etc.). Essa combinação resulta em um material com alta resistência e/ou rigidez e baixo peso específico, apresentando ótimos valores de resistência específica e/ou rigidez específica. Tais características tornam os materiais compósitos particularmente interessantes em aplicações onde o peso é um fator crítico, tal como na indústria aeroespacial (Jones, 1999). Os compósitos com fibras unidirecionais podem ser fabricados em lâminas que posteriormente são unidas formando um compósito laminado. O ajuste do número de lâminas e da orientação das fibras de reforço em cada lâmina permite que os compósitos laminados sejam projetados com máxima eficiência para aplicações específicas.

As lâminas de compósitos apresentam características ortotrópicas devido às diferentes propriedades mecânicas inerentes à matriz e ao reforço de fibras unidirecionais. Dessa forma, o laminado resultante da união de diversas lâminas com fibras de reforço dispostas segundo diferentes orientações costuma apresentar comportamento mecânico bastante complexo. Fenômenos de acoplamento de deformações como os do tipo membrana-flexão e flexão-torção podem ocorrer dependendo da maneira como as lâminas são organizadas. Outro fator importante na mecânica dos compósitos laminados é a sua grande flexibilidade ao cisalhamento, o que se deve ao baixo valor do módulo de corte da matriz (Barbero, 2010). Devido a essas características mecânicas diferenciadas, a análise de estruturas de materiais compósitos laminados é mais complexa do que a de estruturas construídas com materiais isotrópicos. Os fenômenos de acoplamento de deformações podem ser importantes na resposta final da estrutura, devendo serem contemplados na modelagem numérica. Além disso, a flexibilidade ao corte e a distribuição complexa das tensões ao longo da seção do laminado requerem a utilização de formulações elaboradas para descrever o comportamento desses materiais. Diversas teorias de placas vêm sendo empregadas para a modelagem de compósitos laminados. Uma revisão bastante completa das formulações de diferentes complexidades usualmente empregadas é apresentada em Ghugal e Shimpi (2002). No presente trabalho, é utilizada uma teoria simplificada na

---

qual o material laminado é modelado como uma lâmina única equivalente e é considerada uma distribuição constante das deformações por corte transversal ao longo da espessura (teoria de corte de primeira ordem). Embora essa abordagem não forneça valores precisos para as tensões de cisalhamento no laminado, sua aplicação leva a bons resultados na determinação dos deslocamentos da estrutura.

O desenvolvimento de elementos finitos para placas e cascas é foco de pesquisas desde o início da aplicação do MEF na análise estrutural. Esses trabalhos visam obter elementos computacionalmente eficientes, que facilitem a utilização de leis constitutivas não lineares e que apresentem boa precisão em malhas grosseiras e com elementos distorcidos. Também é imprescindível que o elemento de casca responda bem tanto em problemas dominados por comportamento de membrana quando em problemas dominados por solicitações de flexão. Outro fator importante é a ausência de problemas de travamento da solução, tais como o travamento por corte (*shear locking*) na análise de cascas finas e o travamento volumétrico (*volume locking*) nas análises envolvendo materiais incompressíveis.

A obtenção de uma formulação que atenda a todos esses requisitos certamente não é simples. Na prática, a generalidade de aplicações tende a ser sacrificada no desenvolvimento de novos elementos para que se obtenha maior precisão e eficiência no tratamento de problemas específicos. Elementos simples e robustos com alta eficiência e menor precisão são interessantes para a aplicação em problemas transientes e/ou não lineares que apresentam grande demanda computacional. Aspectos como possibilidade de integração com outros elementos e facilidade de geração de malhas também são importantes, principalmente em códigos comerciais, tornando atrativos elementos com geometria simples e que utilizam graus de liberdade usuais (translações e rotações).

No trabalho de Yang et al. (2000) é apresentada uma revisão das pesquisas relacionadas ao desenvolvimento de elementos finitos de casca. As seguintes técnicas são destacadas como as mais utilizadas para a construção dos elementos: (i) elemento sólido degenerado; (ii) formulações baseadas nas teorias de casca; (iii) técnicas de integração reduzida com estabilização; (iv) campo de deformações aprimorado ou formulações mistas (*enhanced strain approach* ou *mixed formulations*). A obtenção de um elemento de casca bem sucedido em atender parcialmente os objetivos listados acima normalmente resulta do emprego em conjunto de algumas dessas metodologias.

---

Outra metodologia que tem grande apelo é a da construção de elementos de casca a partir da união de elementos de membrana e elementos de placa. Nesse caso, a casca é descrita por uma geometria facetada uma vez que esses elementos costumam ser planos. Uma das grandes vantagens dessa abordagem é a possibilidade da utilização de elementos de alta performance desenvolvidos independentemente para a análise dos problemas específicos de membrana e placa. O elemento de casca resultante costuma ter seis graus de liberdade por nó (três translações e três rotações), o que facilita sua integração com elementos de barra quando esses são empregados em conjunto. A presença do grau de liberdade de rotação no plano da casca é normalmente contemplada na formulação do elemento de membrana, embora artifícios possam ser adotados com menos sucesso para a modelagem da rigidez nessa direção. Devido à simplicidade da formulação, facilidade de implementação, bom nível de precisão e eficiência computacional, essa abordagem é a empregada no presente trabalho para construção do elemento finito de casca utilizado na modelagem das estruturas.

Em muitos problemas de engenharia também estão presentes efeitos não lineares importantes que devem ser contemplados nos modelos numéricos utilizados para a realização das análises. Essas não linearidades têm origem no comportamento do material ou nas modificações da geometria da estrutura. O primeiro caso é importante nos problemas envolvendo grandes deformações como nos processos de fabricação ou nos estudos de falha das estruturas. Usualmente os projetos de engenharia preveem um comportamento elástico linear dos materiais nos regimes normais de utilização da estrutura. Nesse sentido, apenas as não linearidades de origem geométrica são contempladas no presente trabalho. Isso permite que as modificações no comportamento da estrutura devido ao seu movimento sejam reproduzidas na análise.

O tratamento de problemas com não linearidade geométrica são introduzidas no algoritmo implementados nesse trabalho através da adoção da formulação corrotacional independente de elemento (EICR - *element independent CR formulation*). Essa formulação foi desenvolvida por Rankin e Brogan (1986) e posteriormente utilizada e aprimorada por diversos autores. Um dos principais méritos da formulação EICR é que ela permite que elementos finitos desenvolvidos para análise linear sejam utilizados em análises não linear geométricas. Os procedimentos da formulação EICR são compostos

por etapas de pré-processamento e pós-processamento em relação aos cálculos realizados localmente em cada elemento finito. Na etapa de pré-processamento, os deslocamentos obtidos na solução do sistema global de equações de equilíbrio são submetidos a uma operação que retira os componentes relativos ao movimento de corpo rígido do elemento. Dessa forma, as forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento são calculadas no referencial local, utilizando apenas informações da parcela de deslocamentos (incluindo rotações) que provocam deformações. No pós-processamento são efetuadas transformações sobre as quantidades calculadas localmente no elemento de forma que essas possam contribuir para a formação do novo sistema de equações de equilíbrio a ser resolvido no passo seguinte do processo incremental-iterativo de solução. Todas essas operações têm cunho geométrico e não levam em conta a formulação local do elemento finito, o que garante à formulação EICR sua independência do elemento. O tratamento consistente dado às rotações na formulação EICR também é de grande interesse, pois permite que os programas baseados nessa metodologia sejam empregados na análise de um número maior de problemas graças à ausência de restrições quanto à magnitude das rotações.

Por fim, para que a ferramenta de análise estrutural necessária ao objetivo final desse trabalho esteja completa, é preciso que um procedimento para integração temporal dos problemas de dinâmica das estruturas seja implementado. Esses procedimentos podem ser baseados em abordagens explícitas ou implícitas. No primeiro caso, as equações de equilíbrio dinâmico em cada grau de liberdade oriundo da discretização da estrutura são desacopladas, facilitando a implementação desse método inclusive nos moldes de processamento distribuído. No entanto, restrições severas de estabilidade são impostas ao tamanho do passo de tempo empregado no avanço da análise, tornando esses procedimentos mais adequados para problemas cujas respostas variam rapidamente com o tempo. Por outro lado, na abordagem implícita as equações de equilíbrio são tratadas de forma acoplada, resultando em grandes sistemas de equações a serem resolvidos em cada avanço da análise. Por outro lado, o emprego de passos de tempo maiores garante a eficiência desses métodos em problemas dominados por respostas de baixa frequência, como é comum na maior parte das análises dinâmicas de estruturas.

O método de Newmark é sem dúvida o mais difundido dentre os métodos implícitos de

---

integração temporal. Esse fato é devido à facilidade de implementação e à estabilidade incondicional da solução em problemas lineares. Contudo, a precisão e principalmente a estabilidade do método de Newmark não são necessariamente mantidas quando este é empregado na análise dinâmica não linear de estruturas. Esse fato é demonstrado por diversos autores, motivando o desenvolvimento de procedimentos alternativos. Os trabalhos nessa área demonstraram que a conservação ou o decaimento da energia de sistemas não amortecidos em vibrações livres é uma condição suficiente para a estabilidade da solução.

Dentre os métodos desenvolvidos visando o decaimento da energia do sistema o mais bem sucedido é o método  $\alpha$ -generalizado (Chung e Hulbert, 1993), que é bastante similar ao método de Newmark e apresenta boa eficiência computacional. Outros métodos foram desenvolvidos visando a conservação da energia do sistema. Os mais promissores com esse enfoque são aqueles baseados na verificação de equilíbrio do sistema no ponto médio do passo de tempo (*midpoint rule*), conforme idéia introduzida originalmente em Simo e Tarnow (1992). Nessa linha se enquadra o procedimento corrotacional de conservação aproximada de energia (AECCP), introduzido em Crisfield e Shi (1994). Esse método realiza a integração do problema de dinâmica das estruturas mantendo a conservação aproximada da energia do sistema. Um dos grandes atrativos desse esquema é a adoção da formulação corrotacional, o que permite a reutilização de elementos finitos desenvolvidos inicialmente para a análise linear, conforme descrito acima. Além disso, o esquema de integração permite que problemas que decorrem por longos períodos de tempo sejam analisados sem haver restrições quanto à magnitude dos deslocamentos e das rotações da estrutura. Tendo em vista as características enumeradas acima, o método AECCP foi escolhido para ser implementado como esquema de integração temporal no presente trabalho.

Um grande número de trabalhos relacionados à análise estática e dinâmica de estruturas foi desenvolvido no âmbito do PPGEC-UFRGS. Dentre os trabalhos que abordam estruturas de materiais compósitos laminados destacam-se dos Santos Cavalcanti Marques (1994), Marques (1994), Lens (1994), de Oliveira (2004), de Andrade (2005), Almeida (2006), Isoldi (2008), Pavan (2008), Lopes (2009), López (2009), Schultz (2012).

---

## 1.4 Objetivos e organização do trabalho

O objetivo do trabalho é construir uma ferramenta computacional que permita a realização de análises de problemas aeroelásticos considerando estruturas flexíveis de materiais compósitos laminados imersas em escoamentos de ar em regime compressível. Esse objetivo é atingido pela integração de uma série de programas desenvolvidos independentemente para realizar funções diversas tais como a simulação de escoamentos, a análise estrutural, movimentação da malha do fluido e transferência de dados entre as malhas do fluido e da estrutura.

O desenvolvimento da ferramenta computacional para análise dinâmica de estruturas de materiais compósitos laminados foi a primeira etapa completada no trabalho. Para tanto, duas linhas de trabalho foram adotadas. Na primeira delas, foi elaborado um elemento finito triangular de casca a partir da formulação de elementos finitos de placa e de membrana apresentados separadamente na literatura. O elemento resultante permite a análise linear de cascas de material compósito laminado considerando a deformação por cisalhamento transversal e sem sofrer com travamento por razão de aspecto quando solicitações de flexão no plano da casca estão presentes. A segunda linha de trabalho consistiu na montagem do esquema de análise dinâmica não linear a partir da formulação corrotacional, permitindo assim a utilização do elemento finito de casca obtido previamente. Para tanto adotou-se o procedimento corrotacional de conservação aproximada de energia (AECCP) (Crisfield e Shi, 1994), que foi reestruturado segundo a formulação EICR (Rankin e Brogan, 1986) a fim de generalizar esse esquema e torná-lo independente da formulação linear local do elemento finito. A elaboração do elemento finito de casca, a reestruturação do esquema corrotacional de análise dinâmica AECCP segundo uma formulação independente do elemento e a aplicação desse esquema para análise de cascas foram as principais contribuições inéditas do presente trabalho. Os estudos desenvolvidos nessa etapa foram publicados em Almeida e Awruch (2011). A apresentação dos aspectos teóricos envolvendo a análise estrutural são apresentadas no Capítulo 2 da tese, enquanto que os exemplos de aplicação são incluídos nas Seções 5.1 e 5.2 do Capítulo 5.

A etapa seguinte do trabalho trata da preparação do algoritmo para análise de

---

escoamentos compressíveis em malhas móveis. No planejamento inicial desse trabalho pretendia-se aproveitar o código desenvolvido por Bono (2008) e posteriormente otimizado por Masuero (2009) para a execução em paralelo em arquitetura de memória distribuída. No entanto, dada a complexidade atual desse programa e o fato dele não ter sido concebido visando a expansão necessária para o presente trabalho, optou-se por uma abordagem diferente. Um novo código de CFD foi desenvolvido com base no esquema explícito de Taylor-Galerkin de dois passos aplicado sobre as equações governantes do escoamento derivadas segundo a descrição ALE. O algoritmo de movimentação da malha também foi incorporado ao programa, compondo as ferramentas necessárias para a análise do escoamento em contorno móvel. A implementação do código foi otimizada para a execução em paralelo utilizando memória compartilhada. O Capítulo 3 traz a descrição da metodologia empregada no presente trabalho para a análise de escoamentos. A precisão do esquema adotado é demonstrada em alguns exemplos apresentados na Seção 5.3 através de comparação com os resultados de outros trabalhos numéricos e experimentais.

O passo seguinte ao desenvolvimento dos algoritmos de análise do escoamento e da estrutura foi a implementação do esquema particionado de integração de problemas aeroelásticos e do algoritmo de transferência de dados entre as malhas não coincidentes utilizadas para discretizar cada um dos meios. Os assuntos relacionados ao tratamento do problema de interação fluido-estrutura são apresentados no Capítulo 4. O funcionamento do esquema de análise obtido pela integração das ferramentas desenvolvidas é demonstrado na Seção 5.4 através de exemplos. Os resultados desse trabalho são comparados com os obtidos experimentalmente ou numericamente por outros autores. Também são analisados novos problemas envolvendo estruturas de materiais compósitos laminados.

---

# Capítulo 2

## Análise estrutural

Nesse capítulo são apresentadas os aspectos teóricos e de implementação dos métodos utilizados para a análise estrutural. O objetivo final é obter um algoritmo capaz de realizar a análise dinâmica de estruturas formadas por cascas e placas de materiais compósitos laminados. Os efeitos de não linearidade geométrica também devem ser contemplados na análise visando uma maior representatividade dos resultados em cada problema abordado. Os algoritmos selecionados para desenvolver tais análises são baseados na descrição corrotacional do movimento do corpo. Com isso é possível apresentar o conteúdo de forma segmentada, com partes progressivamente complementares, originando cada uma das seções que seguem.

Na Seção 2.1 são apresentados os aspectos teóricos básicos da análise estrutural empregada. A formulação de corte de primeira ordem é utilizada para descrever a distribuição das tensões e deformações na casca. Uma abordagem mais específica para o caso de materiais compósitos laminados é apresentada na Seção 2.2. A primeira parte dessa seção trata do comportamento mecânico de uma única lâmina ortotrópica enquanto que o trecho seguinte descreve o comportamento mecânico de um laminado, obtido pela associação de diversas lâminas.

Na Seção 2.3 é apresentada a formulação local do elemento finito de casca. Essa formulação é desenvolvida segundo o referencial local do elemento. São consideradas apenas relações constitutivas lineares e pequenas deformações. O elemento apresentado tem geometria triangular plana, com um nó em cada vértice. A cada nó estão associados três deslocamentos e três rotações como incógnitas. A construção do elemento é baseada

---

---

na sobreposição de um elemento de placa e um elemento de membrana, cujas formulações são apresentadas separadamente. A última parte da seção trata da junção dos elementos para formar o elemento de casca. Também é incluída uma matriz de rigidez adicional que surge pelo efeito de acoplamento entre forças e deformações de membrana e flexão. Esse fenômeno é verificado apenas em materiais laminados com seção assimétrica.

Uma vez que a formulação do elemento triangular de casca é definida segundo seu referencial local, é preciso estabelecer relações de transformação entre as quantidades dadas segundo os eixos locais do elemento e quantidades dadas no referencial global do problema, que é compartilhado por todos os elementos. Tais transformações de referencial e a forma como a direção principal dos materiais laminados é definida em cascas de geometrias complexas são discutidas na Seção 2.4.

A Seção 2.5 introduz a descrição do movimento segundo a abordagem corrotacional. Em particular, são discutidos os aspectos da formulação corrotacional independente de elemento (*element independent corrotational formulation* – EICR, Rankin e Brogan (1986)). Essa é a formulação empregada neste trabalho, trazendo como um dos seus pontos mais positivos a possibilidade de incorporar efeitos de não linearidade geométrica em elementos que não foram desenvolvidos com esse fim. As rotações no espaço são tratadas de forma consistente não havendo restrições quanto à sua magnitude. A formulação desenvolvida nesse capítulo emprega os conceitos introduzidos na Seção 2.4, bem como os aspectos peculiares associados às rotações finitas, conforme é apresentado no Apêndice A.

Ao final do capítulo (Seção 2.6) é introduzido o método empregado na integração temporal dos problemas dinâmicos contemplando efeitos de não linearidade geométrica. O procedimento corrotacional de conservação aproximada de energia (*Approximately Energy Conserving Corrotational Procedure*–AECCP, Crisfield (1997)) é apresentado brevemente valendo-se dos conceitos introduzidos na Seção 2.5.

## 2.1 Formulação básica da análise estrutural

Dentre as teorias aplicadas à análise de placas de materiais compósitos laminados (Reddy, 2004), as que conquistaram maior popularidade são as teorias que modelam o laminado como uma lâmina única equivalente (*equivalent single-layer theories*). Sua utilização prevalece em popularidade sobre as teorias que tratam as laminas independentemente (*layerwise laminated theories*) pelo fato de apresentarem formulação mais simples, melhor eficiência computacional e serem suficientemente precisas na determinação da maior parte das respostas de interesse na análise global de estruturas (Zhang e Kim, 2005). Essas vantagens também se aplicam ao se comparar as teorias de lamina equivalente com a modelagem das estruturas laminadas por teorias de mecânica do contínuo tridimensional. Estão incluídas no grupo das teorias de lâmina equivalente a teoria clássica dos laminados (CLT – *classical laminate theory*), a teoria de deformação por corte de primeira ordem (FSDT – *first-order shear deformation theory*) e as teorias de deformação por corte de ordem superior (HSDT – *higher-order shear deformation theory*). Uma extensa revisão sobre as diversas teorias desenvolvidas para tratar de placas laminadas considerando deformação por corte é apresentada em Ghugal e Shimpi (2002). A CLT é uma extensão da teoria clássica de placas de Kirchhoff às placas de materiais laminados. Nessa teoria são assumidas hipóteses de deformação que determinam que uma linha reta normal ao plano médio indeformado da placa continua reta e normal ao plano médio da estrutura deformada, e que esta linha não sofre deformações na direção da espessura. Em decorrência dessas hipóteses, a deformabilidade da estrutura pelo cisalhamento, assim como a deformação normal ao plano da estrutura, são ignoradas na CLT. Embora essas limitações não sejam problemáticas na análise de placas finas de materiais isotrópicos, um sério comprometimento dos resultados pode ocorrer para placas espessas e sobretudo para placas de compósitos laminados (mesmo em placas finas), pois estes tendem a ser particularmente flexíveis às deformações por corte.

No intuito de incorporar os efeitos da deformabilidade por corte à análise estrutural, a alternativa mais simples à CLT é a teoria de deformação por corte de primeira ordem (FSDT). Essa formulação é muito utilizada na análise de estruturas de materiais compósitos laminados pois proporciona uma boa relação entre eficiência computacional e precisão para determinação do comportamento global de placas finas a moderadamente

espessas de materiais compósitos laminados (Zhang e Yang, 2009). No entanto, essa teoria não permite a determinação precisa de efeitos localizados, como a distribuição de tensões entre lâminas. A FSDT pode ser considerada como um aprimoramento da teoria clássica de placas finas de Kirchhoff, o que é obtido pela inclusão grosseira de deformações por corte através de considerações cinemáticas (Ghugal e Shimpi, 2002). Uma distribuição constante de deformação por cisalhamento é obtida por meio do relaxamento da condição imposta na CLT que determina a normalidade das seções em relação ao plano médio da placa após a deformação. Para corrigir as discrepâncias entre a energia de deformação por corte obtida segundo a distribuição constante dada pela FSDT e a distribuição real, são introduzidos fatores de correção de corte, cujo valor depende do problema estudado.

No presente trabalho as cascas de compósitos laminados são analisadas através do método dos elementos finitos. A modelagem da estrutura é realizada por meio de elementos triangulares planos, construídos pela sobreposição de elementos de membrana e de placa, que contribuem respectivamente com a rigidez no plano e transversalmente ao plano da casca. Dessa forma a teoria de placas FSDT é empregada juntamente com a teoria de estado plano de tensões para a análise de cascas tridimensionais. Nas discussões que seguem os componentes de deslocamentos, deformações e tensões são relativas a um sistema de referência definido pelos eixos ortonormais  $x$ - $y$ - $z$ , em que o plano  $x$ - $y$  é tangente ao plano médio da casca no ponto estudado e o eixo  $z$  é normal a esse plano médio.

Seguindo as considerações da FSDT, o campo de deslocamentos constituído pelos componentes  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ , nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  da placa ou casca pode ser expresso em termos do deslocamento do seu plano-médio  $u_x^0$ ,  $u_y^0$  e  $u_z^0$ , e das rotações da normal ao plano-médio,  $\beta_x$  e  $\beta_y$ , na direção dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, conforme as Eq. (2.1).

$$u_x(x,y,z) = u_x^0(x,y) + z\beta_x(x,y) \quad (2.1a)$$

$$u_y(x,y,z) = u_y^0(x,y) + z\beta_y(x,y) \quad (2.1b)$$

$$u_z(x,y,z) = u_z^0(x,y) \quad (2.1c)$$

A partir da definição dada para os deslocamentos na Eq. (2.1) é possível determinar o campo de deformações. As deformações no plano da casca, cujos componentes são as

deformações normais  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e a deformação de cisalhamento no plano  $\varepsilon_{xy}$ , são representadas pelo vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Sua obtenção a partir dos deslocamentos se dá conforme apresentado na Eq. (2.2), onde  $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \{\varepsilon_x^0 \ \varepsilon_y^0 \ \varepsilon_{xy}^0\}^T$  é o vetor de deformações no plano médio da casca e  $\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_{xy}\}^T$  é o vetor de curvaturas. Conforme o apresentado na Eq. (2.3), os vetores  $\boldsymbol{\varepsilon}^0(x,y)$  e  $\boldsymbol{\kappa}(x,y)$  são definidos pelas derivadas parciais das translações  $u_x^0$  e  $u_y^0$  e das rotações  $\beta_x$  e  $\beta_y$  nas direções  $x$  e  $y$ . Segundo a relação dada pela Eq. (2.2) as deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  variam linearmente na espessura da casca para pontos de mesmas coordenadas  $(x,y)$ . Tal variação, que tem  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  como valor médio, é determinada pelo valor da curvatura  $\boldsymbol{\kappa}$  e pela posição  $z$  do ponto analisado. A variação das deformações ao longo da espessura da placa decorrente da composição das contribuições de  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  e  $\boldsymbol{\kappa}$  é ilustrada na Fig. 2.1.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa} \quad (2.2)$$

onde,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y^0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

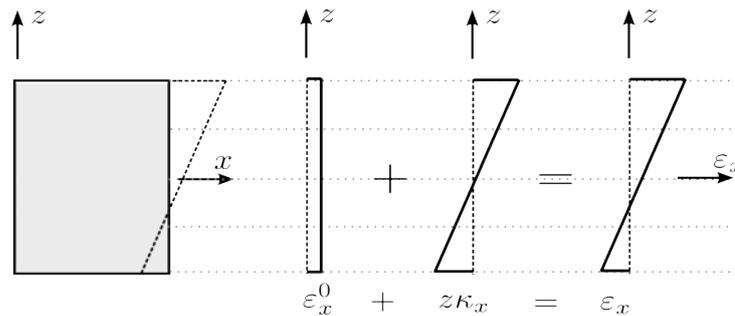


Figura 2.1: Deformações normais segundo a FSDT

Os componentes de deformações de cisalhamento transversal ao plano da casca  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, são representadas pelo vetor  $\boldsymbol{\gamma}$  e obtidas conforme a Eq. (2.4). A Fig. 2.2 ilustra o componente de deformação  $\gamma_{xz}$  no plano  $x-z$  da placa. Através dessa relação observa-se que as deformações  $\boldsymbol{\gamma}$  são constantes ao longo da espessura da casca, variando apenas no plano  $x-y$ .

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x - \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \\ \beta_y - \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

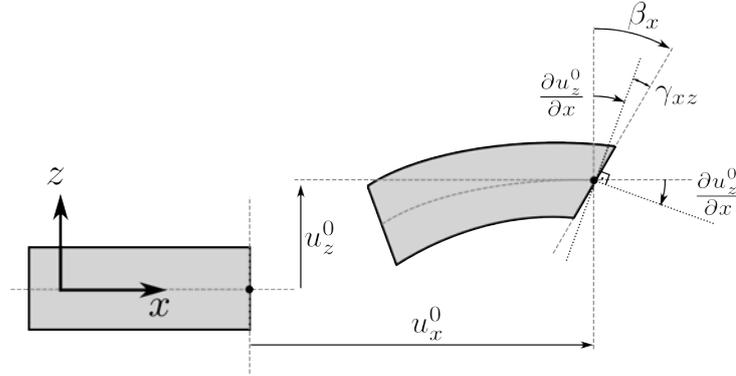


Figura 2.2: Deformações de cisalhamento transversal segundo a FSDT

Dado o campo de deformações através das Eq. (2.2) e (2.4), estabelece-se um campo de tensões utilizando-se de relações constitutivas apropriadas a cada material estudado. No presente trabalho são abordados apenas materiais Hookianos (Malvern, 1969), podendo estes ser isotrópicos ou não. As tensões atuantes no plano da casca, cujos componentes normais são  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e o componente tangencial é  $\sigma_{xy}$ , são representadas pelo vetor  $\boldsymbol{\sigma}$ , obtido conforme dado na Eq. (2.5). A relação entre tensões e deformações no plano se faz através de uma matriz constitutiva  $\mathbf{Q}$ , cuja formação depende do material, conforme será apresentado nas seções seguintes desse capítulo.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

As tensões de cisalhamento transversal ao plano da casca  $\boldsymbol{\tau}$  são obtidas utilizando-se de relações constitutivas definidas através de uma matriz  $\mathbf{Q}_s$ , de forma similar às tensões atuantes no plano. A Eq. (2.6) define a dependência de  $\boldsymbol{\tau}$  em relação às deformações de cisalhamento transversal  $\boldsymbol{\gamma}$ , bem como os componentes de tensão cisalhante  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , segundo as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Tendo em vista a discrepância existente entre a distribuição real das tensões cisalhantes ao longo da seção da casca e a distribuição obtidas através da FSDT, se faz necessária a introdução de um fator de correção de corte (SCF – *shear correction factor*)  $\chi$  para que a energia de deformação por corte se assemelhe

à causada pela deformação real.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \chi \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma} \quad (2.6)$$

As resultantes de tensões, normalmente utilizadas na análise de estruturas, são obtidas através da integração das tensões ao longo da espessura da placa ou casca ( $h$ ), conforme apresentado nas Eq. (2.7). Essas resultantes se referem às forças de membrana  $\mathbf{N}$  (atuando no plano da casca), aos momentos fletores  $\mathbf{M}$ , e às forças cortantes  $\mathbf{V}$  (atuando transversalmente ao plano da casca), todas dadas por unidade de comprimento.

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \boldsymbol{\sigma} dz, \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\tau} dz, \quad (2.7c)$$

Introduzindo as Eq. (2.5) e (2.2) nas Eq. (2.7a) e (2.7b) obtém-se as Eq. (2.8a) e (2.8b) onde as resultantes de tensões  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{M}$  são dadas em função de  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  e  $\boldsymbol{\kappa}$ . De maneira similar, na Eq. (2.8c) as forças cortantes são expressas em função de  $\boldsymbol{\gamma}$  pela introdução das Eq. (2.6) e (2.4) na Eq. (2.7c). Graças às relações estabelecidas nas Eq. (2.8), dispensa-se o cálculo das deformações e tensões em cada ponto da casca para a obtenção das resultantes de tensões  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{V}$ , uma vez que essas são dadas agora pelas “resultantes de deformação”  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$ .

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q} (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q} dz \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\mathbf{Q} dz \boldsymbol{\kappa} \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\mathbf{Q} (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\mathbf{Q} dz \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\mathbf{Q} dz \boldsymbol{\kappa} \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{V} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \chi\mathbf{Q}_s\boldsymbol{\gamma} dz \quad (2.8c)$$

Tendo em conta que  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$  são funções de  $x$  e  $y$ , os integrandos nas Eq. (2.8) se resumem a  $\mathbf{Q}$ ,  $z\mathbf{Q}$ ,  $z^2\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}_s$ . Na Eq. (2.9) a integração desses termos define as matrizes  $\mathbf{D}_m$ ,  $\mathbf{D}_b$ ,  $\mathbf{D}_{mb}$  e  $\mathbf{D}_s$ , que estabelecem relações constitutivas entre resultantes de tensão e de deformação na casca. A ligação entre forças e deformações de membrana, ( $\mathbf{N}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ) é dada por  $\mathbf{D}_m$ , enquanto que a relação entre momentos e deformações relativas a flexão ( $\mathbf{M}$  e  $\boldsymbol{\kappa}$ ) é dada por  $\mathbf{D}_b$ . A matriz  $\mathbf{D}_s$  define a relação entre forças e deformações de cisalhamento transversal ao plano da casca ( $\mathbf{V}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$ ). Por fim, em cascas de seção não simétrica é estabelecida uma relação de acoplamento membrana-flexão com o surgimento da matriz  $\mathbf{D}_{mb}$ , que define relações entre  $\mathbf{N}$  e  $\boldsymbol{\kappa}$  e entre  $\mathbf{M}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} dz & \mathbf{D}_{mb} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\mathbf{Q} dz \\ \mathbf{D}_b &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2\mathbf{Q} dz & \mathbf{D}_s &= \int_{-h/2}^{h/2} \chi\mathbf{Q}_s dz \end{aligned} \quad (2.9)$$

As relações constitutivas que conectam as resultantes de tensões e deformações, conforme discutido acima, são dadas compactamente pela equação:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{D}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

---

## 2.2 Materiais compósitos laminados

Compósito estrutural é um sistema de materiais constituído de duas ou mais fases em uma escala macroscópica, cuja performance e propriedades mecânicas são projetadas para serem superiores às dos materiais constituintes atuando independentemente. Uma das fases é usualmente descontínua, mais rígida e mais resistente, sendo denominado reforço. A outra, denominada matriz, normalmente é contínua, com rigidez e resistência menor. Algumas vezes, devido a interações químicas ou outros processos pode existir uma fase adicional, denominada interface, situada entre o reforço e a matriz. As propriedades de um compósito dependem das propriedades do material, geometria e distribuição de cada uma das fases (Daniel e Ishai, 1994).

Os materiais de maior interesse nesse trabalho são os laminados formados por camadas de materiais compósitos constituídos por uma matriz polimérica reforçada com fibras unidirecionais. Esse tipo de compósito laminado apresenta ótimo desempenho estrutural, tendo como principais vantagens alta rigidez específica (razão entre rigidez e peso específico) e/ou resistência específica (razão entre resistência e peso específico), além da possibilidade de ajustes na rigidez do laminado através da manipulação da orientação dos reforços em cada camada.

A utilização desse tipo de material é indicada principalmente em estruturas que tenham requerimentos críticos como alta resistência e/ou rigidez, muitas vezes inatingíveis por materiais estruturais convencionais, como as ligas metálicas. Em termos econômicos os compósitos também podem ser vantajosos, principalmente se forem considerados todos os custos influenciados pela escolha do material. Esses vão desde o processo de fabricação, manutenção, vida útil, operação até a montagem da estrutura final. Dependendo da aplicação, podem ser obtidas reduções nesses custos pelo emprego de compósitos, os quais tendem a ser cada vez mais competitivos à medida que os processos de fabricação vão se aprimorando e se difundindo. Outro aspecto altamente desejável em certas aplicações é a redução de peso, como ocorre na indústria aeroespacial, onde esse fator pode ser limitante ou influenciar fortemente os custos de operação (Jones, 1999).

Assim como os reforços por fibras unidirecionais de alta performance proporcionam ótimas propriedades mecânicas ao material compósito, eles também estabelecem uma

forte ortotropicidade à lâmina constituída por esse material. A união destas lâminas para a formação de um laminado resulta em um material de comportamento mecânico bastante complexo, o que dificulta significativamente a sua modelagem computacional. A determinação da integridade, bem como a reprodução da perda de rigidez do material por ocorrência de rupturas localizadas, são tarefas complexas devido à dificuldade na obtenção dos valores corretos das tensões no material e pelos diversos mecanismos de falha possíveis. Fenômenos como expansão por umidade ou fluência em temperatura ambiente são irrelevantes em ligas metálicas, mas podem afetar o material compósito devido à suscetibilidade da matriz polimérica. Algumas características desses materiais também podem apresentar comportamento não linear mesmo em baixos níveis de tensão, como é o caso do módulo de elasticidade transversal no plano da lâmina (Barbero, 2010).

As relações entre o estado de carga e deformação que descrevem a resposta do material são apresentadas a seguir. Apenas o comportamento elástico linear do material íntegro é considerado nesse trabalho. As relações mecânicas são discutidas inicialmente para uma única lâmina e posteriormente para o laminado propriamente dito.

### 2.2.1 Comportamento mecânico de lâminas ortotrópicas

Embora os compósitos sejam materiais heterogêneos formados por matriz e reforço bem definidos, seu comportamento macroescalar, que é o de interesse para a análise global de estruturas, é caracterizado como o de um material homogêneo com propriedades mecânicas ortotrópicas, ignorando sua natureza microestrutural (Chawla, 1998). Essas propriedades são definidas segundo um sistema de referência atribuído a cada lâmina e cujos eixos são orientados conforme as direções principais do material, ou seja, longitudinalmente e transversalmente à direção das fibras. São atribuídos os nomes 1 e 2 aos eixos principais do material que estão orientados longitudinalmente e transversalmente a direção das fibras, respectivamente. O eixo principal do material denominado 3 dá a direção perpendicular à lamina de compósito. A Fig. 2.3 mostra o arranjo dos eixos principais da lamina conforme a orientação das fibras do material.

Normalmente a caracterização mecânica das lâminas de compósitos se dá por constantes de engenharia, usualmente obtidas através de ensaios mecânicos (Jones, 1999). Essas

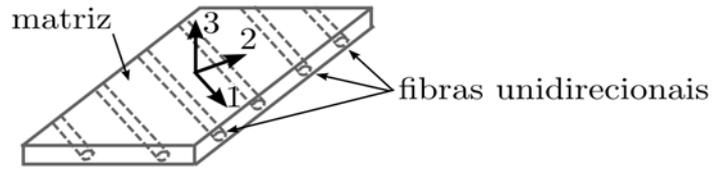


Figura 2.3: Direções principais de uma lâmina de material compósito com reforço de fibras unidirecionais

constantes, amplamente empregadas na análise de materiais isotrópicos, são o módulo de Young  $E$ , o módulo de corte  $G$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ . No entanto, para lâminas ortotrópicas tais constantes podem possuir valores diferentes para cada uma das direções principais do material. Dessa forma, utilizam-se os módulos de Young  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ , nas direções 1, 2 e 3, respectivamente. Os módulos de corte  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  e  $G_{13}$  definem a rigidez ao cisalhamento nos planos 1-2, 2-3 e 1-3, respectivamente. O acoplamento entre a deformação normal  $\varepsilon_j$  causado pela deformação  $\varepsilon_i$ , segundo as direções  $j$  e  $i$ , respectivamente, é definido pelo coeficiente de Poisson  $\nu_{ij}$ . O coeficiente inverso da relação de acoplamento de deformações recém descrita  $\nu_{ji}$  tem seu valor dado por  $\nu_{ji} = \nu_{ij} \frac{E_j}{E_i}$ , o que se deve a certas condições que as constantes do material devem satisfazer para que a soma de todo o trabalho realizado pelas tensões não seja negativo (Jones, 1999). Vale ressaltar que os coeficientes de Poisson para materiais compósitos podem assumir valores bastante elevados, inclusive violando os limites definidos para materiais isotrópicos.

As relações constitutivas para as lâminas de materiais compósitos podem ser definidas segundo os eixos principais do material. Para as deformações e tensões contidas no plano da lâmina essa relação é dada pela expressão:

$$\hat{\sigma} = \hat{Q}\hat{\varepsilon}, \quad (2.11)$$

onde  $\hat{\sigma} = \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_{12}\}^T$  e  $\hat{\varepsilon} = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_{12}\}^T$ , são os vetores de tensões e deformações segundo os eixos principais do material e  $\hat{Q}$  é a matriz constitutiva que relaciona  $\hat{\sigma}$  e  $\hat{\varepsilon}$ , calculada segundo os eixos principais a partir das constantes elásticas do material como segue:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

De forma semelhante, as equações constitutivas que relacionam os componentes de tensões e deformações transversais ao plano das lâminas são dadas segundo os eixos principais do material pela expressão:

$$\hat{\tau} = \hat{Q}_s \hat{\gamma}, \quad (2.13)$$

onde  $\hat{\tau} = \{\tau_{13} \ \tau_{23}\}^T$  e  $\hat{\gamma} = \{\gamma_{13} \ \gamma_{23}\}^T$  são os vetores de tensões e deformações de cisalhamento transversal ao plano da lâmina dados segundo os eixos principais do material. Nessa equação  $\hat{Q}_s$  é a matriz constitutiva que relaciona  $\hat{\tau}$  e  $\hat{\gamma}$ , calculada segundo os eixos principais a partir das constantes elásticas do material, como segue:

$$\hat{Q}_s = \begin{bmatrix} G_{13} & 0 \\ 0 & G_{23} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

O símbolo ( $\hat{\cdot}$ ) sobre as variáveis apresentadas nas Eq. (2.11) a Eq. (2.14), bem como nas partes seguintes do texto, indica que tais variáveis estão referidas ao sistema de eixos principais do material 1-2-3.

Nas aplicações estruturais que utilizam materiais compósitos os eixos principais do material frequentemente não coincidem com os eixos naturais da estrutura, que são definidos por questões geométricas ou de utilização (Jones, 1999). Nesses casos, as tensões e deformações referidas aos eixos naturais da estrutura, obtidas pela análise estrutural, devem ser transformadas para o sistema de referência do material. A diferença entre os dois sistemas de referência pode ser definida por um ângulo  $\alpha$ , uma vez que os eixos  $z$  e 3 são coincidentes, e por consequência, também são coincidentes os planos  $x$ - $y$  e 1-2. O ângulo  $\alpha$  é medido do eixo  $x$  ao eixo 1 no sentido anti-horário, conforme demonstrado na Fig. 2.4.

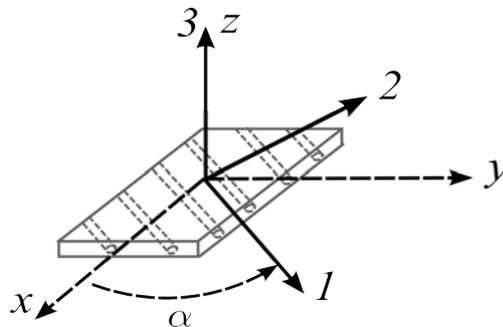


Figura 2.4: Ângulo  $\alpha$  entre os sistemas de referência  $x$ - $y$ - $z$  e 1-2-3.

As transformações de  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  para  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  se dão pelas equações

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{T}} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.15a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\mathbf{T}}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.15b)$$

sendo que,

$$\hat{\mathbf{T}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 2\sin\alpha \cos\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -2\sin\alpha \cos\alpha \\ -\sin\alpha \cos\alpha & \sin\alpha \cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

e

$$\hat{\mathbf{T}}_\varepsilon(\alpha) = \hat{\mathbf{T}}^{-t} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin\alpha \cos\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -\sin\alpha \cos\alpha \\ -2\sin\alpha \cos\alpha & 2\sin\alpha \cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

As matrizes de transformação para tensões e deformações no plano da lâmina,  $\hat{\mathbf{T}}$  e  $\hat{\mathbf{T}}_\varepsilon$ , respectivamente, são distintas devido à utilização de medidas de engenharia para deformação por cisalhamento  $\varepsilon_{xy}$  e  $\varepsilon_{12}$ , como descrito em Jones (1999).

As tensões de cisalhamento transversal ao plano da placa  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ , bem como as deformações relacionadas  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ , são obtidas a partir das suas recíprocas  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$  segundo o sistema de referencia da estrutura, conforme as Eq. (2.18), onde  $\hat{\mathbf{T}}_s$  é a matriz de transformação.

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mathbf{T}}_s \boldsymbol{\tau} \quad (2.18a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\mathbf{T}}_s \boldsymbol{\gamma} \quad (2.18b)$$

sendo,

$$\hat{\mathbf{T}}_s(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

As tensões e deformações no sistema de referência da estrutura podem ser obtidas a partir das tensões e deformações dadas nos eixos principais do material através de relações inversas às apresentadas nas Eq. (2.15) e (2.18). Para isso são utilizadas as matrizes inversas  $\hat{\mathbf{T}}^{-1}$ ,  $\hat{\mathbf{T}}_\varepsilon^{-1}$  e  $\hat{\mathbf{T}}_s^{-1}$  calculadas como:

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}(\alpha) = \hat{\mathbf{T}}(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & -2\sin\alpha \cos\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 2\sin\alpha \cos\alpha \\ \sin\alpha \cos\alpha & -\sin\alpha \cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix} \quad (2.20a)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{\varepsilon}^{-1}(\alpha) = (\hat{\mathbf{T}}^{-T})^{-1} = \hat{\mathbf{T}}^T \quad (2.20b)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_s^{-1}(\alpha) = \hat{\mathbf{T}}_s^T \quad (2.20c)$$

Assim como são frequentemente necessárias transformações de tensões e deformações entre os sistemas de referência do material e da estrutura, também é indispensável a obtenção das relações constitutivas das lâminas segundo o sistema de referência da estrutura. As matrizes tensão-deformação que determinam essas relações constitutivas são utilizadas para o cálculo de rigidez durante a realização da análise estrutural, com a qual são obtidos os deslocamentos e, a partir desses, as deformações. As matrizes constitutivas no sistema de referência da estrutura  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}_s$ , são calculadas por transformações sobre as matrizes  $\hat{\mathbf{Q}}$  e  $\hat{\mathbf{Q}}_s$ , utilizando para isso as matrizes de transformação das tensões e deformações  $\hat{\mathbf{T}}$ ,  $\hat{\mathbf{T}}_{\varepsilon}$  e  $\hat{\mathbf{T}}_s$ , conforme apresentado nas seguintes equações:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{T}}^{-1} \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{T}}^{-T} \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} Q_{s11} & Q_{s12} \\ Q_{s21} & Q_{s22} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{T}}_s^T \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{T}}_s \quad (2.21b)$$

Vale ressaltar que, nos casos de transformações com ângulos  $\alpha \neq 0$ , todos os componentes das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}_s$  podem ter valor não nulo, diferentemente do que ocorre para materiais isotrópicos, onde  $Q_{13} = Q_{23} = Q_{31} = Q_{32} = 0$  e  $Q_{s12} = Q_{s21} = 0$ .

## 2.2.2 Comportamento mecânico dos laminados

Nessa seção são discutidas as propriedades mecânicas de laminados formados por camadas de materiais compósitos reforçados por fibras unidirecionais. Um laminado consiste em duas ou mais lâminas unidas para funcionar em conjunto, apresentando um desempenho

à flexão melhor do que o das lâminas atuando separadamente. A união de lâminas de materiais compósitos com fibras dispostas segundo diferentes orientações também permite que o material resultante resista melhor a forças atuantes no seu plano, quando essas são aplicadas em várias direções. O agrupamento das lâminas deve levar em conta a resposta esperada para o laminado quando submetido às solicitações de projeto, pois a rigidez e resistência do laminado dependem das características dos materiais das lâminas, da ordem em que essas lâminas estão dispostas na espessura do laminado e da orientação dos eixos principais de cada lâmina, no caso de materiais ortotrópicos. A Fig. 2.5 ilustra um material laminado formado por 4 lâminas de material compósito cujas fibras unidirecionais de reforço estão dispostas segundo diferentes orientações.

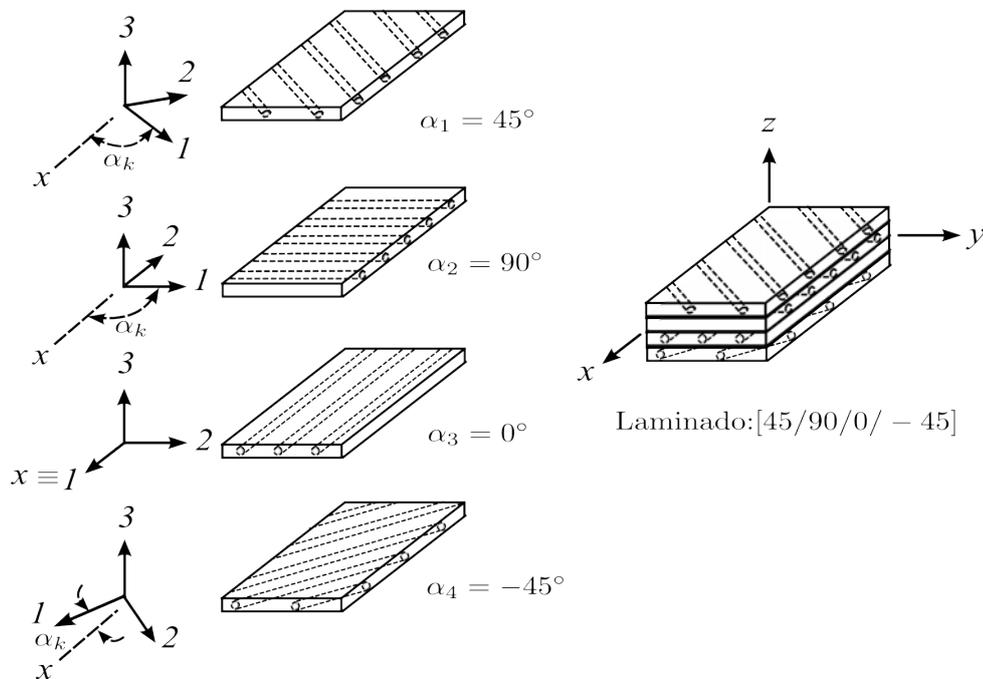


Figura 2.5: Material compósito laminado

A notação utilizada nesse trabalho para determinar como as lâminas estão dispostas no laminado (*sequência de laminação*) contempla três informações para uma lâmina de posição  $k$  no laminado: ângulo de orientação das fibras em relação ao eixo do laminado  $\alpha_k$ , espessura da lâmina  $t_k$  e o material constituinte da lâmina  $m_k$ , organizados no formato:  $\alpha_k^{(t_k, m_k)}$ . Em um laminado com  $n$  lâminas é atribuído o valor  $k = 1$  para a lâmina superior e  $k = n$  para a lâmina inferior, conforme ilustrado na Fig. 2.6, onde também constam as posições das interfaces entre as lâminas ( $z_k$ ). As informações sobre a espessura e/ou o material das lâminas podem ser suprimidas nos casos em que esses são iguais em todo o laminado. A utilização dessa notação é demonstrada para um laminado formado

por 11 lâminas constituídas por dois tipos de materiais compósitos, *kevlar-epoxy* (*ke*) e *grafite-epoxy* (*ge*) e duas espessuras (1 e 2):

$$\left[0^{(1,ge)}/45^{(2,ge)}/-45^{(2,ge)}/90^{(1,ke)}/90^{(1,ke)}/0^{(1,ke)}/90^{(1,ke)}/90^{(1,ke)}/-45^{(2,ge)}/45^{(2,ge)}/0^{(1,ge)}\right]$$

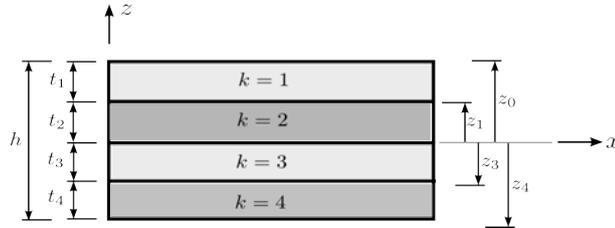


Figura 2.6: Posição das lâminas ao longo da espessura do laminado

Para facilitar as notações de laminados mais complexos, contendo diversas lâminas, é comum a utilização de notações contratas. Provavelmente a mais utilizada é a que indica um laminado simétrico, onde lâminas equidistantes ao plano médio do laminado são iguais. A simplificação da notação se dá pela eliminação da parte inferior do laminado e pela adição de um sub-índice *s* ao final da sequência de laminação. Aplicando essa notação ao laminado recém apresentado obtém-se:

$$\left[0^{(1,ge)}/45^{(2,ge)}/-45^{(2,ge)}/90^{(1,ke)}/90^{(1,ke)}/\bar{0}^{(1,ke)}\right]_s,$$

sendo que em laminados simétricos com número ímpar de lâminas é empregado uma barra sobre a lâmina central, que nesse caso é  $0^{(1,ke)}$ . Outra simplificação pode ser introduzida para representar sequências de lâminas iguais como  $(0^{(1,ge)}/0^{(1,ge)}/0^{(1,ge)})$  ou repetição de sequências de laminação como  $(0^{(1,ge)}/30^{(1,ke)}/0^{(1,ge)}/30^{(1,ke)})$ , que são escritas utilizando um sub-índice indicando o número de repetições na forma  $0_3^{(1,ge)}$  e  $(0^{(1,ge)}/30^{(1,ke)})_2$ , respectivamente. Em lâminas contíguas cuja única diferença é o sinal do ângulo de orientação das fibras adota-se uma notação simplificada usando os sinais  $\pm$  e  $\mp$ , permitindo a escrita de  $(45^{(2,ge)}/-45^{(2,ge)}/-30^{(1,ke)}/30^{(1,ke)})$  como  $(\pm 45^{(2,ge)}/\mp 30^{(1,ke)})$ . Seguindo essas simplificações a sequência de laminação apresentada anteriormente pode ser dada como:

$$\left[0^{(1,ge)}/\pm 45^{(2,ge)}/90_2^{(1,ke)}/\bar{0}^{(1,ke)}\right]_s$$

Utilizando as hipóteses de deformações para placas e cascas consideradas na FSDT, conforme apresentado na Seção 2.1, é possível definir a distribuição dos deslocamentos

e deformações ao longo da seção do material laminado. A aplicação dessa teoria presume que as laminas sejam perfeitamente unidas umas às outras e que essa ligação tenha espessura infinitesimal. Com isso os deslocamentos, e por consequência as deformações, são considerados contínuos na seção do laminado. Dessa forma, uma lâmina não pode deslizar em relação às outras, resultando em um comportamento do laminado equivalente ao de uma única lâmina com características mecânicas bastante complexas.

Embora os deslocamentos e as deformações no plano do laminado ( $\epsilon$ ) apresentem uma distribuição linear contínua na seção, conforme apresentado nas Eq. (2.1) e (2.2) e ilustrado na Fig. 2.1, a distribuição das tensões no plano ( $\sigma$ ) é descontinuada entre as lâminas. Esse fenômeno ocorre pela diferença de rigidez que cada lâmina apresenta segundo o sistema de referência do laminado, o que pode ser ocasionado pelos diferentes materiais ou pelas diferentes orientações das fibras de cada lâmina. A Fig. 2.7 ilustra a distribuição de tensões no laminado da Fig. 2.5 devido a ocorrência de deformações normais. As diferentes inclinações das retas da curva de  $\sigma_x$  e os saltos da tensão entre as lâminas são decorrentes da diferença de rigidez na direção  $x$  apresentada por cada lâmina, o que está relacionado à orientação de suas fibras.

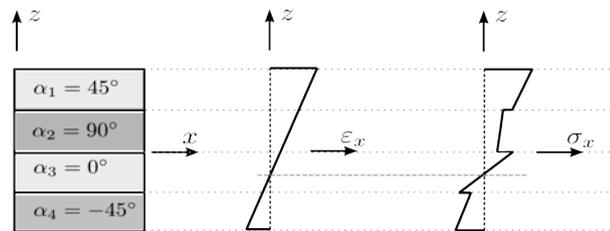


Figura 2.7: Distribuição de tensões e deformações normais ao longo da espessura de um material compósito laminado

Sendo conhecido o estado de deformações ( $\epsilon_k$ ) de uma lâmina  $k$  (compreendida em  $z_{k-1} < z < z_k$ ), é possível determinar seu estado de tensões ( $\sigma_k$ ) pela seguinte equação:

$$\sigma_k = Q_k \epsilon_k, \quad (2.22)$$

onde a matriz constitutiva da lâmina  $k$  segundo o sistema de referência do laminado ( $Q_k$ ) é obtida a partir da matriz constitutiva da lâmina  $k$  segundo seu sistema de eixos principais ( $\hat{Q}_k$ ) através da transformação dada na Eq. (2.21a).

Assim como as tensões normais, as tensões de cisalhamento transversal ao plano do laminado também apresentam descontinuidade entre as lâminas. No entanto, como as

deformações por corte obtidas pela FSDT são constantes na seção do laminado, as tensões relacionadas também são constantes em cada lâmina, sendo que as diferentes intensidades em cada lâmina dependem exclusivamente da rigidez transversal das lâminas, conforme é ilustrado na Fig. 2.8. A Eq. (2.23) é utilizada para determinar as tensões  $\boldsymbol{\tau}_k$  na lâmina  $k$  a partir da deformação por cisalhamento transversal  $\boldsymbol{\gamma}$  no laminado e da matriz constitutiva ( $\mathbf{Q}_{s_k}$ ), obtida pela aplicação da transformação dada na Eq. (2.21b) sobre a matriz constitutiva da lâmina  $k$  segundo seu sistema de eixos principais ( $\hat{\mathbf{Q}}_{s_k}$ ). Conforme exposto na Seção 2.1, a determinação do comportamento ao cisalhamento transversal de estruturas de materiais compósitos laminados por meio da FSDT requer a utilização de fatores de correção de corte (SCF). Essa correção é aplicada sobre a matriz constitutiva conforme apresentado na Eq. (2.24). Para seções de materiais isotrópicos normalmente é utilizado um único SCF, com valor  $\chi = 5/6$ . No entanto, para seções de compósitos laminados faz-se necessária a adoção de dois SCF,  $\chi_1$  e  $\chi_2$ , cujos valores são determinados por meio de considerações energéticas (ver Vlachoutsis (1992), Whitney (1973) e Chatterjee (1979)).

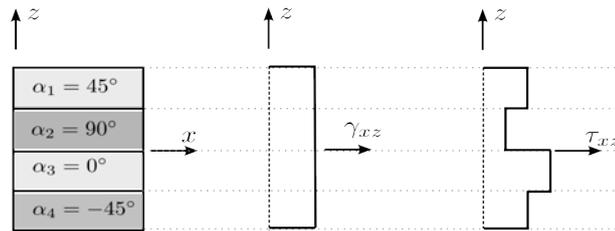


Figura 2.8: Distribuição de tensões e deformações de cisalhamento trasversal ao longo da espessura de um material compósito laminado

$$\boldsymbol{\tau}_k = \mathbf{Q}_{s_k} \boldsymbol{\gamma} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \chi_1 Q_{s11} & \sqrt{\chi_1 \chi_2} Q_{s12} \\ \sqrt{\chi_1 \chi_2} Q_{s21} & \chi_2 Q_{s22} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Conforme estabelecido nas Eq. (2.7), as forças atuantes no plano e transversalmente ao plano do laminado,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{V}$ , respectivamente, bem como os momentos ( $\mathbf{M}$ ) são obtidas pela integração das tensões distribuídas ao longo da seção de espessura  $h$ . No entanto, como a distribuição de tensões é descontínua entre as lâminas, as integrais apresentadas nas Eq. (2.8) são substituídas pela somatória das integrais sobre a espessura das  $n$  lâminas,

como segue:

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \boldsymbol{\sigma}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \mathbf{Q}_k (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}) dz \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} z \boldsymbol{\sigma}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} z \mathbf{Q}_k (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}) dz \quad (2.25b)$$

$$\mathbf{V} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \boldsymbol{\tau}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \mathbf{Q}_{s_k} \boldsymbol{\gamma} dz \quad (2.25c)$$

Isolando os termos  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$ , que são constantes nas Eq. (2.25), as somatórias se resumem às componentes de rigidez do laminado. As matrizes constitutivas  $\mathbf{D}_m$ ,  $\mathbf{D}_b$ ,  $\mathbf{D}_{mb}$  e  $\mathbf{D}_s$ , que relacionam as resultantes de tensões e deformações do laminado conforme discutido na Seção 2.1, são obtidas de forma similar ao apresentado na Eq. (2.9). Porém, no caso de materiais laminados as integrais sobre a seção são substituídas pelo somatório de integrais sobre a espessura de cada lâmina, resultando na Eq. (2.26), onde as matrizes constitutivas das lâminas ( $\mathbf{Q}_k$  e  $\mathbf{Q}_{s_k}$ ) são retiradas das integrais por serem constantes em cada lâmina.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m &= \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k (z_{k-1} - z_k) & \mathbf{D}_{mb} &= \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k (z_{k-1}^2 - z_k^2) \\ \mathbf{D}_b &= \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k (z_{k-1}^3 - z_k^3) & \mathbf{D}_s &= \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_{s_k} (z_{k-1} - z_k) \end{aligned} \quad (2.26)$$

A partir dessas matrizes a ligação entre resultantes de tensões e deformações é estabelecida segundo a FSDT, conforme já apresentado na Eq. (2.10).

## 2.3 Formulação estática linear local do elemento finito de casca

Nessa seção são apresentadas as formulações empregadas na construção do elemento finito de casca a partir da sobreposição de um elemento finito de membrana (ou estado plano de tensões) e um elemento finito de placa (levando em conta deformações por cisalhamento transversal), conforme ilustrado na Fig. 2.9. São empregados elementos triangulares planos com três nós. Tais elementos se baseiam nas teorias de pequenas deformações, restritas ao regime elástico linear dos materiais estudados. Além disso,

as formulações apresentadas são deduzidas de acordo com um sistema de referência local do elemento. Para a solução global do problema de análise de cascas faz-se necessária a transformação das quantidades obtidas em cada elemento para um sistema referencial global único, conforme os procedimentos utilizados nos sistemas discretos padrão (*standard discrete system*) (Zienkiewicz e Taylor, 2000). As teorias associadas a cada um dos elementos finitos empregados são discutidas separadamente, sendo abordado primeiramente o elemento de membrana e em seguida o elemento de placa. Posteriormente são tratadas questões referentes à construção da matriz de rigidez total do elemento de casca, onde são considerados os efeitos de acoplamento membrana-flexão para os casos de cascas de seção não simétrica, conforme discutido na Seção 2.2.2. Por fim, são apresentados os métodos utilizados para relacionar o sistema de referência local de cada elemento ao sistema de referência global do problema. Também é apresentado o mecanismo utilizado para definir as orientações principais dos materiais ortotrópicos nas superfícies complexas de cascas.

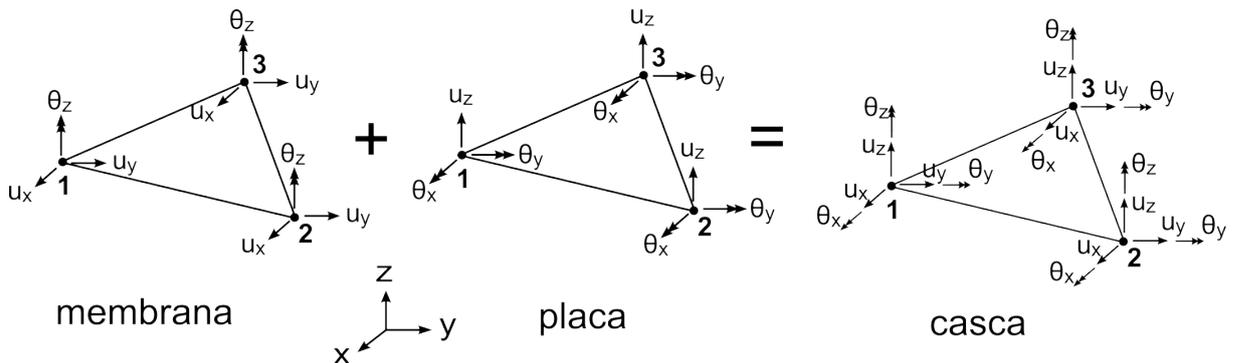


Figura 2.9: Graus de liberdade de membrana + placa = casca

Dado que as formulações desenvolvidas a seguir são baseadas em um referencial local, no qual o plano formado pelos eixos  $x$  e  $y$  locais é coincidente com o plano formado pelos nós localizados nos vértices do triângulo, pode-se descrever a geometria do elemento finito por meio das coordenadas  $x$  e  $y$  local dos seus nós  $i-j-k$  (ou 1-2-3). Algumas variáveis geométricas são estabelecidas a partir das coordenadas nodais no intuito de sintetizar as equações apresentadas a seguir. Essas variáveis geométricas estão descritas nas Eq. (2.27) e ilustradas na Fig. 2.10. As variáveis dadas nessas equações são referentes a cada lado do elemento, a menos da última equação que define a área do elemento. Cada lado do triângulo é designado pelos nós conectados por esse lado ou pelo número do nó oposto a esse lado, ou seja, o lado que conecta os nós  $i$  e  $j$  é designado como lado  $\overline{ij}$  ou lado  $k$ ,

ocorrendo o mesmo com os outros lados, conforme apresentado na Fig. 2.10. As relações geométricas  $c_k$  e  $b_k$  são definidas em termos da diferença do valor das coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente, entre os nós  $i$  e  $j$  que formam o lado  $k$  do elemento. O cosseno e o seno do ângulo ( $\alpha_{\bar{i}j}$ ) que cada lado  $\bar{i}j$  forma com o eixo  $x$  local são dados pela Eq. (2.27b). O quadrado do comprimento do lado  $k$  ( $L_k^2$ ) e a área do triângulo ( $A$ ) são as demais variáveis geométricas utilizadas nas seções seguintes. Nas formulações apresentadas abaixo também é empregada a espessura da casca ( $h$ ), que é fornecida como dado de entrada para os problemas (ou calculada pela soma das espessuras das camadas de uma seção laminada). Neste trabalho são consideradas apenas cascas de seção constante, não havendo variação da espessura e das propriedades do material ao longo do plano da casca em um mesmo elemento finito.

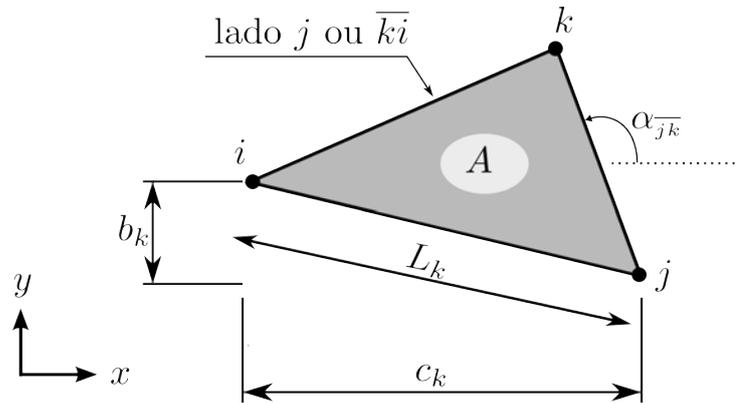


Figura 2.10: Variáveis geométricas do triângulo

$$c_k = x_i - x_j \quad b_k = y_j - y_i \quad L_{\bar{i}j}^2 = L_k^2 = b_k^2 + c_k^2 \quad (2.27a)$$

$$\cos \alpha_{\bar{i}j} = -\frac{b_k}{L_k} \quad \text{sen} \alpha_{\bar{i}j} = -\frac{c_k}{L_k} \quad (2.27b)$$

$$A = \frac{1}{2}(c_3 b_2 - b_3 c_2) \quad (2.27c)$$

Como é de costume em elementos triangulares, a formulação é apresentada com base nas bem conhecidas coordenadas naturais ou coordenadas de área triangular, denotadas nesse trabalho por  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ . Tais coordenadas satisfazem as seguintes condições:

$$0 \leq \zeta_i \leq 1 \quad \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1 \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A} \quad (2.28b)$$

### 2.3.1 Elemento finito de membrana

A formulação adotada para o componente de membrana do elemento de casca implementado nesse trabalho foi desenvolvida por Felippa (2003). Este elemento triangular plano com três nós destinado à análise de membranas, denominado OPT (*Optimal ANDES Template*), possui três graus de liberdade (*gdl*) por nó, sendo duas translações no plano do elemento ( $u_x$  e  $u_y$ ) e uma rotação no plano do elemento ( $\theta_z$ ), conforme demonstrado na Fig. 2.9. Segundo Felippa (2003), elementos de membrana contendo *gdl* de rotação no plano (*drilling degrees of freedom*) são interessantes por possibilitar melhoras na performance dos elementos sem a adição de nós intermediários nos seus lados, o que mantém a geração da malha simples. Esse *gdl* de rotação adicional também facilita o tratamento de interseções de cascas, bem como a conexão entre elementos de casca e barra.

O desenvolvimento do elemento OPT é baseado na formulação ANDES (*assumed natural deviatoric strain formulation*)(Felippa e Militello, 1992). A construção do elemento por meio dessa formulação resulta em uma matriz de rigidez ( $\mathbf{K}_m$ ) composta por uma matriz de rigidez básica ( $\mathbf{K}_m^b$ ) e uma matriz de rigidez de ordem superior ( $\mathbf{K}_m^h$ ) conforme apresentado na Eq. (2.29), onde o subíndice  $m$  indica rigidez da membrana, e os superíndices  $b$  e  $h$  se referem à componente básica e de ordem superior da matriz de rigidez, respectivamente.

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{K}_m^b + \mathbf{K}_m^h \quad (2.29)$$

Essas matrizes contêm parâmetros livres (ou coeficientes de escalonamento) que podem ser ajustados para aprimorar a capacidade de análise do elemento. Para a obtenção do elemento OPT, os parâmetros livres, presentes principalmente na matriz de rigidez de ordem superior, são otimizados de forma a se obter respostas exatas em problemas de flexão pura no plano quando analisados utilizando malhas retangulares (dois triângulos retângulos formam cada “célula” da malha retangular). Tal característica é verificada independentemente da razão de aspecto do elemento, dada pela razão entre os comprimentos dos lados que formam o cateto maior e o cateto menor do triângulo retângulo obtido em uma malha retangular de elementos triangulares. Com isso, o elemento é livre de travamento por razão de aspecto (distorção), o que não se verifica

para a maioria dos elementos de membrana como o elemento clássico de estado plano de tensão CST (*constant stress triangle*) ou o elemento apresentado por Allman (1988) que contém os mesmos *gdl* do elemento OPT. A independência da resposta do elemento com relação à sua razão de aspecto é de grande importância em muitas aplicações, como nos casos em que enrijecedores de estruturas complexas são modelados por meio de elementos de casca, normalmente com elevada razão de aspecto.

No que se segue, os componentes básico e de ordem superior da matriz de rigidez do elemento de membrana serão apresentados separadamente. No entanto, por restrições de espaço, apenas os termos constantes nas equações finais serão discutidos. Dessa forma, é possível reproduzir a rigidez do elemento através das equações apresentadas nesse texto, porém, o leitor interessado em uma abordagem mais detalhada sobre a construção do elemento deve consultar o trabalho original de Felippa (2003).

A matriz de rigidez obtida para o elemento OPT relaciona os deslocamentos nodais às suas respectivas forças nodais, ambos referidos ao sistema local do elemento, conforme a Eq. (2.30).

$$\mathbf{K}_m \mathbf{p}_m = \mathbf{f}_m \quad (2.30)$$

onde o vetor contendo os deslocamentos nodais de membrana do elemento ( $\mathbf{p}_m$ ) é constituído pelos vetores de deslocamentos de membrana  $\mathbf{p}_{mi} = \{u_{xi} \ u_{yi} \ \theta_{zi}\}^T$  de cada nó  $i=1,2,3$ , como segue:

$$\mathbf{p}_m = \{\mathbf{p}_{m1} \ \mathbf{p}_{m2} \ \mathbf{p}_{m3}\}^T = \{u_{x1} \ u_{y1} \ \theta_{z1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ \theta_{z2} \ u_{x3} \ u_{y3} \ \theta_{z3}\}^T \quad (2.31)$$

e, de forma semelhante, a partir do vetor de forças de membrana em cada nó  $i$ , dado por  $\mathbf{f}_{mi} = \{n_{xi} \ n_{yi} \ m_{zi}\}^T$ , onde  $n_{xi}$  e  $n_{yi}$  são forças nodais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $m_{zi}$  é o momento em torno do eixo  $z$ , obtém-se o vetor de forças nodais de membrana para todo o elemento:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_m &= \{\mathbf{f}_{m1} \ \mathbf{f}_{m2} \ \mathbf{f}_{m3}\}^T \\ &= \{n_{x1} \ n_{y1} \ m_{z1} \ n_{x2} \ n_{y2} \ m_{z2} \ n_{x3} \ n_{y3} \ m_{z3}\}^T \end{aligned} \quad (2.32)$$

A forma explícita do componente básico da rigidez foi apresentado por Bergan e Felippa (1985). Nesse trabalho a matriz  $\mathbf{K}_m^b$  é obtida pelo produto matricial duplo

$$\mathbf{K}_m^b = A \left( \mathbf{B}_m^b{}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m^b \right) \quad (2.33)$$

Na Eq. (2.33)  $\mathbf{D}_m$  é a matriz constitutiva de membrana (apresentada nas Eq. (2.9) e Eq. (2.26)) e  $A$  é a área do elemento. A outra matriz  $\mathbf{B}_m^b$  relaciona as deformações de membrana no elemento (associada ao campo básico de deformações), aos seus deslocamentos nodais (ou seja,  $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{B}_m^b \mathbf{p}_m$ ). Essa matriz básica de relação deformação–deslocamentos nodais de membrana é dada pela Eq. (2.34), cujos componentes são definidos na Eq. (2.35) a partir de variáveis geométricas e um coeficiente livre  $\alpha_b$ . O valor desse parâmetro é otimizado na formulação do elemento OPT, sendo apresentado posteriormente juntamente com o valor dos demais parâmetros livres existentes no componente de ordem superior da matriz de rigidez.

$$\mathbf{B}_m^b = [\mathbf{B}_{m,(1)}^b \quad \mathbf{B}_{m,(2)}^b \quad \mathbf{B}_{m,(3)}^b] \quad (2.34)$$

onde,

$$\mathbf{B}_{m,(i)}^b = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & \frac{\alpha_b}{6} (b_j^2 - b_k^2) \\ 0 & c_i & \frac{\alpha_b}{6} (c_j^2 - c_k^2) \\ c_i & b_i & \frac{\alpha_b}{3} (b_j c_j - b_k c_k) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

As *deformações naturais* são de fundamental importância na construção do componente de ordem superior de rigidez do elemento por meio de uma formulação ANDES. Essas são deformações normais definidas segundo três direções intrinsecamente relacionadas à geometria do triângulo (Felippa, 2003). No caso do elemento OPT, as deformações naturais ( $\mathbf{e}^{nat} = \{e_{12}^{nat} \quad e_{23}^{nat} \quad e_{31}^{nat}\}^T$ ) são tomadas segundo as direções de cada um dos lados do triângulo, como mostra a Fig. 2.11. Conforme descrito na Eq. (2.36), o campo de deformações naturais, assumido na construção de  $\mathbf{K}_m^h$ , é relacionado ao campo de deformações cartesianas ( $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ) pela matriz de transformação  $\mathbf{T}_e$ , definida na Eq. (2.37).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{T}_e \mathbf{e}^{nat} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{T}_e = -\frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_1 b_2 L_3^2 & b_2 b_3 L_1^2 & b_3 b_1 L_2^2 \\ c_1 c_2 L_3^2 & c_2 c_3 L_1^2 & c_3 c_1 L_2^2 \\ (c_1 b_2 + b_2 c_1) L_3^2 & (c_2 b_3 + b_3 c_2) L_1^2 & (c_3 b_1 + b_1 c_3) L_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Apartir da matriz  $\mathbf{T}_e$  também é possível estabelecer uma matriz constitutiva de membrana ( $\mathbf{D}_m^{nat}$ ), relativa às deformações naturais, conforme apresentado na Eq. (2.38).

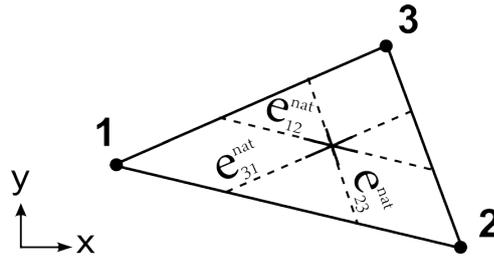


Figura 2.11: Deformações naturais

$$\mathbf{D}_m^{nat} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{D}_m \mathbf{T}_e \quad (2.38)$$

Outra definição utilizada para a construção da resposta de alta ordem do elemento é a de rotações hierárquicas ( $\tilde{\theta}_z$ ). As rotações  $\tilde{\theta}_z$  são definidas para cada nó  $i$  pela diferença entre a rotação total do nó  $i$  e a rotação média do elemento ( $\theta_{z0}$ ), ou seja,  $\tilde{\theta}_{zi} = \theta_{zi} - \theta_{z0}$ . A rotação média  $\theta_{z0}$ , definida pelos componentes de translação do vetor de deslocamentos de membrana, se refere ao giro de corpo rígido do elemento, ao qual não está associada nenhuma deformação. Dessa forma, as rotações hierárquicas constituem a parcela da rotação nodal que produz deformação, sendo portanto utilizadas para a construção da rigidez de ordem superior.

Considerando os graus de liberdade originalmente empregados para a análise estrutural, é necessário definir uma transformação entre as rotações hierárquicas (agrupadas no vetor  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z = \{\tilde{\theta}_{z1} \ \tilde{\theta}_{z2} \ \tilde{\theta}_{z3}\}^T$ ) e o vetor de deslocamentos nodais de membrana ( $\mathbf{p}_m$ ). Essa transformação é dada pela relação  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z = \mathbf{T}_{\tilde{\theta}_z} \mathbf{p}_m$ , onde  $\mathbf{T}_{\tilde{\theta}_z}$  é a matriz de transformação, definida na Eq. (2.39) (Felippa, 2003). Dessa forma, a matriz de rigidez de ordem superior, construída originalmente com relação a  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z$ , pode ser referida a  $\mathbf{p}_m$  valendo-se da transformação de variáveis apresentada.

$$\mathbf{T}_{\tilde{\theta}_z} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} c_1 & -b_1 & 4A & c_2 & -b_2 & 0 & c_3 & -b_3 & 0 \\ c_1 & -b_1 & 0 & c_2 & -b_2 & 4A & c_3 & -b_3 & 0 \\ c_1 & -b_1 & 0 & c_2 & -b_2 & 0 & c_3 & -b_3 & 4A \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

A construção da rigidez de ordem superior se baseia na reprodução de estados desviadores de deformação natural (diferentes do estado de deformação constante, definido no componente básico da formulação). Tais estados de deformação, relativos a flexão e torção no plano, são estabelecidos a partir das rotações hierárquicas. Tomando essas

considerações, a dedução da matriz de rigidez de membrana de ordem superior resulta nas equações que seguem. Inicialmente são introduzidas na Eq. (2.40) as matrizes  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{Q}_3$ , dependentes de nove parâmetros adimensionais  $\beta_1$  a  $\beta_9$ . Essas matrizes relacionam as deformações naturais em qualquer ponto do triângulo (definido por meio de coordenadas naturais  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ ) aos valores nodais de rotações hierárquicas através da equação  $\mathbf{e}^{nat} = (\zeta_1 \mathbf{Q}_1 + \zeta_2 \mathbf{Q}_2 + \zeta_3 \mathbf{Q}_3) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_z$ .

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{2A}{3} \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{L_3^2} & \frac{\beta_2}{L_3^2} & \frac{\beta_3}{L_3^2} \\ \frac{\beta_4}{L_1^2} & \frac{\beta_5}{L_1^2} & \frac{\beta_6}{L_1^2} \\ \frac{\beta_7}{L_2^2} & \frac{\beta_8}{L_2^2} & \frac{\beta_9}{L_2^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{2A}{3} \begin{bmatrix} \frac{\beta_9}{L_3^2} & \frac{\beta_7}{L_3^2} & \frac{\beta_8}{L_3^2} \\ \frac{\beta_3}{L_1^2} & \frac{\beta_1}{L_1^2} & \frac{\beta_2}{L_1^2} \\ \frac{\beta_6}{L_2^2} & \frac{\beta_4}{L_2^2} & \frac{\beta_5}{L_2^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = \frac{2A}{3} \begin{bmatrix} \frac{\beta_5}{L_3^2} & \frac{\beta_6}{L_3^2} & \frac{\beta_4}{L_3^2} \\ \frac{\beta_8}{L_1^2} & \frac{\beta_9}{L_1^2} & \frac{\beta_7}{L_1^2} \\ \frac{\beta_3}{L_2^2} & \frac{\beta_1}{L_2^2} & \frac{\beta_2}{L_2^2} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Empregando essas relações é possível, através de integração numérica utilizando pontos localizados no centro dos lados do elemento, calcular a matriz de rigidez de ordem superior baseada nos deslocamentos  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z$  e na matriz constitutiva para deformações naturais ( $\mathbf{D}_m^{nat}$ ), como segue:

$$\mathbf{K}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z} = A (\mathbf{Q}_4^T \mathbf{D}_m^{nat} \mathbf{Q}_4 + \mathbf{Q}_5^T \mathbf{D}_m^{nat} \mathbf{Q}_5 + \mathbf{Q}_6^T \mathbf{D}_m^{nat} \mathbf{Q}_6), \quad (2.41)$$

onde as matrizes  $\mathbf{Q}_4$ ,  $\mathbf{Q}_5$  e  $\mathbf{Q}_6$  são dadas por,

$$\mathbf{Q}_4 = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2), \quad \mathbf{Q}_5 = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3), \quad \mathbf{Q}_6 = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_1) \quad (2.42)$$

Utilizando da transformação de variáveis através da matriz  $\mathbf{T}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z}$  (ver Eq. (2.39)) e empregando um coeficiente de escalonamento adicional ( $\frac{3}{4}\beta_0$ ), a matriz de rigidez de ordem superior é definida com relação ao vetor de deslocamentos de membrana ( $\mathbf{p}_m$ ) por:

$$\mathbf{K}_m^h = \frac{3}{4}\beta_0 \mathbf{T}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z}^T \mathbf{K}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z} \mathbf{T}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z} \quad (2.43)$$

Conforme apresentado nas Eq. (2.33) e Eq. (2.43), os componentes básico e de alta ordem que formam a matriz de rigidez de membrana, dada na Eq. (2.29), são definidos a partir de relações geométricas do elemento, propriedades do material e de constantes adimensionais provenientes da aplicação da formulação ANDES. Na construção do elemento OPT essas

constantes são ajustadas de forma que o elemento apresente resposta ótima em problemas de flexão no plano. Essa condição é verificada quando a razão ( $r_e$ ) entre a energia de deformação produzida no problema 2D e a energia de deformação obtida na solução exata do problema é igual a 1. Elementos que apresentam  $r_e$  maior ou menor que 1 são demasiadamente rígidos ou flexíveis, respectivamente. Quando o valor de  $r_e$  cresce acentuadamente com o aumento da razão de aspecto é verificado o problema de travamento por razão de aspecto.

Segundo Felippa (2003), na análise de materiais isotrópicos utilizando o elemento OPT os valores a serem adotados para os coeficientes presentes nas matrizes  $\mathbf{K}_m^b$  e  $\mathbf{K}_m^h$  são os seguintes:

$$\alpha_b = \frac{3}{2}, \quad \beta_0 = \frac{1}{2} (1 - 4\nu^2), \quad \beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = 1, \quad \beta_2 = 2, \\ \beta_4 = 0, \quad \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = -1, \quad \beta_9 = -2, \quad (2.44)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material. Para evitar a anulação da matriz  $\mathbf{K}_m^h$  no caso de um material com  $\nu = \frac{1}{2}$ , ou valores próximos a este, adota-se um valor mínimo  $\beta_0 = \max(\frac{1}{2}(1 - 4\nu^2); 0,01)$ . Quando materiais compósitos laminados são abordados não existe uma definição para o coeficiente de Poisson  $\nu$  utilizado na determinação de  $\beta_0$ . Uma solução para essa questão é apresentada por Felippa (2003), onde o cálculo do coeficiente  $\beta_0$  é realizado por equações complexas que utilizam uma série de invariantes da matriz constitutiva. No entanto, nesse mesmo trabalho é ressaltado que o uso de valores não ótimos para  $\beta_0$  resultam em uma performance sub-ótima, mas o elemento continua livre de problemas de travamento por razão de aspecto. Assim sendo, no presente trabalho adota-se um cálculo aproximado para  $\beta_0$  utilizando o valor  $\nu = \frac{D_{m12}}{D_{m22}}$ , onde o laminado é considerado como um material ortotrópico equivalente com sua matriz constitutiva equivalente ( $\mathbf{D}_m$ ) dada na forma da Eq. (2.12). Os demais parâmetros fornecidos na Eq. (2.44) permanecem inalterados no tratamento de materiais compósitos.

Uma vez calculados os deslocamentos nodais para uma configuração de equilíbrio da estrutura, as deformações podem ser obtidas no domínio de cada elemento utilizando as matrizes de relação deformação–deslocamento. As deformações de membrana ( $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ) são calculadas segundo a Eq. (2.45), pelo produto entre a matriz deformação–deslocamento de membrana e o vetor de deslocamentos nodais de membrana  $\mathbf{p}_m$ , dado segundo o referencial

local do elemento.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{B}_m \mathbf{p}_m \quad (2.45)$$

onde  $\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_m^b + \mathbf{B}_m^h$ . O componente básico da matriz  $\mathbf{B}_m$ , que é constante em todo o elemento, está definido na Eq. (2.34). O componente de alta ordem é descrito na Eq. (2.46), podendo ser calculado para cada ponto do elemento segundo suas coordenadas naturais  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ . No que se refere aos coeficientes livres da formulação, são empregados os mesmos valores utilizados no cálculo da matriz da rigidez, conforme apresentado na Eq. (2.44). Isso não se aplica apenas ao coeficiente  $\bar{\beta}_0$  que deve assumir o valor<sup>1</sup>  $\bar{\beta}_0 = 3/2$ , para a análise tanto de materiais isotrópicos quanto de materiais ortotrópicos.

$$\mathbf{B}_m^h = \bar{\beta}_0 \mathbf{T}_e (\zeta_1 \mathbf{Q}_1 + \zeta_2 \mathbf{Q}_2 + \zeta_3 \mathbf{Q}_3) \mathbf{T}_{\bar{\theta}_z} \quad (2.46)$$

### 2.3.2 Elemento finito de placa

A formulação adotada para o componente de placa (relativo às deformações de flexão e corte transversal) do elemento de casca implementado nesse trabalho é devida a Zhang e Kim (2005). Esse elemento triangular plano possui três nós, cada um contemplando um *gdl* de translação na direção transversal ao plano médio da casca ( $u_z$ ) e dois *gdl* de rotação em torno dos eixos de referência contidos no plano do elemento ( $\theta_x$  e  $\theta_y$ ), como apresentado na Fig. 2.9.

A construção do elemento em questão consiste em uma extensão do elemento RDKMT, apresentado por Wanji e Cheung (2001), ao caso de análise de estruturas de materiais compósitos laminados. O elemento RDKMT é destinado à análise linear de placas finas ou espessas de materiais isotrópicos, se enquadrando na teoria de deformação com corte de primeira ordem FSDT (ver Seção 2.1). Seu desenvolvimento é baseado na equação de viga de Timoshenko, o que lhe confere características muito interessantes como: (a) utilização de *gdl* nodais convencionais (translações e rotações), o que facilita a aplicação de condições de contorno e a integração com outros elementos finitos comumente empregados na análise estrutural; (b) sensibilidade aos efeitos de corte transversal, o que possibilita

<sup>1</sup>Este valor é sugerido por Felippa (2003), para materiais isotrópicos, com base em estudos de ajustes por mínimos quadrados, não sendo conhecido o melhor valor para materiais ortotrópicos.

a análise de placas espessas ou de materiais com grande flexibilidade ao corte, como é o caso dos compósitos laminados; (c) formulação unificada para placas finas ou espessas, o que evita naturalmente os problemas de travamento por corte, sem a necessidade do emprego de esquemas de estabilização.

A extensão do elemento ao caso de análise de estruturas de compósitos laminados é obtida pelo emprego da equação da viga de compósito laminado de Timoshenko (Zhang e Kim, 2005). A distribuição do deslocamento transversal  $u_z$  e o giro  $\beta_s$  na direção do eixo da viga de comprimento  $L_{\bar{i}\bar{j}}$  são dadas pelas Eq. (2.47), segundo o sistema local de coordenadas  $s$  e satisfazendo as condições de contorno. Essas distribuições são obtidas a partir dos valores dos deslocamentos  $u_z$  e  $\beta_s$  nos nós  $i$  e  $j$  e das funções de interpolação na linha ( $\eta_i$  e  $\eta_j$ ) dadas na Eq. (2.48). A Fig. 2.12 ilustra esses componentes.

$$u_z = [\eta_i + \mu_e \eta_i \eta_j (\eta_i - \eta_j)] u_{z_i} - [\eta_i \eta_j + \mu_e \eta_i \eta_j (\eta_i - \eta_j)] \frac{L_{\bar{i}\bar{j}}}{2} \beta_{s_i} + [\eta_j + \mu_e \eta_i \eta_j (\eta_j - \eta_i)] u_{z_j} + [\eta_i \eta_j + \mu_e \eta_i \eta_j (\eta_j - \eta_i)] \frac{L_{\bar{i}\bar{j}}}{2} \beta_{s_j} \quad (2.47a)$$

$$\beta_s = \frac{6\mu_e \eta_i \eta_j}{L_{\bar{i}\bar{j}}} u_{z_i} + \eta_i (1 - 3\mu_e \eta_j) \beta_{s_i} - \frac{6\mu_e \eta_i \eta_j}{L_{\bar{i}\bar{j}}} u_{z_j} + \eta_j (1 - 3\mu_e \eta_i) \beta_{s_j} \quad (2.47b)$$

$$\eta_i = 1 - \frac{s}{L_{\bar{i}\bar{j}}}, \quad \eta_j = \frac{s}{L_{\bar{i}\bar{j}}} \quad (2.48)$$

Nas Eq. (2.47)  $\mu_e$  é uma constante de rigidez elástica, obtida conforme a Eq. (2.49) (Zhang e Kim, 2005). A variável auxiliar  $\lambda_e$  corresponde à razão entre as constantes elásticas de flexão e cisalhamento na direção  $i$ - $j$   $D_{b_{\bar{i}\bar{j}}}$  e  $D_{s_{\bar{i}\bar{j}}}$ , respectivamente. Na formulação do elemento de placa é necessário definir as Eq. (2.47) segundo cada lado do elemento. Isso inclui a determinação do valor de  $\lambda_e$  na direção de cada lado, o que pode ser obtido por meio das Eq. (2.50), onde  $\alpha_{\bar{i}\bar{j}}$  é o ângulo que cada lado  $\bar{i}\bar{j}$  forma com o eixo  $x$  local do elemento e  $D_{b_{i,j}}$  e  $D_{s_{i,j}}$  são componentes da matriz constitutivas relativas às deformações de flexão e corte transversal, respectivamente, conforme apresentado na Eq. (2.26).

$$\mu_e = \frac{1}{1 + 12\lambda_e}, \quad \lambda_e = \frac{D_{b_{\bar{i}\bar{j}}}}{D_{s_{\bar{i}\bar{j}}} L_{\bar{i}\bar{j}}^2} \quad (2.49)$$

$$D_{b_{\bar{i}\bar{j}}} = D_{b_{11}} \cos^4 \alpha_{\bar{i}\bar{j}} + 2(D_{b_{12}} + 2D_{b_{33}}) (\cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \sin \alpha_{\bar{i}\bar{j}})^2 + D_{b_{22}} \sin^4 \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \quad (2.50a)$$

$$D_{s_{\bar{i}\bar{j}}} = D_{s_{11}} \cos^2 \alpha_{\bar{i}\bar{j}} + 2D_{s_{12}} \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \sin \alpha_{\bar{i}\bar{j}} + D_{s_{22}} \sin^2 \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \quad (2.50b)$$

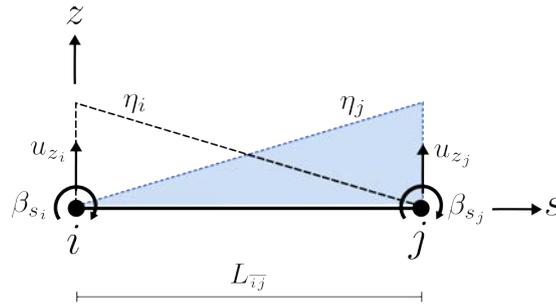


Figura 2.12: Deslocamentos nodais e funções de interpolação em 1D usados nas funções de viga de compósito laminado de Timoshenko.

A matriz de rigidez de placa ( $\mathbf{K}_p$ ) é formada por um componente relativo às deformações de flexão (ou seja, as curvaturas  $\boldsymbol{\kappa}$ ), dado pela matriz  $\mathbf{K}_b$ , e por um componente relativo às deformações de cisalhamento transversal ( $\boldsymbol{\gamma}$ ), dado pela matriz  $\mathbf{K}_s$ . Conforme apresentado na Eq. (2.52), a matriz de rigidez relaciona os deslocamentos nodais às suas respectivas forças nodais, estando ambos referidos ao sistema local do elemento.

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (2.51)$$

$$\mathbf{K}_p \mathbf{p}_p = \mathbf{f}_p \quad (2.52)$$

O vetor contendo os deslocamentos nodais de placa do elemento ( $\mathbf{p}_p$ ) é constituído pelos vetores de deslocamentos de placa  $\mathbf{p}_{pi} = \{u_{zi} \ \theta_{xi} \ \theta_{yi}\}^T$  de cada nó  $i = 1,2,3$ , como segue:

$$\mathbf{p}_p = \{\mathbf{p}_{p1} \ \mathbf{p}_{p2} \ \mathbf{p}_{p3}\}^T = \{u_{z1} \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ u_{z2} \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ u_{z3} \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}\}^T \quad (2.53)$$

De forma semelhante, a partir do vetor de forças de placa em cada nó  $i$ , dado por  $\mathbf{f}_{pi} = \{n_{zi} \ m_{xi} \ m_{yi}\}^T$ , onde  $m_{xi}$  e  $m_{yi}$  são os momentos em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $n_{zi}$  é a força nodal na direção do eixo  $z$ , obtém-se o vetor de forças nodais de placa para todo o elemento:

$$\mathbf{f}_p = \{\mathbf{f}_{p1} \ \mathbf{f}_{p2} \ \mathbf{f}_{p3}\}^T = \{n_{z1} \ m_{x1} \ m_{y1} \ n_{z2} \ m_{x2} \ m_{y2} \ n_{z3} \ m_{x3} \ m_{y3}\}^T \quad (2.54)$$

### Campo de rotações e de curvaturas do elemento

O comportamento do elemento quanto à flexão é dado pela definição do campo de deslocamentos de rotação no seu domínio. Esse campo de rotações é construído pela interpolação dos deslocamentos nodais de um elemento triangular com 6 nós (3 nós de

canto  $i = 1, 2, 3$  e 3 nós laterais  $a = 4, 5, 6$ ), conforme apresentado na Fig. 2.13a. As rotações de uma linha normal ao plano do elemento nas direções  $x$  e  $y$  ( $\beta_x$  e  $\beta_y$ ) são obtidas pela interpolação de seus valores nodais utilizando funções de interpolação  $N$ , ilustradas na Fig. 2.13b, e definidas conforme segue:

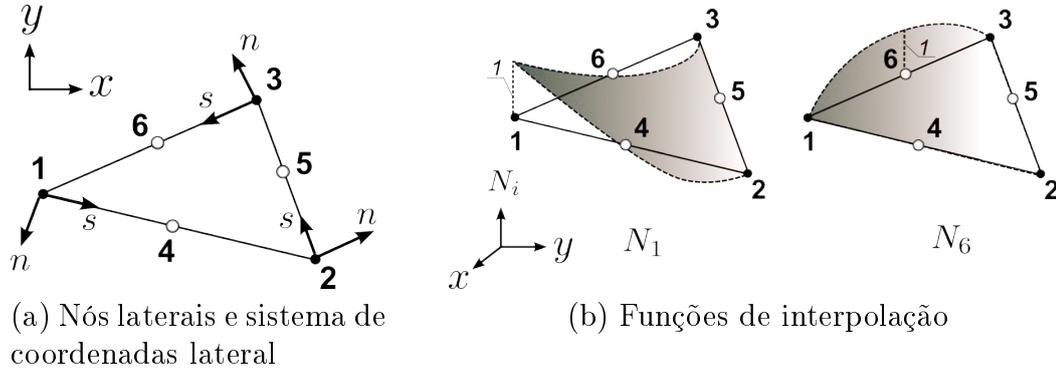


Figura 2.13: Elemento triangular auxiliar com 6 nós

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} \beta_{x_i} \\ \beta_{y_i} \end{Bmatrix} + \sum_{a=4}^6 N_a \begin{Bmatrix} \beta_{x_a} \\ \beta_{y_a} \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

sendo as funções de interpolação definidas para  $i = 1, 2, 3$  e para  $a = 4, 5, 6$  como

$$N_i = (2\zeta_i - 1) \zeta_i \quad (2.56)$$

$$N_a = 4\zeta_i \zeta_j \quad (2.57)$$

onde se associa a cada valor de  $a = 4, 5, 6$  um valor  $(i - j) = (1 - 2), (2 - 3), (3 - 1)$ , respectivamente.

Quando a distribuição das rotações  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são conhecidas em qualquer ponto do elemento, também são conhecidas as deformações, obtidas segundo as Eq. (2.3) e Eq. (2.4).

Embora o elemento de 6 nós seja utilizado na construção do campo de rotações, as variáveis referentes aos nós laterais não são tomadas como incógnitas no problema. Em vez disso, o valor das rotações nesses nós é obtido a partir do valor das rotações nos nós de canto. Para tanto, é definido um sistema de referência em cada lado do elemento formado por um eixo  $n$  na direção perpendicular ao lado e um eixo  $s$  na direção do lado (ver Fig. 2.13a). As rotações da reta normal ao plano médio da placa em cada uma dessas direções ( $\beta_n$  e  $\beta_s$ ) são obtidas ao longo do lado do elemento segundo uma interpolação dos deslocamentos dos nós de canto. Para interpolação de  $\beta_n$  é utilizada uma função linear enquanto que para

a interpolação de  $\beta_s$  é utilizada a função de viga de compósito laminado de Timoshenko (ver Eq. (2.47b)). A determinação das rotações ( $\beta_{n_a}$  e  $\beta_{s_a}$ ) em um nó lateral  $a$ , localizado no centro do lado  $\bar{i}\bar{j}$ , é obtida facilmente considerando que nesse ponto  $\eta_i = \eta_j = 0,5$ , o que resulta em:

$$\beta_{n_a} = \frac{1}{2} (\beta_{n_i} + \beta_{n_j}) \quad (2.58)$$

$$\beta_{s_a} = \frac{1,5\mu_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} u_{z_i} + \frac{1}{2} (1 - 1,5\mu_{\bar{i}\bar{j}}) \beta_{s_i} - \frac{1,5\mu_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} u_{z_j} + \frac{1}{2} (1 - 1,5\mu_{\bar{i}\bar{j}}) \beta_{s_j} \quad (2.59)$$

ou, escrevendo em forma matricial, com a matriz  $\mathbf{H}_a^1$  contendo os coeficientes que multiplicam os deslocamentos do nó  $i$  e a matriz  $\mathbf{H}_a^2$  contendo os coeficientes que multiplicam os deslocamentos do nó  $j$ ,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \beta_{n_a} \\ \beta_{s_a} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1,5\mu_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} & 0 & \frac{1}{2} (1 - 1,5\mu_{\bar{i}\bar{j}}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z_i} \\ \beta_{n_i} \\ \beta_{s_i} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1,5\mu_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} & 0 & \frac{1}{2} (1 - 1,5\mu_{\bar{i}\bar{j}}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z_j} \\ \beta_{n_j} \\ \beta_{s_j} \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{H}_a^1 \begin{Bmatrix} u_{z_i} \\ \beta_{n_i} \\ \beta_{s_i} \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_a^2 \begin{Bmatrix} u_{z_j} \\ \beta_{n_j} \\ \beta_{s_j} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Algumas transformações são aplicadas sobre a Eq. (2.60) no intuito de transformar  $\beta_{n_a}$  e  $\beta_{s_a}$  em  $\beta_{x_a}$  e  $\beta_{y_a}$  e transformar  $\beta_{n_i}$  e  $\beta_{s_i}$  em  $\theta_{x_i}$  e  $\theta_{y_i}$ , pois essas são as variáveis utilizadas na formulação do elemento. Para tanto, é introduzida inicialmente a transformação das rotações  $\beta$  entre o sistema  $x$ - $y$  o sistema  $n$ - $s$ , conforme as Eq. (2.61a) e Eq. (2.61b).

$$\begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{\beta(1)} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{T}_{\beta(1)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} & \text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \\ -\text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} & \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \end{bmatrix} \quad (2.61a)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{\beta(1)}^T \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix}, \quad \text{considerando que} \quad \mathbf{T}_{\beta(1)}^{-1} = \mathbf{T}_{\beta(1)}^T \quad (2.61b)$$

A segunda transformação, relacionando as rotações na direção e em torno dos eixos locais do elemento é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

Introduzindo a Eq. (2.62) na Eq. (2.61) e incluindo o deslocamento transversal no vetor de deslocamentos obtém-se a relação dada pela (2.63).

$$\begin{Bmatrix} u_z \\ \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{\beta(2)} \begin{Bmatrix} u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{T}_{\beta(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} & \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \\ 0 & -\cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} & \text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Ao introduzir as Eq. (2.60) na Eq. (2.61b), e adicionalmente a relação dada na (2.63), obtém-se a seguinte equação para um nó lateral  $a$ :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \beta_{x_a} \\ \beta_{y_a} \end{Bmatrix} &= \mathbf{T}_{\beta(1)}^T \begin{Bmatrix} \beta_{n_a} \\ \beta_{s_a} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{\beta(1)}^T \left( \mathbf{H}_a^1 \begin{Bmatrix} u_{z_i} \\ \beta_{n_i} \\ \beta_{s_i} \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_a^2 \begin{Bmatrix} u_{z_j} \\ \beta_{n_j} \\ \beta_{s_j} \end{Bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{T}_{\beta(1)}^T \mathbf{H}_a^1 \mathbf{T}_{\beta(2)} \begin{Bmatrix} u_{z_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_{\beta(1)}^T \mathbf{H}_a^2 \mathbf{T}_{\beta(2)} \begin{Bmatrix} u_{z_j} \\ \theta_{x_j} \\ \theta_{y_j} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Fazendo  $\bar{\mathbf{H}}_a^1 = \mathbf{T}_{\beta(1)}^T \mathbf{H}_a^1 \mathbf{T}_{\beta(2)}$  e  $\bar{\mathbf{H}}_a^2 = \mathbf{T}_{\beta(1)}^T \mathbf{H}_a^2 \mathbf{T}_{\beta(2)}$ , obtém-se:

$$\bar{\mathbf{H}}_a^1 = \begin{bmatrix} -1,5 \frac{\mu_{\bar{i}\bar{j}} \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} & -0,75 \mu_{\bar{i}\bar{j}} \text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} & -0,75 \mu_{\bar{i}\bar{j}} \text{sen}^2 \alpha_{\bar{i}\bar{j}} + 0,5 \\ 1,5 \frac{\mu_{\bar{i}\bar{j}} \text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} & 0,75 \mu_{\bar{i}\bar{j}} \cos^2 \alpha_{\bar{i}\bar{j}} - 0,5 & 0,75 \mu_{\bar{i}\bar{j}} \text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \end{bmatrix} \quad (2.65a)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_a^2 = \begin{bmatrix} 1,5 \frac{\mu_{\bar{i}\bar{j}} \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} & -0,75 \mu_{\bar{i}\bar{j}} \text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} & -0,75 \mu_{\bar{i}\bar{j}} \text{sen}^2 \alpha_{\bar{i}\bar{j}} + 0,5 \\ -1,5 \frac{\mu_{\bar{i}\bar{j}} \text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} & 0,75 \mu_{\bar{i}\bar{j}} \cos^2 \alpha_{\bar{i}\bar{j}} - 0,5 & 0,75 \mu_{\bar{i}\bar{j}} \text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \end{bmatrix} \quad (2.65b)$$

Valendo-se dessas relações a Eq. (2.64) pode ser expressa de forma simplificada como:

$$\begin{Bmatrix} \beta_{x_a} \\ \beta_{y_a} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{H}}_a^1 \mathbf{p}_{p_i} + \bar{\mathbf{H}}_a^2 \mathbf{p}_{p_j} \quad (2.66)$$

Como resultado das relações apresentadas acima, a Eq. (2.55) é reescrita em termos dos  $gdl$  de placa de cada nó  $i$  ( $\mathbf{p}_{p_i}$ ) e de todo o elemento ( $\mathbf{p}_p$ ),

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{H}' \mathbf{p}_{p_i} + \sum_{i=4}^6 N_i \mathbf{A}_i \mathbf{p}_p \quad (2.67)$$

onde,

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = [\bar{\mathbf{H}}_4^1 \quad \bar{\mathbf{H}}_4^2 \quad \mathbf{0}], \quad \mathbf{A}_5 = [\mathbf{0} \quad \bar{\mathbf{H}}_5^1 \quad \bar{\mathbf{H}}_5^2], \quad \mathbf{A}_6 = [\bar{\mathbf{H}}_6^2 \quad \mathbf{0} \quad \bar{\mathbf{H}}_6^1] \quad (2.68)$$

Somando todas as contribuições nodais para a formação do campo de rotações no elemento e escrevendo a Eq. (2.67) em termos do vetor de  $gdl$  de placa do elemento ( $\mathbf{p}_p$ ) obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{p}_p, \quad \text{com} \quad \bar{\mathbf{N}} = [\bar{\mathbf{N}}_{(1)} \quad \bar{\mathbf{N}}_{(2)} \quad \bar{\mathbf{N}}_{(3)}] \quad (2.69)$$

sendo os componentes da matriz  $\bar{\mathbf{N}}$  dados por:

$$\bar{\mathbf{N}}_{(1)} = N_1 \mathbf{H}' + N_4 \bar{\mathbf{H}}_4^1 + N_6 \bar{\mathbf{H}}_6^2 \quad (2.70a)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{(2)} = N_2 \mathbf{H}' + N_5 \bar{\mathbf{H}}_5^1 + N_4 \bar{\mathbf{H}}_4^2 \quad (2.70b)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{(3)} = N_3 \mathbf{H}' + N_6 \bar{\mathbf{H}}_6^1 + N_5 \bar{\mathbf{H}}_5^2 \quad (2.70c)$$

Uma vez que o campo de deslocamentos de rotação está estabelecido no domínio do elemento, é preciso definir a matriz  $\mathbf{B}_b$ , que faz a relação entre as curvaturas  $\boldsymbol{\kappa}$  e o vetor de deslocamentos nodais de placa do elemento ( $\mathbf{p}_p$ ). Escrevendo a Eq. (2.2) em forma matricial com a introdução da matriz  $\mathbf{L}$  tem-se a relação entre  $\boldsymbol{\kappa}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  como<sup>2</sup>:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} & \frac{\partial(\bullet)}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

A relação entre  $\boldsymbol{\kappa}$  e  $\mathbf{p}_p$  é obtida introduzindo-se a Eq. (2.69) na Eq. (2.2), o que resulta em:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_b \mathbf{p}_p, \quad (2.72)$$

onde

$$\mathbf{B}_b = \mathbf{L} \bar{\mathbf{N}} = [\mathbf{B}_{b,(1)} \ \mathbf{B}_{b,(2)} \ \mathbf{B}_{b,(3)}] \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_{b,(i)} = \mathbf{L} \bar{\mathbf{N}}_i \quad (2.73)$$

Considerando as Eq. (2.70) observa-se que as matrizes  $\bar{\mathbf{N}}_i$  são formadas por matrizes contendo apenas constantes geométricas e de material ( $\mathbf{H}'$  e  $\bar{\mathbf{H}}_a$ ), multiplicadas pelas funções de interpolação das rotações. Isso faz com que os componentes  $\mathbf{B}_{b,(i)}$  da matriz  $\mathbf{B}_b$  sejam escritos de maneira bastante simples, com a introdução das matrizes  $\bar{\mathbf{L}}_i$ , conforme apresentado na Eq. (2.74).

---

<sup>2</sup>Nesse trabalho, o produto de  $\frac{\partial(\bullet)}{\partial x}$  por uma quantidade  $\alpha$  representa a derivada parcial dessa quantidade em relação a  $x$ , ou seja  $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$

$$\mathbf{B}_{b,(1)} = \bar{\mathbf{L}}_1 \mathbf{H}' + \bar{\mathbf{L}}_4 \bar{\mathbf{H}}_4^1 + \bar{\mathbf{L}}_6 \bar{\mathbf{H}}_6^2 \quad (2.74a)$$

$$\mathbf{B}_{b,(2)} = \bar{\mathbf{L}}_2 \mathbf{H}' + \bar{\mathbf{L}}_5 \bar{\mathbf{H}}_5^1 + \bar{\mathbf{L}}_4 \bar{\mathbf{H}}_4^2 \quad (2.74b)$$

$$\mathbf{B}_{b,(3)} = \bar{\mathbf{L}}_3 \mathbf{H}' + \bar{\mathbf{L}}_6 \bar{\mathbf{H}}_6^1 + \bar{\mathbf{L}}_5 \bar{\mathbf{H}}_5^2 \quad (2.74c)$$

onde o produto  $\bar{\mathbf{L}}_i = \mathbf{L}N_i$  resulta em:

$$\bar{\mathbf{L}}_i = \frac{4\zeta_i - 1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \quad \text{para } i = 1,2,3 \quad (2.75a)$$

$$\bar{\mathbf{L}}_a = \frac{4}{2A} \begin{bmatrix} (b_i\zeta_j + b_j\zeta_i) & 0 \\ 0 & (c_i\zeta_j + c_j\zeta_i) \\ (c_i\zeta_j + c_j\zeta_i) & (b_i\zeta_j + b_j\zeta_i) \end{bmatrix}, \quad \text{para } a = 4,5,6 \quad (2.75b)$$

O fato das matrizes  $\bar{\mathbf{L}}_i$  serem os únicos componentes das matrizes  $\mathbf{B}_{b,(i)}$  cujos valores variam de acordo com as coordenadas  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$  ao longo do elemento é interessante pois as demais matrizes  $\mathbf{H}'$  e  $\bar{\mathbf{H}}_a$  não precisam ser recalculadas para a determinação de  $\mathbf{B}_b$  em vários pontos do mesmo elemento.

A contribuição da matriz de rigidez de placa devido à flexão ( $\mathbf{K}_b$  – ver Eq. (2.51)) é obtida empregando os conceitos do método dos elementos finitos, conforme apresentado na Eq. (2.76). Na implementação computacional do elemento, a integração presente nessa equação é realizada de forma numérica, utilizando para tanto três pontos de integração ( $pi = 1,2,3$ ). Tais pontos se localizam na mesma posição que os nós 4, 5 e 6 do elemento (ver Fig. 2.13b), cada um com coordenadas naturais  $\{\zeta_1; \zeta_2; \zeta_3\}$  iguais a  $\{0,5; 0,5; 0\}$  para o ponto 1,  $\{0,5; 0; 0,5\}$  para o ponto 2 e  $\{0; 0,5; 0,5\}$  para o ponto 3.

$$\mathbf{K}_b = \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA = A \sum_{pi=1}^3 \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \quad (2.76)$$

### Campo de deformações de cisalhamento transversal do elemento

O campo de deformações de cisalhamento transversal  $\gamma$  é construído na formulação do elemento diretamente a partir das variáveis nodais, utilizando para tanto o método de

reconstrução de deformação de corte (*re-construction shear strain method*) descrito por Wanji e Cheung (2001).

Em primeira instância, o campo de deformações de corte transversal é definido no domínio do elemento por uma interpolação linear das deformações nodais  $\gamma_i = \{\gamma_{xz_i} \quad \gamma_{yz_i}\}^T$ , com  $i = 1,2,3$ , conforme apresentado na Eq. (2.77).

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{x1} \\ \gamma_{y1} \\ \gamma_{x2} \\ \gamma_{y2} \\ \gamma_{x3} \\ \gamma_{y3} \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

No entanto, como apresentado no início do capítulo, apenas translações e rotações são tomadas como variáveis nodais na formulação do elemento. Dessa forma, os valores nodais das deformações de cisalhamento transversal ( $\gamma_i$ ) devem ser expressos em função dos *gdl* nodais de placa ( $p_{p_i}$ ). Isso é alcançado admitindo-se que os deslocamentos no contorno do elemento ( $\beta_s$  e  $u_z$ ) são dados pela interpolação dos deslocamentos dos nós de canto utilizando a função de viga de compósito laminado de Timoshenko (ver Eq. (2.47)). Ao substituir essa função dos deslocamentos na equação que define a deformação de corte transversal Eq. (2.4), obtém-se a deformação por corte transversal na direção  $s$  de lado  $\bar{i}\bar{j}$  do elemento. Como apresentado na Eq. (2.78), tal definição resulta em um valor constante de  $\gamma_{sz_{\bar{i}\bar{j}}}$  ao longo do lado.

$$\gamma_{sz_{\bar{i}\bar{j}}} = \beta_s - \frac{\partial u_z}{\partial s} = \frac{1 - \mu_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} u_{z_i} + \frac{1 - \mu_{\bar{i}\bar{j}}}{2} \beta_{s_i} - \frac{1 - \mu_{\bar{i}\bar{j}}}{L_{\bar{i}\bar{j}}} u_{z_j} + \frac{1 - \mu_{\bar{i}\bar{j}}}{2} \beta_{s_j} \quad (2.78)$$

Uma vez que estão definidas as deformações  $\gamma_{sz_{\bar{i}\bar{j}}}$  e  $\gamma_{sz_{\bar{k}\bar{i}}}$  nos lados  $\bar{i}\bar{j}$  e  $\bar{k}\bar{i}$ , conectados a um nó  $i$ , é possível determinar os componentes de deformação transversal  $\gamma_{xz_i}$  e  $\gamma_{yz_i}$  neste nó valendo-se apenas de variáveis geométricas. Tal relação é expressa da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz_i} \\ \gamma_{yz_i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta_i} \begin{bmatrix} \cos \alpha_{\bar{k}\bar{i}} & -\cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \\ \text{sen} \alpha_{\bar{k}\bar{i}} & -\text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{sz_{\bar{i}\bar{j}}} \\ \gamma_{sz_{\bar{k}\bar{i}}} \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

onde,

$$\Delta_i = \cos \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \text{sen} \alpha_{\bar{k}\bar{i}} - \cos \alpha_{\bar{k}\bar{i}} \text{sen} \alpha_{\bar{i}\bar{j}} \quad (2.80)$$

Introduzindo as relações dadas pela Eq. (2.79) na Eq. (2.77) obtém-se a seguinte definição do campo de deformações de cisalhamento transversal no domínio do elemento em função dos valores constantes nos lados:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\gamma \begin{Bmatrix} \gamma_{sz_{1\bar{2}}} \\ \gamma_{sz_{2\bar{3}}} \\ \gamma_{sz_{3\bar{1}}} \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

sendo a matrix  $\mathbf{N}_\gamma$  dada por

$$\mathbf{N}_\gamma = \begin{bmatrix} \left( \frac{\cos \alpha_{\bar{3}\bar{1}}}{\Delta_1} \zeta_1 - \frac{\cos \alpha_{\bar{2}\bar{3}}}{\Delta_2} \zeta_2 \right) & \left( \frac{\cos \alpha_{\bar{1}\bar{2}}}{\Delta_2} \zeta_2 - \frac{\cos \alpha_{\bar{3}\bar{1}}}{\Delta_3} \zeta_3 \right) & \left( \frac{\cos \alpha_{\bar{2}\bar{3}}}{\Delta_3} \zeta_3 - \frac{\cos \alpha_{\bar{1}\bar{2}}}{\Delta_1} \zeta_1 \right) \\ \left( \frac{\text{sen} \alpha_{\bar{3}\bar{1}}}{\Delta_1} \zeta_1 - \frac{\text{sen} \alpha_{\bar{2}\bar{3}}}{\Delta_2} \zeta_2 \right) & \left( \frac{\text{sen} \alpha_{\bar{1}\bar{2}}}{\Delta_2} \zeta_2 - \frac{\text{sen} \alpha_{\bar{3}\bar{1}}}{\Delta_3} \zeta_3 \right) & \left( \frac{\text{sen} \alpha_{\bar{2}\bar{3}}}{\Delta_3} \zeta_3 - \frac{\text{sen} \alpha_{\bar{1}\bar{2}}}{\Delta_1} \zeta_1 \right) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

A definição do campo de deformações expressa na Eq. (2.81) pode ser reescrita em termos dos deslocamentos nodais. Para tanto é preciso descrever as deformações  $\gamma_{sz_{i\bar{j}}}$  em função e as variáveis nodais de placa  $\mathbf{p}_p$ . Isso é obtido primeiramente escrevendo  $\gamma_{sz_{i\bar{j}}}$  em função dos valores nodais das variáveis  $u_z$  e  $\beta_s$ , conforme descrito na Eq. (2.78), e em seguida substituindo  $\beta_s$  pelas rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$ . Tal substituição é realizada através da Eq. (2.83), que é obtida a partir das Eq. (2.61a) e Eq. (2.62). A mesma equação é utilizada para determinar o valor  $\beta_{s_j}$  no lado  $i\bar{j}$ , bastando para isso utilizar  $\theta_{x_j}$  e  $\theta_{y_j}$ .

$$\beta_{s_i} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_{i\bar{j}} & -\text{sen} \alpha_{i\bar{j}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

Como resultado obtém-se a seguinte relação entre as deformações  $\gamma_{sz_{i\bar{j}}}$  e as variáveis nodais de placa  $\mathbf{p}_p$ :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{sz_{1\bar{2}}} \\ \gamma_{sz_{2\bar{3}}} \\ \gamma_{sz_{3\bar{1}}} \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_\gamma \mathbf{p}_p \quad (2.84)$$

onde

$$\mathbf{H}_\gamma = \begin{bmatrix} a_{1\bar{2}} & -c_{1\bar{2}}^* & -s_{1\bar{2}}^* & -a_{1\bar{2}} & -c_{1\bar{2}}^* & -s_{1\bar{2}}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{2\bar{3}} & -c_{2\bar{3}}^* & -s_{2\bar{3}}^* & a_{2\bar{3}} & -c_{2\bar{3}}^* & -s_{2\bar{3}}^* \\ -a_{3\bar{1}} & -c_{3\bar{1}}^* & -s_{3\bar{1}}^* & 0 & 0 & 0 & a_{3\bar{1}} & -c_{3\bar{1}}^* & -s_{3\bar{1}}^* \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

sendo introduzidas as variáveis definidas abaixo para facilitar a escrita da matriz  $\mathbf{H}_\gamma$

$$a_{i\bar{j}} = \frac{1 - \mu_{i\bar{j}}}{L_{i\bar{j}}}, \quad c_{i\bar{j}}^* = \frac{1 - \mu_{i\bar{j}}}{2} \cos \alpha_{i\bar{j}}, \quad s_{i\bar{j}}^* = \frac{1 - \mu_{i\bar{j}}}{2} \text{sen} \alpha_{i\bar{j}} \quad (2.86)$$

A Eq. (2.87) resulta da introdução da Eq. (2.84) na Eq. (2.81). Essa equação define a matriz  $\mathbf{B}_s$ , que faz a relação entre as deformações de cisalhamento transversal em qualquer ponto no domínio do elemento e os deslocamentos nodais de placa ( $\mathbf{p}_p$ ).

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_s \mathbf{p}_p, \quad \text{sendo} \quad \mathbf{B}_s = \mathbf{N}_\gamma \mathbf{H}_\gamma \quad (2.87)$$

De forma semelhante ao que ocorre com a matriz  $\mathbf{B}_b$  (ver Eq. (2.74)), a matriz  $\mathbf{B}_s$  é formada pelo produto de duas matrizes, sendo que apenas uma delas é função das coordenadas naturais  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ . Essa é uma característica da qual pode-se tirar proveito na implementação computacional do elemento, reduzindo o número de cálculos necessários para obtenção da matriz  $\mathbf{B}_s$  em mais de um ponto no mesmo elemento.

A parte da matriz de rigidez de placa relativa ao cisalhamento transversal ( $\mathbf{K}_s$  – ver Eq. (2.51)) é obtida pela Eq. (2.88). A integração necessária para a obtenção de  $\mathbf{K}_s$  é realizada numericamente, empregando os mesmos pontos de integração utilizados para a determinação de  $\mathbf{K}_b$  na Eq. (2.76).

$$\mathbf{K}_s = \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dA = A \sum_{pi=1}^3 \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s \quad (2.88)$$

### 2.3.3 Elemento finito de casca

O sistema que relaciona o vetor de forças nodais equivalentes ao vetor de deslocamentos nodais do elemento de casca através de sua matriz de rigidez, conforme apresenta a Eq. (2.89), é construído pelo arranjo de cada um desses componentes obtidos separadamente para os elementos de membrana e placa descritos nas seções anteriores.

$$\mathbf{K} \mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (2.89)$$

No entanto, quando cascas de seção transversal não simétrica são abordadas surge uma peculiaridade na matriz de rigidez do elemento. Conforme apresentado na Eq. (2.90), se os procedimentos do MEF são adotados para a determinação direta de  $\mathbf{K}$ , duas parcelas  $\mathbf{K}_{mb}$  e  $\mathbf{K}_{bm}$  são adicionadas na composição final da rigidez. Essas matrizes se originam

devido aos mecanismos de acoplamento entre as resultantes de tensões e deformações de membrana e de flexão, que são introduzidas na equação através da relação constitutiva determinada pela matriz  $\mathbf{D}_{mb}$  (ver Eq. (2.10) e Eq. (2.26)). Na Eq. (2.90)  $\mathbf{B}_m$ ,  $\mathbf{B}_b$  e  $\mathbf{B}_s$  são as matrizes que relacionam as deformações de membrana, flexão e corte transversal, respectivamente, aos deslocamentos nodais do elemento, conforme apresentado nas Eq. (2.45), Eq. (2.72) e Eq. (2.87), enquanto que as matrizes  $\mathbf{D}_m$ ,  $\mathbf{D}_b$ ,  $\mathbf{D}_s$  e  $\mathbf{D}_{mb}$  determinam as relações constitutivas para o elemento de casca, conforme descrito nas Eq. (2.10) e Eq. (2.26).

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_b^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{D}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_b & \mathbf{B}_s \end{bmatrix} dA \\
&= \begin{bmatrix} \int_A \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m dA & \int_A \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_{mb} \mathbf{B}_b dA \\ \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_{mb} \mathbf{B}_m dA & \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA + \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dA \end{bmatrix} \quad (2.90) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_{mb} \\ \mathbf{K}_{bm} & \mathbf{K}_p \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

O produto matricial triplo apresentado no início da Eq. (2.90) leva a uma matriz composta por quatro submatrizes. Essas submatrizes também resultam da integração de um produto matricial triplo, de onde pode-se observar que os componentes da diagonal da matriz principal são as matrizes de rigidez de membrana e de placa, descritas anteriormente nas Eq. (2.29) e Eq. (2.51). As submatrizes localizadas fora da diagonal da matriz de rigidez da casca são as matrizes de acoplamento membrana-flexão  $\mathbf{K}_{mb}$  e  $\mathbf{K}_{bm}$ . Tais matrizes são definidas pelo produto cruzado entre  $\mathbf{B}_m$ ,  $\mathbf{B}_b$  devido à presença de  $\mathbf{D}_{mb}$ , conforme apresentado na Eq. (2.91), onde também é indicada a relação  $\mathbf{K}_{bm} = \mathbf{K}_{mb}^T$ . Vale ressaltar que, ao contrário de  $\mathbf{K}_m$  e  $\mathbf{K}_p$ , as matrizes  $\mathbf{K}_{mb}$  e  $\mathbf{K}_{bm}$  não são simétricas. Apesar desse fato a matriz de rigidez de casca continua simétrica.

$$\mathbf{K}_{mb} = \int_A \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_{mb} \mathbf{B}_b dA = \mathbf{K}_{bm}^T \quad (2.91)$$

Para que a Eq. (2.89) seja utilizada na construção do sistema global de equações do

problema é preciso que a matriz de rigidez sofra uma reordenação de seus coeficientes, tornando-se compatível com os vetores de forças nodais e deslocamentos nodais dados nas Eq. (2.92) e Eq. (2.93), respectivamente. Dessa forma, as submatrizes que contribuem para a formação de  $\mathbf{K}$ , conforme apresentado em Eq. (2.90), não podem mais ser isoladas em uma região específica da matriz.

$$\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1^T \quad \mathbf{f}_2^T \quad \mathbf{f}_3^T\}^T, \quad \mathbf{f}_i = \{\mathbf{n}_i \quad \mathbf{m}_i\}^T \quad (2.92)$$

com  $\mathbf{n}_i = \{n_{x_i} \quad n_{y_i} \quad n_{z_i}\}^T$  e  $\mathbf{m}_i = \{m_{x_i} \quad m_{y_i} \quad m_{z_i}\}^T$

$$\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_1^T \quad \mathbf{p}_2^T \quad \mathbf{p}_3^T\}^T, \quad \mathbf{p}_i = \{\mathbf{u}_i \quad \boldsymbol{\theta}_i\}^T \quad (2.93)$$

com  $\mathbf{u}_i = \{u_{x_i} \quad u_{y_i} \quad u_{z_i}\}^T$  e  $\boldsymbol{\theta}_i = \{\theta_{x_i} \quad \theta_{y_i} \quad \theta_{z_i}\}^T$

## 2.4 Sistemas de referência na análise corrotacional de estruturas de materiais compósitos laminados

Como explicitado no início da Seção 2.3, toda a formulação que foi apresentada até o momento para o elemento finito de casca é relativa a um sistema de referência local. No entanto, alguns outros sistemas de referência têm de ser considerados para o tratamento de problemas envolvendo a análise de estruturas de materiais compósitos laminados. Esta seção é dedicada à apresentação dos sistemas de referência utilizados no presente trabalho, bem como as diversas operações necessárias para obter uma dada quantidade segundo diferentes referenciais.

O primeiro a se considerar é o *sistema global de referência*. Este é um referencial fixo empregado em praticamente todas as aplicações do MEF, pois consiste no sistema segundo o qual estão referidas as incógnitas do problema. Desta forma, todas as quantidades obtidas segundo um outro referencial e que estão envolvidas na determinação das variáveis globais do problema (deslocamentos de translação e rotação) devem ser transformadas antes de contribuírem para formar o sistema global de equações. Os eixos  $\{x \ y \ z\}$  definem o referencial global, e a posição de um ponto  $p$  da estrutura em qualquer configuração assumida por ela é descrita através de um vetor  $\mathbf{x}_p = \{x_p \ y_p \ z_p\}^T$ .

Além do sistema global de referência, também são considerados os sistemas locais. Esse referencial é definido independentemente para cada elemento e em cada configuração da estrutura. É segundo esse sistema que são calculadas a matriz de rigidez e o vetor de forças internas de cada elemento para posterior composição do sistema global, o que é realizado por uma transformação de referencial. O sistema local é formado pelos eixos cartesianos  $\{\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z}\}$ , estando os eixos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  contidos no plano do elemento enquanto que o eixo  $\bar{z}$  é perpendicular ao plano do elemento. A posição de um ponto  $p$  no domínio do elemento é descrita nesse sistema por meio de um vetor  $\bar{\mathbf{x}}_p = \{\bar{x}_p \ \bar{y}_p \ \bar{z}_p\}^T$ . O sistema global de referência e os sistemas locais de referência para um elemento em sua configuração inicial e em uma configuração deformada qualquer são ilustrados na Fig. 2.14.

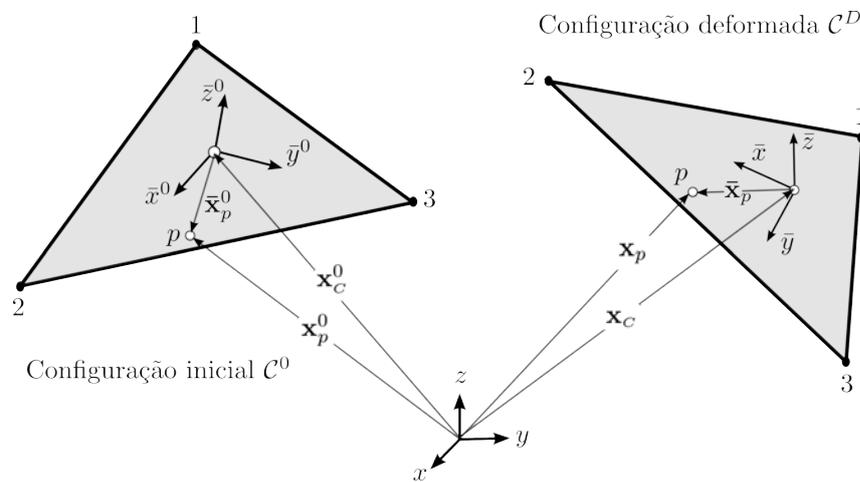


Figura 2.14: Sistemas de referência global e local

A direção dos eixos que formam o sistema de referência local de cada elemento é definida de maneira distinta nos casos em que está sendo considerada a configuração inicial da estrutura  $\mathcal{C}^0$  ou quando está sendo considerada uma configuração deformada qualquer  $\mathcal{C}^D$ . Como será visto a seguir, a orientação do sistema de eixos  $\{\bar{x}^0 \ \bar{y}^0 \ \bar{z}^0\}$ , definidos para  $\mathcal{C}^0$ , é fortemente vinculada à posição dos nós do elemento. A utilização desta metodologia para definição dos eixos locais do elemento em configurações deformadas torna a resposta do algoritmo dependente das conectividades nodais do elemento. Esse problema é evitado pela utilização de uma metodologia alternativa, descrita a seguir, e que torna o algoritmo invariante quanto à numeração da malha (Felippa e Haugen, 2005).

O sistema de referência local para  $\mathcal{C}^0$  é definido segundo a posição dos nós do elemento. A direção dos eixos  $\bar{x}^0$ ,  $\bar{y}^0$  e  $\bar{z}^0$  é obtida por meio dos vetores unitários  $\mathbf{i}_{\bar{x}}^0$ ,  $\mathbf{i}_{\bar{y}}^0$  e  $\mathbf{i}_{\bar{z}}^0$ , respectivamente. O cálculo desses vetores unitários é realizado com base na direção entre

os nós 1 e 2 e na direção entre os nós 1 e 3, dadas pelos vetores  $\mathbf{d}_{12}$  e  $\mathbf{d}_{13}$  definidos como:

$$\mathbf{d}_{12} = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|}, \quad \mathbf{d}_{13} = \frac{(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|} \quad (2.94)$$

Conforme descrito na Eq. (2.95), o vetor unitário  $\mathbf{i}_x^0$  tem a mesma direção que o lado  $\overline{12}$  do elemento. O produto entre os vetores  $\mathbf{d}_{12}$  e  $\mathbf{d}_{13}$  define o vetor  $\mathbf{i}_z^0$ , que por essa definição é perpendicular ao plano do elemento. Vale ressaltar que o sentido positivo de  $\mathbf{i}_z^0$  depende da ordem de conectividades do elemento. Portanto, todos os elementos devem ter suas conectividades nodais seguindo um ordenamento anti-horário quando se observa a superfície "positiva" da casca. Por fim,  $\mathbf{i}_y^0$  é definido como sendo perpendicular aos dois outros vetores unitários calculados.

$$\mathbf{i}_x^0 = \mathbf{d}_{12}, \quad \mathbf{i}_z^0 = \mathbf{d}_{12} \times \mathbf{d}_{13}, \quad \mathbf{i}_y^0 = \mathbf{i}_z^0 \times \mathbf{i}_x^0 \quad (2.95)$$

Este sistema local de referência tem sua origem localizada em um ponto  $C^0$ , coincidente com o centróide do elemento triangular e cuja posição é dada em termos do referencial global por:

$$\mathbf{x}_C^0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i^0 \quad (2.96)$$

Os vetores unitários definidos acima podem ser usados para compor a matriz  $3 \times 3$  ortogonal  $\mathbf{T}_0$ , que relaciona quantidades entre o sistema global e o sistema local na configuração  $\mathcal{C}^0$ . Conforme apresentado na Eq. (2.97), os vetores unitários formam as linhas da matriz de transformação.

$$\mathbf{T}_0^T = [\mathbf{i}_x^0 \quad \mathbf{i}_y^0 \quad \mathbf{i}_z^0] \quad (2.97)$$

A transformação de coordenadas entre os dois sistemas de referência é apresentada na Eq. (2.98), onde se considera a ortogonalidade da matriz  $\mathbf{T}_0$  para definir o processo reverso. Operações semelhantes podem ser utilizadas para transformar demais quantidades tal como para as translações nodais:  $\bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{T}_0 \mathbf{u}_i$  ou  $\mathbf{u}_i = \mathbf{T}_0^T \bar{\mathbf{u}}_i$ .

$$\bar{\mathbf{x}}_p^0 = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}_p^0 - \mathbf{x}_C^0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{x}_p^0 = \mathbf{T}_0^T \bar{\mathbf{x}}_p^0 + \mathbf{x}_C^0 \quad (2.98)$$

O sistema de referência local dos elementos para  $\mathcal{C}^D$  é construído de forma semelhante ao aplicado para  $\mathcal{C}^0$ . A origem dos eixos continua sendo o centróide do elemento triangular,

com coordenadas definidas na Eq. (2.99). Os eixos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  estão contidos no plano o elemento enquanto o eixo  $\bar{z}$  é perpendicular a este plano.

$$\mathbf{x}_C = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \quad (2.99)$$

A definição do novo sistema de referência local é baseada no trabalho apresentado por Felippa e Haugen (2005), onde é descrita uma metodologia para obtenção do sistema de eixos que melhor ajusta os deslocamentos em um elemento triangular de estado plano de tensões (CST) de forma a minimizar a norma euclidiana dos deslocamentos contidos no plano que provocam deformações. A construção do sistema local consiste em um ajuste na direção dos eixos locais obtidos pela metodologia anterior. Esse ajuste é realizado pelo giro de um ângulo  $\theta_{bf}$  dos eixos  $x$  e  $y$  locais em torno do eixo  $z$  local, conforme ilustrado na Fig. 2.15.

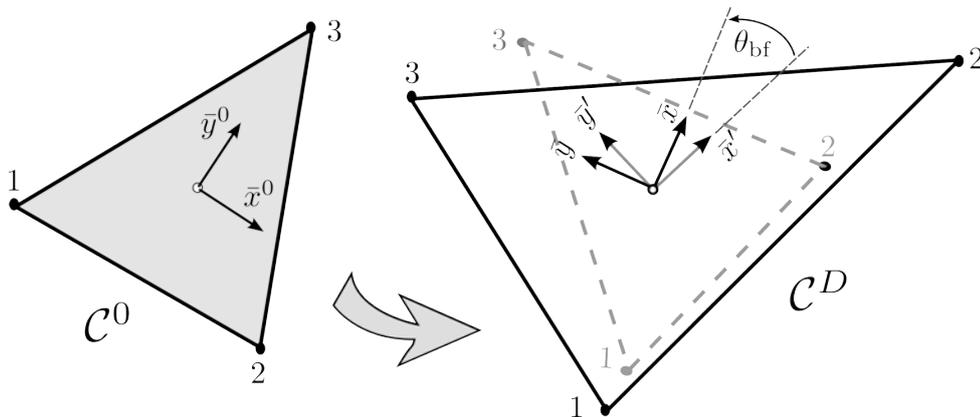


Figura 2.15: Sistema de referência local em configuração deformada

Primeiramente considera-se um sistema de referência auxiliar local  $\{\bar{x}' \bar{y}' \bar{z}'\}$ , definido da mesma forma que o sistema de referência local para a configuração  $C^0$ . Conforme apresentado na Eq. (2.100a), uma matriz de transformação ( $\mathbf{T}'$ ) é obtida pela aplicação das Eq. (2.95) e Eq. (2.97) considerando a configuração  $C^D$ . As coordenadas nodais são posteriormente calculadas segundo esse novo referencial auxiliar utilizando  $\mathbf{T}'$ , conforme o processo apresentado na Eq. (2.100b) para um ponto  $p$  qualquer.

$$\mathbf{T}' = [\mathbf{i}'_{\bar{x}} \quad \mathbf{i}'_{\bar{y}} \quad \mathbf{i}'_{\bar{z}}] \quad (2.100a)$$

$$\bar{\mathbf{x}}'_p = \mathbf{T}'(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_C) \quad (2.100b)$$

Uma vez que as coordenadas nodais estão disponíveis para as configurações inicial e deformada da estrutura, segundo os referenciais locais, calcula-se o ângulo  $\theta_{bf}$  que o sistema de referência auxiliar deve ser girado em torno do seu eixo  $z$  local para que se obtenha o sistema de referência local definitivo.

$$\tan \theta_{bf} = \frac{(\bar{x}_1^0 \bar{y}'_1 + \bar{x}_2^0 \bar{y}'_2 + \bar{x}_3^0 \bar{y}'_3) - (\bar{y}_1^0 \bar{x}'_1 + \bar{y}_2^0 \bar{x}'_2 + \bar{y}_3^0 \bar{x}'_3)}{(\bar{x}_1^0 \bar{x}'_1 + \bar{x}_2^0 \bar{x}'_2 + \bar{x}_3^0 \bar{x}'_3) + (\bar{y}_1^0 \bar{y}'_1 + \bar{y}_2^0 \bar{y}'_2 + \bar{y}_3^0 \bar{y}'_3)} \quad (2.101)$$

Conforme mostra a Fig. 2.15, os eixos do sistema auxiliar são girados no plano do elemento para a obtenção dos eixos locais do elemento. Como essa rotação ocorre em torno do eixo perpendicular ao plano do elemento, pode-se aplicar a relação apresentada na Eq. (2.102) para obter o vetor posição de um ponto  $p$  no sistema local a partir do sistema local auxiliar.

$$\bar{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} \cos \theta_{bf} & \text{sen} \theta_{bf} & 0 \\ -\text{sen} \theta_{bf} & \cos \theta_{bf} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}'_p \quad (2.102)$$

Introduzindo a Eq. (2.100b) na Eq. (2.102) obtém-se a matriz de transformação entre os sistemas de referência local e global para um elemento, assim como as coordenadas de um ponto  $p$  segundo o referencial local, conforme apresentado nas Eq. (2.104) e Eq. (2.103), respectivamente.

$$\bar{\mathbf{x}}_p = \mathbf{T}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_C), \quad (2.103)$$

com

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{bf} & \text{sen} \theta_{bf} & 0 \\ -\text{sen} \theta_{bf} & \cos \theta_{bf} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}' \quad (2.104)$$

Os sistemas de referência local e global descritos acima são os mais comumente empregados na análise de estruturas. Esses referenciais são suficientes para descrever estruturas constituídas de materiais isotrópicos na solução de problemas não lineares por meio da formulação corrotacional.

No entanto, quando a análise envolve estruturas fabricadas com outros tipos de materiais algumas complicações são introduzidas. No caso dos materiais compósitos laminados, é preciso definir a orientação do laminado na superfície da estrutura, de forma que se conheça a direção das fibras de reforço de cada lâmina em qualquer ponto. Nesse trabalho a direção do material laminado é descrita por um sistema de referência próprio denominado sistema de referência do material. A exemplo do sistema de referência local

descrito anteriormente, os eixos que descrevem a orientação do material ao longo da casca também são definidos elemento a elemento. Eles constituem um referencial local que tem a origem e o eixo  $z$  coincidente com o sistema local do elemento. A distinção entre os dois sistemas se dá na determinação da direção do eixo  $x$ . Ao contrário do que ocorre com o sistema local, quando é atribuída ao eixo  $x$  local a mesma orientação do lado  $\bar{12}$  do elemento, o eixo  $x$  do material tem direção  $\mathbf{i}_x^m$  definida de acordo com as direções do sistema global de referência conforme os seguintes casos:

- a) No caso em que o plano do elemento não é perpendicular ao plano  $x$ - $y$  global ( $i_{z,3}^m \neq 0$ ),  $\mathbf{i}_x^m$  está contido no plano  $x$ - $z$  e apontando para uma direção com  $+x$ :

$$\mathbf{i}_x^m = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta^2}} \quad 0 \quad \frac{\Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2}} \right\}^T, \quad \text{com} \quad \Delta = \frac{-i_{z,1}^m}{i_{z,3}^m} \quad (2.105)$$

- b) No caso em que o plano do elemento é perpendicular ao plano  $x$ - $y$  global ( $i_{z,3}^m = 0$  e  $i_{z,2}^m \neq 0$ ),  $\mathbf{i}_x^m$  está contido no plano  $x$ - $y$  e apontando para uma direção com  $+x$ :

$$\mathbf{i}_x^m = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta^2}} \quad \frac{\Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2}} \quad 0 \right\}^T, \quad \text{com} \quad \Delta = \frac{-i_{z,1}^m}{i_{z,2}^m} \quad (2.106)$$

- c) No caso em que o plano do elemento é paralelo ao plano  $y$ - $z$  global ( $i_{z,2}^m = i_{z,3}^m = 0$ ),  $\mathbf{i}_x^m$  é coincidente com o eixo  $z$  global, podendo apontar para uma direção com  $+z$  ou  $-z$ :

$$\begin{aligned} \text{Se } i_{z,1}^m \leq 0, \text{ então } \mathbf{i}_x^m &= \{0 \quad 0 \quad 1\} \\ \text{Se } i_{z,1}^m \geq 0, \text{ então } \mathbf{i}_x^m &= \{0 \quad 0 \quad -1\} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Nas equações acima a direção do eixo  $\bar{z}^m$  é definida de acordo com o sistema local de referência na configuração indeformada como:  $\mathbf{i}_{\bar{z}}^m = \{i_{z,1}^m \quad i_{z,2}^m \quad i_{z,3}^m\} = \mathbf{i}_{\bar{z}}^0$ . Já a direção do eixo  $\bar{y}^m$  pode ser obtida pelo produto vetorial  $\mathbf{i}_{\bar{y}}^m = \mathbf{i}_{\bar{z}}^m \times \mathbf{i}_{\bar{x}}^m$ . Embora todos os eixos do sistema de referência do material estejam definidos, a única informação relevante para os cálculos a serem executados na análise da estrutura é a da direção do seu eixo  $\bar{x}^m$ . Isso porque só são necessárias transformações de quantidades entre o sistema de referência do material e o sistema de referência local do elemento. Portanto, não é necessária a definição da transformação de quantidades entre o sistema de referência do material e o sistema de referência global, o que dispensa o cálculo dos vetores  $\mathbf{i}_{\bar{y}}^m$  e  $\mathbf{i}_{\bar{z}}^m$ . O dado mais importante a ser determinado é o ângulo  $\alpha_m$  entre o eixo  $\bar{x}^m$  e o eixo  $\bar{x}^0$  no plano do elemento.

Com isso é possível realizar as transformações entre os dois referenciais, o que é válido tanto para a configuração inicial quanto para uma configuração deformada qualquer, pois assume-se que o ângulo entre os dois eixos não se altera devido às pequenas deformações no plano sofridas pela casca. O seno e cosseno do ângulo  $\alpha_m$  podem ser obtidos do vetor que dá a direção do eixo  $\bar{x}^m$  quando esse é expresso em termos do sistema de referências local do elemento, conforme dado pela Eq. (2.108). A Fig. 2.16 ilustra a posição relativa entre o sistema de referência do material e o sistema de referência local de dois elementos adjacentes para a malha em uma configuração geométrica simples. A ordem de conectividades do elemento, dado pela numeração interna dos nós na figura, determina a direção do sistema local, enquanto que o sistema de referência do material se mantém alinhado.

$$\cos \alpha_m = \bar{i}_{\bar{x},1}^m \quad \text{e} \quad \sin \alpha_m = \bar{i}_{\bar{x},2}^m \quad \text{sendo:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{i}_{\bar{x},1}^m \\ \bar{i}_{\bar{x},2}^m \\ \bar{i}_{\bar{x},3}^m \end{array} \right\} = \mathbf{T}_0 \mathbf{i}_{\bar{x}}^m \quad (2.108)$$

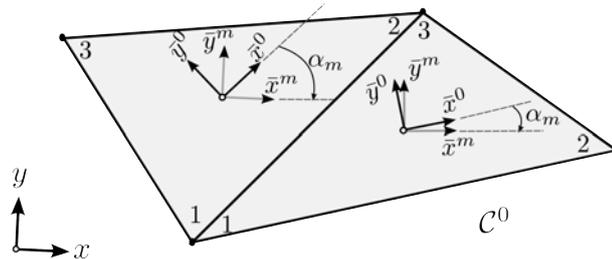


Figura 2.16: Sistema de referência do material

Como foi apresentado acima, a metodologia para determinação da orientação dos eixos que definem a direção principal do material laminado são dependentes da posição do plano de cada elemento em relação ao sistema de eixos globais. Essa metodologia permite que os eixos do material acompanhem as curvaturas da superfície da casca e ainda assim mantenham uma continuidade. No entanto, em alguns casos existe uma descontinuidade na direção dos eixos, mesmo quando a superfície da casca é suave. Isso ocorre por exemplo quando dois elementos adjacentes e com posição como a do caso *c*), definido pela Eq. (2.107), se encontram acima e abaixo do plano  $x$ - $y$ . Outros inconvenientes ocorrem quando partes da estruturas com direções preferenciais definidas não estão alinhadas com os eixos globais.

Tais problemas são tratados nesse trabalho pela introdução de sistemas auxiliares de referência, utilizados para descrever a direção preferencial de algumas partes da estrutura.

Esses sistemas auxiliares são definidos por vetores unitários  $\mathbf{i}_x^a$ ,  $\mathbf{i}_y^a$  e  $\mathbf{i}_z^a$  que formam um sistema de eixos cartesianos cuja direção é igual à direção preferencial de alguma parte da estrutura. Essas direções são definidas como dado de entrada do problema e cada sistema auxiliar introduzido é atribuído a um grupo de elementos que compõem a parte da estrutura cujos eixos do material devem ser alinhados de acordo com o sistema auxiliar. A determinação do sistema de referência do material nesses casos é feita de maneira similar ao dado pelas Eq. (2.105) a Eq. (2.107). A diferença é que os cálculos são realizados utilizando um vetor  $\mathbf{i}_{\bar{z}}^{m,a}$  no lugar do vetor  $\mathbf{i}_{\bar{z}}^m$  e o resultado das equações é um vetor  $\mathbf{i}_{\bar{x}}^{m,a}$  em vez do vetor  $\mathbf{i}_{\bar{x}}^m$ . O vetor  $\mathbf{i}_{\bar{z}}^{m,a}$  é obtido conforme a Eq. (2.110) utilizando a matriz de transformação  $\mathbf{T}_a^T$ , definida conforme a Eq. (2.109). Após ser calculado o vetor  $\mathbf{i}_{\bar{x}}^{m,a}$  uma transformação é realizada conforme a Eq. (2.111) para a determinação da direção do eixo dos materiais em termos do referencial global. A partir daí define-se o ângulo  $\alpha_m$  conforme a operação descrita na Eq. (2.108).

$$\mathbf{T}_a^T = [\mathbf{i}_x^a \quad \mathbf{i}_y^a \quad \mathbf{i}_z^a] \quad (2.109)$$

$$\mathbf{i}_{\bar{z}}^{m,a} = \mathbf{T}_a \mathbf{i}_{\bar{z}}^m \quad (2.110)$$

$$\mathbf{i}_{\bar{x}}^m = \mathbf{T}_a^T \mathbf{i}_{\bar{x}}^{m,a} \quad (2.111)$$

O último sistema de referência a ser considerado é o que determina a orientação das fibras de cada lâmina em cada ponto do material. Esse sistema já foi introduzido na Seção 2.2.1, sendo designado pelos eixos 1–2–3. Assim como ocorre entre o sistema de eixos do material e o sistema de eixos local do elemento, o referencial de uma lâmina difere do sistema de eixos do material apenas por uma rotação no plano do elemento. Esse ângulo é tomado como dado de entrada do problema e informado através da sequência de laminação do material (ver Seção 2.2.2). No entanto, é interessante realizar transformações diretamente entre os sistemas de referência local do elemento e o sistema de referência de cada lâmina. Isso se aplica por exemplo no cálculo das tensões segundo as direções principais da lâmina, conforme será discutido a seguir. Para realizar tal transformação é necessário conhecer o ângulo entre os eixo  $\bar{x}$  e 1 dos dois sistemas, o que é obtido pela simples soma:

$$\alpha_k^l = \alpha_m + \alpha_k, \quad (2.112)$$

onde,  $\alpha_m$  é o ângulo entre o sistema local e o sistema do material, definido para cada elemento, e  $\alpha_k$  é o ângulo entre a direção das fibras da lâmina  $k$  e o eixo do material. A

Fig. 2.17 mostra o ângulo  $\alpha_k^l$  que o sistema de referência do elemento faz com as fibras das lâminas  $k = 1$  e 3 do material.

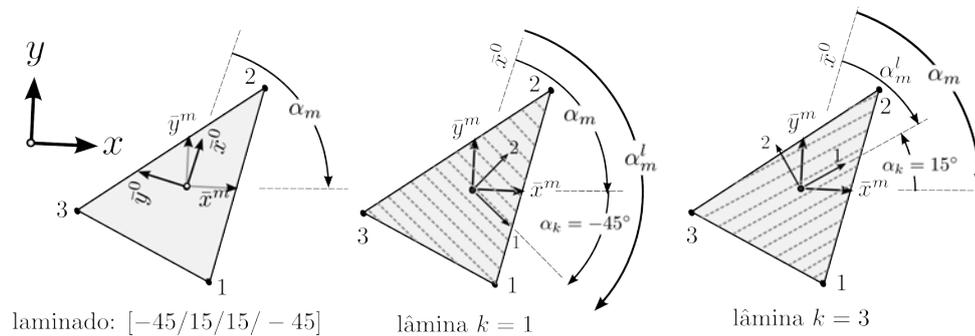


Figura 2.17: Sistema de referência das lâminas

### 2.4.1 Transformação de referencial para tensões, deformações e matrizes constitutivas

Essa seção trata de certas transformações de referencial que devem ser aplicadas sobre quantidades como tensões e deformações para a correta implementação do algoritmo de análise estrutural ou para a interpretação apropriada de seus resultados. Transformações similares foram discutidas na Seção 2.2.1, onde são apresentadas as relações entre o sistema de referência das lâminas e o sistema de referência do laminado como um todo. Tais relações foram utilizadas na Seção 2.2.2 para definir o cálculo das matrizes que determinam as relações constitutivas dos laminados quanto às deformações de extensão, flexão e cisalhamento. Essa seção introduz transformações adicionais às já apresentadas, considerando a relação entre o sistema de eixos local do elemento finito e os sistemas de eixos do laminado (material) ou das lâminas que o compõem.

Conforme discutido na Seção 2.3, a formulação do elemento finito de casca é construída segundo um referencial local. Nesse sentido, todas as quantidades envolvidas no cálculo da matriz de rigidez e dos vetores de forças internas devem ser tomadas segundo esse mesmo referencial. No entanto, as matrizes constitutivas obtidas segundo a Eq. (2.26) para um certo laminado são dadas em relação aos eixos principais do laminado. Normalmente o referencial do laminado (ou material) e o referencial local do elemento finito não coincidem, conforme visto acima. Portanto, as matrizes constitutivas, calculadas inicialmente segundo o eixos do laminado, devem sofrer uma transformação a fim de serem referidas ao sistema de eixos local do elemento.

Na Seção 2.2.2 as matrizes constitutivas do laminado foram obtidas pela soma das matrizes constitutivas de cada lâmina ( $\mathbf{Q}$ ), referidas segundo o sistema do laminado, e multiplicadas por um fator relativo à sua posição na espessura da casca (ver Eq. (2.26)). A obtenção da matriz constitutiva de uma lâmina  $k$  segundo o sistema de eixos do laminado requer uma transformação da matriz constitutiva  $\hat{\mathbf{Q}}_k$ , dada originalmente segundo o sistema de referência da lâmina. Essa transformação leva em conta o ângulo  $\alpha_k$  que as fibras da lâmina  $k$  fazem com o eixo  $x^m$  do laminado. Para calcular as matrizes constitutivas segundo o sistema de eixos local do elemento finito seria necessário transformar a matriz  $\hat{\mathbf{Q}}$  de cada lâmina  $k$  segundo um ângulo  $\alpha_k^l$ , cuja determinação foi apresentada acima. No entanto, essa transformação pode ser decomposta em uma rotação segundo o ângulo  $\alpha_k$ , que é particular de cada lâmina, mas comum a todos os elementos, seguida de uma rotação de um ângulo  $\alpha_m$ , que é comum a todas as lâminas em um mesmo elemento, mas particular a cada elemento. Tal decomposição permite que as matrizes constitutivas do laminado sejam escritas segundo o referencial local de cada elemento finito pelas expressões dadas na Eq. (2.113), onde as matrizes  $\mathbf{D}_m$ ,  $\mathbf{D}_b$ ,  $\mathbf{D}_{mb}$  e  $\mathbf{D}_s$  são obtidas segundo o referencial do laminado conforme a Eq. (2.26) e as matrizes  $\hat{\mathbf{T}}_{(\alpha_m)}$  e  $\hat{\mathbf{T}}_s(\alpha_m)$  são obtidas por meio da Eq. (2.16) e Eq. (2.19), respectivamente, utilizando o ângulo  $\alpha_m$  no lugar de  $\alpha_k$ . Assim sendo, as matrizes  $\mathbf{D}_m$ ,  $\mathbf{D}_b$ ,  $\mathbf{D}_{mb}$  e  $\mathbf{D}_s$  podem ser calculadas uma única vez para cada laminado da estrutura, posteriormente sofrendo transformações para o referencial local de cada elemento finito no momento do cálculo de sua matriz de rigidez.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_m &= \hat{\mathbf{T}}_{(\alpha_m)}^T \mathbf{D}_m \hat{\mathbf{T}}_{(\alpha_m)}^{-T} & \bar{\mathbf{D}}_{mb} &= \hat{\mathbf{T}}_{(\alpha_m)}^T \mathbf{D}_{mb} \hat{\mathbf{T}}_{(\alpha_m)}^{-T} \\ \bar{\mathbf{D}}_b &= \hat{\mathbf{T}}_{(\alpha_m)}^T \mathbf{D}_b \hat{\mathbf{T}}_{(\alpha_m)}^{-T} & \bar{\mathbf{D}}_s &= \hat{\mathbf{T}}_s^T(\alpha_m) \mathbf{D}_s \hat{\mathbf{T}}_s(\alpha_m) \end{aligned} \quad (2.113)$$

As tensões e deformações são outras quantidades que precisam ser representadas segundo diferentes referenciais durante a análise de estruturas formadas por materiais compósitos laminados utilizando o MEF. Conforme discutido na Seção 2.1, quando a estrutura é modelada segundo uma teoria do tipo FSDT, a deformação no plano da casca ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) é obtida a partir da deformação no plano médio da casca  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  e da sua curvatura  $\boldsymbol{\kappa}$ , apresentando variação linear ao longo da espessura (ver Eq. (2.2)). Já a deformação de cisalhamento transversal ( $\boldsymbol{\gamma}$ ) é constante ao longo da espessura (ver Eq. (2.4)). Nas aplicações utilizando o MEF essas três componentes  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$  são obtidas pelo produto

entre as matrizes  $\mathbf{B}_m$ ,  $\mathbf{B}_b$  e  $\mathbf{B}_s$  (discutidas na Seção 2.3) e o vetor de deslocamentos nodais, estando todos dados segundo o referencial local do elemento. Os deslocamentos do elemento são obtidos a partir dos deslocamentos globais da estrutura utilizando para tanto simples transformações de referencial no caso de análise linear ou utilizando procedimentos particulares para o caso da formulação não-linear do problema, conforme será discutido nas seções seguintes. As deformações resultantes de tais produtos são referidas ao sistema de eixos local do elemento, o que não permite uma interpretação apropriada dos resultados, pois os referenciais de diferentes elementos não apresentam qualquer coerência entre si. Para que as deformações obtidas em elementos adjacentes tenham continuidade é preciso que elas sejam escritas segundo referenciais que também apresentem tal característica. Esse é o caso do sistema de referência do material e do sistema de referência das lâminas.

Uma vez que as deformações  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  e  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$  são obtidas segundo o referencial local do elemento, elas podem ser transformadas para o sistema de referencial apropriado. No caso dos materiais compósitos laminados, as deformações em uma lâmina  $k$  podem ser obtidas segundo as direções principais das fibras por meio da transformação apresentada na Eq. (2.114), onde as matrizes  $\hat{\mathbf{T}}_\varepsilon$  e  $\hat{\mathbf{T}}_s$  são calculadas conforme as Eq. (2.17) e Eq. (2.19), respectivamente, utilizando o ângulo  $\alpha_k^l$  (entre a direção das fibras e o eixo  $\bar{x}$  do elemento finito), conforme discutido nessa seção.

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \hat{\mathbf{T}}_\varepsilon \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \quad (2.114a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_k = \hat{\mathbf{T}}_s \bar{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.114b)$$

A partir daí, as tensões são calculadas usando a relação constitutiva da lâmina segundo seu próprio referencial, conforme representado na Eq. (2.115). Com isso é possível aplicar as teorias específicas para a análise de falha nesses materiais.

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k = \hat{\mathbf{Q}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \quad (2.115a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_k = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\boldsymbol{\gamma}}_k \quad (2.115b)$$

No caso de estruturas de materiais isotrópicos, com seção constituída por uma ou mais camadas, o sistema de referência do material é o mais apropriado para expressar as tensões e deformações, pois proporciona a continuidade de tais quantidades entre os elementos. O procedimento utilizado para esse fim é equivalente ao apresentado para os compósitos

laminados nas Eq. (2.114) e Eq. (2.115). A diferença é que nesse caso as matrizes  $\hat{\mathbf{T}}_\epsilon$  e  $\hat{\mathbf{T}}_s$  são calculadas utilizando o ângulo  $\alpha_m$ , o que é válido para qualquer ponto a qualquer altura da seção da casca dentro de um mesmo elemento.

Em muitas situações as resultantes de tensões também podem ser interessantes para a avaliação da resistência das estruturas quando submetidas aos carregamentos de projeto. Assim como ocorre para as tensões e deformações, as forças normais  $\mathbf{N}$ , os momentos  $\mathbf{M}$  e as forças cortantes  $\mathbf{V}$  também são obtidas a partir de  $\epsilon^0$ ,  $\kappa$  e  $\gamma$ , conforme apresentado na Eq. (2.10). Para que as resultantes de tensões apresentem uma distribuição coerente ao longo da casca, elas devem ser expressas segundo o referencial do material. Isso vale tanto para estruturas de materiais compósitos quanto para as de materiais convencionais. Estando disponíveis as matrizes constitutivas da casca associadas ao sistema de referência do material, o processo mais direto para a determinação das variáveis em questão envolve a obtenção de  $\epsilon^{0,m}$ ,  $\kappa^m$  e  $\gamma^m$  nesse mesmo referencial. Isso é realizado a partir de seus correspondentes ( $\bar{\epsilon}^0$ ,  $\bar{\kappa}$  e  $\bar{\gamma}$ ) dados no referencial local do elemento em cada ponto desejado. Conforme apresentado na Eq. (2.116), tal processo é equivalente ao aplicado sobre as deformações na Eq. (2.114), mas nesse caso as matrizes  $\hat{\mathbf{T}}_\epsilon$  e  $\hat{\mathbf{T}}_s$  são calculadas utilizando o ângulo  $\alpha_m$ .

$$\epsilon^{0,m} = \hat{\mathbf{T}}_\epsilon \bar{\epsilon}^0 \quad (2.116a)$$

$$\kappa^m = \hat{\mathbf{T}}_\epsilon \bar{\kappa} \quad (2.116b)$$

$$\gamma^m = \hat{\mathbf{T}}_s \bar{\gamma} \quad (2.116c)$$

Com esses resultados pode-se utilizar a Eq. (2.10) para determinar as resultantes de tensão segundo o referencial do material.

## 2.5 Análise estática não linear geométrica: formulação corrotacional

Nessa seção são apresentados os aspectos relativos à formulação Corrotacional, utilizada nesse trabalho para a consideração de não linearidades geométricas na análise de estruturas. As discussões a seguir se referem à análise estática, mas os conceitos introduzidos também serão utilizados na Seção 2.6, quando os problemas relativos à

---

dinâmica de estruturas serão tratados. O emprego dessa formulação Corrotacional permite a abordagem de problemas envolvendo tanto grandes translações quanto grandes rotações. No entanto, como é premissa das formulações Corrotacionais, as análises são restritas ao domínio das pequenas deformações. Essas características possibilitam a abordagem de uma gama de problemas estruturais, incluindo boa parte dos casos de análises de estruturas construídas em materiais compósitos laminados, que é o objeto do presente trabalho.

Uma abordagem especial sobre as variáveis nodais de rotação é empregada para que rotações finitas sejam consistentemente consideradas nos problemas analisados. As formas de representação e os aspectos teóricos envolvidos no tratamento de rotações finitas são discutidos no Apêndice A, cuja leitura prévia é recomendada para o bom entendimento da formulação apresentada a seguir. Além disso, a definição de um referencial local em cada elemento também é requerida na formulação Corrotacional. Os métodos para determinação dos eixos locais bem como a transformação de quantidades entre os referenciais local e global foram introduzidos na Seção 2.4 dando ênfase aos elementos triangulares planos de casca.

As formas Lagrangeanas de descrição do movimento utilizadas na análise não linear geométrica por elementos finitos são a Lagrangeana Total (LT), a Lagrangeana Atualizada (LA) e a Corrotacional (CR). Conforme a revisão histórica apresentada em Felippa e Haugen (2005), a formulação CR é a mais recente e menos desenvolvida dentre todas, não tendo sido incluída nos códigos comerciais que visam a análise não linear generalista devido à sua restrição quanto à magnitude das deformações.

Embora não seja tão bem estabelecida e documentada quanto as demais descrições Lagrangeanas, nem seja capaz de concorrer com a formulação LA no que se refere ao tratamento de problemas com grandes deformações (como na análise de processos de conformação mecânica), a formulação CR apresenta algumas vantagens significativas com relação as demais formas Lagrangeanas de descrição do movimento.

Dentre as principais vantagens estão (Felippa, 2000):

a) reutilização de elementos finitos construídos para análise linear com pequenas

- 
- deformações (principalmente nas formulações independentes do elemento);
- b) desvinculação entre não linearidades devido ao material (em pequenas deformações) e as não linearidades geométricas;
  - c) facilidade no tratamento de materiais não isotrópicos devido ao contínuo acompanhamento das direções principais do material pelos eixos corrotacionais do elemento;
  - d) maior facilidade no tratamento de problemas com grandes rotações.

Por outro lado, a formulação CR apresenta algumas desvantagens em relação às formulações LT ou LA. Algumas das principais desvantagens são:

- a) a formulação CR é inapropriada para o tratamento de problema com grandes deformações;
- b) o operador tangente resultante dessa descrição é não simétrico quando rotações finitas são consideradas;
- c) apresenta dificuldades na utilização de elementos com geometrias complexas (tais como elementos de barra com 3 nós ou elementos triangulares com 6 nós);

A formulação CR reside na idéia básica de separação dos movimentos de corpo rígido e movimentos puramente deformacionais (que provocam deformação) de um corpo. Essa idéia precede a utilização do MEF, sendo originalmente proposta para o tratamento de problemas da mecânica do contínuo. Posteriormente esse conceito foi empregado na indústria aeroespacial no contexto de dinâmica e controle de aeronaves através da decomposição do movimento rígido–deformacional de estruturas por completo. Nesse contexto toda a estrutura é referida a um único sistema de eixos que acompanha o movimento médio do corpo (Felippa e Haugen, 2005). A adaptação dessa idéia à análise não linear geométrica de estruturas por meio do MEF se deu através de dois conceitos:

- a) a cada elemento finito da estrutura é atribuído um sistema CR que acompanha o movimento desse elemento e
- b) a extração do componente de corpo rígido do movimento total do elemento é realizada por meio de considerações geométricas com base na posição e deslocamentos dos nós.

A utilização de um eixos corrotacionais (eixos CR) fixados a cada elemento teve origem no trabalho de Horrigmoe e Bergan (1978). Esta abordagem tem sido utilizada desde então em vários trabalhos voltados à análise não linear geométrica de estruturas. Uma das contribuições de maior relevância nesse sentido foi a introdução da formulação corrotacional independente do elemento (EICR - *element independent CR formulation*) devida a Rankin e Brogan (1986). Essa formulação se baseia no uso de operadores de projeção para retirar o componente de corpo rígido do movimento total antes de realizar as operações em nível de elemento. Um ponto importante desse conceito é a capacidade de estender o uso de elementos finitos lineares para a análise não linear geométrica, independentemente da formulação associada ao elemento original. Dessa forma, elementos finitos de alta performance construídos originalmente para análise linear podem ser reutilizados na abordagem de problemas não lineares, mantendo sua eficiência computacional. A consolidação da formulação EICR se deu com os avanços posteriores apresentados em Rankin e Nour-Omid (1988) e Nour-Omid e Rankin (1991) e com a implementação no programa STAGS para análise não linear geométrica de cascas de materiais compósitos laminados (Rankin et al., 1994). Os trabalhos de Crisfield (1990), Crisfield e Moita (1996) e Crisfield (1997) apresentaram contribuições posteriores no sentido de consolidação da formulação corrotacional, sobretudo no que se refere à consistência entre a matriz de rigidez tangente e a variação do vetor de forças em um referencial sob rotação. Felippa e Haugen (2005) resumiram de forma concisa as abordagens da formulação CR devidas a diversos autores em uma formulação unificada, que pode gerar a maioria das outras formulações CR pela simplificação de alguns componentes. Essa unificação da formulação CR se baseia preponderantemente na formulação EICR, sendo utilizada nesse trabalho e descrita na seção seguinte.

### 2.5.1 Formulação corrotacional independente de elemento

Nessa seção são apresentados os aspectos teóricos relacionados à análise estática não linear geométrica de estruturas empregando a formulação corrotacional independente de elemento (EICR - *element independent CR formulation*). Essa formulação foi introduzida por Rankin e Brogan (1986) e posteriormente foi utilizada e aprimorada por diversos autores, a exemplo dos trabalhos mencionados acima.

Como ocorre em qualquer abordagens CR, os operadores introduzidos na análise visam a extração da parte deformacional dos deslocamentos através da eliminação do componente de movimentos de corpo rígido. A formulação EICR se apresenta muito interessante nesse aspecto por realizar tal tarefa como um pré-processamento dos deslocamentos globais obtidos a cada passo da solução incremental-iterativa do problema não linear. Uma vez extraídos os deslocamentos deformacionais, uma biblioteca de elementos finitos baseados em formulações lineares de pequenas deformações (possivelmente pré-existente) é utilizada para o calculo das tensões, deformações, vetor de forças internas e a matriz de rigidez local de cada elemento. Posteriormente, operadores da formulação EICR são empregados na forma de transformações sobre a matriz de rigidez e vetor de forças internas obtidos localmente de forma que esses possam contribuir na formação do sistema global de equações do novo passo iterativo do algoritmo. Esse processo é ilustrado de forma esquemática na Fig. 2.18, embora a implementação do código tenha se dado com os processos ocorrendo elemento a elemento por questão de eficiência computacional.

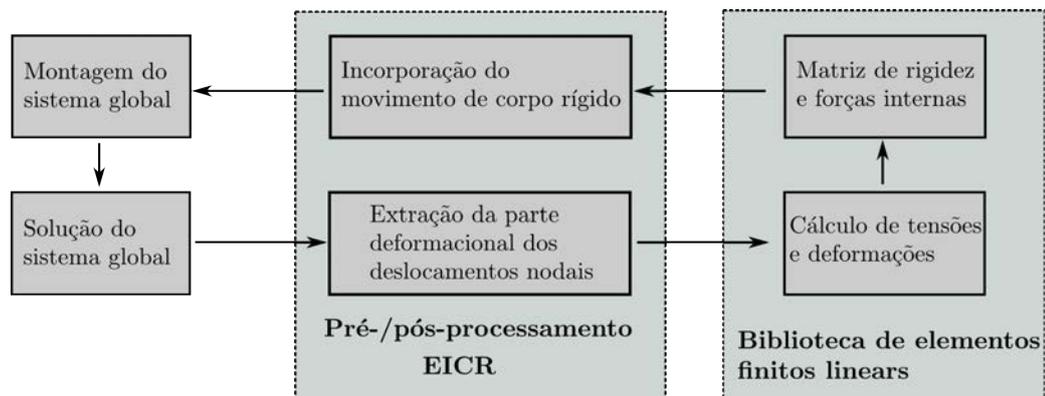


Figura 2.18: Representação esquemática da formulação EICR como um pré-/pós-processador da biblioteca linear de elementos finitos

## Cinemática Corrotacional

Assim como nas demais formas de descrição Lagrangeana, a descrição CR acompanha o corpo ou elemento a medida que este se move. Esse mapeamento do movimento é realizado utilizando algumas configurações, conforme ilustrado na Fig. 2.19 onde é apresentado o movimento de um elemento de barra no plano para facilitar a ilustração. A *configuração deformada* ( $\mathcal{C}^D$ ) é aquela assumida pelo corpo em qualquer instante do tempo após terem decorridos os deslocamentos, podendo estar em equilíbrio ou não

(durante as iterações). Além dessa, também são utilizadas a *configuração base* ( $\mathcal{C}^0$ ) e a *configuração corrotacional* ( $\mathcal{C}^R$ ). A configuração base se refere ao estado inicial do corpo, antes de ocorrerem deslocamentos, sendo tomada como uma configuração indeformada. A configuração corrotacional é particular de cada elemento, sendo obtida pela aplicação de movimento de corpo rígido sobre a configuração base. Dessa forma,  $\mathcal{C}^R$  serve como uma configuração intermediária entre o estado indeformado inicial  $\mathcal{C}^0$  e o estado deformado do elemento  $\mathcal{C}^D$ . A medida das deformações (ou dos deslocamentos deformacionais) são referenciados à configuração corrotacional.

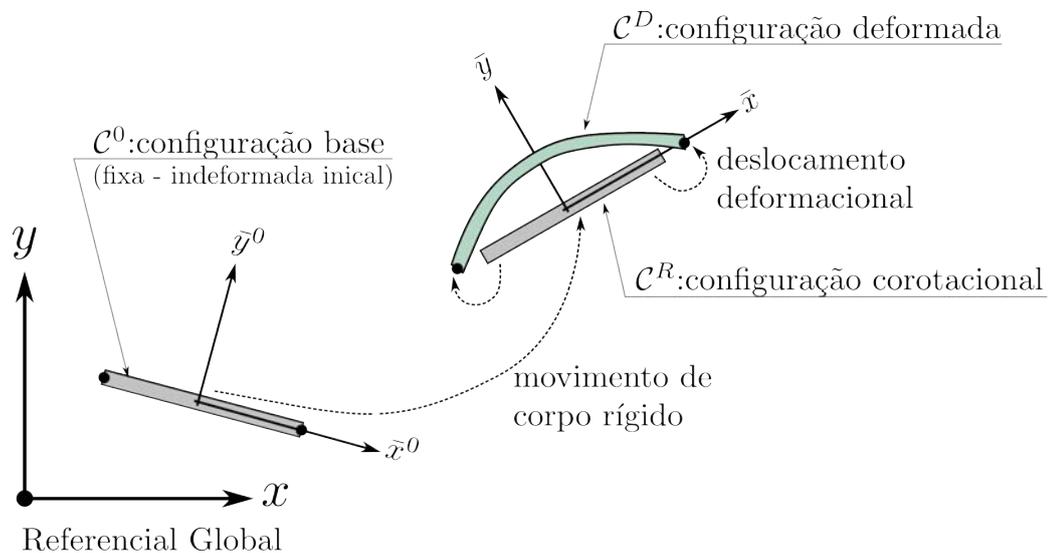


Figura 2.19: Configurações base ( $\mathcal{C}^0$ ), corrotacional ( $\mathcal{C}^R$ ) e deformada ( $\mathcal{C}^D$ ) usadas na descrição CR

Além do sistema global de referência, comum a toda estrutura, também são utilizados eixos locais associados a cada elemento. Ao contrário do referencial global, que permanece inalterado com o decorrer da análise, os eixos do sistema local acompanham o movimento de corpo rígido do elemento. A origem e as direções dos eixos locais são determinadas de acordo com os procedimentos descritos na Seção 2.4, onde também são apresentados os tensores ortogonais  $\mathbf{T}_0$  e  $\mathbf{T}$  (nas Eq. (2.97) e Eq. (2.104), respectivamente) utilizados na transformação de quantidades entre os sistema local do elemento e o referencial global. As configurações  $\mathcal{C}^R$  e  $\mathcal{C}^D$  partilham do mesmo referencial local, cuja determinação depende da posição dos nós do elemento em cada instante e tem origem localizada no centróide do elemento, que é comum às duas configurações. Para facilitar a notação uma barra é utilizada sobre quantidades medidas segundo o sistema local do elemento. Também são utilizados os superíndices ou subíndices 0,  $R$  e  $D$  para definir quantidades referentes às

configurações  $\mathcal{C}^0$ ,  $\mathcal{C}^R$  e  $\mathcal{C}^D$ , respectivamente.

Na formulação empregada assume-se que o deslocamento total de um ponto  $a$  qualquer é composto por uma translação, definida pelo vetor  $\mathbf{u}_a = \{u_{x_a} \ u_{y_a} \ u_{z_a}\}^T$ , e por uma rotação, definida pelo tensor ortogonal<sup>3</sup> ( $3 \times 3$ )  $\mathbf{R}_a$ . Para efeito de notação, as duas quantidades que definem o movimento do ponto são representadas pela variável

$$\mathbf{d}_a = \{\mathbf{u}_a; \mathbf{R}_a\}, \quad (2.117)$$

que nesse contexto não é um vetor. A posição desse ponto em uma configuração deformada é dada por  $\mathbf{x}_a = \{x_a \ y_a \ z_a\}^T$ , tal que  $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_a^0 + \mathbf{u}_a$ . Tanto a posição quanto o deslocamento do ponto podem ser referidos ao sistema global ou ao sistema local do elemento. Os deslocamentos referenciados ao eixos locais do elemento são obtidos pelas transformações

$$\bar{\mathbf{u}}_a = \mathbf{T}\mathbf{u}_a \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{R}}_a = \mathbf{T}\mathbf{R}_a\mathbf{T}^T \quad (2.118)$$

Já a posição de um ponto é definida no referencial local pela relação

$$\bar{\mathbf{x}}_a = \mathbf{T}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_C), \quad (2.119)$$

onde  $\mathbf{x}_C$  é a posição do centróide do elemento em coordenadas globais (origem do sistema local, calculada conforme Eq. (2.99)). A posição de um ponto em coordenadas locais na configuração inicial ( $\bar{\mathbf{x}}_a^0$ ) e na configuração corrotacional ( $\bar{\mathbf{x}}_a^R$ ) é a mesma, uma vez que as duas configurações se distinguem apenas por um movimento de corpo rígido.

$$\bar{\mathbf{x}}_a^0 = \bar{\mathbf{x}}_a, \quad \text{com} \quad \bar{\mathbf{x}}_a^0 = \mathbf{T}(\mathbf{x}_a^0 - \mathbf{x}_C^0) \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{x}}_a^R = \mathbf{T}(\mathbf{x}_a^R - \mathbf{x}_C) \quad (2.120)$$

Conforme ilustrado na Fig. 2.20, o movimento do elemento pode ser decomposto em duas partes: movimento de corpo rígido e movimento deformacional. O primeiro componente é relativo à translação e rotação do elemento indeformado (entre  $\mathcal{C}^0$  e  $\mathcal{C}^R$ ). O deslocamento do centróide do elemento ( $\mathbf{u}_C$ ) define a translação de corpo rígido enquanto que a rotação de corpo rígido é definida pela mudança de direção dos eixos do sistema local do elemento, dados pelos vetores unitários  $\{\mathbf{i}_x^0 \ \mathbf{i}_y^0 \ \mathbf{i}_z^0\}$  na configuração inicial e  $\{\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z\}$  na configuração atual. Essa variação é expressa pelo tensor ortogonal  $\mathbf{R}_0$ , tal que eixos correspondentes

<sup>3</sup>As rotações também podem ser representadas por quaternions, conforme descrito no Apêndice A. No entanto, no presente trabalho o uso dos quaternions ficará restrito ao armazenamento e atualização das rotações na implementação computacional

nas duas configurações se relacionam por  $\mathbf{i}_{\tilde{x}} = \mathbf{R}_0 \mathbf{i}_x^0$ . Conforme descrito anteriormente, a origem e direção dos eixos do sistema local do elemento em sua configuração inicial ou deformada são obtidas com base na posição dos seus nós, utilizando para tanto os procedimentos descritos na Seção 2.4. Dessa forma, conhecendo-se as configurações  $\mathcal{C}^0$  e  $\mathcal{C}^D$ , bem como os tensores que fazem as transformações de quantidades entre os sistemas locais nessas configurações e o sistema global,  $\mathbf{T}_0^T = [\mathbf{i}_x^0 \ \mathbf{i}_y^0 \ \mathbf{i}_z^0]$  e  $\mathbf{T}^T = [\mathbf{i}_{\tilde{x}} \ \mathbf{i}_{\tilde{y}} \ \mathbf{i}_{\tilde{z}}]$ , respectivamente, obtêm-se as seguintes definições para as variáveis descritas acima

$$\mathbf{u}_C = \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_C^0 \quad (2.121)$$

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{R}_0 \mathbf{T}_0^T \longrightarrow \mathbf{R}_0 = \mathbf{T}^T \mathbf{T}_0 \quad (2.122)$$

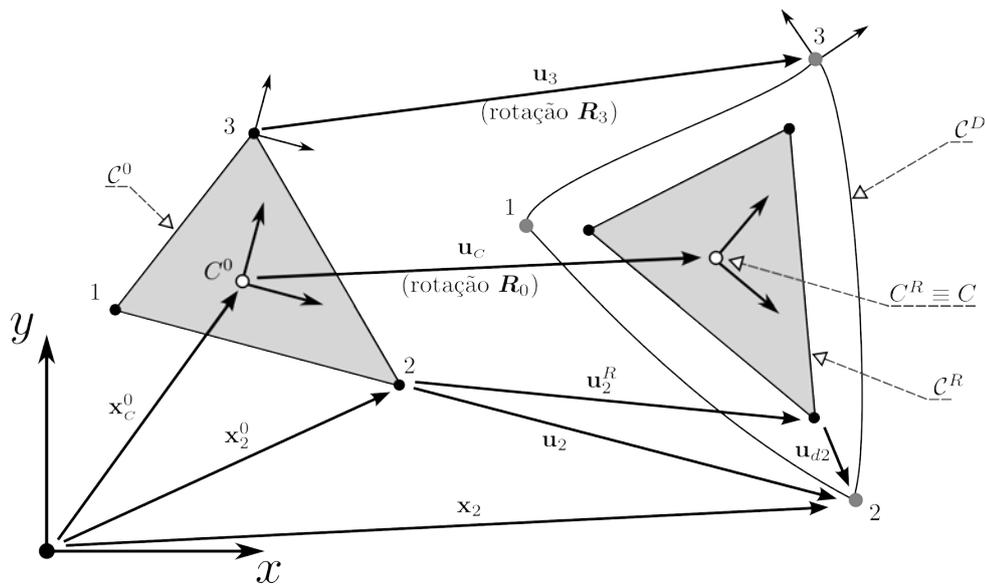


Figura 2.20: Deslocamentos e rotações do elemento no plano

O deslocamento de corpo rígido  $u^R$  de um ponto qualquer no domínio do elemento é dado pela diferença entre a posição desse ponto nas configurações  $\mathcal{C}^0$  e  $\mathcal{C}^R$ . Tomando as relações expressas na Eq. (2.123) e efetuando algumas manipulações algébricas é possível expressar os deslocamentos de corpo rígido de um ponto qualquer em termos das coordenadas na configuração inicial e das variáveis  $\mathbf{R}_0$  e  $\mathbf{u}_C$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^R &= \mathbf{x}^R - \mathbf{x}^0 \\
&= \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{x}}^R + \mathbf{x}_C - (\mathbf{T}_0^T \bar{\mathbf{x}}^0 + \mathbf{x}_C^0) \\
&= (\mathbf{T}^T - \mathbf{T}_0^T) \bar{\mathbf{x}}^0 + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_C^0) \\
&= (\mathbf{T}^T \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0^T \mathbf{T}_0) \mathbf{T}_0^T \bar{\mathbf{x}}^0 + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_C^0) \\
&= (\mathbf{R}_0 - \mathbf{I})(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_C^0) + \mathbf{u}_C
\end{aligned} \tag{2.123}$$

O segundo componente do movimento é referente aos deslocamentos que provocam deformações. Essa parcela é obtida extraindo-se o deslocamento de corpo rígido do deslocamento total em um ponto qualquer do elemento. No que se refere às translações, o deslocamento total de um ponto  $a$  pertencente ao domínio do elemento é composto por uma parcela de deslocamento rígido  $\mathbf{u}_a^R$  e uma parcela deformacional  $\mathbf{u}_{da}$  (onde o subíndice  $d$  indica deformacional), conforme traz a Eq. (2.124a) e ilustra a Fig. 2.20. Partindo dessa composição e utilizando a definição de  $\mathbf{u}_a^R$  dada na Eq. (2.123) obtém-se o deslocamento deformacional no referencial global como segue:

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_a^R + \mathbf{u}_{da} \tag{2.124a}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{da} &= \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_a^R \\
&= \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_C + (\mathbf{I} - \mathbf{R}_0)(\mathbf{x}_a^0 - \mathbf{x}_C^0)
\end{aligned} \tag{2.124b}$$

O deslocamento deformacional do ponto  $a$  segundo o referencial local do elemento é obtido pela diferença entre a posição desse ponto nas configurações  $\mathcal{C}^R$  e  $\mathcal{C}^D$ , conforme dado na Eq. (2.125). Aplicando sobre essa definição a relação dada na Eq. (2.120) e posteriormente a relação  $\bar{\mathbf{x}}_a = \mathbf{T}(\mathbf{u}_a + \mathbf{x}_a^0 - \mathbf{u}_C - \mathbf{x}_C^0)$ , decorrente da Eq. (2.119), obtém-se o definição de  $\bar{\mathbf{u}}_{da}$  em termos de quantidades globais.

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{u}}_{da} &= \bar{\mathbf{x}}_a - \bar{\mathbf{x}}_a^R \\
&= \bar{\mathbf{x}}_a - \bar{\mathbf{x}}_a^0 \\
&= \mathbf{T}(\mathbf{u}_a + \mathbf{x}_a^0 - \mathbf{u}_C - \mathbf{x}_C^0) - \bar{\mathbf{x}}_a^0
\end{aligned} \tag{2.125}$$

A rotação de um ponto  $a$  do elemento também pode ser expressa em termos de componentes de movimentos de corpo rígido e deformacional. Essa composição da rotação total  $\mathbf{R}_a$  por uma rotação de corpo rígido  $\mathbf{R}_0$ , que é comum a todos os pontos do elemento, seguida de uma rotação que causa deformação  $\mathbf{R}_{da}$ , particular a cada ponto, é apresentada

na Eq. (2.126a). A Eq. (2.126b) traz a definição do componente deformacional da rotação de um ponto em termos de quantidades conhecidas. Aplicando uma transformação de  $\mathbf{R}_{da}$  par o referencial local do elemento e utilizando a definição de  $\mathbf{R}_0$ , dado na Eq. (2.122), obtém-se o tensor de rotação deformacional no sistema local do elemento  $\bar{\mathbf{R}}_{da}$ , conforme a Eq. (2.126c).

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{R}_{da} \mathbf{R}_0 \quad (2.126a)$$

$$\mathbf{R}_{da} = \mathbf{R}_a \mathbf{R}_0^T \quad (2.126b)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{da} = \mathbf{T} \mathbf{R}_{da} \mathbf{T}^T = \mathbf{T} \mathbf{R}_a \mathbf{R}_0^T \mathbf{T}^T = \mathbf{T} \mathbf{R}_a \mathbf{T}_0^T \mathbf{T} \mathbf{T}^T \quad (2.126c)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{da} = \mathbf{T} \mathbf{R}_a \mathbf{T}_0^T$$

Uma vez que  $\bar{\mathbf{R}}_{da}$  é conhecido, os procedimentos apresentados na Apêndice A podem ser utilizados para a conversão do tensor ortogonal no seu vetor de rotação equivalente  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}$ . O vetor de deslocamentos deformacionais do elemento em termos de seu sistema local de referência é formado pelos vetores de translação e rotação deformacional em cada nó, conforme apresenta a Eq. (2.127).

$$\bar{\mathbf{p}}_d = \{\bar{\mathbf{p}}_{d1} \bar{\mathbf{p}}_{d2} \cdots \bar{\mathbf{p}}_{dN^e}\}^T, \quad \text{com} \quad \bar{\mathbf{p}}_{da} = \{\bar{\mathbf{u}}_{da} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}\}^T \quad (2.127)$$

sendo  $N^e$  o número de nós do elemento ( $N^e = 3$  nesse trabalho). O vetor  $\bar{\mathbf{p}}_d$  é equivalente ao vetor de deslocamentos nodais ( $\mathbf{p}$ ) introduzido na descrição da formulação local do elemento na Seção 2.3 (ver Eq. (2.93)). Assim, as forças nodais internas de um elemento são obtidas segundo seu referencial local pela relação

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{p}}_d = \bar{\mathbf{f}} \quad (2.128)$$

Essa equação é equivalente à Eq. (2.89), diferido apenas na presença da barra sobre os componentes, que é introduzida para indicar quantidades referidas ao sistema local do elemento, conforme notação adotada no desenvolvimento da formulação corrotacional.

### Variação dos deslocamentos

Conforme definido na Eq. (2.117), o movimento de um nó  $a$  é descrito na formulação CR através do conjunto de variáveis nodais  $\mathbf{d}_a = \{\mathbf{u}_a; \mathbf{R}_a\}$ , dados segundo o sistema global

de referência. A variação desses deslocamento é definida pelo seguinte vetor

$$\delta \mathbf{d}_a = \left\{ \begin{array}{l} \delta \mathbf{u}_a \\ \delta \boldsymbol{\omega}_a \end{array} \right\}, \quad (2.129)$$

onde a variação do tensor ortogonal de rotação está sendo considerada conforme a definição dada na Eq. (A.23). Contudo, essas variáveis não podem ser utilizadas na determinação da variação das forças internas do elemento. Para tanto é necessário obter o vetor de deslocamentos nodais deformacionais segundo o referencial local do elemento ( $\bar{\mathbf{p}}_{da}$ ). Esse vetor é compatível com a formulação local do elemento e por consequência compatível com a matriz de rigidez local.

As discussões apresentadas nessa seção visam definir as relações que permitem a obtenção das variáveis nodais  $\bar{\mathbf{p}}_{da}$  em termos da variação dos deslocamentos nodais  $\delta \mathbf{d}_a$ , obtidos no referencial global através dos procedimentos de solução do problema.

A variação do componente deformacional local das translações de um nó  $a$  ( $\delta \bar{\mathbf{u}}_{da}$ ) é obtida em termos de quantidades locais do elemento conforme a Eq. (2.130). Essa definição parte da variação da Eq. (2.125), já levando em conta que  $\delta \bar{\mathbf{x}}_a^0 = 0$ . Introduzindo a definição de variação do tensor de transformação  $\delta \mathbf{T} = -\mathbf{T} \mathbf{spin}(\delta \boldsymbol{\omega}_E)$  (ver Eq. (A.29)) e efetuando algumas manipulações sobre a equação para obter as quantidades em termos do referencial local chega-se a

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{u}}_{da} &= \delta \mathbf{T}(\mathbf{u}_a + \mathbf{x}_a^0 - \mathbf{u}_C - \mathbf{x}_C^0) + \mathbf{T}(\delta \mathbf{u}_a - \delta \mathbf{u}_C) \\ &= -\mathbf{T} \mathbf{spin}(\delta \boldsymbol{\omega}_E)(\mathbf{u}_a + \mathbf{x}_a^0 - \mathbf{u}_C - \mathbf{x}_C^0) + \mathbf{T}(\delta \mathbf{u}_a - \delta \mathbf{u}_C) \\ &= -\mathbf{T} \mathbf{spin}(\delta \boldsymbol{\omega}_E) \mathbf{T}^T \mathbf{T}(\mathbf{u}_a + \mathbf{x}_a^0 - \mathbf{u}_C - \mathbf{x}_C^0) + \mathbf{T}(\delta \mathbf{u}_a - \delta \mathbf{u}_C) \\ &= -\mathbf{spin}(\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_E) \mathbf{T}(\mathbf{u}_a + \mathbf{x}_a^0 - \mathbf{u}_C - \mathbf{x}_C^0) + \mathbf{T}(\delta \mathbf{u}_a - \delta \mathbf{u}_C) \\ &= -\mathbf{spin}(\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_E) \bar{\mathbf{x}}_a + \delta \bar{\mathbf{u}}_a - \delta \bar{\mathbf{u}}_C \\ &= \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{x}}_a) \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_E + \delta \bar{\mathbf{u}}_a - \delta \bar{\mathbf{u}}_C \end{aligned} \quad (2.130)$$

Utilizando a definição de  $\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_E$  dada na Eq. (A.30) e considerando que  $\bar{\mathbf{u}}_C$  é dado pela média dos deslocamentos nodais é possível escrever a Eq. (2.130) na forma

$$\delta \bar{\mathbf{u}}_{da} = \delta \bar{\mathbf{u}}_a - \frac{1}{N^e} \sum_{b=1}^{N^e} \delta \bar{\mathbf{u}}_b + \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{x}}_a) \sum_{b=1}^{N^e} \bar{\mathbf{G}}_b \delta \bar{\mathbf{d}}_b \quad (2.131)$$

onde  $N^e$  é o número de nós do elemento em questão. Essa equação pode ser

convenientemente reescrita em termos da variação dos deslocamentos nodais como

$$\delta \bar{\mathbf{u}}_{da} = \sum_{b=1}^{N^e} (\mathbf{U}_{ab} + \bar{\mathbf{S}}_a \bar{\mathbf{G}}_{u,b}) \delta \bar{\mathbf{u}}_b, \quad (2.132)$$

sendo  $\bar{\mathbf{G}}_{u,b}$  o componente não nulo de  $\bar{\mathbf{G}}_b$ , conforme apresentado na Eq. (A.31), e as demais matrizes  $\mathbf{U}_{ab}$  e  $\bar{\mathbf{S}}_a$  dadas por

$$\bar{\mathbf{S}}_a = \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{x}}_a) \quad (2.133)$$

e

$$\mathbf{U}_{ab} = \left( \delta_{ab} - \frac{1}{N^e} \right) \mathbf{I}_3 \quad (2.134)$$

tomando  $\delta_{ab}$  como o delta de Kronecker.

A variação da parcela deformacional das rotações nodais é determinada pela variação da Eq. (2.126b), como apresenta a Eq. (2.135). Para a obtenção da definição final são introduzidas as Eq. (A.23) e Eq. (A.29). Em seguida são efetuadas operações no intuito de obter todas as quantidades referidas aos eixos locais do elemento.

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{R}}_{da} &= \delta \mathbf{T} \mathbf{R}_a \mathbf{T}_0^T + \mathbf{T} \delta \mathbf{R}_a \mathbf{T}_0^T \\ &= -\mathbf{T} \mathbf{spin}(\delta \omega_E) \mathbf{R}_a \mathbf{T}_0^T + \mathbf{T} \mathbf{spin}(\delta \omega_a) \delta \mathbf{R}_a \mathbf{T}_0^T \\ &= -\mathbf{T} \mathbf{spin}(\delta \omega_E) \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{R}_a \mathbf{T}_0^T + \mathbf{T} \mathbf{spin}(\delta \omega_a) \mathbf{T}^T \mathbf{T} \delta \mathbf{R}_a \mathbf{T}_0^T \\ &= [\mathbf{spin}(\delta \bar{\omega}_a) - \mathbf{spin}(\delta \bar{\omega}_E)] \bar{\mathbf{R}}_{da} \end{aligned} \quad (2.135)$$

Atentando para o fato de que  $\mathbf{spin}(\delta \bar{\omega}_a) - \mathbf{spin}(\delta \bar{\omega}_E) = \mathbf{spin}(\delta \bar{\omega}_a - \delta \bar{\omega}_E)$  e tomando a equação  $\delta \bar{\mathbf{R}}_{da} = \mathbf{spin}(\delta \bar{\omega}_{da}) \bar{\mathbf{R}}_{da}$ , obtida com base a definição de variação do tensor de rotação dada na Eq. (A.23), chega-se à seguinte relação para a parcela deformacional da variação angular do nó  $a$  no sistema local

$$\delta \bar{\omega}_{da} = \delta \bar{\omega}_a - \delta \bar{\omega}_E \quad (2.136)$$

A partir desta equação obtém-se a definição dada na Eq. (2.137), onde  $\delta \bar{\omega}_E$  foi colocado em termos das variáveis nodais de translação.

$$\begin{aligned} \delta \bar{\omega}_{da} &= \delta \bar{\omega}_a - \sum_{b=1}^{N^e} \bar{\mathbf{G}}_{u,b} \delta \bar{\mathbf{u}}_b \\ \delta \bar{\omega}_{da} &= \sum_{b=1}^{N^e} [-\bar{\mathbf{G}}_{u,b} \delta_{ab} \mathbf{I}_3] \delta \bar{\mathbf{d}}_b \end{aligned} \quad (2.137)$$

A partir das Eq. (2.132) e Eq. (2.137) que estabelecem as relações entre os deslocamentos nodais e seus componentes deformacionais segundo o sistema de referência local do elemento, é possível montar a seguinte definição para os vetores deslocamentos nodais

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_{da} = \sum_{b=1}^{N^e} \bar{\mathbf{P}}_{ab} \delta \bar{\mathbf{d}}_b \quad (2.138)$$

onde

$$\bar{\mathbf{P}}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{ab} + \bar{\mathbf{S}}_a \bar{\mathbf{G}}_{u,b} & \mathbf{0}_3 \\ -\bar{\mathbf{G}}_{u,b} & \delta_{ab} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

ou, no contexto do elemento como um todo

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_d = \bar{\mathbf{P}} \delta \bar{\mathbf{d}}, \quad \text{com} \quad \bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{11} & \bar{\mathbf{P}}_{12} & \cdots & \bar{\mathbf{P}}_{1N^e} \\ \bar{\mathbf{P}}_{21} & \bar{\mathbf{P}}_{22} & \cdots & \bar{\mathbf{P}}_{2N^e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{P}}_{N^e 1} & \bar{\mathbf{P}}_{N^e 2} & \cdots & \bar{\mathbf{P}}_{N^e N^e} \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

Na formulação EICR a matriz  $\bar{\mathbf{P}}$  é denominada matriz de projeção, sendo responsável pela extração da parte deformacional do movimento.

A variação dos deslocamentos deformacionais de um elemento pode ser escrita em função da variação dos deslocamentos nodais globais pela introdução da matriz de transformação  $\mathbf{T}$  na Eq. (2.140), o que resulta em

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_d = \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \delta \mathbf{d}, \quad (2.141)$$

onde

$$\mathbf{T}_e = \text{diag}[\mathbf{T} \ \mathbf{T} \ \cdots \ \mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{T} & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

Para obter o vetor de deslocamentos ( $\bar{\mathbf{p}}_d$ ) compatível com a formulação local do elemento finito a partir do vetor de deslocamentos ( $\bar{\mathbf{d}}_d$ ) é preciso introduzir a relação entre a variação das rotações nodais ( $\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}$ ) e a variação angular instantânea ( $\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_{da}$ ) dada para um nó  $a$  como

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{da} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_{da}} \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_{da} = \bar{\mathbf{H}}_a \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_{da} \quad (2.143)$$

sendo a matriz  $\bar{\mathbf{H}}_a$  calculada conforme a Eq. (A.24), substituindo  $\boldsymbol{\theta}$  por  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}$ . Tal processo resulta em uma nova operação sobre o vetor de deslocamentos como é descrito pela Eq.

(2.144).

$$\delta \bar{\mathbf{p}}_d = \bar{\mathbf{H}} \delta \bar{\mathbf{d}}_d, \quad \text{com} \quad \bar{\mathbf{H}} = \text{diag}[\mathbf{I} \bar{\mathbf{H}}_1 \mathbf{I} \bar{\mathbf{H}}_2 \cdots \mathbf{I} \bar{\mathbf{H}}_{N^e}] \quad (2.144)$$

Introduzindo a Eq. (2.144) na Eq. (2.141) obtém-se a variação dos deslocamentos deformacionais do elemento finito em termos da variação das variáveis nodais no referencial global, como é apresentado na Eq. (2.145).

$$\delta \bar{\mathbf{p}}_d = \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \delta \mathbf{d} \quad (2.145)$$

Esse conjunto de operações podem ser sintetizados na definição de um operador corrotacional, designado pela matriz  $\mathbf{\Lambda}$ , que substitui a Eq. (2.145) por

$$\delta \bar{\mathbf{p}}_d = \mathbf{\Lambda} \delta \mathbf{d} \quad (2.146)$$

tal que

$$\mathbf{\Lambda} = \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \quad (2.147)$$

ou

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11} & \mathbf{\Lambda}_{12} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{1N^e} \\ \mathbf{\Lambda}_{21} & \mathbf{\Lambda}_{22} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{2N^e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{N^e1} & \mathbf{\Lambda}_{N^e2} & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{N^eN^e} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \mathbf{\Lambda}_{ab} = \begin{bmatrix} (\mathbf{U}_{ab} + \bar{\mathbf{S}}_a \bar{\mathbf{G}}_b) \mathbf{T} & \mathbf{0}_3 \\ -\bar{\mathbf{H}}_a \bar{\mathbf{G}}_b \mathbf{T} & \delta_{ab} \bar{\mathbf{H}}_a \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

### Vetor de forças internas e matriz de rigidez tangente

Partindo do princípio de que a energia interna devida às deformações ( $\phi^i$ ) é invariante quanto ao referencial ao qual as variáveis utilizadas para o seu cálculo são referidas, toma-se a seguinte relação para um elemento

$$\phi^i = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{f}}^T \delta \bar{\mathbf{p}}_d \quad (2.149)$$

onde  $\bar{\mathbf{f}}$  é o vetor de forças internas do elemento segundo os eixos locais.

A substituição de  $\delta \bar{\mathbf{p}}_d$  por sua definição dada na Eq. (2.145) e a eliminação de  $\delta \mathbf{d}$  nos dois lados da equação leva a

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T \delta \mathbf{d} &= \bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \delta \mathbf{d} \\ \mathbf{f}^T &= \bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \end{aligned} \quad (2.150)$$

Usando a Eq. (2.150) obtém-se a contribuição de um elemento para o vetor de forças internas de um nó no sistema global a partir do vetor de forças internas locais como

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{f}}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{f} = \mathbf{\Lambda}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (2.151)$$

Conforme definição, a matriz de rigidez tangente consistente do elemento ( $\mathbf{K}$ ) é dada pela variação das forças internas com relação à variação dos deslocamentos globais.

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{K} \delta \mathbf{d}, \quad \text{com} \quad \mathbf{K} \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}} \quad (2.152)$$

Tomando o vetor de forças internas de um elemento  $\mathbf{f}$ , conforme apresenta a Eq. (2.151), e fazendo sua variação com relação aos deslocamentos nodais no sistema global obtém-se a seguinte equação formada por dois termos

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{\Lambda}^T \delta \bar{\mathbf{f}} + \delta \mathbf{\Lambda}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (2.153)$$

A abordagem do primeiro termo com a introdução das Eq. (2.128) e Eq. (2.145) resulta em

$$\mathbf{\Lambda}^T \delta \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{\Lambda}^T \bar{\mathbf{K}} \delta \bar{\mathbf{p}}_d = \mathbf{\Lambda}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{\Lambda} \delta \mathbf{d} \quad (2.154)$$

de onde origina-se o componente da matriz de rigidez tangente denominado rigidez material (*material stiffness*)

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{\Lambda}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \quad (2.155)$$

O segundo termo da Eq. (2.153) dá origem à parcela geométrica da rigidez (*geometric stiffness*) ( $\mathbf{K}_\sigma$ ), que é composta por três matrizes decorrentes da variação do operador corrotacional como mostra a Eq. (2.156).

$$\delta \mathbf{\Lambda}^T \bar{\mathbf{f}} = (\delta \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T + \mathbf{T}_e^T \delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T + \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{P}}^T \delta \bar{\mathbf{H}}^T) \bar{\mathbf{f}} \quad (2.156)$$

Para expressar os componentes da rigidez geométrica é conveniente introduzir o vetor de forças nodais projetadas, dado por

$$\bar{\mathbf{f}}_P = \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{f}}, \quad \text{com componentes} \quad \bar{\mathbf{f}}_P = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_{P,1} \\ \bar{\mathbf{m}}_{P,1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{n}}_{P,N^e} \\ \bar{\mathbf{m}}_{P,N^e} \end{Bmatrix} \quad (2.157)$$

Por questões de espaço e simplicidade a seguir serão apresentadas apenas a forma final das matrizes que compõem a parcela geométrica da matriz de rigidez tangente. A derivação detalhada desses termos pode ser encontrada no trabalho de Nour-Omid e Rankin (1991).

Do primeiro termo da Eq. (2.156) tem-se

$$\delta \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{f}} = \delta \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{f}}_P = -\mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{F}}_{nm} \bar{\mathbf{G}} \mathbf{T}_e \delta \mathbf{d} \quad (2.158)$$

de onde resulta a matriz de rigidez geométrica rotacional (*rotational geometric stiffness*) ( $\mathbf{K}_{GR}$ ), que está ligada à variação das forças internas no referencial global devido ao giro de corpo rígido do elemento.

$$\mathbf{K}_{GR} = -\mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{F}}_{nm} \bar{\mathbf{G}} \mathbf{T}_e \quad (2.159)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{F}}_{nm} = \begin{bmatrix} \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{n}}_{P,1}) \\ \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{m}}_{P,1}) \\ \vdots \\ \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{n}}_{P,Ne}) \\ \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{m}}_{P,Ne}) \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}} &= [\bar{\mathbf{G}}_1 \quad \bar{\mathbf{G}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{G}}_{Ne}] \\ &= [\bar{\mathbf{G}}_{u,1} \quad \mathbf{0}_3 \quad \bar{\mathbf{G}}_{u,2} \quad \mathbf{0}_3 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{G}}_{u,Ne} \quad \mathbf{0}_3] \end{aligned} \quad (2.161)$$

No segundo termo da Eq. (2.156) a variação da matriz de projeção resulta na rigidez geométrica de equilíbrio de projeção (*equilibrium projection geometric stiffness*) ( $\mathbf{K}_{GM}$ ). A definição dessa matriz parte de uma simplificação que considera que a parte desequilibrada das forças internas após a projeção tende a ser nula ou insignificante. Esse pressuposto só não é válido para elementos altamente arqueados em malhas grosseiras (Felippa e Haugen, 2005). A definição desse componente da rigidez geométrica é dada por

$$\mathbf{K}_{GP} = -\mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{F}}_n^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \quad (2.162)$$

com

$$\bar{\mathbf{F}}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{n}}_{P,1}) \\ \mathbf{0}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{n}}_{P,Ne}) \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

A variação da matriz  $\bar{\mathbf{H}}$  no terceiro termo da Eq. (2.156) leva à definição da rigidez geométrica de correção de momentos (*moment-corection geometric stiffness*) ( $\mathbf{K}_{GM}$ ), descrita conforme a Eq. (2.164)

$$\mathbf{K}_{GM} = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \quad (2.164)$$

A matriz bloco-diagonal matriz  $\bar{\mathbf{L}}$  é formada como mostra a Eq. (2.165), tendo seus componentes  $\bar{\mathbf{L}}_a$  calculados conforme a Eq. (A.26), utilizando  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}$  no lugar de  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\bar{\mathbf{m}}_a$  no lugar de  $\mathbf{m}$ .

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{diag}[\mathbf{0}_3 \ \bar{\mathbf{L}}_1 \ \mathbf{0}_3 \ \bar{\mathbf{L}}_2 \ \cdots \ \mathbf{0}_{N^e} \ \bar{\mathbf{L}}_{N^e}] \quad (2.165)$$

A soma das três matrizes definidas em Eq. (2.159), Eq. (2.162) e Eq. (2.164) forma o componente geométrico da matriz de rigidez tangente do elemento, que resulta da Eq. (2.156) como

$$\delta \boldsymbol{\Lambda}^T \bar{\mathbf{f}} = (\mathbf{K}_{GR} + \mathbf{K}_{GP} + \mathbf{K}_{GM}) \delta \mathbf{d} = \mathbf{K}_\sigma \delta \mathbf{d} \quad (2.166a)$$

$$\text{com} \quad \mathbf{K}_\sigma(\bar{\mathbf{f}}) = \mathbf{K}_{GR} + \mathbf{K}_{GP} + \mathbf{K}_{GM} \quad (2.166b)$$

Dessa forma, escrever-se a variação das forças internas devido à variação dos deslocamentos em termos do sistema global como

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{K} \delta \mathbf{d}, \quad \text{com} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_\sigma \quad (2.167)$$

Como se pode ver pela definição de seus componentes, a matriz de rigidez geométrica ( $\mathbf{K}_\sigma$ ) não é simétrica, o que também elimina a simetria da matriz tangente, tanto em nível local quanto global. Tal fato é indesejável, pois, se comparado a matrizes simétricas, verifica-se uma demanda computacional consideravelmente maior para a solução do sistema de equações. No entanto, nos casos em que não existem momentos aplicados como forças externas ou demais forças não-conservativas, é possível realizar uma simetrização da matriz de rigidez (Nour-Omid e Rankin, 1991), sem que ocorram prejuízos à precisão ou convergência do algoritmo.

### Contribuição de forças externas dependentes de deslocamento

Em alguns problemas de engenharia ocorrem forças externas cuja definição depende do movimento do corpo (e de outros fatores externos), tais como os carregamentos de pressão

sobre uma superfície. Nesses casos com a presença da força externa dependente dos deslocamentos, algumas considerações devem ser adicionadas para a obtenção de um operador tangente consistente. Como será descrito a seguir, a existência de tais forças gera uma contribuição adicional sobre a matriz de rigidez geométrica.

De acordo com Pajot e Maute (2006), a relação entre a representação local e global do vetor de forças externas dependentes de deslocamento em um elemento ( $\bar{\mathbf{f}}_{edd}$  e  $\mathbf{f}_{edd}$ , respectivamente) é definida segundo a formulação corrotacional por

$$\mathbf{f}_{edd} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{f}}_{edd} \quad (2.168)$$

Essa abordagem segue o tratamento dado ao vetor de forças internas na descrição da formulação EIRC. A única diferença está na ausência da matriz de projeção ( $\bar{\mathbf{P}}$ ). Essa distinção se deve ao fato de que a contribuição para o movimento de corpo rígido do elemento não deve ser extraído das forças externas.

A variação dessas forças externas com relação aos deslocamentos nodais resulta em contribuições adicionais à matriz de rigidez do elemento da seguinte forma

$$\delta \mathbf{f}_{edd} = \delta \bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{f}}_{edd} + \bar{\mathbf{T}}^T \delta \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{f}}_{edd} + \bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \delta \bar{\mathbf{f}}_{edd} \quad (2.169)$$

Se forem considerados apenas os carregamentos externos que são constantes em relação ao referencial local do elemento, como as forças de pressão ou forças de origem térmica, obtém-se uma simplificação da Eq. (2.169) pela eliminação do último termo da equação. Isso decorre do fato de que nessa situação  $\delta \bar{\mathbf{f}}_{edd} = 0$ .

Aplicando sobre o primeiro termo da Eq. (2.169) as mesmas operações utilizadas na obtenção da matriz de rigidez geométrica rotacional ( $\mathbf{K}_{GR}$ , Eq. (2.159)) obtém-se

$$\delta \bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{f}}_{edd} = -\mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{F}}_{edd} \bar{\mathbf{G}} \mathbf{T}_e \delta \mathbf{d} \quad (2.170)$$

de onde provém a definição da matriz  $\mathbf{K}_{GR,edd}$

$$\mathbf{K}_{GR} = -\mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{F}}_{edd} \bar{\mathbf{G}} \mathbf{T}_e \quad (2.171)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{F}}_{edd}$ , presente na Eq. (2.171), é definida com base nos componentes de forças e

momentos nodais da carga externa  $\bar{\mathbf{n}}_{edd,a}$  e  $\bar{\mathbf{m}}_{edd,a}$ , respectivamente, conforme segue

$$\bar{\mathbf{F}}_{edd} = \begin{bmatrix} \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{n}}_{edd,1}) \\ \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{H}}_1^T \bar{\mathbf{m}}_{edd,1}) \\ \vdots \\ \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{n}}_{edd,N^e}) \\ \mathbf{spin}(\bar{\mathbf{H}}_{N^e}^T \bar{\mathbf{m}}_{edd,N^e}) \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

Tomando o segundo termo da Eq. (2.169) tem-se

$$\bar{\mathbf{T}}^T \delta \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{f}}_{edd} = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{L}}_{edd} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \delta \mathbf{d} \quad (2.173)$$

de onde resulta a seguinte matriz, que é equivalente a  $\mathbf{K}_{GM}$  (Eq. (2.164)), porém obtida em função do carregamento externo

$$\mathbf{K}_{GM,edd} = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{L}}_{edd} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}_e \quad (2.174)$$

Nesse caso  $\bar{\mathbf{L}}_{edd}$  é obtida de maneira semelhante ao dado na Eq. (2.165), tendo seus componentes  $\bar{\mathbf{L}}_{a,edd}$  calculados conforme a Eq. (A.26), utilizando  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}$  no lugar de  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\bar{\mathbf{m}}_{a,edd}$  no lugar de  $\mathbf{m}$ .

Na presença de forças externas dependentes de deslocamentos as matrizes  $\mathbf{K}_{GR,edd}$  e  $\mathbf{K}_{GM,edd}$ , definidas nas Eq. (2.171) e Eq. (2.174), respectivamente, devem contribuir para a composição da matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_\sigma$ , cuja definição é dada na Eq. (2.175) em substituição à Eq. (2.166b).

$$\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K}_{GR} + \mathbf{K}_{GP} + \mathbf{K}_{GM} + \mathbf{K}_{GR,edd} + \mathbf{K}_{GM,edd} \quad (2.175)$$

Essa equação determina a não simetria da matriz de rigidez tangente, que não deve ser simetrizada na abordagem de problemas com forças externas dependentes de elemento. O uso da matriz não simétrica assegura a convergência do algoritmo.

Além da contribuição sobre a rigidez do sistema, as forças externas obtidas no referencial local do elemento devem ser transformadas usando a Eq. (2.168) e adicionadas ao vetor global de forças externas para a determinação do movimento da estrutura.

## Utilização da formulação EICR na solução de problemas estáticos com não linearidade geométrica

A seguir são apresentadas as etapas de utilização dos componentes da formulação EICR discutidas anteriormente. O fluxo de operações descrito tenta ser independente do método incremental-iterativo utilizado na solução do problema não linear. Essas operações são realizadas após a solução do sistema global de equações em um dada iteração do algoritmo, da qual resulta o vetor global de incremento de deslocamentos nodais  $\Delta \mathbf{d}^g = \{\Delta \mathbf{d}_1 \cdots \Delta \mathbf{d}_{N^g}\}^T$ , que é formado pelos vetores de incremento de deslocamentos  $\Delta \mathbf{d}_a = \{\Delta \mathbf{u}_a \ \Delta \boldsymbol{\omega}_a\}^T$  dos  $N^g$  nós da estrutura.

Os procedimentos são separados em duas etapas. A primeira etapa consiste em um laço sobre todos os nós da estrutura para atualizar seu movimento total a partir do incremento de deslocamentos ( $\Delta \mathbf{d}^g$ ) recém computado. Na segunda etapa procede-se um laço sobre todos os elementos da malha, sendo realizadas sobre cada elemento atividades agrupadas em três fases: a) pré-processamento dos deslocamentos totais para obtenção dos componentes deformacionais; b) cálculo de quantidades locais do elemento, como matriz de rigidez e forças internas, através de formulação linear (independente da formulação EICR); c) transformação das quantidades calculadas localmente no elemento para posterior contribuição ao novo sistema de equações a ser construído para a próxima iteração do algoritmo.

I) Atualização dos deslocamentos nodais. Para cada nó  $a$  fazer:

a) Atualização do vetor de translação:  $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_a + \Delta \mathbf{u}_a$

b) Atualização do vetor de translação:  $\mathbf{R}_a = \Delta \mathbf{R} \mathbf{R}_a$  com  $\Delta \mathbf{R} = \mathfrak{R}\mathcal{E}[\Delta \boldsymbol{\omega}_a]$  <sup>a</sup>

II) Cálculo realizado em cada elemento da malha:

a) Pré-processamento para obtenção das coordenadas nodais da parcela deformacional dos deslocamentos no referencial local do elemento:

- Obter posição dos nós e do centróide do elemento nas configurações  $\mathcal{C}^0$  e  $\mathcal{C}^D$ ;
- Obter  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}^0$ , usando as Eq. (2.104) e Eq. (2.97), respectivamente;
- Obter a posição dos nó no referencial local  $\bar{\mathbf{x}}_a$  com a Eq. (2.119);
- Obter as translações deformacionais  $\bar{\mathbf{u}}_{da}$  pela Eq. (2.125);
- Obter o tensor de rotações deformacionais  $\bar{\mathbf{R}}_{da}$  com a Eq. (2.126c) <sup>b</sup>;
- Obter as rotações deformacionais  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da} = \mathfrak{R}\mathcal{E}^{-1}[\bar{\mathbf{R}}_{da}]$ ;

- b) Cálculo de quantidades locais do elemento pela formulação linear local:
- Cálculo da matriz de rigidez local linear  $\bar{\mathbf{K}}$ ;
  - Cálculo do vetor de forças internas local  $\bar{\mathbf{f}}$  (Eq. (2.128) – caso elástico linear);
  - Quantidades calculadas opcionalmente:
    - Vetor de forças externas dependentes do deslocamento local  $\bar{\mathbf{f}}_{edd}$ ;
    - Deformações no elemento usando o vetor de deslocamentos  $\bar{\mathbf{p}}_d$ ;
    - Tensões ou resultantes de tensões no elemento;
- c) Pós-processamento das quantidades calculadas localmente no elemento para contribuição ao sistema global de equações:
- Cálculo das matrizes da formulação EICR ( $\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{L}} \dots$  etc.);
  - Cálculo das forças internas  $\mathbf{f}$ , usando a Eq. (2.151);
  - Cálculo das forças externas dependentes de deslocamento  $\mathbf{f}_{edd}$ , Eq. (2.168);
  - Cálculo dos componentes da rigidez tangente  $\mathbf{K}$ :  $\mathbf{K}_M$  através da Eq. (2.155) e  $\mathbf{K}_\sigma$  pela soma dos componentes dados na Eq. (2.166b) ou na Eq. (2.175);
  - Adição de  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}_{edd}$  e  $\mathbf{K}$ , nos arrays globais  $\mathbf{f}_i^g$ ,  $\mathbf{f}_e^g$  e  $\mathbf{K}^g$ , respectivamente;

<sup>a</sup>No algoritmo implementado a rotação total do nó  $a$  é armazenada como um quaternion  $\hat{\mathbf{r}}_a$ , sendo sua atualização dada por  $\hat{\mathbf{r}}_a = \Delta\hat{\mathbf{r}}_a$ , com  $\Delta\hat{\mathbf{r}} = \mathcal{E}[\Delta\boldsymbol{\omega}_a]$  (ver Apêndice A).

<sup>b</sup>O tensor  $\mathbf{R}_a$  utilizado na Eq. (2.126c) é obtido a partir do quaternion que armazena a rotação nesse nó através da operação  $\mathbf{R}_a = \mathfrak{R}[\hat{\mathbf{r}}_a]$ , conforme apresenta a Eq. (A.11).

Nesse trabalho foram utilizados dois métodos incremental-iterativos para a solução do problema estático não linear geométrico. Em alguns casos aplicou-se o tradicional método de Newton-Raphson para o cálculo dos deslocamentos. Nos problemas que apresentam comportamento pós-flambagem foi utilizado o Método do Controle de Deslocamentos Generalizados (GDCM – do inglês *Generalized Displacement Control Method*) desenvolvido por Yang e Shieh (1990). Esse método permite a determinação de toda a curva carga-deslocamento através do ajuste automático do incremento de carga em cada passo do algoritmo, podendo ocorrer inclusive a redução da carga. Como o método de Newton-Raphson é amplamente conhecido e o MDCG tem sido extensivamente utilizado em trabalhos desenvolvidos no PPGEC/PROMEC-UFRGS (Almeida (2006), Isoldi (2008) e de Andrade (2005)), suas descrições não serão incluídas nesse trabalho.

## 2.6 Análise dinâmica não linear geométrica: formulação corrotacional

Este capítulo é dedicado à apresentação do método utilizado no presente trabalho para realizar a análise de cascas de materiais compósitos laminados em problemas dinâmicos contemplando os efeitos de não linearidade geométrica e sem restrições quanto à magnitude dos deslocamentos ou rotações. O método em questão emprega um tratamento corrotacional para a descrição do movimento do corpo, de forma semelhante à formulação estática apresentada na Seção 2.5. Como é característica das abordagens corrotacionais, o tratamento das variáveis globais do problema se dá de forma separada da formulação local do elemento finito. Isso permite que diferentes tipos de materiais com relações constitutivas variadas sejam facilmente incorporados na análise, bastando para tanto que essas peculiaridades sejam consideradas na formulação local do elemento finito. Dessa forma o método se torna independente de elemento no mesmo sentido dado na formulação estática, permanecendo também a restrição da análise ao campo de pequenas deformações. Tendo em vista essas considerações, as discussões que seguem tratam da implementação geral do método, não se referindo particularmente à análise de estruturas de materiais compósitos laminados. A inclusão de tais materiais se dá pela adoção da formulação local do elemento descrito na Seção 2.3.

A integração temporal dos problemas dinâmicos é realizada por meio de procedimentos classificados como explícitos ou implícitos. Os procedimentos explícitos são tradicionalmente empregados em problemas de propagação de ondas ou impacto em alta velocidade. Já os procedimentos implícitos são mais adequados à análise estrutural, onde as respostas de baixas frequências são dominantes (Crisfield e Shi, 1994), sendo esse o caso em que os problemas abordados nesse trabalho se enquadram.

Dentre os métodos voltados à análise linear de problemas dinâmicos o método de Newmark é o mais empregado (Bathe, 1996). Isso se deve à sua eficiência e estabilidade, sobretudo quando utilizado sob a forma da regra trapezoidal (*trapezoidal rule*). No entanto, essas propriedades não são necessariamente observadas quando o método é estendido ao tratamento de problemas não lineares. Como foi verificado por vários autores (dentre eles Simo e Tarnow (1994), Crisfield e Shi (1994) e Braun e Awruch (2008)) o

método de Newmark pode apresentar instabilidades ou travamento em problemas que se caracterizam por não linearidades severas. Em muitos casos a estabilidade do método só é alcançada com incrementos de tempo extremamente pequenos, e mesmo assim para análises realizadas por curtos períodos.

Tendo em vista essa limitação do método de Newmark, várias outras técnicas vêm sendo desenvolvidas nos últimos anos para tratar problemas dinâmicos não lineares, sobretudo quando estão envolvidas grandes rotações. Conforme ressaltado por Ibrahimbegovic e Mikdad (1998), a análise não linear de problemas estruturais envolvendo grandes rotações no espaço representa um grande desafio, requerendo modificações mesmo na forma de aplicação de métodos convencionais. Em geral, esses novos métodos são construídos visando a conservação ou a dissipação da energia do sistema em cada passo de tempo, pois essa é uma condição suficiente para garantir a estabilidade em problemas não lineares (Kuhl e Crisfield, 1999). De fato, a principal motivação do desenvolvimento de método que conservam a energia do sistema não é a conservação da energia em si, mas sim a estabilidade desses métodos na análise não linear (Crisfield, 1997).

Os métodos baseados na dissipação numérica de energia são muito difundidos, sendo originalmente voltados a problemas lineares. Seu desenvolvimento visa promover a dissipação controlada da energia associada aos modos de alta frequência da estrutura, permitindo o uso de incrementos de tempo razoavelmente grandes na integração. Nesse grupo, o método  $\alpha$ -generalizado (Chung e Hulbert, 1993) é um dos mais popularmente empregados, tanto para a análise linear quanto não linear. Formulas para a determinação otimizada dos parâmetros do método são apresentadas em Kuhl e Crisfield (1999), resultando em um algoritmo com alta dissipação de modos de alta frequência e baixa dissipação de modos de baixa frequência. Uma análise sobre a precisão e estabilidade desse método quando aplicado a problemas não lineares é apresentada por Erlicher et al. (2002). Embora amplamente empregado, os métodos baseados em dissipação de energia apresentam algumas desvantagens. Dentre elas está a perda de precisão na análise de problemas decorridos por longos períodos Kuhl e Ramm (1996). Também é ressaltado em Ibrahimbegovic e Mamouri (2002) a dificuldade de construção de um algoritmo desse tipo em problemas que contemplam rotações finitas.

A segunda classe de métodos é constituída por algoritmos que visam a conservação da

energia do sistema. O trabalho pioneiro nesse linha se deve a Hughes et al. (1978) com a introdução do “Método de restrição de energia” (*Constraint energy method*), no qual a conservação da energia é obtida pelo uso de multiplicadores de Lagrange. Segundo Kuhl e Ramm (1996), esse método conserva a energia perfeitamente mas apresenta problemas de convergência no processo iterativo em cada passo de tempo. A partir dessa idéia, métodos alternativos de conservação de energia foram desenvolvidos. Dentre os mais bem sucedidos estão o “Método Energia-Momentum” (*Energy-Momentum Method*) introduzido por Simo e Tarnow (1992) originalmente para problemas de meio contínuo e posteriormente aplicado a outros casos (ver Simo et al. (1995) e Simo e Tarnow (1992)). Esse método resulta de uma modificação do algoritmo de equilíbrio no ponto médio do intervalo (*mid-point rule*). A conservação da energia e do momentum é alcançada de forma algorítmica tomando o tensor de tensões nesse ponto como a média das tensões calculadas no início e no fim do intervalo de tempo. Embora esse método possua ótimas características ele também apresenta a desvantagem de não incorporar a dissipação da energia associadas a modos de alta frequência. Por isso, em problemas com respostas de alta frequência, como nos carregamentos súbitos ou fenômenos de instabilidade, o método demanda passos de tempo bastante reduzidos para que respostas precisas sejam obtidas (Brank et al., 1998).

Em vista dos problemas associados às duas abordagens descritas acima novos algoritmos foram criados. A linha de desenvolvimento mais promissora parece ser a introdução de mecanismos numéricos para amortecimento das respostas de alta frequência em algoritmos originalmente construídos visando a conservação da energia do sistema. Exemplos dessa abordagem são o “Método de restrição de energia e momentum” (*Constraint energy momentum method*, Kuhl e Ramm (1996)) e o “Método Energia-Momentum Generalizado” (*Generalized Energy-Momentum Method*, Kuhl e Crisfield (1999)). O primeiro é construído pela imposição da conservação de energia e momentum sobre o algoritmo de integração  $\alpha$ -generalizado enquanto o segundo é obtido pela derivação do “Método Energia-Momentum” partindo do método  $\alpha$ -generalizado. Várias outras versões de algoritmos baseados nessas idéias se seguiram. Alguns exemplo são os trabalhos dedicados à análise dinâmica contemplando grandes rotações para estruturas de barras (como Crisfield et al. (1997) e Ibrahimbegovic e Mikdad (1998)) e cascas (como Bottasso et al. (2002) e Brank et al. (2003)).

O método de integração empregado nesse trabalho é o Procedimento Corrotacional de Conservação Aproximada de Energia (*Approximately Energy Conserving Corotational Procedure*–AECCP) descrito em Crisfield (1997). Esse método pode ser considerado uma versão particular do “Método Energia-Momentum” (Simo e Tarnow, 1992), pois aplica o mesmo princípio para realizar a análise dinâmica seguindo uma abordagem corrotacional. Ambos os métodos são uma versão modificada do método de equilíbrio no ponto médio do intervalo de tempo. Nesse casos, em vez de tensões no ponto médio calcula-se diretamente as forças internas do elemento de maneira modificada, tomando sua média entre os valores calculados no início e fim do intervalo de tempo. A aproximação do método está na forma como essas forças internas, calculadas segundo o referencial local do elemento, são transformadas para o referencial global da estrutura a partir da configuração no ponto médio, que é desconhecida. Em alguns casos particulares (Galvanetto e Crisfield (1996) para estruturas planas de barras e Zhong e Crisfield (1998) para um elemento de casca triangular) é possível definir essa transformação precisamente, mas ao preço da perda da generalidade do método. Conforme discutido no trabalho introdutório (Crisfield e Shi (1994)) esse método tem como grande vantagem o fato de ser independente da formulação do elemento finito, podendo ser facilmente aplicado à análise de elementos estruturais como barras e cascas e com diferentes relações constitutivas.

### 2.6.1 Interpolação temporal das variáveis nodais

O desenvolvimento da formulação abordada nesse trabalho utiliza as equações de Newmark como ponto de partida. Tais equações definem uma interpolação dos deslocamentos e velocidades entre dois instantes consecutivos  $n$  e  $n + 1$ , separados por um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Na sua forma mais geral as equações de Newmark definem o deslocamento ( $\mathbf{u}$ ) e a velocidade ( $\mathbf{v}$ ) de translação de um ponto no instante  $n + 1$  a partir dessas quantidades no instante  $n$  e da aceleração ( $\dot{\mathbf{v}}$ ):

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \{(1 - 2\beta)\dot{\mathbf{v}}_n + 2\beta\dot{\mathbf{v}}_{n+1}\} \quad (2.176a)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \{(1 - \gamma)\dot{\mathbf{v}}_n + \gamma\dot{\mathbf{v}}_{n+1}\} \quad (2.176b)$$

O emprego das Eq. (2.176) segundo o método da aceleração média ou regra trapezoidal (*average acceleration method* ou *trapezoidal rule*) é obtido através do ajuste das constantes

de Newmark aos valores  $\beta = 1/4$  e  $\gamma = 1/2$ , resultando nas seguintes relações

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{4} \{\dot{\mathbf{v}}_n + \dot{\mathbf{v}}_{n+1}\} \quad (2.177a)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{\mathbf{v}}_n + \dot{\mathbf{v}}_{n+1}\} \quad (2.177b)$$

Introduzindo a Eq. (2.177b) na Eq. (2.177a) e isolando os termos referentes à velocidade obtém-se

$$\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n = \frac{2}{\Delta t} \Delta \mathbf{u} \quad (2.178)$$

onde  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$

A aplicação do método de Newmark para a interpolação de rotação espacial e velocidade angular em um intervalo de tempo assume uma forma mais complexa do que a apresentada para as translações. Isso se deve às peculiaridades envolvidas no tratamento de grandes rotações no espaço, como visto na Seção 2.5 e no Apêndice A. Conforme discutido em de Simo e Tarnow (1994) e Crisfield (1997), só é possível somar vetores de velocidade angular ( $\mathbf{w}$ ) de um ponto relativos a diferentes instantes de tempo quando esses estiverem dados segundo uma representação material. Essas velocidades angulares são referidas a um sistema de eixos que acompanha o movimento do corpo (*body attached frame*), sendo as grandezas descritas na representação material identificadas ao longo do texto pelo sobrescrito ( $\tilde{\cdot}$ ). A relação entre a representação material e espacial de uma rotação ou velocidade angular é definida por meio do tensor de rotação do ponto ( $\mathbf{R}$ ) conforme as seguintes expressões (Crisfield, 1997)

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{R}^T \mathbf{w} \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\theta} \quad (2.179)$$

Em Crisfield et al. (1997) também são introduzidas as seguintes relações

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{R}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}^T \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.180)$$

Adotando essas considerações, a equação de Newmark segundo a regra trapezoidal pode ser escrita para a velocidade angular na representação material de maneira semelhante ao dado na Eq. (2.178) para as translações. Isso resulta na equação

$$\tilde{\mathbf{w}}_{n+1} + \tilde{\mathbf{w}}_n = \frac{2}{\Delta t} \Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.181)$$

onde  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  a representação material do vetor que determina a variação de  $\mathbf{R}_n$  para  $\mathbf{R}_{n+1}$ , na forma  $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}_n$ . Segundo Crisfield (1997) a relação entre  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  é dada por

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{R}_n^T \Delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}_{n+1}^T \Delta\boldsymbol{\theta} \quad (2.182)$$

com  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  obtido a partir de  $\mathbf{R}_n$  e  $\mathbf{R}_{n+1}$  empregando a seguinte sequência de operações

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{R}_{n+1}\mathbf{R}_n^T \quad (2.183a)$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \mathfrak{R}\mathcal{E}^{-1}[\mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\theta})] \quad (2.183b)$$

As Eq. (2.178) e Eq. (2.181) podem ser reunidas em uma única expressão dada na Eq. (2.184), onde são introduzidos o vetor de velocidades em um ponto  $a$  ( $\dot{\mathbf{d}}_a = \{\mathbf{v}_a \tilde{\mathbf{w}}_a\}^T$ ) e o vetor  $\Delta\tilde{\mathbf{p}}_a = \{\Delta\mathbf{u}_a \Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_a\}^T$ .

$$\dot{\mathbf{d}}_{a,n+1} + \dot{\mathbf{d}}_{a,n} = \frac{2}{\Delta t} \Delta\tilde{\mathbf{p}}_a \quad (2.184)$$

Para a formulação apresentada na próxima seção é conveniente definir a variação das velocidades em função da variação dos deslocamentos. Essa relação é obtida para os graus de liberdade de translação através da variação da Eq. (2.178), o que resulta na seguinte expressão

$$\delta\mathbf{v}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \delta\mathbf{u}_{n+1}, \quad (2.185)$$

onde se considera nula a variação de termos no instante  $n$ . Uma expressão similar para rotação é obtida por Crisfield (1997) através da variação da Eq. (2.181). Levando em conta a Eq. (2.182) e a relação entre  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  dada na Seção A.2 obtém-se

$$\delta\tilde{\mathbf{w}}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{R}_n^T \delta(\Delta\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{R}_n^T \delta\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(\Delta\boldsymbol{\theta}) \delta\boldsymbol{\omega}_{n+1} \quad (2.186)$$

A matriz  $\mathbf{H}(\Delta\boldsymbol{\theta})$  é calculada conforme a Eq. (A.24), substituindo  $\boldsymbol{\theta}$  por  $\Delta\boldsymbol{\theta}$ .

Para facilitar a notação as Eq. (2.185) e Eq. (2.186) são reunidas para os  $N^e$  nós de um elemento na forma

$$\delta\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{R}_{e,n}^T \mathbf{H}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \delta\mathbf{d}_{n+1} \quad (2.187)$$

onde  $\dot{\mathbf{d}}_n = \{\dot{\mathbf{d}}_{1,n} \cdots \dot{\mathbf{d}}_{N^e,n}\}^T$  e  $\delta\mathbf{d}_n = \{\delta\mathbf{d}_{1,n} \cdots \delta\mathbf{d}_{N^e,n}\}^T$  com  $\delta\mathbf{d}_{a,n} = \{\delta\mathbf{u}_{a,n} \delta\boldsymbol{\omega}_{a,n}\}^T$ .

As demais matrizes utilizadas na expressão consistem no agrupamento de  $\mathbf{R}_n$  e  $\mathbf{H}(\Delta\boldsymbol{\theta})$  de cada nó do elemento na forma de matrizes bloco diagonal como segue

$$\mathbf{R}_{e,n} = \text{diag}[\mathbf{I}, \mathbf{R}_{1,n}, \cdots, \mathbf{I}, \mathbf{R}_{N^e,n}] \quad (2.188)$$

$$\mathbf{H}_{\Delta\theta} = \text{diag}[\mathbf{I}, \mathbf{H}(\Delta\theta_1), \dots, \mathbf{I}, \mathbf{H}(\Delta\theta_{N^e})] \quad (2.189)$$

Nas discussões que seguem faz-se necessária a variação de  $\mathbf{R}_{e,n+1}$  com relação aos deslocamentos nodais. Isso é obtido tomando  $\delta\mathbf{R}_a$  de cada nó, como na Eq. (A.23), tendo como resultado

$$\delta\mathbf{R}_{e,n+1} = \text{diag}[0, \text{spin}(\delta\omega_1), \dots, 0, \text{spin}(\delta\omega_N^e)]\mathbf{R}_{e,n+1} \quad (2.190)$$

## 2.6.2 Procedimento Corrotacional de Conservação Aproximada de Energia

Nas partes seguintes do texto são discutidos os aspectos teóricos e de implementação do Procedimento Corrotacional de Conservação Aproximada de Energia (AECCP), introduzido em Crisfield e Shi (1994) e posteriormente discutido em Crisfield (1997), Crisfield et al. (1997) e Zhong e Crisfield (1998). Como mencionado anteriormente o método em questão pode ser visto como um caso particular do “Método Energia-Momentum” (Simo e Tarnow, 1992) desenvolvido sob uma descrição corrotacional. Assim como no “Método Energia-Momentum” o presente algoritmo obtém a conservação da energia do sistema pelo equilíbrio das forças no ponto médio do intervalo de termo. Nos dois casos as tensões ou forças internas no instante intermediário são dadas pela média das configurações inicial e final do intervalo e não pela configuração média interpolada. Uma das principais desvantagens desse algoritmo é o fato de levar a uma matriz tangente não simétrica. Essa também é uma característica do “Método Energia-Momentum” e de suas outras derivações (ver Kuhl e Crisfield (1999)). No entanto, conforme discutido em Ibrahimbegovic e Mikdad (1998), a não simetria do operador tangente é uma característica inevitável de qualquer formulação dinâmica que contempla graus de liberdade de rotação irrestrita no espaço, não importando a forma de representação de rotações empregada.

A formulação do método é baseada na condição de equilíbrio entre forças internas, externas e inerciais no ponto médio do intervalo de tempo Crisfield e Shi (1994) (se enquadrando na classe de *mid-point procedure*). A diferença básica entre os algoritmos baseados no equilíbrio no ponto final e algoritmos de equilíbrio no ponto intermediário é que o primeiro impõe o equilíbrio dinâmico em ponto discretos no tempo enquanto o segundo iguala a mudança do momentum total do corpo ao impulso decorrente da ação de forças externas

durante um intervalo de tempo Crisfield et al. (1997).

O equilíbrio no ponto intermediário do intervalo de tempo é dado pela relação entre as forças inerciais, internas e externas,  $\mathbf{f}_{mas,m}$ ,  $\mathbf{f}_{i,m}$  e  $\mathbf{f}_{e,m}$ , respectivamente, avaliadas nesse ponto médio, como designa o subíndice  $m = n + 1/2$ .

$$\mathbf{f}_{mas,m} + \mathbf{f}_{i,m} = \mathbf{f}_{e,m} \quad (2.191)$$

Os vetores de forças nodais  $\mathbf{f}_{mas,m}$ ,  $\mathbf{f}_{i,m}$  e  $\mathbf{f}_{e,m}$  são definidos de forma que o produto entre cada um deles e o vetor de incremento de deslocamentos nodais  $\Delta \mathbf{d}$  resulte na variação da energia cinética ( $\Delta \phi^k$ ), da energia de deformação interna ( $\Delta \phi^i$ ) e da energia introduzida no sistema devido à ação das forças externas ( $\Delta \phi^e$ ), respectivamente, como ilustra a Eq. (2.192)

$$(\mathbf{f}_{mas,m}^T + \mathbf{f}_{i,m}^T - \mathbf{f}_{e,m}^T) \Delta \mathbf{d} = \Delta \phi^k + \Delta \phi^i + \Delta \phi^e = 0 \quad (2.192)$$

Essa equação também pode ser expressa conforme a Eq. (2.193c). Para tanto são utilizados o vetor de forças desequilibradas no ponto médio ( $\mathbf{g}_m$ ), introduzindo o na Eq. (2.193a), e a variação total de energia do sistema ( $\Delta \phi^{total}$ ), dada para um intervalo de tempo na Eq. (2.193b).

$$\mathbf{g}_m = \mathbf{f}_{mas,m} + \mathbf{f}_{i,m} - \mathbf{f}_{e,m} \quad (2.193a)$$

$$\Delta \phi^{total} = \Delta \phi^k + \Delta \phi^i + \Delta \phi^e \quad (2.193b)$$

$$\mathbf{g}_m^T \Delta \mathbf{d} = \Delta \phi^{total} \quad (2.193c)$$

Conforme apresentado por Crisfield (1997) a variação da energia cinética no intervalo de tempo pode ser obtida através da seguinte relação

$$\Delta \phi^k = \phi_{n+1}^k - \phi_n^k = \mathbf{f}_{mas,m}^T \Delta \mathbf{d} \quad (2.194)$$

A definição das forças inerciais é obtida através do método dos elementos finitos como o produto entre a matriz de massa e o vetor de aceleração, que nesse caso é computado para o instante de tempo médio do intervalo. Usando a equação de Newmark associada à regra trapezoidal dada na Eq. (2.177b) e a sua extrapolação para a aceleração angular na descrição material, obtém-se uma expressão da aceleração no ponto médio da forma

$\ddot{\mathbf{d}}_m = (\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{d}}_n)/2 = (\dot{\mathbf{d}}_{n+1} - \dot{\mathbf{d}}_n)/\Delta t$ . O produto entre a matriz de massa do elemento e os vetores de velocidades nodais nos instantes  $n$  e  $n + 1$  resulta no vetor de forças  $\mathbf{f}_{mas,m}$  dado na Eq. (2.195). Nessa equação as matrizes  $\mathbf{R}_{e,n+1}$  e  $\mathbf{R}_{e,n}$  são utilizadas para realizar a transformação das parcelas correspondentes às rotações, que passam de uma representação material para uma representação espacial, garantindo a coerência com o vetor de incrementos nodais.

$$\mathbf{f}_{mas,m} = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} - \mathbf{R}_{e,n} \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_n] \quad (2.195)$$

Na implementação desse algoritmo as velocidades globais ( $\mathbf{v}$  e  $\tilde{\mathbf{w}}$ ) são interpoladas no domínio do elemento a partir de seus valores nodais, fazendo com que a matriz de massa do elemento seja obtida diretamente no referencial global. Essa abordagem difere da metodologia usual no MEF, que normalmente emprega a interpolação de quantidades referidas a um sistema local do elemento. Tal prática segue as recomendações apresentadas em Crisfield et al. (1997), Crisfield (1997) evitando complicações na formulação. Além disso, são utilizadas funções de interpolação lineares baseadas nas coordenadas de área do elemento triangular, de forma similar ao realizado por Zhong e Crisfield (1998). Isso se reflete em simplicidade no método, embora a matriz de massa resultante não seja consistente com os deslocamentos. A forma final da matriz de massa para o elemento triangular é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2M_{\mathbf{v}} & \mathbf{0} & M_{\mathbf{v}} & \mathbf{0} & M_{\mathbf{v}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2M_{\tilde{\mathbf{w}}} & \mathbf{0} & M_{\tilde{\mathbf{w}}} & \mathbf{0} & M_{\tilde{\mathbf{w}}} \\ M_{\mathbf{v}} & \mathbf{0} & 2M_{\mathbf{v}} & \mathbf{0} & M_{\mathbf{v}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{\tilde{\mathbf{w}}} & \mathbf{0} & 2M_{\tilde{\mathbf{w}}} & \mathbf{0} & M_{\tilde{\mathbf{w}}} \\ M_{\mathbf{v}} & \mathbf{0} & M_{\mathbf{v}} & \mathbf{0} & 2M_{\mathbf{v}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{\tilde{\mathbf{w}}} & \mathbf{0} & M_{\tilde{\mathbf{w}}} & \mathbf{0} & 2M_{\tilde{\mathbf{w}}} \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

onde

$$\mathbf{M}_{\mathbf{v}} = \left[ \frac{A}{12} \sum_{k=1}^n \rho_k (z_{k-1} - z_k) \right] \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{w}}} = \left[ \frac{A}{36} \sum_{k=1}^n \rho_k (z_{k-1}^3 - z_k^3) \right] \mathbf{I} \quad (2.197)$$

sendo  $\rho_k$  a massa específica do material constituinte da lâmina  $k$ , e  $z_k$  a posição de uma das  $n$  lâminas distribuídas ao longo da espessura total do material (que tem um valor  $h$  constante em cada elemento), conforme descrito na Seção 2.2.2. Assumindo que a massa específica seja constante em toda a espessura da casca, obtém-se as seguintes expressões simplificadas:  $\mathbf{M}_{\mathbf{v}} = \frac{\rho h A}{12} \mathbf{I}$  e  $\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{w}}} = \frac{\rho h^3 A}{144} \mathbf{I}$

A variação da energia interna decorrente das deformação da estrutura é expressa em termos do produto entre o vetor de forças internas no ponto médio do intervalo de tempo e o incremento dos deslocamentos. Essa relação é estabelecida inicialmente no referencial local do elemento e considerando apenas o componente deformacional dos deslocamentos.

$$\Delta\phi^i = \bar{\mathbf{f}}_{i,m}^T \Delta\bar{\mathbf{p}}_d \quad (2.198)$$

O ponto chave para o sucesso desse tipo de método é a definição do vetor de forças internas no ponto médio do intervalo. Conforme introduzido por Simo e Tarnow (1994) e por Crisfield e Shi (1994) (este seguindo a abordagem corrotacional), as forças internas nesse ponto não devem ser calculadas com base em um vetor de deslocamentos médio. Em vez disso deve-se tomar a média das forças internas no início e no fim do intervalo de tempo como

$$\bar{\mathbf{f}}_{i,m} = \frac{\bar{\mathbf{f}}_{i,n+1} + \bar{\mathbf{f}}_{i,n}}{2} \quad (2.199)$$

Dessa forma evita-se o aparecimento de forças internas devido a deformações artificiais decorrentes de configurações inexistentes no ponto médio interpolado entre as configurações de início e fim do intervalo de tempo. Esse fenômeno é ilustrado de forma simples e intuitiva em Crisfield e Shi (1994) utilizando um pêndulo similar ao apresentado na Fig. 2.21. Observa-se que quando forças internas são calculadas com base na configuração intermediária oriunda de uma interpolação linear dos deslocamentos no intervalo de tempo podem surgir erros devidos à deformação axial artificial do pêndulo .

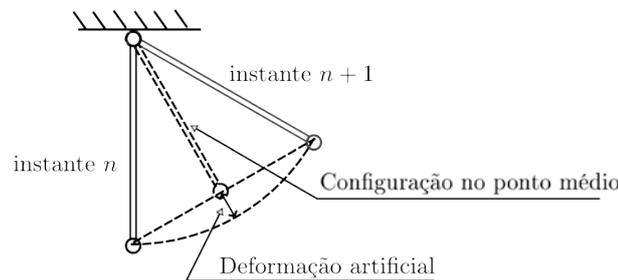


Figura 2.21: Deformação artificial na configuração intermediária

A expressão da variação de energia interna do sistema em termos das quantidades globais do problema é estabelecida pela definição da relação entre  $\Delta\bar{\mathbf{p}}_d$  em  $\Delta\mathbf{d}$ . Para tanto toma-se a expansão em série de Taylor de  $\bar{\mathbf{p}}_{d,n}$  a frente na Eq. (2.200a) e a expansão em série

de Taylor de  $\bar{\mathbf{p}}_{d,n+1}$  para trás na Eq. (2.200b).

$$\bar{\mathbf{p}}_{d,n+1} = \bar{\mathbf{p}}_{d,n} + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_d}{\partial \mathbf{d}} \right|_n \Delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{p}}_{d,n} + \mathbf{\Lambda}_n \Delta \mathbf{d} \quad (2.200a)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_{d,n} = \bar{\mathbf{p}}_{d,n+1} - \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_d}{\partial \mathbf{d}} \right|_{n+1} \Delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{p}}_{d,n+1} - \mathbf{\Lambda}_{n+1} \Delta \mathbf{d} \quad (2.200b)$$

A partir de cada uma das Eq. (2.200) origina-se uma definição de  $\Delta \bar{\mathbf{p}}_d$  em termos de  $\Delta \mathbf{d}$ . Uma aproximação melhor é alcançada com a média desses dois valores, o que é empregado para definir a relação dada na Eq. (2.201). Essa é uma aproximação satisfatória para  $\Delta \bar{\mathbf{p}}_d$ , garantindo a conservação aproximada de energia na formulação corrotacional empregada (Crisfield, 1997).

$$\Delta \bar{\mathbf{p}}_d \cong \left( \frac{\mathbf{\Lambda}_{n+1} + \mathbf{\Lambda}_n}{2} \right) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{\Lambda}_m \Delta \mathbf{d} \quad (2.201)$$

Tal relação utiliza o operador corrotacional (descrito na Seção 2.5.1) avaliado no ponto médio do intervalo de tempo  $\mathbf{\Lambda}_m$ , o que é obtido pela média desse operador nos instantes  $n$  e  $n + 1$  como segue

$$\mathbf{\Lambda}_m = \frac{\mathbf{\Lambda}_{n+1} + \mathbf{\Lambda}_n}{2} \quad (2.202)$$

Introduzindo a Eq. (2.201) na Eq. (2.198) obtém-se

$$\Delta \phi^i = \bar{\mathbf{f}}_{i,m}^T \mathbf{\Lambda}_m \Delta \mathbf{d} = [\mathbf{\Lambda}_m^T \bar{\mathbf{f}}_{i,m}]^T \Delta \mathbf{d} \quad (2.203)$$

e com as forças internas no referencial global ( $\mathbf{f}_{i,m}$ ) definidas por

$$\mathbf{f}_{i,m} = \mathbf{\Lambda}_m^T \bar{\mathbf{f}}_{i,m} \quad (2.204)$$

chega-se à seguinte expressão para a variação da energia interna da estrutura durante o intervalo  $\Delta t$

$$\Delta \phi^i = \mathbf{f}_{i,m}^T \Delta \mathbf{d} \quad (2.205)$$

A variação da energia introduzida no sistema pela ação das forças externas é dada diretamente pelo produto entre o vetor de forças externas no ponto médio do intervalo de tempo e o incremento de deslocamentos, conforme segue

$$\Delta \phi^e = -\mathbf{f}_{e,m}^T \Delta \mathbf{d} \quad (2.206)$$

sendo o vetor  $\mathbf{f}_{e,m}$  calculado como

$$\mathbf{f}_{e,m} = \frac{\mathbf{f}_{e,n+1} + \mathbf{f}_{e,n}}{2} \quad (2.207)$$

Para a construção do algoritmo de integração do problema dinâmico é preciso determinar a relação entre a variação das força atuantes no ponto médio do incremento de tempo e a variação dos deslocamentos. O processo iterativo para obtenção dos deslocamentos no fim de cada passo de tempo será apresentado a partir desses resultados. Nas deduções a seguir admite-se que apenas quantidades no tempo  $n + 1$  possam variar, uma vez que as quantidades no instante  $n$  são conhecidas em cada passo da integração.

O primeiro termo abordado é o componente de força inercial definido pela Eq. (2.195). A variação desse termo resulta em duas parcelas mostrados no lado direito da equação

$$\delta \mathbf{f}_{mas,m} = \frac{1}{\Delta t} [\delta \mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \delta \dot{\mathbf{d}}_{n+1}] \quad (2.208)$$

Tomando a primeira parcela da Eq. (2.208) e introduzindo a Eq. (2.190) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \delta \mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \mathbf{diag}[\mathbf{0}, \mathbf{spin}(\delta \boldsymbol{\omega}_1), \dots, \mathbf{0}, \mathbf{spin}(\delta \boldsymbol{\omega}_N^e)] \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} \right) \\ &= \mathbf{diag}[\mathbf{0}, -\mathbf{spin}(\mathbf{m}_{mas,1}^*), \dots, \mathbf{0}, -\mathbf{spin}(\mathbf{m}_{mas,Ne}^*)] \delta \mathbf{d}_{n+1} \end{aligned} \quad (2.209)$$

onde foram utilizados os componentes de momento do vetor auxiliar de forças inerciais dado na Eq. (2.210) e efetuadas trocas do tipo  $\mathbf{spin}(\delta \boldsymbol{\omega}_1) \mathbf{m}_{mas,1}^* = -\mathbf{spin}(\mathbf{m}_{mas,1}^*) \delta \boldsymbol{\omega}_1$ .

$$\mathbf{f}_{mas,n+1}^* \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_{1,n+1}^* \\ \mathbf{m}_{1,n+1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{Ne,n+1}^* \\ \mathbf{m}_{Ne,n+1}^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} \quad (2.210)$$

Disso resulta a seguinte expressão para primeira parcela

$$\frac{1}{\Delta t} \delta \mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{K}_{mas,1} \delta \mathbf{d}_{n+1} \quad (2.211)$$

sendo o componente da matriz tangente devido aos efeitos inerciais  $\mathbf{K}_{mas,1}$  dado por

$$\mathbf{K}_{mas,1} = \mathbf{diag}[\mathbf{0}, -\mathbf{spin}(\mathbf{m}_{1,n+1}^*), \dots, \mathbf{0}, -\mathbf{spin}(\mathbf{m}_{Ne,n+1}^*)] \quad (2.212)$$

A segunda parcela da Eq. (2.208) é apresentada de forma semelhante utilizando um segundo componente da matriz tangente devido aos efeitos inerciais ( $\mathbf{K}_{mas,2}$ )

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \delta \dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{K}_{mas,2} \delta \mathbf{d}_{n+1} \quad (2.213)$$

com  $\mathbf{K}_{mas,2}$  tomando a forma dada na Eq. (2.214), na qual foi utilizada a Eq. (2.187).

$$\mathbf{K}_{mas,2} = \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \mathbf{R}_{e,n}^T \mathbf{H}_{\Delta\theta} \quad (2.214)$$

A partir das Eq. (2.211) e Eq. (2.213) obtém-se a seguinte equação, utilizada como alternativa à Eq. (2.208)

$$\delta \mathbf{f}_{mas,m} = (\mathbf{K}_{mas,1} + \mathbf{K}_{mas,2}) \delta \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{K}_{mas} \delta \mathbf{d}_{n+1} \quad (2.215)$$

A variação do vetor médio de forças internas, dado pela Eq. (2.204), também é expresso em dois componentes como mostra a Eq. (2.216).

$$\delta \mathbf{f}_{i,m} = \mathbf{\Lambda}_m^T \delta \bar{\mathbf{f}}_{i,m} + \delta \mathbf{\Lambda}_m^T \bar{\mathbf{f}}_{i,m} = \mathbf{\Lambda}_m^T \frac{\delta \bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{2} + \frac{\delta \mathbf{\Lambda}_{n+1}^T}{2} \bar{\mathbf{f}}_{i,m} \quad (2.216)$$

O termo  $\delta \bar{\mathbf{f}}_{n+1}$  pode ser escrito em função da variação dos deslocamentos nodais globais utilizando os conceitos descrito na Seção 2.5.1, o que resulta em

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \bar{\mathbf{K}} \delta \bar{\mathbf{p}}_{d,n+1} = \bar{\mathbf{K}} \mathbf{\Lambda}_{n+1} \delta \mathbf{d} \quad (2.217)$$

Introduzindo essa relação na Eq. (2.216) e tratando o termo  $\frac{\delta \mathbf{\Lambda}_{n+1}^T}{2} \bar{\mathbf{f}}_{i,m}$  de forma semelhante ao realizado na Eq. (2.156) obtém-se

$$\delta \mathbf{f}_{i,m} = \frac{1}{2} [\mathbf{\Lambda}_m^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{\Lambda}_{n+1} + \mathbf{K}_\sigma(\bar{\mathbf{f}}_{i,m})] \delta \mathbf{d} \quad (2.218)$$

de onde sai a matriz tangente

$$\mathbf{K}_{i,m} = \frac{1}{2} [\mathbf{\Lambda}_m^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{\Lambda}_{n+1} + \mathbf{K}_\sigma(\bar{\mathbf{f}}_{i,m})] \quad (2.219)$$

Essa matriz possui uma parcela de rigidez material ( $\frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}_m^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{\Lambda}_{n+1}$ ), obtida utilizando a matriz de rigidez local do elemento, calculada conforme dado da Seção 2.3, e duas matrizes  $\mathbf{\Lambda}$  avaliadas no instante final e no ponto médio do intervalo de tempo. Adicionalmente há uma parcela geométrica ( $\mathbf{K}_\sigma$ ), cujos componentes são calculados conforme apresentado na Seção 2.5.1. Porém, nesse caso o vetor  $\bar{\mathbf{f}}_{i,m}$  substitui  $\bar{\mathbf{f}}$  naquelas equações e as demais matrizes do método EICR são calculadas tomando a configuração da estrutura no instante  $n + 1$ .

As forças externas atuantes sobre a estrutura normalmente não dependem dos deslocamentos e portanto não contribuem para a formação da rigidez tangente. Porém,

essa consideração não é válida quando há forças dependentes do deslocamento ( $\mathbf{f}_{edd}$ ) agindo sobre o corpo. O incremento de energia externa devido a essas forças é expresso utilizando quantidades no sistema local do elemento como

$$\Delta\phi^{edd} = \bar{\mathbf{f}}_{edd,m}^T \Delta\bar{\mathbf{p}} \quad (2.220)$$

sendo  $\bar{\mathbf{f}}_{edd,m} = \frac{\bar{\mathbf{f}}_{edd,n+1} + \bar{\mathbf{f}}_{edd,n}}{2}$ . Nesse caso são considerados tanto os deslocamentos deformacionais quanto os que produzem movimento de corpo rígido.

Aplicando sobre os deslocamentos  $\Delta\bar{\mathbf{p}}$  um tratamento semelhante ao realizado nos deslocamentos  $\Delta\bar{\mathbf{p}}_d$ , cujo resultado final é dado na Eq. (2.201), obtém-se a relação

$$\Delta\bar{\mathbf{p}} \cong \left( \frac{\bar{\mathbf{H}}_{n+1}\mathbf{T}_{n+1} + \bar{\mathbf{H}}_n\mathbf{T}_n}{2} \right) \Delta\mathbf{d} \quad (2.221)$$

A substituição da Eq. (2.221) na Eq. (2.220) resulta na seguinte definição de  $\Delta\phi^{edd}$  em termos de quantidades globais

$$\Delta\phi^{edd} = \bar{\mathbf{f}}_{edd,m}^T \left( \frac{\bar{\mathbf{H}}_{n+1}\mathbf{T}_{n+1} + \bar{\mathbf{H}}_n\mathbf{T}_n}{2} \right) \Delta\mathbf{d} = \mathbf{f}_{edd,m}^T \Delta\mathbf{d} \quad (2.222)$$

onde

$$\mathbf{f}_{edd,m} = \left( \frac{\bar{\mathbf{H}}_{n+1}\mathbf{T}_{n+1} + \bar{\mathbf{H}}_n\mathbf{T}_n}{2} \right)^T \bar{\mathbf{f}}_{edd,m} \quad (2.223)$$

Assim como para os demais componentes de força no ponto médio, é preciso definir a variação de  $\mathbf{f}_{edd,m}$  com relação aos deslocamentos globais. Para tanto é realizada a variação da Eq. (2.223), o que resulta na seguinte equação

$$\delta\mathbf{f}_{edd,m} = \left( \frac{\bar{\mathbf{H}}_{n+1}\mathbf{T}_{n+1} + \bar{\mathbf{H}}_n\mathbf{T}_n}{2} \right)^T \delta\bar{\mathbf{f}}_{edd,m} + \left( \frac{\delta\mathbf{T}_{n+1}^T \bar{\mathbf{H}}_{n+1}^T}{2} + \frac{\mathbf{T}_{n+1}^T \delta\bar{\mathbf{H}}_{n+1}^T}{2} \right) \bar{\mathbf{f}}_{edd,m} \quad (2.224)$$

Considerando que essas forças são constantes em relação ao referencial do elemento (conforme abordagem dada na Seção 2.5.1) tem-se que o primeiro termo do lado direito da Eq. (2.224) é nulo. O tratamento do segundo termo segue o mesmo procedimento apresentado na Seção 2.5.1, diferindo apenas na utilização do vetor intermediário  $\bar{\mathbf{f}}_{edd,m}$  e no cálculo das matrizes da formulação EICR utilizando a configuração do instante  $n + 1$ . A partir dessas considerações sobre a Eq. (2.224) tem-se

$$\delta\mathbf{f}_{edd,m} = \frac{1}{2} \left( [\mathbf{K}_{GR,edd}(\bar{\mathbf{f}}_{edd,m}) + \mathbf{K}_{GM,edd}(\bar{\mathbf{f}}_{edd,m})] \delta\mathbf{d} \right) \quad (2.225)$$

## Procedimento para solução numérica

O procedimento para solução numérica do problema dinâmico não linear em um intervalo de tempo entre os instantes  $n$  e  $n + 1$  é construído com base em duas etapas (Crisfield, 1997). Essa divisão decorre do fato de que todas as deduções acima consideram que a configuração da estrutura no instante  $n + 1$  é conhecida, mesmo que ainda desequilibrada (sem convergência no passo de tempo). Dessa forma, é introduzida uma primeira etapa denominada *preditor* (*predictor*) cujo objetivo é gerar uma estimativa inicial da configuração estrutural em  $n + 1$ . Depois de obtida essa primeira estimativa são realizadas iterações, denominadas de etapas do corretor (*corrector*), visando o ajuste dos deslocamentos. As iterações se repetem até que uma das condições dadas na Eq. (2.191) ou Eq. (2.192) sejam satisfeitas dentro de um limite de tolerância.

### Preditor

A estimativa inicial do vetor de forças internas no ponto médio do intervalo de tempo atual, entre os instantes  $n$  e  $n + 1$ , é obtida por uma expansão em série de Taylor do vetor de forças internas no ponto médio do passo de tempo anterior ( $\mathbf{f}_{i,m-}$ ), conforme mostra a Eq. (2.226). O subíndice  $m-$  é usado nas discussões que seguem para indicar quantidades avaliadas no ponto médio do passo de tempo anterior, entre os instantes  $n - 1$  e  $n$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{i,m} &= \mathbf{f}_{i,m-} + \frac{\partial \mathbf{f}_{i,m-}}{\partial \mathbf{d}_n} \Delta \mathbf{d} \\ &= \mathbf{f}_{i,m-} + \mathbf{K}_{m-} \Delta \mathbf{d}\end{aligned}\tag{2.226}$$

Nesse contexto, a aplicação do preditor requer o conhecimento de  $\mathbf{f}_{i,m-}$  e  $\mathbf{K}_{m-}$  cálculos na última iteração do passo de tempo anterior. Como primeira estimativa assume-se que os deslocamentos entre os instantes  $n$  e  $n + 1$  sejam iguais aos calculados entre os instantes intermediários  $m-$  e  $m$ .

Para a estimativa do vetor  $\mathbf{f}_{mas,m}$  substitui-se o termo desconhecido ( $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}$ ) da Eq. (2.195) pela Eq. (2.184). Em seguida são aplicadas transformações no intuito de obter uma

expressão referida às variáveis globais de deslocamento.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{mas,m} &= \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_{n+1} - \mathbf{R}_{e,n} \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_n] \\
&= \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} (\frac{2}{\Delta t} \Delta \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{d}}_n) - \mathbf{R}_{e,n} \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_n] \\
&= \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} (\frac{2}{\Delta t} \mathbf{R}_{e,n}^T \mathbf{H}(\Delta \boldsymbol{\theta}) \Delta \mathbf{d} - \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_n) - \mathbf{R}_{e,n} \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_n] \\
&= \frac{2}{\Delta t^2} [\mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \mathbf{R}_{e,n}^T \mathbf{H}(\Delta \boldsymbol{\theta})] \Delta \mathbf{d} - \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{R}_{e,n+1} \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_n + \mathbf{R}_{e,n} \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_n]
\end{aligned} \tag{2.227}$$

Considerando  $\mathbf{H}(\Delta \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I}$  quando  $\Delta \boldsymbol{\theta} = 0$  e tomando  $\mathbf{R}_{e,n+1} = \mathbf{R}_{e,n}$  tem-se

$$\mathbf{f}_{mas,m} = \mathbf{K}_{mas}^{\text{pr}} \Delta \mathbf{d} - \mathbf{f}_{mas,n}^* \tag{2.228}$$

com

$$\mathbf{K}_{mas} = \frac{2}{\Delta t^2} [\mathbf{R}_{e,n} \mathbf{M} \mathbf{R}_{e,n}^T] \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_{mas,n}^* = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{R}_{e,n} \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_n \tag{2.229}$$

Tomando as estimativas apresentadas acima e o vetor de forças externas no ponto médio é possível montar a equação inicial de equilíbrio do sistema como

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{mas,m} + \mathbf{f}_{i,m} &= \mathbf{f}_{e,m} \\
\mathbf{K}_{mas}^{\text{pr}} \Delta \mathbf{d} - \mathbf{f}_{mas,n}^* + \mathbf{f}_{i,m-} + \mathbf{K}_{m-} \Delta \mathbf{d} &= \mathbf{f}_{e,m} \\
(\mathbf{K}_{mas}^{\text{pr}} + \mathbf{K}_{m-}) \Delta \mathbf{d} &= \mathbf{f}_{mas,n}^* - \mathbf{f}_{i,m-} + \mathbf{f}_{e,m} \\
\mathbf{K}^{\text{pr}} \Delta \mathbf{d} &= \mathbf{g}^{\text{pr}}
\end{aligned} \tag{2.230}$$

de onde resulta a matriz tangente na etapa do predictor ( $\mathbf{K}^{\text{pr}} = \mathbf{K}_{mas}^{\text{pr}} + \mathbf{K}_{m-}$ ) e o vetor de forças desequilibradas ( $\mathbf{g}^{\text{pr}} = \mathbf{f}_{mas,n}^* - \mathbf{f}_{i,m-} + \mathbf{f}_{e,m}$ ). O vetor  $\Delta \mathbf{d}$  é obtido pela solução desse sistema de equações, sendo posteriormente utilizado na estimativa inicial dos deslocamentos e das velocidades de cada nó  $a$  no instante  $n + 1$ . Para tanto aplica-se um incremento sobre as translações e rotações nodais na configuração  $n$  conforme as operações

$$\mathbf{u}_{a,n+1} = \mathbf{u}_{a,n} + \Delta \mathbf{u}_a \tag{2.231a}$$

$$\mathbf{R}_{a,n+1} = \Delta \mathbf{R}_a \mathbf{R}_{a,n} \quad \text{com} \quad \Delta \mathbf{R}_a = \mathfrak{R}\mathcal{E}[\Delta \boldsymbol{\omega}_a] \tag{2.231b}$$

enquanto que a estimativa inicial das velocidades é definida conforme as Eq. (2.181) e Eq. (2.178), resultando nas seguintes operações

$$\mathbf{v}_{a,n+1} = \frac{2}{\Delta t} \Delta \mathbf{u}_a - \mathbf{v}_{a,n} \tag{2.232a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{a,n+1} = \frac{2}{\Delta t} \Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_a - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{a,n} \tag{2.232b}$$

## Corretor

Como mencionado anteriormente, a etapa do preditor fornece apenas uma estimativa da configuração estrutural no instante  $n + 1$ . É improvável que as forças calculadas a partir dessa configuração se encontrem em equilíbrio. Assim, uma etapa de correção é introduzida no intuito de buscar um vetor de forças desequilibradas cada vez mais próximo de zero. Essa busca se dá por um processo iterativo no qual são acrescentadas sucessivas variações ao vetor  $\mathbf{g}_m$ , como descreve a Eq. (2.233).

$$\mathbf{g}_m^{i+1} = \mathbf{g}_m^i + \delta\mathbf{g}_m^i \quad (2.233)$$

A definição  $\delta\mathbf{g}_m^i$  foi dada anteriormente em termos da variação de seus componentes ( $\mathbf{f}_{mas,m}$ ,  $\mathbf{f}_{i,m}$  e  $\mathbf{f}_{e,m}$ ). Usando tais definições obtém-se a forma alternativa da Eq. (2.233) em termos da variação dos deslocamentos

$$\mathbf{g}_m^{i+1} = \mathbf{g}_m^i + (\mathbf{K}_{mas,m} + \mathbf{K}_{i,m})\delta\mathbf{d} \quad (2.234)$$

Como o objetivo do processo iterativo é alcançar um vetor  $\mathbf{g}_m^{i+1} = 0$ , a Eq. (2.234) é igualada a zero, o que resulta em

$$\mathbf{K}_m\delta\mathbf{d} = -\mathbf{g}_m^i, \quad (2.235)$$

O incremento de deslocamentos ( $\delta\mathbf{d}$ ) na iteração  $i + 1$  é obtido através da solução do sistema global dado na Eq. (2.235). A atualização dos deslocamentos de translação e rotação de um nó  $a$  é realizada pelas seguintes operações

$$\mathbf{u}_{a,n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{a,n+1}^i + \delta\mathbf{u}_a \quad (2.236a)$$

$$\mathbf{R}_{a,n+1}^{i+1} = \delta\mathbf{R}\mathbf{R}_{a,n+1}^i \quad \text{com} \quad \delta\mathbf{R} = \mathfrak{R}\mathcal{E}[\delta\boldsymbol{\omega}_a] \quad (2.236b)$$

Os vetores de velocidades nodais são dados a cada iteração por

$$\mathbf{v}_{a,n+1}^{i+1} = \mathbf{v}_{a,n+1}^i + \frac{2}{\Delta t}\delta\mathbf{u}_a \quad (2.237a)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{a,n+1}^{i+1} = \frac{2}{\Delta t}\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_a^{i+1} - \tilde{\mathbf{w}}_{a,n} \quad (2.237b)$$

sendo  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_a^{i+1}$  o incremento total de rotação do nó  $a$  entre o instante  $n$  e  $n + 1$ , calculado conforme as Eq. (2.182) e Eq. (2.183b) utilizando para tanto o tensor  $\mathbf{R}_{a,n+1}^{i+1}$  obtido na iteração.

## Implementação do algoritmo de solução

A seguir são apresentadas as sequências de operações para as etapas do preditor e corretor realizadas em cada passo de tempo avançado pelo método de integração apresentado. Considera-se que existe uma variação temporal  $\Delta t$  entre os instantes  $n$  e  $n + 1$ . Todas as variáveis são conhecidas no instante  $n$ , bem como a parcela de rigidez  $\mathbf{K}_{i,m-}$ , o vetor de forças internas  $\mathbf{f}_{i,m-}$  do intervalo de tempo anterior e o vetor de forças externas no instante  $n + 1$  ( $\mathbf{f}_{e,n+1}^g$ ). As demais variáveis são todas zeradas no início da etapa preditor.

### I) Preditor:

- 1) Laço sobre os elementos
  - a) Calcular a Matriz de Massa  $\mathbf{M}$ ;
  - b) Calcular a matriz  $\mathbf{K}_{mas}^{pr}$  e o vetor  $\mathbf{f}_{mas,n}^*$ , Eq. (2.229);
  - c) Adicionar  $\mathbf{K}_{mas}^{pr}$  e  $\mathbf{f}_{mas,n}^*$  aos seus correspondentes globais  $\mathbf{K}_{mas}^g$  e  $\mathbf{f}_{mas,m}^g$ ;
- 2) Formação e solução do sistema global de equações
  - a) Formar a rigidez tangente:  $\mathbf{K}_m^g = \mathbf{K}_{i,m-}^g + \mathbf{K}_{mas}^g$ ;
  - b) Formar o vetor de forças desequilibradas:  $\mathbf{g}^{pr} = \mathbf{f}_{mas,n}^g - \mathbf{f}_{i,m-}^g + \mathbf{f}_{e,m}^g$ ;
  - c) Aplicar condições de contorno em  $\mathbf{K}_m^g$  e  $\mathbf{g}^{pr}$ ;
  - d) Obter  $\Delta \mathbf{d}^g$  pela solução de  $\mathbf{K}_m^g \Delta \mathbf{d}^g = \mathbf{g}^{pr}$ ;
- 3) Atualização dos deslocamentos e velocidades em cada nó  $a$ 
  - Incrementar deslocamentos  $\mathbf{u}_{a,n+1}^0$  e  $\mathbf{R}_{a,n+1}^0$  com Eq. (2.231);
  - Incrementar velocidades  $\mathbf{v}_{a,n+1}^0$  e  $\mathbf{w}_{a,n+1}^0$  com Eq. (2.232);

### II) Corretor:

- 1) Cálculos realizados em cada elemento da malha:
  - a) Pré-processamento para obtenção das coordenadas nodais da parcela deformacional dos deslocamentos no referencial local do elemento:
    - Obter posição dos nós e do centróide do elemento nas configurações  $\mathcal{C}^0$ ,  $\mathcal{C}_n^D$  e  $\mathcal{C}_{n+1}^D$ ;
    - Obter  $\mathbf{T}_n$ ,  $\mathbf{T}_{n+1}$  e  $\mathbf{T}^0$ , usando as Eq. (2.104) e Eq. (2.97), respectivamente;
    - Obter a posição dos nó no referencial local  $\bar{\mathbf{x}}_{a,n}$  e  $\bar{\mathbf{x}}_{a,n+1}$  com a Eq. (2.119);
    - Obter as translações deformacionais  $\bar{\mathbf{u}}_{da,n}$  e  $\bar{\mathbf{u}}_{da,n+1}$  pela Eq. (2.125);
    - Obter o tensor de rotações deformacionais  $\bar{\mathbf{R}}_{da,n}$  e  $\bar{\mathbf{R}}_{da,n+1}$  com a Eq. (2.126c)
    - Obter as rotações deformacionais  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da,n} = \mathfrak{R}\mathcal{E}^{-1}[\bar{\mathbf{R}}_{da,n}]$  e  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da,n+1} = \mathfrak{R}\mathcal{E}^{-1}[\bar{\mathbf{R}}_{da,n+1}]$ , conforme Seção A.1;

- b) Calcular quantidades locais do elemento pela formulação linear local:
- Calcular a matrizes de rigidez local linear  $\bar{\mathbf{K}}$  e de massa  $\mathbf{M}$ ;
  - Calcular as forças internas locais  $\bar{\mathbf{f}}_{i,n}$  e  $\bar{\mathbf{f}}_{i,n+1}$  (Eq. (2.128) – elástico linear);
- c) Pós-processamento das quantidades calculadas localmente no elemento para contribuição ao sistema global de equações:
- Calcular as matrizes da formulação EICR para formar  $\mathbf{\Lambda}_n$  e  $\mathbf{\Lambda}_{n+1}$ ;
  - Calcular as forças internas  $\mathbf{f}_{i,m}$ , usando a Eq. (2.204);
  - Calcular a matriz e rigidez estática  $\mathbf{K}_{i,m}$ , usando a Eq. (2.219);
  - Calcular as forças inerciais  $\mathbf{f}_{mas,m}$ , usando a Eq. (2.195);
  - Calcular a matriz e rigidez de massa  $\mathbf{K}_{mas,m}$ , usando a Eq. (2.214);
  - Adicionar  $\mathbf{f}_{i,m}$ ,  $\mathbf{f}_{mas,m}$ ,  $\mathbf{K}_{i,m}$  e  $\mathbf{K}_{mas,m}$  aos arrays globais  $\mathbf{f}_i^g$ ,  $\mathbf{f}_{mas}^g$ ,  $\mathbf{K}_{i,m}^g$  e  $\mathbf{K}_{mas,m}^g$ ;
- 2) Verificação da convergência
- Formar o vetor de forças desequilibradas:  $\mathbf{g}^{co} = \mathbf{f}_{mas,n}^g + \mathbf{f}_{i,m}^g - \mathbf{f}_{e,m}^g$  ;
  - Calcular os indicadores de convergência segundo condições:  
 $\frac{\|\mathbf{g}^{co}\|}{\|\mathbf{g}^{pr}\|} \leq tol_g$  ou  $\mathbf{g}^{co T} \Delta \mathbf{d} \leq tol_\phi$ ;
  - Se for verificada convergência finalizar o passo de tempo;
  - Caso contrário continuar;
- 3) Formação e solução do sistema global de equações
- Formar a rigidez tangente:  $\mathbf{K}_m^g = \mathbf{K}_{i,m}^g + \mathbf{K}_{mas}^g$  ;
  - Aplicar condições de contorno em  $\mathbf{K}_m^g$  e  $\mathbf{g}^{co}$ ;
  - Obter  $\delta \mathbf{d}^g$  pela solução do sistema linear  $\mathbf{K}_m^g \delta \mathbf{d}^g = \mathbf{g}^{co}$ ;
- 4) Atualização dos deslocamentos e velocidades em cada nó  $a$
- Incrementar deslocamentos  $\mathbf{u}_{a,n+1}^{i+1}$  e  $\mathbf{R}_{a,n+1}^{i+1}$  com Eq. (2.236);
  - Incrementar velocidades  $\mathbf{v}_{a,n+1}^{i+1}$  e  $\mathbf{w}_{a,n+1}^{i+1}$  com Eq. (2.237);
- 5) Iniciar nova iteração do corretor

---

## Capítulo 3

# Simulação numérica de escoamentos compressíveis em malhas móveis

Nesse capítulo são apresentados os aspectos teóricos do algoritmo empregado para a simulação de escoamentos compressíveis. A Seção 3.1 trata das equações governantes desse tipo de escoamento. Elas são derivadas de maneira tradicional seguindo uma formulação euleriana. No entanto, o algoritmo descrito aqui deverá ser empregado na análise de problemas de interação fluido-estrutura, mais especificamente em problemas aeroelásticos. Por isso, as equações governantes do escoamentos são reescritas segundo uma descrição lagrangiana-euleriana arbitrária (ALE). Essa modificação permite a simulação de escoamentos em malhas que se movem, adaptando-se às modificações de seu contorno, definido nesse trabalho por corpos flexíveis.

A discretização temporal e espacial das equações que descrevem o escoamento é realizada por meio do método explícito de Taylor-Galerkin de dois passos. As questões relativas à modelagem numérica do escoamento são discutidas na Seção 3.2. Por fim, é apresentado o algoritmo utilizado para descrever o movimento da malha do fluido.

### 3.1 Equações governantes do escoamento

Nessa seção são apresentadas as equações gerais que descrevem a dinâmica de fluidos viscosos e compressíveis em regime transiente. Os termos de fonte não estão presentes nas equações pois esses não serão considerados nos problemas abordados nesse trabalho.

---

As variáveis do escoamento são a massa específica ( $\rho$ ), a energia específica ( $e$ ) e os componentes da velocidade ( $v_i$ ) em cada direção  $i = 1,2,3$ . Essas variáveis apresentam uma distribuição espacial, conforme um sistema cartesiano com eixos<sup>1</sup>  $x_i$  nas direções  $i = 1,2,3$ , e uma variação no tempo ( $t$ ). Partindo de uma descrição euleriana e omitindo os termos de fonte obtém-se as seguintes equações para a descrição do escoamento:

a) Equação de conservação da massa (ou equação de continuidade):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

b) Equação de conservação de momentum:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.2)$$

c) Equação de conservação de energia:

$$\rho \frac{De}{Dt} + \frac{\partial(v_i p)}{\partial x_i} - \frac{\partial(v_j \tau_{ij})}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3.3)$$

onde  $\frac{D(\bullet)}{Dt}$  representa a derivada material de uma quantidade, definida por

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i} v_i \quad (3.4)$$

Essas equações podem ser reescritas de forma compacta como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad (\text{com } i = 1,2,3) \quad (3.5)$$

onde se empregou a definição da derivada material e foram introduzidos o vetor de variáveis de campo ( $\mathbf{U}$ ), o vetor de fluxo advectivo ( $\mathbf{F}_i$ ) e o vetor de termos viscosos e de condutividade térmica ( $\mathbf{G}_i$ ), cujos componentes são dados por

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_1 v_i + p \delta_{1i} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{2i} \\ \rho v_3 v_i + p \delta_{3i} \\ v_i(\rho e + p) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{1i} \\ -\tau_{2i} \\ -\tau_{3i} \\ -\tau_{ij} v_j - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{Bmatrix}, \quad (\text{com } i = 1,2,3) \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>Nesse capítulo é usada a notação  $x_1, x_2$  e  $x_3$  para definir os eixos cartesianos que equivalem aos eixos  $x, y$  e  $z$  usados no Capítulo 2

Além das variáveis primárias do escoamento, também estão presentes nas equações acima o tensor de tensões desviadoras ( $\tau_{ij}$ ), a pressão termodinâmica ( $p$ ), a temperatura ( $T$ ) e o coeficiente de condutividade térmica ( $k$ ), que são obtidos a partir das variáveis principais ( $\rho, e, v_i$ ) considerando-se algumas relações constitutivas e termodinâmicas.

A relação entre as tensões desviadoras e o gradiente de velocidades no escoamento é estabelecida para fluidos newtonianos como:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3.7)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade de cisalhamento e  $\lambda$  é o coeficiente de viscosidade volumétrica dado pela hipótese de Stokes como

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (3.8)$$

Tomando o fluido como um gás ideal é possível usar a equação de estado para gases ideais para definir a pressão da seguinte forma

$$p = \rho u (\gamma - 1), \quad (3.9)$$

sendo  $\gamma$  a relação entre os calores específicos,  $C_p$  a pressão constante e  $C_v$  a volume constante

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (3.10)$$

Na equação de estado para gases ideais também está presente a energia interna específica ( $u$ ), que se relaciona com a energia específica ( $e$ ) pela expressão

$$u = e - \frac{1}{2}v_i v_i, \quad (3.11)$$

com  $\frac{1}{2}v_i v_i$  sendo a parcela de energia cinética específica. Outra relação importante a se considerar se dá entre  $u$  e  $T$ , conforme descreve a Eq. (3.12).

$$u = C_v T \quad (3.12)$$

A temperatura em um ponto qualquer do escoamento pode ser obtida a partir das variáveis principais usando as Eq. (3.11) e Eq. (3.12).

As propriedades de viscosidade e condutividade térmica do fluido, dadas pelos coeficientes  $\mu$  e  $k$ , tendem a variar de acordo com a temperatura. Essa variação pode ser descrita utilizando a Lei de Sutherland (ver White (1991)), definida pelas seguintes equações

$$\mu = \mu_{ref} \frac{S_\mu + T_{ref}}{S_\mu + T} \left( \frac{T_{ref}}{T} \right)^{3/2} \quad (3.13)$$

$$k = k_{ref} \frac{S_k + T_{ref}}{S_k + T} \left( \frac{T_{ref}}{T} \right)^{3/2} \quad (3.14)$$

onde as quantidade com o subíndice *ref* indicam um valor de referência inicial. As constantes  $S_\mu$  e  $S_k$  são propriedades do material. Para o ar elas assumem os valores  $S_\mu = 110,5K$  e  $S_k = 114,95K$ .

Adicionalmente às relações anteriores é introduzida uma equação que define a velocidade do som ( $c$ ) em um escoamento isoentrópico na forma

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (3.15)$$

### 3.1.1 Descrição lagrangeana-euleriana arbitrária

Em mecânica do contínuo, dois tipos de representação são tradicionalmente empregados para a descrição do movimento da matéria. A primeira delas é a formulação euleriana, que descreve o movimento de partículas usando uma configuração de referência mantida fixa no espaço. Nessa forma de descrição, o meio contínuo movimenta-se através da configuração de referência. Isso permite tratar casos em que ocorrem grandes deformações do meio, embora as modificações do contorno não possam ser identificadas. Já na formulação lagrangeana, a configuração de referência é “colada” ao corpo, acompanhando-o enquanto se move. Essa característica torna a descrição lagrangena adequada para tratar problemas em que ocorrem grandes modificações no contorno. No entanto, ela se torna ineficiente para descrever situações em que grandes deformações estão presentes.

As características de cada uma dessas formulações as tornam adequadas para tratar problemas distintos. A formulação euleriana é naturalmente vantajosa para problemas de dinâmica de fluidos enquanto que os problemas de mecânica de sólidos normalmente empregam a descrição lagrangeana. Porém, quando problemas de interação fluido-estrutura são abordados, há dificuldades em tratar os domínios do fluido e da estrutura

por uma única formulação. Isso decorre da mudança no domínio do fluido em uma região próxima à estrutura, de acordo com o movimento desta. Nessa região, a formulação euleriana não é mais adequada para descrever o movimento do fluido.

No intuito de contornar tais dificuldades, a descrição lagrangeana-euleriana arbitrária (ALE) do movimento foi introduzida Hughes et al. (1981) com características intermediárias entre a formulação lagrangeana e a euleriana. Na formulação ALE, o meio contínuo ainda se move através da configuração de referência, mas essa não é mais estática. O domínio do fluido próximo à estrutura é representado por uma configuração que se move para se adaptar à mudança de posição da estrutura. A velocidade do movimento em cada ponto da configuração é definida de uma forma arbitrária. A única restrição é que essas velocidades sejam compatíveis com as velocidades junto aos contornos móveis da estrutura e com o contorno fixo da parcela do domínio do fluido descrito de forma puramente euleriana. Dessa forma, na formulação ALE é preciso considerar tanto a velocidade do meio contínuo ( $\mathbf{v}$ ) quanto a velocidade da configuração de referência ( $\mathbf{w}$ ).

Uma representação esquemática da utilização da formulação ALE na modelagem do fluido em problemas que consideram corpos móveis imersos no escoamento é apresentada na Fig. 3.1. A estrutura é modelada através da formulação lagrangeana de forma que a malha usada para a discretização se move com a mesma velocidade do corpo ( $\dot{\mathbf{u}}$ ). Já na modelagem do fluido são empregadas a descrição euleriana para a parcela do domínio afastada do corpo e a descrição ALE nas proximidades do corpo. Na região de formulação ALE a malha do fluido se move para adaptar-se aos deslocamentos da estrutura. A figura também mostra a compatibilidade entre a velocidade das malhas na interface entre os domínios do problema descritos pelas diferentes formulações.

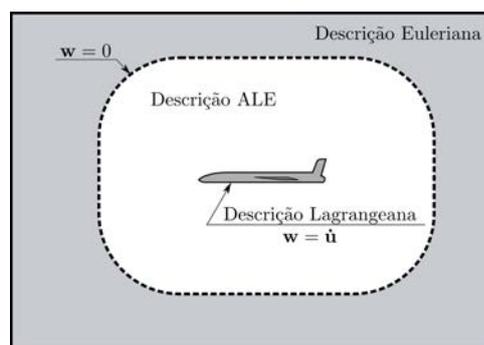


Figura 3.1: Regiões de descrição euleriana, lagrangeana e ALE na análise de escoamentos sobre corpos móveis

A utilização da descrição ALE se reflete basicamente em como a derivada material de uma quantidade qualquer é definida. Conforme descrito na Eq. (3.16), a velocidade da configuração de referência (malha de elementos finitos)  $w_i$  também é considerada.

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i}(v_i - w_i) \quad (3.16)$$

O emprego da definição de derivada material na descrição ALE sobre as Eq. (3.1), Eq. (3.2) e Eq. (3.3) implica na seguinte forma de representação compacta das equações governantes da dinâmica de fluidos:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad (\text{com } i = 1,2,3) \quad (3.17)$$

e, levando em conta a relação

$$\frac{\partial (w_i \mathbf{U})}{\partial x_i} = w_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \mathbf{U}, \quad (3.18)$$

obtém-se a forma final

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \mathbf{U}, \quad (\text{com } i = 1,2,3) \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{H}_i = (\mathbf{F}_i - w_i \mathbf{U})$ .

Vale ressaltar que a Eq. (3.17) se reduz à Eq. (3.5) quando o termo  $w_i$  é nulo. A equação de Euler, que descreve o escoamento de um fluido não viscoso, é representada pela Eq. (3.5) e pela Eq. (3.17) tomando o vetor  $\mathbf{G}_i$  como zero.

Adicionalmente às equações governantes, também devem ser definidas as condições iniciais e de contorno apropriadas aos problemas a serem analisados. As condições iniciais são dadas pelo valor das variáveis de campo em cada ponto do domínio no instante de tempo inicial. No caso de escoamentos compressíveis, as condições de contorno devem ser definidas nas regiões de entrada e de saída do domínio computacional bem como nas superfícies dos corpos ou planos de simetria. As formas de imposição dessas condições de contorno no modelo numérico são discutidas detalhadamente em Teixeira (1996), Teixeira (2001) e Bono (2008).

## 3.2 Método de Taylor-Galerkin de dois passos

A modelagem da dinâmica de fluidos através do método de Taylor-Galerkin é realizada em duas etapas. Primeiramente, as variáveis de campo são expandidas no tempo segundo uma série de Taylor. Com isso, define-se o valor das variáveis em um instante de tempo  $(n+1)$  a partir do seu valor no instante atual  $(n)$ . O instante  $n+1$  difere do instante  $n$  por um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Sobre a equação resultante da expansão temporal é aplicado o método de resíduos ponderados de Galerkin no intuito de obter a discretização espacial do problema. Esse método foi desenvolvido em dois modelos, sendo eles o método de Taylor-Galerkin de dois passos (Kawahara e Hirano, 1983; Zienkiewicz et al., 2005) e o método de Taylor-Galerkin iterativo (ou de um passo) (Donea, 1984). Para este trabalho será empregado apenas o modelo explícito de dois passos seguindo o esquema apresentado por Löhner (2001) e Zienkiewicz et al. (2005).

### 3.2.1 Discretização temporal

As variáveis de conservação são obtidas em um tempo  $n+1$  a partir de uma expansão em série de Taylor até o termo de segunda ordem como segue

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

Definindo a variação de  $\mathbf{U}$  no passo de tempo com  $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$  e agrupando os termos com derivada temporal resulta em

$$\Delta \mathbf{U} = \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} \right) \quad (3.21)$$

Essa equação pode ser escrita na forma

$$\Delta \mathbf{U} = \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^{n+1/2}}{\partial t} \quad (3.22)$$

com as variáveis no ponto médio do passo de tempo ( $n+1/2$  se refere ao tempo  $t + \Delta t/2$ ) dadas por

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} \quad (3.23)$$

A derivada temporal de  $\mathbf{U}^{n+1/2}$  é definida como

$$\frac{\partial \mathbf{U}^{n+1/2}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathbf{H}_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \mathbf{U}^{n+1/2} \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{H}_i^{n+1/2}$  é calculado com os componentes de  $\mathbf{U}^{n+1/2}$ , o termo  $\mathbf{G}_i$  é tomado no instante  $n$  e  $w_i$  é constante no passo de tempo.

### 3.2.2 Discretização espacial

A discretização espacial será apresentada levando em conta o tratamento isolado de cada uma das cinco equações governantes do escoamento descritas de forma vetorial pela Eq. (3.22). No desenvolvimento que segue os componentes dos vetores  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}_i$ ,  $\mathbf{G}_i$ , que se referem a uma equação discretizada, serão representados por  $u$ ,  $h_i$  e  $g_i$ , respectivamente. Deve ser ressaltado que o termo  $u$  não se refere à energia interna, mas sim a um dos termos  $\rho$ ,  $\rho v_i$  ou  $\rho e$ , dependendo se está sendo discretizada a equação de conservação de massa, de momentum ou de energia, respectivamente.

Tomando a notação descrita acima, tem-se da Eq. (3.22) e Eq. (3.24)

$$\Delta u = \Delta t \left( -\frac{\partial h_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial w_i}{\partial x_i} u^{n+1/2} \right) \quad (3.25)$$

O método de Galerkin é aplicado sobre a Eq. (3.25) considerando que  $u$  é aproximado através de função linear por partes nos tempos  $n$  e  $n + 1$ ,

$$u \approx \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}}, \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{N}^T = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$  é o vetor contendo as funções de forma lineares no elemento tetraédrico. Maiores detalhes sobre as funções de forma do elemento tetraédrico de 4 nós e suas derivadas podem ser encontrados em Zienkiewicz e Taylor (2000) ou Bono (2008). No instante intermediário  $n + 1/2$  é assumida aproximação constante por partes  $u \approx \mathbf{P}_{(e)} \hat{u}$ , com  $\mathbf{P}_{(e)}$  sendo a função de forma constante em cada elemento. Nessas definições,  $\bar{\mathbf{u}}$  representa o vetor com os valores nodais de  $u$  em um elemento e  $\hat{u}$  representa o valor de  $u$  avaliado no centro do elemento.

Da aplicação do método de Galerkin sobre a Eq. (3.25) resulta

$$\int_{V_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV \Delta \bar{\mathbf{u}} = -\Delta t \int_{V_e} \mathbf{N} \left( \frac{\partial h_i^{n+1/2}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_i^n}{\partial x_i} \right) dV - \Delta t \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \int_{V_e} \mathbf{N} \mathbf{P}_{(e)} dV \hat{u}^{n+1/2} \quad (3.27)$$

a partir da qual, integrando por partes o primeiro termo do lado direito, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dV \Delta \bar{\mathbf{u}} = & -\Delta t \int_{V_e} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \left( h_i^{n+1/2} + g_i^n \right) dV - \Delta t \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \int_{V_e} \mathbf{N}\mathbf{P}_{(e)} dV \hat{u}^{n+1/2} \\ & + \Delta t \int_{A_e} \mathbf{N} \left( h_i^{n+1/2} + g_i^n \right) n_i dA \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde o último termo do lado direito se refere à integral sobre as faces do elemento que se encontram no contorno do domínio do escoamento e  $n_i$  representa o componente cartesiano do vetor normal à face do elemento. Vale ressaltar que no presente trabalho considera-se que a malha é fixa ( $\mathbf{w} = 0$ ) no contorno externo do escoamento e, portanto,  $h_i^{n+1/2}$  pode ser substituído por  $f_i^{n+1/2}$  na avaliação da integral de contorno. Essa equação pode ser escrita de forma sucinta como

$$\mathbf{M}\Delta \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{r}} \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa do elemento tetraédrico dada por

$$\mathbf{M} = \int_{V_e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dV \quad (3.30)$$

e  $\bar{\mathbf{r}}$  resulta da soma dos vetores obtidos das integrais

$$\bar{\mathbf{r}} = -\Delta t (\bar{\mathbf{q}}_u + \bar{\mathbf{q}}_w - \bar{\mathbf{q}}_b) \quad (3.31)$$

sendo cada parcela definida por

$$\bar{\mathbf{q}}_u = \int_{V_e} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \left( \mathbf{h}_i^{n+1/2} + \mathbf{g}_i^n \right) dV = V_e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \left( \hat{h}_i^{n+1/2} + \hat{g}_i^n \right) \quad (3.32)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_w = \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \int_{V_e} \mathbf{N}\mathbf{P}_{(e)} dV \hat{u}^{n+1/2} = \frac{V_e}{4} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \hat{u}^{n+1/2} \quad (3.33)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_b = \int_{A_e} \mathbf{N} \left( h_i^{n+1/2} + g_i^n \right) n_i dA = \frac{A_f}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left( \hat{h}_i^{n+1/2} + \hat{g}_i^n \right) n_i \quad (3.34)$$

O divergente da velocidade da malha é dado por

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \bar{\mathbf{w}}_i^n \quad (3.35)$$

As variáveis de conservação na metade do intervalo de tempo são calculadas por

$$\hat{u}^{n+1/2} = \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right) \hat{u}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \bar{\mathbf{h}}_i^n \quad (3.36)$$

e o vetor de fluxo nesse instante é dado por

$$\hat{h}_i^{n+1/2} = \hat{f}_i^{n+1/2} - \hat{w}_i \hat{u}^{n+1/2} \quad (3.37)$$

enquanto  $\hat{g}_i$  é constante no elemento dada a interpolação linear da velocidade do escoamento  $v_i = \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{v}}_i$ . Nessas equações  $\hat{u}^n$  e  $\hat{w}_i$  são os valores das variáveis no centro do elemento, dadas pela média dos valores nodais, e  $\hat{f}_i^{n+1/2}$  é calculado a partir de  $\hat{\mathbf{U}}^{n+1/2}$ .

Parte da eficiência computacional do método apresentado aqui vem do fato de que os valores relativos ao instante de tempo  $n + 1/2$  são avaliados apenas no centro de cada elemento usando informação das variáveis nodais desse elemento (Zienkiewicz et al., 2005; Löhner, 2001), que estão disponíveis no instante de tempo  $n$ . Dessa forma, o passo de tempo intermediário e o final podem ser realizados no mesmo laço sobre os elementos finitos da malha. Isso permite a otimização da fase de cálculo do vetor  $\bar{\mathbf{r}}$ , realizada conforme o seguinte algoritmo:

- 1) Variáveis dos nós do elemento obtidos dos vetores globais:  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_i$  e  $\bar{\mathbf{w}}_i$
- 2) Cálculo das derivadas da função de forma  $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}$ ;
- 3) Formação dos valores nodais derivados de  $\bar{\mathbf{u}}$ :
  - i - Massa específica ( $\bar{\rho}$ ), velocidade do escoamento ( $\bar{\mathbf{v}}$ ) e energia interna;
  - ii - Vetores de fluxo advectivo modificado ( $\bar{\mathbf{h}}_i$ )
  - iii - Constantes  $k$  e  $\mu$ , tensões ( $\boldsymbol{\tau}$ ) e o vetor de termos viscosos  $\hat{g}_i$
- 4) Cálculo das variáveis no tempo  $n + 1/2$ 
  - i - Cálculo de  $\frac{\partial w_i}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial h_i^n}{\partial x_i}$ ;
  - ii - Cálculo dos valores médios no centro do elemento  $\hat{u}^n$  e  $\hat{w}_i$ ;
  - iii - Cálculo de  $\hat{u}^{n+1/2}$  (Eq. (3.36))
  - iv - Cálculo de  $\hat{h}_i^{n+1/2}$  (Eq. (3.37))
- 5) Cálculo dos vetores  $\bar{\mathbf{q}}_u$ ,  $\bar{\mathbf{q}}_w$  e, nos elementos com alguma face no contorno do domínio, o vetor de contorno  $\bar{\mathbf{q}}_b$  ( Eq. 3.32, 3.33 e 3.34);
- 6) Formação do vetor  $\bar{\mathbf{r}}$  e soma do mesmo aos vetores globais para o cálculo de  $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ ;

A partir da contribuição de cada elemento finito é formado um sistema de equações global  $\tilde{\mathbf{M}} \Delta \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{r}}$ , com o símbolo  $(\tilde{\cdot})$  representando um array global, que deve ser resolvido em cada passo de tempo. A solução desse sistema é obtida por um processo iterativo na

forma

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{M}}_L^{-1} (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{M}} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_i) + \Delta \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (3.38)$$

onde  $\tilde{\mathbf{M}}_L$  é a matriz de massa diagonalizada (ver Bono (2008)). Segundo Löhner (2001), 3 iterações são suficientes para que se obtenha convergência nesse processo. Por outro lado, o mesmo autor recomenda que em problemas estacionários apenas uma iteração seja aplicada através da forma simplificada da Eq. (3.38) dada por

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{M}}_L^{-1} \tilde{\mathbf{r}}, \quad (3.39)$$

levando a um processo computacionalmente mais eficiente e com precisão similar à obtida na solução com maior número de iterações.

### 3.2.3 Condição de estabilidade

Como apresentado acima, as equações empregadas para a descrição do escoamento foram construídas para serem integradas explicitamente. Porém, esquemas explícitos são apenas condicionalmente estáveis. Nesse caso, a condição de estabilidade está associada ao tamanho do incremento de tempo empregado. O esquema explícito de Taylor-Galerkin para escoamentos compressíveis tem sua estabilidade definida pela condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), que é dada por

$$\Delta t_e = CS \frac{L_e}{c + \sqrt{(v_i v_i)}} \quad (3.40)$$

onde  $\Delta t_e$  é o incremento de tempo crítico de um elemento, cujo comprimento característico é  $L_e$ . Nessa mesma equação,  $c$  representa a velocidade do som e  $CS$  é um fator de segurança a ser definido de acordo com o problema analisado.

### 3.2.4 Amortecimento numérico

A aplicação do método de Taylor-Galerkin a problemas de escoamentos compressíveis encontra alguns problemas quando existem regiões com fortes gradientes na forma de ondas de choque. A solução obtida pela aplicação direta do método costuma apresentar oscilações nas proximidades dessas zonas. Uma das formas de tratar tais problemas é pela adoção de difusão artificial da solução (Argyris et al., 1990). Nesse caso, um termo

de amortecimento é adicionado explicitamente à solução obtida pelo método de Taylor-Galerkin ( $\mathbf{U}^{n+1}$ ), resultando em uma solução suavizada ( $\mathbf{U}_s^{n+1}$ ) como segue

$$\mathbf{U}_s^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{D}^n \quad (3.41)$$

O vetor de amortecimento da solução  $\mathbf{D}^n$  é construído de forma a atingir apenas a região problemática da solução. Nesse trabalho é utilizada o amortecimento numérico baseado na derivada segunda da pressão (Nithiarasu et al., 1998), cuja definição é dada por

$$\mathbf{D}^n = \sum_e [\mathcal{C}_e C_{AF} S_e (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L)_e \mathbf{U}_e^n] \quad (3.42)$$

Nessa equação,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{M}_L$  são as matrizes de massa consistente e diagonalizadas, respectivamente. A variável  $C_{AF}$  é o coeficiente de amortecimento fictício, cujo valor deve ser definido pelo usuário, e  $\mathcal{C}_e$  representa o número CFL local, dado por

$$\mathcal{C}_e = \frac{\Delta t}{\Delta t_e} \quad (3.43)$$

O termo restante é dado para cada elemento como a média dos valores nodais do sensor de pressão, resultando em

$$S_e = \frac{1}{N^e} \sum_{a=1}^{N^e} S_a \quad (3.44)$$

onde  $N^e$  é o número total de nós do elemento e  $S_a$  é o valor do sensor de pressão de um nó  $a$ , extraído do vetor global dado por:

$$\mathbf{S}^n = \frac{\sum_e |(\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \bar{\mathbf{p}}|}{\sum_e (|\mathbf{M} - \mathbf{M}_L| \bar{\mathbf{p}})} \quad (3.45)$$

### 3.3 Atualização automática da malha

Conforme discutido acima, o emprego de uma formulação ALE permite que o escoamento seja modelado em um domínio adaptável às modificações que ocorrem no seu contorno. Um dos pontos interessantes dessa abordagem é que o movimento da malha é independente das condições do escoamento. Com isso, a maneira de atualização da “malha ALE” pode variar em diferentes implementações ou para o tratamento de diferentes problemas. No entanto, os métodos de movimento da malha devem atender a alguns requisitos.

Primeiramente, o algoritmo de atualização não deve provocar uma distorção acentuada nos elementos, evitando o comprometimento da qualidade da solução. Além disso, o movimento da malha deve ser compatível com o movimento de seu entorno. Esse contorno pode ser o contato com uma superfície móvel ( $\Gamma_L$ ), cuja descrição é lagrangeana, ou contornos estacionários ( $\Gamma_E$ ), que podem ser um limite do domínio computacional, a superfície de um corpo sem movimento ou a fronteira entre a zona de descrição ALE e a zona de descrição plenamente euleriana. A condição de compatibilidade entre a malha ALE e seus contornos é assegurada pela imposição dos seguintes valores

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_L} = \mathbf{v}_L \quad \text{e} \quad \mathbf{w}|_{\Gamma_E} = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

sendo  $\mathbf{v}_L$  o vetor de velocidade do corpo em movimento.

Segundo Löhner e Yang (1996), os métodos empregados para especificar o movimento da malha podem ser divididos em três grupos. No primeiro grupo a velocidade de um ponto da malha é dada por uma função analítica que considera a distância desse ponto à superfície móvel mais próxima e a velocidade dessa superfície. Esse método se apresenta muito eficiente se a distância obtida no início da solução puder ser usada durante toda a simulação, mas enfrenta problemas quando existe mais de uma superfície móvel. O segundo grupo de métodos se baseia na suavização do movimento da malha no domínio ALE. Para tanto, a malha do escoamento é tratada como uma pseudo-estrutura, com massa, rigidez e amortecimento fictícios. Esse problema pseudo-estrutural é resolvido de maneira aproximada determinando a movimentação da malha. No último grupo de métodos, a velocidade da malha é suavizada pela solução de um sistema de equações que descrevem a difusão da velocidade, respeitando as condições de contorno dadas em Eq. (3.46). Esse sistema é solucionado por uma discretização através do MEF.

Nesse trabalho é empregado o mesmo método adotado por Teixeira (2001) e Braun (2007) para a solução de problemas de interação fluido-estrutura. A suavização da velocidade da malha ALE é realizada a partir das velocidades dos nós das superfícies de contorno, sendo descrita pela seguinte equação

$$\mathbf{w}_i = \frac{\sum_{j=1}^{N^{sup}} a_{ij} \mathbf{w}_j}{\sum_{j=1}^{N^{sup}} a_{ij}} \quad (3.47)$$

onde  $\mathbf{w}_i$  é a velocidade de um nó  $i$  localizado no interior do domínio ALE,  $N^{sup}$  é o número total de pontos localizados sobre as superfícies de contorno e  $\mathbf{w}_j$  é a velocidade de um ponto  $j$  dessas superfícies. O coeficiente  $a_{ij}$  determina a influência que a velocidade do nó de contorno  $j$  tem sobre o nó  $i$  da malha ALE, sendo determinado por

$$a_{ij} = (d_{ij})^{-n} \quad (3.48)$$

Nesta equação  $d_{ij}$  é a distância entre os pontos  $i$  e  $j$  descritos acima. O expoente  $n$  controla a redução da influência do ponto de contorno  $j$  sobre a velocidade de pontos  $i$  a medida que a distância entre eles é maior. Nesse trabalho será adotado o valor  $n = 4$ , a exemplo do realizado em Teixeira (2001) e Braun (2007).

Dada a forma de cálculo do coeficiente  $a_{ij}$ , fica evidente que a velocidade dos nós da malha ALE sofrem maior influência dos nós de superfície mais próximos. Portanto, uma simplificação significativa do método pode ser obtida pela utilização de apenas alguns ou mesmo um único nó de cada superfície para o cálculo da velocidade dos nós da malha ALE. Nesse sentido, o presente trabalho emprega uma versão simplificada do método descrito acima onde a velocidade de um nó da malha do escoamento sofre influência apenas do nó mais próximo de superfície de contorno fixo e do nó mais próximo na superfície de contorno móvel. Essa nova relação é descrita como

$$\mathbf{w}_i = a_{ij}^* \mathbf{w}_j, \quad \text{com} \quad a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{a_{ij} + a_{ik}} \quad (3.49)$$

sendo os subíndice  $j$  e  $k$  referentes aos nós da superfície móvel e da superfície fixa, respectivamente, que estão mais próximos do nó  $i$  a ser movido.

A Fig. 3.2 ilustra o esquema descrito acima. Nesse caso, todo o domínio do fluido é discretizado pela malha móvel, sendo o contorno fixo dado pela superfície de entrada e saída do escoamento. Essa simplificação adicional é adotada para aumentar a eficiência computacional através da eliminação da estrutura de dados necessária para distinguir as malhas ALE e euleriana e da redução de etapas condicionais de cálculo durante a simulação. No presente trabalho isso se justifica pois nos problemas abordados existem poucos elementos na região que seria puramente euleriana (ver Fig. 3.1).

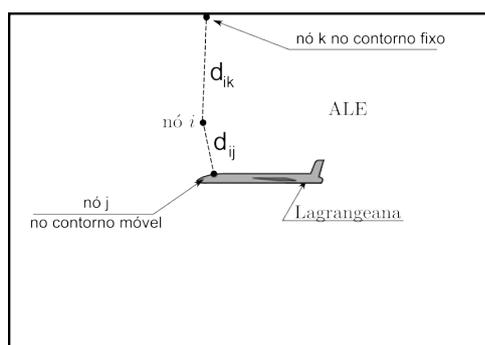


Figura 3.2: Distância mínima de um ponto da malha ALE às superfícies de contorno.

---

# Capítulo 4

## Acoplamento fluido-estrutura

Neste capítulo serão discutidos os aspectos relativos ao método de integração temporal do problema de interação fluido-estrutura. Esse é um caso particular de problemas envolvendo sistemas acoplados, nos quais também podem ser incluídos diversos outros como, por exemplo, os de interação termo-mecânica e interação controle-mecânica. Inicialmente são abordadas de maneira geral as classificações e formas de modelagem aplicáveis a análise de sistemas acoplados. Em seguida são apresentadas as técnicas empregadas neste trabalho para o tratamento do problema de interação fluido-estrutura, mais especificamente para o caso de aeroelasticidade. O algoritmo particionado de integração é descrito na Seção 4.1 e posteriormente o método de transmissão de informações entre o fluido e a estrutura na sua interface é apresentado na Seção 4.2.

Considera-se como sistema um conjunto de componentes que se relacionam formando uma unidade. A separação espacial do sistema em componentes ou partições pode ter natureza física ou funcional, como em regiões formadas por meios distintos (fluido e estrutura), ou ter natureza abstrata referente à modelagem matemática ou computacional (ex. subestruturação para computação em paralelo). Nas discussões que seguem serão consideradas apenas as partições de primeiro nível, referentes à divisão do sistema em componentes com comportamento físico distinto.

A classificação de sistema acoplado é atribuída a sistemas em que seus componentes interagem dinamicamente (Felippa et al., 2001). Nessa situação cada componente exerce influência sobre o comportamento dos demais, requerendo que o sistema seja resolvido simultaneamente. Os sistemas dinâmicos são caracterizados pelo número de meios

---

distintos no qual são decompostos. Um problema de interação fluido-estrutura é um sistema de dois meios (fluido e estrutura) enquanto outros problemas de interação são constituídos de sistemas de três ou mais meios. Componentes artificiais também podem ser considerados na constituição do sistema. Esse é o caso das malhas móveis da formulação ALE, utilizada na discretização do escoamento em problemas de interação fluido-estrutura. Essa malha descreve um meio fictício que se movimenta segundo formulações distintas da estrutura ou do fluido. Muitos tipos de problemas acoplados apresentam uma separação espacial de seus componentes, existindo assim uma zona de interface entre os meios, que pode ser uma curva ou superfície dependendo da dimensão do problema.

A abordagem de problemas acoplados se dá usualmente segundo duas metodologias: a) Tratamento monolítico (*monolithic approach*), com os componentes do sistema tratados monoliticamente e avançados no tempo simultaneamente; b) Tratamento particionado (*partitioned treatment*), com cada componente do sistema sendo modelado computacionalmente de forma isolada e avançado no tempo em etapas distintas. No segundo caso, a interação entre os sistemas é tratada como condições de contorno transmitidas de um meio para o outro na região de interface através de técnicas de sincronização e predição.

Existe ainda uma classificação dos métodos quanto ao seu acoplamento, podendo estes terem um acoplamento fraco (*weak* ou *loose coupling*) ou um acoplamento forte (*strong coupling*) (Zhang e Hisada, 2004). No acoplamento forte, as condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de movimento são plenamente satisfeitas na interface entre os dois meios. Já o acoplamento fraco se caracteriza pela satisfação aproximada dessas condições na região de interface. Em geral, o acoplamento fraco é apresentado pelos modelos particionados enquanto que o acoplamento forte é característico de modelos monolíticos. No entanto, existem procedimentos que podem originar métodos particionados com acoplamento forte. Para tanto, esses métodos particionados são incrementados com processos iterativos ou pela introdução de termos adicionais nas equações de equilíbrio da estrutura e/ou fluido (Zhang e Hisada, 2004).

Segundo Felippa et al. (2001), tanto o tratamento monolítico quanto o particionado são gerais, tendo cada um características interessantes que podem ser mais adequados a determinados tipos de problemas. Além disso, outros fatores como os processos de

---

implementação e de utilização também podem ser determinantes na escolha da abordagem a se adotar.

Os métodos monolíticos têm como grande vantagem sua precisão e estabilidade, o que decorre do acoplamento perfeito entre as partes do sistema. No entanto, nessa abordagem todos os componentes do sistema precisam ser descritos segundo uma mesma modelagem. Isso pode originar problemas de estabilidade numérica, baixa eficiência computacional e dificuldades de implementação. De forma geral, a abordagem monolítica é mais adequada a problemas em que existe forte interação entre os meios e quando a discretização espacial e temporal necessária para a solução de cada subsistema é parecida.

As características mais importantes dos métodos particionados são: a) Customização – cada meio pode ser discretizado e solucionado através das técnicas mais apropriadas, alcançando eficiência igual ou próxima à obtida em análises isoladas do meio, dependendo da eficiência no tratamento dos efeitos de interação. b) Modelagem independente – o uso de malhas não coincidentes entre os meios é de mais fácil utilização em modelos particionados. Isso permite que cada componente do sistema seja discretizado independentemente e empregando malhas com o refinamento necessário. c) Reutilização de programas – programas existentes destinados à análise isolada de um dos componentes do sistema acoplado podem ser empregados em modelos particionados. d) Modularidade – modificações nas técnicas de discretização ou solução de determinado componente do sistema podem ser introduzidas sem modificar os algoritmos relativos aos demais componentes. Essas vantagens vêm acompanhadas de alguns problemas. O emprego do tratamento particionado requer muitos cuidados na formulação e implementação dos algoritmos sob a pena de degradação da estabilidade, precisão e eficiência do método. Tais características tornam os modelos particionados adequados para problemas em que a interação entre os meios é fraca e definida em uma região de interface. Também são adequados às situações em que cada componente do sistema é mais eficientemente analisado por algoritmos distintos e utilizando incrementos de tempo e refinamento de malhas bastante diferentes.

Para os problemas transientes não lineares de aeroelasticidade abordados nesse trabalho o tratamento particionado apresenta algumas vantagens sobre o monolítico. Esses problemas têm como uma das características a fraca interação entre os meios, decorrente

da baixa massa específica do fluido em comparação com o sólido. Com isso, as aproximações no acoplamento não levam a excessivas perdas na qualidade ou eficiência da solução. Os progressivos avanços no tratamento das relações de interação obtidos nos esquemas desenvolvidos mais recentemente têm levado a resultados cada vez mais promissores. Uma vez que os modelos particionados possibilitam modelagens distintas nos dois meios, os algoritmos mais eficientes podem ser empregados em cada um deles. A malha necessária para a discretização do escoamento, sobretudo no contato com um sólido, é normalmente muito mais refinada do que a da estrutura. Com isso, o uso de modelos particionados com malhas não coincidentes traz maior eficiência computacional. Além disso, a integração da estrutura é realizada mais eficientemente por meio de métodos implícitos, uma vez que as respostas dominantes são as de baixa frequência. Por outro lado, incrementos de tempo muito menores costumam ser utilizados na análise de escoamentos por esquemas explícitos, amplamente empregados nos problemas transientes. A diferença nos incrementos de tempo necessários para a análise de cada meio também é melhor contemplada com o método particionado, pois este permite o uso de subciclos no avanço temporal, como será apresentado a seguir.

No âmbito do PPGEC–UFRGS foram desenvolvidos trabalhos seguindo os dois tipos de abordagem de problemas aeroelásticos apresentados acima, tanto para escoamentos em regime compressível quanto incompressível. Dentre estes trabalhos se destacam dos Santos (1993), Gonzalez (1993), Petry (1993), Azevedo (1999), Teixeira (2001) e Braun (2007).

## 4.1 Esquema particionado para problemas de interação fluido-estrutura

Com visto acima, os métodos particionados para integração de sistemas acoplados se apresentam como uma boa opção em problemas aeroelásticos. As características dessa abordagem permitem a discretização eficiente do fluido e da estrutura, bem como a utilização de algoritmos desenvolvidos para a análise isolada desses meios. No presente trabalho, a estrutura é analisada através de um algoritmo implícito (ver Seção 2) enquanto que o fluido tem sua integração temporal realizada por um método explícito que considera o movimento da malha através da formulação ALE (ver Seção 3). A seguir será discutido

o tratamento das interações entre o fluido e a estrutura e como esses são avançados no tempo.

Para que o problema de interação fluido-estrutura seja integrado corretamente é preciso garantir o equilíbrio de forças na superfície de interface entre os dois meios ( $\Gamma_{FE}$ ), bem como a compatibilidade e a continuidade dos deslocamentos nessa superfície. No caso de fluidos viscosos, o equilíbrio de forças é assegurado pela relação

$$\boldsymbol{\sigma}_E \mathbf{n} = -p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_F \mathbf{n}, \quad \text{em} \quad \Gamma_{FE} \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor que dá a direção normal a  $\Gamma_{FE}$ ,  $p$  é a pressão do fluido e  $\boldsymbol{\sigma}_E$  e  $\boldsymbol{\tau}_F$  são o tensor de tensões da estrutura e o tensor de tensões desviadoras do fluido, respectivamente. A compatibilidade entre os campos de velocidades da estrutura ( $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ ) e do fluido ( $\mathbf{v}$ ) na superfície de interface é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad \text{em} \quad \Gamma_{FE} \quad (4.2)$$

Adicionalmente, devem ser verificadas em  $\Gamma_{FE}$  as condições de compatibilidade de movimento entre as malhas da estrutura e do fluido. Para tanto, são tomadas as seguintes relações

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}, \quad \text{em} \quad \Gamma_{FE} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \text{em} \quad \Gamma_{FE} \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{x}$  e  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$  são o deslocamento e a velocidade de um ponto na malha ALE, respectivamente.

Conforme discutido em Lesoinne e Farhat (1996), para que a análise do escoamento em uma malha móvel seja matematicamente consistente o algoritmo de solução (compreendendo os métodos de integração do escoamento e de movimentação da malha) deve satisfazer de forma discreta a *Lei de Conservação Geométrica* (LCG). Nos casos em que o MEF é empregado em conjunto com a descrição ALE, essa condição é satisfeita quando a velocidade da malha do fluido na interface de contato é calculada por

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\Delta t} \quad (4.5)$$

onde os superíndices  $n$  e  $n + 1$  são utilizados para designar quantidades nos instantes de tempo  $t^n$  e  $t^{n+1}$ , respectivamente, tal que  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . No entanto, os algoritmos normalmente utilizados para a análise dinâmica de estruturas apresentam precisão de segunda ordem no tempo, de forma que  $\dot{\mathbf{u}} \neq \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}$ . Com isso, os métodos particionados que empregam algoritmos de segunda ordem para a estrutura e respeitam a LCG e a condição dada na Eq. (4.3) acabam violando a condição de continuidade no campo de velocidades entre a estrutura e o fluido. O efeito disso é a introdução de erros na energia trocada entre os dois meios (Farhat e Lesoinne, 2000), o que acaba por degradar a precisão e a estabilidade do modelo de acoplamento.

Os primeiros algoritmos propostos para a integração de problemas acoplados fluido-estrutura, denominados de *conventional serial staggered procedure* (CSS), impõem as condições de compatibilidade entre os dois meios apenas de forma aproximada. Esses métodos são interessantes por sua simplicidade de implementação, mas sofrem de sérios problemas quanto à eficiência e estabilidade. A precisão temporal do algoritmo CSS é normalmente uma ordem inferior a dos métodos de integração da estrutura e do fluido. Além disso, sua estabilidade numérica é menor do que a dos métodos que o compõem, de forma que são requeridos incrementos de tempo muito menores do que aqueles necessários por questões de precisão (Farhat et al., 2003). Esses problemas podem ser eliminados com a introdução de um processo iterativo para garantir a compatibilidade dos deslocamentos. No entanto, os algoritmos que incorporam o processo iterativo apresentam uma demanda computacional muito elevada.

O algoritmo empregado nesse trabalho é denominado de *improved serial staggered procedure* (ISS), tendo sido proposto por Lesoinne e Farhat (1998). Diferentemente dos métodos anteriores, no ISS a estrutura e o fluido são integrados em instantes defasados de meio passo de tempo. Assim, as forças provocadas pelo escoamento sobre a estrutura são determinadas no ponto médio do intervalo de tempo usado na integração da estrutura. De forma semelhante, o movimento imposto pela estrutura sobre o fluido é predito com base nos deslocamentos da estrutura conhecido no ponto médio do intervalo de tempo de avanço do fluido. Essas características permitem que a LCG seja satisfeita sem que as demais condições de interface dadas pelas Eq. (4.2), Eq. (4.3) e Eq. (4.4) sejam violadas (Farhat e Lesoinne, 2000). Essas características garantem ao método uma precisão de terceira

ordem na transferência de energia entre os dois meios (Farhat et al., 2003). O conjunto de avanços sobre os métodos tradicionais introduzidos pelo ISS promovem significativamente a estabilidade do método particionado e permitem que passos de tempo muito maiores sejam empregados, tornando a análise computacionalmente mais eficiente.

As etapas do algoritmo ISS podem ser descritas como segue (Braun, 2007). A Fig. 4.1 ilustra cada passo de avanço no tempo e de transmissão de informação entre o fluido e a estrutura. Para as condições iniciais da estrutura  $\mathbf{u}^0$  e  $\dot{\mathbf{u}}^0$  e do fluido  $\mathbf{U}^0$  é atribuído à malha do fluido:

$$\mathbf{x}^{n-1/2} = \mathbf{u}^0 - \frac{\Delta t_s}{2} \dot{\mathbf{u}}^0 \quad (4.6)$$

Para cada passo de avanço do fluido e da estrutura fazer:

- 1) Ajustar a velocidade da malha do fluido em  $t^n$  como:

$$\dot{\mathbf{x}}^n = \dot{\mathbf{u}}^n \quad (4.7)$$

A transmissão de dados de velocidade na interface com malhas não coincidentes é realizada através do processo descrito na Seção 4.2.

- 2) Avançar a análise do escoamento entre os instantes  $t^{n-1/2}$  e  $t^{n+1/2}$ .
  - (a) Atualizar a malha do fluido por:

$$\mathbf{x}^{n+1/2} = \mathbf{x}^{n-1/2} + \Delta t \dot{\mathbf{x}}^n \quad (4.8)$$

- (b) Calcular as variáveis do escoamento no instante  $t^{n+1/2}$ :

$$\mathbf{U}^{n-1/2} \xrightarrow{\text{Taylor-Galerkin}} \mathbf{U}^{n+1/2}$$

- 3) Calcular o vetor de carga do fluido sobre a estrutura  $\mathbf{F}^{n+1/2}$ . A transferência das forças dos nós do fluido para os nós da estrutura é realizada conforme método descrito na Seção 4.2.
- 4) Avançar a análise da estrutura entre os instantes  $t^n$  e  $t^{n+1}$ . A integração da estrutura é realizada através de um algoritmo que verifica o equilíbrio no ponto médio do intervalo de tempo, tomando o vetor de forças  $\mathbf{F}^{n+1/2}$ .

Nessa forma de implementação do ISS, tanto o fluido quanto a estrutura são avançados utilizando o mesmo passo de tempo. No entanto, existe uma diferença muito grande entre os passos de tempo máximos admissíveis no método implícito empregado na análise estrutural ( $\Delta t_E$ ) e no método explícito utilizado para o fluido ( $\Delta t_F$ ). As restrições de

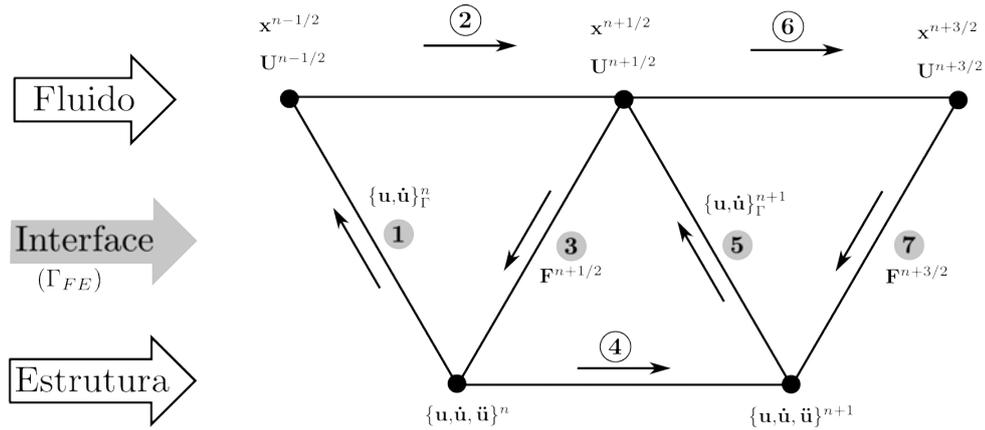


Figura 4.1: Esquema do algoritmo ISS para problemas de interação fluido-estrutura

estabilidade na análise explícita do escoamento demandam passos de tempo  $\Delta t_F \ll \Delta t_E$ . Dessa forma, o emprego do esquema particionado como foi apresentado utilizaria um incremento de tempo  $\Delta t = \Delta t_F$ , se tornando extremamente ineficiente do ponto de vista da análise estrutural.

Uma solução bastante eficiente para esse problema é a adoção da técnica de subciclos no esquema particionado, cuja representação esquemática é apresentada na Fig. 4.2. Nessa forma de implementação, a estrutura é integrada com passo de tempo  $\Delta t_E$ . Já o fluido é integrado entre instantes  $t^{n-1/2}$  e  $t^{n+1/2}$  por meio de  $n_{F/E}$  passos de tempo de tamanho  $\Delta t_F$ , sendo  $n_{F/E} = \frac{\Delta t_E}{\Delta t_F}$  e  $t^{n+1/2} = t^{n-1/2} + \Delta t_E$ .

Se comparado com sua apresentação inicial, o algoritmo ISS dotado de subciclos garante uma significativa redução no número de cálculos realizados para integrar a estrutura. Isso é bastante vantajoso, principalmente quando efeitos de não linearidade são considerados na estrutura, requerendo um processo iterativo a cada avanço de tempo. Também é obtida uma importante redução no número de transferências de informações na interface entre os meios. Esse processo ocorre apenas em intervalos de tempo  $\Delta t = \Delta t_E$  para a estrutura e para o fluido.

No entanto, alguns cuidados devem ser tomados para que a implementação do ISS usando subciclos mantenha a estabilidade do método original. Se essas condições são satisfeitas, a integração do escoamento pode ser realizada empregando um valor  $\Delta t_F$  determinado pela estabilidade do método explícito, como descrito na Seção 3.2.3. Uma das condições para o emprego de subciclos é que a deformação da malha do fluido entre os instantes

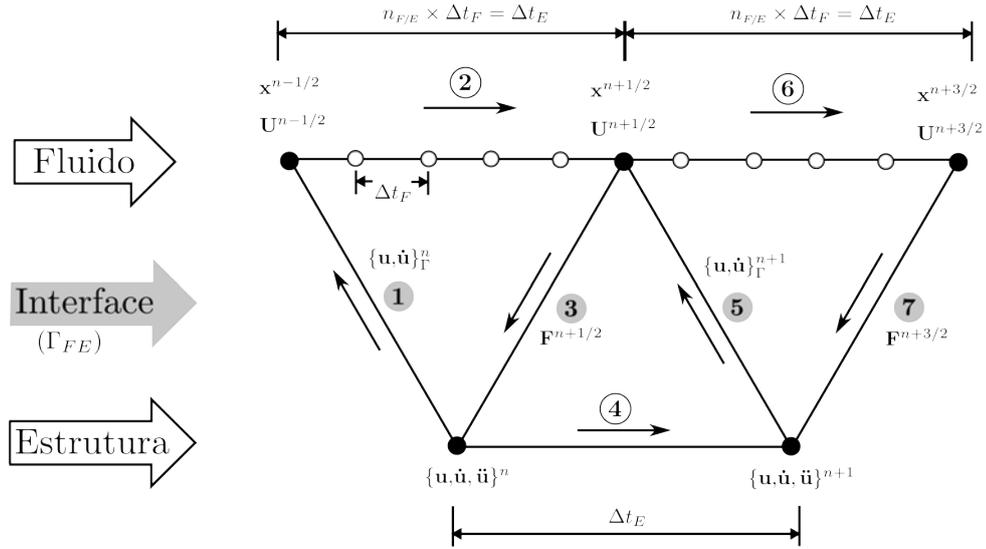


Figura 4.2: Esquema dos passos do algoritmo ISS com subciclos para problemas de interação fluido-estrutura

$t^{n-1/2}$  e  $t^{n+1/2}$  seja aplicada gradualmente ao longo dos  $n_{F/E}$  passos de tempo do fluido. Esse processo é realizado pela interpolação dos valores conhecidos em  $n$  e  $n+1$ , dado de forma geral por

$$\mathbf{x}_{(s)}^{n+1/2} = f^d(\mathbf{x}_{(s-1)}^{n+1/2}, \mathbf{u}^{n+1/2}, \Delta t), \quad \text{em } \Gamma_{FE} \quad (4.9)$$

com  $s = 1, 2, 3, \dots, n_{E/F}$  sendo o contador de subciclos e  $f^d$  uma função de interpolação de ordem  $d$ . A atualização da malha do fluido deve ser realizada de forma que a LCG e as condições de compatibilidade na interface sejam satisfeitas. Para tanto, a interpolação deve considerar que  $\mathbf{x}_{(0)}^{n+1/2} = \mathbf{u}^{n-1/2p}$  e  $\mathbf{x}_{(n_{E/F})}^{n+1/2} = \mathbf{u}^{n+1/2p}$ , com o sobrescrito  $p$  em  $\mathbf{u}$  indicando que esse é um valor predito, pois os deslocamentos são calculados apenas nos instante  $n$  e  $n+1$ . Nesse trabalho será empregada uma interpolação linear definida como (Braun, 2007)

$$\mathbf{x}_{(s)}^{n+1/2} = \mathbf{x}_{(s-1)}^{n+1/2} + \frac{\mathbf{u}^{n+1/2p} - \mathbf{x}_{(s-1)}^{n+1/2}}{n_{E/F} - s + 1}, \quad \text{em } \Gamma_{FE} \quad (4.10)$$

Outro fator importante para o bom funcionamento do esquema ISS com subciclos é a forma de determinação do vetor de forças causadas do sobre a estrutura ( $F^{n+1/2}$ ). Conforme descrito em Piperno e Farhat (2001),  $F^{n+1/2}$  deve ser definido considerando o balanço na energia transferida entre os meios na sua interface. Se o método de integração da estrutura for baseado na verificação de equilíbrio no ponto médio do intervalo de tempo

---

(*midpoint rule*), como é o caso do AECCP usado nesse trabalho (ver Seção 2.6), o vetor de forças do escoamento sobre a estrutura é calculado com base nas variáveis do escoamento no instante  $t^{n+1/2}$ .

Por meio de experimentação numérica também é verificado que a estabilidade do método depende da relação entre os passos de tempo do fluido e da estrutura, dado pelo valor de  $n_{F/E}$  (Braun, 2007). Para valores muito elevados, quando são realizados muitos subciclos de integração do fluido para cada avanço de tempo da estrutura, existe uma tendência de instabilidade. Os valores comumente empregados se encontram no intervalo  $5 \leq n_{F/E} \leq 1000$ , dependendo se o algoritmo de integração do escoamento é implícito ou explícito e do nível de não linearidade do problema.

## 4.2 Transferência de informação na interface fluido-estrutura

A análise dos problemas de interação fluido-estrutura através de algoritmos particionados requer a transferência de informações entre esses dois meios na região de interface. Essa transferência se dá de forma muito simples quando o fluido e a estrutura estão discretizados por malhas que são coincidentes na superfície de interface (*matching interfaces*). No entanto, tal condição é computacionalmente ineficiente, pois os requisitos de refinamento de malha para a estrutura são muito menores do que para o escoamento na região da camada limite. Além disso, o emprego de malhas coincidentes impede que os domínios da estrutura e do fluido sejam modelados em momentos diferentes e por equipes independentes. Problemas de interação fluido-estrutura analisados através de métodos particionados, como os de aeroelasticidade, são mais convenientemente tratados pela adoção de malhas não coincidentes (*nonmatching interfaces*) na modelagem do fluido e da estrutura. Essa prática elimina os problemas associados à utilização de malhas coincidentes, mas requer a incorporação de algoritmos de transferência de informação entre as duas malhas. A comunicação entre as malhas deve ser realizada de forma que o equilíbrio de forças, a compatibilidade de movimento e o balanço de energia na interface sejam satisfeitos de forma mais precisa possível.

Dentre os algoritmos mais amplamente empregados para a transferência de informação

entre as malhas do fluido e da estrutura na região de interface em problemas de aeroelasticidade estão o esquema de projeção nodal (*node-projection scheme*) (Farhat et al., 1998), o esquema de projeção de pontos de integração (*quadrature-projection scheme* ou *mortar method*) (Cebal e Löhner, 1997) e o esquema de refinamento em comum (*common-refinement based scheme*) (Jiao e Heath, 2004a). Esses são denominados de esquemas conservativos, pois são construídos visando manter o equilíbrio entre a energia absorvida/liberada pela estrutura e a energia absorvida/liberada pelo fluido.

No esquema de projeção nodal cada nó de interface da malha fonte (normalmente a do fluido) é projetado sobre a superfície da malha alvo (normalmente a da estrutura). Assim, um ou mais nós do fluido ficam localizados sobre um elemento da estrutura. As funções de forma do elemento finito da estrutura são então empregadas para interpolar quantidades no domínio do elemento. Com isso, as forças originadas pelo escoamento são transferidas dos nós do fluido para os nós da estrutura enquanto que os deslocamentos dos nós do fluido são determinados pela interpolação dos deslocamentos dos nós da estrutura.

No método de projeção de pontos de integração, os pontos de integração dos elementos da malha do fluido localizados na interface são projetados sobre os elementos da estrutura. As forças e deslocamentos são transmitidos entre as malhas utilizando o conceito de resíduos ponderados. Isso traz ao método a potencialidade de ser matematicamente ótimo, pois a transferência de informações pode ser realizada com um erro igual ou inferior ao da própria discretização dos meios na interface (Farhat et al., 1998). No entanto, devido à irregularidade da posição dos pontos no interior do elemento finito, o processo de integração numérica fica prejudicado, degradando a precisão do esquema (Jaiman et al., 2005). Além disso, em problemas aeroelásticos a malha do fluido é normalmente muito mais refinada que a da estrutura ( $h_F \approx h_E^2$ ) fazendo com que a precisão dos esquemas de projeção nodal, cujo erro é de  $\mathcal{O}(\sqrt{h_F})$ , e projeção de pontos de integração, cujo erro é de  $\mathcal{O}(h_E + h_F)$  sejam equivalentes, pois nesse caso  $\mathcal{O}(\sqrt{h_F}) \cong \mathcal{O}(\sqrt{h_E^2}) = \mathcal{O}(h_E)$  e  $\mathcal{O}(h_E + h_F) \cong \mathcal{O}(h_E)$ . Contudo, o segundo método apresenta demanda computacional muito superior, sendo sua aplicação proibitiva em malhas refinadas utilizadas em problemas tridimensionais (Farhat et al., 1998).

O método do refinamento em comum (Jiao e Heath, 2004a) é o mais recente dentre os esquemas relacionados acima. Esse método emprega uma malha auxiliar na interface,

que é constituída por subelementos definidos pela interseção entre as malhas do fluido e da estrutura. Com isso, fica associado a cada nó da malha auxiliar um nó da malha do fluido ou um nó da malha da estrutura. As forças do escoamento sobre a estrutura são obtidas por integração realizada na malha auxiliar. Essa malha também é utilizada para a transferência das condições cinemáticas da estrutura para o fluido. Conforme estudos realizados por Jaiman et al. (2005), os problemas de degradação da precisão devido à irregularidade dos nós ou pontos de integração associada aos dois métodos apresentados anteriormente não são encontrados no esquema de refinamento em comum. Com o emprego desse esquema também é possível reduzir o erro da modelagem através do refinamento das malhas do fluido e da estrutura na interface, o que não necessariamente ocorre quando os métodos de projeção nodal ou projeção de pontos de integração são empregados. A superioridade do esquema de refinamento em comum também é demonstrada com relação à modelagem de superfícies de curvatura acentuada, conforme estudo apresentado por Jaiman et al. (2006). Em resumo, o esquema de refinamento em comum tem apresentado precisão superior a dos demais métodos demandando um esforço computacional parecido.

Nesse trabalho será empregado o esquema de projeção nodal para realizar a transferência de informações entre as malhas do fluido e da estrutura na interface dos meios. Embora seja menos preciso do que o esquema de refinamento em comum, o método de projeção nodal ainda se apresenta como uma boa opção para a análise de problemas aeroelásticos, pois leva em conta o equilíbrio de forças e a conservação de energia na interface. Uma demonstração disso são os exemplos de aplicação desse método em problemas altamente complexos como a análise aeroelástica de aeronaves completas (Farhat et al. (2003) e Farhat et al. (2001)) e de edificações (Braun, 2007). Também está sendo considerado que a implementação do esquema de projeção nodal é muito mais simples que a do esquema de refinamento em comum, pois este demanda a construção de uma malha auxiliar a partir das malhas do fluido e da estrutura na interface. A construção da malha auxiliar é relativamente simples em problemas bidimensionais, mas ganha muita complexidade em problemas tridimensionais<sup>1</sup>.

A aplicação do esquema de transmissão de informações entre malhas empregado nesse

---

<sup>1</sup>Ver os trabalhos Jiao e Heath (2004b) e Jiao e Heath (2004c) sobre a geração das malhas auxiliares para o esquema de refinamento em comum.

trabalho requer a projeção ou mapeamento geométrico dos nós da malha do fluido sobre a malha da estrutura. Essa operação envolve apenas os nós e elementos das duas malhas que estão localizados na interface fluido-estrutura. O processo é realizado anteriormente ao início da análise do problema aeroelástico e pode ser descrito pelas seguintes etapas: (a) Associar cada nó  $i$  da malha do fluido ao elemento mais próximo pertencente à malha da estrutura. (b) Determinar o ponto de projeção do nó do fluido sobre o elemento da estrutura ao qual está associado. (c) Calcular a posição da projeção do nó  $i$  do fluido em termos das coordenadas naturais da face do elemento da estrutura. No caso do elemento triangular plano de casca empregado nesse trabalho, o nó  $i$  tem coordenadas de área  $\zeta_i = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}_i$ . As etapas (a) e (b) são realizadas basicamente por operações geométricas e de busca na estrutura de dados das duas malhas. Já a operação (c) envolve o mapeamento inverso, que permite a obtenção das coordenadas naturais de um ponto ( $\zeta$ ) a partir das coordenadas cartesianas desse ponto. Tais procedimentos são descritos em Maman e Farhat (1995), Löhner (1995) e Braun (2007).

Tendo cada nó de interface da malha do fluido projetado sobre um elemento da estrutura é possível realizar a transferência de forças e condições cinemáticas entre as duas malhas. Essa operação é realizada usando a geometria e as funções de forma dos elementos de interface da estrutura. A força que o escoamento exerce sobre o nó  $j$  de interface da malha da estrutura ( $\mathbf{F}_E^j$ ) é calculado como:

$$\mathbf{F}_E^j = \sum_{e=1}^{n_e} \left( \sum_{i=1}^{n_f} N_E^j(\zeta_i) \mathbf{F}_F^i \right)_e \quad (4.11)$$

Nessa equação  $n_e$  é o número de elementos de interface da estrutura ( $e$ ) conectados ao nó  $j$  e  $n_f$  é o número de nós de interface do fluido que estão projetados sobre um desses elementos. Adicionalmente,  $N_E^j(\zeta_i)$  é a função de forma no elemento  $e$  associada ao nó  $j$  e calculada com as coordenadas naturais que determinam a posição da projeção do nó  $i$  do fluido sobre o elemento. Por último,  $\mathbf{F}_F^i$  é o vetor de força correspondente ao nó  $i$  do fluido, sendo este calculado a partir da malha do fluido.

A transferência de condições cinemática da estrutura para o fluido é realizada pela interpolação dos valores nodais de deslocamento e de velocidades verificadas na estrutura. O deslocamento ( $\mathbf{u}_F^i$ ) e a velocidade ( $\dot{\mathbf{u}}_F^i$ ) do nó  $i$  do fluido é obtido com base no deslocamento ( $\mathbf{u}_E^j$ ) e velocidade ( $\dot{\mathbf{u}}_E^j$ ) de cada um dos  $nnel$  nós  $j$  do elemento da estrutural

sobre o qual o nó do fluido foi projetado. A contribuição de cada nó  $j$  é ponderada através do valor da função de forma do elemento da estrutural associada a esse nó ( $N_E^j(\zeta_i)$ ) e calculada com as coordenadas naturais que determinam a posição da projeção do nó do fluido.

$$\mathbf{u}_F^i = \sum_{j=1}^{nnel} N_E^j(\zeta_i) \mathbf{u}_E^j \quad (4.12a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_F^i = \sum_{j=1}^{nnel} N_E^j(\zeta_i) \dot{\mathbf{u}}_E^j \quad (4.12b)$$

O funcionamento do esquema de projeção nodal é ilustrado de forma simplificada na Fig. 4.3. Nessa figura apenas os nós 1 e 8 da malha do fluido coincidem com nós da estrutura (nós 1 e 3, respectivamente), permitindo que as informações sejam transmitidas diretamente. Para os demais nós, a transferência de informação se dá pela metodologia apresentada acima. Primeiramente, os nós do fluido são projetados sobre a superfície da estrutura (pontos brancos). Em seguida, são calculadas as coordenadas naturais ( $\zeta$ ) de cada nó do fluido dentro do elemento no qual foi projetado. Posteriormente a força do escoamento sobre a superfície ( $\mathbf{F}_F^i$ ) que foi calculada em um nó  $i$  do fluido é transmitida para cada nó  $j$  do elemento sobre o qual o nó  $i$  está projetado, contribuindo para a formação dos vetores de força ( $\mathbf{F}_E^j$ ). No processo inverso o deslocamento (e da mesma forma a velocidade) do nó do fluido é obtido interpolando as velocidades verificadas nos nós do elemento sobre o qual o nó do fluido está projetado.

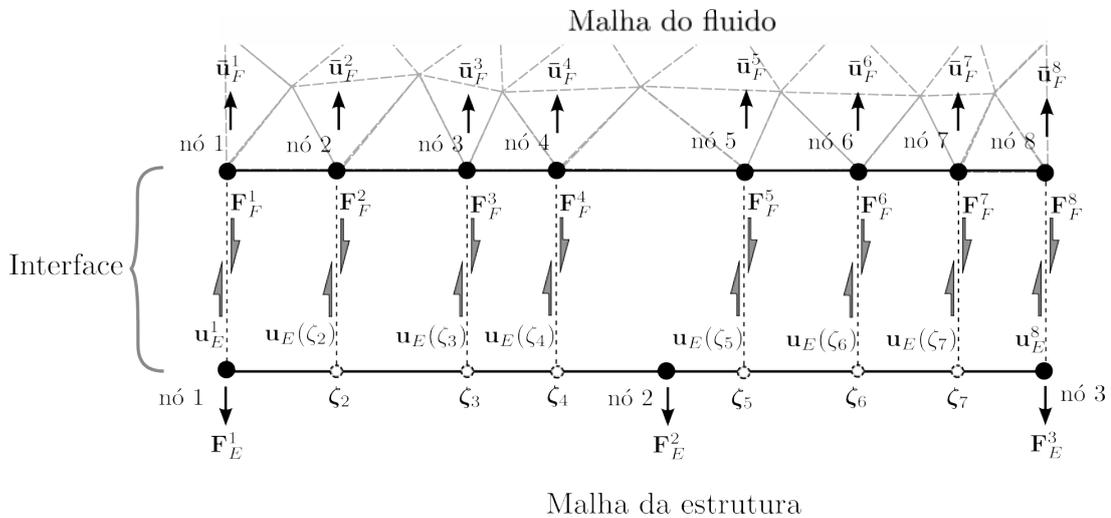


Figura 4.3: Transferência de dados baseada no esquema de projeção nodal

---

# Capítulo 5

## Exemplos de aplicação

Nesse capítulo são apresentados exemplos de aplicação dos algoritmos descritos nas seções anteriores. As duas primeiras seções trazem problemas relacionados à análise estática e dinâmica de estruturas considerando a não linearidade geométrica. A seção seguinte se destina à demonstração da capacidade de análise do algoritmo de CFD implementado. Os problemas abordados contemplam escoamento em malhas fixas e malhas móveis. Na última seção são apresentados exemplos de aplicação do conjunto de algoritmos na análise de problemas aeroelásticos.

### 5.1 Análise estática não linear geométrica de estruturas

A aplicação do algoritmo implementado para a análise não linear geométrica de estruturas formadas por placas e cascas é apresentado a seguir. São considerados materiais compósitos laminados e materiais isotrópicos. Os exemplos apresentados nas seções 5.1.1 e 5.1.2 são introduzidos visando demonstrar a habilidade do algoritmo em resolver problemas com grandes deslocamentos (translações e rotações) e apresentando forte não linearidade. Esses problemas são parte de um conjunto de benchmarks, compilados em Sze et al. (2004), popularmente empregados para validar métodos de análise não linear geométrica de cascas e placas. Assim como no trabalho de referência, não são apresentadas unidades para as propriedades dos materiais ou para as dimensões da estrutura. Também não é avaliado o nível de deformação do material, embora a configuração deformada da estrutura na no exemplo da Seção 5.1.1 indique a ocorrência de deformações consideráveis

---

(ao menos em algumas regiões) na casca. Em Sze et al. (2004) tais problemas foram analisados através do programa comercial ABAQUS, utilizando um elemento retangular plano (S4R) com quatro nós para cascas finas ou espessas, considerando deformações finitas e empregando a formulação lagrangeana atualizada. A Seção 5.1.3 apresenta a análise de uma placa com enrijecedor, visando demonstrado o bom desempenho obtido pelo algoritmo implementado nos problemas com flexão no plano da estrutura.

### 5.1.1 Casca laminada semicilíndrica sob carga pontual na extremidade

Esse exemplo trata da análise da casca semicilíndrica apresentada na Fig. 5.1. Esta casca está sujeita a uma força vertical descendente  $P = 2000$  no topo da sua borda livre. A extremidade oposta à aplicação da carga é completamente engastada, enquanto que as bordas horizontais são rotuladas conforme restrições apresentadas na figura. Considera-se que a casca é fabricada com um material compósito laminado. São analisadas duas situações com laminados apresentando as sequências de laminação  $[90/0/90]$  e  $[0/90/0]$ , tomando a direção  $0^\circ$  como alinhada ao eixo  $x$ . Para ambos os casos todas as lâminas tem espessura  $t = 1$ .

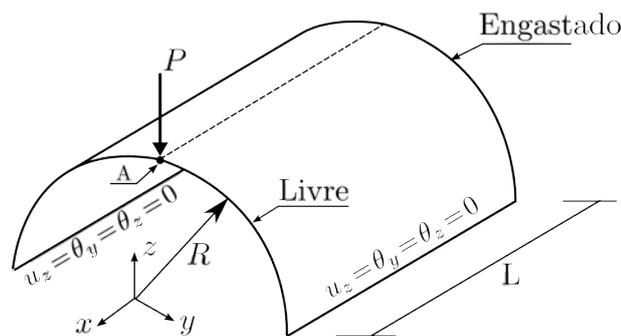


Figura 5.1: Geometria e carregamento da casca semicilíndrica

As propriedades mecânicas do material compósito que forma as lâminas são:  $E_1 = 2068,5$ ,  $E_2 = 517,125$ ,  $G_{12} = 795,6$  e  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,3$ . A casca é geometricamente definida pelo comprimento  $L = 304,8$  e o raio  $R = 101,6$ . Graças à simetria observada na geometria e no material, apenas a metade da estrutura precisa ser modelada na análise. Para tanto são consideradas condições de contorno de simetria no plano  $x-z$ .

Nas análises realizadas foram testadas duas malhas, ilustradas na Fig. 5.2, para a

modelagem de metade da casca. Ambas as malhas são regulares e definidas por  $n_R \times n_L$ , onde  $n_R$  é o número de divisões iguais ao longo da borda curva e  $n_L$  é o número de divisões iguais ao longo da direção longitudinal. Essas divisões definem “células” retangulares cada uma contendo dois elementos triangulares. A primeira malha  $40 \times 40$  é mais refinada, contando com 3200 elementos e 1681 nós. Essa malha foi construída de modo a conter o mesmo número de nós que a malha empregada no trabalho de referência (Sze et al., 2004). A segunda malha  $16 \times 24$  é formada por 768 elementos e 425 nós. Essa malha tem cerca de 1/4 do número de nós e elementos da primeira malha, servindo para verificar a perda de precisão devido ao menor refinamento na discretização espacial da estrutura.

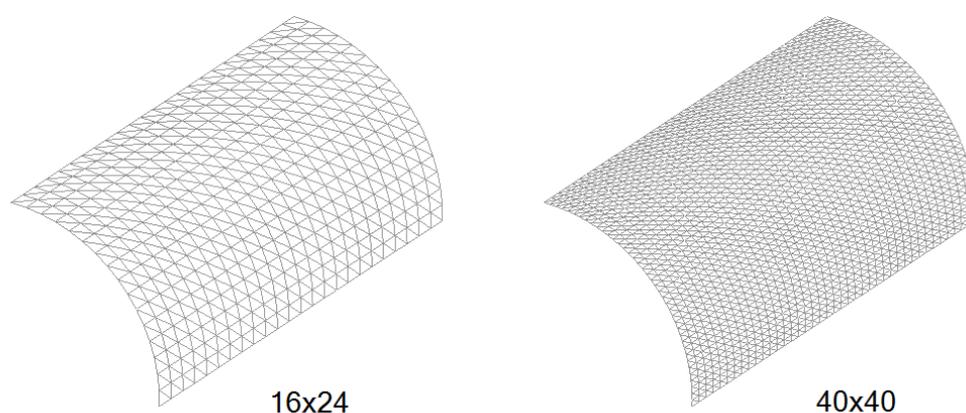


Figura 5.2: Malhas de elementos finitos para a casca semicilíndrica

Os resultados obtidos na análise utilizando a malha  $40 \times 40$  são apresentados na Fig. 5.3 na forma do deslocamento vertical para baixo do ponto A (ver Fig. 5.1). Nessa figura também estão incluídos os resultados obtidos por Sze et al. (2004). Como é demonstrado na Fig. 5.3, existe uma ótima concordância entre os dois resultados.

A Fig. 5.4 mostra as respostas das análises empregando as malhas  $40 \times 40$  e  $16 \times 24$ . Novamente é descrito o deslocamento vertical do ponto A ao longo da evolução do carregamento. Observa-se que a drástica redução no tamanho da malha não degrada significativamente a resposta obtida pelo algoritmo no que diz respeito ao cálculo de deslocamentos. As configurações das cascas ao final do carregamento são ilustradas na Fig. 5.5. São apresentadas as deformadas para os laminados  $[90/0/90]$  e  $[0/90/0]$ .

Este exemplo é interessante por demonstrar a capacidade da formulação empregada nesse trabalho em analisar corretamente problemas não lineares com presença de grandes deslocamentos e principalmente grandes rotações. O deslocamento final do ponto A, onde

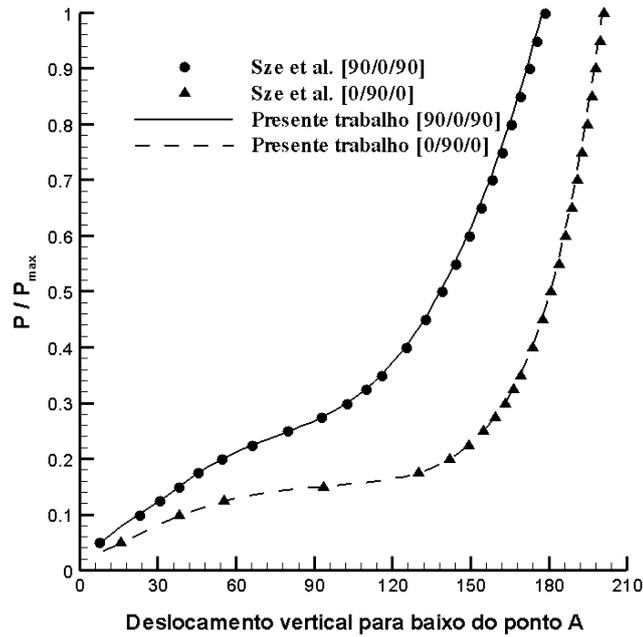


Figura 5.3: Deslocamento do ponto A considerando os laminados [90/0/90] e [0/90/0]

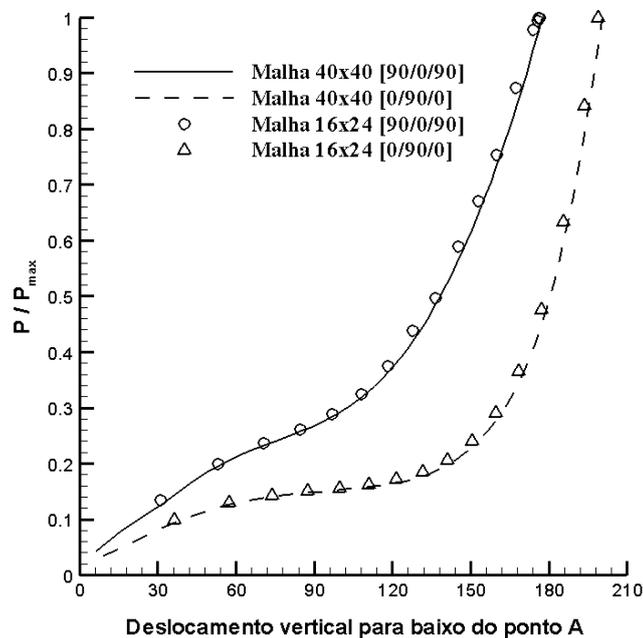


Figura 5.4: Deslocamento do ponto A obtidos pelas malhas  $40 \times 40$  e  $16 \times 24$ .

a carga é aplicada, é de mais de 1,5 vezes o raio  $R$ . Além disso, esse exemplo é amplamente empregado na literatura para verificação e comparação de algoritmos destinados à análise não linear geométrica de cascas de materiais compósitos laminados.

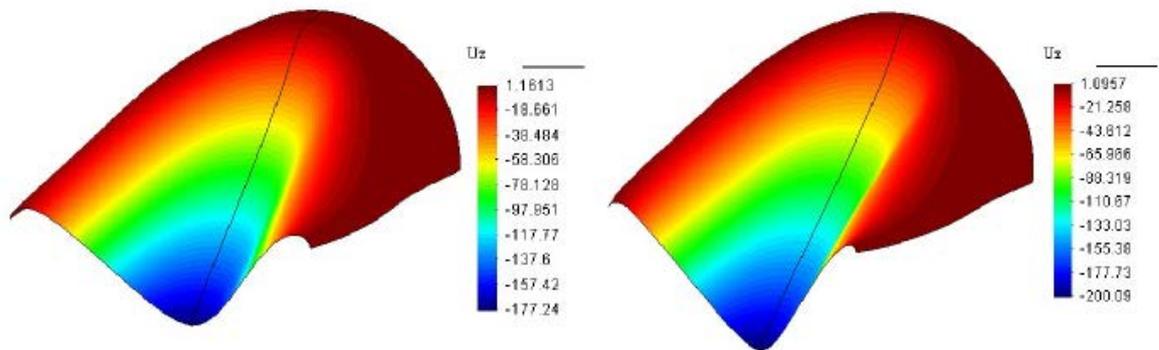


Figura 5.5: Delocamento vertical na configuração deformada final para casca com laminado  $[90/0/90]$  (esquerda) e  $[0/90/0]$  (direita).

### 5.1.2 Painel laminado semicilíndrico rotulado

Esse exemplo trata da análise estrutural de um painel semicilíndrico com bordas rotuladas e submetido a uma carga concentrada no ponto central. A geometria, as vinculações e o carregamento do painel são apresentados na Fig. 5.6a. O valor máximo de carregamento aplicado é  $P = 300$ . Dois laminados com seqüências de laminação  $[90/0/90]$  e  $[0/90/0]$  são considerados, tomando a fibra de orientação  $0^\circ$  como alinhada ao eixo  $x$ . Nos dois casos a casca tem espessura total  $h = 6,3$  com todas as lâminas de mesma espessura. As propriedades mecânicas do material compósito que constitui as lâminas são:  $E_1 = 3300$ ,  $E_2 = 1100$ ,  $G_{12} = 660$  e  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,25$ .

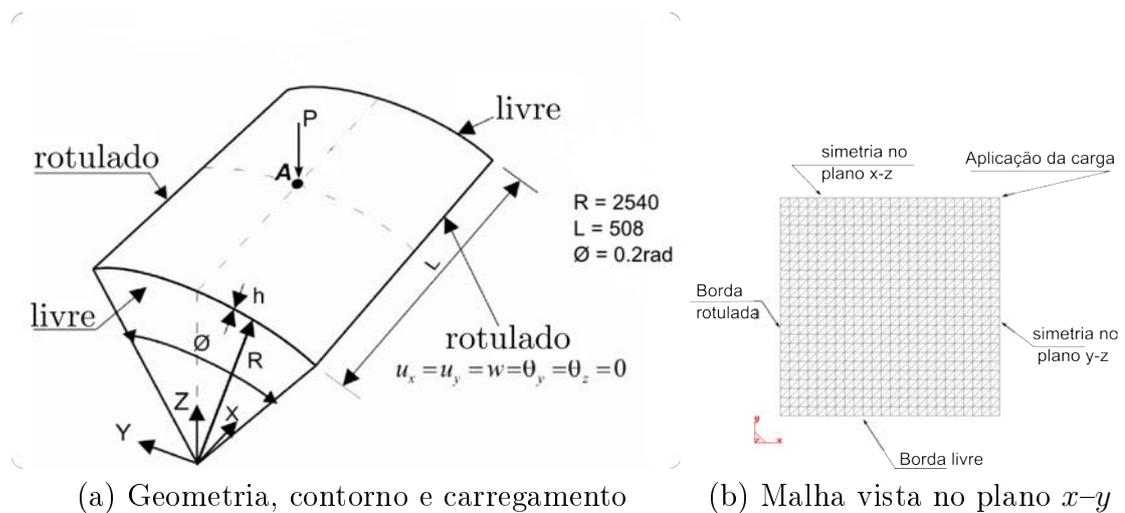


Figura 5.6: Painel laminado semicilíndrico rotulado

Esse exemplo é muito popular na literatura devido à forte não linearidade apresentada

pela estrutura durante o carregamento. São observados pontos de “*snap-through*” e “*snap-back*” no comportamento pós-flambagem que ocorre após ter sido atingido o primeiro ponto crítico do carregamento. Por esses motivos o caso analisado nesse problema é um bom teste para verificar a capacidade do algoritmo implementado em resolver problemas altamente não lineares.

Dada a simetria do problema, apenas um quarto da estrutura foi modelada na análise utilizando para tanto uma malha regular de tamanho  $24 \times 24$ , como ilustrado na Fig. 5.6b. Essa malha tem o mesmo número de nós que a malha empregada no trabalho de Sze et al. (2004), utilizado aqui como referência para comparação de resultados. Na Fig. 5.7a é apresentada a evolução do deslocamento vertical do ponto A (ver Fig. 5.6a) ao longo do carregamento considerando a casca formada pelo laminado  $[90/0/90]$ . São incluídos os resultados obtidos pelo presente trabalho e pelo trabalho de referência, verificando-se perfeita concordância entre os dois. A curva do deslocamento do ponto central do painel ilustra o alto nível de não linearidade da estrutura quando submetida ao carregamento em questão.

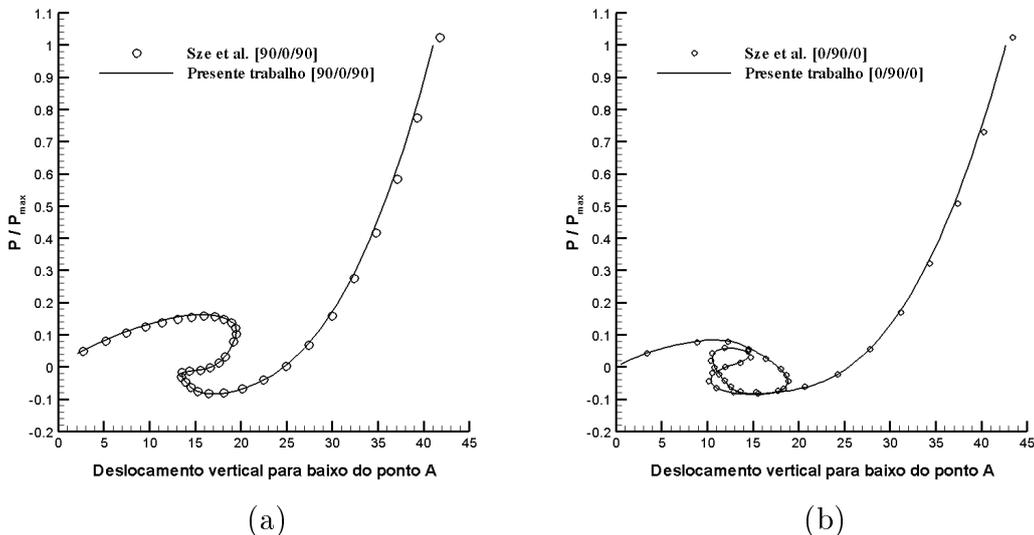


Figura 5.7: Deslocamento vertical do ponto A no painel semicilíndrico

A Fig. 5.7b apresenta a evolução do deslocamento vertical do ponto A considerando a casca formada pelo laminado  $[90/0/90]$ . Novamente são incluídos os resultados obtidos no presente trabalho e os obtidos no trabalho de Sze et al. (2004), permitindo a verificação da plena concordância entre os dois. Nesse caso, a não linearidade da resposta estrutural

é ainda mais rigorosa.

### 5.1.3 Placa engastada com enrijecedor

A estrutura analisada nesse exemplo consiste de uma placa enrijecida com formato retangular alongado como ilustrado na Fig. 5.8. Nesse caso é considerado um material isotrópico com características mecânicas dadas por:  $E = 120 \times 10^6$ ,  $G = 60 \times 10^6$  e  $\nu = 0$ . A geometria é definida pelo comprimento  $L = 10$ , a largura  $b = 1$ , a altura do enrijecedor  $h = 0,1$  e a espessura  $t = 0,01$ , que é igual tanto para a placa quanto para o enrijecedor.

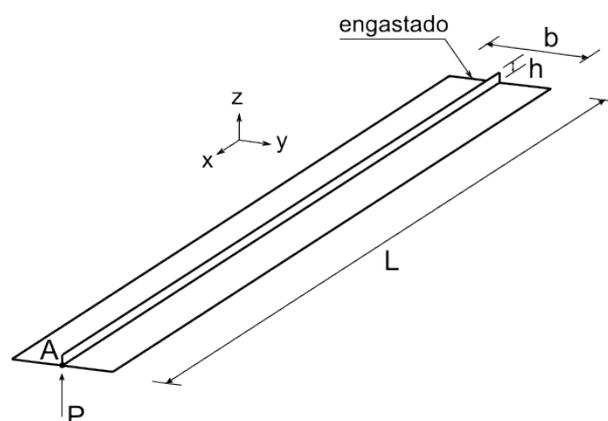


Figura 5.8: Geometria da placa engastada com enrijecedor

A introdução desse exemplo visa demonstrar a superioridade do elemento implementado nesse trabalho no que diz respeito à análise de problemas em que a flexão no plano da casca é importante. Essa forma de solicitação ocorre no enrijecedor da placa quando a esta é carregada conforme ilustrado na Fig. 5.8. Considerando que o elemento de casca empregado na modelagem da placa enrijecida é formado pela junção de um elemento de membrana e um elemento de placa (ver Seção 2.3), pode-se considerar que nesse caso a resposta do problema é determinada pela resposta do elemento de membrana.

Como foi discutido na Seção 2.3.1, a maioria dos elementos triangulares utilizados para análise de membranas apresenta erros na análise de problemas cuja solicitação predominante é de flexão no plano. A degradação da resposta se deve ao fenômeno de travamento por razão de aspecto. No entanto, o elemento OPT (Felippa, 2003), empregado nesse trabalho para compor a rigidez de membrana do elemento de casca, foi desenvolvido visando um comportamento otimizado para esse tipo de solicitação.

A performance superior do elemento OPT é demonstrada por (Felippa, 2003) no caso de análise linear. O estudo apresentado por Battini e Pacoste (2006) também coloca o elemento OPT como a melhor opção para a análise não linear geométrica de cascas empregando a formulação corrotacional. No presente trabalho é realizada uma comparação das respostas obtidas em análises em que o elemento de casca empregado é construído usando o elemento OPT ou o elemento ALL (Allman, 1988) como componente de membrana. Assim como o OPT, o elemento ALL possui a rotação em torno de um eixo perpendicular ao plano do elemento como um de seus graus de liberdade. Essa característica é muito conveniente para elementos utilizados como componente de membrana na construção de elementos de casca.

A comparação dos resultados obtidos nas análises empregando os dois elementos é realizada pelo deslocamento vertical da extremidade da placa (ponto A na Fig. 5.8) no final do carregamento. Para evitar qualquer influência do algoritmo de solução o tradicional método incremental-iterativo de Newton-Raphson é empregado com 20 passos de carga iguais. A influência da razão de aspecto na resposta é verificada pela realização de análises empregando diferentes malhas regulares designadas pelo número de divisões  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  (ao longo de  $L$ ,  $b$  e  $h$ ), respectivamente. Em todas as malhas a razão de aspecto dos elementos de placa é mantida constante  $\lambda_p = 1$ , enquanto que a razão de aspecto dos elementos do enrijecedor ( $\lambda_s$ ) varia em cada malha.

Os resultados das análises empregando os elementos OPT e ALL como componente de membrana da casca e utilizando diferentes malhas são apresentados na Tabela 5.1. Nessa tabela constam a razão de aspecto ( $\lambda_s$ ) e o número de elementos utilizados para modelar o enrijecedor em cada malha. Uma malha extremamente refinada 400/40/4, com 35200 elementos e 18045 nós é empregada para obter um valor de referência para o deslocamento do ponto A. Para o elemento OPT o pior resultado foi obtido com a malha 20/2/1, diferindo em 8% com relação ao valor de referência. Para todas as outras malhas com  $\lambda_s \neq 5$  os resultados variaram menos de 0,6% em relação à referência. Por outro lado, quando o elemento ALL foi empregado apenas as malhas mais refinadas (com mais de 400 elementos no enrijecedor) foram capazes de produzir respostas razoáveis, com deslocamento final variado entre 5,8% e 7% em relação à referência. Os resultados obtidos empregando as demais malhas demonstram uma falha catastrófica do elemento

ALL. No pior dos casos a resposta diferiu 62% em relação à análise de referência. Um comportamento semelhante foi relatado por Felippa (2003) para o caso de análise linear.

Tabela 5.1: Deslocamento final do ponto A obtidos com malhas e elementos diferentes

nx/ny/nz	elementos no enrijecedor	$\lambda_s$	ALL	OPT
20/2/1	40	5	0,334677	0,807845
40/4/1	80	2,5	0,590612	0,870239
40/4/2	160	5	0,607088	0,85095
100/10/1	200	1	0,750071	0,87679
100/10/2	400	2	0,806374	0,875223
100/10/3	600	3	0,814589	0,874341
100/10/4	800	4	0,81641	0,873186
100/10/5	1000	5	0,816447	0,871755
400/40/4	3200	1	0,866944	0,876082

## 5.2 Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas

Abaixo são apresentadas aplicações do algoritmo implementado para a análise transiente de cascas. São considerados materiais compósitos laminados e materiais isotrópicos. Uma variedade de laminados são estudados para demonstrar a boa qualidade dos resultados e correta captura das modificações de rigidez da casca devido à alteração na orientação das fibras de reforço. A capacidade de análise dinâmica envolvendo grandes deslocamentos (rotações e translações) em problemas integrados por longos períodos de tempo também é demonstrada. É verificado que o algoritmo mantém a estabilidade e conserva a energia do sistema nesses problemas.

### 5.2.1 Viga em balanço

Esse exemplo apresenta a análise de uma viga em balanço sob carga uniformemente distribuída apresentada na Fig. 5.9. Esse problema foi proposto por Bathe e Baig (2005), onde foi resolvido usando uma malha de  $400 \times 1$  elementos de estado plano de tensões com 9 nós e um algoritmo composto de avanço no tempo (*composite time-stepping algorithm*). Trabalhos anteriores (Braun e Awruch, 2008; Bathe e Baig, 2005) demonstraram que o método de Newmark falha na integração temporal nesse problema.

Uma malha regular com  $800 \times 1$  elementos (1600 elementos e 802 nós) é empregada para a discretização espacial da viga. Os deslocamentos e rotações  $u_y$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_z$  são impedidos em todos os nós. Adicionalmente são aplicadas restrições a todos os deslocamentos e rotações nos nós da extremidade engastada. É empregado um passo de tempo  $\Delta t = 0.004s$  e a amplitude do carregamento ao longo do tempo é definida por uma função triangular apresentada na Fig. 5.9.

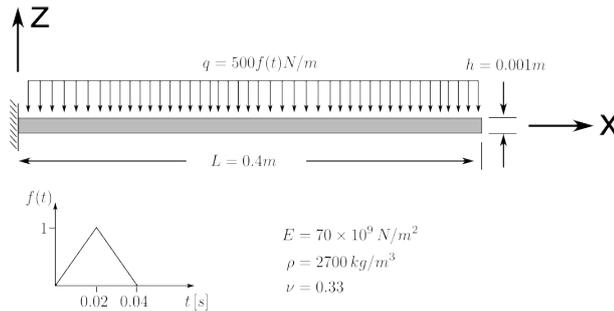


Figura 5.9: Geometria, propriedades do material e carregamento

O resultado da análise realizada nesse trabalho é apresentado na Fig. 5.10 através da evolução do deslocamento vertical da extremidade livre ao longo do tempo. Tanto a amplitude de  $0,155$  mm quanto a frequência de  $5,3$  Hz do movimento obtidos nesse trabalho são equivalentes aos reportados por Bathe e Baig (2005), demonstrando o funcionamento correto do algoritmo utilizado.

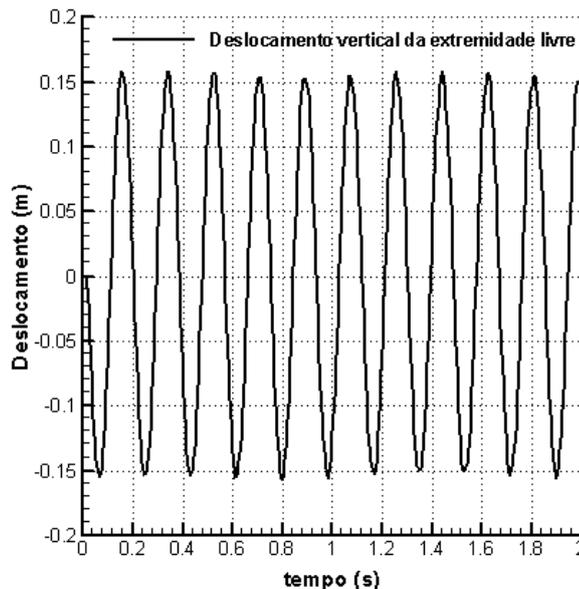


Figura 5.10: Deslocamento vertical da extremidade livre

Uma sequência de configurações deformadas da viga em intervalos de  $0,02s$  são

apresentadas na Fig. 5.11. A Fig. 5.12 apresenta a evolução da energia cinética e interna da viga durante o movimento. Observa-se que a energia total se mantém após o período inicial de carregamento (0,04s iniciais), demonstrando característica de conservação da energia inerente ao algoritmo de integração temporal empregado.

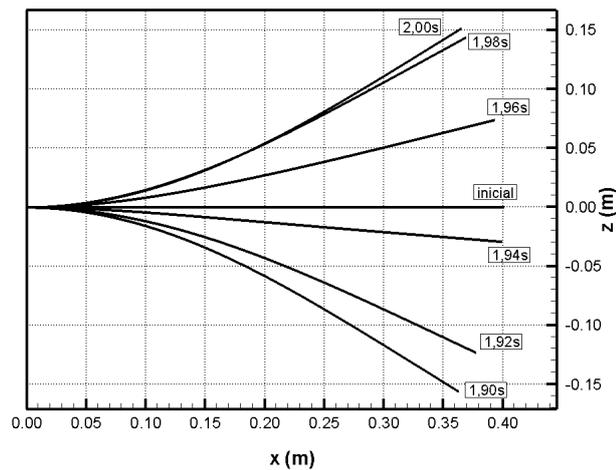


Figura 5.11: Configurações deformadas da viga em balanço

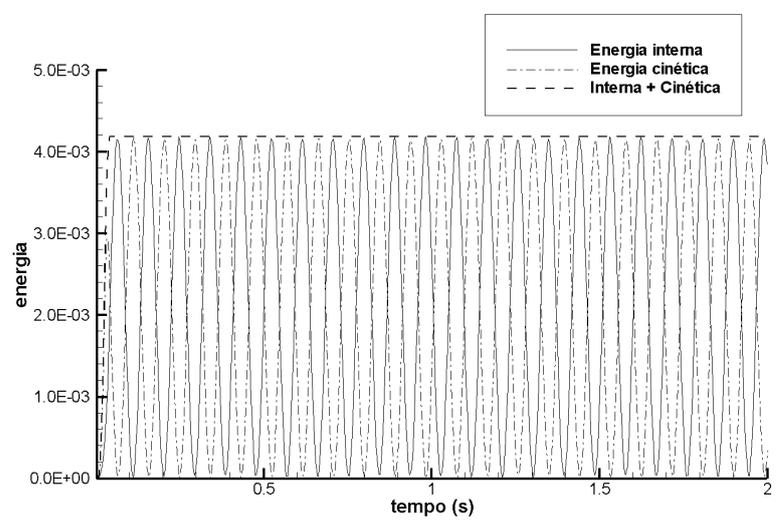


Figura 5.12: Evolução da energia da viga em balanço

## 5.2.2 Resposta transiente não linear de um painel esférico laminado

Nesse problema são apresentadas as análises transientes não lineares de três painéis laminados. A geometria do painel esférico simplesmente apoiado é definida na Fig. 5.13,

onde  $R = 5m$  e  $a = 0,5m$ . Dois valores de espessura total da casca ( $h$ ) são considerados, sendo definidos conforme as relações geométricas  $a/h = 100$  e  $a/h = 50$ . Os laminados empregados são um laminado rígido a flexão (*bending stiff laminate*)  $[0_2/\pm 30]_s$ , um laminado quasi-isotrópico (*quasi-isotropic laminate*)  $[0/\pm 45/90]_s$  e um laminado rígido a torção (*torsion stiff laminate*)  $[\pm 45/\mp 45]_s$ . Esses laminados são constituídos de um compósito T300/5208 CFRP (*carbon fiber reinforced polymer*), apresentando as seguintes propriedades (Kundu e Sinha, 2006):  $E_1 = 181$  GPa,  $E_2 = 10.3$  GPa,  $G_{12} = G_{13} = 7.17$  GPa,  $G_{23} = 3.58$  GPa,  $\nu_{12} = 0.28$  e  $\rho = 1600$  kg/m<sup>3</sup>. Todas as lâminas de cada laminado têm a mesma espessura. A estrutura é carregada com uma pressão interna de  $1.0 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup>, aplicada subitamente na forma de uma função degrau.

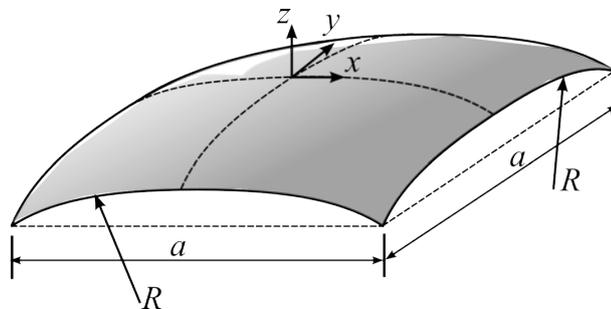


Figura 5.13: Geometria do painel esférico

Uma malha regular de  $16 \times 16$  (com 512 elementos e 289 nós) foi empregada para a discretização do painel inteiro, conforme apresentado na Fig. 5.14. A integração temporal é realizada com passos de tempo  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$  s. O número de nós e o incremento de tempo são iguais aos utilizados por Kundu e Sinha (2006), onde elementos isoparamétricos de nove nós para cascas de compósitos laminados desenvolvidos segundo coordenadas curvilíneas e considerando deformações por corte em primeira ordem foram empregados na análise. Esse trabalho é baseado na formulação lagrangeana total e utiliza o método de Newmark para a integração temporal.

As Fig. 5.15, Fig. 5.16 e Fig. 5.17 apresentam, respectivamente, o resultado das análises para o laminado rígido a flexão, o laminado quasi-isotrópico e o laminado rígido a torção em termos do valor normalizado do deslocamento vertical do ponto central do painel ( $u_z/h$ ). Nessas figuras também são incluídos os resultados obtidos por Kundu e Sinha (2006).

Como mostram as figuras, os resultados obtidos no presente trabalho são bastante

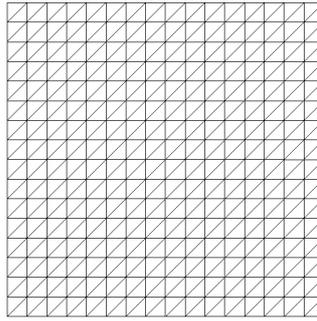


Figura 5.14: Malha do painel esférico no plano  $x-y$

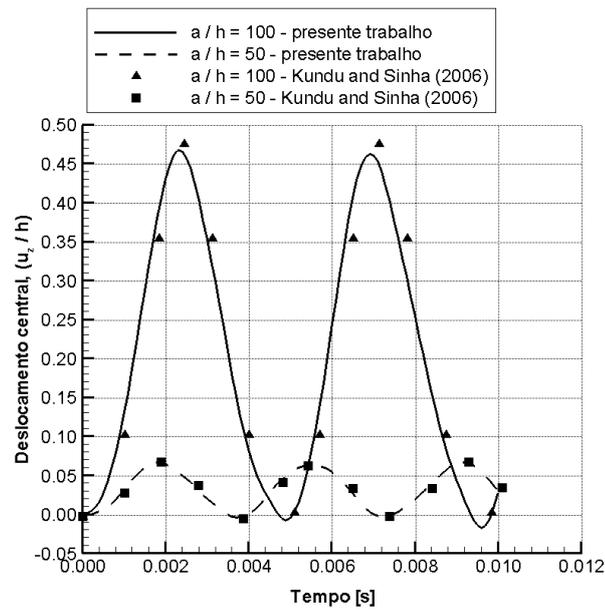


Figura 5.15: Deslocamento central normalizado para o painel com laminado rígido a flexão  $[0_2 / \pm 30]_s$ .

próximos aos apresentados no trabalho de referência. Existe apenas uma pequena diferença na amplitude e na frequência da resposta para os laminados mais finos ( $a/h = 100$ ). A resolução desse exemplo considerando os diversos laminados também demonstra a capacidade do algoritmo implementado em capturar a variação de rigidez do painel devido à alteração da sequência de laminação da casca.

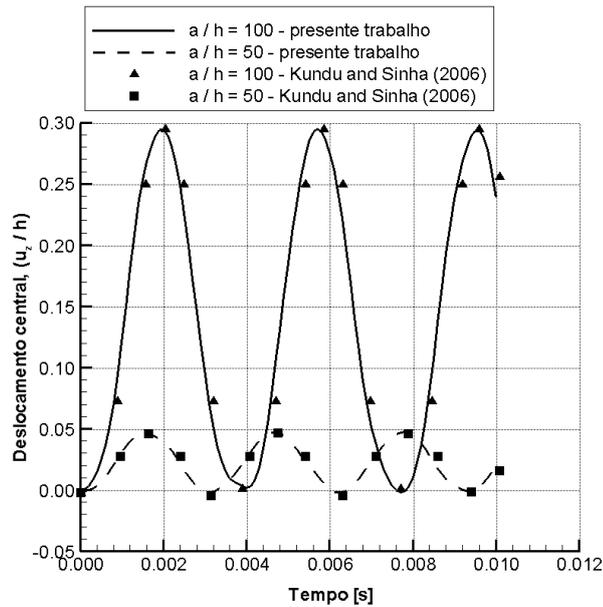


Figura 5.16: Deslocamento central normalizado para o painel com laminado quasi-isotrópico  $[0/\pm 45/90]_s$ .

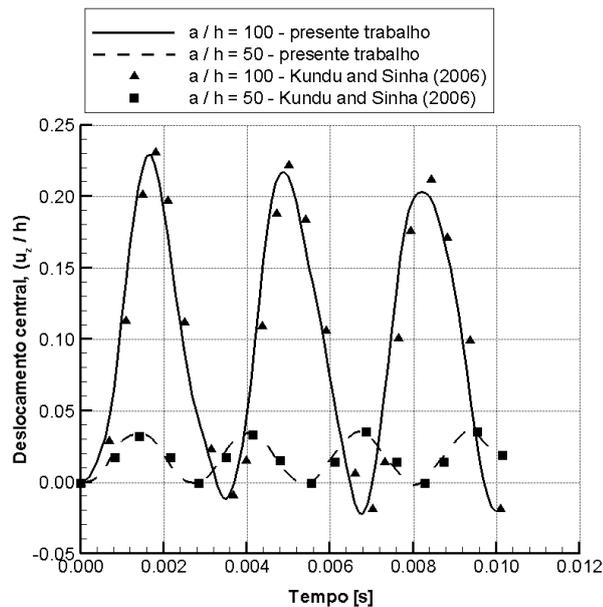


Figura 5.17: Deslocamento central normalizado para o painel com laminado rígido a torção  $[\pm 45/\mp 45]_s$ .

### 5.2.3 Placa engastada com enrijecedor

A placa com enrijecedor a ser analisada nesse exemplo é apresentada na Fig. 5.18. Essa placa é engastada em uma de suas extremidades e está submetida a uma carga vertical  $P = 100$  N que é aplicada subitamente no ponto A e mantida durante a análise. Tanto a placa quanto o enrijecedor são feitos do material compósito descrito no exemplo da Seção

5.2.2, com 8 camadas arranjadas segundo a sequência de laminação  $[(0/90)_2]_s$  e espessura total de 2.16 mm. As dimensões apresentadas na figura são  $L = 320$  mm,  $b = 80$  mm e  $h = 10$  mm.

Esse exemplo visa investigar a influência da formulação do componente de membrana do elemento finito na análise dinâmica não linear. Para tanto são comparadas as respostas obtidas utilizando o elemento OPT (Felippa, 2003) e o elemento de Allman (Allman, 1988). Nesse estudo são empregadas malhas regulares designadas por  $n_z/n_y/n_x$ , que representa o número de células retangulares (com dois elementos triangulares cada) usadas ao longo da altura do enrijecedor, da largura da placa e do comprimento da placa, respectivamente. O incremento de tempo adotado para todas as análises é  $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$  s.

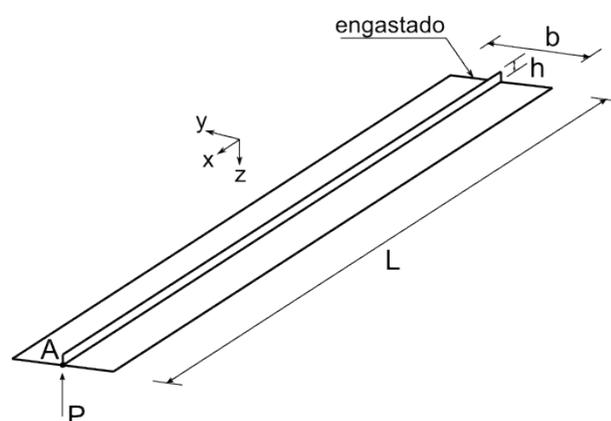


Figura 5.18: Placa engastada com enrijecedor com força transversal na extremidade livre

A Fig. 5.19 mostra o deslocamento do ponto A obtido em análises usando as seguintes malhas:  $1/8/32$ ,  $2/16/64$  e  $4/32/128$ , formadas por células retangulares de lados iguais de tal forma que os elementos tem razão de aspecto 1, conforme ilustrado na Fig. 5.20. Resultados idênticos utilizando os dois elementos testados são obtidos apenas com a malha mais refinada. Nos demais casos verifica-se a deterioração progressiva da qualidade da resposta quando o elemento de Allman é utilizado. Por outro lado, o elemento de membrana OPT continua apresentando boa precisão nas análises realizadas com as malhas menos refinadas.

Um estudo adicional é realizado para avaliar a influência da razão de aspecto dos elementos na resposta dinâmica. As malhas empregadas nessas análises são  $1/4/16$  e  $1/2/8$ , com a região do enrijecedor discretizada por elementos finitos com razão de aspecto 2 e 4, respectivamente, como ilustrado na Fig. 5.21. Os resultados apresentados na Fig. 5.22

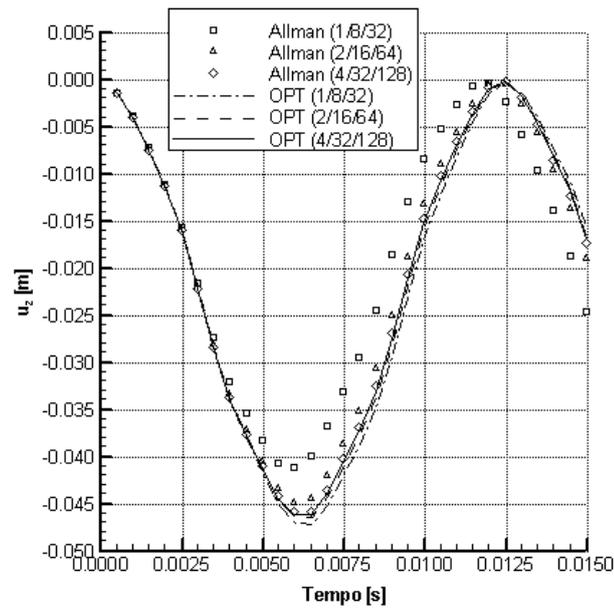


Figura 5.19: Deslocamento do ponto A para malhas com razão de aspecto 1

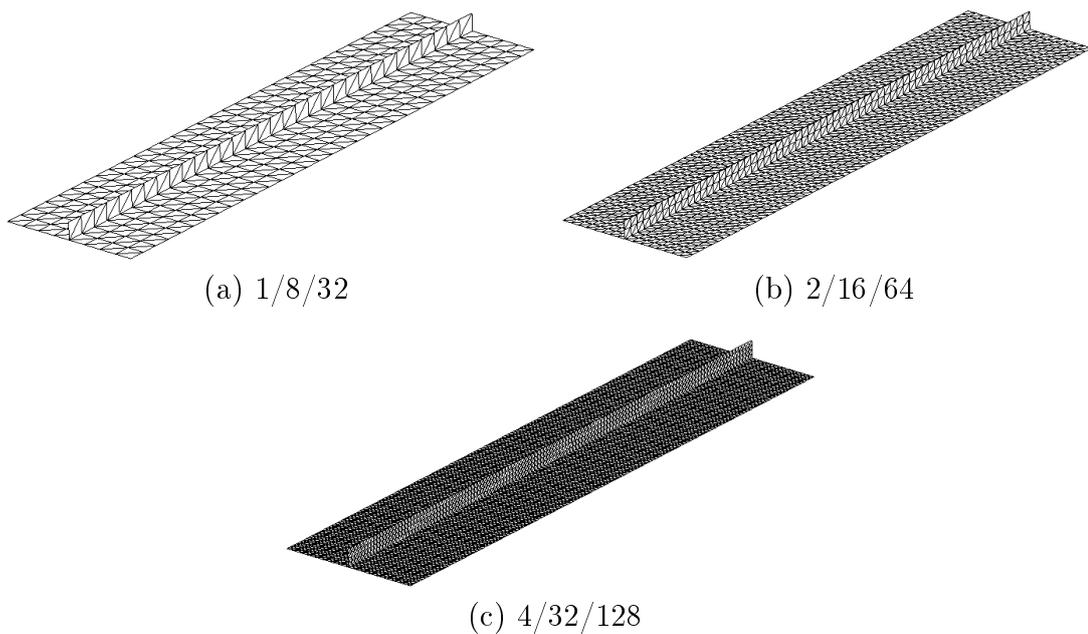


Figura 5.20: Malhas com razão de aspecto 1 para a placa engastada com enrijecedor

demonstram que a qualidade da solução se mantém para malhas mais distorcidas quando o elemento OPT é empregado. No caso em que formulação de Allman é utilizada os resultados observados são progressivamente piores com o aumento da razão de aspecto dos elementos na região do enrijecedor.

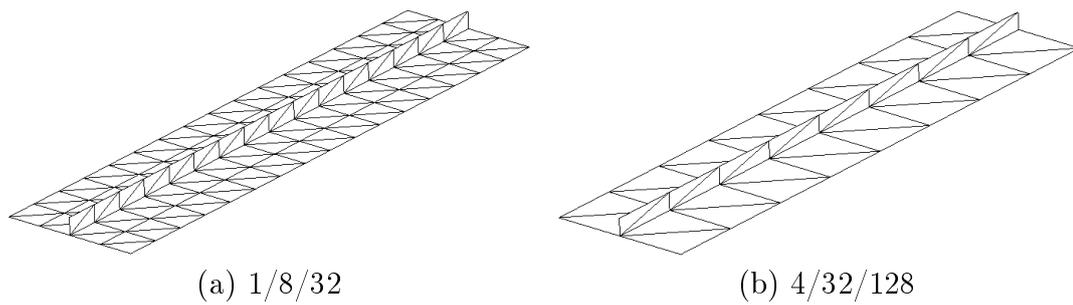


Figura 5.21: Malhas com razão de aspecto 2 e 4 para a placa engastada com enrijecedor

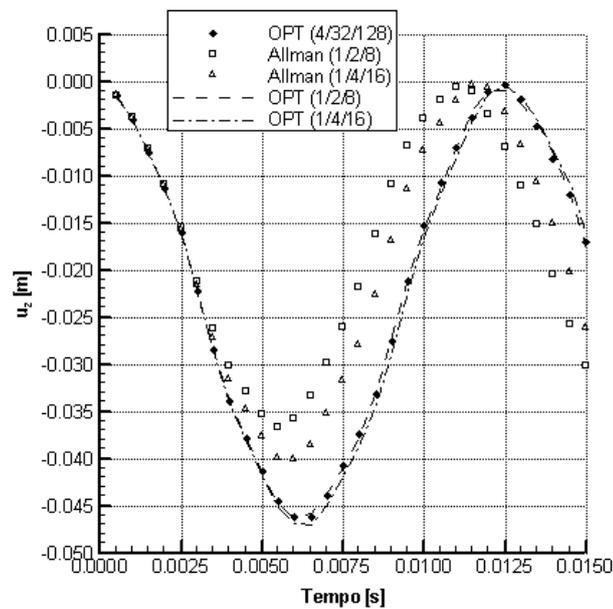


Figura 5.22: Deslocamento do ponto A para malhas com razão de aspecto 2 e 4

#### 5.2.4 Movimento livre de um cilindro curto

Esse é um exemplo clássico, proposto originalmente por Simo e Tarnow (1994), e amplamente empregado para demonstrar a capacidade de novos métodos ou algoritmos em resolver problemas com grandes deslocamentos livres (grandes translações e rotações) e integrados por longos intervalos de tempo. Nesse exemplo a estrutura é formada por um material isotrópico. Apesar disso, o problema é abordado no presente trabalho devido à falta de referência na literatura sobre análise dinâmica com grandes deslocamentos em estruturas de materiais compósitos laminados. Ainda assim, considera-se que o sucesso do algoritmo em resolver esse exemplo pode ser extrapolado para a análise de estruturas de materiais compósitos laminados. A razão disso é que os aspectos relativos à diferente relação constitutiva do material compósito laminado interferem apenas na formulação local do elemento, que é independente da formulação corrotacional empregada para a

análise dinâmica não linear, conforme descrito no Seção 2.6.

A geometria do cilindro curto é definida pelo diâmetro  $D = 15$ , pela altura  $H = 3$  e pela espessura  $h = 0.02$ . As propriedades do material são dadas por:  $E = 2 \times 10^8$ ,  $\nu = 0.5$  e  $\rho = 1$ . Na Fig. 5.23 são ilustrados os carregamentos aplicados sobre os nós localizados em posições descritas pelos ângulos  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $360^\circ$  tomados no sentido anti-horário a partir do eixo  $x$ . Nessa figura também estão presentes as dimensões do cilindro e a função que define a amplitude do carregamento ao longo do tempo ( $f(t)$ ).

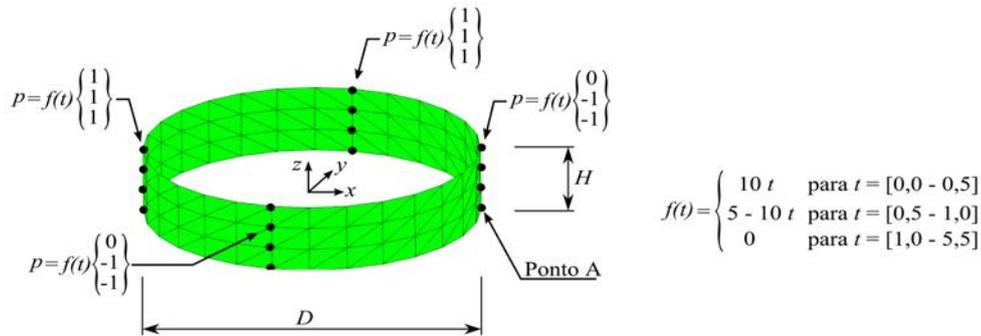


Figura 5.23: Geometria do cilindro curto e carregamento

A estrutura é discretizada por uma malha com  $28 \times 3$  “células” retangulares com dois elementos triangulares cada (correspondendo a 168 elementos e 84 nós). Essa malha tem o mesmo número de nós que a utilizada por Brank et al. (2003) para a solução do problema. Esse trabalho é tomado como referência para comparação de resultados, pois, além da variação da energia com o tempo, também são fornecidos o deslocamento e a velocidade de um ponto da estrutura. Nessa referência são empregados elementos retangulares que consideram rotações finitas através de vetores diretores da normal da superfície da casca.

O maior passo de tempo empregado para a integração temporal que resulta em solução adequada do problema no presente trabalho é de  $\Delta t = 5.0 \times 10^{-2} s$ . Isso representa a metade do passo de tempo utilizado em Brank et al. (2003), mas é 2,5 vezes maior do que o empregado por Simo e Tarnow (1994). Em Brank et al. (2003) a integração temporal é realizada por meio de algoritmos conservativos-dissipativos baseados no equilíbrio no ponto médio do passo de tempo (*midpoint-rule*).

Os deslocamentos do ponto A, localizado inicialmente em  $(\frac{D}{2}, 0, 0)$  (ver Fig. 5.23),

são apresentados na Fig. 5.24. Também são incluídos os deslocamentos obtidos no mesmo ponto por Brank et al. (2003), demonstrando a ótima concordância entre os dois resultados.

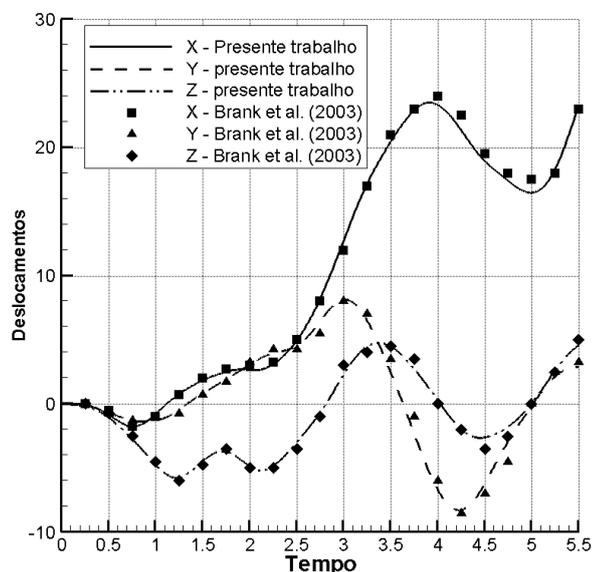


Figura 5.24: Deslocamentos do ponto A nas direções X, Y e Z.

A Fig. 5.25 apresenta os componentes de velocidade em cada direção para o ponto A durante a integração do problema. Nesse caso não foi possível reproduzir os resultados do trabalho de referência, pois neste há muita flutuação da velocidade. No entanto, os resultados obtidos no presente trabalho são plenamente compatíveis com a tendência média das velocidades apresentadas em Brank et al. (2003).

Em seguida são apresentadas na Fig. 5.26 as curvas de variação da energia cinética ( $\phi^k$ ), energia interna ( $\phi^i$ ) e energia total ( $\phi^{total} = \phi^k + \phi^i$ ), representadas por  $k$ ,  $i$  e  $k + i$ , respectivamente. Esses resultados demonstram que a característica de conservação da energia total é verificada no algoritmo implementado. A variação da energia obtida em Brank et al. (2003) também é introduzida na Fig. 5.26, demonstrando que os resultados do presente trabalho e da referência também são compatíveis no que diz respeito à evolução da energia do sistema.

Por último, o movimento livre do cilindro é ilustrado na Fig. 5.27, onde são apresentadas simultaneamente várias configurações assumidas pelo cilindro ao longo do tempo. Essa figura mostra a posição e a deformação real do cilindro, sem introdução de nenhuma amplificação.

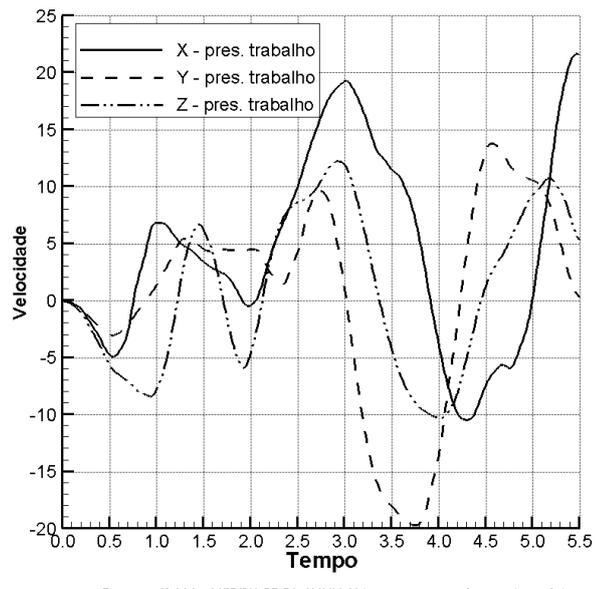


Figura 5.25: Velocidade do ponto A nas direções X, Y e Z.

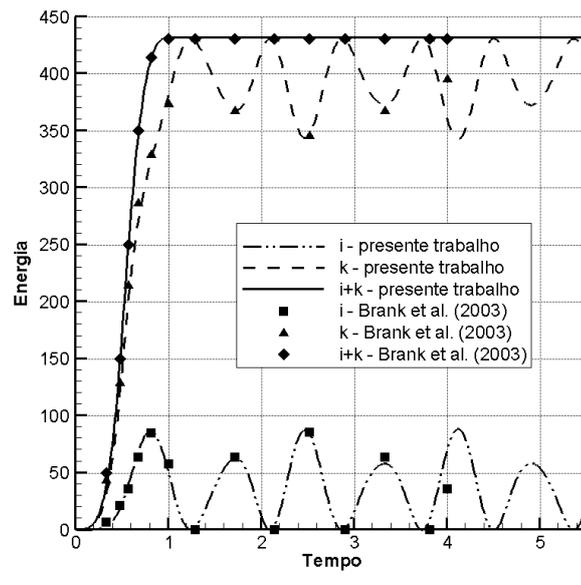


Figura 5.26: Evolução da energia interna (i), cinética (k) e total (i+k) durante o movimento do cilindro.

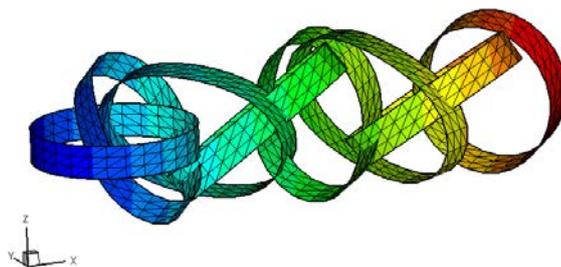


Figura 5.27: Sequência de configurações do cilindro durante seu movimento.

### 5.2.5 Movimento livre de meio cilindro de material compósito

Nesse exemplo é considerado o problema envolvendo o movimento livre de um meio cilindro formado por três camadas. A geometria e o carregamento são apresentados na Fig. 5.28. A camada mais interna do cilindro é constituída por um material isotrópico com módulo de Young  $E = 8600\text{N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$  e massa específica  $\rho = 1.0\text{kg/dm}^3$ . As camadas mais externas são formadas por um material ortotrópico com as seguintes propriedades:  $E_1 = 20000\text{N/mm}^2$ ,  $E_2 = 4000\text{N/mm}^2$ ,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $\rho = 2.0\text{kg/dm}^3$ . A direção principal 1 está alinhada com o eixo do cilindro no material da lâmina intermediária e está orientada na direção circunferencial no material que constitui a lâmina mais externa. As forças são aplicadas proporcionalmente a  $f(t)$ , que tem valor  $f(t) = 1.44\text{ N/mm}$  para  $0 \leq t \leq 6\text{ s}$  e  $f(t) = 0$  para  $t \geq 6\text{ s}$ .

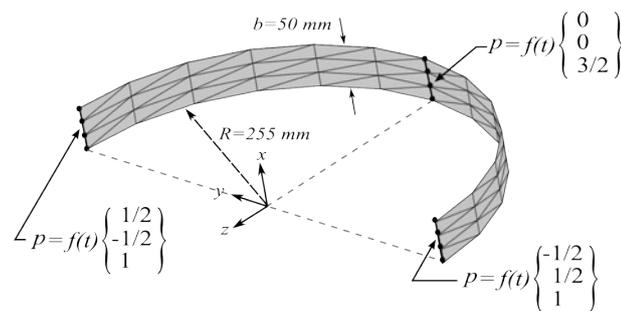


Figura 5.28: Geometria e carregamento

Uma malha regular  $3 \times 12$  (72 elementos e 52 nós) é empregada na discretização da estrutura. A resposta transiente é obtida por um tempo de 32 s utilizando  $\Delta t = 0.01\text{ s}$ . O movimento do corpo é ilustrado na Fig. 5.29 através de uma sequência de configurações deformadas obtidas a cada 2 s.

A conservação da energia durante a análise é apresentada na Fig. 5.30. O resultado obtido nessa análise é compatível com o apresentado por Brank et al. (2003)

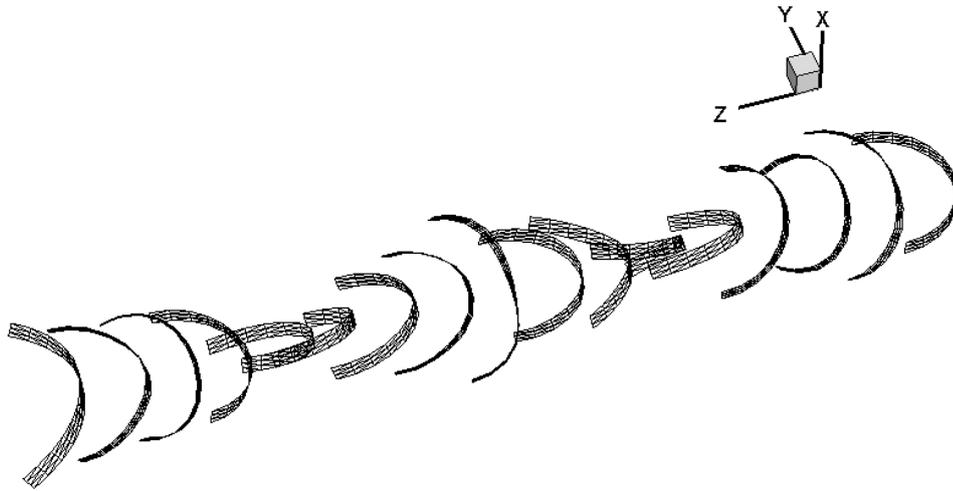


Figura 5.29: Sequência de configurações durante o movimento

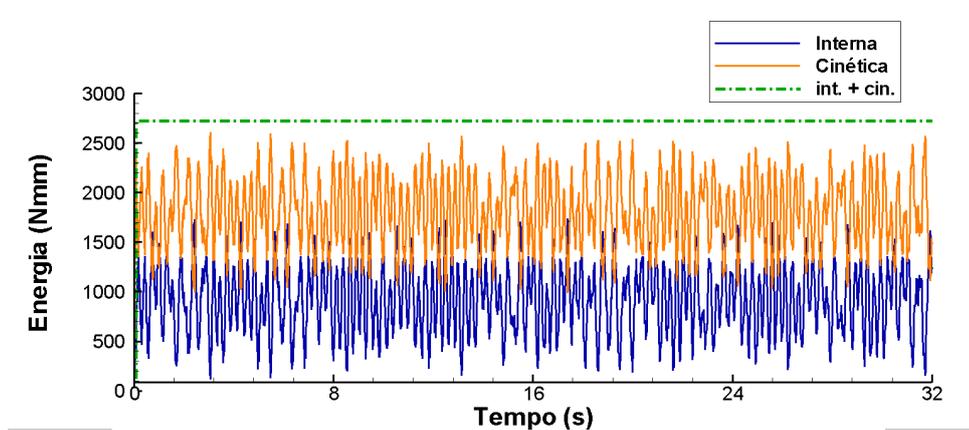


Figura 5.30: Evolução da energia interna e da energia cinética durante o movimento

## 5.3 Análise de escoamentos compressíveis

Nessa seção são apresentados exemplos de aplicação do método computacional implementado para simulação de escoamentos compressíveis. Na Seção 5.3.1 é analisado o escoamento invíscido sobre a asa experimental ONERA M6. Esse caso serve como validação do código na simulação de problemas com a malha fixa. Em seguida é apresentado um exemplo que demonstra o funcionamento correto da ferramenta na análise de escoamentos com malhas móveis.

### 5.3.1 Escoamento sobre a asa ONERA M6

Um caso de escoamento transônico sobre a asa experimental ONERA M6 é analisado nesse exemplo. As características aerodinâmicas dessa asa foram estudadas experimentalmente

por Schmitt e Charpin (1979) para vários casos de número de Mach e ângulo de ataque. Devido à relativa simplicidade geométrica da asa e à complexidade do escoamento transônico esse problema vem sendo amplamente empregado para a validação de códigos de CFD. A simulação apresentada a seguir não considera efeitos viscosos, sendo essa simplificação adotada em diversos outros trabalhos.

O caso estudado nesse exemplo é caracterizado por um ângulo de ataque de  $3,06^\circ$ , número de Mach de 0.8395, número de Reynolds de  $11,72 \times 10^6$  (baseado na corda média) e as seguintes condições na região não perturbada do escoamento:  $T_\infty = 255,6K$ ,  $p_\infty = 316kPa$ ,  $v_\infty = 269m/s$  e  $c_\infty = 320,5m/s$ .

A Fig. 5.31 apresenta a geometria da asa enflechada que utiliza um aerofólio simétrico dado pelo perfil ONERA D. Maiores detalhes sobre as características da asa são encontrados em Schmitt e Charpin (1979).

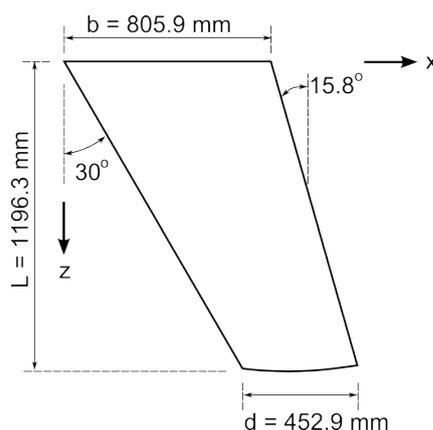


Figura 5.31: Geometria da asa

A discretização espacial nas proximidades da asa é ilustrada na Fig. 5.32. A malha não estruturada utilizada na análise do escoamento contém 965685 elementos tetraédricos e 190171 nós, dos quais 46501 (24,5 % do total) se encontram sobre o contorno sólido. O domínio computacional tem forma de um prisma retangular com dimensões  $43,5 b$  na direção  $x$ ,  $37 b$  na direção  $y$  e  $18,5 b$  na direção  $z$ , sendo  $b$  o comprimento da corda do aerofólio na raiz da asa, como apresentado na Fig. 5.31. O bordo de ataque na raiz da asa se encontra na origem do sistema de coordenadas, estando afastado  $18,5 b$  do início do domínio ao longo do eixo  $x$  e dos limites do domínio nas direções  $y$  e  $z$ . São prescritas as condições  $T_\infty$ ,  $p_\infty$ ,  $v_\infty$  no contorno sobre o plano  $x = -18,5b$ , o plano  $y = -18,5b$  e o plano  $z = 18,5b$ . No plano  $z = 0$  é imposta a condição de contorno de simetria e no

contorno de saída do escoamento, localizado no plano  $x = 25b$  e no plano  $y = 18,5b$  é imposta apenas a pressão  $p_\infty$ .

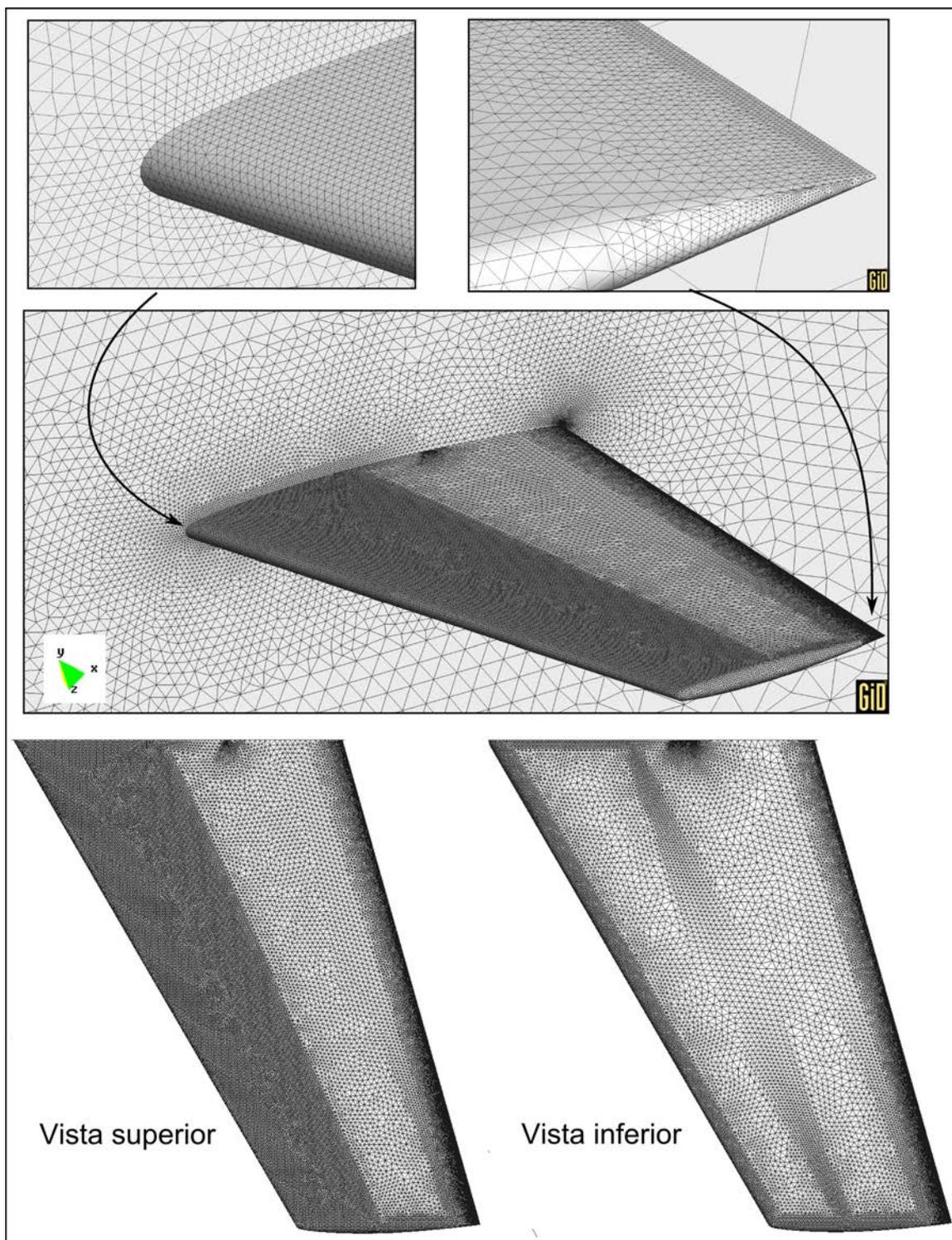


Figura 5.32: Detalhes da malha de elementos finitos

A Fig. 5.33 apresenta a distribuição do coeficiente de pressão sobre a superfície da asa, que foi obtida após a convergência da solução para um regime estacionário. Nessa figura

é evidenciada a ocorrência da onda de choque na forma de  $\lambda$  sobre a superfície superior da asa. Tal configuração é característica desse problema.

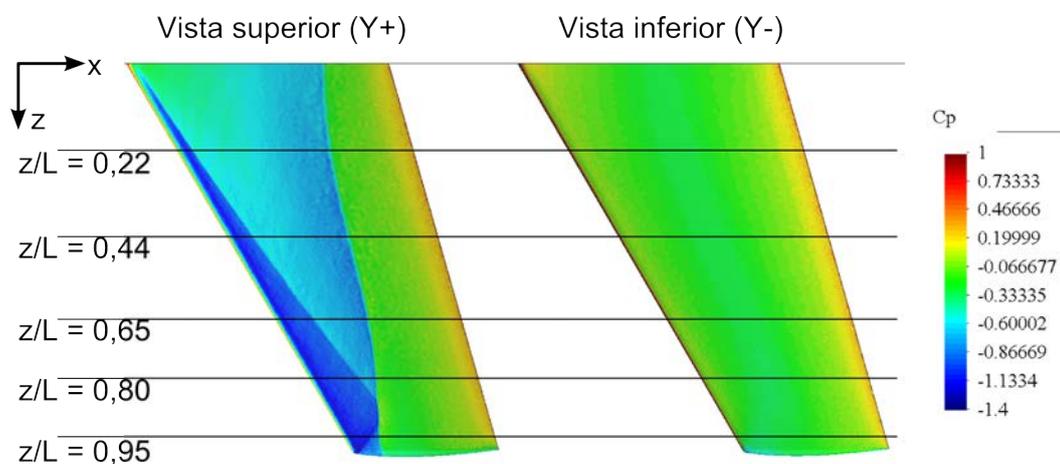


Figura 5.33: Coeficiente de pressão sobre a superfície da asa

A Fig. 5.34 mostra os campos de velocidade do escoamento (adimensionalizada por  $c_\infty$ ) sobre a asa, e em alguns cortes ao longo da asa. Esse resultados demonstram que o escoamento é acelerado na região próxima da asa, atingindo velocidades superiores a  $c_\infty$  na maior parte da superfície superior e desacelerando subitamente no local de ocorrência da onda de choque.

As curvas de coeficiente de pressão nas seções transversais localizadas em  $z/L = 0,22$ ,  $0,44$ ,  $0,65$ ,  $0,80$  e  $0,95$  são apresentadas na Fig. 5.35 juntamente com os valores medidos experimentalmente por Schmitt e Charpin (1979). Nesses gráficos  $x^*$  representa a coordenada  $x$  adimensionalizada pelo comprimento da corda em cada seção, tendo valor zero no bordo de ataque e valor um no bordo de fuga da asa. Os resultados obtidos nesse trabalho apresentam boa concordância com os dados experimentais. As discrepâncias mais evidentes nessa comparação ocorrem na região da onda de choque, o que também se verifica na maioria dos resultados numéricos apresentados na literatura.

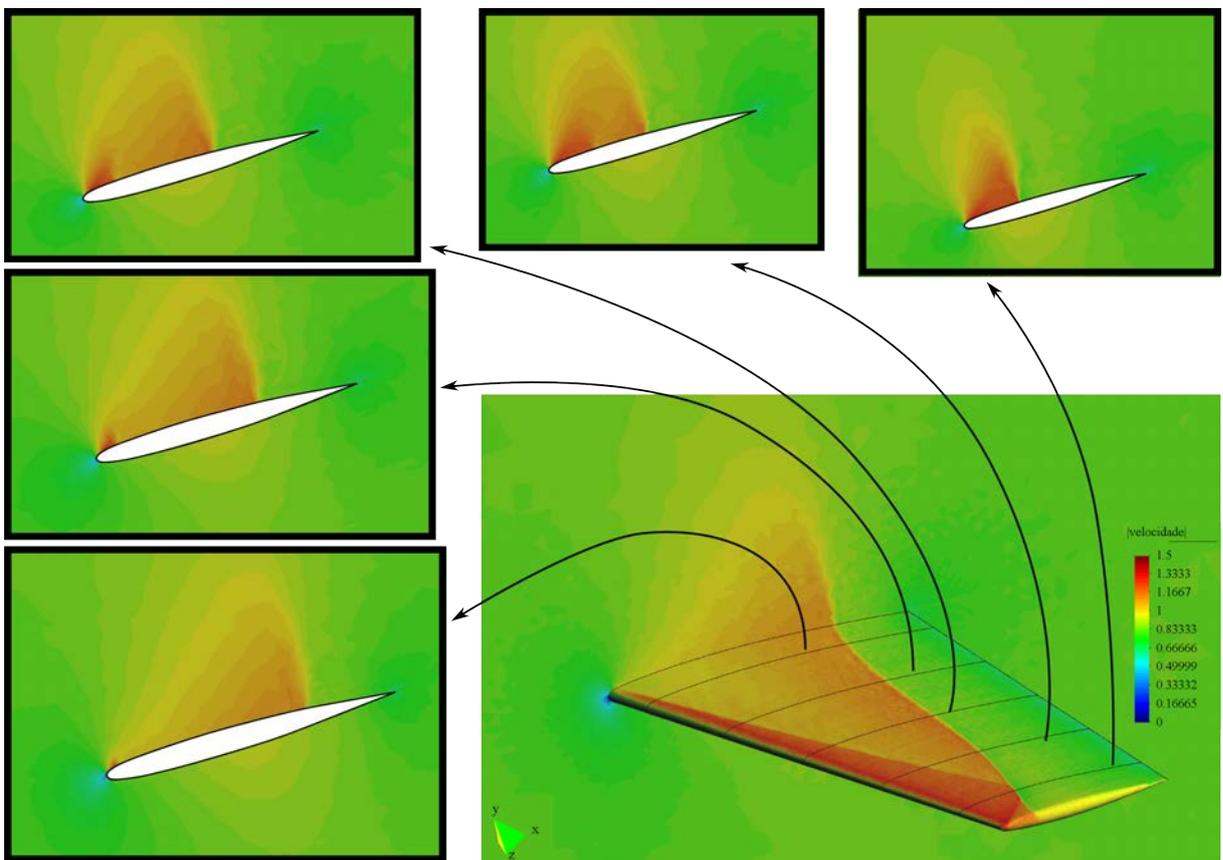


Figura 5.34: Velocidade do escoamento sobre a asa ONERA M6

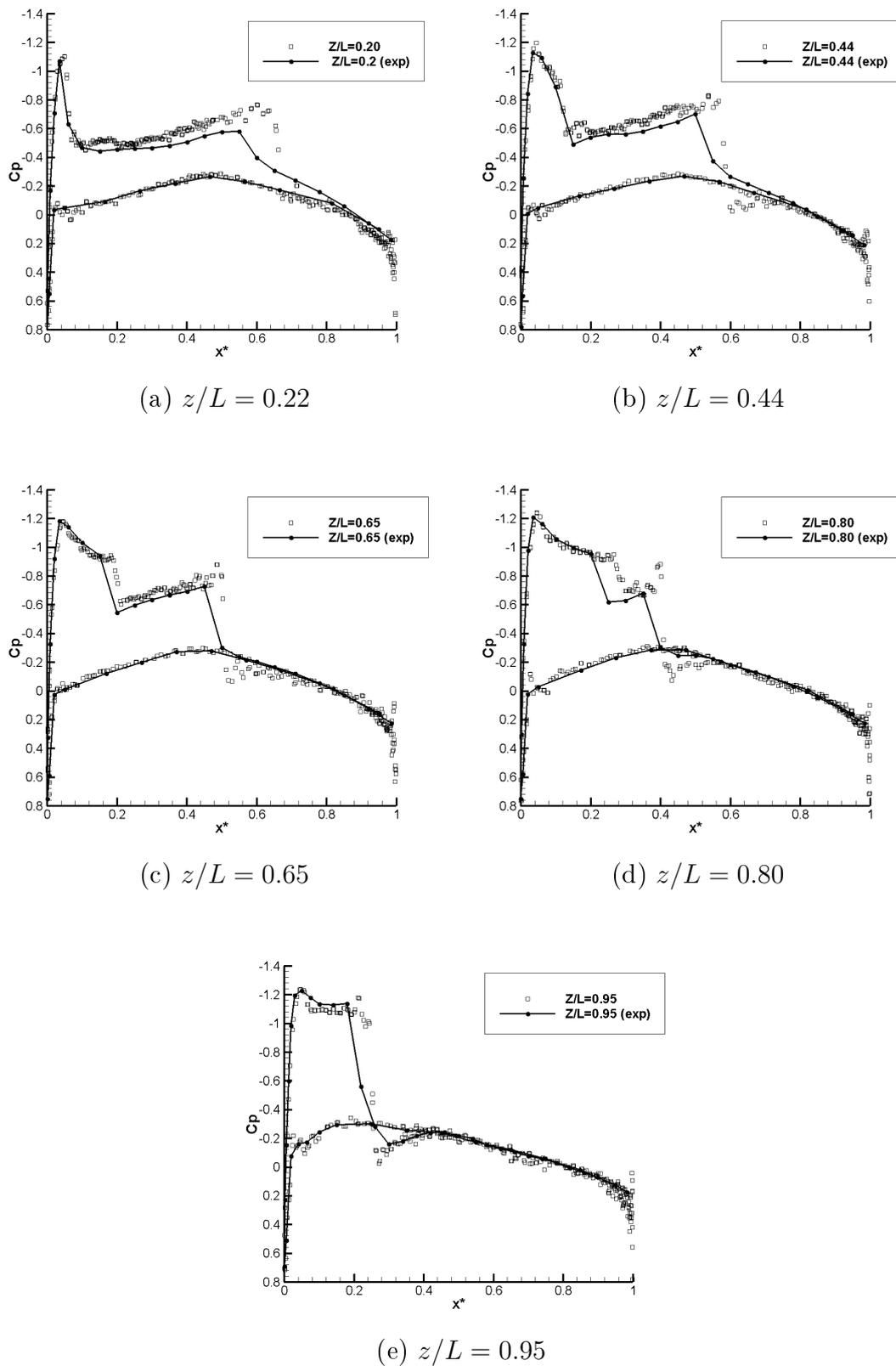


Figura 5.35: Coeficiente de pressão em várias seções ao longo da asa ONERA M6

### 5.3.2 Escoamento sobre um aerofólio com movimento oscilatório prescrito

Esse exemplo aborda a análise do escoamento bidimensional transônico e transiente sobre um aerofólio que apresenta um movimento oscilatório pré-determinado. A inclusão desse exemplo visa demonstrar o comportamento do algoritmo em problemas com malhas móveis. O resultado da simulação realizada desconsiderando a viscosidade do fluido é comparado com dados experimentais.

O aerofólio estudado é definido pelo conhecido perfil simétrico NACA0012. O movimento oscilatório se dá em torno do ponto localizado a  $1/4$  da corda ao longo do eixo central do aerofólio, ocorrendo de forma que o ângulo de ataque ( $\alpha$ ) é definido em cada instante de tempo por (Willcox e Peraire, 1997):

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_0 \text{sen}(\omega t) \quad (5.1)$$

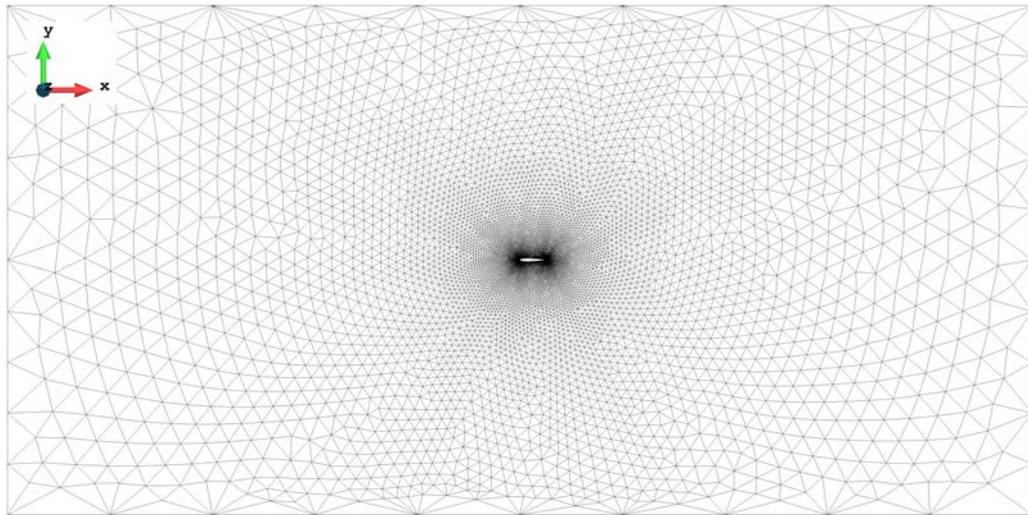
com  $\alpha_m = 0,016^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2,51^\circ$  e  $\omega$  obtido como

$$\omega = \frac{2kv_\infty}{L} \quad (5.2)$$

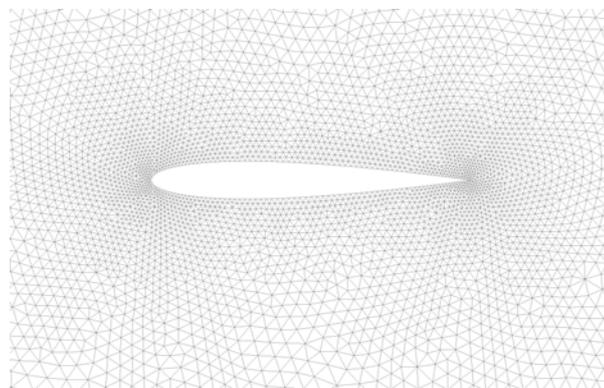
sendo  $L$  a corda do aerofólio e  $k$  a frequência reduzida, que assume o valor  $k = 0,0814$  nesse exemplo. O escoamento é caracterizado pelo número de Mach de 0,755 e pelas seguintes propriedades na região não perturbada pelo aerofólio:  $v_\infty = 250,1\text{m/s}$ ,  $p_\infty = 101,3\text{kPa}$  e  $\rho_\infty = 1,292\text{kg/m}^3$ .

O domínio computacional empregado é retangular, com limites afastados  $20L$  a montante e a jusante do bordo de ataque do aerofólio e  $10L$  acima e abaixo desse mesmo ponto. Uma espessura de  $0,1L$  é adotada para a acomodação da malha de elementos finitos tetraédricos. Os valores  $v_\infty$ ,  $p_\infty$  e  $\rho_\infty$  são prescritos para as condições do escoamento no contorno em  $x = -20L$  e em  $y = -10L$ . No contorno de saída do escoamento (em  $x = 20L$  e em  $y = 10L$ ) é prescrita a pressão  $p_\infty$ , enquanto que o componente de velocidade  $v_z$  é zerado em todos os nós da malha a cada passo de tempo.

A malha utilizada na simulação é formada por 56208 elementos (com apenas 1 elemento na espessura para simulação do problema bidimensional) e 18926 nós, dos quais 300 se encontram na superfície do aerofólio. A vista geral da malha e o detalhe da região nas proximidades do aerofólio são apresentados na Fig. 5.36. Os passos de tempo da análise foram determinados pelo código usando um fator de segurança  $CS = 0,20$  e o amortecimento numérico foi introduzido usando o coeficiente  $C_{AF} = 2,0$ .



(a) Malha completa



(b) Detalhe na região do aerofólio

Figura 5.36: Malha não estruturada para cálculo do escoamento sobre o aerofólio NACA0012

Previamente à análise transiente com movimento oscilatório foi realizada o desenvolvimento do escoamento na configuração inicial com  $\alpha = 0,016^\circ$ . A Fig. 5.37 apresenta a distribuição de pressão, velocidade e massa específica obtidos após a convergência da solução estacionária na configuração inicial.

A evolução do coeficiente de sustentação ( $C_L$ ) no decorrer dos ciclos de oscilação, dados

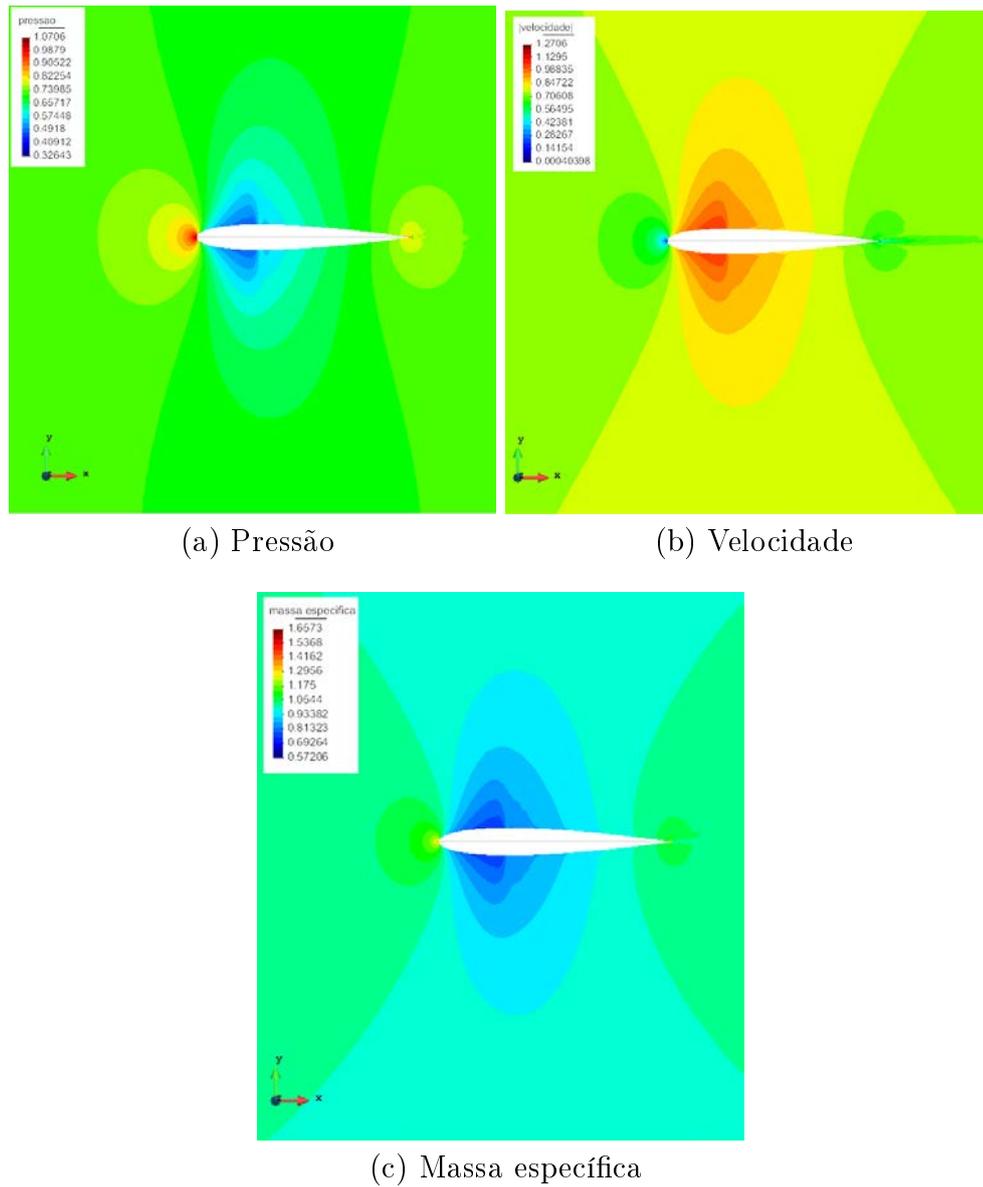


Figura 5.37: Configuração inicial do escoamento sobre o aerofólio NACA0012 com  $\alpha = 0,016^\circ$

por  $t^* = \frac{\omega t}{2\pi}$ , é apresentada na Fig. 5.38, onde a resposta obtida nesse trabalho é comparada com os dados obtidos experimentalmente por Landon (1982) e com a resposta obtida numericamente por Teixeira (2001). São verificadas pequenas diferenças nos valores mínimos do coeficiente de sustentação, o que também ocorreu nos trabalhos realizados por Willcox e Peraire (1997).

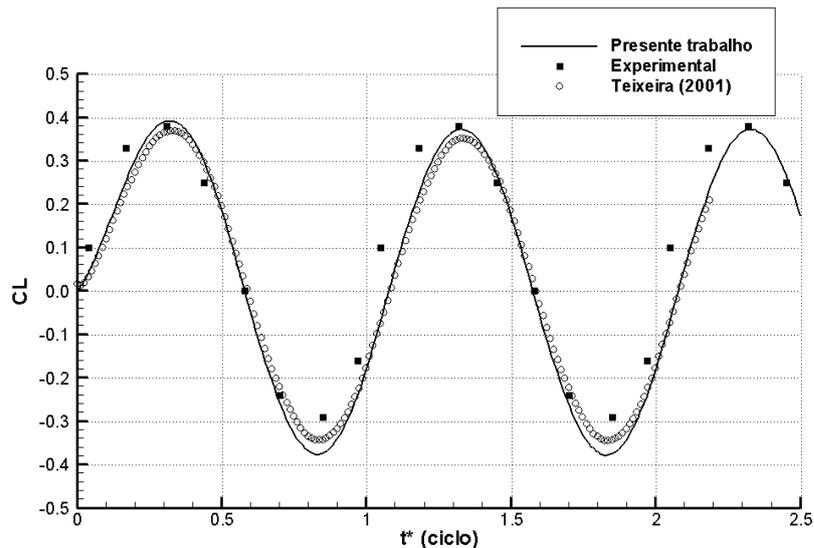


Figura 5.38: Coeficiente de sustentação

As distribuições de pressão e de velocidade do escoamento em três instantes (próximos aos pontos de valor máximo, mínimo e nulo de CL) são apresentadas na Fig. 5.39. Nessa figura verifica-se o deslocamento da onda de choque do lado inferior para o lado superior do aerofólio a medida que o ângulo de ataque varia com o tempo.



## 5.4 Problemas de interação fluido–estrutura

O emprego da metodologia de análise de problemas de interação fluido–estrutura descrita nos capítulos anteriores é demonstrado nessa seção. Dois problemas são abordados visando a validação dos algoritmos através da comparação com os resultados experimentais e/ou numéricos apresentados por outros autores. Aspectos relacionados à influência da discretização temporal e espacial na eficiência do método também são explorados. Por fim, novos problemas de aeroelasticidade envolvendo estruturas de materiais compósitos laminados são propostos e analisados.

Nos problemas apresentadas a seguir, a condição de malha ALE (móvel) é adotada em todo o domínio do fluido. O contorno móvel dessa malha é definido pela superfície da estrutura, enquanto que o contorno fixo da malha é dado pelas superfícies de entrada e saída do escoamento. Já os planos de simetria não são tomados como contorno fixo, mas o deslocamento da malha na direção normal a esse plano é impedido.

O processo de mapeamento dos nós da malha do escoamento sobre a malha da estrutura na superfície de interface entre os meios, necessário para a transferência de informação entre fluido e estrutura, é realizado apenas no início da análise. As informações relativas a esse mapeamento são armazenadas em um arquivo e utilizadas no caso de retomada dos cálculos após alguma interrupção do processamento. O mesmo vale para os dados necessários ao algoritmo de movimentação da malha. Esses dados compreendem a identificação dos dois nós, um na superfície fixa e o outro na superfície móvel da malha, que são mais próximos ao nó da malha a ser movido e também o coeficiente utilizado para o cálculo da velocidade do nó no interior da malha a partir da velocidade dos nós mais próximos no contorno. Tais informações são determinadas sobre a configuração inicial das malhas.

As medidas descritas acima são adotadas no intuito reduzir a carga computacional necessária para a conclusão das análises a serem realizadas. Essas simplificações justificam-se por terem efeito reduzido sobre os resultados nos casos em que os deslocamentos da estrutura são de pequena magnitude, como se espera para os problemas abordados.

### 5.4.1 Escoamento sobre uma placa

O processo de interação entre uma placa engastada em duas extremidades e o escoamento supersônico invíscido que passa sobre ela é estudado nesse exemplo. Esse problema vem sendo utilizado em diversos trabalhos para demonstrar a efetividade dos métodos de análise de problemas de interação fluido-estrutura pois se trata de um caso com solução analítica conhecida dentro da teoria de aeroelasticidade linear.

As características do problema bidimensional em questão são apresentadas na Fig. 5.40. A placa engastada nas duas extremidades tem  $0,5m$  de comprimento e  $1,35mm$  de espessura, sendo formada por um material isotrópico com módulo de elasticidade  $E = 77,28GPa$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,33$  e massa específica  $\rho = 2710kg/m^3$ .

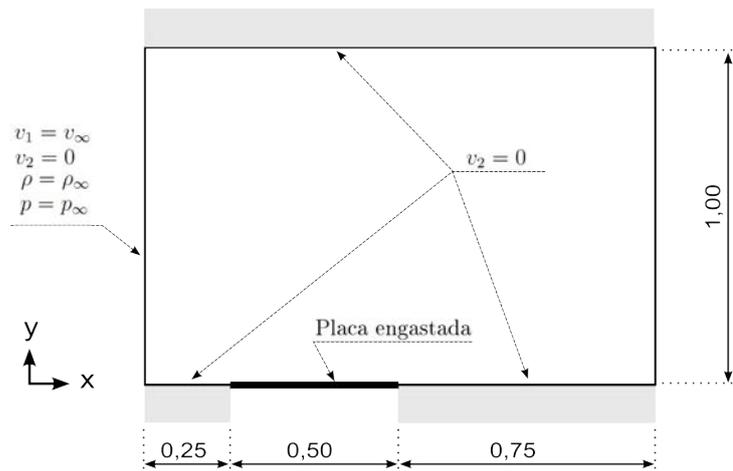


Figura 5.40: Geometria e condições de contorno para o escoamento sobre a placa

No presente trabalho considera-se apenas o caso de escoamento com as seguintes características:  $p_\infty = 28kPa$ ,  $\rho_\infty = 0,3391kg/m^3$  e  $v_\infty = 782m/s$ . Durante os  $4 \times 10^{-3}s$  iniciais da análise é aplicada a pressão de 99,9% de  $p_\infty$  na face inferior da placa, sendo o valor elevado para  $p_\infty$  após esse período. O desequilíbrio inicial entre a pressão nas faces superior e inferior da placa provoca a deformação da mesma, gerando a perturbação necessária para disparar o processo de interação entre a placa e o escoamento.

O número de Mach de 2,3 do escoamento considerado aqui é superior ao limite de estabilidade de  $M=2,0$  previsto pela teoria da aeroelasticidade linear. No entanto, como é verificado por outros autores (Teixeira, 2001; Rifaí et al., 1999), o fenômeno de instabilidade não ocorre quando os efeitos de não linearidade geométrica são considerados

na deformação da placa.

A malha de elementos finitos utilizada para a discretização do escoamento em todas as análises apresentadas a seguir é formada por 38421 elementos (com apenas um elemento na direção  $z$ ) e 13150 nós, dos quais 242 se encontram sobre a placa. A vista global da malha, bem como o detalhe na extremidade final da placa, são apresentados na Fig. 5.41. É possível observar uma região com malha estruturada sobre a placa que prolonga-se até a borda de saída do escoamento, seguindo a inclinação da onda de choque que se forma a medida que a placa se deforma. A parcela estruturada da malha é construída com 120 divisões igualmente espaçadas sobre a placa e 50 divisões ao longo da fronteira inclinada da zona de malha estruturada, com maior concentração de elementos junto da placa. O coeficiente de segurança para o passo de tempo foi tomado como  $CS = 0,25$  e o coeficiente de amortecimento fictício  $C_{AF} = 1,5$  em todas as análises.

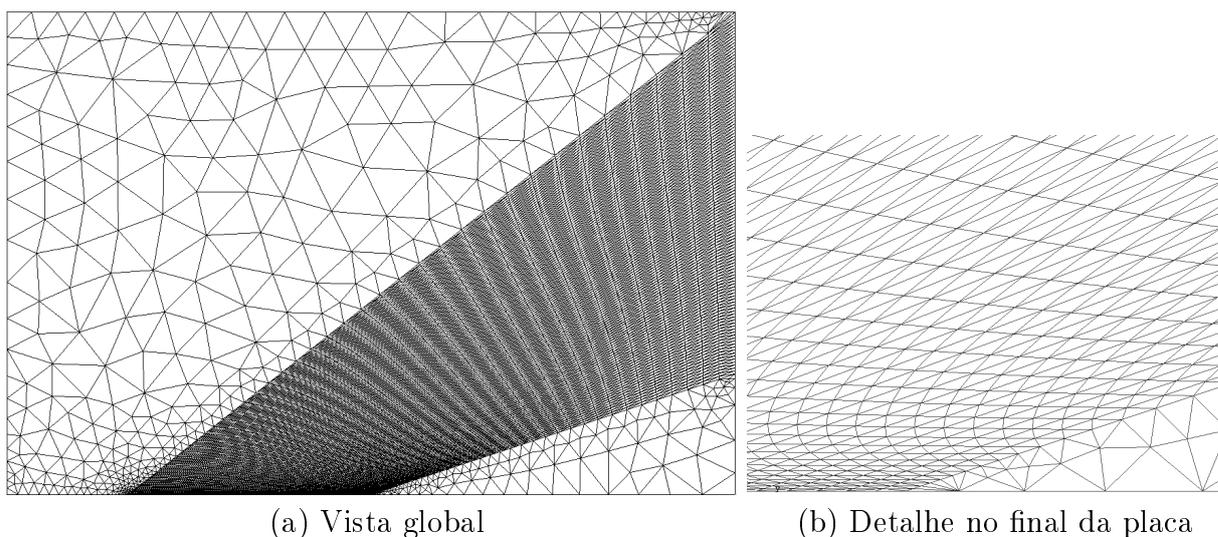


Figura 5.41: Malha para discretização do escoamento sobre a placa

Três malhas denominadas M10, M20 e M40 foram empregadas para a placa na solução do problema com intuito de investigar a influência da diferença entre a discretização do fluido e da estrutura na região da interface. A malha M40 foi obtida dividindo a placa em 40 trechos iguais, o que resulta em 80 elementos e 82 nós. Nesse caso, além dos nós da malha do fluido que coincidem com cada nó da estrutura também existe 2 nós do fluido entre cada par de nós da estrutura na direção do escoamento. As malhas M10 e M20 foram obtidas dividindo a placa em 10 e 20 trechos iguais, respectivamente. Nesse caso o número de nós da malha do fluido entre cada par de nós da estrutura é de 5 nós para a

---

malha M20 e 11 nós para a malha M10.

As análises realizadas nesse trabalho também buscaram observar o efeito do tamanho do passo de tempo usado na integração da estrutura. Para tanto foram comparados os resultados obtidos em simulações realizadas com valores de  $5 \times 10^{-5} s$  e  $5 \times 10^{-6} s$  para o  $\Delta t_e$  da estrutura. Considerando que o  $\Delta t$  do fluido (calculado automaticamente) não foi alterado, é possível avaliar o efeito dos subciclos de avanço temporal entre os algoritmos que simulam cada meio. Em média, o número de passos do algoritmo do escoamento para cada avanço do algoritmo da estrutura ( $n_{F/E}$ ) é de 86,7 quando  $\Delta t_e = 5 \times 10^{-6} s$  e 860 quando  $\Delta t_e = 5 \times 10^{-5} s$ .

Em todas as análises realizadas observou-se um comportamento estável da estrutura ao longo do tempo, a exemplo dos resultados apresentados por outros autores (Teixeira, 2001; Rifai et al., 1999) em análises que levam em conta a não linearidade geométrica da placa. O comportamento de interação entre os meios é ilustrado na Fig. 5.42, onde se observa o campo de pressão adimensionalizado sobre a malha original e sobre a malha deformada ( $\times 100$ ) em vários instantes de tempo. As regiões de alta e baixa pressão se alternam conforme a estrutura se desloca. A configuração deformada da placa é apresentada na Fig. 5.43 para os mesmos instantes de tempo. Esses resultados foram obtidos com a malha M40 e  $\Delta t = 5 \times 10^{-6} s$ .

Os resultados de análises empregando diferentes malhas e  $\Delta t_e$  são comparados através da variação temporal do deslocamento vertical em um ponto distante  $0,35m$  do início da placa. Na Fig. 5.44 são apresentadas as respostas obtidas com a malha M40 e diferentes passos de tempo para a estrutura. Os valores de  $\Delta t_e$  empregados são adequados para reproduzir corretamente a vibração da placa de forma que a ausência de discrepâncias nos resultados demonstram que não há perda de precisão decorrente do aumento na quantidade de subciclos entre fluido e estrutura. A evolução das parcelas de energia cinética e energia interna de deformação é apresentada na Fig. 5.45. Dessas figuras observa-se que entre 0 e 0,035 s o escoamento induz a vibração da placa, aumentando a energia total. No período seguinte, entre 0,035 e 0,08 s, ocorre o amortecimento do movimento pela ação do escoamento, seguindo-se de uma nova fase de aumento da vibração da placa. Esse comportamento é confirmado pela Fig. 5.46 que mostra a evolução do incremento da energia total da placa em cada passo de tempo ( $dE$ ) durante a análise.

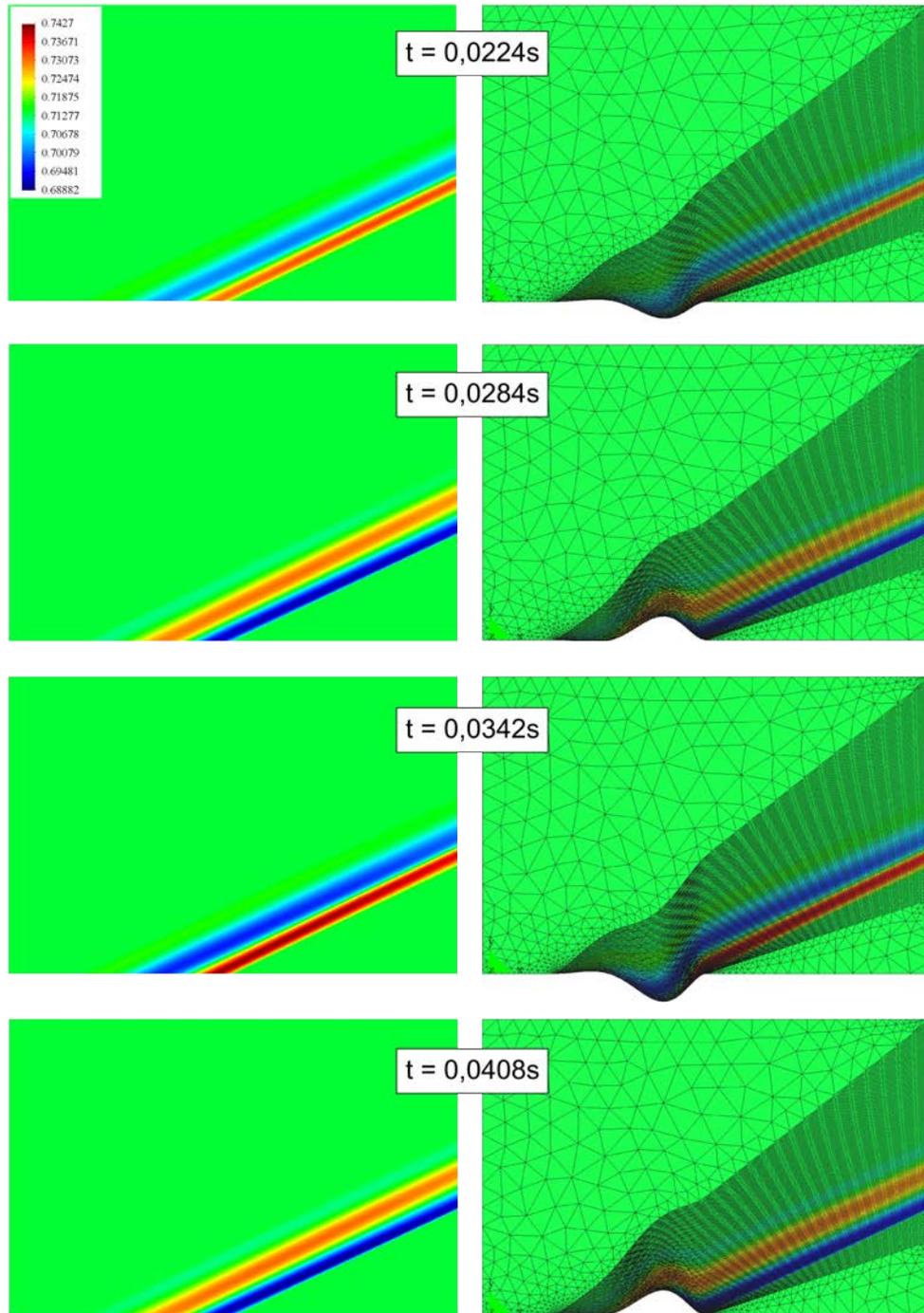


Figura 5.42: Pressão em vários instantes de tempo (deformação da malha  $\times 100$ )

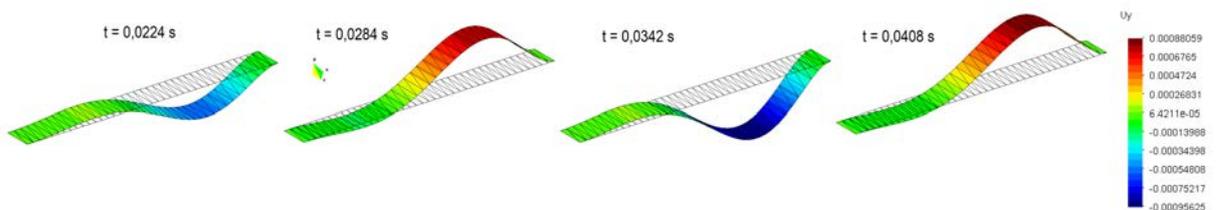


Figura 5.43: Configuração deformada da placa ( $\times 100$ ) em vários instantes

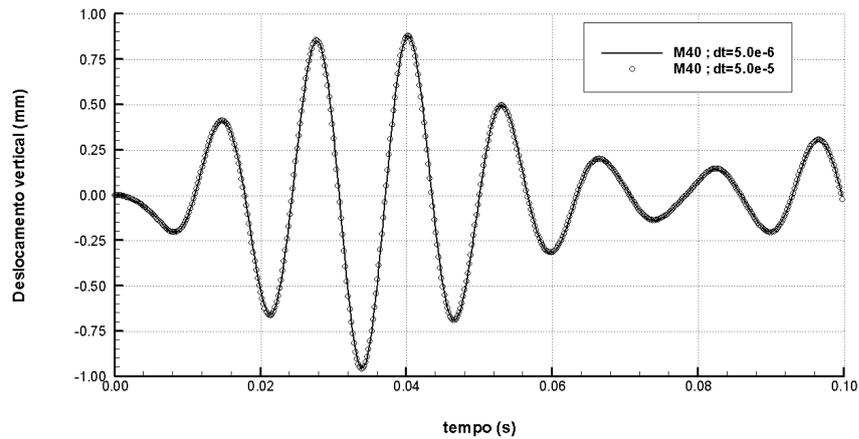


Figura 5.44: Deslocamento vertical em  $x = 0.35$ m

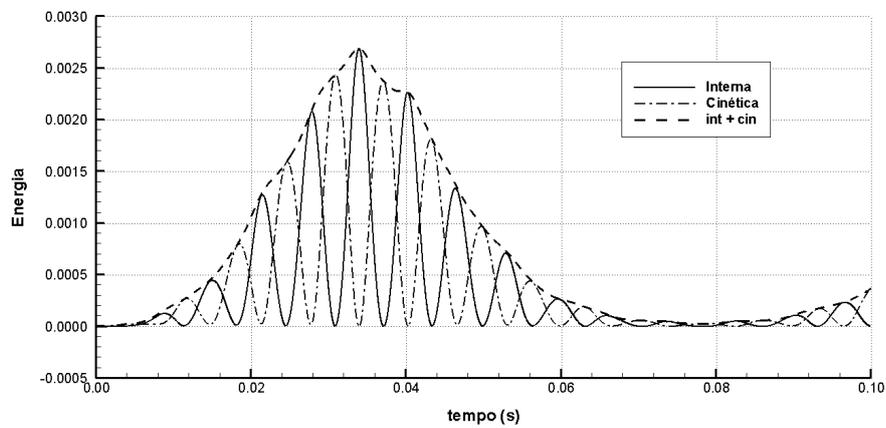


Figura 5.45: Evolução da energia na placa

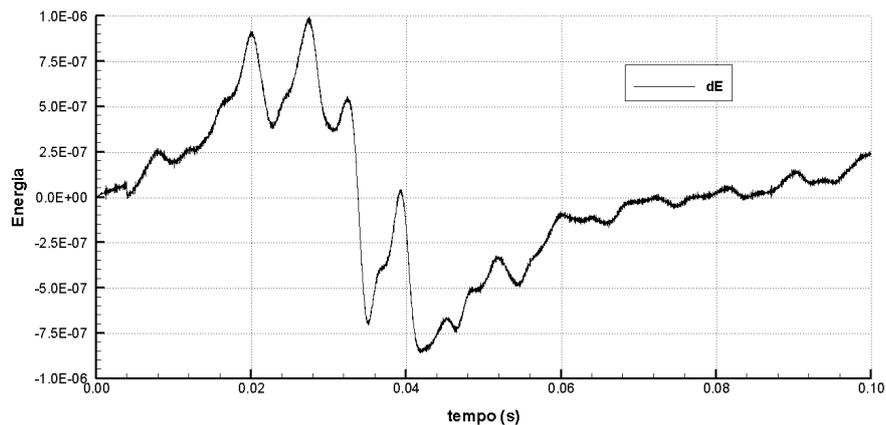


Figura 5.46: Incremento de energia total em cada passo de tempo

A segunda comparação se dá entre os resultados obtidos com as malhas M20 e M40, ambos usando  $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$  s. Verifica-se que a simulação é sensível à discretização da placa, com as diferenças nas respostas se acentuando a partir de  $t = 0,06$ s. Tal

comportamento é atribuído às pequenas diferenças na curvatura da placa, e portanto no contorno do escoamento, decorrentes da discretização espacial mais pobre ao se empregar a malha M20. Essa conclusão se baseia no fato de haver pouca distinção nas propriedades dinâmicas (linear) da placa quando discretizada pelas duas malhas (diferença de 0,03%, 0,32%, 0,82%, 1,5% e 2,25% para as primeiras cinco frequências naturais de vibração) e por serem indistinguíveis as respostas na fase inicial da análise, que começa com ambas as malhas M20 e M40 em uma mesma configuração plana.

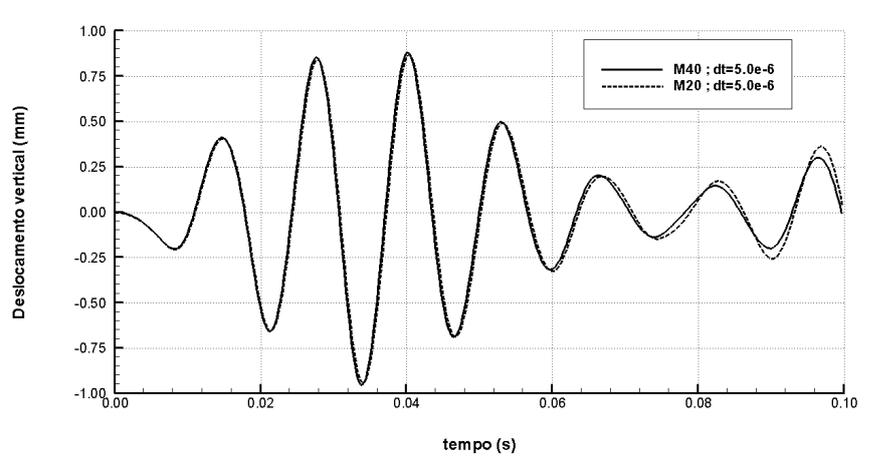


Figura 5.47: Deslocamento vertical em  $x = 0,35\text{m}$  para as malhas M20 e M40

Na Fig. 5.48 são apresentados resultados adicionais que reforçam o comportamento observado anteriormente. Não há diferença no deslocamento obtido com a malha M20 quando  $\Delta t_e$  é alterado, mas acentua-se a diferença na resposta ao empregar-se uma malha (M10) mais grosseira para a estrutura.

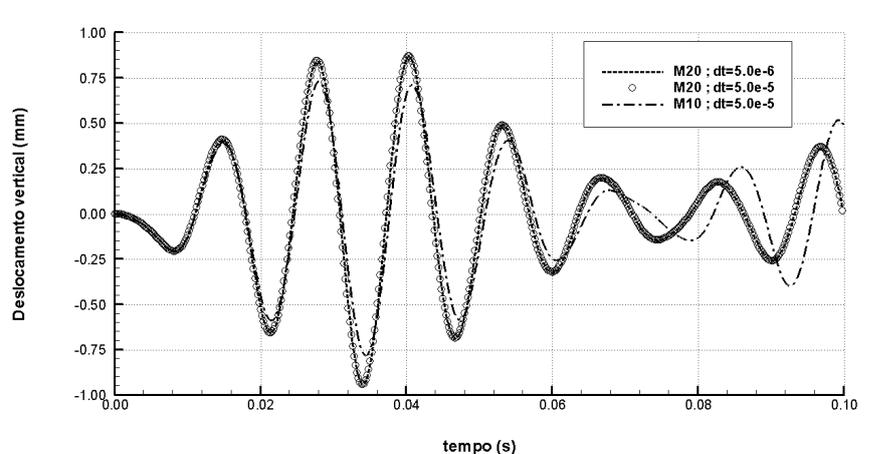


Figura 5.48: Deslocamento vertical em  $x = 0,35\text{m}$  para as malhas M10 e M20

Uma comparação com o resultado obtido por Teixeira (2001) é apresentado na Fig.

5.49. Observa-se uma discrepância significativa na amplitude do deslocamento, sobretudo na parte final da análise, embora movimento nos dois resultados estejam em fase. Em seu trabalho, Teixeira (2001) empregou uma malha com 506 nós e 508 elementos triangulares para a discretização da placa e 13303 nós e 38915 elementos tetraédicos para a discretização do escoamento. Essas malhas são coincidentes na região de interface e o passo de tempo adotado é de  $\Delta t = 1,6 \times 10^{-7} s$ .

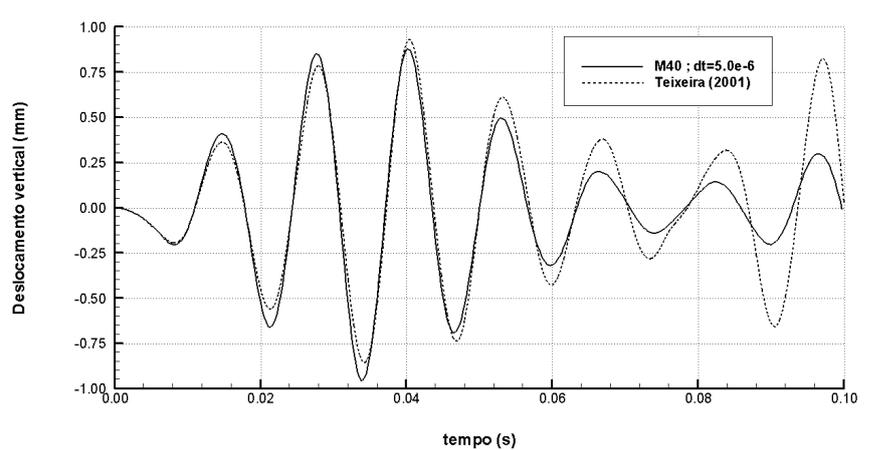


Figura 5.49: Deslocamento vertical em  $x = 0,35m$

## 5.4.2 Oscilação de uma asa delta

O comportamento aeroelástico de uma asa flexível imersa em um escoamento compressível com número de Mach 0,85 e ângulo de ataque zero é analisado nesse exemplo. A Fig. 5.50 apresenta a geometria da asa que é constituída por uma placa com 0,888 mm de espessura em formato de delta. Essa configuração foi estudada experimentalmente por Schairer e Hand (1999) considerando uma faixa de valores para a pressão dinâmica do escoamento ( $q$ ).

Diferentes comportamentos são observados conforme a pressão dinâmica<sup>1</sup> do escoamento é elevada. Para valores mais baixos, como  $q = 1,85\text{psi}$  (12,76 kPa), a vibração induzida por uma perturbação externa é amortecida pelo escoamento. O modelo se torna instável quando a pressão dinâmica do escoamento atinge  $q = 3,47\text{psi}$  (23,93 kPa), valor esse superior ao previsto pela análise de *flutter* que é de 2,75 psi (18,96 kPa) (Schairer e Hand, 1999). Para valores intermediários de pressão dinâmica foi verificado que a asa apresenta

<sup>1</sup>O valor da pressão dinâmica é informado em psi (1,0 psi = 6895,0 Pa) para facilitar a comparação com os resultados de outros autores.

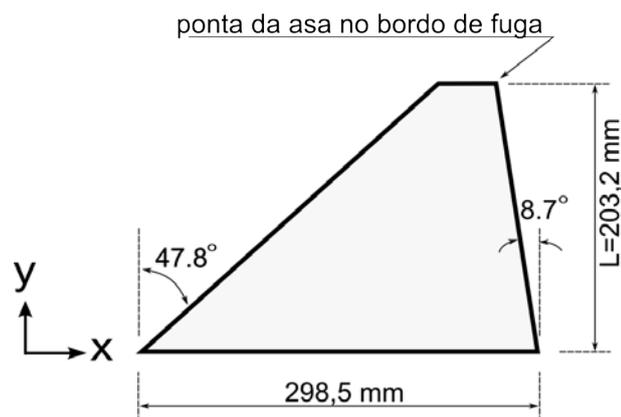


Figura 5.50: Geometria e malha da asa delta

oscilação com ciclo limite, ou LCO do inglês *limit-cycle oscillation*. Esse comportamento é bastante complexo, uma vez que está vinculado à não linearidade aerodinâmica e/ou estrutural, sendo seu entendimento e previsão através de métodos computacionais de grande importância para a engenharia.

Os dados obtidos experimentalmente por Schairer e Hand (1999) serviram como comparação para resultados de métodos de aeroelasticidade computacional desenvolvidos por vários autores. Em um primeiro trabalho, Gordnier e Melville (2001) empregaram um esquema computacional baseado nas equações de Navier-stokes para o fluido e na análise modal para a estrutura, obtendo deslocamentos significativamente superiores aos verificados experimentalmente. Esses resultados foram aprimorados em um trabalho seguinte (Gordnier, 2003) pela inclusão da não linearidade geométrica da estrutura. Nesse caso, os deslocamentos foram inferiores aos verificados experimentalmente, com maiores diferenças para valores mais elevados de pressão dinâmica. Ainda nesse trabalho foi constatado que os efeitos viscosos são moderados, sendo menos influentes nos mecanismos de interação para valores baixos de pressão dinâmica. Outra constatação desse trabalho é de que o desenvolvimento do LCO se deve ao enrijecimento da estrutura por efeitos de membrana, ao contrário do trabalho inicial que atribuía esse comportamento à ocorrência de vórtices e regiões de escoamento supersônico sobre a asa. Quando os efeitos de não linearidade geométrica da asa foram considerados, tais fenômenos aerodinâmicos só foram verificados de foram bem definida nas análises com pressão dinâmica acima de 4.41 psi (30,41 kPa). Em trabalhos seguintes, Gordnier e Visbal (2005) e Terashima e Ono (2009) investigaram a influência de modelos mais refinados na análise da estrutura, com o primeiro tendo considerado deformações finitas na análise. Os resultados obtidos foram

melhores do que os apresentados por Gordnier (2003) apenas para valores elevados de pressão dinâmica, mas ainda distante dos experimentais.

Recentemente Peng e Han (2011) abordaram o problema incluindo os efeitos de não linearidade do material através do comportamento elastoplástico. Essa fonte adicional de não linearidade da estrutura teve particular influência na resposta para o caso de maior pressão dinâmica analisado ( $q = 3,76\text{psi}$  ou  $25,93\text{ kPa}$ ), quando se verificou um súbito aumento na amplitude dos deslocamentos, de forma similar ao observado experimentalmente por Schairer e Hand (1999). Esse fenômeno foi claramente causado pela redução de rigidez decorrente da plastificação do material nas proximidades da raiz da asa. Nesse trabalho também foram obtidos aprimoramentos significativos na resposta aeroelástica para pressões dinâmicas mais baixas. Segundo Peng e Han (2011), o avanço em relação aos resultados numéricos anteriores se deveu ao aprimoramento da transferência de informação na interface fluido-estrutura obtido graças à adoção de um modelo de sólido tridimensional para a análise da placa, o que elimina a lacuna existente entre as malhas do fluido e da estrutura quando essa é analisada por um modelo de placa ou casca.

No presente trabalho a abordagem do problema em questão ocorre em duas etapas. Inicialmente pretende-se demonstrar que o esquema computacional desenvolvido é capaz de reproduzir os resultados obtidos por outros autores. Para tanto serão realizadas análises considerando os valores de  $2,58\text{ psi}$  ( $17,79\text{ kPa}$ ) e  $2,98\text{ psi}$  ( $20,55\text{ kPa}$ ) para a pressão dinâmica do escoamento, pois, para esses casos os modelos empregados devem apresentar resultados mais próximos aos obtidos experimentalmente. Na segunda etapa o material da placa, originalmente de aço, é substituído por laminados de materiais ortotrópicos. Nesse caso pretende-se estudar como as propriedades mecânicas alteram o comportamento aeroelástico da asa.

Em todas as análises realizadas, a asa é discretizada por uma malha estruturada  $20 \times 20$  com 441 nós e 800 elementos, como ilustrado na Fig. 5.51. Os nós localizados na raiz da asa tem os deslocamentos de translação e rotação impedidos, reproduzindo a condição de engaste. No início da análise é imposta uma velocidade inicial para a estrutura, proporcional ao seu primeiro modo de vibração. Isso serve como a perturbação inicial que dispara o processo de interação entre o fluido e a estrutura.

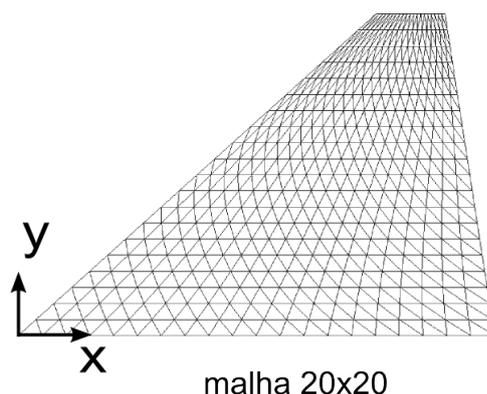


Figura 5.51: Malha da asa delta

A malha empregada na simulação do escoamento é formada por 2514383 elementos e 447124 nós. Dentre esses nós 32532 se encontram sobre a superfície da asa que é coberta por 64449 faces triangulares dos elementos tetraédricos. O maior refinamento da malha se dá nas proximidades da borda da asa, onde se encontram três faces de elementos ao longo da espessura da placa. A vista geral da malha sobre a asa e alguns detalhes da discretização das bordas são apresentadas na Fig. 5.52.

Um domínio computacional com formato de um prisma retangular com dimensões 12 m, 3 m, e 6 m nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, foi usado na análise. Os limites desse domínio estão localizados 6 m a montante e a jusante do bordo de ataque na raiz da asa e 3 m acima e abaixo da asa. São prescritos os valores  $v_\infty$ ,  $p_\infty$  e  $r_\infty$  na região de entrada do escoamento (plano  $x=-6\text{m}$ ) e nos limites laterais do domínio, definidos pelo plano  $z=-3\text{m}$ , pelo plano  $z=3\text{m}$  e pelo plano  $y=3\text{m}$ . Apenas a pressão  $p_\infty$  é imposta na região de saída do escoamento, dada pelo plano  $x=6\text{m}$ . No plano  $y=0\text{m}$  é aplicada a condição de simetria para o escoamento. As condições iniciais do fluido para a análise de interação fluido-estrutura são obtidas pelo desenvolvimento prévio do escoamento até a condição estacionária sobre a geometria fixa da asa para cada valor de pressão dinâmica.

### Asa de material isotrópico

Nesse primeiro estudo a asa é feita de aço com módulo de elasticidade  $E = 200\text{GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,30$  e massa específica  $\rho = 7850\text{kg/m}^3$ . Os três primeiros modos e respectivas frequências naturais de vibração são apresentados na Fig. 5.53. Esse valores são bastante próximos aos apresentados por Schairer e Hand (1999) onde  $f_1 = 26,7$

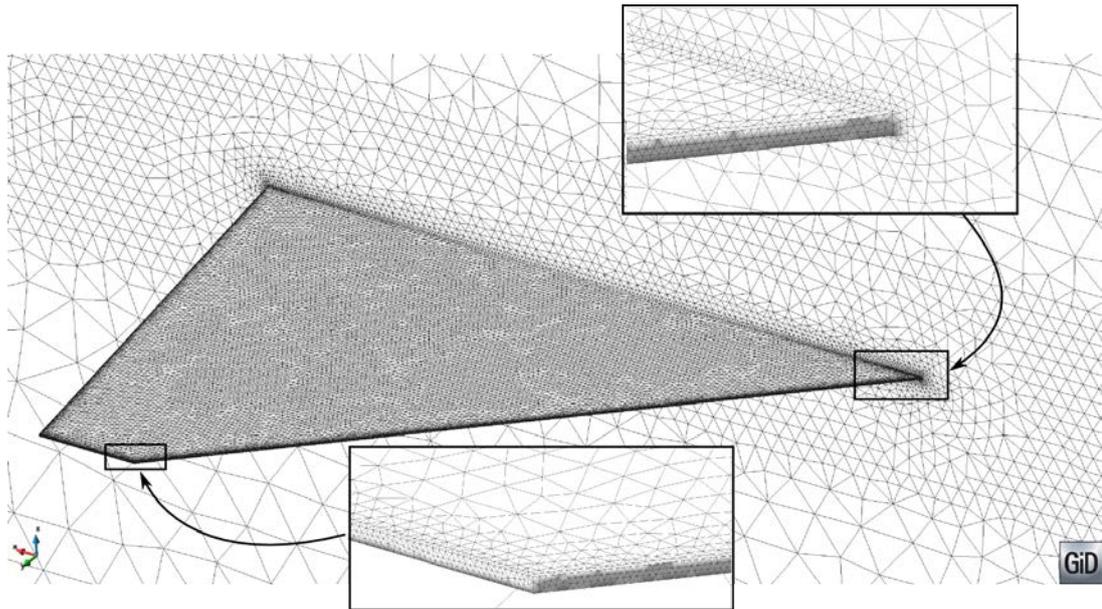


Figura 5.52: Detalhe da malha do fluido sobre a asa delta

Hz,  $f_2 = 88,2$  Hz e  $f_3 = 131,8$  Hz.

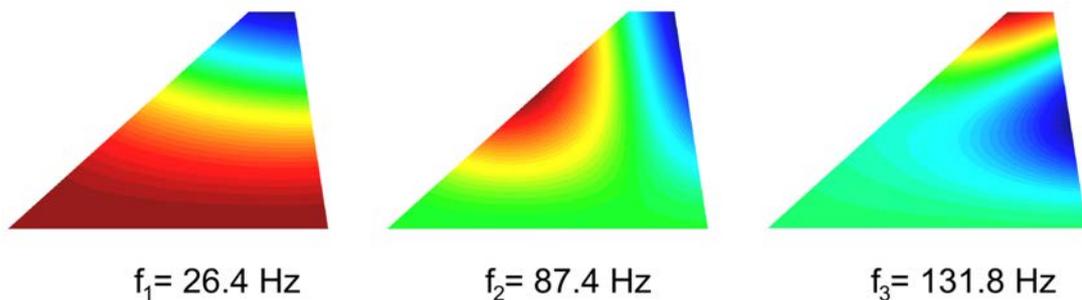


Figura 5.53: Modos e frequências naturais de vibração da asa de material isotrópico

Inicialmente serão apresentados os resultados de interação fluido–estrutura para o caso de escoamento com a pressão dinâmica  $q = 2,58$  psi (17,79 kPa). Nessa análise foram empregados os valores  $CS = 0,2$  e  $C_{AF} = 4,0$  para os parâmetros do algoritmo de CFD. O passo de tempo para avanço do algoritmo da estrutura foi definido como  $\Delta t_e = 5,0 \times 10^{-5}$ . Vale ressaltar que o valor adotado para  $\Delta t_e$  é muito inferior ao necessário pelo algoritmo de análise estrutural para reproduzir corretamente o comportamento da asa, tendo sido reduzido para controlar a quantidade de subciclos temporais do fluido em cada avanço da estrutura, que nessa análise é de aproximadamente  $n_{F/E} = 2090$ .

Os resultados dessa e das próximas análises serão apresentados através da evolução temporal do deslocamento transversal  $u_z$  (adimensionalizado pelo comprimento  $L$ ) do ponto localizado na ponta da asa junto ao bordo de fuga, como indicado na Fig. 5.50.

O deslocamento obtido na análise com pressão dinâmica de 2,58 psi é apresentado na Fig. 5.54. Verifica-se que após um período de transição ocorre a estabilização em um movimento persistente com frequência  $f = 43,5\text{Hz}$  e amplitude  $u/L = 0,028$  bem definidos. Esses valores são compatíveis com os dados experimentais  $f \cong 43,6\text{Hz}$  e  $u/L \cong 0,030$  (obtidos de Gordnier (2003)). Na comparação com trabalhos numéricos foi obtido resultado similar ao apresentado por Peng e Han (2011), que por sua vez é significativamente mais preciso do que os trabalhos anteriores.

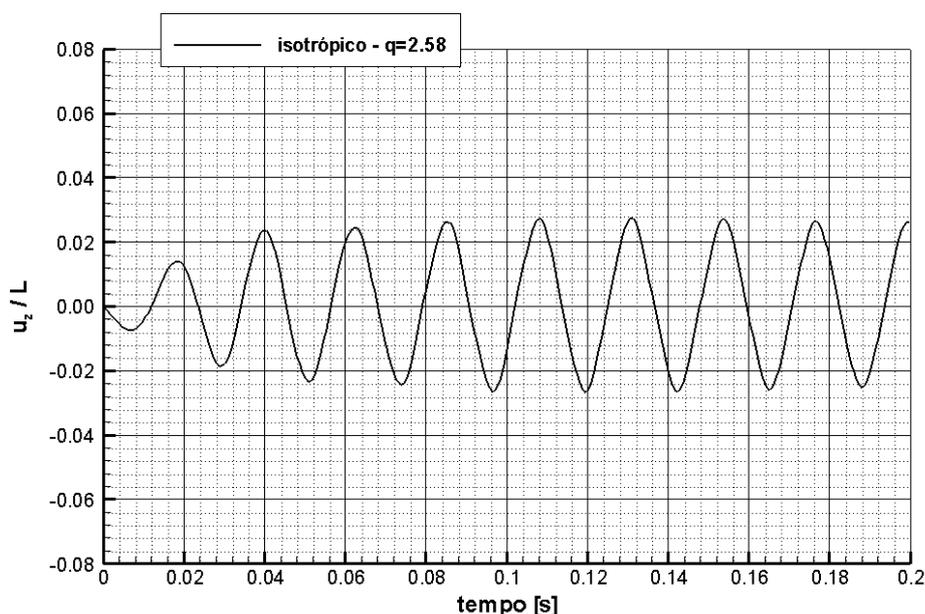


Figura 5.54: Deslocamento da ponta da asa de material isotrópico para  $q = 2,58$  psi

No intuito de avaliar o efeito da discretização bem como da consideração da matriz de massa consistente (ver Seção 3.2) na análise do escoamento foram realizadas análises adicionais para a pressão dinâmica  $q = 2,58$  psi. A nova malha empregada, denominada malha 2, contém 5494119 elementos e 981967 nós, dos quais 159972 se encontram na superfície da asa. Essa malha tem cerca de 2,2 vezes o número de nós e elementos da malha descrita anteriormente. Embora a quantidade de nós sobre a superfície sólida seja 5 vezes o da primeira malha, nesse caso optou-se por empregar apenas um elemento ao longo da espessura na região da borda da placa. Isso visa evitar a presença de elementos finitos muito pequenos que levam à redução do passo de tempo do algoritmo de análise do escoamento por questões de estabilidade (ver Seção 3.2.3).

Os deslocamentos obtidos por análises com a malha 2, empregando matriz de massa consistente ou diagonalizada, são apresentados na Fig. 5.55. Nos dois casos o

comportamento tende a um movimento cíclico estável, com frequência semelhante à observada anteriormente mas amplitude significativamente inferior. É possível concluir que o escoamento próximo da borda da asa exerce grande influência sobre o comportamento aeroelástico, devendo a malha apresentar o maior refinamento nessa região. A simplificação da solução do escoamento com matriz de massa diagonalizada resultou na maior degradação da resposta.

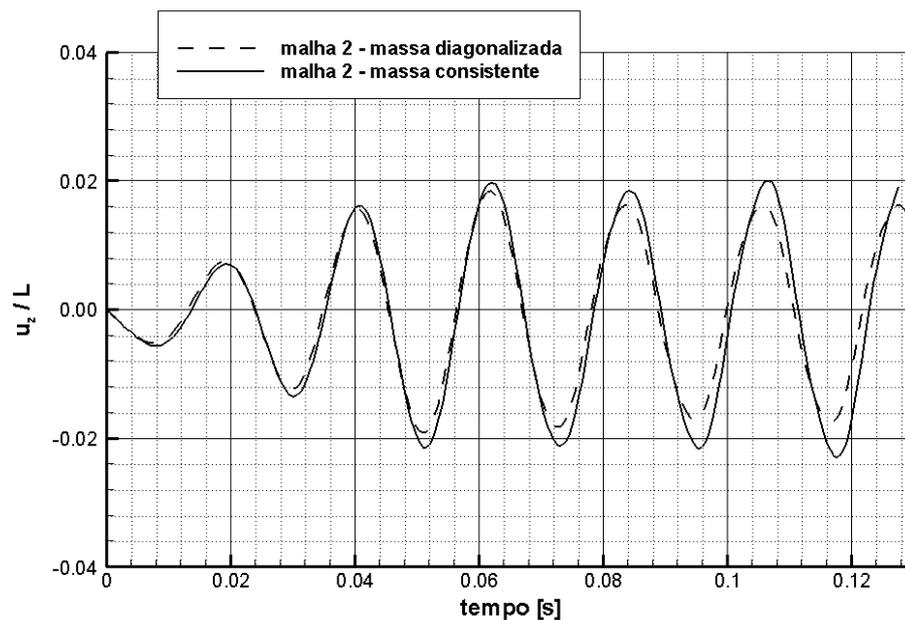


Figura 5.55: Deslocamento da ponta da asa de material isotrópico para  $q = 2,58$  psi na malha 2

O caso de análise apresentado acima foi utilizado para avaliar a eficiência da paralelização do código de CFD nos problemas de interação fluido-estrutura. Esses testes foram realizados no cluster GAUSS que se encontra no Centro Nacional de Supercomputação CESUP/UFRGS. Essa máquina é formada por nós que contam com 64 GB de RAM e 2 processadores dodecacore AMD Opteron 6176 SE 2.3 GHz cada, disponibilizando 24 processadores lógicos para operação com memória compartilhada. Os tempos médios para um passo de tempo do algoritmo de interação fluido-estrutura foram medidos em execuções do programa utilizando 1, 6, 12, 18 e 24 processadores para analisar o problema com a malha 1 (2,5M elementos e 447k nós). O desempenho da paralelização em  $p$  processadores é avaliado através dos valores de *speed-up* ( $S_p$ ) e da eficiência computacional ( $E_p$ ) definidos por (Masuero, 2009)

$$S_p = \frac{t_s}{t_p} \quad (5.3)$$

e

$$E_p = \frac{t_s}{pt_p} \quad (5.4)$$

onde  $t_p$  é o tempo decorrido na execução com  $p$  processadores e  $t_s$  é o tempo de execução serial. Nesse trabalho  $t_s$  é obtido executando o código paralelizado com  $p = 1$ , de forma que o  $t_s$  medido é mais elevado do que se fosse empregado um código otimizado para a execução serial, resultando em um *speed-up* mais elevado. A Fig. 5.56 mostra o desempenho da paralelização em diferentes números de processadores.

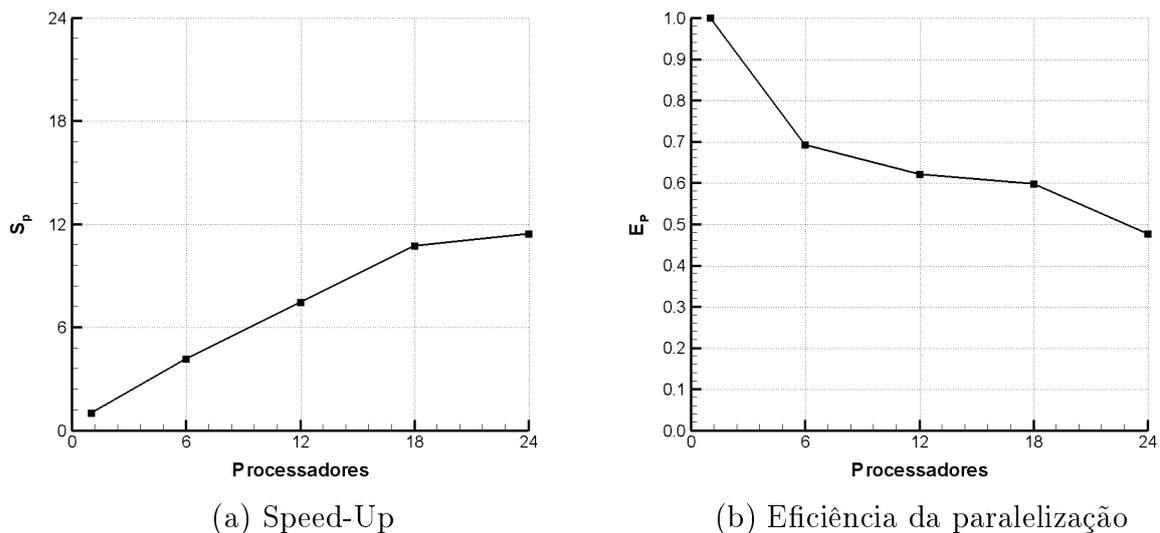


Figura 5.56: Desempenho da paralelização para a malha 1

Observa-se que o código apresenta uma eficiência razoável, na faixa entre 60% e 70%, para paralelização com até 18 processadores. A partir desse ponto o ganho de velocidade com o acréscimo de processadores é menor. O *speed-up* máximo de 11,45 foi alcançado empregando a capacidade total de um nó da máquina com 47,6% de eficiência. A avaliação da influência do tamanho do problema sobre o desempenho da paralelização foi realizada pela comparação dos tempos medidos para análises com as malhas 1 e 2. A Fig. 5.57 mostra a razão entre o tempo de processamento de um passo de tempo na execução do código em  $p$  processadores e o número de nós da malha. O código teve melhor desempenho na simulação com a maior malha, apresentando velocidade relativa superior e menor perda de eficiência na paralelização com o aumento do número de processadores.

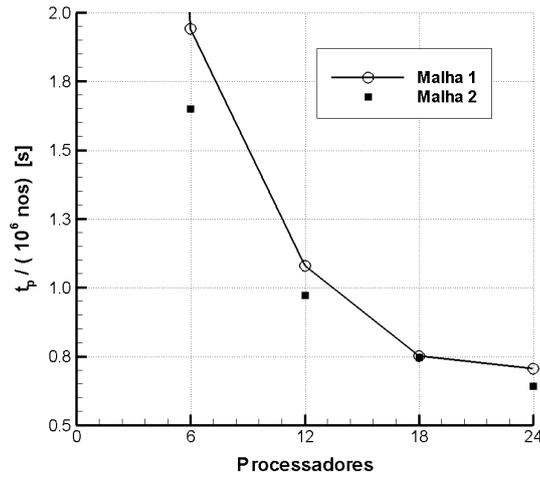


Figura 5.57: Tempo de processamento de um passo de tempo para cada  $10^6$  nós

Na parte seguinte do texto serão analisados os resultados obtidos para o caso do escoamento com pressão dinâmica  $q = 2,98\text{psi}$  ( $20,55\text{ kPa}$ ). Além do deslocamento transversal da ponta da asa também serão apresentadas a evolução temporal da força resultante do escoamento sobre a asa, do momento dessas forças em relação aos eixos do sistema de referência e do giro da ponta da asa. A configuração deformada da asa no instante de tempo  $t=0,1625\text{s}$  é apresentada com amplificação de 10 vezes na Fig. 5.58, juntamente com a malha na sua posição inicial. Nessa figura também são ilustradas as demais quantidades utilizadas para descrever o processo de interação.

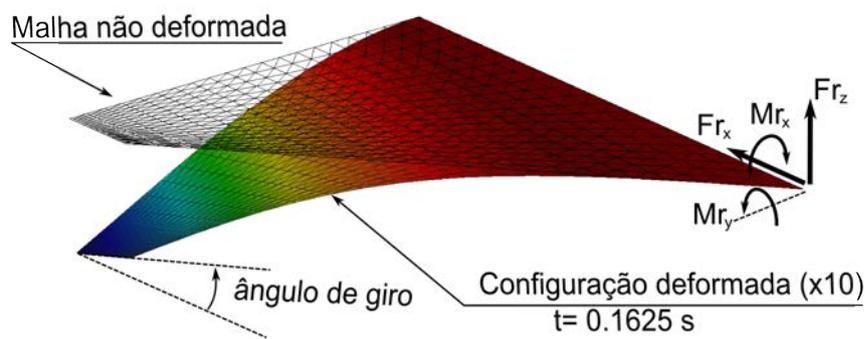


Figura 5.58: Configuração deformada, força e momentos resultantes e ângulo de giro da ponta da asa isotrópica para  $q = 2,98\text{psi}$

O deslocamento vertical da ponta da asa ao longo do tempo é apresentado na Fig. 5.59. Novamente se observa a estabilização do movimento em um processo oscilatório com frequência  $f = 45,5\text{Hz}$  e amplitude  $u/L = 0,062$ . Esses resultados são muito semelhantes aos publicados por Peng e Han (2011), mas a amplitude do deslocamento é

significativamente inferior ao valor de  $u/L = 0,1$  medido experimentalmente por Schairer e Hand (1999).

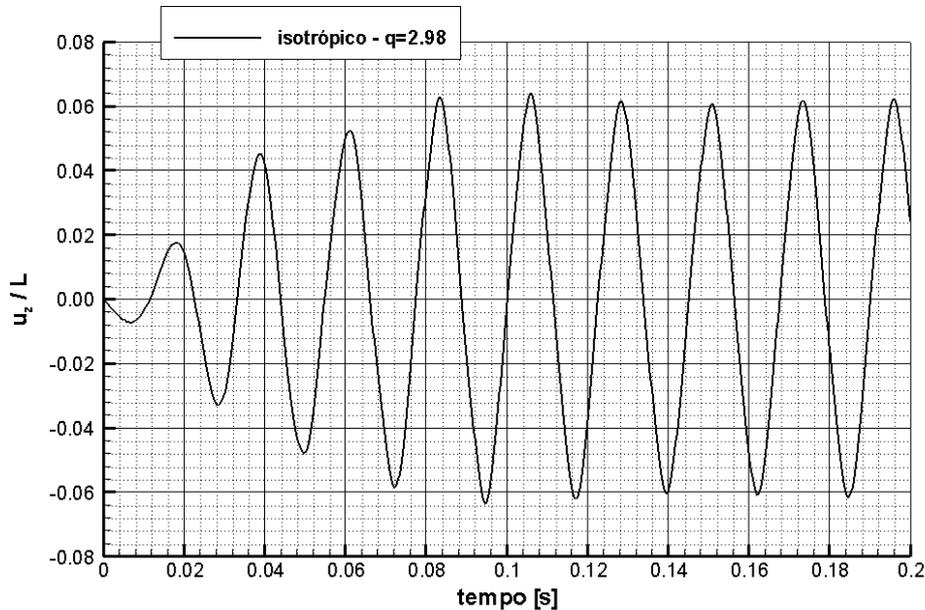


Figura 5.59: Deslocamento da ponta da asa de material isotrópico para  $q = 2,98$  psi

Segundo Peng e Han (2011), o distanciamento entre a resposta numérica e os dados experimentais para casos de pressão dinâmica mais elevada se deve à incapacidade de reprodução dos fenômenos aerodinâmicos quando malhas com resolução suficiente e modelos de turbulência não são empregadas na simulação. Nesses casos, o movimento da asa com maior amplitude altera mais significativamente o ângulo de ataque do escoamento, que se torna mais complexo com a formação de zonas de baixa pressão, movimento de onda de choque e desprendimento de vórtices. A formação de uma zona de baixa pressão do escoamento junto ao bordo de ataque da asa em um configuração próxima do ponto de amplitude máxima do movimento é apresentada na Fig. 5.60. Nessa situação pode ocorrer desprendimento de vórtices, que alterariam as características aerodinâmicas do escoamento. No entanto, tal fenômeno não foi capturado nesse trabalho, o que se atribui às limitações do esquema computacional empregado e da resolução da malha utilizada na discretização espacial do escoamento.

Na Fig. 5.61 é apresentado o ângulo de giro da ponta da asa ao longo do tempo, que é igual ao ângulo de ataque local  $\alpha_p$ . Esse valor é obtido como

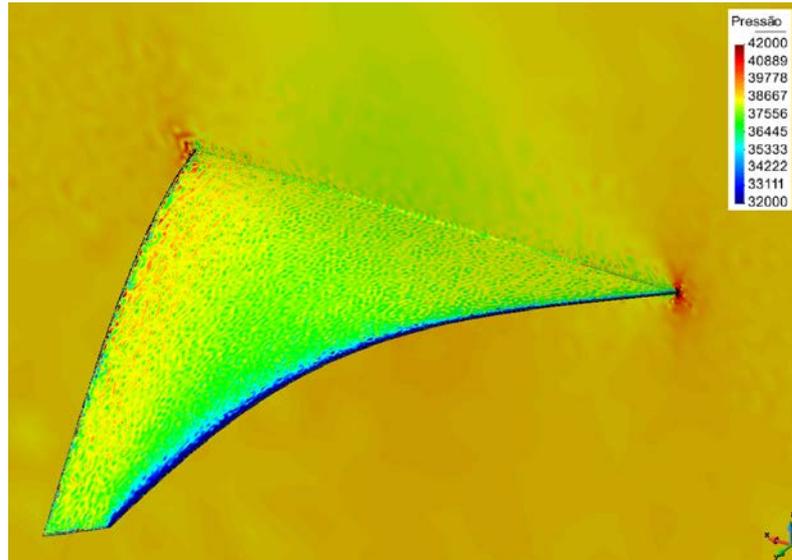


Figura 5.60: Pressão do escoamento sobre a configuração deformada ( $\times 10$ ) da asa isotrópica para  $q = 2,98$  em  $t = 0.1625s$

$$\alpha_p = \tan^{-1} \left( \frac{u_z^a - u_z^f}{c_p} \right) \quad (5.5)$$

onde  $c_p$  é o comprimento da corda na ponta da asa e  $u_z^a$  e  $u_z^f$  são os valores de deslocamento vertical dos pontos localizados na ponta da asa junto ao bordo de ataque e ao bordo de fuga, respectivamente. Comparando as Figuras 5.59 e 5.61 se verifica que os valores absolutos de pico de deslocamento e ângulo de giro ocorrem nos mesmos instantes de tempo, mas deslocados por um ângulo de fase de 180 graus (meio período). Esse comportamento também foi observado experimentalmente por Schairer e Hand (1999). Assumindo que a sustentação é proporcional ao ângulo de ataque na ponta da asa, Schairer e Hand (1999) concluíram que a força de sustentação tem comportamento semelhante ao de uma mola, agindo sempre no sentido de restaurar a configuração indeformada da asa. Nesse caso, o ângulo de ataque deve estar em fase com a força de sustentação, o que não pôde ser medido experimentalmente. No entanto, os resultados obtidos no presente trabalho estão em concordância com o mecanismo de sustentação de LCO descrito por Schairer e Hand (1999), conforme se pode verificar comparando a evolução temporal do ângulo de giro com a de  $Fr_z$ , apresentada na Fig. 5.62.

A Fig. 5.62 traz os valores de  $Fr_z$  (equivalente à força de sustentação) calculados na malha da estrutura e na malha do fluido sobre a asa. Os valores são indistinguíveis, independentemente da deformação ao longo do tempo, o que demonstra a efetividade do

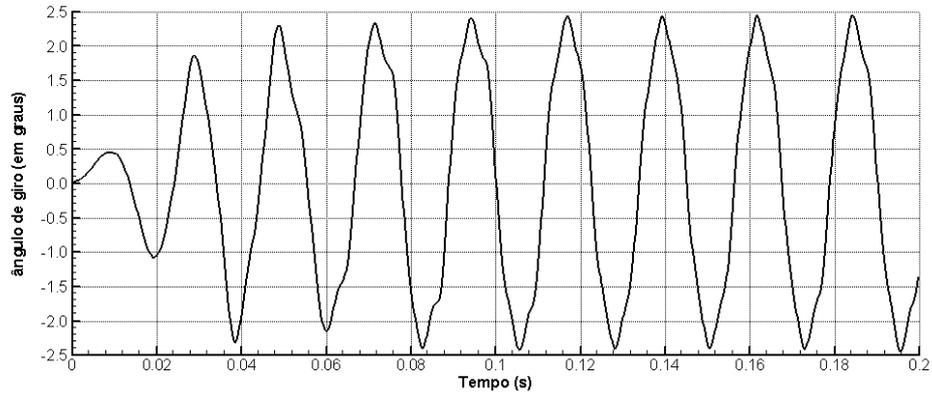


Figura 5.61: Giro da ponta da asa de material isotrópico para  $q = 2,98$  psi

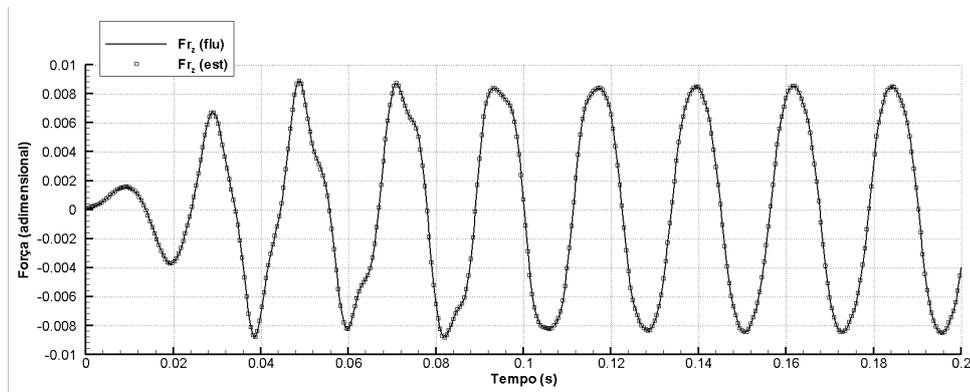


Figura 5.62: Força resultante na direção  $z$  na asa isotrópica para  $q = 2,98$  psi

algoritmo de transferência de informação na interface dos meios. O mesmo se observa com relação à força de arrasto ( $Fr_x$ ) quando medida nas duas malhas, conforme apresentado na Fig. 5.63. O arrasto apresentou um comportamento periódico, proporcional ao valor absoluto do ângulo de ataque e com valor mínimo nos momentos de ângulo de ataque zero. A evolução do momento das forças aerodinâmicas sobre a asa ao longo do tempo é apresentada na Fig. 5.64. A perfeita concordância dos valores de  $Fr_x$ ,  $Fr_z$ ,  $Mr_x$  e  $Mr_y$  quando medidos na malha do fluido e na malha da estrutura confirmam que as forças transferidas entre os algoritmos de análise são estaticamente equivalentes em todos os instantes de tempo.

Por fim, o número de subciclos de avanço do fluido necessários para cada passo de tempo da estrutura durante a análise é apresentado na Fig. 5.65. Tendo em vista que incremento de tempo no avanço da estrutura é constante, atribui-se o comportamento observado à variação do passo de tempo do escoamento, definido pelo menor  $\Delta t$  crítico dentre os elementos da malha (ver Seção 3.2.3). Isso ocorre devido às alterações no escoamento e

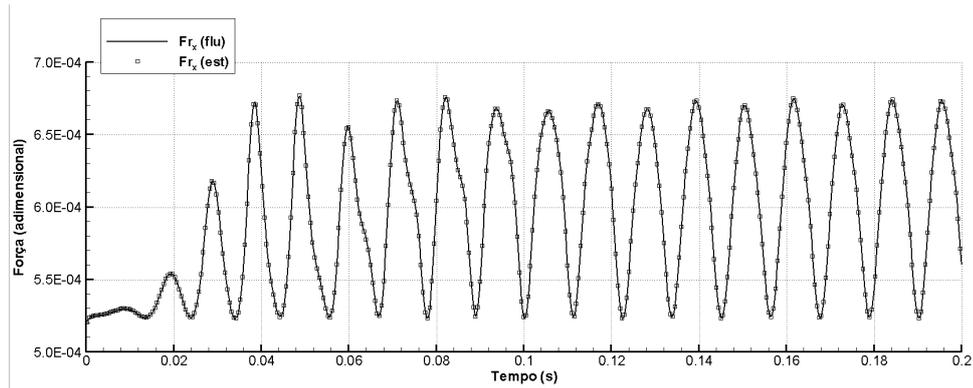


Figura 5.63: Força resultante na direção  $x$  na asa isotrópica para  $q = 2,98\text{psi}$

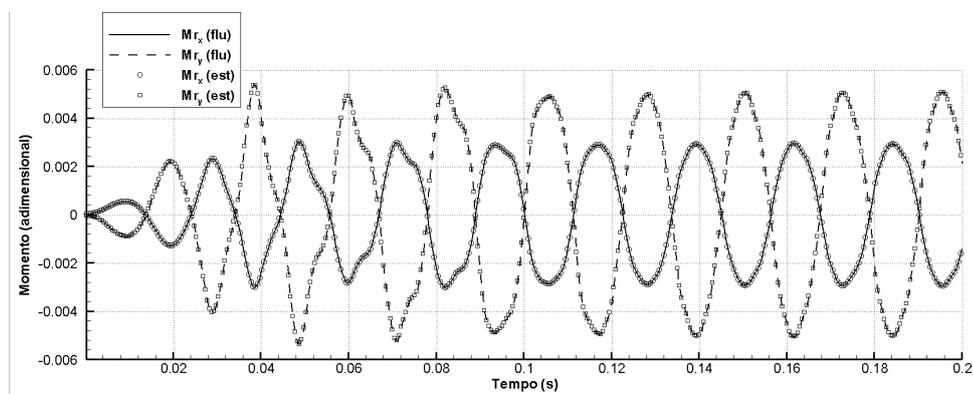


Figura 5.64: Momentos resultantes  $Mr_x$  e  $Mr_y$  na asa isotrópica para  $q = 2,98\text{ psi}$

às distorções da malha que se adapta ao movimento do corpo ao longo da simulação. A relação direta entre o movimento da asa e  $n_{F/E}$  fica evidente pela variação cíclica observada na Fig. 5.65, que tem período semelhante aos deslocamentos descritos na Figuras 5.59 e 5.61. Os saltos observados no valor instantâneo de  $n_{F/E}$  se devem a ajustes do  $\Delta t$  calculado para se atingir precisamente o instante de tempo de troca de informação na interface dos meios.

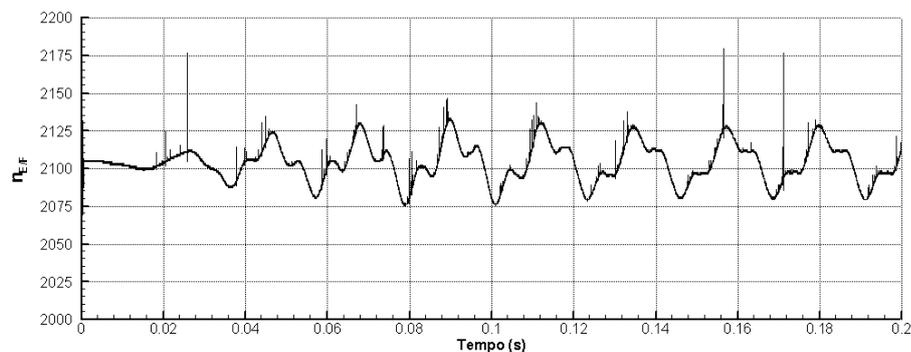


Figura 5.65: Número de passos de tempo do fluido por passo de tempo da estrutura na análise da asa isotrópica para  $q = 2,98\text{ psi}$

## Asa de material ortotrópico

Uma extensão do estudo anterior, tomando a asa como composta por material ortotrópico, é apresentada nessa parte do texto. Os dois casos considerados para a estrutura são denominados de asa ortotrópica 1 e asa ortotrópica 2, ou simplesmente AO1 e AO2, respectivamente. A AO1 é formada pelo Material 1, cujas propriedades estão apresentadas na Tabela 5.2. Nesse caso a asa é formada por uma única camada com 0,888 mm de espessura e a direção principal 1 do material ortotrópico está paralela ao eixo  $y$ . Um laminado simétrico composto por quatro camadas do Material 2, com propriedades definidas na Tabela 5.2, forma a AO2. As lâminas têm espessura de 0,222mm cada e a direção principal 1 do material ortotrópico está orientada em cada camada conforme a sequência de laminação  $[80/10]_s$ , definida com relação ao eixo  $x$ .

Tabela 5.2: Propriedades mecânicas dos materiais ortotrópicos

Propriedade	Unidade	Material 1	Material 2
$E_1$	GPa	180	181
$E_2$	GPa	140	10.3
$\nu_{12}$		0.28	0.28
$G_{12}$	GPa	60	7.17
$G_{13}$	GPa	60	7.17
$G_{23}$	GPa	60	3.58
$\rho$	$10^3 kg/m^3$	5	1.6

A Tabela 5.3 demonstra o nível de ortotropia de cada material estudado pela adimensionalização dos coeficientes de rigidez. Através desses dados constata-se que o Material 1 é fracamente ortotrópico, ao contrário do Material 2 que tem propriedades mecânicas drasticamente distintas em cada direção.

Tabela 5.3: Propriedades mecânicas adimensionalizadas por  $E_2$

Propriedade	Material 1	Material 2
$E_1/E_2$	1,28	17,6
$G_{12}/E_2$	0,43	0,70
$G_{13}/E_2$	0,43	0,70
$G_{23}/E_2$	0,43	0,35

Uma comparação com o aço, material isotrópico do qual a asa é composta originalmente, é apresentada na Tabela 5.4. Nesse caso verifica-se que o Material 2 é notoriamente

distinto do aço, tanto em termos de massa específica quanto de rigidez (a menos da direção principal). Por outro lado, o Material 1 apresenta características intermediárias entre o aço e o Material 2, tanto em termos de massa específica quanto em rigidez e nível de ortotropia.

Tabela 5.4: Propriedades dos materiais ortotrópicos adimensionalizadas pelas propriedades do aço

Propriedade	Material 1	Material 2
$E_1/E_{\text{aço}}$	0,90	0,90
$E_2/E_{\text{aço}}$	0,70	0,052
$G_{12}/G_{\text{aço}}$	0,78	0,093
$G_{13}/G_{\text{aço}}$	0,78	0,093
$G_{23}/G_{\text{aço}}$	0,78	0,047
$\rho/\rho_{\text{aço}}$	0,64	0,204

Os três primeiros modos e frequências naturais de vibração da AO1 e da AO2 são apresentados nas Figuras 5.66 e 5.67, respectivamente. Nos dois casos as frequências naturais de vibração são superiores aos da asa original. Embora os materiais ortotrópicos apresentem módulo de elasticidade longitudinal ( $E_1$  e  $E_2$ ) e transversal ( $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$ ) inferiores aos do aço, sua massa específica também é significativamente inferior, contribuindo para o aumento da frequência natural da estrutura. A orientação dos eixos principais dos materiais ortotrópicos também é um fator de grande influência sobre a vibração, uma vez que determina a rigidez da asa em cada direção.

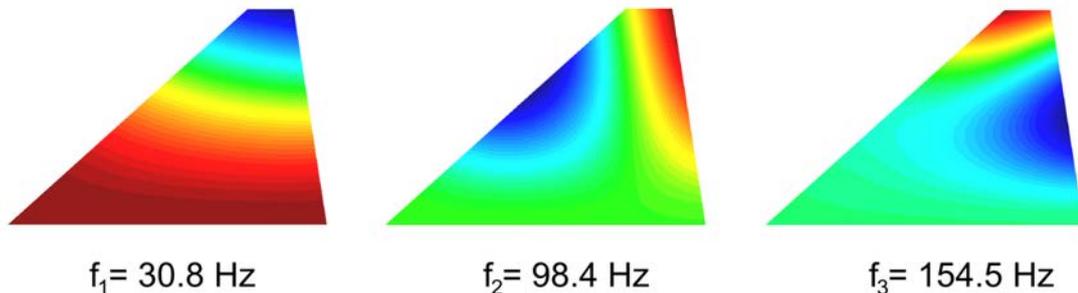


Figura 5.66: Modos e frequências de vibração da AO1

Os modos de vibração da AO1 são muito semelhantes aos da asa original. Por outro lado, verifica-se uma distinção entre os modos de vibração da AO2 e os da asa isotrópica, principalmente naqueles associados às frequências mais altas.

Para determinar as diferenças de rigidez da asa quando feita de cada material estudado

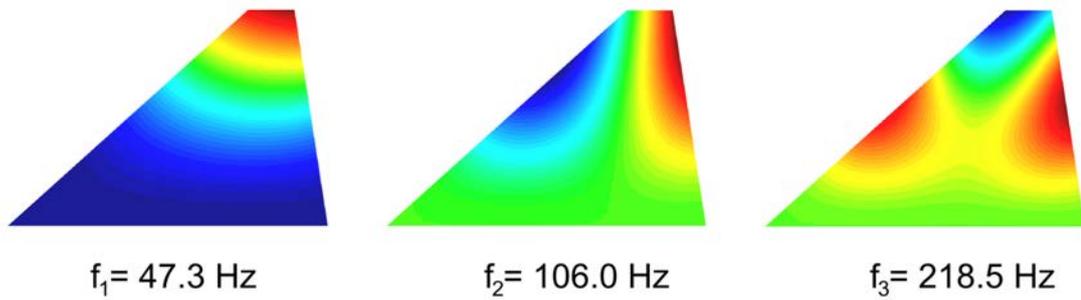


Figura 5.67: Modos e frequências de vibração da AO2

foram analisados dois casos de carregamento. No primeiro são aplicadas forças de 2,5N na direção  $z$  nos pontos localizados no bordo de ataque e no bordo de fuga na ponta da asa. Nesse caso o modo de deformação principal é o de flexão. O deslocamento da ponta da asa no bordo de fuga e o giro da seção, obtidos na análise não linear geométrica, são apresentados de acordo com o nível de carga (NC) na Fig. 5.68.

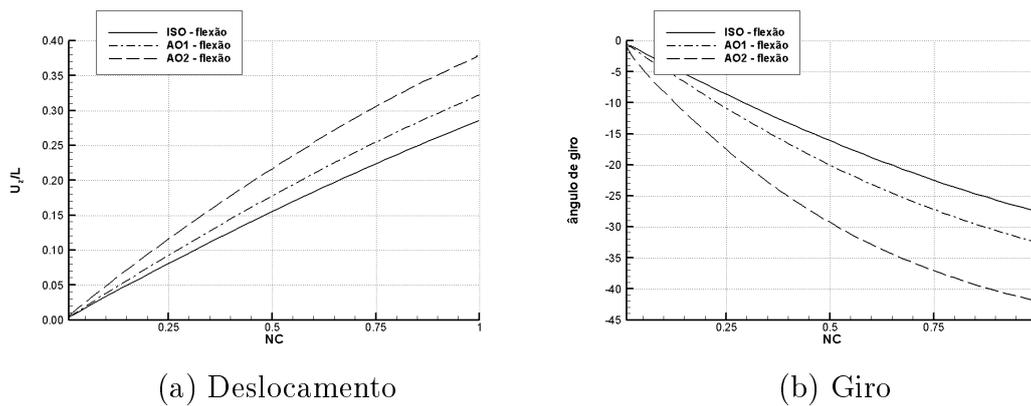


Figura 5.68: Deslocamento e giro da ponta da asa para o carregamento de flexão

O segundo caso de carga visa produzir o efeito de torção na asa com carregamento de  $\pm 1\text{N}$  nos mesmos nós. O deslocamento e o giro produzido por esse carregamento são apresentados na Fig. 5.69. A resposta obtida para a AO2 se distancia significativamente daquela produzida pela placa formada pelos demais materiais. Esses resultados mostram que, sob esse tipo de carregamento, a asa composta pelo o Material 2 é consideravelmente mais flexível que as outras.

Os resultados das análises aeroelásticas serão apresentados inicialmente para a AO1. No primeiro caso é considerado o escoamento com pressão dinâmica de 2,58 psi (17,79 kPa). Os parâmetros utilizados para a simulação do escoamento são  $CS = 0,20$  e  $C_{AF} = 4,0$ . Um passo de tempo  $\Delta t = 5,0 \times 10^{-5}\text{s}$  foi empregado no avanço da estrutura. O número

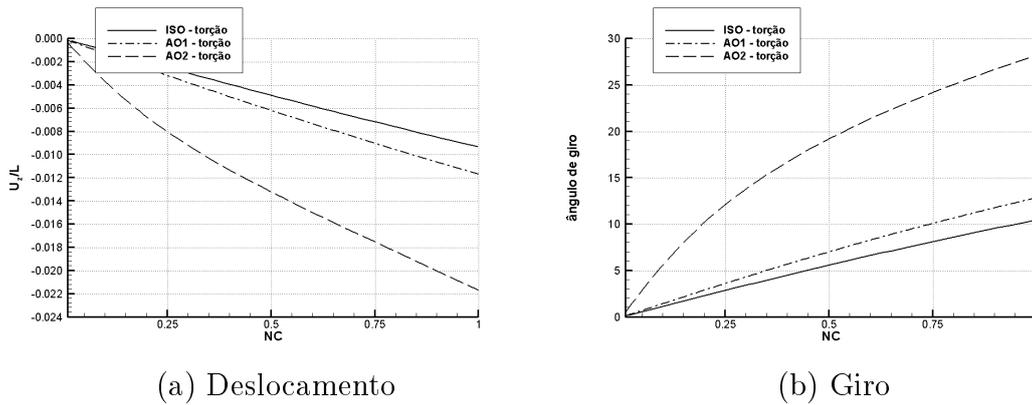


Figura 5.69: Deslocamento e giro da ponta da asa para o carregamento de torção

de subciclos entre os algoritmos do fluido e da estrutura ( $n_{F/E}$ ) durante a simulação se encontra entre 2060 e 2140, com variação similar ao da análise da asa isotrópica (ver Fig. 5.65).

O deslocamento transversal da ponta da asa ao longo do tempo é apresentado na Fig. 5.70. A amplitude do movimento oscilatório cresceu continuamente durante os 0,2s iniciais, com frequência se estabelecendo em  $f = 52,63\text{Hz}$  após um breve período transitório. O tempo de análise foi estendido em relação aos casos anteriores a fim de confirmar a tendência de divergência observada durante os primeiros 0,2s de simulação. Contudo, no prosseguimento da análise constatou-se que o comportamento da asa tende à estabilização do movimento em LCO. O deslocamento máximo da ponta da asa foi de  $u/L = 0,124$ , sendo 4,43 vezes o deslocamento máximo desenvolvido pela asa isotrópica para o escoamento com as mesmas características.

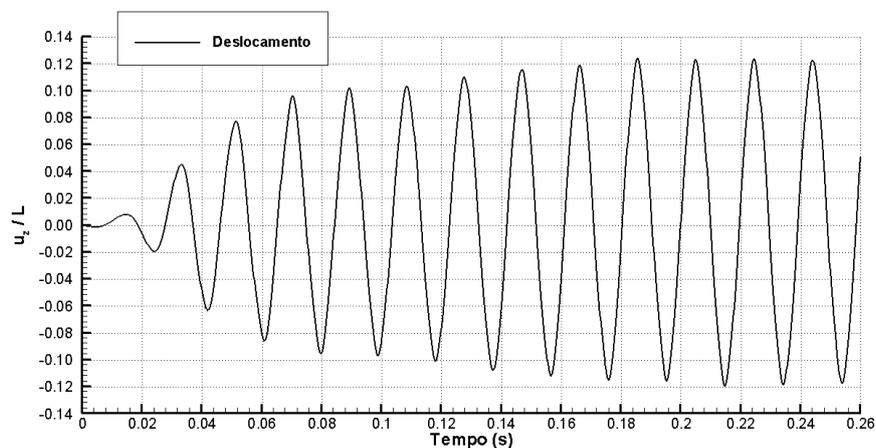


Figura 5.70: Deslocamento da ponta da AO1 para  $q = 2,58$  psi

Conforme apresentado na Fig. 5.71, o deslocamento e a força resultante na direção transversal ( $u_z$  e  $Fr_z$ ) apresentam comportamento cíclico com mesma frequência, mas defasados em meio período (ângulo de fase de 180 graus). Essa condição se assemelha à da asa isotrópica para o escoamento com  $q = 2,98\text{psi}$ .

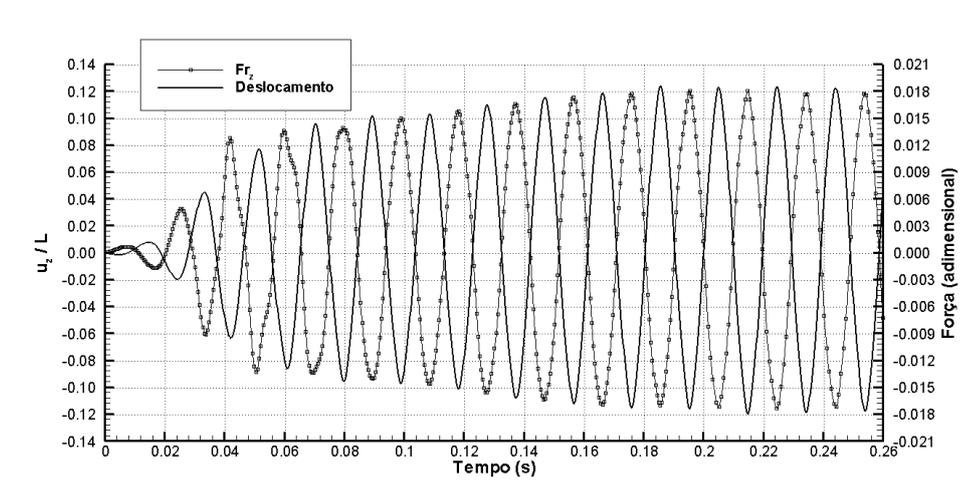


Figura 5.71: Deslocamento e força resultante na direção  $z$  na AO1 para  $q = 2,58\text{ psi}$

A configuração deformada da asa (sem amplificação) no tempo  $0,194\text{s}$  é apresentada na Fig. 5.72 juntamente com a distribuição da parcela  $Fz$  da força aerodinâmica sobre a malha da estrutura. Observa-se que, além do bordo de ataque, uma ampla região da superfície sólida contribui significativamente para a força de sustentação.

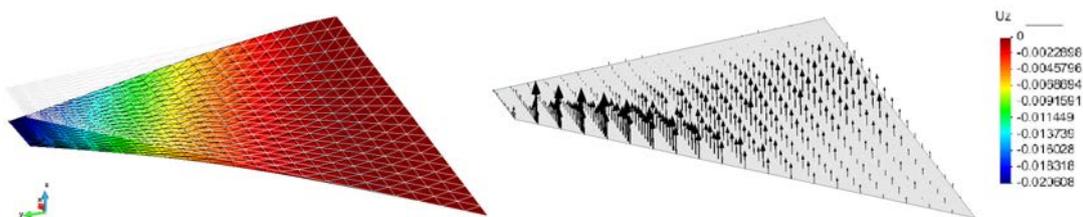


Figura 5.72: Configuração deformada e força aerodinâmica  $Fz$  sobre os nós da estrutura em  $t=0,194\text{s}$  na AO1 para  $q = 2,58\text{ psi}$

A Fig. 5.73 traz os deslocamentos transversais dos pontos de coordenadas  $y$  igual a  $L/4$ ,  $L/2$ ,  $3L/4$  e  $L$  sobre a linha de um quarto da corda. O ângulo de inclinação das seções com as mesmas coordenadas  $y$  são apresentados na Fig. 5.74. Nos dois casos observa-se uma tendência de movimento similar à apresentada na Fig. 5.71. As amplitudes máximas de flexão e torção da asa ocorrem simultaneamente em todos as seções.

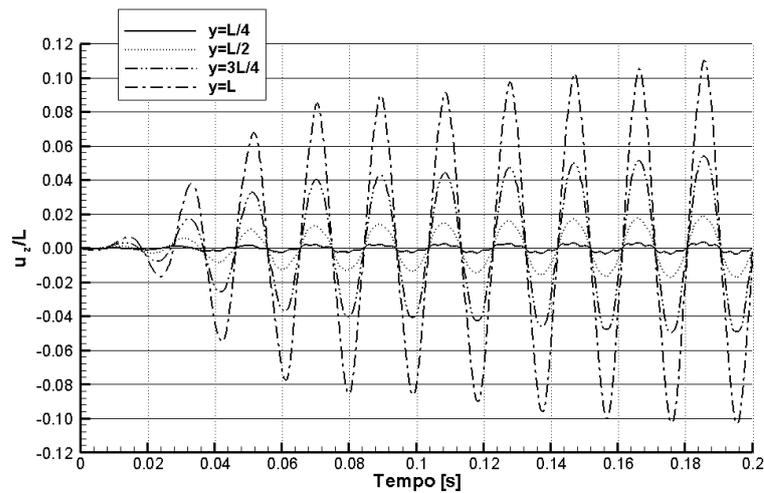


Figura 5.73: Deslocamento de pontos sobre a linha de um quarto de corda na AO1 para  $q = 2,58$  psi

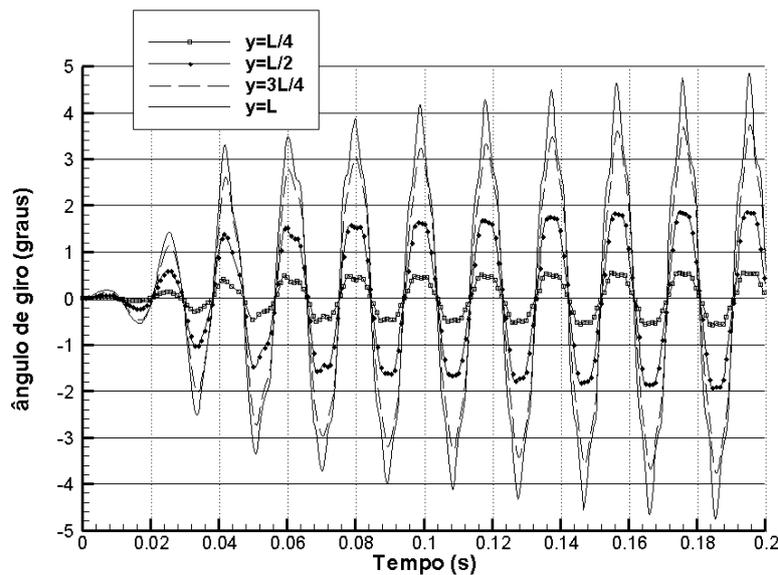


Figura 5.74: Ângulo de giro da seção transversal na AO1 para  $q = 2,58$  psi

A continuação do estudo do comportamento aeroelástico da AO1 é efetuada considerando o escoamento com pressão dinâmica de 2,18 psi (15,03 kPa). O resultado dessa análise é apresentado através da evolução do deslocamento transversal na ponta da asa. A exemplo do que ocorreu nos demais casos, o processo de interação entre fluido e estrutura converge para um comportamento de LCO, como mostra a Fig. 5.75. O movimento oscilatório se torna bem definido após um curto período inicial de transição, com frequência  $f = 50\text{Hz}$  e amplitude  $u_z/L = 0,046$ .

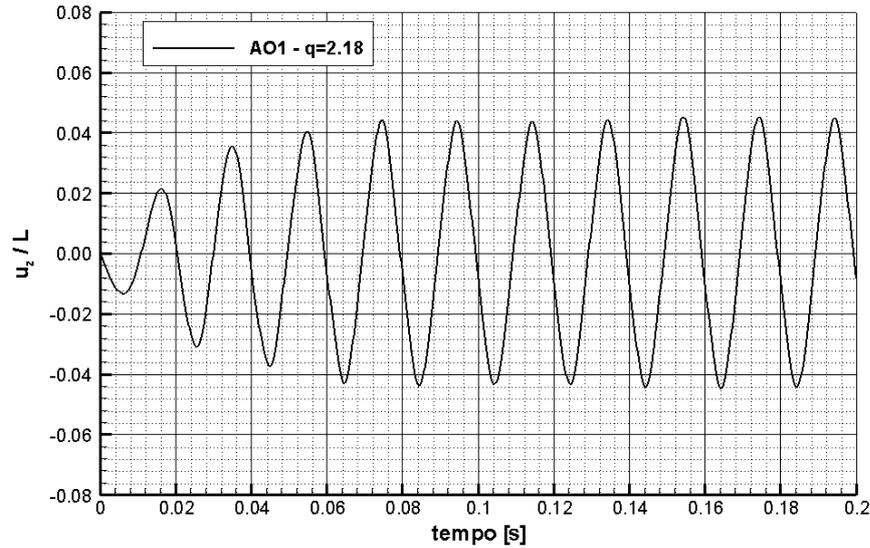


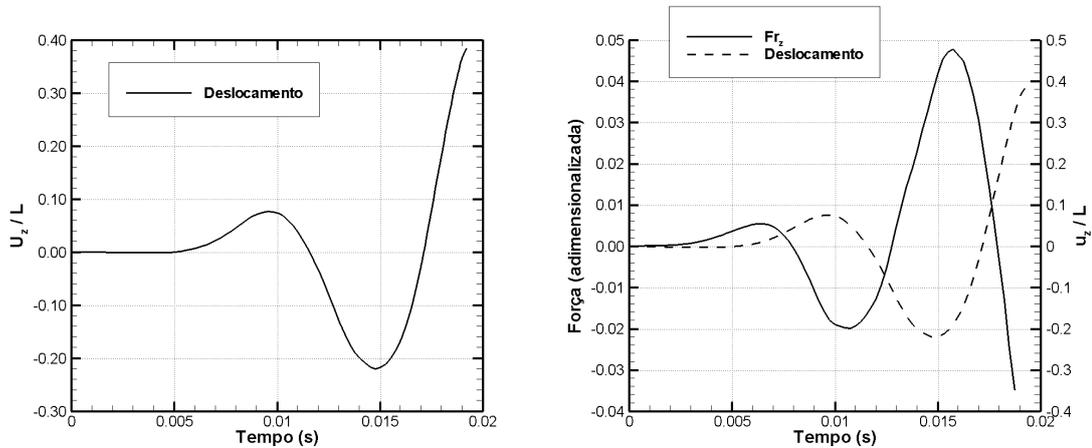
Figura 5.75: Deslocamento da ponta da AO1 para  $q = 2,18$  psi

Na parte final dessa seção serão apresentados os resultados de análise aeroelástica da asa ortotrópica 2 (AO2). Assim como no caso anterior, foram considerados escoamentos com pressão dinâmica de 2,58 (17,79 kPa) e 2,18 psi (15,03 kPa).

A Fig. 5.76 mostra os resultados da análise para a pressão dinâmica de 2,58 psi. Após apenas uma breve oscilação a asa se deforma consideravelmente sob ação do escoamento, alcançando a amplitude máxima em  $t = 0,0192$  s. A Fig. 5.77 apresenta a configuração da asa (sem amplificação) nesse instante, quando o deslocamento da ponta da asa é de  $u_z/L = 0,385$  e o giro é de  $-14,18^\circ$ .

A Fig. 5.76b traz a evolução do deslocamento da ponta da asa ( $u_z/L$ ) e da parcela de força aerodinâmica resultante  $Fr_z$ . Verifica-se uma pequena defasagem temporal entre os valores máximos e mínimos de  $u_z/L$  e  $Fr_z$ . Tal comportamento também foi observado nos casos estudados anteriormente onde, após essa fase inicial de amplificação do movimento da estrutura, ocorre um ajuste na variação de  $Fr_z$  e  $u_z$ , que passam a estar defasadas em meio período, gerando o fenômeno de LCO. O deslocamento transversal de pontos distribuídos ao longo da asa sobre a linha de um quarto da corda e o giro das seções transversais que passam por esses pontos são apresentados nas Fig. 5.78a e Fig. 5.78b, respectivamente.

O movimento acentuado da asa sob ação do escoamento se deve à sua acentuada



(a) Deslocamento da ponta da asa (b) Força aerodinâmica resultante na direção  $z$  e deslocamento da ponta da asa

Figura 5.76: Resultados da análise da AO2 para  $q = 2,58$  psi

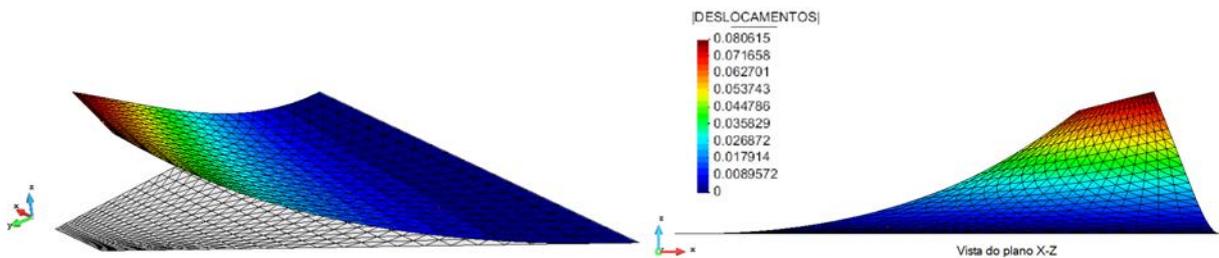
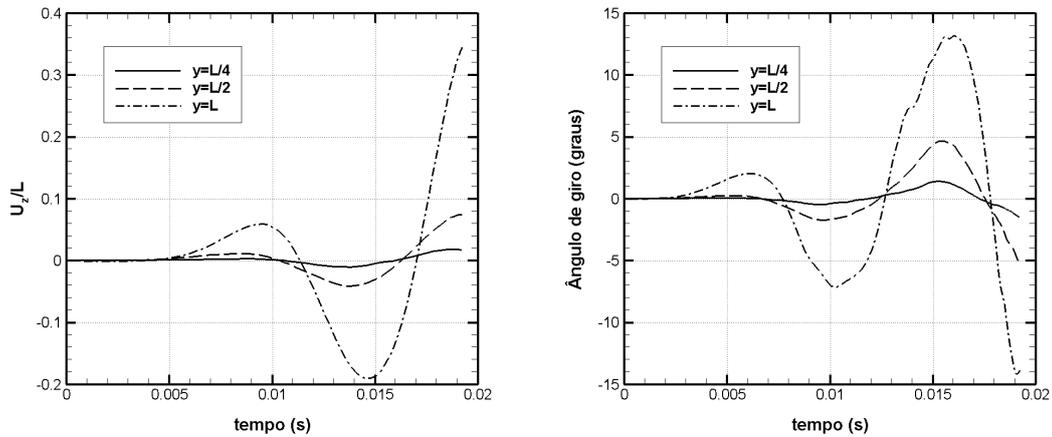


Figura 5.77: Configuração deformada da asa AO2 para  $q = 2,58$  psi em  $t=0,0192s$

flexibilidade à torção em relação ao eixo  $y$ , como demonstrado na Fig. 5.69, o que é evidenciado pela grande magnitude do giro na extremidade da asa já na primeira oscilação. Essa flexibilidade tem origem na sequência de laminação empregada para a estrutura. Formas alternativas de disposição das fibras podem elevar a rigidez torcional da placa, tornando-a menos suscetível aos efeitos aeroelásticos verificados na análise da AO2.

Ao atingir a configuração apresentada na Fig. 5.77, a análise foi interrompida devido à obtenção de um valor negativo durante a etapa de atualização do passo de tempo do algoritmo de CFD, o que é consequência da existência de um ou mais elementos tetraédricos com altura negativa (e portanto volume negativo). A ocorrência desses elementos excessivamente distorcidos se deve ao processo de movimentação da malha para adaptação ao contorno móvel da asa durante seu deslocamento. A metodologia empregada para tal finalidade mostrou-se inadequada ao tratamento desse problema quando os



(a) Deslocamento de pontos sobre a linha de um quarto da corda      (b) Giro da seção transversal

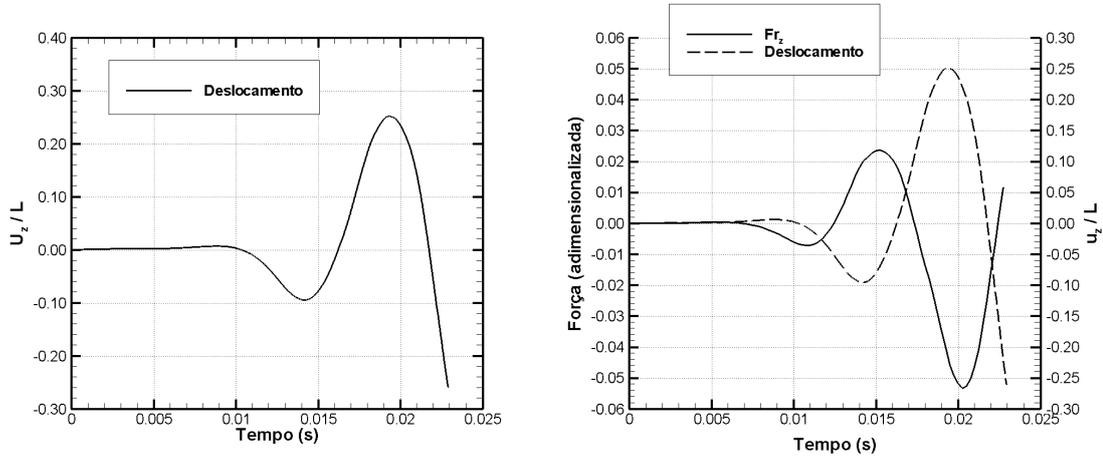
Figura 5.78: Deslocamentos ao longo da AO2 para  $q = 2,58$  psi

deslocamentos são de maior amplitude. As deficiências na adaptação da malha não foram resolvidas pela retomada da análise com parâmetros  $CS = 0,1$  e  $\Delta t_e = 5,0 \times 10^{-6}$ s, reduzidos em relação aos valores  $CS = 0,175$  e  $\Delta t_e = 5,0 \times 10^{-5}$ s adotados inicialmente.

O mesmo caso foi analisado uma segunda vez a fim de verificar se a falha da simulação foi decorrente do ajuste de parâmetros, das condições iniciais ou das simplificações adotadas para aceleração da análise (ver início da Seção 5.4). Nessa nova análise foram empregados os parâmetros  $CS = 0,10$  e  $\Delta t_e = 5,0 \times 10^{-6}$ s. A velocidade inicial da estrutura foi reduzida à metade. Além disso, os coeficientes utilizados para a movimentação da malha (ver Seção 3.3) foram recalculados a cada troca de dados entre os algoritmos do fluido e da estrutura.

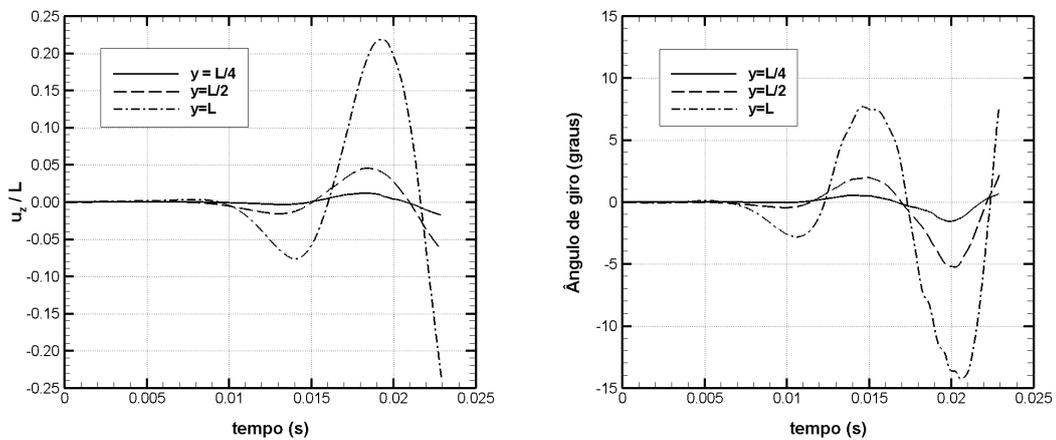
Os resultados da segunda análise são apresentados na figuras 5.79 e 5.80. Apesar dos ajustes realizados, não foi possível eliminar os problemas na movimentação da malha. Mais uma vez a execução do programa foi interrompida pela ocorrência de valores negativos de  $\Delta t$  na malha do fluido. Deve ser ressaltado que o esquema de movimentação da malha foi implementada de maneira bastante simplificada em relação a trabalhos anteriores (Teixeira, 2001; Braun, 2007), onde o movimento de cada nó do domínio do fluido é definido utilizando mais de um nó em cada superfície de contorno fixo ou móvel. Além disso, não foi realizado qualquer estudo aprofundado sobre possíveis causas de falha do algoritmo. Fatores como a presença de elementos fortemente distorcidos na

malha original ou de oscilações no campo de velocidade da estrutura podem deteriorar a qualidade geométrica dos elementos durante a acomodação da malha.



(a) Deslocamento da ponta da asa (b) Força aerodinâmica resultante na direção  $z$  e deslocamento da ponta da asa

Figura 5.79: Resultados da segunda análise da AO2 para  $q = 2,58$  psi



(a) Deslocamento de pontos sobre a linha de um quarto da corda (b) Giro da seção transversal

Figura 5.80: Deslocamentos ao longo da AO2 para  $q = 2,58$  psi na segunda análise

A relação entre o deslocamento da asa e a variação dos efeitos aerodinâmicos sobre a mesma é ilustrada pelas Fig. 5.81 e Fig. 5.82. A distribuição da parcela  $F_z$  da força aerodinâmica sobre a asa deformada é apresentada na Fig. 5.81 para vários instantes de tempo decorridos entre os pontos de deslocamento mínimo e máximo da pontada asa (ver Fig. 5.76b). O escoamento atua fortemente sobre a ponta e sobre a região intermediária da superfície da asa.

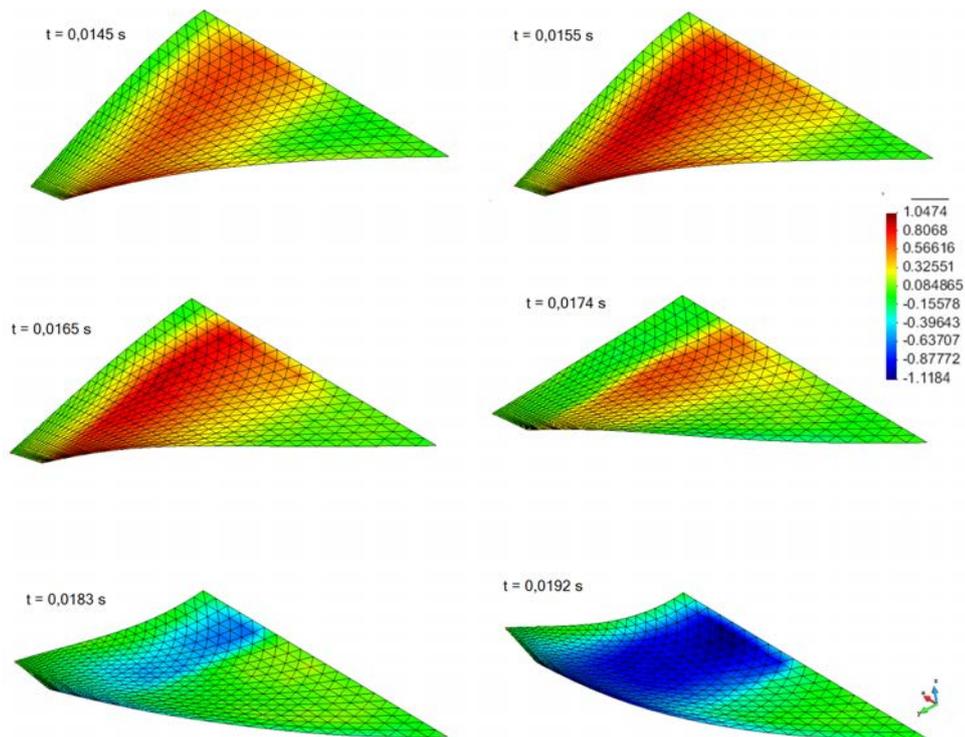


Figura 5.81: Força  $F_z$  sobre a configuração de formada da AO2 para  $q = 2,58$  psi em vários instantes de tempo

A Fig. 5.82 mostra o campo de pressão em planos com coordenada  $y$  igual a  $0,25L$ ,  $0,50L$ ,  $0,75L$  e  $0,95L$ . Esses resultados são apresentados para os tempos  $t = 0,0115$  s e  $t = 0,01878$  s. Nesses instantes a asa apresenta grandes deslocamentos, estando próxima aos valores mínimo e máximo de  $u_z/L$  apresentados na Fig. 5.76a. Além do deslocamento e do giro da seção transversal também se observa o desenvolvimento da curvatura da asa no plano  $x-z$ . A influência da geometria da seção transversal sobre o escoamento fica evidente em cada corte apresentado. A pressão no escoamento se relaciona perfeitamente com a distribuição da parcela transversal da força aerodinâmica e a sua resultante ( $Fr_z$ ) sobre a asa, apresentadas nas Fig. 5.81 e Fig. 5.76b, respectivamente.

O último problema estudado é relativo ao escoamento com pressão dinâmica de 2,18 psi sobre a AO2. Os parâmetros  $CS = 0,25$  e  $C_{AF} = 4,0$  foram empregados no algoritmo CFD enquanto  $\Delta t_e = 5 \times 10^{-5}$  foi utilizado no avanço de tempo da estrutura.

Diferentemente do ocorrido nos casos analisados anteriormente, não foi observado um comportamento de LCO durante a simulação desse problema. Em vez disso, o processo e interação entre a asa e o escoamento converge para uma configuração deformada onde se

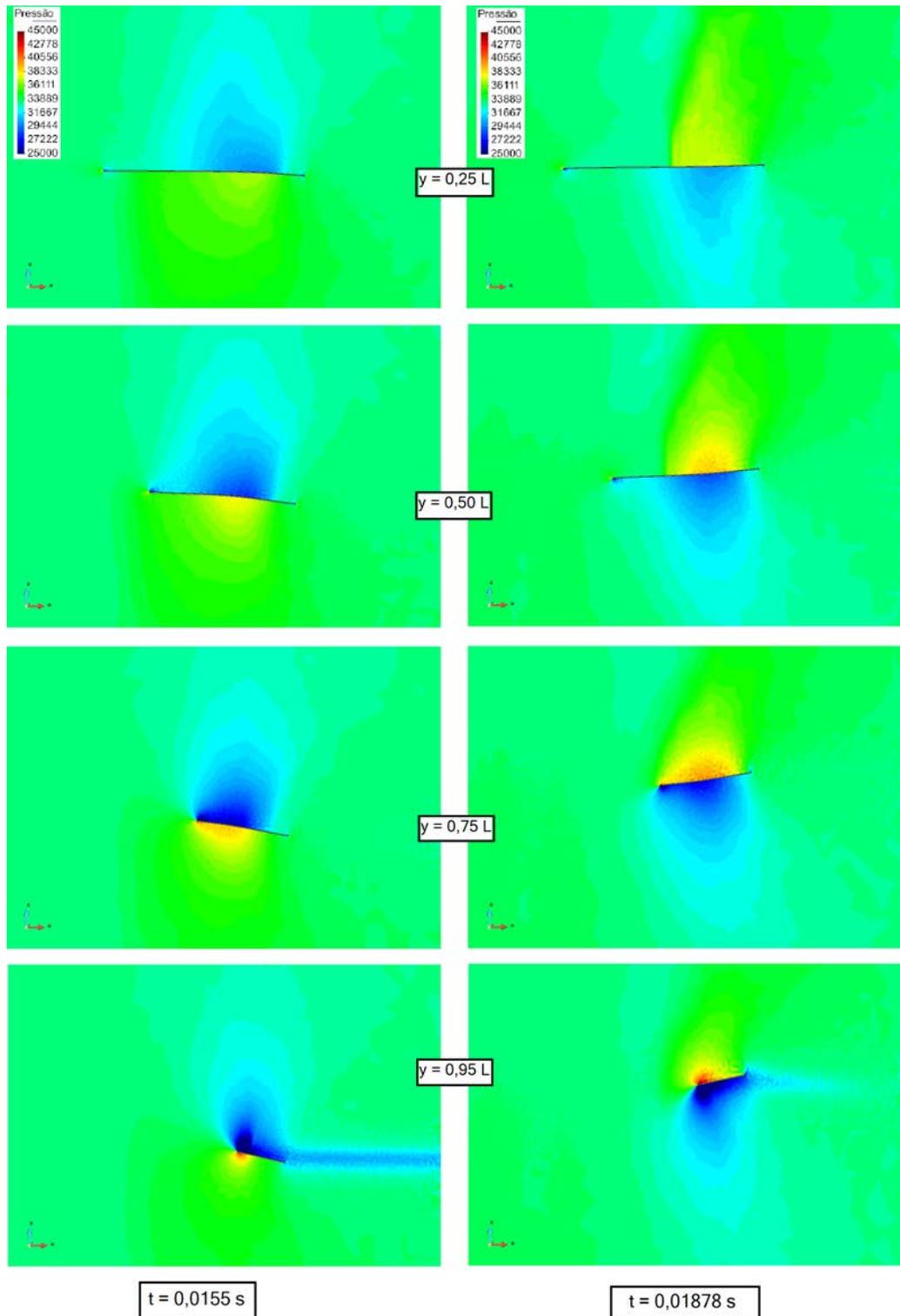


Figura 5.82: Pressão no escoamento sobre a AO2 para  $q = 2,58$  psi

tem uma condição de equilíbrio quase estático entre as forças elásticas da estrutura e as forças aerodinâmicas. A Fig. 5.83 mostra a evolução do deslocamento da ponta da asa durante a simulação. Após a perturbação inicial da estrutura ocorrem algumas oscilações com posterior estabilização do deslocamento no valor  $u_z/L = -0,02$ . A evolução das

parcelas  $Fr_x$  e  $Fr_z$  da força aerodinâmica resultante sobre a asa e sua estabilização ao longo do tempo são apresentadas na Fig. 5.84.

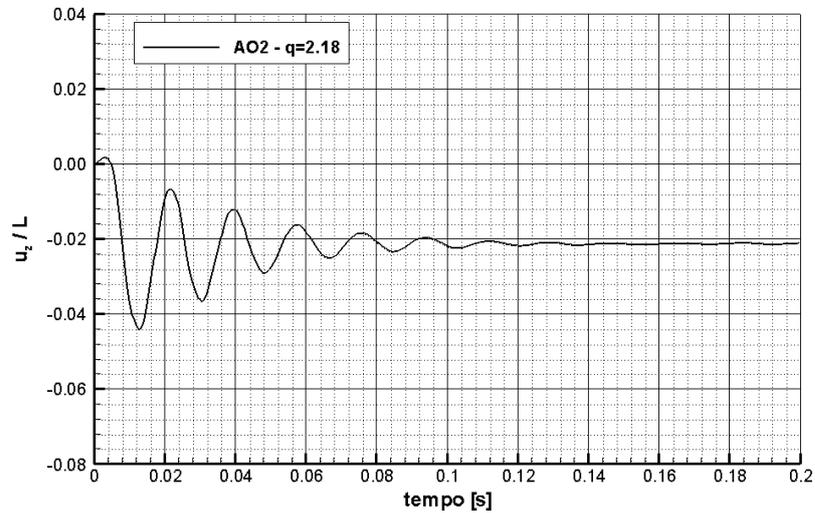


Figura 5.83: Deslocamento da ponta da AO2 para  $q = 2,18$  psi

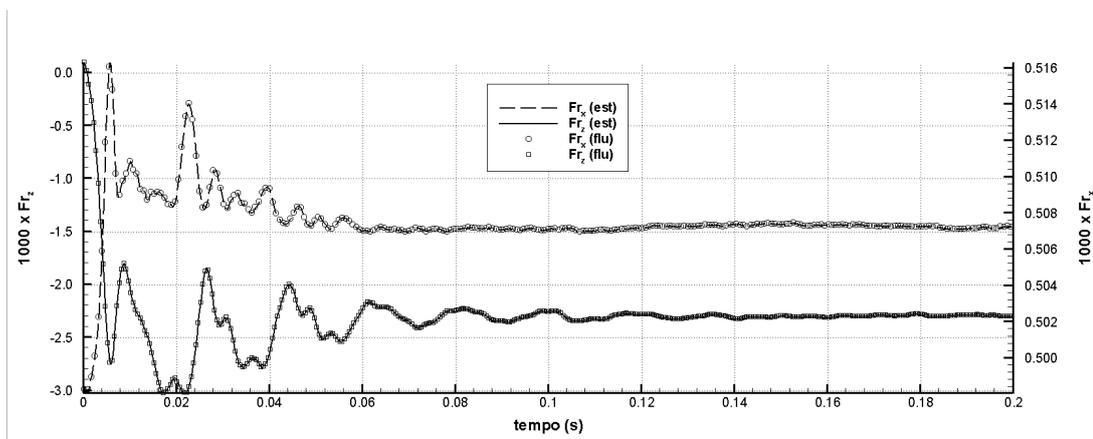


Figura 5.84: Força aerodinâmica resultante nas direções  $x$  e  $z$  na AO2 para  $q = 2,18$  psi

A Fig. 5.85 mostra a configuração da asa ao final da simulação, quando o movimento é praticamente nulo. O campo de deslocamento transversal ( $u_z$ ) e de giro no plano original da asa ( $\theta_x$  e  $\theta_y$ ) são apresentados para essa mesma configuração na Fig. 5.86.

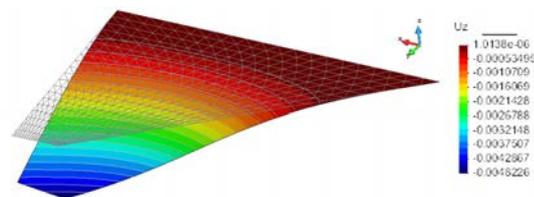


Figura 5.85: Configuração final da AO2 ( $\times 10$ ) para  $q = 2,18$  psi

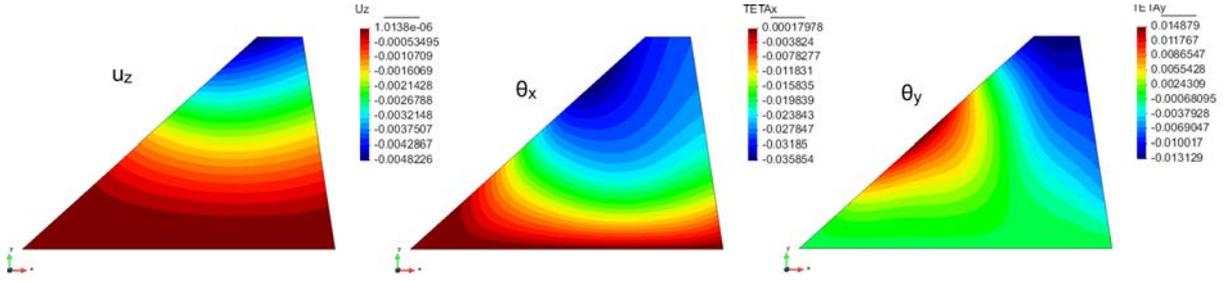
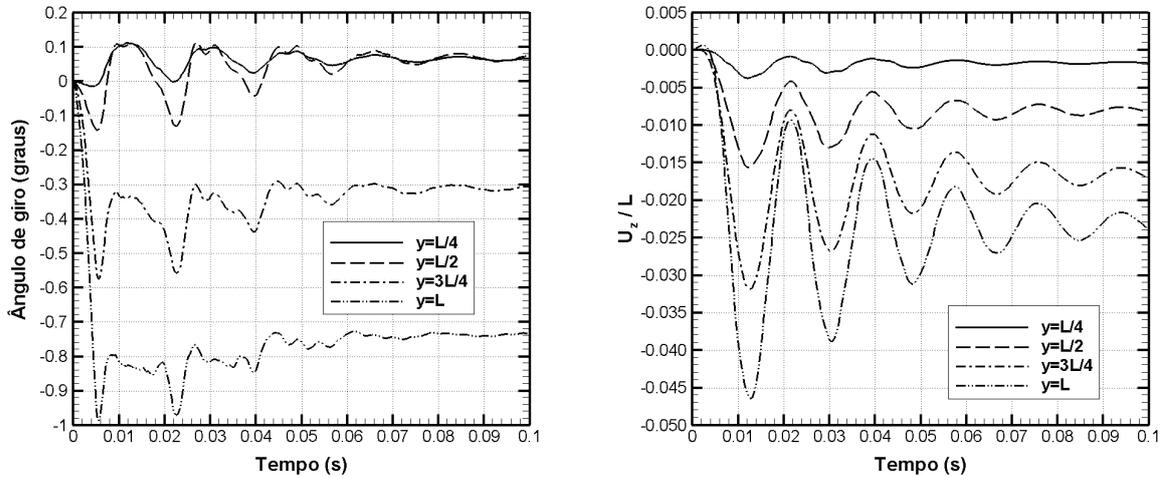


Figura 5.86: Deslocamentos  $u_z$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  na configuração final da AO2 para  $q = 2,18$  psi

O deslocamento transversal de pontos sobre a linha de um quarto da corda são apresentados na Fig. 5.87 juntamente com o giro da seção transversal. Observa-se que à medida que convergem para a configuração de equilíbrio as seções mais próximas da raiz da asa ( $y$  igual a  $L/4$  e  $L/2$ ) passam a apresentar ângulo de giro positivo enquanto que as seções mais próximas da ponta da asa ( $y$  igual a  $3L/4$  e  $L$ ) apresentam um ângulo de giro negativo. Nessas regiões ocorrem forças de sustentação em sentidos opostos, uma vez que essas tendem a ser proporcionais ao ângulo de giro, como visto nos casos anteriores.



(a) Giro da seção transversal

(b) Deslocamento de pontos sobre a linha de um quarto da corda

Figura 5.87: Deslocamentos da AO2 para  $q = 2,18$  psi

O deslocamento transversal da asa na configuração final da simulação é apresentado na Fig. 5.88 para várias seções situadas em diferentes posições  $y$ . As características do deslocamento, apresentadas nas Figuras 5.85, 5.86 e 5.87, com modificações ao longo do comprimento da asa, ficam bastante evidentes. Além disso, observa-se que as seções mais próximas à raiz a asa também se curvam ao longo do eixo  $x$ , o que tem influência sobre

o comportamento aerodinâmico.

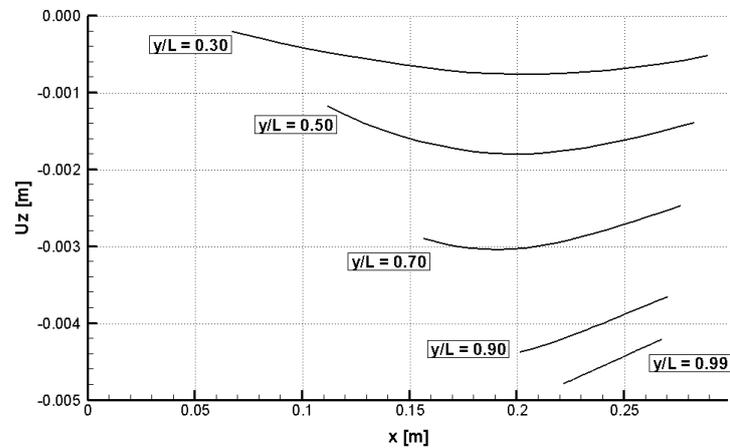


Figura 5.88: Deslocamento  $u_z$  para de várias cordas ( $y/L$ ) na configuração final da AO2 para  $q = 2,18$  psi

Uma segunda análise foi realizada para o mesmo problema a fim de verificar a influência dos parâmetros sobre a resposta. Nessa simulação adicional foram empregados os valores  $CS = 0,15$  e  $\Delta t_e = 5 \times 10^{-6}$ . Com isso foi reduzido o passo de tempo do algoritmo de CFD e o número de subciclos entre fluido e estrutura ( $n_{F/E}$ ), que passou de 1663 na primeira simulação para 278 na segunda análise. A Fig. 5.89 apresenta simultaneamente os deslocamentos da ponta da asa obtidos nas duas análises ao longo dos 0,043 s iniciais. Observa-se pequenas diferenças nos valores máximos das oscilações, mas a tendência de amortecimento do movimento e convergência para uma configuração deformada de equilíbrio é mantida.

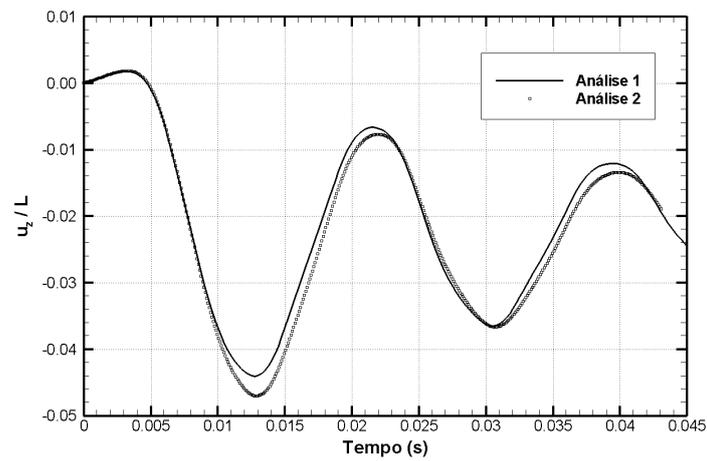


Figura 5.89: Comparação do deslocamento da ponta da AO2 para  $q = 2,18$  psi em duas análises com parâmetros diferentes

---

# Capítulo 6

## Conclusão

Nessa seção são apresentadas as conclusões sobre as etapas da elaboração desse trabalho. Ao final, são listadas sugestões para trabalhos futuros visando o aprimoramento da ferramenta de análise desenvolvida. Levando em conta os resultados obtidos nos exemplos apresentados no Capítulo 5, é possível afirmar que os principais objetivos desse trabalho foram atingidos, conforme é discutido a seguir.

A formulação corrotacional foi apresentada de maneira unificada para análise estática e dinâmica de estruturas. Dentre as características dessa formulação, as que mais se destacam como atrativos para tratar problemas envolvendo estruturas de materiais compósitos laminados são a independência com relação à formulação local do elemento finito e a facilidade de mapeamento da direção principal do material durante o movimento do corpo.

Um elemento de membrana e um elemento de placa previamente existentes foram utilizados para compor a formulação local do elemento finito de casca. Características positivas desses elementos, tais como eficiência computacional, flexibilidade ao cisalhamento transversal e ausência de travamento por razão de aspecto em problemas com flexão no plano da casca foram preservadas no elemento resultante.

A eficácia da metodologia de análise estrutural utilizada nesse trabalho foi demonstrada em vários exemplos através de comparação com resultados de outros autores. Também foi demonstrada a importância das características da formulação local do elemento finito na determinação correta do comportamento estático e dinâmico de estruturas com

---

enrijecedores. Os estudos relacionados à análise dinâmica corrotacional e sua aplicação às cascas de material compósito laminado foram publicados em Almeida e Awruch (2011).

O desenvolvimento do código de análise de escoamentos compressíveis em malhas móveis foi a segunda etapa abordada no trabalho. Em oposição aos planos iniciais que previam a expansão da capacidade de análise de um código existente, optou-se pela elaboração de um programa completamente novo, embora baseado nas metodologias e experiências adquiridas nos trabalhos realizados anteriormente no programa de pós-graduação. A formulação do esquema explícito de Taylor-Galerkin de dois passos, derivada com base na descrição ALE, foi apresentada sucintamente, tendo como base a abordagem de Zienkiewicz et al. (2005) e Löhner (2001). O código foi implementado visando a execução em paralelo, utilizando equipamento com memória compartilhada. Um estudo mostrou que a eficiência da paralelização está na faixa de 60%–70% para simulações utilizando até 18 núcleos de processamento. A eficiência de paralelização é reduzida com a inclusão de mais núcleos, mas ainda há ganho no tempo total de execução.

A precisão do algoritmo foi demonstrada na Seção 5.3 através da comparação das simulações com resultados experimentais publicados por outros autores. Embora o algoritmo de CFD tenha sido descrito e implementado com a possibilidade de simular escoamentos viscosos, esse casos não foram explorados nos exemplos de verificação, pois apenas escoamentos invíscidos seriam considerados na análise de problemas de interação fluido-estrutura. A importância da consideração da matriz de massa consistente na simulação dos problemas transientes, relatada por outros autores, foi confirmada no estudo realizado em um problema de interação fluido-estrutura.

A metodologia de análise dos problemas de interação fluido-estrutura mostrou-se adequada para o tratamento da maior parte dos problemas estudados. Respostas comparáveis às medidas experimentalmente ou calculadas numericamente por outros autores foram obtidas nas simulações em que a estrutura apresentou movimento com amplitude moderada. Esse é um fato relevante tendo em vista que as técnicas de transferência de informação na interface fluido-estrutura e de movimentação da malha empregadas nesse trabalho são mais simples e computacionalmente mais eficientes do que as adotadas nos trabalhos numéricos usados como comparação. Não foram verificadas perdas significativas na precisão da análise devido à utilização de subciclos temporais

---

entre os algoritmos de integração do fluido e da estrutura.

A principal deficiência do esquema de análise aeroelástica estudado nesse trabalho se deu nos problemas com movimento mais acentuado da estrutura. Na etapa de verificação do código, apresentada no início da Seção 5.4.2, o resultado obtido para a asa de aço sujeita ao escoamento com pressão dinâmica de 2,98 psi foi significativamente diferente do medido experimentalmente, mas compatível com o melhor resultado numérico apresentado na literatura.

As discrepâncias entre os resultados numéricos e experimentais são atribuídas ao emprego de modelo de escoamentos não viscosos na simulação, o que impossibilitou a reprodução fenômenos aerodinâmicos que se tornam mais importantes à medida que o ângulo de ataque aumenta proporcionalmente à amplitude do movimento da asa. Essa hipótese é sustentada pelos resultados numéricos publicados por Peng e Han (2011), obtidos a partir de um esquema que usa técnicas mais sofisticadas para movimentação da malha e para o acoplamento entre os meios, além de considerar a não linearidade física e geométrica da estrutura.

O algoritmo de movimentação da malha mostrou-se inadequado no problema em que foram observados os valores máximos de deslocamentos e rotações da estrutura. Nesse caso, a distorção da malha foi excessiva, o que impossibilitou a continuidade da análise. Tal falha é possivelmente solucionada pela utilização do algoritmo de movimentação da malha sem as simplificações adotadas nesse trabalho. Essa afirmação tem como base a utilização bem sucedida do método em questão em trabalhos anteriores (Teixeira, 2001; Braun, 2007), nos quais foram tratados problemas aeroelásticos contemplando movimento com magnitude similar às observadas nesse trabalho.

Tendo em vista as discussões apresentadas acima, conclui-se que a metodologia estudada nesse trabalho é adequada para a realização de análises aeroelásticas, visando a identificação da transição entre as condições em que o escoamento amorteceria uma perturbação da asa e as condições em que o processo de LCO é sustentado. Nesse caso, os deslocamentos da asa são pequenos ou moderados, sendo os fenômenos aerodinâmicos satisfatoriamente representados pelo método adotado para a análise do escoamento. Nessas condições, o algoritmo de movimentação da malha também apresenta bom

desempenho. Por outro lado, a metodologia apresentada não é satisfatória para a determinação das características do escoamento para as quais o comportamento LCO dá lugar ao aumento indefinido dos deslocamentos. Nesse caso, movimentos de grande amplitude são esperados para a estrutura, situação na qual o programa desenvolvido apresentou resultados que não se assemelham suficiente com os dados experimentais.

Algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentados a seguir. Nesses tópicos são enumerados aprimoramentos que podem ser incorporados ao programa desenvolvido nesse trabalho para possibilitar a análise de problemas aeroelásticos com maior precisão, inclusive contemplando grandes deslocamentos da estrutura. As seguintes sugestões são consideradas como as mais relevantes para ferramenta de simulação do escoamento:

- a) *Incorporação de um modelo de turbulência.* Com isso é possível uma melhor representação dos fenômenos aerodinâmicos. Esse aprimoramento é particularmente importante nas simulações em que o ângulo de ataque do escoamento é mais acentuado. A modelagem da turbulência pode se dar segundo várias abordagens que se distinguem quanto a sua complexidade, custo computacional e generalidade de aplicação.
- b) *Adoção de um algoritmo mais robusto para a movimentação da malha.* Técnicas mais elaboradas de movimentação da malha podem evitar as distorções excessivas dos elementos, mesmo nos problemas aeroelásticos com grandes deslocamentos da estrutura. Dessa forma, é mantida a qualidade da simulação do escoamento durante toda a análise, embora o custo computacional associado ao processo de movimentação da malha aumente consideravelmente em comparação ao método adotado nesse trabalho. A identificação das causas da falha do algoritmo empregado nesse trabalho, bem como a elaboração de medidas para evitar tais falhas, são de grande interesse. Essas medidas viabilizariam a extensão desse método simples e computacionalmente econômico a uma faixa mais ampla de casos de problemas aeroelásticos.
- c) *Emprego de técnicas de refinamento adaptativo da malha.* Essa ferramenta é de grande importância para a viabilização de análises com maior precisão, pois permite o ajuste do grau de refinamento da malha em cada região do escoamento, evitando o desperdício de esforço computacional. As regiões do escoamento com maior ou menor necessidade de refinamento da malha variam ao longo do tempo nos problemas transientes.

Sendo assim, é indispensável que o algoritmo de adaptação da malha também seja capaz realizar o processo de desrefinamento, reduzindo o nível de discretização nas regiões menos críticas do escoamento e evitando o aumento desnecessário da demanda computacional.

- d) *Paralelização do código para execução empregando memória distribuída.* A complexidade de implementação do código para execução em paralelo usando memória distribuída é maior do que naqueles que visam processamento com memória compartilhada. Como vantagens, normalmente o uso de memória distribuída permite o emprego de um número maior de processadores nas análises, além de apresentar maior eficiência de paralelização. O aprimoramento do uso dos recursos computacionais é de grande importância para os problemas de análise aeroelástica, tendo em vista a demanda de processamento associada a essa atividade.

No que se refere à análise estrutural, as principais sugestões para trabalhos futuros são:

- a) *Metodologias para a avaliação aprimorada das tensões e deformações nas cascas de material compósito laminado.* Tais métodos visam maior precisão na determinação de tensões em materiais compósitos laminados a partir de análises realizadas com modelos simplificados como os baseados nas teorias de corte de primeira ordem (FSDT).
- b) *Avaliação da integridade do material através de critérios de falha.* A determinação da integridade do material durante a análise aeroelástica é importante no sentido de garantir a validade das análises. Além disso, nas aplicações reais a determinação de regiões de falha é fundamental para o projeto da estrutura.
- c) *Simulação de problemas com falha progressiva.* A capacidade de simular a falha progressiva de estruturas pode ser de grande utilidade, sobretudo quando é esperado que o início da falha não comprometa seriamente o desempenho da estrutura. Nas análises aeroelásticas pode ser interessante a determinação de como a perda de rigidez por falhas localizadas modificam o comportamento de interação entre fluido e estrutura.

---

# Referências Bibliográficas

- Allman, D. J. (1988). Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, No. 12, pp. 2645–2655.
- Almeida, F. e Awruch, A. (2011). Corotational nonlinear dynamic analysis of laminated composite shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47, No. 10, pp. 1131 – 1145.
- Almeida, F. S. (2006). Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados utilizando Algoritmos Genéticos. Master's thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Argyris, J. (1982). An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, No. 1-3, pp. 85 – 155.
- Argyris, J., Doltsinis, I., e Friz, H. (1990). Studies on computational reentry aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81, No. 3, pp. 257–289.
- Azevedo, R. L. (1999). *Análise de Problemas de Interação Fluido-Estrutura Usando o Método dos Elementos Finitos com um Acoplamento Monolítico*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Barbero, E. (2010). *Introduction to Composite Materials Design, Second Edition*. Composite Materials: Design and Analysis Series. Taylor & Francis.
- Bathe, K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- Bathe, K.-J. e Baig, M. M. I. (2005). On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics. *Computers & Structures*, 83, No. 31-32, pp. 2513 – 2524.
- Battini, J.-M. (2007). A modified corotational framework for triangular shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, No. 13-16, pp. 1905 – 1914.
- Battini, J.-M. e Pacoste, C. (2006). On the choice of the linear element for corotational triangular shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, No. 44-47, pp. 6362–6377.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., e Gu, L. (1994). Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, No. 2, pp. 229–256.
-

- Bergan, P. G. e Felippa, C. A. (1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50, No. 1, pp. 25 – 69.
- Bono, G. (2008). *Simulação Numérica de escoamentos e Diferentes Regimes Utilizando o Método dos Elementos Finitos*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PROMEC-UFRGS).
- Bottasso, C. L., Bauchau, O. A., e Choi, J.-Y. (2002). An energy decaying scheme for nonlinear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, No. 27-28, pp. 3099 – 3121.
- Brank, B., Briseghella, L., Tonello, N., e Damjanic, F. B. (1998). On non-linear dynamics of shells: implementation of energy-momentum conserving algorithm for a finite rotation shell model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42, No. 3, pp. 409–442.
- Brank, B., Korelc, J., e Ibrahimbegovic, A. (2003). Dynamics and time-stepping schemes for elastic shells undergoing finite rotations. *Computers and Structures*, 81, No. 12, pp. 1193 – 1210.
- Braun, A. L. (2007). *Simulação Numérica na Engenharia do Vento Incluindo Efeitos de Interação Fluido-Estrutura*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Braun, A. L. e Awruch, A. M. (2008). Geometrically non-linear analysis in elastodynamics using the eight-node finite element with one-point quadrature and the generalized- $\alpha$  method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 5, No. 1, pp. 17–45. cited By (since 1996) 2.
- Burbridge, H. P. (1999). O Esquema Explícito de Taylor-Galerkin na Simulação Numérica de Escoamentos Compressíveis Tridimensionais Utilizando Elementos Finitos Hexaédricos de Oito Nós. Master's thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Cebral, J. e Löhner, R. (1997). Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems. *AIAA Journal*, 35, No. 4, pp. 687–692.
- Chatterjee, S. N. (1979). Shear correction factors for laminated plates. *AIAA Journal*, 17pp. 498–499.
- Chawla, K. K. (1998). *Composite Materials: science and engineering*. Springer-Verlang, 2nd edition.
- Cheng, H. e Gupta, K. C. (1989). An historical note on finite rotations. *Journal of Applied Mechanics*, 56, No. 1, pp. 139–145.
- Chung, J. e Hulbert, G. M. (1993). A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- $\alpha$  method. *Journal of Applied Mechanics*, 60, No. 2, pp. 371–375.

- Clark, R., Cox, D., Curtiss, H., Edwards, J., Hall, K., Peters, D., Scanlan, R., Simiu, E., Sisto, F., Strganac, T., et al. (2004). *A Modern Course in Aeroelasticity*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer.
- Colin, O. e Rudgyard, M. (2000). Development of high-order Taylor-galerkin schemes for les. *J. Comput. Phys.*, 162, No. 2, pp. 338–371.
- Cottrell, J., Hughes, T., e Bazilevs, Y. (2009). *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. Wiley.
- Crisfield, M., Galvanetto, U., e Jelenic, G. (1997). Dynamics of 3-d co-rotational beams. *Computational Mechanics*, 20, No. 6, pp. 507 – 519.
- Crisfield, M. e Shi, J. (1994). Co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, No. 11, pp. 1897 – 1913.
- Crisfield, M. A. (1990). A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81, No. 2, pp. 131 – 150.
- Crisfield, M. A. (1997). *Non-linear Finite Element Analysis of Solid and Structures - Vol2: Advanced Topics*. Wiley.
- Crisfield, M. A. e Moita, G. F. (1996). A unified co-rotational framework for solids, shells and beams. *International Journal of Solids and Structures*, 33, No. 20-22, pp. 2969 – 2992.
- Daniel, I. M. e Ishai, O. (1994). *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press.
- de Andrade, L. G. (2005). Análise estática e dinâmica de placas e cascas de materiais compósitos laminados usando elementos finitos hexaédricos de oito nós com integração reduzida. Master's thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- de Oliveira, B. F. (2004). *Um modelo analítico e computacional para consideração dos efeitos do envelhecimento em material compósito*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Donea, J. (1984). Taylor-galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, No. 1, pp. 101–119.
- Donea, J., Giuliani, S., e Halleux, J. (1982). An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33, No. 1 - 3, pp. 689 – 723.
- dos Santos, M. A. V. (1993). *Simulação Numérica de Escoamentos Compressíveis e Sua Interação Com Estruturas Deformáveis*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PROMEC-UFRGS).

- dos Santos Cavalcanti Marques, D. C. (1994). *Análise Não Linear Estática e Dinâmica de Cascas Laminadas Anisotrópicas*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Eriksson, A. e Pacoste, C. (2002). Element formulation and numerical techniques for stability problems in shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, No. 35, pp. 3775 – 3810.
- Erlicher, S., Bonaventura, L., e Bursi, O. S. (2002). The analysis of the generalized -a method for non-linear dynamic problems. *Computational Mechanics*, 28, No. 2, pp. 83 – 104.
- Farhat, C., Geuzaine, P., e Brown, G. (2003). Application of a three-field nonlinear fluid-structure formulation to the prediction of the aeroelastic parameters of an f-16 fighter. *Computers & Fluids*, 32, No. 1, pp. 3 – 29.
- Farhat, C. e Lesoinne, M. (2000). Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182, No. 3-4, pp. 499 – 515.
- Farhat, C., Lesoinne, M., e Tallec, P. L. (1998). Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157, No. 1-2, pp. 95 – 114.
- Farhat, C., Pierson, K., e Degand, C. (2001). Multidisciplinary simulation of the maneuvering of an aircraft. *Engineering with Computers*, 17, No. 1, pp. 16–27. cited By (since 1996) 10.
- Felippa, C. e Haugen, B. (2005). A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, No. 21-24, pp. 2285 – 2335.
- Felippa, C. A. (2000). A systematic approach to the element-independent corotational dynamics of finite elements. *Report No. CU-CAS-00-03*. Departamento of Aerospace Engineering Science and Center for Aerospace Structures - University of Colorado Boulder, Colorado, USA.
- Felippa, C. A. (2003). A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, No. 16-18, pp. 2125 – 2168.
- Felippa, C. A. e Militello, C. (1992). Membrane triangles with corner drilling freedoms–ii. the andes element. *Finite Elements in Analysis and Design*, 12, No. 3-4, pp. 189 – 201.
- Felippa, C. A., Park, K. C., e Farhat, C. (2001). Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, No. 24-25, pp. 3247 – 3270.
- Galvanetto, U. e Crisfield, M. (1996). An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of planar beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, No. 13, pp. 2265–2282.

- Ghugal, Y. M. e Shimpi, R. P. (2002). A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 21, No. 9, pp. 775–813.
- Gonzalez, L. A. S. (1993). Análise de Escoamentos de Fluidos Quase-Incompressíveis e das Vibrações Induzidas Em Objetos Imersos. Master's thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Gordnier, R. e Melville, R. (2001). Numerical Simulation of Limit-cycle Oscillations of a Cropped Delta Wing Using the Full Navier-Stokes Equations. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 14pp. 211–224.
- Gordnier, R. e Visbal, M. (2005). High-fidelity computational simulation of nonlinear fluid-structure interactions. *Aeronautical Journal*, 109, No. 1097, pp. 301 – 312.
- Gordnier, R. E. (2003). Computation of limit-cycle oscillations of a delta wing. *Journal of Aircraft*, 40, No. 6, pp. 1206–1208.
- Horrigmoie, G. e Bergan, P. G. (1978). Nonlinear analysis of free-form shells by flat finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 16, No. 1, pp. 11 – 35.
- Hughes, T., Caughey, T.K., e Liu, W. (1978). Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 45, No. 2, pp. 366–370.
- Hughes, T. e Tezduyar, T. (1984). Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45, No. 1-3, pp. 217–284.
- Hughes, T. J., Liu, W. K., e Zimmermann, T. K. (1981). Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29, No. 3, pp. 329 – 349.
- Ibrahimbegovic, A. (1997). On the choice of finite rotation parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149, No. 1-4, pp. 49 – 71. Containing papers presented at the Symposium on Advances in Computational Mechanics.
- Ibrahimbegovic, A. e Mamouri, S. (2002). Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, No. 37-38, pp. 4241 – 4258.
- Ibrahimbegovic, A. e Mikdad, M. A. (1998). Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41, No. 5, pp. 781–814.
- Isoldi, L. A. (2008). *Análise Estática e Dinâmica de Estruturas Delgadas de Materiais Compostos Laminados Incluindo Materiais Piezelétricos*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PROMEC-UFRGS).

- Jaiman, R., Jiao, X., Geubelle, P., e Loth, E. (2005). Assessment of conservative load transfer for fluid-solid interface with non-matching meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64, No. 15, pp. 2014–2038.
- Jaiman, R., Jiao, X., Geubelle, P., e Loth, E. (2006). Conservative load transfer along curved fluid-solid interface with non-matching meshes. *Journal of Computational Physics*, 218, No. 1, pp. 372–397. cited By (since 1996) 5.
- Jiao, X. e Heath, M. (2004a). Common-refinement-based data transfer between non-matching meshes in multiphysics simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, No. 14, pp. 2402–2427.
- Jiao, X. e Heath, M. (2004b). Overlaying surface meshes, part i: Algorithms. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 14, No. 6, pp. 379–402.
- Jiao, X. e Heath, M. (2004c). Overlaying surface meshes, part ii: Topology preservation and feature matching. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 14, No. 6, pp. 403–419.
- Jones, R. M. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis, 2nd edition.
- Kawahara, M. e Hirano, H. (1983). Finite element method for high reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3, No. 2, pp. 137–163.
- Kessler, M. P. (2002). *Simulação Numérica de Escoamentos Hipersônicos em Não-Equilíbrio Termo-Químico através do Método dos Elementos Finitos*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PROMEC-UFRGS).
- Krause, E., Oertel, H., Schlichting, H., Gersten, K., e Mayes, C. (2004). *Boundary-Layer Theory*. Physics and astronomy online library. Springer.
- Kuhl, D. e Crisfield, M. A. (1999). Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, No. 5, pp. 569–599.
- Kuhl, D. e Ramm, E. (1996). Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136, No. 3-4, pp. 293 – 315.
- Kundu, C. e Sinha, P. (2006). Nonlinear transient analysis of laminated composite shells. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 25, No. 11, pp. 1129 – 1147.
- Landon, R. (1982). Naca0012 oscillatory and transient pitching. Technical Report AGARD R 702.
- Lens, L. S. N. (1994). Análise de Placas e Cascas de Materiais Laminados Com Não Linearidade Geométrica Usando Elementos Finitos 3-D Com Integração Reduzida. Master's thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).

- Lesoinne, M. e Farhat, C. (1996). Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134, No. 1-2, pp. 71 – 90.
- Lesoinne, M. e Farhat, C. (1998). Higher-Order Subiteration-Free Staggered Algorithm for Nonlinear Transient Aeroelastic Problems. *AIAA Journal*, 36pp. 1754–1757.
- Löhner, P. (2001). *Applied Computational Fluid Dynamics Techniques: An Introduction Based on Finite Element Methods*. John Wiley & Sons.
- Löhner, R. (1995). Robust, vectorized search algorithms for interpolation on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 118, No. 2, pp. 380–387. cited By (since 1996) 34.
- Löhner, R. e Yang, C. (1996). Improved ale mesh velocities for moving bodies. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12, No. 10, pp. 599–608.
- Lopes, P. A. M. (2009). *Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados, Baseado em Confiabilidade, Utilizando Algoritmos Genéticos e Redes Neurais Artificiais*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- López, S. D. C. (2009). Otimização de placas e cascas de materiais compósitos utilizando algoritmos genéticos, redes neurais e elementos finitos. Master's thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- Maman, N. e Farhat, C. (1995). Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations: A parallel approach. *Computers & Structures*, 54, No. 4, pp. 779–785.
- Marques, S. C. (1994). *Um Modelo Numérico Para Análise de Estruturas de Materiais Compósitos Considerando Efeitos Viscoelásticos e Falha Progressiva*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Masuro, J. R. (2009). *Análise de Problemas de Engenharia Usando o Método dos Elementos Finitos*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Moës, N., Dolbow, J., e Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, No. 1, pp. 131–150.
- Nithiarasu, P., Zienkiewicz, O., Sai, S., B.V.K., Morgan, K., Codina, R., e Vázquez, M. (1998). Shock capturing viscosities for the general fluid mechanics algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 28, No. 9, pp. 1325–1353.

- Nour-Omid, B. e Rankin, C. C. (1991). Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 93, No. 3, pp. 353 – 384.
- Pajot, J. M. e Maute, K. (2006). Analytical sensitivity analysis of geometrically nonlinear structures based on the co-rotational finite element method. *Finite Elem. Anal. Des.*, 42, No. 10, pp. 900–913.
- Pavan, R. C. (2008). *APLICAÇÃO DA TEORIA DE DANO NA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE MATERIAIS COMPÓSITOS*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Peng, C. e Han, J. (2011). Numerical investigation of the effects of structural geometric and material nonlinearities on limit-cycle oscillation of a cropped delta wing. *Journal of Fluids and Structures*, 27, No. 4, pp. 611 – 622.
- Petry, A. P. (1993). *Análise Numérica da Interação Fluido-Estrutura Através do Método dos Elementos Finitos*. Master's thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Piperno, S. e Farhat, C. (2001). Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - part ii: energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, No. 24-25, pp. 3147 – 3170.
- Rankin, C. e Nour-Omid, B. (1988). The use of projectors to improve finite element performance. *Computers & Structures*, 30, No. 1-2, pp. 257 – 267.
- Rankin, C. C. e Brogan, F. A. (1986). An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 108, No. 2, pp. 165–174.
- Rankin, C. C., Brogan, F. A., Loden, W. A., e Cabiness, H. D. (1994). Stags user manual. *Lockheed Martin Missiles and Space Co. Inc. Advanced Technology Center*. Version 3.0, Report P032594.
- Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Theory and Analysis*. CRC press.
- Rifai, S. M., Johan, Z., Wang, W.-P., Grisval, J.-P., Hughes, T. J., e Ferencz, R. M. (1999). Multiphysics simulation of flow-induced vibrations and aeroelasticity on parallel computing platforms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174, No. 3–4, pp. 393–417.
- Schairer, E. T. e Hand, L. A. (1999). Measurements of unsteady aeroelastic model deformation by stereo photogrammetry. *Journal of Aircraft*, 36, No. 6, pp. 1033–1040.
- Schmitt, V. e Charpin, F. (1979). Pressure distributions on the ONERA-M6-wing at transonic mach numbers. Technical Report AGARD AR 138, Office National d'Etudes et Recherches Aerospatiales, 92320, Chatillon, France.

- Schultz, S. L. (2012). *Metodologia para Alocação Ótima Discreta de Sensores e Atuadores Piezelétricos na Simulação do Controle de Vibrações de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Simo, J. e Tarnow, N. (1992). The discrete energy-momentum method. conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 43, No. 5, pp. 757–792.
- Simo, J. C. e Tarnow, N. (1994). A new energy and momentum conserving algorithm for the non-linear dynamics of shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, No. 15, pp. 2527–2549.
- Simo, J. C., Tarnow, N., e Doblare, M. (1995). Non-linear dynamics of three-dimensional rods: Exact energy and momentum conserving algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, No. 9, pp. 1431–1473.
- Simo, J. C. e Wong, K. K. (1991). Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, No. 1, pp. 19 – 52.
- Sze, K. Y., Liu, X. H., e Lo, S. H. (2004). Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40, No. 11, pp. 1551 – 1569.
- Teixeira, P. R. F. (1996). Simulação numérica de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis aplicando elementos finitos. Master's thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Teixeira, P. R. F. (2001). *Simulação numérica da interação de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o método de elementos finitos*. PhD thesis, Programa de pós-graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS).
- Terashima, H. e Ono, K. (2009). Transonic Aeroelastic Computations of a Delta Wing Configuration with High Fidelity Equations. Em Deconinck, H. e Dick, E., editores, *Computational Fluid Dynamics 2006*, pg. 843.
- Vlachoutsis, S. (1992). Shear correction factors for plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33pp. 1537–1552.
- Wanji, C. e Cheung, Y. K. (2001). Refined 9-dof triangular mindlin plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51, No. 11, pp. 1259–1281.
- White, F. M. (1991). *Viscous fluid flow*. Mcgraw-Hill.
- Whitney, J. (1973). Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 40, No. 1, pp. 303–304.
- Willcox, K. e Peraire, J. (1997). Aeroelastic computations in the time domain using unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, No. 13, pp. 2413–2431.

- 
- Yang, H., Saigal, S., Masud, A., e Kapania, R. (2000). A survey of recent shell finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, No. 1-3, pp. 101–127.
- Yang, Y. e Shieh, M. (1990). Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, 28pp. 2110–2116.
- Yoon, K., Moon, S., Garcia, S., Heard, G., e Chung, T. (1998). Flowfield-dependent mixed explicit-implicit (fdmei) methods for high and low speed and compressible and incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151, No. 1-2, pp. 75–104.
- Zhang, Q. e Hisada, T. (2004). Studies of the strong coupling and weak coupling methods in fsi analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, No. 12, pp. 2013–2029.
- Zhang, Y. e Kim, K. (2005). A simple displacement-based 3-node triangular element for linear and geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, No. 45-47, pp. 4607 – 4632.
- Zhang, Y. e Yang, C. (2009). Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Composite Structures*, 88, No. 1, pp. 147 – 157.
- Zhong, H. e Crisfield, M. (1998). An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of shell structures. *Engineering Computations*, 15, No. 5, pp. 552–576.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R., e Nithiarasu, P. (2005). *The Finite Element Method For Fluid Dynamics*. The Finite Element Method. Elsevier Butterworth-Heinemann.
- Zienkiewicz, O. C. e Codina, R. (1995). A general algorithm for compressible and incompressible flow – part i. the split, characteristic-based scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20, No. 8-9, pp. 869–885.
- Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. (2000). *The Finite Element Method - Volume 1: The Basis*. Butterworth-Heinemann, fifth edition.

---

# Apêndice A

## rotações finitas no espaço

Este apêndice tem como objetivo apresentar sucintamente as considerações utilizadas nesse trabalho para o tratamento das rotações finitas no espaço (rotações sem restrições quanto à sua magnitude). Para tanto são apresentadas as formulações empregadas para as diferentes formas utilizadas na representação das rotações.

Os estudos relacionados ao tratamento de rotações finitas vêm sendo desenvolvidos ao longo de muitos anos pela comunidade de matemática aplicada, conforme revisão histórica apresentada por Cheng e Gupta (1989). A introdução desse tema na comunidade de mecânica computacional se deu com o trabalho Argyris (1982), e vem ganhando maior atenção com o crescente interesse pelo tratamento de problemas envolvendo grandes rotações e o desenvolvimento das teorias estruturais geometricamente exatas (*geometrically exact structural theories*) (Ibrahimbegovic, 1997).

Conforme Argyris (1982), rotações finitas no espaço não podem ser tratadas de forma vetorial como ocorre com rotações infinitesimais. Tal fato se deve à ausência das propriedades aditiva e comutativa em grandes rotações (duas rotações seguidas não podem ser adicionadas ou ter sua ordem invertida). Segundo o mesmo autor, essas condições se aplicam mesmo em pequenas rotações, quando efeitos de segunda ordem estão sendo considerados.

Seguindo Argyris (1982), o tratamento de grandes rotações compostas no espaço é realizado por um formulação matricial onde a parametrização de rotações finitas emprega uma matriz  $3 \times 3$  ortogonal  $\mathbf{R}$ . Considere-se o caso genérico ilustrado na Fig. A.1, onde

---

um ponto com posição inicial  $\mathbf{x}_0$  é submetido a uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de um eixo dado por um vetor unitário  $\mathbf{n}$  até atingir uma posição final  $\mathbf{x}$ . Essa rotação pode ser expressa matematicamente pela seguinte expressão

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}_0, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz ortogonal obtida em função do pseudo-vetor de rotação  $\boldsymbol{\theta}$  definido por

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{n}, \quad (\text{A.2})$$

sendo  $\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|$  e  $\mathbf{n}$  o vetor unitário definido por  $\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\|\boldsymbol{\theta}\|}$ .

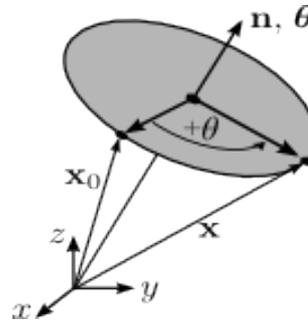


Figura A.1: Rotação finita tridimensional

Se esse ponto é submetido a sucessivas rotações segundo os diferentes pseudo-vetores  $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \dots \boldsymbol{\theta}_{n-1}, \boldsymbol{\theta}_n$ , sua posição final pode ser obtida pela operação

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_n \mathbf{R}_{n-1} \dots \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_0, \quad (\text{A.3})$$

ou simplesmente

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}_0, \quad \text{com} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_n \mathbf{R}_{n-1} \dots \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \quad (\text{A.4})$$

A obtenção do tensor  $\mathbf{R}$  a partir de  $\boldsymbol{\theta}$  envolve uma operação denominada mapeamento exponencial (Felippa e Haugen, 2005), descrita pela seguinte expressão:

$$\mathbf{R} = e^{\text{spin}(\boldsymbol{\theta}_n)} = \mathbf{I} + \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \text{spin}(\boldsymbol{\theta}_n) + \frac{1 - \text{cos } \theta}{\theta^2} \text{spin}(\boldsymbol{\theta}_n)^2 \quad (\text{A.5})$$

onde é utilizada a notação adotada por Felippa e Haugen (2005) para representar a matriz antissimétrica (*skew-symmetric matrix* ou *spinor*) de um vetor, definida como

$$\text{spin}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A matriz antissimétrica referente a um vetor pode ser utilizada para substituir o produto vetorial entre dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  por um produto entre uma matriz e um vetor na forma:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{spin}(\mathbf{a}) \mathbf{b} = -\mathbf{spin}(\mathbf{b}) \mathbf{a} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{A.7})$$

Outra propriedade da matriz antissimétrica de um vetor  $\mathbf{a}$  é:  $\mathbf{spin}(\mathbf{a})^T = -\mathbf{spin}(\mathbf{a})$ . A operação inversa à apresentada na Eq. (A.6) é utilizada para obter o vetor correspondente a uma matriz antissimétrica, sendo representada por  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{axial}(\boldsymbol{\Theta})$ , com  $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{spin}(\boldsymbol{\theta})$ .

Embora o uso do tensor ortogonal seja uma forma robusta para representação de rotações finitas, ele traz alguns inconvenientes como os seguintes: elevado número de parâmetros a serem armazenados, alta demanda computacional e o fato de conduzir a operadores tangente não simétricos. No intuito de evitar tais problemas, formas alternativas de representação das rotações finitas vêm sendo estudadas no campo da mecânica computacional. Seguindo essa linha Ibrahimbegovic (1997) discute o uso de (pseudo-) vetores de rotação em substituição ao tensor ortogonal. Tal forma de representação elimina todos os inconvenientes mencionadas acima, mas sofre com o fato de não ser livre de singularidades. Essa desvantagem é contornada utilizando o vetor de rotação apenas no processo iterativo de solução do problema não linear, obtendo assim as melhores características das duas representações. Em trabalhos onde a formulação corrotacional independente de elemento (Nour-Omid e Rankin, 1991) é adotada para a consideração das não linearidade geométrica, a utilização desta representação para as rotações finitas requer a introdução de uma transformação de variáveis, caracterizada por operações adicionais sobre a matriz de rigidez e vetor de forças nodais internas equivalentes de cada elemento, conforme apresentado nos trabalhos de Eriksson e Pacoste (2002) e Battini (2007).

O presente trabalho se baseia na formulação apresentada por Felippa e Haugen (2005) e Crisfield (1997) para o tratamento de não linearidade geométrica nos problemas estáticos e dinâmicos, respectivamente, nos quais o tensor ortogonal é empregado como parametrização das rotações finitas. Conforme discutido em Nour-Omid e Rankin (1991), nos problemas de análise estática não linear que não contemplam cargas nodais de momento ou cargas e condições de contorno não conservativas, o inconveniente originado pela não simetria do operador tangente pode ser contornado através da simples simetrização das matrizes de rigidez obtidas em cada elemento, sem prejuízo

da precisão ou convergência do algoritmo. Por outro lado, o algoritmo utilizado para a integração temporal nos problemas dinâmicos resulta naturalmente em matrizes tangente não simétricas e portanto a utilização da parametrização por tensor ortogonal não traz prejuízo.

As considerações sobre as formulações apontadas acima se referem basicamente aos aspectos de não simetria inerente à representação adotada para as rotações. No entanto, algumas medidas são introduzidas no algoritmo implementado para aliviar os inconvenientes referentes ao número de parâmetros a serem armazenados e à demanda computacional associada à atualização das rotações. Essas modificações se referem à utilização de *quaternions* em substituição à matriz ortogonal. Essa modificação não tem nenhuma implicação sobre a formulação do algoritmo, influenciando apenas nos aspectos computacionais através da redução de armazenamento e número de operações. Uma breve introdução sobre *quaternions* e como eles são empregados na representação de rotações finitas é apresentada a seguir.

## A.1 Uso de quaternions na representação de rotações finitas no espaço

Quaternion é uma representação matemática que emprega quatro parâmetros e pode ser utilizada para definir rotações finitas no espaço. De acordo com Cheng e Gupta (1989), o desenvolvimento inicial dos quaternions se deve ao matemático irlandês William Hamilton. No entanto, foi o matemático inglês Arthur Cayley quem primeiro identificou o significado físico dos quaternions no contexto das rotações finitas. Tal associação ocorre com a utilização dos parâmetros de Euler-Rodrigues<sup>1</sup> como os coeficientes do quaternion unitário.

Nesse trabalho o símbolo ( $\hat{\quad}$ ) sobre um elemento é utilizado para determinar que se trata de um quaternion unitário. Os quaternions são compostos por um escalar e um vetor,

---

<sup>1</sup>Rodrigues foi um matemático francês que desenvolveu a formulação para o cálculo rotações consecutivas

conforme descrito na Eq. (A.8).

$$\hat{\mathbf{q}} = q_0 + \mathbf{q}, \quad \text{com} \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Quaternions unitários apresentam norma  $\|\hat{\mathbf{q}}\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ . No contexto das rotações finitas, os coeficientes do quaternion que representam uma rotação dada por um pseudo-vetor  $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{n}$  podem ser associados aos parâmetros de Euler-Rodrigues (Cheng e Gupta, 1989) dados por:

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \quad (\text{A.9})$$

A operação que define o produto entre dois quaternions é apresentada na Eq. (A.10). Essa operação é utilizada para determinar o quaternion que representa uma rotação composta por duas ou mais rotações consecutivas aplicadas sobre um ponto qualquer, assim como discutido na Eq. (A.4) para o tensor ortogonal de rotação. No caso da Eq. (A.10),  $\hat{\mathbf{c}}$  é o quaternion equivalente à rotação total decorrente da aplicação de uma rotação segundo o vetor  $\boldsymbol{\theta}_a$  seguida de uma rotação descrita pelo vetor  $\boldsymbol{\theta}_b$ . Tais rotações poderiam ser representadas pelos tensores  $\mathbf{R}_a$  e  $\mathbf{R}_b$  para formar a rotação total  $\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_b \mathbf{R}_a$ , ou em forma de quaternions  $\hat{\mathbf{a}}$  e  $\hat{\mathbf{b}}$  formar o quaternion associado à rotação total através do procedimento descrito na Eq. (A.10).

$$\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{b}} \hat{\mathbf{a}} = (b_0 + \mathbf{b})(a_0 + \mathbf{a}) = (a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}), \quad (\text{A.10})$$

sendo portanto o componente escalar de  $\hat{\mathbf{c}}$  dado por  $c_0 = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  e o componente vetorial dado por  $\mathbf{c} = a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ . O produto de quaternions não é comutativo e o inverso de um quaternion unitário  $\hat{\mathbf{q}}$ , designado por  $\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ , tal que  $\hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^{-1} = \hat{\mathbf{q}}^{-1} \hat{\mathbf{q}} = 1$ , é obtido fazendo  $\hat{\mathbf{q}}^{-1} = q_0 - \mathbf{q}$ .

A representação de rotações por meio de quaternions é adotada na implementação do algoritmo no intuito de minimizar o número de parâmetros a serem armazenados (4 em comparação a 9 do tensor ortogonal) e reduzir o número de operações necessárias para o incremento (ou atualização) das rotações (substituindo o produto de dois tensores  $9 \times 9$  pelo produto entre quaternions). Outra vantagem dos quaternions é a possibilidade de normalização, o que elimina a perda de ortogonalidade que pode ocorrer devido truncamento numérico existente nas inúmeras multiplicações matriciais decorridas quando

se usa o tensor ortogonal como parametrização das rotações. Em muitas ocasiões são necessárias operações de conversão entre quaternions e tensores ortogonais ou entre quaternions e pseudo-vetores de rotação.

A operação que transforma um quaternion em um tensor de rotação, designada pelo operador  $\mathfrak{R}[\bullet]$  (segundo a notação de Simo e Wong (1991)), é definida pela expressão (Cheng e Gupta, 1989):

$$\mathbf{R} = \mathfrak{R}[\hat{\mathbf{q}}] = 2 \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2) - \frac{1}{2} & (q_1 q_2 - q_0 q_3) & (q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ (q_1 q_2 + q_0 q_3) & (q_0^2 + q_2^2) - \frac{1}{2} & (q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ (q_1 q_3 + q_0 q_2) & (q_2 q_3 + q_0 q_1) & (q_0^2 + q_3^2) - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

A operação inversa da apresentada na Eq. (A.11), designada pelo operador  $\mathfrak{R}^{-1}[\bullet]$ , é apresentada na Eq. (A.12). O quaternion de uma rotação é obtido a partir do tensor ortogonal conforme a relação (Simo e Wong, 1991)

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathfrak{R}^{-1}[\mathbf{R}], \quad \text{com } q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{R})} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \frac{1}{4 q_0} \mathbf{axial}(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) \quad (\text{A.12})$$

que por sua vez não é livre de singularidades, pois o sinal do termo  $\pm \sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{R})}$  não é conhecido. A forma ótima de extração dos quaternions, evitando os problemas de singularidades, é dada pelo algoritmo de Spurrier (ver Felippa e Haugen (2005)). O quaternion é obtido de forma distinta dependendo dos valores do traço de  $\mathbf{R}$  ( $\text{tr}(\mathbf{R})$ ) e do valor máximo dentre os elementos da diagonal de  $\mathbf{R}$  ( $R_{ii}, i = 1, 2, 3$ ).

Se  $\text{tr}(\mathbf{R}) > R_{ii}$ , então

$$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{R})} \quad \text{e} \quad q_i = \frac{1}{4 q_0} (R_{kj} - R_{jk}) \quad (\text{A.13})$$

com  $i, j, k = 1, 2, 3$  em permutação cíclica.

Caso  $R_{ii} > \text{tr}(\mathbf{R})$  faz-se

$$q_i = \sqrt{\frac{1}{2} R_{ii} + \frac{1}{4} (1 - \text{tr}(\mathbf{R}))} \quad q_0 = \frac{1}{4 q_1} \mathbf{axial}(R_{kj} - R_{jk}) \quad (\text{A.14})$$

$$q_m = \frac{1}{4 q_1} \mathbf{axial}(R_{mi} - R_{im})$$

com  $i$  sendo a posição da diagonal com o maior dos valores algébricos e  $m = j, k$ . Assim sendo, as Eq. (A.13) e Eq. (A.14) são utilizadas para realizar a operação  $\mathfrak{R}^{-1}[\bullet]$  em substituição à Eq. (A.12).

A transformação entre o pseudo-vetor de rotação e o quaternion também são indispensáveis para a implementação do algoritmo. Os componentes  $q_0$  e  $\mathbf{q}$  do quaternion  $\hat{\mathbf{q}}$  podem ser facilmente obtido a partir do vetor de rotação  $\boldsymbol{\theta}$  pela seguinte operação (Simo e Wong, 1991)

$$q_0 = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\frac{1}{2}\theta} \right\} \boldsymbol{\theta} \quad (\text{A.15})$$

A operação de transformação do vetor de rotação no quaternion, descrita na Eq. (A.15) é representada nesse trabalho pelo operador  $\mathcal{E}[\bullet]$ , tal que na equação acima  $\hat{\mathbf{q}} = \mathcal{E}[\boldsymbol{\theta}]$ . Ainda seguindo Simo e Wong (1991), para evitar problemas numéricos quando  $\theta \ll 1$ , toma-se a série a seguir no cálculo na Eq. (A.15)

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \frac{x^8}{362800} - \dots, \quad \text{com} \quad x = \frac{1}{2}\theta \quad (\text{A.16})$$

A operação de extração do vetor de rotação do quaternion correspondente é dada na Eq. (A.17) (Simo e Wong, 1991), sendo representada nesse trabalho pelo operador  $\mathcal{E}^{-1}[\bullet]$ , tal que  $\boldsymbol{\theta} = \mathcal{E}^{-1}[\hat{\mathbf{q}}]$ .

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}, \quad \text{com} \quad \theta = 2 \text{sen}^{-1}\|\mathbf{q}\| \quad (\text{A.17})$$

A Fig. A.2 apresenta esquematicamente os processos de transformação entre as variáveis utilizadas no algoritmo para representação de rotações finitas. A conversão do pseudo-vetor de rotação em quaternions através do operador  $\mathcal{E}[\bullet]$  descrito na Eq. (A.17) bem como a obtenção de tensores ortogonais a partir de quaternions utilizando o operador  $\mathfrak{R}[\bullet]$ , conforme a Eq. (A.11), são ilustradas na figura. As operações reversas  $\mathcal{E}^{-1}[\bullet]$  e  $\mathfrak{R}^{-1}[\bullet]$ , descritas pelas Eq. (A.17) e Eq. (A.13)–(A.14), respectivamente, também estão contempladas. Nessa figura é introduzido um novo operador  $\mathfrak{R}\mathcal{E}[\bullet]$  que representa a transformação direta entre o pseudo-vetor de rotação e o tensor ortogonal. Esse operador tem como único objetivo facilitar a notação, pois tal processo de transformação é realizado em duas etapas utilizando os operadores descritos anteriormente na forma  $\mathbf{R} = \mathfrak{R}\mathcal{E}[\boldsymbol{\theta}] = \mathfrak{R}[\mathcal{E}[\boldsymbol{\theta}]]$ . O processo inverso é realizado de forma semelhante com  $\boldsymbol{\theta} = \mathfrak{R}\mathcal{E}^{-1}[\mathbf{R}] = \mathcal{E}^{-1}[\mathfrak{R}^{-1}[\mathbf{R}]]$ . Embora existam formulações alternativas para realizar as operações  $\mathfrak{R}\mathcal{E}[\bullet]$  e  $\mathfrak{R}\mathcal{E}[\bullet]^{-1}$  (ex: Eq. (A.5)), sua implementação computacional em um algoritmo que utiliza quaternions para armazenar rotações não é vantajosa por questões de eficiência e estabilidade.

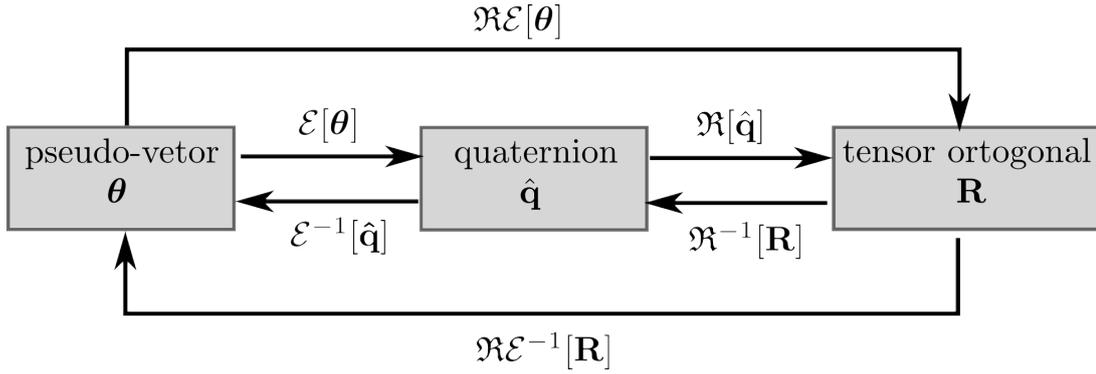


Figura A.2: Transformações entre representações de rotações finitas

As operações descritas nesse anexo e algumas outras operações complementares envolvendo a álgebra de quaternions e vetores em 3D estão implementadas em um módulo isolado utilizando a linguagem de programação FORTRAN 95, que pode ser facilmente utilizado em outras aplicações.

## A.2 Variação das rotações

Conforme apresentado anteriormente, não é possível somar componentes de pseudo-vetores de rotações consecutivas aplicadas sobre um ponto. Em vez disso, as rotações compostas são obtidas pelo produto entre os tensores ortogonais referentes às sucessivas rotações (ver Eq. (A.4)). Essas considerações são válidas mesmo para pequenas rotações ou para a variação de uma rotação, como é discutido em Crisfield (1997).

Para discutir os aspectos relativos à variação de rotações finitas será estudada a variação da posição de um ponto genérico no espaço. Toma-se a posição atual desse ponto com o resultado da aplicação de uma rotação sobre sua posição original, dada por  $\mathbf{x}_n = \mathbf{R} \mathbf{x}_0$ . Supondo que ocorra uma variação dessa rotação, o ponto passa a assumir uma nova posição

$$\mathbf{x}_{nn} = \mathbf{R}(\delta\boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}_n, \quad (\text{A.18})$$

onde o tensor que define o incremento na rotação é obtido com base em um vetor de variação angular instantânea  $\delta\boldsymbol{\omega}$  (*spin vector*) através da seguinte expressão válida para pequenas rotações no espaço Crisfield (1997)

$$\mathbf{R}(\delta\boldsymbol{\omega}) = [\mathbf{I} + \mathbf{spin}(\delta\boldsymbol{\omega})] \quad (\text{A.19})$$

No caso em questão,  $\delta\boldsymbol{\omega}$  não é uma variação do pseudo-vetor referente à rotação original  $\boldsymbol{\theta}$  e portanto não pode ser somado a este para definir a rotação total entre as posições  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_{nn}$ , que seria expressa por

$$\mathbf{x}_{nn} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}_0 \quad (\text{A.20})$$

Colocando a Eq. (A.18) em termos da posição original do ponto e introduzindo a definição dada na Eq. (A.19) obtém-se a seguinte expressão para a rotação descrita em Eq. (A.21)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{nn} &= \mathbf{R}(\delta\boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}_n \\ &= \mathbf{R}(\delta\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R} \mathbf{x}_0 \\ &= [\mathbf{I} + \text{spin}(\delta\boldsymbol{\omega})] \mathbf{R} \mathbf{x}_0 \\ &= [\mathbf{R} + \text{spin}(\delta\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}] \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Se a rotação em questão for descrita em termos da variação do tensor de rotação na forma  $\mathbf{x}_{nn} = (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) \mathbf{x}_0$ , pode-se utilizar o resulta do da Eq. (A.21) para estabelecer a relação

$$\mathbf{R} + \delta\mathbf{R} = \mathbf{R} + \text{spin}(\delta\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}, \quad (\text{A.22})$$

e a partir desta, definir a variação do tensor de rotação na forma

$$\delta\mathbf{R} = \text{spin}(\delta\boldsymbol{\omega})\mathbf{R} \quad (\text{A.23})$$

Portanto, a Eq. (A.23) estabelece que a variação da rotação de um ponto é determinada por uma variação angular instantânea dada pelo vetor  $\delta\boldsymbol{\omega}$ , que é tomado na formulação corrotacional como a variável global de rotação no processo incremental-iterativo de solução do problema não linear.

Para que as forças internas originadas pelas rotações sejam obtidas é preciso estabelecer a relação entre  $\delta\boldsymbol{\omega}$  e  $\delta\boldsymbol{\theta}$ , uma vez que a matriz de rigidez local do elemento é construída com base na variável de rotação  $\boldsymbol{\theta}$ . A relação entre o vetor de variação angular instantânea ( $\delta\boldsymbol{\omega}$ ) e o incremento de rotação ( $\delta\boldsymbol{\theta}$ ) aditivo ao vetor de rotação total no ponto ( $\boldsymbol{\theta}$ ) é estabelecida pela matriz  $\mathbf{H}$ , na forma  $\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}\delta\boldsymbol{\omega}$ , cuja derivação é demonstrada em Crisfield (1997). Nesse trabalho é utilizada a formulação simplificada apresenta por Felippa e Haugen (2005)<sup>2</sup>, onde  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$  é definida como

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\text{spin}(\boldsymbol{\theta}) + \eta \text{spin}(\boldsymbol{\theta})^2, \quad (\text{A.24})$$

<sup>2</sup>A notação  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\omega}}$  utilizada nesse trabalho é a mesma apresentada em Felippa e Haugen (2005). Em Crisfield (1997) e trabalhos correlatos do mesmo autor é utilizada a notação  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\omega}}$

com  $\eta$  dado pela equação

$$\eta = \frac{1 - \frac{1}{2}\theta \cot \frac{1}{2}\theta}{\theta^2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{720}\theta^2 + \frac{1}{30240}\theta^4 + \frac{1}{1209600}\theta^6 + \dots, \quad (\text{A.25})$$

sendo o cálculo realizado pela série apresentada para evitar problemas numéricos nos casos de pequenos valores de  $\theta$ .

A dedução da matriz de rigidez tangente por meio da formulação corrotacional requer a obtenção do produto entre derivada da matriz  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})^T$  com relação a  $\boldsymbol{\omega}$  e o vetor de momentos  $\mathbf{m}$ , cujo resultado é dado pela matriz  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m})$  definida por Felippa e Haugen (2005) como

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}) = \{\eta[(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{m}) \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta} \mathbf{m}^T - 2 \mathbf{m} \boldsymbol{\theta}^T] + \mu \text{spin}(\boldsymbol{\theta})^2 \mathbf{m} \boldsymbol{\theta}^T - \frac{1}{2} \text{spin}(\mathbf{m})\} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) \quad (\text{A.26})$$

onde

$$\mu = \frac{\theta^2 + 4 \cos \theta + \theta \text{sen} \theta - 4}{4\theta^2 \text{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)} = \frac{1}{360} + \frac{1}{7560}\theta^2 + \frac{1}{201600}\theta^4 + \frac{1}{5987520}\theta^6 + \dots \quad (\text{A.27})$$

Em diversas momentos da derivação da formulação EICR é necessária a introdução da variação do tensor  $\mathbf{T}$ , que faz a transformação de quantidades entre o referencial local e global do elemento. Esse tensor é obtido através dos vetores unitários que determinam a direção dos eixos locais do elemento em questão. Tais vetores também formam o tensor ortogonal  $\mathbf{R}_E$  que representa a rotação dos eixos globais para a posição dos eixos locais do elemento. Com isso a relação dada na Eq. (A.28) pode ser estabelecida.

$$\mathbf{T}^T = [\mathbf{i}_{\bar{x}} \ \mathbf{i}_{\bar{y}} \ \mathbf{i}_{\bar{z}}] = \mathbf{R}_E \quad (\text{A.28})$$

Utilizando a relação estabelecida acima em conjunto com a definição da variação do tensor de rotação dada na Eq. (A.23) define-se a variação de  $\mathbf{T}$  como

$$\delta \mathbf{T} = (\delta \mathbf{R}_E)^T = (\text{spin}(\delta \boldsymbol{\omega}_E) \mathbf{R}_E)^T = \mathbf{R}_E^T \text{spin}(\delta \boldsymbol{\omega}_E)^T = -\mathbf{T} \text{spin}(\delta \boldsymbol{\omega}_E), \quad (\text{A.29})$$

onde foram aplicadas propriedades pertinentes à matriz antissimétrica conforme apresentado anteriormente. Nessa equação  $\delta \boldsymbol{\omega}_E$  é o vetor de variação angular instantânea do sistema de eixos locais do elemento. A definição desse vetor no referencial local do elemento  $\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_E$  pode ser escrita em termos das variáveis nodais  $\bar{\mathbf{d}}_b$  através da relação

$$\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_E = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_E}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \delta \bar{\mathbf{d}} = \left[ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_E}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_E}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}} \right] \delta \bar{\mathbf{d}} = \sum_{b=1}^{N_e} \bar{\mathbf{G}}_b \delta \bar{\mathbf{d}}_b \quad (\text{A.30})$$

No entanto, a variação de  $\mathbf{T}$  depende unicamente da posição dos nós, conforme exposto em Rankin e Nour-Omid (1988) e mostrado na Seção 2.4, o que leva à conclusão de que  $\frac{\partial \bar{\omega}_E}{\partial \bar{\omega}} = 0$ . Com isso  $\bar{\mathbf{G}}_b$  toma a forma simplificada

$$\bar{\mathbf{G}}_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\omega}_E}{\partial \bar{\mathbf{u}}_b} & \frac{\partial \bar{\omega}_E}{\partial \bar{\omega}_b} \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{G}}_{u,b} \mathbf{0}_3] \quad (\text{A.31})$$

A definição da matriz  $\bar{\mathbf{G}}_{u,b}$ , que representa derivada da variação angular dos eixos locais do elemento com relação aos deslocamentos nodais é o único componente da formulação EICR que tem uma derivação dependente do tipo de elemento (no que se refere à geometria ou à quantidade dos nós). Isso porque a direção dos eixos locais é definida de forma particular em cada tipo geométrico de elemento (ex: elemento linear, triangular, retangular, tetraédrico ou hexaédrico). Para os elementos triangulares, cujos eixos locais são definidos conforme apresentado na Eq. (2.104), a matriz  $\bar{\mathbf{G}}_{u,i}$  assume a forma (Felippa e Haugen, 2005)

$$\bar{\mathbf{G}}_{u,i} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\bar{x}_k - \bar{x}_j) \\ 0 & 0 & (\bar{y}_k - \bar{y}_j) \\ -\frac{1}{2}(\bar{x}_k - \bar{x}_j) & -\frac{1}{2}(\bar{y}_k - \bar{y}_j) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

com  $i, j, k = 1, 2, 3$  em permutação cíclica, ou alternativamente em termos das variáveis geométricas do triângulo descritas na Eq. (2.27)

$$\bar{\mathbf{G}}_{u,i} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_i \\ 0 & 0 & b_i \\ \frac{1}{2}c_i & -\frac{1}{2}b_i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$