

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM MECÂNICA E INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DOS EFEITOS
ELÁSTICOS E VISCOSOS EM ESCOAMENTOS INERCIAIS DE FLUIDOS NÃO
NEWTONIANOS

por

Daniel Dall'Onder dos Santos

Tese para a obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2012.

MODELAGEM MECÂNICA E INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DOS EFEITOS
ELÁSTICOS E VISCOSOS EM ESCOAMENTOS INERCIAIS DE FLUIDOS NÃO
NEWTONIANOS

por

Daniel Dall'Onder dos Santos
Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Rogério José Marczak – PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Murilo Francisco Tomé – ICMC / USP – São Carlos

Prof. Dr. Edson José Soares – DEM / UFES

Prof. Dr. Francis H. R. França
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 20 de dezembro de 2012.

*“All the world's indeed a stage, and we are merely players
Performers and portrayers
Each another's audience, outside the gilded cage.”*

Neil Peart

AGRADECIMENTOS

Embora esta Tese seja, pela sua finalidade acadêmica, um trabalho individual, a caminhada até aqui não foi trilhada sozinha. Por isso, expresso aqui meus sinceros agradecimentos:

À Deus, pelas oportunidades que me proporcionou nesta vida, pelas lutas ganhas e pelas perdas, aprendendo sempre a ser mais forte e a fazer o bem.

Aos meus pais *Dailôr* e *Enriete*, por primarem pela minha educação e acreditarem, juntamente comigo, que é preciso sempre ir além; por nunca deixarem faltar amor e compreensão nas horas de dificuldades, pelas alegrias de cada dia; pelo apoio e incentivo.

À minha irmã Fabíola, pelo apoio incondicional e companheirismo.

Ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey, pela orientação e parceria nesta caminhada que iniciou ainda na graduação e que continua rendendo bons frutos.

Aos demais professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Ao Grupo de Reologia (GReo) da PUC-Rio pelo auxílio na interpretação dos parâmetros reológicos discutidos neste trabalho, em especial à Prof^a. Dr^a. Mônica Feijó Naccache e ao Prof. Dr. Paulo Roberto de Souza Mendes.

Aos amigos e colegas Cleiton Elsner da Fonseca, Lober Hermany, Giovanni Minervino Furtado e Bianca Neves Machado pela paciência, companheirismo e convivência diária no LAMAC.

À minha irmã de coração Fernanda Bichet Link.

Aos amigos de tantos acordes Tiago Antônio Zilio e Gustavo Massignan – *Long live rock and roll!*

Às amigas Tássia Nectoux Beutler, Crissiane Alves Ancines, Camila Bim, Bruna Soares e Liana Antunes.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida.

A todos os amigos que de alguma forma colaboraram para a conclusão desta etapa.

RESUMO

A maioria dos líquidos encontrados na natureza são não newtonianos e o estudo do seu comportamento reológico tem uma importância significativa em diferentes áreas da engenharia. Entre eles, existe uma classe de fluidos que exibem pequena deformação aparente quando sujeitos a um nível de tensões inferior a uma tensão limite de escoamento, referido como comportamento viscoplástico. Nesta classe de materiais, alguns apresentam também comportamento elástico quando submetidos a baixas taxas de cisalhamento. A presente Tese tem como objetivo o estudo numérico de escoamentos bidimensionais em regime permanente de fluidos elasto-viscoplásticos através de uma expansão-contração planar. O modelo mecânico é definido pelas equações de conservação de massa e de balanço de *momentum* acopladas ao modelo elasto-viscoplástico proposto nesta Tese. Esta modelagem é aproximada por um método de elementos finitos multi-campos estabilizado baseado na metodologia de Galerkin mínimos-quadrados que possui como variáveis primais os campos de tensão extra polimérica, velocidade e pressão. As condições de compatibilidade entre os sub-espacos de elementos finitos para tensão extra-velocidade e velocidade-pressão são violadas, permitindo assim a utilização de interpolações de igual ordem. O método estabilizado foi implementado no código de elementos finitos para fluidos não newtonianos em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Nesta Tese é adotada uma metodologia alternativa para a definição das zonas rígidas do escoamento como sendo a posição onde a taxa de cisalhamento é igual a um valor dado pela relação de parâmetros reológicos do fluido, especificamente a tensão limite de escoamento e a viscosidade newtoniana para baixas taxas de cisalhamento. Nas simulações numéricas realizadas, o tempo de relaxação adimensional, o número de salto, o coeficiente *power-law*, a vazão adimensional e a massa específica adimensional são variados de forma a avaliar de que modo influenciam na dinâmica de escoamentos elasto-viscoplásticos. Os resultados obtidos estão qualitativamente de acordo com a literatura, atestando a estabilidade da formulação empregada.

Palavras-chave: escoamentos elasto-viscoplásticos; modelagem mecânica multi-campos; Galerkin mínimos-quadrados; escoamento através de uma expansão-contração planar.

ABSTRACT

Non-Newtonian fluids are the majority of liquids found in nature and the study of their rheological behavior has a significant importance on different areas of engineering. Among them, there is a class of materials that exhibits little apparent deformation when subjected to a stress level behind an yield stress, referenced as viscoplastic material. In this class of materials, some fluids also exhibit elastic behavior at low shear rates. The present work aimed to a numerical study of two-dimensional steady state laminar flows of elasto-viscoplastic fluids through a planar expansion-contraction cavity. The mechanical model was defined by the mass conservation and momentum balance equations coupled to the elasto-viscoplastic model proposed in this work. This modeling has been approximated by a stabilized multi-field finite element method based on the Galerkin least-squares methodology, having as primal variables the elastic extra-stress component, velocity and pressure fields. In this way, the compatibility conditions between the extra-stress-velocity and pressure-velocity (Babuška-Brezzi condition) finite element subspaces are violated, allowing to use equal-order finite element interpolations. The stabilized method has been implemented in the finite element code for non-Newtonian fluids under development at the Laboratory of Applied and Computational Fluid Mechanics (LAMAC) of the Federal University of Rio Grande do Sul. An alternative methodology is adopted to define the yield surface as the position where the strain rate is equal to a value given by the relation of the rheological parameters of the fluid, namely the yield stress and the viscosity at low shear rates. In the performed numerical simulations, the non-dimensional relaxation time, the jump number, the power-law coefficient, the non-dimensional flow rate, and the non-dimensional density are varied in order to evaluate their influence on the elasto-viscoplastic fluid dynamics. All results found are in qualitatively accordance with the affine literature, and attesting the good stability features of the formulation.

Keywords: elasto-viscoplastic flows; multi-field mechanical modeling; Galerkin least-squares; planar expansion-contraction flow.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	MODELAGEM MECÂNICA	7
2.1	Equação da Continuidade	7
2.2	Equação de Balanço da Quantidade de Movimento	8
2.3	Fluido Newtoniano Generalizado	10
2.4	Modelagem da viscoplasticidade	11
2.5	Modelagem da viscoelasticidade	18
2.6	Modelagem da elasto-viscoplasticidade – Modelo de Souza Mendes, 2007	20
2.7	Modelagem da tixotropia – Modelo de Souza Mendes, 2009	21
2.8	Modelagem da elasto-viscoplasticidade – Modelo proposto neste trabalho	27
3	MODELAGEM DE ELEMENTOS FINITOS	30
3.1	Definições Preliminares	30
3.2	Formulação Forte	31
3.3	Adimensionalização Cinemática	32
3.4	Adimensionalização reológica do modelo elasto-viscoplástico proposto	33
3.5	Formulação de Galerkin	37
3.6	Método de Galerkin Mínimos-Quadrados	38
3.7	Problema Matricial	46
4	RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES	49
4.1	Escoamentos sobre uma cavidade profunda planar	49
4.2	Escoamentos sobre um cilindro confinado	54
4.3	Escoamentos sobre uma expansão-contração abrupta planar	62
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	80
5.1	Comentários	82
5.2	Perspectivas Futuras	83
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Curvas da viscosidade <i>versus</i> taxa de cisalhamento para as funções de Cross e Carreau.	13
Figura 2.2	Curvas da função de viscosidade <i>versus</i> taxa de cisalhamento do modelo de Herschel-Bulkley regularizado por Papanastasiou para diferentes valores do parâmetro m_p	14
Figura 2.3	Curvas da viscosidade <i>versus</i> taxa de cisalhamento para os modelos de Bi-Viscosidade e Papanastasiou-modificado (Herschel-Bulkley regularizado).	15
Figura 2.4	Curvas da viscosidade <i>versus</i> taxa de cisalhamento e tensão cisalhante <i>versus</i> taxa de cisalhamento para o modelo SMD.	16
Figura 2.5	Detalhe das curvas da viscosidade <i>versus</i> taxa de cisalhamento para os modelos de Bi-Viscosidade, Herschel-Bulkley regularizado e SMD.	17
Figura 2.6	Figura 2.7 – Curvas de escoamento de materiais reais: (a) solução de água e Carbopol a 0.20%; (b) lama de perfuração; (c) maionese comercial; (d) emulsão de água e óleo. [Souza Mendes e Dutra, 2004].	17
Figura 2.7	Analogia mecânica unidimensional do modelo convectado superior de Maxwell.	19
Figura 2.8	Analogia mecânica unidimensional do modelo de Oldroyd-B.	19
Figura 2.9	Analogia mecânica do comportamento do material [de Souza Mendes, 2009].	21
Figura 2.10	Curvas de viscosidade e tensão cisalhante <i>versus</i> taxa de cisalhamento para $\tau_0=2$ Pa, $\tau_{0d}=1$ Pa, $\eta_0=10^7$ Pa.s, $\eta_\infty=0.01$ Pa.s, $K=1$ Pa.s ⁿ , $n=0.5$ e $\dot{\gamma}_{0d}=10^{-4}$ s ⁻¹	27
Figura 3.1	Descrição do problema: escoamento em cavidade forçada.	41
Figura 3.2	Discretizações utilizadas nos testes numéricos: (a) 400 elementos regulares; (b) 400 elementos distorcidos; (c) 2500 elementos regulares.	41
Figura 3.3	Representação em elevação das isobandas de pressão obtidas com a malha de 400 elementos regulares. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.	42
Figura 3.4	Representação em elevação das isobandas do componente u_l do vetor velocidade obtidas com a malha de 400 elementos regulares. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.	43
Figura 3.5	Representação em elevação das isobandas de pressão obtidas com a malha de 400 elementos distorcidos. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.	43
Figura 3.6	Representação em elevação das isobandas do componente u_l do vetor velocidade obtidas com a malha de 400 elementos distorcidos. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.	44

Figura 3.7	Representação em elevação das isobandas de pressão obtidas com a malha de 2500 elementos regulares. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.	44
Figura 3.8	Representação em elevação das isobandas do componente u_l do vetor velocidade obtidas com a malha de 2500 elementos regulares. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.	45
Figura 3.9	Validação dos resultados com Botella e Peyret, 1998.	45
Figura 3.10	Linhas de corrente para o escoamento de um fluido newtoniano com $Re=1000$	46
Figura 4.1	Descrição do problema: escoamento sobre uma cavidade profunda.	49
Figura 4.2	Teste de independência de malha: comparação do perfil transversal da tensão extra polimérica para quatro discretizações diferentes.	50
Figura 4.3	Discretizações utilizadas no teste de independência de malha: (a) 550 elementos; (b) 2200 elementos; (c) 8800 elementos.	50
Figura 4.4	Isobandas da intensidade da parcela polimérica do tensor extra de tensão para escoamentos sem inércia com $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.0$; (b) $Wi=0.1$; (c) $Wi=0.2$; (d) $Wi=0.35$	51
Figura 4.5	Isobandas dos componentes τ_{p12} , τ_{p11} , e τ_{p22} para escoamentos sem inércia com $\psi=0.59$: (a) τ_{p12} para $Wi=0.0$; (b) τ_{p12} para $Wi=0.35$; (c) τ_{p11} para $Wi=0.0$; (d) τ_{p11} para $Wi=0.35$; (e) τ_{p22} para $Wi=0.0$; (f) τ_{p22} para $Wi=0.35$	52
Figura 4.6	Representação em elevação das isobandas do componente τ_{p11} para escoamentos sem inércia com $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.0$; (b) $Wi=0.35$	53
Figura 4.7	Perfis longitudinais da intensidade do tensor extra para escoamentos sem inércia com $\psi=0.59$: (a) parede superior do canal, $x_2=0.5$; (b) parede inferior do canal, $x_2=-0.5$	53
Figura 4.8	Descrição do problema: escoamento sobre uma cilindro mantido entre placas paralelas.	55
Figura 4.9	Detalhe da região central da malha empregada.	56
Figura 4.10	Isobandas da intensidade da parcela polimérica do tensor extra de tensão para $\rho^*=40.8$, $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.025$; (b) $Wi=0.123$; (c) $Wi=0.245$; (d) $Wi=0.368$	56
Figura 4.11	Representação em elevação da intensidade da parcela polimérica do tensor extra de tensão para $\rho^*=40.8$, $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.025$; (b) $Wi=0.123$; (c) $Wi=0.245$; (d) $Wi=0.368$	58
Figura 4.12	Isobandas do módulo do vetor velocidade para $\rho^*=40.8$, $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.025$; (b) $Wi=0.368$	59
Figura 4.13	Linhas de corrente para $\rho^*=40.8$, $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.025$; (b) $Wi=0.368$	59
Figura 4.14	Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0.0$ e $Wi=0.35$: (a) $n=0.25$; (b) $n=0.75$	60

Figura 4.15	Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=3.9$ e $Wi=0.35$: (a) $n=0.25$; (b) $n=0.75$	61
Figura 4.16	Perfis transversais de tensão extra e velocidade para a variação do índice <i>power-law</i> , com $\rho^*=0.0$ e $Wi=0.35$: (a) τ_{12} ; (b) τ_{11} ; (c) u_1	62
Figura 4.17	Descrição do problema: expansão-contração abrupta planar.	63
Figura 4.18	Teste de independência de malha: comparação do perfil transversal da tensão extra polimérica para quatro discretizações diferentes, com $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$ e $\theta_0^*=20$	63
Figura 4.19	Discretizações utilizadas no teste de independência de malha: (a) 2200 elementos; (b) 5200 elementos; (c) 10500 elementos; (d) 18000 elementos.	64
Figura 4.20	Representação em elevação das isobandas de pressão para o escoamento de um fluido de Oldroyd-B: (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método de Galerkin-Mínimos Quadrados.	65
Figura 4.21	Representação em elevação das isobandas do componente u_1 do vetor velocidade para o escoamento de um fluido de Oldroyd-B: (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método de Galerkin-Mínimos Quadrados.	65
Figura 4.22	Escoamento em cavidade forçada – zonas rígidas para $\rho^*=0$, $J=10^4$, $n=0.5$ e $U^*=0.1$: (a) critério de τ ; (b) critério de $\dot{\gamma}$	67
Figura 4.23	Zonas rígidas para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=2 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=5.26 \times 10^3$	68
Figura 4.24	Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=2 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=5.26 \times 10^3$	68
Figura 4.25	Comparação qualitativa: (a) de Souza Mendes <i>et al</i> , 2007a; (b) $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$, $U^*=1.0$ e $\theta_0^*=5.26 \times 10^3$	69
Figura 4.26	Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=2 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=5.26 \times 10^3$	69
Figura 4.27	Zonas rígidas para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $n=0.2$; (b) $n=0.5$; (c) $n=0.65$; (d) $n=0.75$	70
Figura 4.28	Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $n=0.2$; (b) $n=0.5$; (c) $n=0.65$; (d) $n=0.75$	71
Figura 4.29	Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$, e $U^*=1.0$: (a) $n=0.2$; (b) $n=0.5$; (c) $n=0.65$; (d) $n=0.75$	71
Figura 4.30	Zonas rígidas para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $J=250$; (b) $J=500$; (c) $J=2500$; (d) $J=5000$	72
Figura 4.31	Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $J=250$; (b) $J=5000$; (c) $J=2500$; (d) $J=5000$	73
Figura 4.32	Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $J=250$; (b) $J=5000$; (c) $J=2500$; (d) $J=5000$	73

Figura 4.33	Zonas ríidas para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $J=5000$: (a) $U^*=0.1$; (b) $U^*=0.5$; (c) $U^*=1.0$; (d) $U^*=2.0$	74
Figura 4.34	Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $J=5000$: (a) $U^*=0.1$; (b) $U^*=0.5$; (c) $U^*=1.0$; (d) $U^*=2.0$	75
Figura 4.35	Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $J=5000$: (a) $U^*=0.1$; (b) $U^*=0.5$; (c) $U^*=1.0$; (d) $U^*=2.0$	75
Figura 4.36	Zonas ríidas para $J=5000$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $\rho^*=0$; (b) $\rho^*=0.1$; (c) $\rho^*=2$; (d) $\rho^*=5$	76
Figura 4.37	Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $J=5000$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $\rho^*=0$; (b) $\rho^*=0.1$; (c) $\rho^*=2$, (d) $\rho^*=5$	76
Figura 4.38	Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $J=5000$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $\rho^*=0$; (b) $\rho^*=0.1$; (c) $\rho^*=2$, (d) $\rho^*=5$	77
Figura 4.39	Zonas ríidas para $\rho^*=10$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=5 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=6.3 \times 10^3$	78
Figura 4.40	Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=10$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=5 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=6.3 \times 10^3$	78
Figura 4.41	Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=10$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=5 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=6.3 \times 10^3$	79

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Campo vetorial qualquer	[-]
A	Campo tensorial qualquer	[-]
<i>a</i>	Constante positiva adimensional	[-]
<i>b</i>	Constante positiva adimensional	[-]
Bn	Número de Bingham	[-]
<i>c</i>	Constante positiva adimensional	[-]
C_0	Espaço das funções contínuas	[-]
D	Tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
$\overset{\nabla}{\mathbf{D}}$	Derivada convectada superior do tensor taxa de deformação	[s ⁻²]
dt	Força devido à tensão que atua em um elemento de superfície	[N]
E	Matriz dos termos de $\boldsymbol{\tau}^h$	[-]
F	Matriz dos termos de forças de campo	[-]
Fr	Número de Froude	[-]
G	Matriz dos termos de pressão e continuidade	[-]
<i>G</i>	Módulo de cisalhamento da microestrutura do material	[Pa]
G_0	Módulo de cisalhamento de um material completamente estruturado	[Pa]
g	Campo de aceleração	[m/s ²]
H	Matriz de ligação entre os termos de $\boldsymbol{\tau}^h$ e \mathbf{u}^h	[-]
<i>H</i>	Altura do canal maior	
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω	[-]
$H_0^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam sobre o contorno Γ_g	[-]
HB	Número de Herschel-Bulkley	[-]
<i>h</i>	Altura do canal menor	[m]
h_k	Comprimento de malha do elemento	[m]
I	Tensor unitário	[-]
I_D	Primeiro invariante do tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
II_D	Segundo invariante do tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
III_D	Terceiro invariante do tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
J	Matriz Jacobiana	[-]
<i>J</i>	Número de salto	[-]
K	Matriz dos termos difusivos	[-]
K	Elemento finito	[-]

K	Índice de consistência	[Pa.s ⁿ]
$L^2(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis sobre o domínio Ω	[-]
$L_0^2(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula no domínio Ω	[-]
L	Comprimento do canal maior	[-]
L_c	Comprimento característico	[m]
\mathbf{M}	Matriz dos termos de estabilização da equação da continuidade	[-]
m	Grau de interpolação de elementos finitos	[-]
m_p	Parâmetro regularizador de Papanastasiou	[s]
m_{evp}	Constante positiva adimensional	[-]
m_k	Parâmetro do grau de interpolação utilizado	[-]
\mathbf{N}	Matriz dos termos advectivos	[-]
N_A	Função de interpolação do nó global A	[-]
n	Índice <i>power-law</i>	[-]
\mathbf{n}	Vetor normal unitário	[-]
nsd	Número de dimensões do problema	[-]
\mathbf{P}	Matriz dos termos ε	[-]
P	Espaço funcional do campo de pressão	[-]
P^h	Sub-espaço de elementos finitos para o campo de pressão	[-]
P_m	Espaço polinomial de grau m para elemento triangular ou tetraédrico	[-]
p	Pressão	[Pa]
p^h	Aproximação de elementos finitos para o campo de pressão	[Pa]
Q_m	Espaço polinomial de grau m para elemento quadrangular ou hexaédrico	[-]
Q_l	Elemento quadrangular bilinear	[-]
q^h	Função peso do campo de pressão	[-]
\Re	Espaço dos números reais	[-]
\mathbf{R}	Vetor do resíduo	[-]
R_k	Espaço polinomial de ordem k	[-]
R_l	Espaço polinomial de ordem l	[-]
R_m	Espaço polinomial de ordem m	[-]
Re	Número de Reynolds	
Re_K	Número de Reynolds de malha	[-]
Re_{PL}	Número de Reynolds <i>power-law</i>	[-]
S	Superfície de uma região arbitrária no espaço	[m ²]

S^h	Função peso do campo de tensão	[-]
\mathbf{T}	Tensor de tensão total	[Pa]
\mathbf{t}_h	Vetor de força de superfície	[Pa]
t	Tempo	[s]
t_{eq}	Tempo característico de mudança da microestrutura do material	[s]
\mathbf{U}	Vetor de graus de liberdade	[-]
U^*	Vazão adimensional	[-]
U	Variável genérica	[-]
U^h	Aproximação de elementos finitos de uma variável genérica U	[-]
\mathbf{u}	Vetor velocidade	[m/s]
\mathbf{u}^h	Aproximação de elementos finitos do campo de velocidade	[m/s]
u_c	Velocidade característica	[m/s]
u_i	Componente da velocidade na direção i	[m/s]
V	Espaço funcional do campo de velocidade	[-]
V^h	Sub-espaço de elementos finitos para o campo de velocidade	[-]
V	Volume de uma região arbitrária no espaço	[m ³]
\mathbf{v}^h	Função peso do campo de velocidade	[-]
Wi	Número de Weissenberg	
\mathbf{X}	Posição de um ponto qualquer no espaço	[m]
x_i	Direção i do espaço	[m]

LETRAS GREGAS

α	Parâmetro de estabilização da equação do movimento	[-]
β	Parâmetro de estabilização da equação material	[-]
δ	Parâmetro de estabilização da equação da continuidade	[-]
δ_a	Medida relativa de assimetria	[%]
δx_{2m}	Distância entre a zona rígida na parede à montante do canal maior e a linha de simetria	[-]
δx_{2j}	Distância entre a zona rígida na parede à jusante do canal maior e a linha de simetria	[-]
Σ	Espaço funcional do campo de tensão extra polimérica	[-]
Σ^h	Sub-espaço de elementos finitos para o campo de tensão extra polimérica	[-]
λ_c	Parâmetro de ajuste de curvas para os modelos de Cross e Carreau	[s]
λ	Parâmetro de estruturação da microestrutura do material	[-]
λ_{ss}	Parâmetro de estruturação da microestrutura do material para regime permanente	[-]
$\dot{\gamma}$	Magnitude do tensor taxa de deformação – taxa de cisalhamento	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_0$	Taxa de cisalhamento máxima para a qual a estrutura do fluido está inalterada	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_1$	Taxa de cisalhamento onde o fluido escoar como um fluido <i>power-law</i>	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_2$	Taxa de cisalhamento onde o fluido escoar como um fluido com viscosidade η_∞	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_{0d}$	Taxa de cisalhamento que marca a transição da tensão de τ_0 para τ_{0d}	[s ⁻¹]
γ	Deformação total	[-]
γ_e	Deformação elástica	[-]
$\gamma_{e,n}$	Deformação correspondente a uma configuração neutra	[-]
γ_v	Deformação viscosa	[-]
η	Viscosidade não newtoniana	[Pa.s]
η_0	Viscosidade newtoniana para baixas taxas de cisalhamento	[Pa.s]
η_∞	Viscosidade newtoniana para altas taxas de cisalhamento	[Pa.s]
η_c	Viscosidade característica	[Pa.s]
η_{ss}	Viscosidade para regime permanente	[Pa.s]
η_v	Viscosidade estrutural	[Pa.s]
μ	Viscosidade newtoniana	[Pa.s]
μ_p	Viscosidade do polímero elástico	[Pa.s]
μ_b	Viscosidade plástica de Bingham	[Pa.s]
μ_s	Viscosidade do solvente newtoniano	[Pa.s]

μ_t	Viscosidade total	[Pa.s]
ρ	Massa específica do fluido	[kg/m ³]
ρ^*	Massa específica adimensional	[-]
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensão extra total	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}_p$	Tensor de tensão extra polimérico	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}_s$	Tensor de tensão extra do solvente	[Pa]
τ	Tensão de cisalhamento	[Pa]
τ_0	Tensão limite de escoamento	[Pa]
τ_{0d}	Tensão limite de escoamento dinâmica	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}_p^h$	Aproximação de elementos finitos do campo de tensão	[Pa]
$\nabla \boldsymbol{\tau}$	Derivada convectada superior do tensor extra de tensão	[Pa/s]
$\nabla \boldsymbol{\tau}_e$	Derivada convectada superior do tensor extra de tensão polimérico	[Pa/s]
θ	Tempo de relaxação variável – função de $\dot{\gamma}$	[s]
θ_1	Tempo de relaxação	[s]
θ_2	Tempo de retardamento	[s]
θ_{01}	Tempo de relaxação abaixo do limite de escoamento	[s]
θ_{02}	Tempo de retardamento abaixo do limite de escoamento	[s]
$\theta_{\infty 1}$	Tempo de relaxação acima do limite de escoamento	[s]
$\theta_{\infty 2}$	Tempo de retardamento acima do limite de escoamento	[s]
θ_0^*	Tempo de relaxação adimensional	[-]
Ω	Domínio do problema	[-]
Ω^h	Partição do domínio Ω em elementos finitos	[-]
Ω_K	Domínio do elemento finito K	[-]
$\bar{\Omega}$	Domínio limitado fechado do problema	[-]
$d\Gamma$	Elemento infinitesimal de superfície	[m ²]
Γ	Fronteira do domínio Ω	[-]
Γ_g	Parte da fronteira Γ na qual são impostas as condições de Dirichlet	[-]
Γ_h	Parte da fronteira Γ na qual são impostas as condições de Neumann	[-]
ψ	Razão de viscosidades	[-]

SUBSCRITOS

a	Número do ponto nodal local	[-]
A	Número do ponto nodal global	[-]
g	Condição de contorno de Dirichlet	[-]
h	Condição de contorno de Neumann	[-]

SOBRESCRITOS

*	Denota variáveis adimensionais	[-]
h	Aproximação de elementos finitos	[-]
T	Transposta de uma matriz	[-]

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

∇	Operador gradiente espacial	[-]
$\ \cdot \ $	Norma das Funções L^2	[-]

1 INTRODUÇÃO

Uma larga variedade de materiais de interesse industrial possui tensão limite de escoamento aparente. Creme dental, lama para perfuração de poços, chocolate derretido, cremes e molhos culinários, tintas para impressão, explosivos plásticos, espumas, sangue, emulsões de carvão em água são alguns exemplos de materiais viscoplásticos com aplicação cotidiana. Historicamente, devido à limitada faixa da taxa de cisalhamento mensurável pelos primeiros reômetros, acreditava-se que a viscosidade destes materiais aumentava indefinidamente quando a tensão aplicada a eles era diminuída. Haveria então uma determinada tensão abaixo da qual a viscosidade era assumida infinita e, deste modo, o material era considerado um corpo rígido e, acima desta tensão, escoava como um fluido de Ostwald-de Waele (também chamado de fluido *power-law*). Entre os modelos clássicos introduzidos para descrever a viscoplasticidade, destaca-se o modelo de Bingham, que representa o escoamento de materiais viscoplásticos com viscosidade constante, e o modelo de Herschel-Bulkley, que prescreve pseudoplasticidade – ou até mesmo dilatância – quando o material escoar.

Com o avanço dos equipamentos e técnicas reométricas este quadro se modificou significativamente. Os materiais que até então eram considerados corpos rígidos abaixo da tensão limite de escoamento, com viscosidade infinita, possuem na verdade uma alta viscosidade finita – o que não é previsto pelos modelos clássicos de Bingham e Herschel-Bulkley. Esta lacuna é abordada por Papanastasiou, 1987, no qual o autor introduz uma regularização a fim de representar a região de alta viscosidade, controlada por um parâmetro numérico. Esse trabalho abriu novas perspectivas para a simulação numérica de materiais viscoplásticos, descrevendo em apenas uma função contínua as tensões nas regiões de escoamento e de alta viscosidade do material – ou como referido na literatura clássica, regiões (aparentemente) rígidas. Esta ideia traduziu-se em uma alta produtividade de publicações de artigos numéricos orientados sobre o assunto – alguns exemplos são os trabalhos de Abdali *et al.*, 1982, Alexandrou *et al.*, 2001, Zisis e Mitsoulis, 2002, Alexandrou *et al.*, 2005.

Abdali *et al.*, 1992, realizaram simulações via elementos finitos de escoamentos em contrações planas e axissimétricas de fluidos de Bingham. Vradis e Öttingen, 1997, empregando o método de diferenças finitas, simularam escoamentos de fluidos de Bingham através de uma expansão abrupta com razão de aspecto de 1:2. Burgos *et al.*, 1999, empregaram soluções analíticas para o escoamento sobre uma cunha entre duas paredes para investigar a capacidade de diversos modelos regularizados de Herschel-Bulkley em prever a

morfologia das zonas rígidas; resultados são obtidos para diferentes parâmetros e comparados com as soluções exatas.

Os já citados avanços na reometria e na visualização de escoamentos de fluidos viscoplásticos propiciaram a observação de alguns fenômenos que indicam a existência de elasticidade em alguns experimentos. Um exemplo é o trabalho de Carter e Warren, 1987, que utilizaram um reômetro capilar para avaliar o escoamento de misturas de nitrocelulose e nitroglicerina quando processadas empregando diferentes solventes. O objetivo do trabalho foi a quantificação da influência dos efeitos da gelatinização – ruptura da estrutura fibrosa da nitrocelulose – sobre as propriedades reológicas do material. O comportamento dos escoamentos foi avaliado para uma faixa de diferentes temperaturas de extrusão. Os resultados obtidos indicam que os materiais possuem comportamento semelhante aos fluidos de Herschel-Bulkley, com a tensão de cisalhamento diminuindo com o aumento da gelatinização e que o aquecimento viscoso é mais aparente em misturas pobremente gelatinizadas. As temperaturas na superfície do extrusado foram determinadas experimentalmente e comparadas com resultados numéricos. A medição do fenômeno “*die swell*” – aumento da seção transversal do material após sua saída da matriz de extrusão – mostrou que este diminui com o grau de gelatinização e com o aumento da temperatura de extrusão, o que evidenciou a presença de elasticidade no material.

Beverly e Tanner, 1989, realizaram simulações numéricas via elementos finitos do escoamento de materiais elásticos que apresentam tensão limite de escoamento e investigaram a influência da viscoplasticidade sobre o fenômeno de *die swell*. Com os resultados obtidos, procederam a comparação com observações experimentais para diferentes temperaturas de saída e diferentes perfis do *swell* extrudado. Observaram que, enquanto as simulações numéricas possuem boa concordância com as observações experimentais para baixos valores do número de Weissenberg, há uma discrepância considerável para problemas que apresentam um maior grau de elasticidade. Destacam também os problemas inerentes à simulação numérica de materiais elásticos, apontando que o aumento da viscoplasticidade não se refletiu em um maior estabilidade das soluções.

Mujumdar *et al.*, 2002, desenvolveram um modelo reológico não-linear que descreve fenômenos viscoelásticos e viscoplásticos transientes para a modelagem do escoamentos de materiais tixotrópicos com tensão limite de escoamento. A formulação apresenta uma transição suave entre uma resposta elástica dominada para uma resposta viscosa, sem descontinuidade na curva tensão *versus* deformação. Para avaliar a precisão da modelagem e para estimar os parâmetros do modelo para diversas suspensões concentradas contendo

partículas de silício e carboneto de silício em polietileno, foi realizada uma análise e comparação com dados experimentais obtidos em escoamentos oscilatórios. O modelo proposto pelos autores é uma melhoria do modelo de Delaware-Rutgers e tem a capacidade de explicar os efeitos transientes comumente observados em sistemas tixotrópicos, tais como picos de tensão durante o início do escoamento e relaxação da tensão após a sua interrupção, bem como comportamento viscoplástico dos materiais.

Dullaert e Mewis, 2006, propuseram um modelo geral de cinética estrutural para descrever o escoamento de materiais tixotrópicos em um meio newtoniano onde a tensão total é dividida em contribuições elástica (dependente da estrutura) e viscosa. A equação cinética para o parâmetro da estrutura contém termos que consideram os efeitos do cisalhamento na quebra e na estruturação do fluido, bem como o efeito do movimento aleatório browniano na estruturação. Ambas as equações cinética e de relaxação contém uma distribuição de constantes de tempo. As predições do modelo foram comparadas com dados experimentais usando um método objetivo para a estimativa dos parâmetros, mostrando uma boa concordância entre estes dados e o modelo, ambos em regime permanente e durante condições transientes. A hipótese de uma relação linear entre a estrutura e os componentes elásticos e viscosos foi confirmada.

De Souza Mendes *et al.*, 2007a, realizaram experimentos de visualização e simulações numéricas para escoamentos axissimétricos sem inércia de fluidos viscoplásticos escoando em uma expansão abrupta seguida de uma contração abrupta. Os experimentos de visualização foram feitos com soluções aquosas de Carbopol em diferentes concentrações e a observação das zonas rígidas e escoantes foi realizada para diferentes combinações dos parâmetros governantes. Os resultados numéricos foram obtidos resolvendo as equações de conservação de massa e quantidade de movimento através de um código de volumes finitos, modelando o comportamento do fluido com o modelo SMD (de Souza Mendes e Dutra, 2004). A eficiência de deslocamento, definida pelos autores como a relação entre o volume de material escoante na cavidade formada pelo duto maior e o volume total desta cavidade, aumenta com o aumento da quantidade de movimento e diminui à medida que o expoente *power-law* da função para a viscosidade é aumentado. Os campos de tensão obtidos pelas simulações numéricas são simétricos com respeito ao plano médio da expansão-contração ortogonal ao eixo do escoamento, o que era esperado a partir das equações de movimento, uma vez que a inércia é negligenciada e foi assumido um material puramente viscoso. Esta simetria não está presente nos experimentos de visualização e é atribuída pelos autores ao comportamento elástico das soluções de Carbopol para níveis de tensões menores que a tensão de escoamento.

Saramito, 2007, apresenta, a partir da teoria termodinâmica, um novo modelo tridimensional para elasto-viscoplasticidade que leva em consideração os modelos de Bingham e Oldroyd-B, aplicando essa proposição no estudo de escoamentos cisalhantes simples, alongamento uniaxial e escoamentos oscilatórios de alta amplitude. Quando em comparação com resultados experimentais para materiais que apresentam estruturas microscópicas complexas com grandes rearranjos, o modelo proposto mostrou uma boa concordância qualitativa para os módulos complexos G' e G'' .

Sofou *et al.*, 2008, caracterizaram reologicamente massa de pão empregando reômetros extensionais, de placas paralelas e capilares. Baseado nos dados lineares e não-lineares obtidos, dois modelos foram empregados na caracterização: o modelo viscoplástico de Herschel-Bulkley para os casos onde os efeitos temporais foram negligenciáveis – assumidamente consistente e suficiente para descrever a tensão limite de escoamento e o comportamento pseudoplástico da massa – e o modelo K-BKZ com uma tensão limite de escoamento para os casos onde os efeitos transientes são importantes na análise – descrevendo a relaxação da tensão e a natureza viscoelástica de massas à base de farinha. Os autores também propuseram um modelo de escorregamento para descrever o comportamento da massa em escoamentos capilares: a velocidade de escorregamento é uma função exponencial da tensão cisalhante na parede e do diâmetro da matriz capilar.

Sikorski *et al.*, 2009, estudaram a velocidade e a forma de bolhas de ar ascendendo em dispersões transparentes de Carbopol com tensão limite de escoamento. Para assegurar pequena influência das paredes da geometria, foi utilizado um recipiente experimental grande o suficiente em comparação com o tamanho das bolhas. Eles observaram que o aumento da velocidade terminal das bolhas é aproximadamente linear com o aumento do raio das bolhas. Entretanto, o movimento das bolhas é alcançado apenas quando as bolhas são maiores que um raio crítico. Assim, os autores introduziram um parâmetro adimensional que mede a relação entre a força devida à tensão limite de escoamento e a força de empuxo, observando movimento de bolhas para valores acima de 0.5 – de acordo com previsões teóricas. As bolhas observadas no experimento possuem uma cabeça arredondada e uma cauda cônica – a última característica, uma clara indicação de que a elasticidade possui grande importância neste sistema. Os autores estudaram também a dependência do formato das bolhas e de seu volume em relação à tensão limite de escoamento.

Nassar *et al.*, 2011, empregaram um modelo elasto-viscoplástico para simular escoamentos através de uma expansão-contração abrupta axissimétrica, comparando os resultados com dados experimentais encontrados na literatura. Os autores obtiveram os

campos de velocidade e tensão resolvendo as equações de balanço de massa e quantidade de movimento através de um código de elementos finitos. Eles observaram que a elasticidade altera significativamente o formato e a posição das zonas rígidas no interior do canal central, uma tendência que está qualitativamente de acordo com os resultados de visualização encontrados na literatura. A perda de carga adimensional através do canal aumenta com a velocidade de entrada e o índice *power-law* da função viscosidade; entretanto, não é afetado tanto pelo aumento da elasticidade quanto pelo aumento da relação de viscosidades. As regiões escoadas mostram simetria para casos puramente viscosos. Fazendo os efeitos elásticos mais aparentes – através do aumento do número de Weissenberg do escoamento – as zonas escoadas tornam-se assimétricas, uma predição de acordo com o que previamente observado experimentalmente na literatura.

Esta Tese tem como objetivo a proposição de uma modelagem que melhor descreva o escoamento de materiais viscoplásticos reais. Para isto, as equações de conservação de massa e balanço de *momentum* para fluidos incompressíveis são acopladas aos modelos newtoniano, viscoplástico SMD e viscoelásticos de Oldroyd-B e White-Metzner. A partir desta modelagem, foram realizadas simulações numéricas de escoamentos em diferentes geometrias encontradas na literatura de viscoplasticidade e viscoelasticidade – cavidade forçada, cilindro mantido entre placas paralelas e cavidade profunda. Da análise dos resultados obtidos, que capturaram os principais fenômenos envolvidos nos escoamentos, é apresentado um novo modelo de elasto-viscoplasticidade, uma modificação do modelo empregado por Nassar *et al.*, 2011. O modelo aqui proposto, considera o material se deformando viscoelasticamente com alta viscosidade para baixas taxas de deformação; próximo à tensão limite de escoamento, ocorrem alterações na microestrutura do fluido e a viscosidade diminui diversas ordens de grandeza, a elasticidade cai e o fluido passa a escoar como um fluido pseudoplástico.

O modelo mecânico mencionado acima é aproximado através de um método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados que possui como variáveis primais os campos de tensão extra elástica, velocidade e pressão. Esta metodologia, introduzida por Hughes *et al.*, 1986, para o problema de Stokes, estendida para Navier-Stokes nas formulações mista por Franca e Frey, 1992, e multi-campos por Behr *et al.*, 1993, não necessita satisfazer as condições de compatibilidade entre os sub-espacos de elementos finitos para tensão extra-velocidade e pressão-velocidade – chamada também de condição de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Além disso, reforça a estabilidade do método de Galerkin clássico adicionando termos malha-dependentes – funções do resíduo das equações governantes do problema – avaliados elemento a elemento. Como este resíduo é

trivialmente satisfeito pela solução exata do problema, a consistência é preservada nesta classe de métodos.

Visando um melhor entendimento e apreciação desta Tese, o Capítulo 2 apresenta a modelagem mecânica baseada nas leis de conservação de massa e balanço de *momentum*; leis materiais dos fluidos viscoplásticos, viscoelásticos e elasto-viscoplásticos; no Capítulo 3, é descrita a aproximação de elementos finitos de Galerkin mínimos-quadrados para as equações do modelo mecânico multi-campos e resolução do sistema não-linear (modelo matricial) de tal forma a representar os comportamentos mais importantes dos materiais viscoplásticos. No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos através da implementação computacional na formulação multi-campos GLS de alguns dos modelos materiais apresentados no Capítulo 2, bem como sua discussão. O Capítulo 5 faz um fechamento da Tese, com uma resenha do conteúdo do trabalho, com destaque às principais conclusões obtidas no Capítulo 4, projetando inclusive perspectivas futuras.

2 MODELAGEM MECÂNICA

2.1 Equação da Continuidade

Tomando-se um material escoando em um referencial Euclidiano, considerando-se \mathbf{u} o vetor velocidade, ρ a massa específica, \mathbf{X} um ponto qualquer no espaço e t o tempo, onde \mathbf{u} e ρ são funções de espaço e tempo,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \\ \rho &= \rho(\mathbf{X}, t)\end{aligned}\quad (2.1)$$

O vetor $\rho\mathbf{u}$ representa o fluxo de massa que atravessa uma superfície infinitesimal ortogonal ao vetor \mathbf{u} . Utilizando-se o teorema da divergência de Gauss,

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{a}) dV = \iint_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.2)$$

onde \mathbf{a} representa um campo vetorial qualquer, V é o volume de uma região arbitrária no espaço delimitada pela superfície Γ e $\mathbf{n}d\Gamma$ é um vetor infinitesimal que representa um elemento infinitesimal de superfície, de direção ortogonal à região do espaço considerada. Se \mathbf{a} pode ser interpretado como o fluxo de uma propriedade escalar, então $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}d\Gamma$ é a taxa do fluxo desta propriedade através da superfície infinitesimal representada por $d\Gamma$. A integral no lado direito da Eq. (2.2) representa então o fluxo global daquela propriedade que atravessa a região do espaço considerada. Conseqüentemente, $(\operatorname{div} \mathbf{a})$ pode ser interpretado como o valor local deste fluxo por unidade de volume do espaço.

Empregando-se estes conceitos no caso em questão, a divergência de $\rho\mathbf{u}$ representa o fluxo líquido de massa por unidade de volume que atravessa um elemento de volume infinitesimal na vizinhança de um ponto arbitrário \mathbf{X} . Se um volume infinitesimal é escolhido como sistema, o princípio da conservação da massa expresso como

$$\left(\begin{array}{l} \text{Taxa líquida de massa} \\ \text{que atravessa o sistema} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Aumento de massa} \\ \text{dentro do sistema} \end{array} \right) \quad (2.3)$$

toma a forma

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.4)$$

Para fluidos com massa específica constante, o balanço de massa da Eq. (2.4) reduz-se a:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

2.2 Equação de Balanço da Quantidade de Movimento

O princípio da conservação de *momentum* é válido apenas para um referencial inercial, o qual assume-se existir no espaço euclidiano da física clássica. Se um referencial inercial existe, qualquer outro referencial transladando com velocidade constante em relação a este é inercial também. A equação de balanço de quantidade de movimento é escrita assumindo-se que o referencial é inercial.

A forma euleriana da equação de balanço de *momentum* pode ser obtida escrevendo explicitamente os termos a seguir:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa líquida de} \\ \text{momentum que} \\ \text{atravessa o sistema} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Soma de todas as} \\ \text{forças de superfície que} \\ \text{agem sobre o sistema} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Soma de todas as} \\ \text{forças de corpo que} \\ \text{agem sobre o sistema} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de aumento} \\ \text{de momentum} \\ \text{no sistema} \end{array} \right) \quad (2.6)$$

A fim de expressar a taxa líquida de *momentum*, considera-se a díade $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$. Da definição de díade [Astarita e Marrucci, 1974], tem-se

$$(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{u} (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma) \quad (2.7)$$

O termo entre parênteses no lado direito da Eq. (2.7) é o fluxo de massa através do elemento de superfície considerado; deste modo, $(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$ é interpretado como o fluxo de *momentum* através do mesmo elemento de superfície. Isto identifica a díade $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$ como o fluxo de *momentum*. Empregando-se uma expressão análoga à Eq. (2.2),

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{A}) dV = \iint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ é um campo tensorial qualquer, pode-se escrever a divergência de $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$ como o fluxo líquido de *momentum* por unidade de volume que atravessa um elemento de volume.

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \left(\begin{array}{c} \text{Fluxo líquido de momentum} \\ \text{que atravessa o sistema} \end{array} \right) \quad (2.9)$$

Considerando-se agora o segundo termo da Eq. (2.6) – a soma de todas as forças de superfície. A força $d\mathbf{t}$ devida à tensão que atuando em um elemento de superfície $d\Gamma$ é, pela definição do tensor de tensão total:

$$d\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.10)$$

Utilizando-se novamente a Eq. (2.8), o lado direito da Eq. (2.10) é assim visto como a resultante das forças de superfície, sendo a divergência de \mathbf{T} a resultante por unidade de volume:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \left(\begin{array}{c} \text{Resultante das forças de superfície} \\ \text{por unidade de volume} \end{array} \right) \quad (2.11)$$

Para fluidos com massa específica constante, o tensor de tensão total é decomposto em um tensor isotrópico e um tensor viscoso na forma

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.12)$$

onde p é a pressão, \mathbf{I} o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ o tensor viscoso de tensão. Assim, a divergência do tensor de tensão total pode ser decomposta em:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \quad (2.13)$$

O terceiro termo da Eq. (2.6), quando expresso por unidade de volume do sistema, pode ser escrito simplesmente como $\rho \mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é o campo de aceleração (e.g. a aceleração da gravidade). O lado direito da Eq. (2.6), quando expresso por unidade de volume do sistema, é a derivada parcial em relação ao tempo do vetor $\rho \mathbf{u}$. Com as expressões obtidas, pode-se

escrever a forma Euleriana da equação de balanço de quantidade de movimento da seguinte forma:

$$-\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) \quad (2.14)$$

Para escoamentos incompressíveis e regime permanente, a Eq. (2.14) pode ser reescrita (na forma usualmente encontrada na literatura) como

$$\rho((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.15)$$

2.3 Fluido Newtoniano Generalizado

A propriedade mais importante de fluidos macromoleculares é a viscosidade não newtoniana, dependente da taxa de cisalhamento. Esta relação de dependência acarreta saltos de diversas ordens de magnitude na viscosidade à medida que o fluido é cisalhado. Portanto, este fenômeno não pode ser ignorado em cálculos de escoamentos em dutos e de processamento de polímeros; problemas de lubrificação, projeto de reômetros e operações de extrusão.

Um dos primeiros empirismos introduzidos foi uma modificação na lei de Newton da viscosidade, permitindo à viscosidade variar de acordo com a taxa de cisalhamento. Ou seja, para escoamentos onde $u_1 = u_1(x_2)$, $u_2 = u_3 = 0$, os primeiros reologistas substituíram

$$\tau_{12} = -\mu \frac{du_1}{dx_2} \quad (2.16)$$

onde μ é constante para uma dada temperatura, pressão e composição pela expressão

$$\tau_{12} = -\eta \frac{du_1}{dx_2} \quad (2.17)$$

onde η é uma função de $|du_1/dx_2|$ – uma vez que se esperava que a mudança na viscosidade era devida apenas à magnitude e não também ao sinal do gradiente de velocidade. Estendendo esta idéia para escoamentos arbitrários com qualquer campo de velocidades $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$,

tem-se o modelo de Fluido Newtoniano Generalizado (FNG)

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ é o tensor taxa de deformação dado por

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \quad (2.19)$$

Se a viscosidade não newtoniana, de caráter escalar, é dependente do tensor taxa de deformação, então deve depender apenas de combinações particulares de componentes do tensor que são independentes do sistema de coordenadas – invariantes do tensor taxa de deformação:

$$\begin{aligned} I_D &= \text{tr } \mathbf{D} \\ II_D &= \text{tr } \mathbf{D}^2 \\ III_D &= \det \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para fluidos incompressíveis, $I_D = 2(\text{div } \mathbf{u}) = 0$. Para escoamentos puramente cisalhantes, o terceiro invariante, III_D , também se anula, uma vez que o elemento de fluido não sofre alteração de volume. Assim, η é função apenas do segundo invariante do tensor taxa de deformação, II_D [Bird *et al.*, 1987]. Efetivamente, emprega-se a magnitude do tensor taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, chamada em escoamentos cisalhantes de taxa de cisalhamento, definida como

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 II_D} = \sqrt{2 \text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})} \quad (2.21)$$

2.4 Modelagem da viscoplasticidade

O conceito de uma tensão limite de escoamento para líquidos estruturados tem passado por um constante aprimoramento desde o início do século XX. Primeiramente, admitia-se que a tensão limite de escoamento era o ponto no qual, quando a tensão aplicada a um sólido era aumentada, o material começava a se deformar exibindo um comportamento semelhante a um líquido, com deformação contínua [Barnes, 1999]. Com a evolução das técnicas reométricas,

houve observações de que, embora exista uma faixa de tensões em torno de uma tensão limite de escoamento aparente na qual as propriedades mecânicas mudam drasticamente, o material apresenta pequena e contínua deformação quando submetido a tensões abaixo deste nível. Este escoamento lento pode ser associado ao escoamento de um fluido newtoniano com alta viscosidade em um gráfico log-log de viscosidade *versus* taxa de cisalhamento, como pode ser visto na Fig. 2.1 para o modelo de Cross e Carreau. Acima da tensão de limite de escoamento aparente, a maioria dos fluidos apresenta um comportamento *power-law* dependente da taxa de cisalhamento [Barnes, 1999].

A função viscosidade mais empregada para ajustar dados experimentais de fluidos viscoplásticos é a de Herschel-Bulkley. A expressão para a função viscosidade ($\eta \equiv \tau/\dot{\gamma}$) deste modelo é dada por

$$\eta = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} & \text{se } \tau > \tau_0 \\ \infty & \text{se } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

onde η é a viscosidade, τ_0 é a tensão limite de escoamento, $\dot{\gamma}$ é a taxa de cisalhamento, K é o índice de consistência e n é o índice *power-law*. Quando $n=1$, o modelo clássico de Bingham é recuperado:

$$\eta = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_b & \text{se } \tau > \tau_0 \\ \infty & \text{se } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

onde μ_b é a viscosidade plástica. Como mostrado pelas Eqs. (2.22) e (2.23), os modelos de Herschel-Bulkley e Bingham assumem uma viscosidade infinita quando a intensidade da tensão é menor que tensão de cisalhamento. Este comportamento não é compatível com as equações de conservação que governam escoamentos complexos. Além disso, a predição de uma viscosidade infinita não reproduz os resultados experimentais de fluidos viscoplásticos, uma vez que para tensões menores que a tensão limite de escoamento aparente, a viscosidade apresenta um valor muito elevado, porém, finito. Para representar uma queda abrupta na viscosidade, pode-se empregar os modelos de Cross e de Carreau, respectivamente dados por

$$\eta = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^{1-n}} \quad \text{e} \quad \eta = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{(1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^2)^{(1-n)/2}} \quad (2.24)$$

onde λ_c é um parâmetro para o ajuste de curvas com dimensão de tempo. As duas funções acima são usualmente utilizadas na modelagem de fluidos pseudoplásticos com uma viscosidade para baixas taxas de cisalhamento, η_0 , uma região *power-law* que inicia em $\dot{\gamma} \simeq 1/\lambda_c$ e uma viscosidade para altas taxas de cisalhamento, η_∞ . No limite onde $n \rightarrow 0$, a capacidade de representar um comportamento *power-law* é empregada para obter uma queda abrupta na curva de viscosidade, limitada entre η_0 e η_∞ , como mostrado na Fig. 2.1.

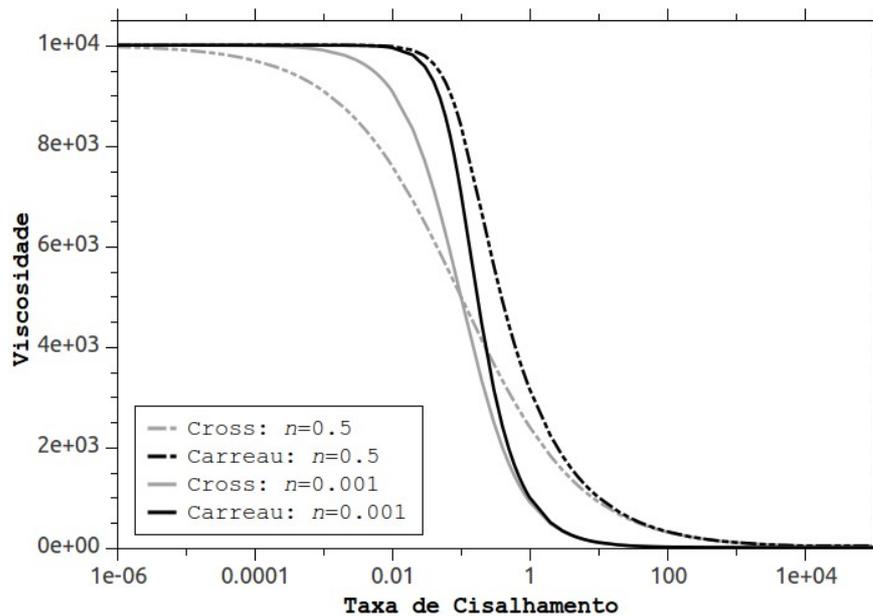


Figura 2.1 – Curvas da viscosidade *versus* taxa de cisalhamento para as funções de Cross e Carreau.

Uma função de Bingham regularizada foi proposta por Papanastasiou, 1987, para a utilização em simulações numéricas de escoamentos via elementos finitos, consistindo no amortecimento do termo da tensão limite de escoamento através de uma exponencial que leva em seu argumento um parâmetro regularizador m_p . Quando $m_p \rightarrow \infty$, a função de Papanastasiou aproxima-se do modelo de Bingham, com a vantagem de possuir derivada contínua para todo o domínio de $\dot{\gamma}$. É expressa como

$$\eta = (1 - \exp(-m \dot{\gamma})) \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p \quad (2.25)$$

A extensão natural da regularização de Papanastasiou para fluidos viscoplásticos que

apresentam pseudoplasticidade, ou seja, cuja viscosidade diminui para tensões de cisalhamento maiores que a tensão limite de escoamento é

$$\eta = (1 - \exp(-m \dot{\gamma})) \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.26)$$

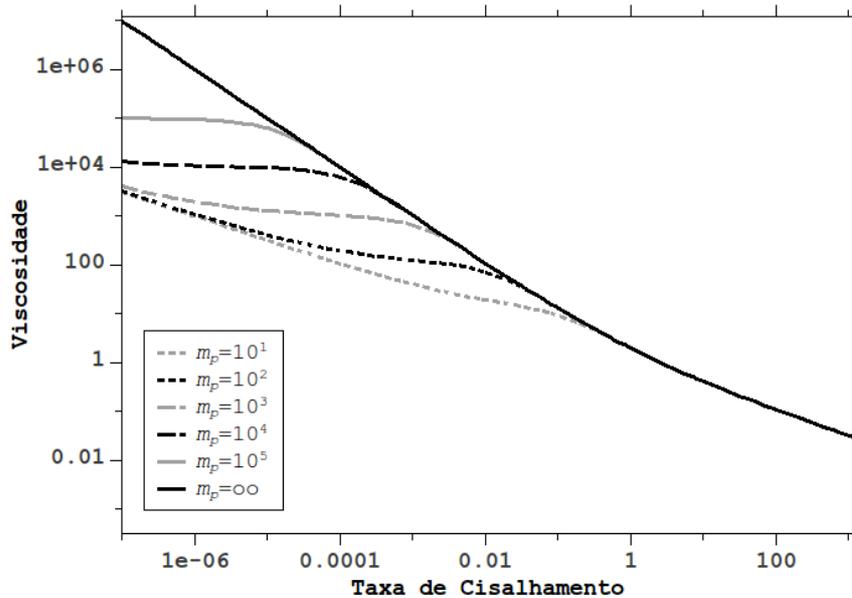


Figura 2.2 – Curvas da função de viscosidade *versus* taxa de cisalhamento do modelo de Herschel-Bulkley regularizado por Papanastasiou para diferentes valores do parâmetro m_p .

Da mesma maneira que para o modelo de Bingham, quando $m_p \rightarrow \infty$, a função modificada de Papanastasiou aproxima-se do modelo de Herschel-Bulkley. A Eq. (2.26) resulta nas curvas de viscosidade mostradas na Fig. 2.2, onde pode-se observar que a função modificada de Papanastasiou não prediz um platô de viscosidade finita para taxas de cisalhamento muito baixas. Alternativamente, um modelo que possui um comportamento qualitativo mais adequado para materiais viscoplásticos é o de Bi-Viscosidade, proposto por O'Donovan e Tanner, 1984, dado por

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} & \text{se } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \\ \eta &= \eta_0 & \text{se } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $\dot{\gamma}_0 = \tau_0 / (\eta_0 - K \dot{\gamma}^{n-1}) \approx \tau_0 / \eta_0$ é a taxa de cisalhamento limite de escoamento. Esta função envolve duas expressões diferentes, cada uma a ser aplicada para faixas diferentes da taxa de

cisalhamento, delimitadas pela taxa de cisalhamento limite de escoamento, a qual é determinada através de um procedimento de ajuste de curvas. Estas características, juntamente com a derivada descontínua, causam diversos problemas práticos que impedem ajustes de boa qualidade para dados experimentais de fluidos viscoplásticos – o modelo possui boa predição do campo de tensões apenas para regiões afastadas da tensão limite de escoamento aparente [Burgos e Alexandrou, 2009a].

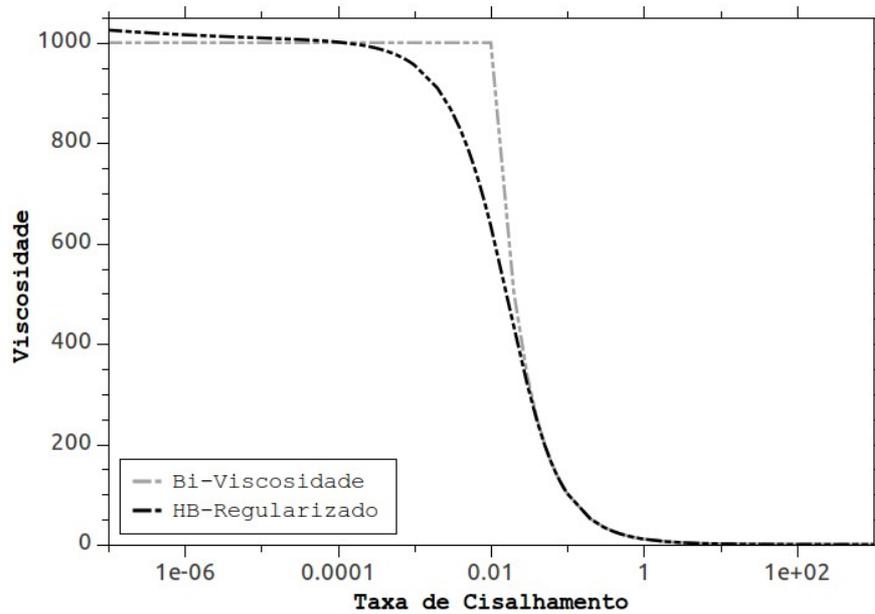


Figura 2.3 – Curvas da viscosidade *versus* taxa de cisalhamento para os modelos de Bi-Viscosidade e Papanastasiou-modificado (Herschel-Bulkley regularizado).

A partir das dificuldades encontradas na aplicação dos modelos citados anteriormente e de observações experimentais, de Souza Mendes e Dutra, 2004, propuseram uma nova função viscosidade. Seu comportamento é qualitativamente igual às demais funções de viscosidade viscoplásticas, apresentando um platô de viscosidade muito elevada constante para baixas taxas de cisalhamento, seguida de uma queda abrupta da viscosidade em $\tau=\tau_0$, seguida de uma região *power-law*. Este comportamento é similar ao apresentado pela função Bi-Viscosidade (Fig. 2.3), com a exceção de que não há descontinuidade na derivada da curva em $\tau=\tau_0$.

A função para viscosidade SMD é dada por

$$\eta = \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_0} \dot{\gamma}\right) \right) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right) \quad (2.28)$$

e está representada graficamente na Fig. 2.4.

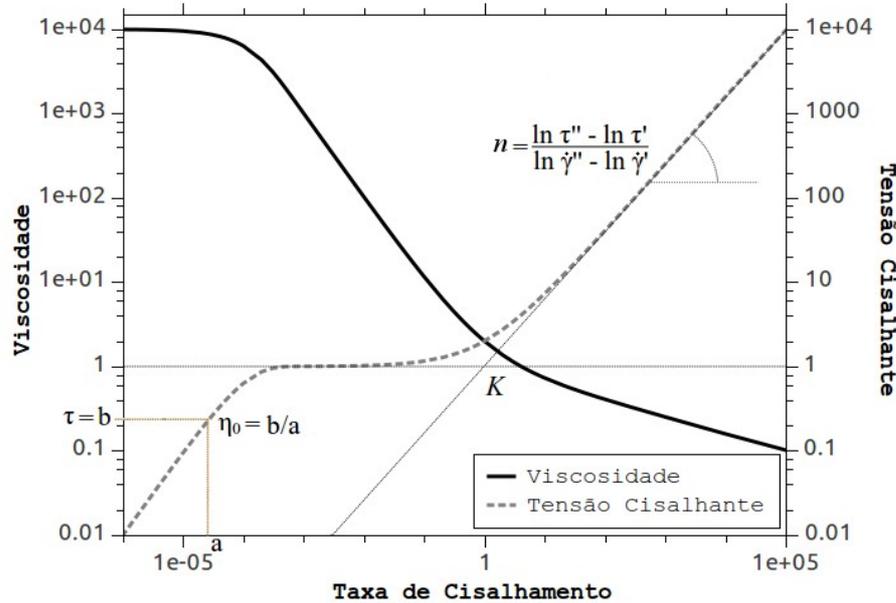


Figura 2.4 – Curvas da viscosidade *versus* taxa de cisalhamento e tensão cisalhante *versus* taxa de cisalhamento para o modelo SMD.

A viscosidade em baixas taxas de cisalhamento (η_0) é a razão entre a intensidade da tensão e a taxa de cisalhamento tomadas em uma região onde τ seja suficientemente menor que τ_0 – assegurando assim que $\dot{\gamma}$ esteja dentro da faixa de alta viscosidade; a tensão limite de escoamento fica evidente na Fig. 2.4 com a queda abrupta de viscosidade que ocorre em τ_0 . O índice n é a inclinação da região *power-law* no gráfico log-log de $\eta \times \dot{\gamma}$. O ponto de interseção da região *power-law* extrapolada com a linha vertical onde $\dot{\gamma} = 1 \text{ s}^{-1}$ ocorre em $\tau = K$. $\dot{\gamma}_0$ é a taxa de cisalhamento no fim da região que apresenta viscosidade finita na curva SMD, dada pela razão entre η_0 e τ_0 . $\dot{\gamma}_1$ é a taxa de cisalhamento no início da região *power-law*, dada por $(\tau_0/K)^{1/n}$. Uma importante característica deste modelo é que a função viscosidade tende a um valor finito (η_0) quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ [Souza Mendes e Dutra, 2004], em contraste com a função modificada de Papanastasiou, que prevê uma viscosidade infinita quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ – como é mostrado na Fig. 2.5.

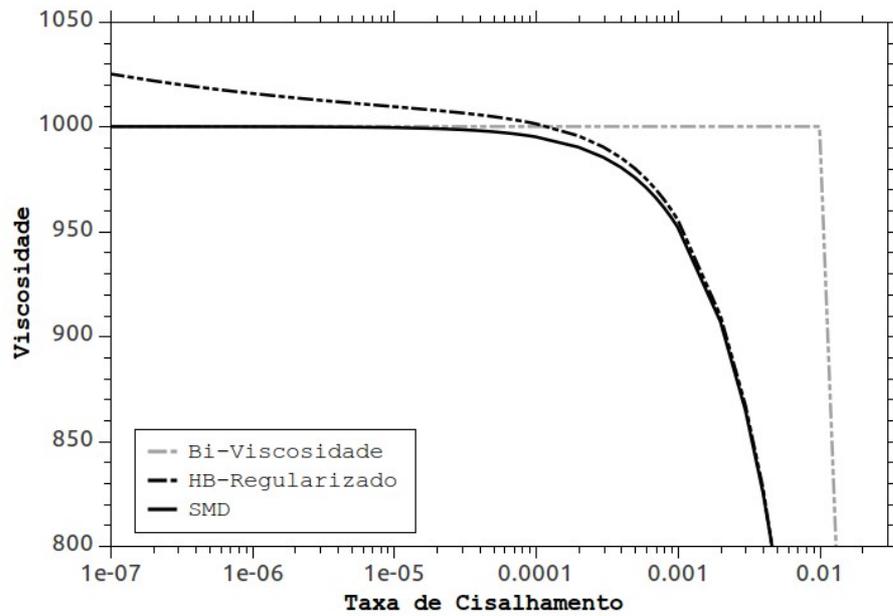
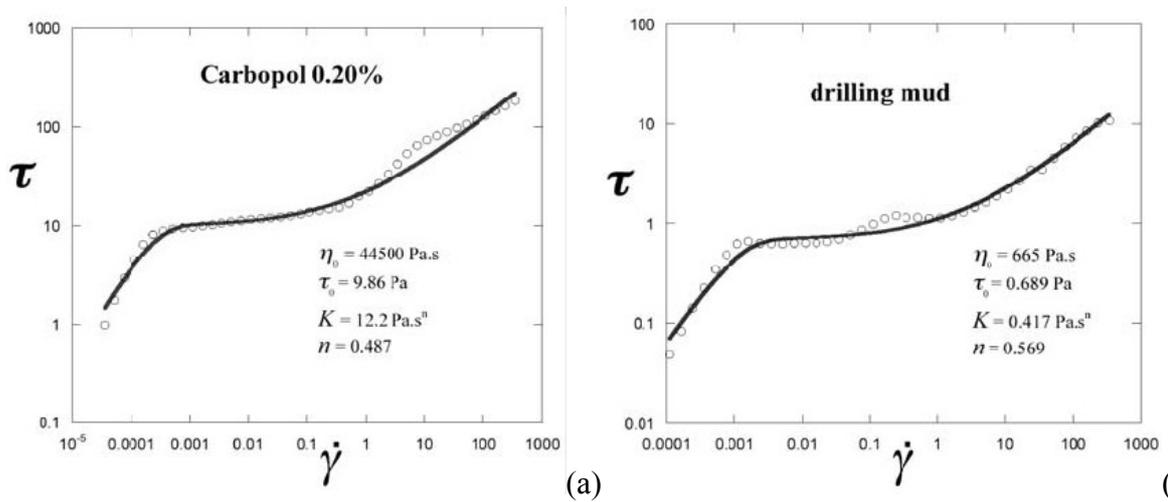


Figura 2.5 – Detalhe das curvas da viscosidade *versus* taxa de cisalhamento para os modelos de Bi-Viscosidade, Herschel-Bulkley regularizado e SMD.

A Fig. 2.6 mostra algumas curvas de escoamento de materiais viscoplásticos reais descritos pelo modelo SMD – observa-se o mesmo comportamento qualitativo para todos os casos.



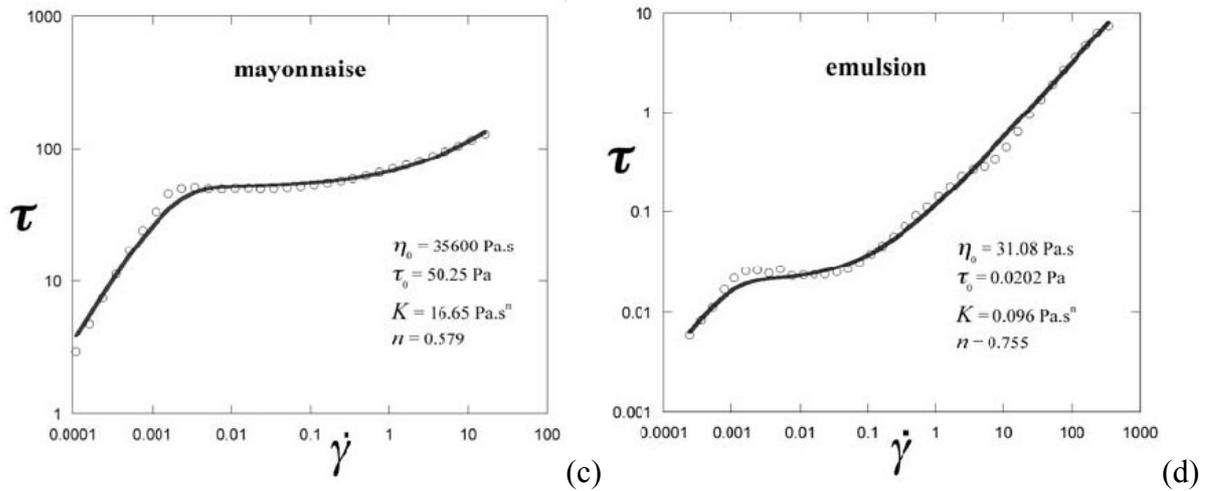


Figura 2.6 – Curvas de escoamento de materiais reais: (a) solução de água e Carbopol a 0.20%; (b) lama de perfuração; (c) maionese comercial; (d) emulsão de água e óleo. [Souza Mendes e Dutra, 2004].

2.5 Modelagem da viscoelasticidade

Um dos modelos de viscoelasticidade mais simples é o modelo de Maxwell convectado superior (também referido na literatura como *Upper Convected Maxwell model* ou modelo UCM), dado por

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (2.29)$$

onde θ_1 e μ são o tempo de relaxação e a viscosidade do fluido, respectivamente (Huilgol e Phan-Thien, 1997). O tempo de relaxação é definido como a razão entre a viscosidade e o módulo de cisalhamento do material, G . $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ é a derivada convectada superior, definida como

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} \right) - (\nabla \mathbf{u})^T \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} (\nabla \mathbf{u}) \quad (2.30)$$

Fazendo uma analogia com os sistemas mecânicos, o modelo convectado superior de Maxwell é equivalente (unidimensionalmente) a um sistema com um amortecedor, que representa um fluido viscoso newtoniano, e uma mola, que representa um sólido de Hooke conectados em série, como mostrado na Fig. 2.7. Nesta figura, G representa o módulo de cisalhamento do material, μ a viscosidade (que descreve a resposta puramente viscosa do

material); γ_e , γ_v e γ representam, respectivamente, a deformação elástica, viscosa e total do material quando submetido a uma tensão de cisalhamento τ . A relação entre a viscosidade e o módulo de cisalhamento G é dada pelo parâmetro de relaxação θ_l .

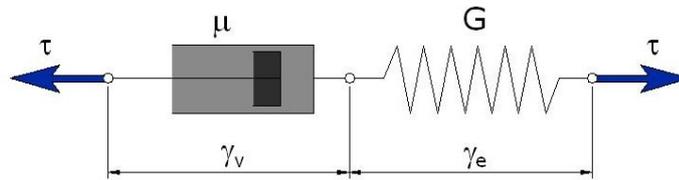


Figura 2.7 – Analogia mecânica unidimensional do modelo convectado superior de Maxwell.

O modelo de Oldroyd-B é definido na literatura como a combinação de um modelo convectado superior de Maxwell em paralelo com um modelo newtoniano, dado por

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu_l (\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \quad (2.31)$$

onde θ_2 é o tempo de retardamento do fluido, maior ou igual a 0 e menor que o tempo de relaxação θ_l . $\overset{\nabla}{\mathbf{D}}$ é a derivada convectada superior do tensor taxa de deformação, definida como

$$\overset{\nabla}{\mathbf{D}} = \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{D})\mathbf{u} \right) - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{D} - \mathbf{D}(\nabla \mathbf{u}) \quad (2.32)$$

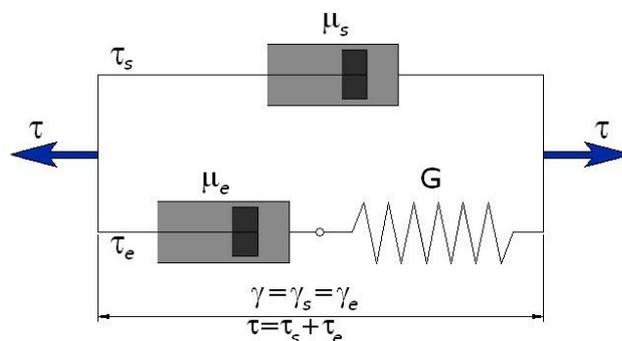


Figura 2.8 – Analogia mecânica unidimensional do modelo de Oldroyd-B.

A analogia mecânica unidimensional para o modelo de Oldroyd-B é equivalente a um sistema com um amortecedor e uma mola, conectados em série, e este conjunto conectado em

paralelo a um segundo amortecedor, como mostrado na Fig. 2.8, representando uma solução onde um polímero viscoelástico é diluído em um solvente newtoniano.

A viscosidade total μ_t é dada pela soma da viscosidade do solvente newtoniano μ_s com a viscosidade do polímero elástico μ_p . Além disso, as relações para θ_1 e θ_2 são dadas como

$$\theta_1 = \frac{\mu_p}{G} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_p} \theta_1 \quad (2.33)$$

O tensor extra de tensão $\boldsymbol{\tau}$ pode ser expresso como a soma da contribuição do solvente newtoniano (tal que $\boldsymbol{\tau}_s = 2\mu_s \mathbf{D}(\mathbf{u})$) e da parcela viscoelástica $\boldsymbol{\tau}_p$ ($\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_p$). $\boldsymbol{\tau}_p$ satisfaz a equação constitutiva convectada superior de Maxwell (Bodnar e Sequeira, 2010),

$$\boldsymbol{\tau}_p + \theta_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p = 2\mu_p \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (2.34)$$

2.6 Modelagem da elasto-viscoplasticidade – Modelo de Souza Mendes, 2007

As equações dos modelos UCM e Oldroyd-B para fluidos viscoelásticos apresentados nas Eq. (2.29) e (2.31) possuem o tempo de relaxação, o tempo de retardamento (Oldroyd-B apenas) e a viscosidade constantes – respectivamente θ_1 , θ_2 e μ . Alguns modelos propostos na literatura consideram a inclusão de termos constitutivos que são funções de invariantes tensoriais. Um exemplo é o modelo de White-Metzner [Bird *et al.*, 1987] que emprega uma viscosidade não newtoniana dependente da taxa de cisalhamento para representar o comportamento de fluidos viscoelásticos com pseudoplasticidade e dilatância.

A equação constitutiva proposta por de Souza Mendes, 2007 e Nassar *et al.*, 2011, substitui os parâmetros constantes do modelo de Oldroyd-B por funções da taxa de cisalhamento: a viscosidade é dada pelo modelo viscoplástico SMD (Eq. (2.28)) considerando a adição de uma viscosidade para altas taxas de cisalhamento, η_∞ ,

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_0} \dot{\gamma}\right)\right) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1}\right) + \eta_\infty \quad (2.35)$$

e os tempos de relaxação e retardamento são dados pelas seguintes funções,

$$\theta_1 = (\theta_{01} - \theta_{\infty 1}) e^{-(\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)} + \theta_{\infty 1} \quad (2.36)$$

$$\theta_2 = (\theta_{02} - \theta_{\infty 2}) e^{-(\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)} + \theta_{\infty 2} \quad (2.37)$$

onde θ_{01} e $\theta_{\infty 1}$ são os tempos de relaxação abaixo e acima do limite de escoamento, respectivamente; a mesma definição é feita para os tempos de retardamento θ_{02} e $\theta_{\infty 2}$. Assim, de acordo com as Eqs. (2.36)-(2.37), quando a intensidade da taxa de cisalhamento tende a zero, $\eta(\dot{\gamma}) \rightarrow \eta_0$, $\theta_1(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{01}$ e $\theta_2(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{02}$, e o modelo apresentado se aproxima do modelo clássico de Oldroyd-B. Para valores de $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0$, o material escoava como um fluido pseudoplástico, $\eta(\dot{\gamma}) \rightarrow (\tau_0 / \dot{\gamma}) + K \dot{\gamma}^{n-1}$; para valores elevados da taxa de cisalhamento, o fluido escoava novamente conforme o modelo de Oldroyd-B, onde $\eta(\dot{\gamma}) \rightarrow \eta_\infty$, $\theta_1(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{\infty 1}$ e $\theta_2(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{\infty 2}$, apresentando um nível baixo de elasticidade e viscosidade constante.

2.7 Modelagem da tixotropia – Modelo de Souza Mendes, 2009

De Souza Mendes, 2009, apresenta uma nova abordagem para a modelagem do comportamento mecânico de materiais viscoplásticos tixotrópicos. Uma das propostas é representar a microestrutura do material apenas por uma variável escalar λ que varia entre 0 e 1, onde 0 representa o estado totalmente desestruturado e 1 o estado totalmente estruturado. O autor propõe uma equação diferencial para a tensão de cisalhamento baseada na analogia mecânica unidimensional ilustrada nas Fig. 2.6 e 2.9 – modelo de Maxwell. O módulo de cisalhamento da microestrutura (G) e a viscosidade estrutural (η_v) – função que descreve a resposta puramente viscosa do material – são agora funções do parâmetro de estruturação λ . Assim, conclui-se que um valor muito grande de η_v combinado com um valor finito de G implica em um comportamento essencialmente elástico; inversamente, um valor grande de G combinado com um valor finito de η_v implica em um comportamento essencialmente viscoso. Alternativamente, pode-se considerar um tempo de relaxação dependente da microestrutura (η_v/G) que, quando grande, implica em efeitos elásticos consideráveis.

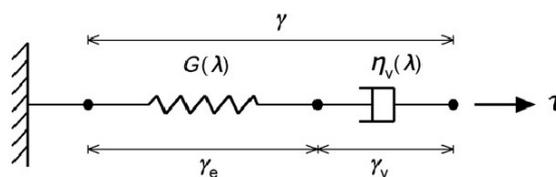


Figura 2.9 – Analogia mecânica do comportamento do material [de Souza Mendes, 2009].

Como já demonstrado anteriormente, da Fig. 2.9 pode-se observar que

$$\gamma_e + \gamma_v = \gamma \rightarrow \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_v = \dot{\gamma} \quad (2.38)$$

onde o ponto nas variáveis representa diferenciação com relação ao tempo.

Da mesma maneira, pode-se escrever as seguintes expressões para a tensão cisalhante

$$\tau = \eta(\dot{\gamma}, t) \dot{\gamma} \quad (2.39)$$

$$\tau = \eta_v \dot{\gamma}_v \quad (2.40)$$

$$\tau = G(\gamma_e - \gamma_{e,n}) \quad (2.41)$$

onde $\eta(\dot{\gamma}, t)$ é a função viscosidade, γ_e e $\gamma_{e,n}$ são deformações medidas em um referencial arbitrário fixo na microestrutura. γ_e é a deformação elástica do fluido correspondente à configuração corrente e $\gamma_{e,n}$ é a deformação correspondente a uma configuração natural ou neutra, isto é, a configuração assumida quando $\tau=0$. A configuração neutra é uma característica da microestrutura, e, portanto, é esperada que mude apenas se a microestrutura for modificada. Consequentemente, $\gamma_{e,n}$ é função unicamente do parâmetro de estruturação λ . Derivando a Eq. (2.41) em relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{\tau} = \dot{G}(\gamma_e - \gamma_{e,n}) + G(\dot{\gamma}_e - \dot{\gamma}_{e,n}) \quad (2.42)$$

De Souza Mendes, 2009, considera que as mudanças em γ_e são apenas devido à mudanças na tensão, $\dot{\gamma}_e = 0 \Leftrightarrow \dot{\tau} = 0$, enquanto mudanças em $\gamma_{e,n}$ são devidas apenas às mudanças da microestrutura, $\dot{\gamma}_{e,n} = 0 \Leftrightarrow \dot{G} = 0$; assim, a Eq. (2.42) pode ser decomposta em duas expressões independentes:

$$0 = \dot{G}(\gamma_e - \gamma_{e,n}) - G \dot{\gamma}_{e,n} \quad \text{ou} \quad \dot{\gamma}_{e,n} = \frac{\dot{G}}{G}(\gamma_e - \gamma_{e,n}) \quad (2.43)$$

e

$$\dot{\tau} = G \dot{\gamma}_e \quad (2.44)$$

As considerações acima são responsáveis pelo comportamento desejado do modelo. Por exemplo, quando G aumenta devido à quebra da microestrutura para uma tensão constante, a deformação elástica γ_e não se modifica, mas a diferença $(\gamma_e - \gamma_{e,n})$ diminui na mesma proporção, mantendo-se assim a tensão constante.

A equação evolutiva para τ é obtida multiplicando a Eq (2.38) por η_v , acoplando a ela as Eqs. (2.39) e (2.44):

$$\tau + \frac{\eta_v(\lambda)}{G(\lambda)} \dot{\tau} = \eta_v(\lambda) \dot{\gamma} \quad (2.45)$$

É interessante observar que esta equação tem o mesmo formato da equação constitutiva para viscoelasticidade UCM (Eq. (2.29)), embora G e η_v não são constantes.

A viscosidade $\eta(\dot{\gamma}, t)$ pode ser expressa como o produto de duas funções:

$$\eta(\dot{\gamma}, t) = E(\dot{\gamma}_e(t)) \eta_v(\lambda(\dot{\gamma}, t)) \quad (2.46)$$

onde a função elástica E considera a resposta elástica transiente. Obtém-se que

$$E = 1 - \frac{\dot{\gamma}_e}{\dot{\gamma}} \quad (2.47)$$

uma vez que $\dot{\gamma}_v/\dot{\gamma} = 1 - \dot{\gamma}_e/\dot{\gamma}$ e $\dot{\gamma}_v/\dot{\gamma} = \eta_v \dot{\gamma}_v/\eta_v \dot{\gamma} = \tau/\eta_v \dot{\gamma} = \eta/\eta_v = E$. Assim, a função viscosidade pode ser escrita como

$$\eta(\dot{\gamma}, t) = \left(1 - \frac{\dot{\gamma}_e}{\dot{\gamma}}\right) \eta_v(\lambda(\dot{\gamma}, t)) \quad (2.48)$$

De acordo com essa equação, os efeitos elásticos surgem apenas quando $\dot{\gamma}_e \neq 0$, ou seja, quando ocorrem modificações na tensão.

Uma versão da Eq. (2.45) para escoamentos arbitrários pode ser obtida substituindo a tensão de cisalhamento τ pelo tensor de tensão extra, a intensidade da taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ pelo tensor taxa de deformação \mathbf{D} e a derivada em relação ao tempo pela derivada temporal convectiva superior,

$$\boldsymbol{\tau} + \frac{\eta_v(\lambda)}{G(\lambda)} \nabla \boldsymbol{\tau} = 2\eta_v(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (2.49)$$

Uma função fisicamente razoável para $G(\lambda)$ deve ter as seguintes características: deve ser pequena quando o material está completamente estruturado ($\lambda=1$) e aumentar monotonicamente quando λ é diminuído – permitindo que a resposta elástica do material decresça à medida que a estrutura do material é destruída. No limite de uma estrutura completamente destruída ($\lambda=0$), o valor de $G(\lambda)$ deve tender à infinito para suprimir completamente a resposta elástica, assegurando um comportamento puramente viscoso. Uma possível escolha de $G(\lambda)$ com essas características é

$$G = \frac{G_0}{\lambda^{m_{evp}}} \quad (2.50)$$

onde G_0 é o módulo de cisalhamento de um material completamente estruturado e m_{evp} é uma constante positiva adimensional.

Como discutido, quando $\dot{\gamma}_e = 0$, segue que $E=1$, reduzindo a função viscosidade da Eq. (2.48) a $\eta(\dot{\gamma}, t) = \eta_v(\lambda(\dot{\gamma}, t))$. Em particular, para escoamentos em regime permanente,

$$\eta_{ss}(\dot{\gamma}) = \eta_v(\lambda_{ss}(\dot{\gamma})) \quad (2.51)$$

onde η_{ss} e λ_{ss} são a função viscosidade e o parâmetro de estruturação, respectivamente, para regime permanente. Portanto, a viscosidade para regime permanente carrega informações sobre a dependência de η e η_v em relação ao parâmetro de estruturação. Por exemplo, verifica-se que ambas η_{ss} e η_v variam de η_∞ até η_0 , onde η_∞ é a viscosidade do material completamente desestruturado ($\lambda=0$) e η_0 é a viscosidade do material completamente estruturado ($\lambda=1$). Para a maioria dos materiais viscoplásticos, $\eta_\infty \ll \eta_0$. Assim, a função $\eta_v(\lambda)$ deve mapear o intervalo $[0, 1]$ na escala entre $[\eta_\infty, \eta_0]$. Essas considerações sugerem uma função $\eta_v(\lambda)$ como

$$\eta_v(\lambda) = \left(\frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)^\lambda \eta_\infty \quad (2.52)$$

Esta equação pode ser resolvida para λ para obter

$$\lambda(\dot{\gamma}, t) = \left(\frac{\ln \eta_v(\dot{\gamma}, t) - \ln \eta_\infty}{\ln \eta_0 - \ln \eta_\infty} \right) \quad (2.53)$$

Em particular, a Eq. (2.53) fornece a seguinte equação para o parâmetro de estruturação em regime permanente λ_{ss}

$$\lambda_{ss}(\dot{\gamma}) = \left(\frac{\ln \eta_{ss}(\dot{\gamma}) - \ln \eta_\infty}{\ln \eta_0 - \ln \eta_\infty} \right) \quad (2.54)$$

e deste modo, uma vez que a curva de escoamento do material pode ser determinada experimentalmente, o parâmetro de estruturação em regime permanente pode ser determinado pela equação acima.

Assumindo que o parâmetro de estruturação λ obedece a seguinte equação evolutiva

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} \left((1-\lambda)^a - f(\tau)\lambda^b \right) \quad (2.55)$$

onde t_{eq} é o tempo característico de mudança de λ , a e b são constantes positivas adimensionais. Nesta equação, o primeiro termo do lado direito da equação é o termo de estruturação do fluido, enquanto o segundo é o termo de colapso da microestrutura.

É interessante notar que, na literatura, a função f é sempre dependente da taxa de cisalhamento, tal que é zero quando $\dot{\gamma}=0$ e cresce monotonicamente quando $\dot{\gamma}$ é aumentado. Entretanto, é mais adequado que o termo que considera o colapso da microestrutura seja uma função da tensão, tal que seja zero quando $\tau=0$ e cresça monotonicamente com o aumento da intensidade da tensão. Esta consideração é baseada no fato do colapso da microestrutura ocorrer devido ao nível de tensões, e não devido à taxa de cisalhamento. Por exemplo, se um material completamente estruturado, inicialmente em repouso, é submetido à uma taxa de cisalhamento constante, a tensão de cisalhamento, inicialmente nula, irá aumentar linearmente com o tempo. É razoável supor que a taxa de colapso é pequena nos instantes iniciais, quando a microestrutura é aproximadamente indeformada e sob pequenas tensões; a partir de um certo tempo decorrido e do aumento do nível de tensões, a taxa de colapso aumenta. Entretanto, se é assumida uma dependência de f da taxa de cisalhamento, uma resposta não-física é obtida. Nesta situação, f não é modificado

pelo tempo. Como consequência, a taxa de colapso, $\lambda^b f$, é máxima no início do escoamento (quando a tensão é zero), e decresce quando a microestrutura colapsa e λ decresce.

Para escoamentos permanentes ($d\lambda/dt = 0$), a função $f(\tau)$ se reduz a

$$f(\tau_{ss}) = f(\eta_v(\lambda_{ss}(\dot{\gamma}))\dot{\gamma}) \frac{(1-\lambda_{ss}(\dot{\gamma}))^a}{\lambda_{ss}(\dot{\gamma})^b} \quad (2.56)$$

Tendo em vista a discussão acima, a seguinte forma para $f(\lambda)$ tem as seguintes propriedades

$$f(\tau) = \frac{(1-\lambda_{ss}(\dot{\gamma}))^a}{\lambda_{ss}(\dot{\gamma})^b} \left(\frac{\tau}{\eta_v(\lambda_{ss}(\dot{\gamma}))\dot{\gamma}} \right)^c \quad (2.57)$$

onde c é uma constante positiva adimensional. Pode-se perceber que, para escoamentos em regime permanente, a Eq. (2.57) se reduz a Eq. (2.56). Assim, o modelo utiliza informações experimentais para regime permanente como entrada para a equação cinética, uma vez que a função $\lambda_{ss}(\dot{\gamma})$ utilizada na equação cinética é determinada a partir da observação do comportamento do material (Eq. (2.54)).

Combinando as Eqs. (2.55) e (2.57):

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} \left((1-\lambda)^a - (1-\lambda_{ss})^a \left(\frac{\lambda}{\lambda_{ss}} \right)^b \left(\frac{\tau}{\eta_v(\lambda_{ss})\dot{\gamma}} \right)^c \right) \quad (2.58)$$

A seguinte função viscosidade η_{ss} é utilizada, uma vez que possui boa capacidade de representar dados experimentais,

$$\eta_{ss}(\dot{\gamma}) = \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_0} \dot{\gamma}\right) \right) \left(\frac{\tau_0 - \tau_{0d}}{\dot{\gamma}} \exp\left(-\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{0d}}\right) + \frac{\tau_{0d}}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right) + \eta_\infty \quad (2.59)$$

onde τ_0 e τ_{0d} são as tensões limite de escoamento estática e dinâmica, respectivamente; $\dot{\gamma}_{0d}$ é uma taxa de cisalhamento que marca a transição da tensão de τ_0 para τ_{0d} , K o índice de consistência e n o índice *power-law*.

A Eq. (2.59) é uma versão modificada da Eq. (2.28) para materiais viscoplásticos e

está representada na Fig. 2.10, onde pode-se observar, além de $\dot{\gamma}_{0d}$, outras três importantes transições ($\dot{\gamma}_0$, $\dot{\gamma}_1$ e $\dot{\gamma}_2$) expressas como

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_0}{\eta_0}, \quad \dot{\gamma}_1 = \left(\frac{\tau_{0d}}{K} \right)^{1/n}, \quad \dot{\gamma}_2 = \left(\frac{\eta_\infty}{K} \right)^{1/n-1} \quad (2.60)$$

onde $\dot{\gamma}_0$ é a taxa de cisalhamento máxima que o fluido admite mantendo a microestrutura inalterada, $\dot{\gamma}_1$ corresponde ao início da região *power-law*; a quarta transição encontra-se em uma região de altas taxas de deformação, onde a estrutura do material está completamente destruída e não mais escoou como um fluido *power-law*, mas como um fluido newtoniano de viscosidade igual a η_∞ .

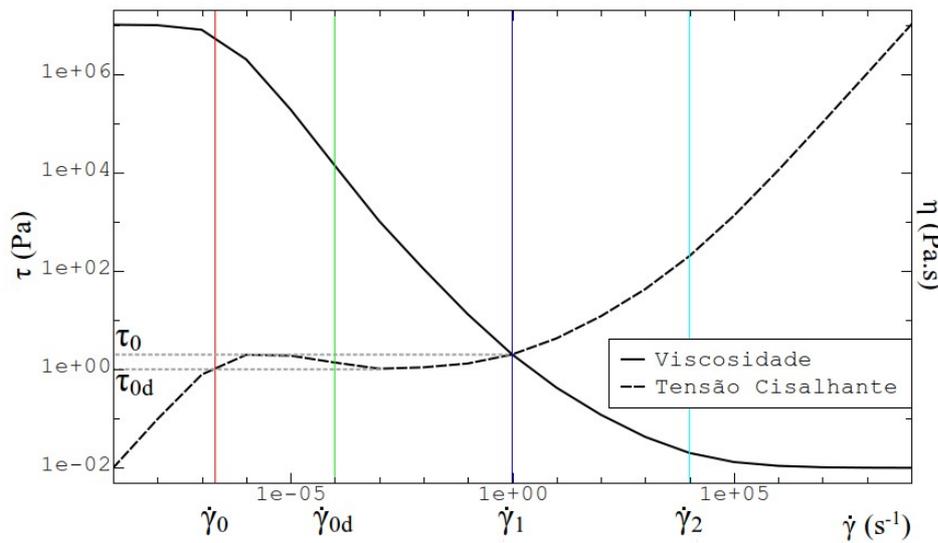


Figura 2.10 – Curvas de viscosidade e tensão cisalhante versus taxa de cisalhamento para $\tau_0=2$ Pa, $\tau_{0d}=1$ Pa, $\eta_0=10^7$ Pa.s, $\eta_\infty=0.01$ Pa.s, $K=1$ Pa.sⁿ, $n=0.5$ e $\dot{\gamma}_{0d}=10^{-4}$ s⁻¹.

2.8 Modelagem da elasto-viscoplasticidade – Modelo proposto nesta Tese

O modelo proposto nesta Tese é baseado na função viscosidade da Eq. (2.59) combinada com o modelo de Oldroyd-B (Eq. (2.31)). η_0 é tomada como a viscosidade do material completamente estruturado, η_∞ a viscosidade do material completamente desestruturado; os demais parâmetros são definidos como na seção anterior. O tempo de relaxação é definido como a relação entre a resposta puramente viscosa dada pela Eq. (2.59) e o módulo de cisalhamento da microestrutura, função do parâmetro de estruturação para

regime permanente, λ_{ss} ,

$$\theta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_{ss}(\dot{\gamma})}{G(\lambda_{ss}(\dot{\gamma}))} \quad (2.61)$$

A expressão empregada para calcular o módulo de cisalhamento da microestrutura leva em consideração o parâmetro de estruturação para regime permanente λ_{ss} , o qual mede o nível de estruturação do material e também é uma função da taxa de cisalhamento. O valor de $G(\lambda_{ss}(\dot{\gamma}))$ deve ser pequeno quando o fluido está totalmente estruturado ($\lambda_{ss}=1$) e, no limite onde a estrutura do fluido está completamente destruída ($\lambda_{ss}=0$), deve ser infinito para suprimir o termo elástico da Eq. (2.31) – descrevendo um comportamento puramente viscoso. Deste modo, a expressão empregada para o módulo de cisalhamento da microestrutura é

$$G = \frac{G_0}{\lambda_{ss}^{m_{evp}}} \quad (2.62)$$

onde G_0 é o módulo de cisalhamento do material completamente estruturado, m_{evp} é uma constante positiva adimensional.

Em resumo, as Eq. (2.54), (2.59), (2.61) e (2.62), juntamente com a Eq. (2.63) – que é uma modificação do modelo de Oldroyd-B apresentado na Eq. (2.31) – compõem o modelo de elasto-viscoplasticidade proposto nesta Tese. Estas equações são reunidas a seguir:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2(\eta_{ss}(\dot{\gamma}) + \eta_{\infty}) \left(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \frac{\eta_{\infty}}{(\eta_{ss}(\dot{\gamma}) + \eta_{\infty})} \theta(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) \right) \quad (2.63)$$

$$\lambda_{ss}(\dot{\gamma}) = \left(\frac{\ln \eta_{ss}(\dot{\gamma}) - \ln \eta_{\infty}}{\ln \eta_0 - \ln \eta_{\infty}} \right) \quad (2.54)$$

$$\eta_{ss}(\dot{\gamma}) = \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_0} \dot{\gamma}\right) \right) \left(\frac{\tau_0 - \tau_{0d}}{\dot{\gamma}} \exp\left(-\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{0d}}\right) + \frac{\tau_{0d}}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right) + \eta_{\infty} \quad (2.59)$$

$$\theta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_{ss}(\dot{\gamma})}{G(\lambda_{ss}(\dot{\gamma}))} \quad (2.61)$$

$$G = \frac{G_0}{\lambda_{ss}^{m_{evp}}} \quad (2.62)$$

Segundo apontado por de Souza Mendes, 2009, além dos parâmetros da curva de

escoamento do fluido ($\eta_0, \eta_\infty, \tau_0, \tau_{0d}, \dot{\gamma}_{0d}, K$ e n) existem dois parâmetros para a descrição do comportamento elástico, G_0 e m_{evp} . $\eta_\infty, \tau_{0d}, K$ e n podem ser determinados através de um ajuste de curvas pelo método dos mínimos-quadrados. Os demais parâmetros que aparecem na função viscosidade (η_0, τ_0 e $\dot{\gamma}_{0d}$) normalmente não são facilmente determinados pelo mesmo procedimento, uma vez que a sua medição exige dados obtidos a taxas de cisalhamento relativamente baixas, com grande dispêndio de tempo para a obtenção de regime permanente. Entretanto, estes parâmetros – além de G_0 e m_{evp} – podem ser obtidos através do ajuste de dados relativos a escoamentos transientes.

3. MODELAGEM DE ELEMENTOS FINITOS

3.1 Definições preliminares

Nas aplicações de engenharia, muitas vezes é necessário recorrer a métodos numéricos para obter soluções quantitativas para problemas não-lineares na mecânica do contínuo. No entanto, independentemente das hipóteses iniciais e dos métodos utilizados para formular o problema, quando do emprego de métodos numéricos na avaliação dos resultados, o contínuo é aproximado por um modelo discreto no processo de solução. Esta observação sugere uma alternativa lógica para a abordagem clássica, ou seja, representar o meio contínuo por um modelo discreto desde o início. Uma dessas abordagens é referida como o método dos elementos finitos. A capacidade de representar domínios com geometrias irregulares através de um conjunto de elementos finitos faz deste método uma ferramenta valiosa para a solução de problemas de contorno, de valor inicial e de autovalores. As funções de aproximação são construídas utilizando idéias da teoria de interpolação, sendo assim também chamadas de funções de interpolação. [Reddy e Gartling, 1994; Oden, 1972].

Os problemas aqui abordados são definidos em um domínio aberto limitado $\Omega \subset \mathcal{R}^{nsd}$, onde nsd é o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com uma fronteira Γ poligonal,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g \neq \emptyset \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

onde Γ_g é a porção da fronteira Γ na qual são impostas as condições de contorno essenciais (ou de Dirichlet) e Γ_h a porção na qual são prescritas as condições de contorno de naturais (ou de Neumann). Sobre o domínio fechado ($\bar{\Omega}$) realiza-se uma partição Ω^h de elementos finitos, de domínio K , na forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \cup_{k_i \in \Omega^h} K_i \\ K_i \cap K_j &= \emptyset, \quad \forall i \neq j; K_i, K_j \in \Omega^h \end{aligned} \quad (3.2)$$

A aproximação de elementos finitos U^h de uma variável genérica U pode ser representada pela expansão

$$U^h = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (3.3)$$

onde N_A é a função de base associada ao nó A da discretização Ω^h e d_A é o coeficiente a ser determinado. Para os espaços polinomiais, adota-se a seguinte notação,

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{se } K \text{ for um triângulo ou tetraedro} \\ Q_m(K), & \text{se } K \text{ for um quadrilátero ou hexaedro} \end{cases} \quad (3.4)$$

onde m é o grau de interpolação de elementos finitos dos tipos P_m e Q_m , assumindo valores maiores ou iguais a 0 [Ciarlet, 1978].

Sobre os espaços de funções tem-se, conforme Ciarlet, 1978,

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{q \mid \int_{\Omega} q^2 d\Omega < \infty\} \\ L_0^2(\Omega) &= \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0\} \\ H_1(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid \partial v / \partial x_i \in L^2(\Omega), i=1, nsd\} \\ H_1^0(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid \partial v / \partial x_i \in L^2(\Omega) \mid v=0 \text{ sobre } \Gamma_g, i=1, nsd\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $L^2(\Omega)$ define o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis sobre o domínio Ω , $L_0^2(\Omega)$ define o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre o domínio Ω , $H^1(\Omega)$ define o espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω e $H_0^1(\Omega)$ define o espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω que se anulam sobre o contorno Γ_g .

Por fim, $\|\cdot\|$ representa a norma das funções L^2 em Ω e $\|\cdot\|_{0,K}$ denota a norma de L^2 no domínio de cada elemento K .

3.2 Formulação Forte

A modelagem mecânica dos escoamentos tratados nesta Tese é obtida através das equações de conservação de massa (Eq. (2.5)) e de balanço de *momentum* (Eq. (2.15)) acopladas ao modelo de constitutivo de Oldroyd-B apresentado na Seção 2.8. As hipóteses de escoamento em regime laminar, permanente e isotérmico são empregadas. Para a montagem do problema de valor de contorno, foi utilizado o esquema EVSS de *split* de tensão [Chang *et*

al., 1979; Rajagopalan *et al.*, 1990; Matallah *et al.*, 1998]. Assumindo-se que o tensor extra de tensão pode ser decomposto na soma da contribuição viscosa e polimérica da tensão extra ($\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_p$), pode-se escrever a Eq. (2.15) como

$$\rho((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) = -\nabla p + \text{div}(\boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_s) + \rho \mathbf{g} \quad (3.6)$$

onde $\boldsymbol{\tau}_p$ é dado pela Eq. (2.34) e $\boldsymbol{\tau}_s = 2\mu_s \mathbf{D}(\mathbf{u})$, como já citado no Capítulo 2. Cabe observar que esta decomposição é numericamente vantajosa, pois dispensa a necessidade do cálculo da derivada convectada superior de \mathbf{D} (Eq. (2.32)) e reforça a elipsidade da equação de movimento pela adição de um termo viscoso de segunda ordem,

Assim, é montado o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned} \rho(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} &= -\nabla p + \text{div} \boldsymbol{\tau}_p + 2\eta_s(\dot{\gamma}) \text{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\tau}_p + \theta(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p &= 2\eta_p(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}) && \text{em } \Omega \\ \text{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\ (-p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde η_s , η_p e θ são funções da taxa de cisalhamento que podem ser substituídas pelas expressões encontradas no Capítulo 2 a fim de representar os modelos viscoplásticos, elásticos e elasto-viscoplásticos apresentados.

3.3 Adimensionalização cinemática

Uma versão adimensional cinemática do problema de valor de contorno pode ser obtida introduzindo-se L_c como um comprimento característico, u_c como uma velocidade característica, $\dot{\gamma}_c$ como uma taxa de cisalhamento característica e η_c uma viscosidade característica. Assim, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{L_c} \quad , \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{\dot{\gamma}_c L_c} \quad , \quad p^* = \frac{p}{\eta_c \dot{\gamma}_c} \quad , \quad \boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\eta_c \dot{\gamma}_c} \\ \dot{\gamma}^* &= \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \quad , \quad \eta_s^*(\dot{\gamma}^*) = \frac{\eta_s(\dot{\gamma})}{\eta_c} \quad , \quad \eta_p^*(\dot{\gamma}^*) = \frac{\eta_p(\dot{\gamma})}{\eta_c} \quad , \quad \theta^*(\dot{\gamma}^*) = \theta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_c \end{aligned} \quad (3.7)$$

Substituindo as Eq. (3.7) nas Eq. (3.6), tem-se:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{(\dot{\gamma}_c L_c)^2}{L_c} (\nabla^* \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* &= -\frac{\eta_c \dot{\gamma}_c}{L_c} \nabla^* p^* \\
&\quad + \frac{\eta_c \dot{\gamma}_c}{L_c} \operatorname{div}^* \boldsymbol{\tau}_p^* + 2 \eta_c \frac{\dot{\gamma}_c L_c}{L_c^2} \eta_s^*(\dot{\gamma}^*) \operatorname{div}^* \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) + \rho \mathbf{g} \quad \text{em } \Omega^* \\
\eta_c \dot{\gamma}_c \boldsymbol{\tau}_p^* + \frac{\theta^*(\dot{\gamma}^*)}{\dot{\gamma}_c} \frac{\eta_c \dot{\gamma}_c}{L_c} \dot{\gamma}_c L_c \bar{\boldsymbol{\tau}}_p^* &= 2 \eta_c \frac{\dot{\gamma}_c L_c}{L_c} \eta_p^*(\dot{\gamma}^*) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) \quad \text{em } \Omega^* \quad (3.8) \\
\frac{\dot{\gamma}_c L_c}{L_c} \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* &= 0 \quad \text{em } \Omega^* \\
(\dot{\gamma}_c L_c) \mathbf{u}^* &= (\dot{\gamma}_c L_c) \mathbf{u}_g^* \quad \text{sobre } \Gamma_g^* \\
\eta_c \dot{\gamma}_c (-p^* \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^*) \mathbf{n} &= \eta_c \dot{\gamma}_c \mathbf{t}_h^* \quad \text{sobre } \Gamma_h^*
\end{aligned}$$

Aplicando à Eq. (3.8) as definições dos números de Reynolds, Froude e Weissenberg dados respectivamente por

$$Re = \frac{\rho \dot{\gamma}_c L_c^2}{\eta_c}, \quad Fr = \dot{\gamma}_c \sqrt{\frac{L_c}{g}}, \quad Wi = \theta_1 \frac{u_c}{L_c} \quad (3.9)$$

a forma adimensional da Eq. (3.6) é dada como

$$\begin{aligned}
Re (\nabla^* \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* &= -\nabla^* p^* + \operatorname{div}^* \boldsymbol{\tau}_p^* + 2 \eta_s^*(\dot{\gamma}^*) \operatorname{div}^* \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) + Re Fr^{-2} \quad \text{em } \Omega \\
\boldsymbol{\tau}_p^* + \theta^*(\dot{\gamma}^*) \bar{\boldsymbol{\tau}}_p^* &= 2 \eta_p^*(\dot{\gamma}^*) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) \quad \text{em } \Omega \\
\operatorname{div}^* \mathbf{u}^* &= 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.10) \\
\mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_g^* \quad \text{sobre } \Gamma_g \\
(-p^* \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^*) \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h^* \quad \text{sobre } \Gamma_h
\end{aligned}$$

Cabe observar que para fluidos com tempo de relaxação constante, a definição clássica do número de Weissenberg (Wi) substitui o termo $\theta^*(\dot{\gamma}^*)$.

3.4 Adimensionalização reológica do modelo elasto-viscoplástico proposto

A versão adimensional reológica do problema de valor de contorno para o modelo elasto-viscoplástico proposto nesta Tese pode ser obtida, primeiramente, substituindo-se na Eq. (3.6) $\eta_s(\dot{\gamma})$ por η_∞ , $\eta_p(\dot{\gamma})$ pela Eq. (2.59) e $\theta(\dot{\gamma})$ pela Eq. (2.61). Introduzindo-se L_c como um comprimento característico, u_c como uma velocidade característica, $\dot{\gamma}_1$ como

uma taxa de cisalhamento característica e η_c uma viscosidade característica dada por $\eta_c = \tau_{0d} / \dot{\gamma}_1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{L_c} \quad , \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{\dot{\gamma}_1 L_c} \quad , \quad p^* = \frac{p}{\tau_{0d}} \quad , \quad \boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau_{0d}} \\ \dot{\gamma}^* &= \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} \quad , \quad \eta^*(\dot{\gamma}^*) = \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_c} \quad , \quad \eta_\infty^* = \frac{\eta_\infty}{\eta_c} \quad , \quad \theta^*(\dot{\gamma}^*) = \theta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substituindo as Eq. (3.11) nas Eq. (3.6), tem-se:

$$\begin{aligned} \rho \frac{(\dot{\gamma}_1 L_c)^2}{L_c} (\nabla^* \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* &= -\frac{\tau_{0d}}{L_c} \nabla^* p^* \\ &\quad + \frac{\tau_{0d}}{L_c} \operatorname{div}^* \boldsymbol{\tau}_p^* + 2\eta_\infty^* \frac{\tau_{0d}}{\dot{\gamma}_1} \frac{\dot{\gamma}_1 L_c}{L_c^2} \operatorname{div}^* \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) + \rho \mathbf{g} \quad \text{em } \Omega^* \\ \tau_{0d} \boldsymbol{\tau}_p^* + \frac{\theta^*(\dot{\gamma}^*)}{\dot{\gamma}_1} \frac{\tau_{0d}}{L_c} \dot{\gamma}_1 L_c \nabla^* \boldsymbol{\tau}_p^* &= 2 \frac{\tau_{0d}}{\dot{\gamma}_1} \frac{(\dot{\gamma}_1 L_c)}{L_c} \eta_{ss}^*(\dot{\gamma}^*) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) \quad \text{em } \Omega^* \\ \frac{\dot{\gamma}_1 L_c}{L_c} \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* &= 0 \quad \text{em } \Omega^* \\ (\dot{\gamma}_1 L_c) \mathbf{u}^* &= (\dot{\gamma}_1 L_c) \mathbf{u}_g^* \quad \text{sobre } \Gamma_g^* \\ \tau_{0d} (-p^* \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^*) \mathbf{n} &= \tau_{0d} \mathbf{t}_h^* \quad \text{sobre } \Gamma_h^* \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aplicando à Eq. (3.12) as definições da massa específica adimensional (de Souza Mendes, 2007) e o número de Froude, dados, respectivamente, por

$$\rho^* = \frac{\rho \dot{\gamma}_1 L_c^2}{\eta_c} = \frac{\rho (\dot{\gamma}_1 L_c)^2}{\tau_{0d}} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho \tau_{0d}^{(2-n)/n} L_c^2}{K^{2/n}} \quad , \quad \operatorname{Fr} = \frac{u_c}{\sqrt{L_c g}} \quad (3.13)$$

a forma adimensional da Eq. (3.6) é dada por:

$$\begin{aligned} \rho^* (\nabla^* \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* &= -\nabla^* p^* + \operatorname{div}^* \boldsymbol{\tau}_p^* + 2\eta_\infty^* \operatorname{div}^* \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) + \rho^* U^{*2} \operatorname{Fr}^{-2} \quad \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\tau}_p^* + \theta^*(\dot{\gamma}^*) \nabla^* \boldsymbol{\tau}_p^* &= 2\eta_{ss}^*(\dot{\gamma}^*) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) \quad \text{em } \Omega \\ \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_g^* \quad \text{sobre } \Gamma_g \\ (-p^* \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^*) \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h^* \quad \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde a vazão adimensional U^* – também chamada de intensidade de escoamento – é oriunda

da condição de contorno de velocidade e é dada pela relação

$$U^* = \frac{u_c}{\dot{\gamma}_1 L_c} \quad (3.15)$$

onde u_c é uma velocidade característica, tomada nesta Tese como a velocidade média de entrada na geometria.

Pode-se estabelecer uma relação entre a vazão adimensional U^* e os números adimensionais de Bingham e de Herschel-Bulkley, largamente empregados na literatura e definidos respectivamente como

$$\text{Bn} = \frac{\tau_0}{K \dot{\gamma}_c} = \frac{\tau_0}{K \left(\frac{u_c}{L_c} \right)} \quad \text{e} \quad \text{HB} = \frac{\tau_0}{K \dot{\gamma}_c^n} = \frac{\tau_0}{K \left(\frac{u_c}{L_c} \right)^n} \quad (3.16)$$

substituindo u_c/L_c por $\dot{\gamma}_1 U^*$ (Eq. (3.15)) na Eq. (3.16) e considerando $\dot{\gamma}_1 = (\tau_{0d}/K)^{(1/n)}$,

$$\text{Bn} = \frac{\tau_0}{K (\dot{\gamma}_1 U^*)} = \frac{1}{U^*} \quad \text{e} \quad \text{HB} = \frac{\tau_0}{K (\dot{\gamma}_1 U^*)^n} = \frac{1}{U^{*n}} \quad (3.17)$$

Souza Mendes *et al.*, 2007b, introduzem uma propriedade reológica adimensional baseada na observação experimental do comportamento da função viscosidade SMD proposta em 2004. Aplicando o mesmo raciocínio para o modelo tratado nesta Tese, quando $\tau \approx \tau_{0d}$ há um salto abrupto de diversas ordens de grandeza entre as taxas de cisalhamento $\dot{\gamma}_0$ (taxa de cisalhamento máxima que o fluido admite mantendo a microestrutura inalterada) e $\dot{\gamma}_1$ (que corresponde ao início da região *power-law*). Define-se assim o número de salto adimensional, J , uma medida relativa do salto na taxa de cisalhamento que ocorre quando $\tau = \tau_0$, dado como:

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \frac{\eta_0 \dot{\gamma}_1}{\tau_0} - 1 \quad (3.18)$$

Pode-se relacionar os adimensionais utilizados para caracterizar os resultados obtidos nesta Tese com os encontrados na literatura clássica de viscoplasticidade. A fim de desacoplar os parâmetros reológicos dos parâmetros cinemáticos na quantificação dos efeitos de inércia

sobre os efeitos viscosos do escoamento, emprega-se uma modificação – Eq. (3.13) – do número de Reynolds proposto por de Souza Mendes, 2007.

A expressão para o número de Reynolds *power-law*, definida em Jay *et al.*, 2001, como

$$\text{Re}_{PL} = \frac{\rho u_c^{2-n} L_c^n}{K} \quad (3.19)$$

pode ser relacionada com a vazão adimensional e a massa específica adimensional pela expressão:

$$\text{Re}_{PL} = \rho^* U^{*(2-n)} = \frac{\rho \tau_{0d}^{(2-n)/n} L_c^2}{K^{2/n}} U^{*(2-n)} \quad (3.20)$$

A motivação principal para a utilização dos parâmetros adimensionais U^* e ρ^* é que para uma geometria fixa, ρ^* depende apenas das propriedades reológicas do fluido, enquanto Re_{PL} e o número de HB dependem simultaneamente das propriedades do fluido e do escoamento. Assim, não é possível separar os efeitos reológicos e cinemáticos do problema usando estes adimensionais. Pode-se imaginar um simples experimento para uma geometria fixa e um fluido viscoplástico fixo. Se a velocidade característica, isto é, a velocidade média na entrada da geometria for variada, Re_{PL} e o número de HB irão variar. Empregando os parâmetros adimensionais propostos, ρ^* permanece constante enquanto apenas U^* é modificado.

Para quantificar os efeitos elásticos nos escoamentos é empregado o tempo de relaxação adimensional para um material elasto-viscoplástico completamente estruturado, ou seja, tomando a Eq. (2.61) no limite em que a taxa de cisalhamento tende a zero,

$$\theta_0^* \equiv \theta^*(\dot{\gamma}^* \rightarrow 0) = \frac{\eta_0}{G_0} \dot{\gamma}_1 = \frac{\tau_0}{G_0} (J+1) \quad (3.21)$$

Este grupo adimensional, assim como o número de salto J , é função apenas das propriedades reológicas do material. Assim, os parâmetros empregados para caracterizar a reologia dos escoamentos desta Tese são a massa específica adimensional, ρ^* , o número de salto, J , o tempo de relaxação adimensional, θ_0^* e o índice *power-law*, n ; a cinemática do

escoamento é caracterizada exclusivamente pela vazão adimensional, U^* .

3.5 Formulação de Galerkin

Nesta seção será introduzida a aproximação de Galerkin do problema dado pela Eq. (3.6). Inicialmente, faz-se a construção dos espaços de dimensão finita V^h , V_g^h , P^h , e Σ^h para os campos de velocidade, \mathbf{u} , pressão, p , e a parcela polimérica da tensão extra, $\boldsymbol{\tau}_p$. A partir da discretização Ω^h do domínio Ω , tem-se:

$$\begin{aligned} V^h &\subset V && \text{(isto é, se } \mathbf{v}^h \in V^h \text{, então } \mathbf{v}^h \in V \text{)} \\ V_g^h &\subset V_g && \text{(isto é, se } \mathbf{v}^h \in V_g^h \text{, então } \mathbf{v}^h \in V_g \text{)} \\ P^h &\subset P && \text{(isto é, se } p^h \in P^h \text{, então } p^h \in P \text{)} \\ \Sigma^h &\subset \Sigma && \text{(isto é, se } \boldsymbol{\tau}_p^h \in \Sigma^h \text{, então } \boldsymbol{\tau}_p^h \in \Sigma \text{)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

O método de Galerkin, também chamado de Bubnov-Galerkin, se caracteriza pela escolha das funções teste e peso pertencentes ao mesmos sub-espacos de elementos finitos. Para toda aproximação de variável $\mathbf{u}^h \in V^h$, constrói-se uma aproximação da função teste, $\mathbf{w}^h \in V_g^h$, na forma:

$$\mathbf{w}^h = \mathbf{u}^h + \mathbf{g}^h \quad (3.23)$$

onde \mathbf{g}^h é uma função conhecida e satisfaz a condição de contorno essencial do problema,

$$\mathbf{g}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_g, \mathbf{x} \in \Gamma_g \quad (3.24)$$

com V_g^h e V^h são compostos pela mesma classe de funções à exceção da contribuição da função \mathbf{g}^h sobre a fronteira Γ_g . Assim, \mathbf{u}^h representa a parte incógnita de \mathbf{w}^h .

Os sub-espacos usuais na dinâmica dos fluidos empregados para a aproximação dos campos de velocidade (V^h), pressão (P^h) e tensão (Σ^h) são dados por [Ciarlet, 1978]

$$\begin{aligned} V^h &= \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in \Omega^h \} \\ V_g^h &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in \Omega^h, \mathbf{v} = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g \} \\ P^h &= \{ p \in C^0(\Omega) \cap L_2^0(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in \Omega^h \} \\ \Sigma^h &= \{ \mathbf{S} \in C^0(\Omega)^{N \times N} \cap L_2(\Omega)^{N \times N} \mid S_{ij} = S_{ji}, i, j = 1, N, \mathbf{S}|_K \in R_m(K)^{N \times N}, K \in \Omega^h \} \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde R_k , R_l e R_m denotam, respectivamente, polinômios de ordem k , l e m .

A forma fraca das Eq. (3.6) pode ser obtida integrando o produto interno da Eq. (3.6)₁ com uma variação do campo de velocidade $\mathbf{v} \in V$, da Eq. (3.6)₂ com uma variação de tensão $\mathbf{S} \in \Sigma$ e da Eq. (3.6)₃ com uma variação de pressão $q \in P$. A seguir, as equações são integradas por partes visando diminuir sua ordem de diferenciação. Através desta integração, as condições de contorno naturais passam a ser implícitas na formulação do problema, fazendo parte das equações variacionais de sua forma fraca.

A aproximação de Galerkin para o problema definido pelas Eqs. (2.59), (2.61)–(2.63) e (3.6) pode ser escrita como: *dadas as funções de força de corpo \mathbf{f} e as condições de contorno de Dirichlet e Neumann \mathbf{u}_g e \mathbf{t}_h , respectivamente, encontrar o conjunto $(\boldsymbol{\tau}_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) \in \Sigma^h \times \mathbf{V}_g^h \times P^h$ tal que:*

$$B_G(\boldsymbol{\tau}_p^h, \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = F_G(\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \quad \forall (\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \in \Sigma^h \times \mathbf{V}_g^h \times P^h \quad (3.26)$$

onde

$$\begin{aligned} B_G(\boldsymbol{\tau}_p^h, \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = & \int_{\Omega} \rho (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}_p^h \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega \\ & + 2\eta_s(\dot{\gamma}) \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega + \epsilon \int_{\Omega} p^h q^h d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}_p^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \theta(\dot{\gamma}) ([\nabla \boldsymbol{\tau}_p^h] \mathbf{u}^h - [\nabla \mathbf{u}^h] \boldsymbol{\tau}_p^h - \boldsymbol{\tau}_p^h [\nabla \mathbf{u}^h]^T) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega - 2\eta_p(\dot{\gamma}) \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \end{aligned} \quad (3.27)$$

com $\epsilon \ll 1$, e

$$F_G(\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \quad (3.28)$$

3.6 Método de Galerkin-Mínimos Quadrados

A formulação de Galerkin para o problema de definido pela Eq. (3.26) apresenta dificuldades devido ao caráter da formulação: os sub-espacos de tensão extra, velocidade e pressão devem ser compatibilizados, uma vez que os acoplamentos pressão-velocidade e velocidade-tensão extra geram oscilações espúrias (Fig. 3.3-3.8 e 4.20-4.21) e até mesmo o trancamento (*locking*) do campo de velocidades. Assim, combinações arbitrárias desses sub-espacos – algumas desejáveis do ponto de vista de implementação computacional – não são permitidas na aproximação da Eq. (3.26)-(3.28). A estabilidade de métodos de elementos

finitos para este problema foi estabelecida a partir da introdução da condição de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi, ou condição LBB [Oden e Carey, 1983; Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Esta condição, uma vez satisfeita, estabelece se uma dada combinação dos sub-espacos de tensão, velocidade e pressão irá gerar aproximações estáveis.

Uma das metodologias empregadas para superar as dificuldades acima descritas é a de Galerkin mínimos-quadrados ou Galerkin *least squares* – GLS. Este método, mantém a estrutura da formulação clássica de Galerkin adicionando termos que conferem a estabilidade desejada, sem, contudo, ser inconsistente. Como não necessita satisfazer a condição de compatibilidade de subespacos, elementos com interpolações de igual ordem para tensão, velocidade e pressão podem ser empregados.

A aproximação de Galerkin mínimos-quadrados para o problema definido pelas Eqs. (2.59), (2.61)–(2.63) e (3.6) pode ser escrita como: *dadas as funções de força de corpo \mathbf{f} e as condições de contorno de Dirichlet e Neumann \mathbf{u}_g e \mathbf{t}_h , respectivamente, encontrar o conjunto $(\boldsymbol{\tau}_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}_g^h \times P^h$ tal que:*

$$B(\boldsymbol{\tau}_p^h, \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = F(\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \quad \forall (\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}_g^h \times P^h \quad (3.29)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{\tau}_p^h, \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = & \int_{\Omega} \rho (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}_p^h \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega \\ & + 2\eta_s(\dot{\gamma}) \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega + \epsilon \int_{\Omega} p^h q^h d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}_p^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \theta(\dot{\gamma}) ([\nabla \boldsymbol{\tau}_p^h] \mathbf{u}^h - [\nabla \mathbf{u}^h] \boldsymbol{\tau}_p^h - \boldsymbol{\tau}_p^h [\nabla \mathbf{u}^h]^T) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega - 2\eta_p(\dot{\gamma}) \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}^h \delta(\operatorname{Re}_K) \operatorname{div} \mathbf{u}^h d\Omega \\ & + \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} (\rho (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h + \nabla p^h - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_p^h - 2\eta_s(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h)) \cdot \\ & \quad \cdot \alpha(\operatorname{Re}_K) (\rho (\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h + \nabla q^h - \operatorname{div} \mathbf{S}^h - 2\eta_s(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v}^h)) d\Omega \\ & + \beta \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}_p^h + \theta(\dot{\gamma}) ([\nabla \boldsymbol{\tau}_p^h] \mathbf{u}^h - [\nabla \mathbf{u}^h] \boldsymbol{\tau}_p^h - \boldsymbol{\tau}_p^h [\nabla \mathbf{u}^h]^T) - 2\eta_p(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h)) \cdot \\ & \quad \cdot (\mathbf{S}^h + \theta(\dot{\gamma}) ([\nabla \mathbf{S}^h] \mathbf{u}^h - [\nabla \mathbf{u}^h] \mathbf{S}^h - [\mathbf{S}^h] (\nabla \mathbf{u}^h)^T) - 2\eta_p(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{v}^h)) d\Omega \end{aligned} \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned} F(\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = & \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \\ & + \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{g} \cdot (\alpha(\operatorname{Re}_K) (\rho (\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h + \nabla q^h - \operatorname{div} \mathbf{S}^h - 2\eta_s(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v}^h))) d\Omega \end{aligned} \quad (3.31)$$

com $\varepsilon \ll 1$, β um valor arbitrário maior que zero [Behr *et al.*, 1993]; o número de Reynolds de malha Re_K e os parâmetros de estabilidade $\alpha(\text{Re}_K)$ e $\delta(\text{Re}_K)$ são definidos como em Franca e Frey, 1992, e Behr *et al.*, 1993,

$$\begin{aligned}
 \text{Re}_K &= \frac{\rho h_K |\mathbf{u}^h|_p m_k}{4 \eta_e(\dot{\gamma})} \\
 \alpha(\text{Re}_K) &= \frac{h_K}{2 |\mathbf{u}^h|_p} \xi(\text{Re}_K) \\
 \delta(\text{Re}_K) &= \lambda_d |\mathbf{u}^h|_p h_K \xi(\text{Re}_K) \\
 \xi(\text{Re}_K) &= \begin{cases} \text{Re}_K, & 0 < \text{Re}_K < 1 \\ 1, & \text{Re}_K > 1 \end{cases} \\
 |\mathbf{u}^h|_p &= \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N |u_i^h|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, \dots, N} |u_i^h|, & p = \infty \end{cases} \\
 m_k &= \min \{1/3, 2 C_k\} \\
 C_k \sum_{K \in \Omega^t} h_K^2 \|\text{div} \mathbf{S}^h\|_{0,K}^2 &\geq \|\mathbf{S}^h\|_K^2 \quad \forall \mathbf{S}^h \in \boldsymbol{\Sigma}^h
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde λ_d é um parâmetro positivo e h_K é o comprimento de malha do elemento.

Observações:

1. Fazendo α , β , δ iguais a zero na formulação GLS definida pelas Eqs. (3.29)-(3.31), recupera-se a aproximação clássica de Galerkin.
2. A expressão do número de Reynolds de malha encontrada em Johnson, 1987, foi modificada com a inclusão do parâmetro m_K na Eq. (3.32), de modo a considerar também o grau de interpolação empregado. Assim, as regiões difusivo-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $\text{Re}_K < 1$, enquanto as advectivo-dominadas por $\text{Re}_K > 1$, independente do elemento considerado [Franca e Frey, 1992].

Alguns testes numéricos realizados com a formulação de Galerkin (Eq. (3.26)-(3.28)) e com a formulação GLS (Eq. (3.29)-(3.32)) são apresentados a seguir. O escoamento simulado é de um fluido newtoniano no interior de uma cavidade forçada. Para isto, em ambas formulações fez-se $\eta_s(\dot{\gamma})=0$, $\theta(\dot{\gamma})=0$ e $\eta_p(\dot{\gamma})=\mu$. As condições de contorno empregadas são impermeabilidade e não-deslizamento nas paredes laterais e no fundo da cavidade (Fig. 3.1). Na tampa superior, é prescrita velocidade unitária na direção x_1 e velocidade nula na direção x_2 . A viscosidade μ foi tomada como 1 Pa.s. A escolha deste *benchmark* advém de sua

ampla utilização na validação de códigos numéricos (Botella e Peyret, 1998), embora a presença de singularidades nas duas quinas superiores torna difícil a avaliação da precisão dos resultados obtidos, principalmente na vizinhança destes pontos.

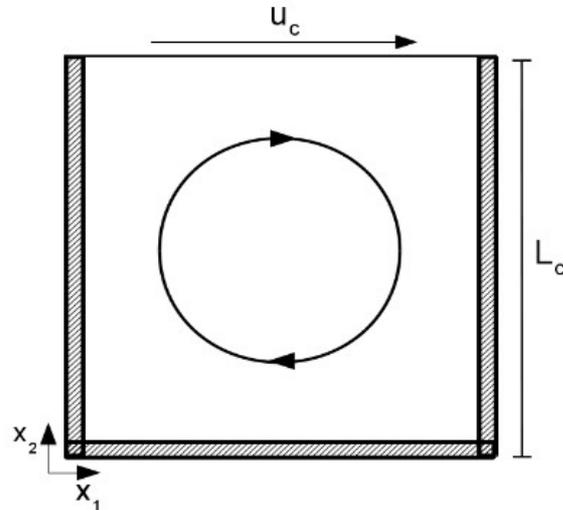
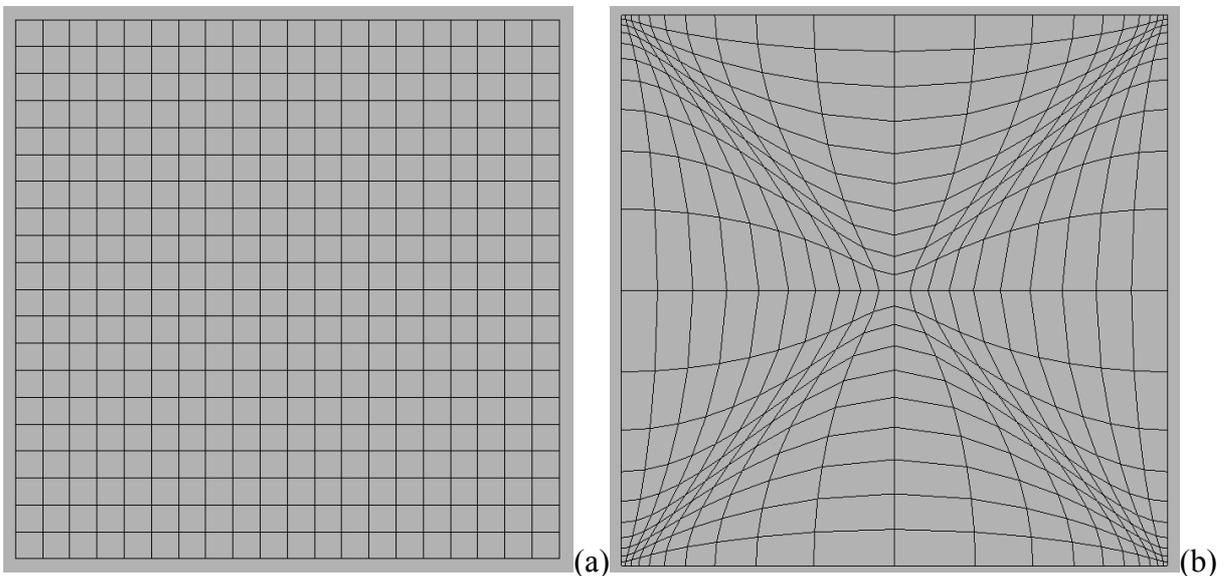


Figura 3.1 – Descrição do problema: escoamento em cavidade forçada.

A Fig. 3.2 apresenta as malhas que foram empregadas nas simulações para a validação do código numérico e comparação entre a formulação baseada no método clássico de Galerkin e a formulação de Galerkin mínimos-quadrados (GLS). A primeira malha (Fig. 3.2(a)) possui 20 elementos quadrangulares bilineares regulares Q1/Q1/Q1 [Hughes, 1987] nas direções x_1 e x_2 ; a segunda malha, 20 por 20 elementos distorcidos e a terceira malha, 50 por 50 elementos regulares.



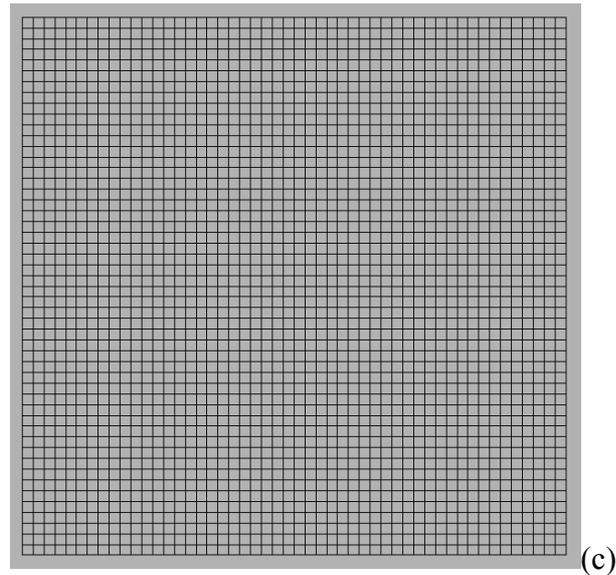


Figura 3.2 – Discretizações utilizadas nos testes numéricos: (a) 400 elementos regulares; (b) 400 elementos distorcidos; (c) 2500 elementos regulares.

As Fig. 3.3-3.8 apresentam os resultados obtidos através do método de Galerkin clássico (definido pelas Eq. (3.26)-(3.28)) e a formulação GLS (Eq. (3.29)-(3.32)) para o caso sem inércia. As Fig. 3.3 e 3.4 mostram respectivamente, a representação em elevação das isobandas de pressão e do componente u_1 da velocidade, obtidas através das duas formulações empregando-se a malha de 400 elementos. Pode-se observar as oscilações nestes campos quando da utilização do método de Galerkin, corroborando o que é mencionado no início desta seção.

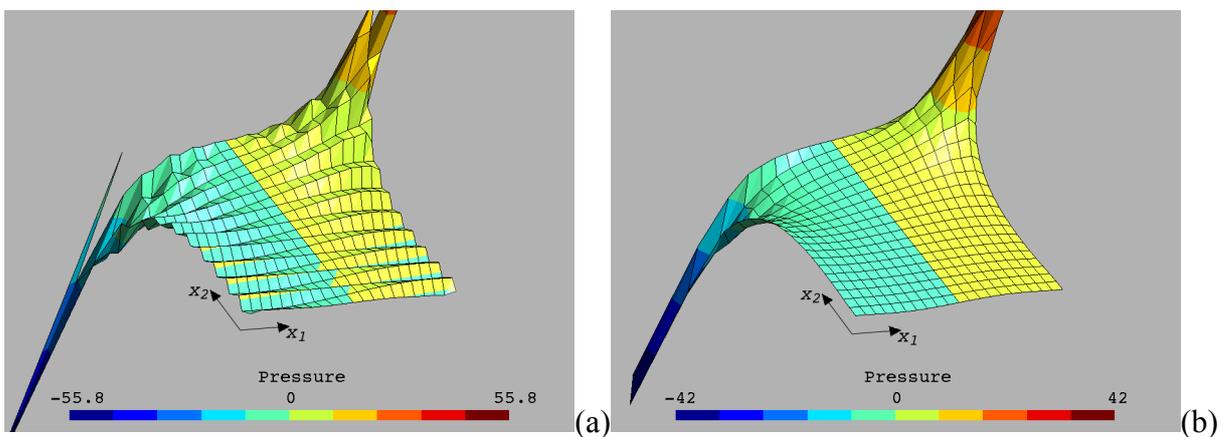


Figura 3.3 – Representação em elevação das isobandas de pressão obtidas com a malha de 400 elementos regulares. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.

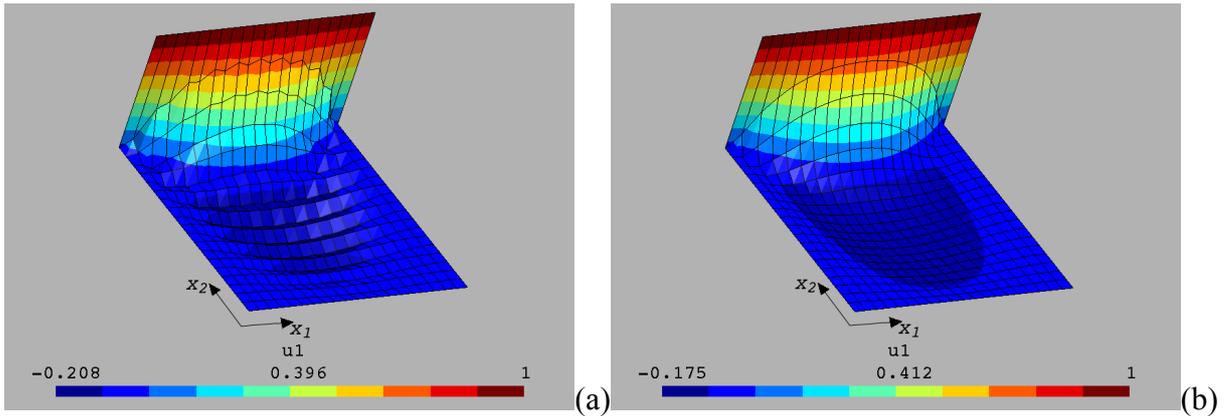


Figura 3.4 – Representação em elevação das isobandas do componente u_1 do vetor velocidade obtidas com a malha de 400 elementos regulares. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.

A utilização da malha com elementos distorcidos (Fig. 3.2(b)) gera fortes oscilações em ambos os campos de pressão e velocidade quando da utilização do método de Galerkin clássico, como é mostrado nas Fig. 3.5(a) e 3.6(a), associadas a não regularidade dos jacobianos elementares [Hughes, 1987]. Com a adição da estabilização – método GLS – as oscilações desaparecem do domínio do problema.

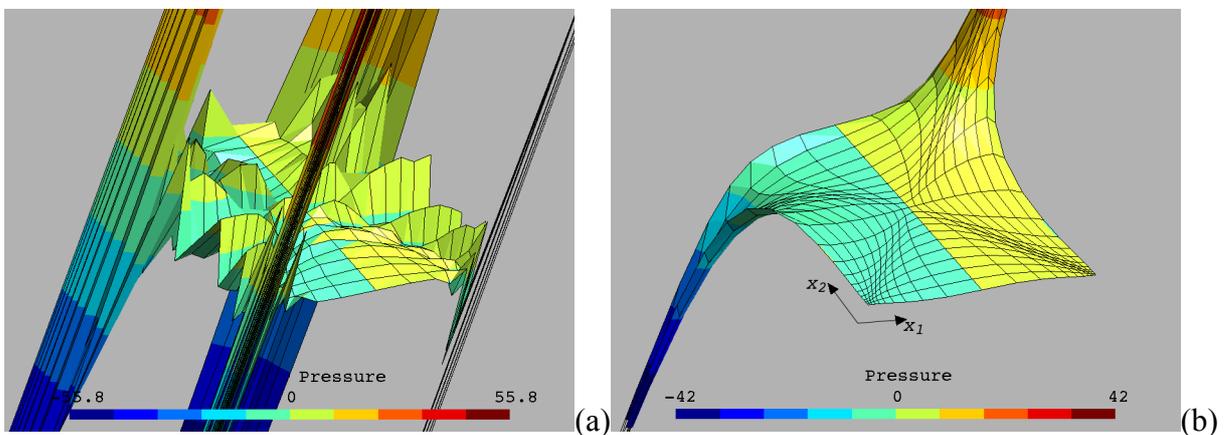


Figura 3.5 – Representação em elevação das isobandas de pressão obtidas com a malha de 400 elementos distorcidos. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.

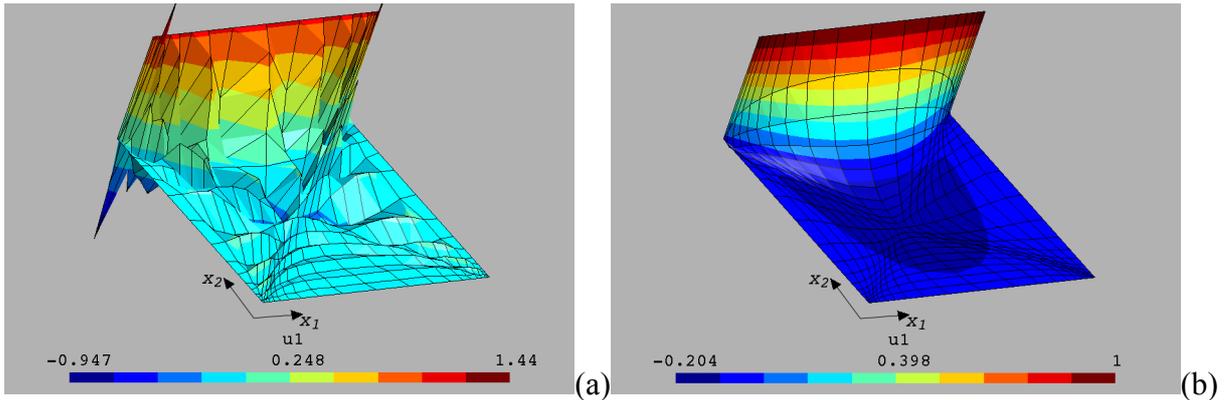


Figura 3.6 – Representação em elevação das isobandas do componente u_1 do vetor velocidade obtidas com a malha de 400 elementos distorcidos. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.

As Fig. 3.7 e 3.8 mostram os resultados obtidos empregando-se a malha com 2500 elementos Q1/Q1/Q1. Observa-se que o refinamento da malha não tem grande influência no amortecimento das oscilações presentes no caso simulado com a formulação clássica de Galerkin, principalmente nas quinas superiores da cavidade. Cabe salientar que a formulação GLS tende à formulação de Galerkin para malhas muito refinadas, uma vez que o desenho dos parâmetros de estabilidade para as equações de conservação de massa e balanço da quantidade de movimento faz com que estes sejam dependentes do comprimento característico do elemento – h_k .

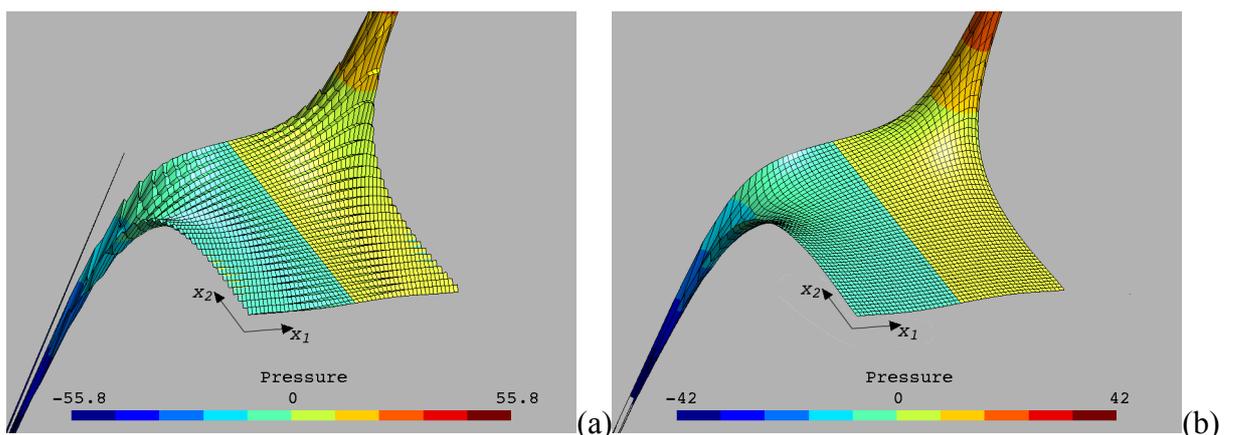


Figura 3.7 – Representação em elevação das isobandas de pressão obtidas com a malha de 2500 elementos regulares. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.

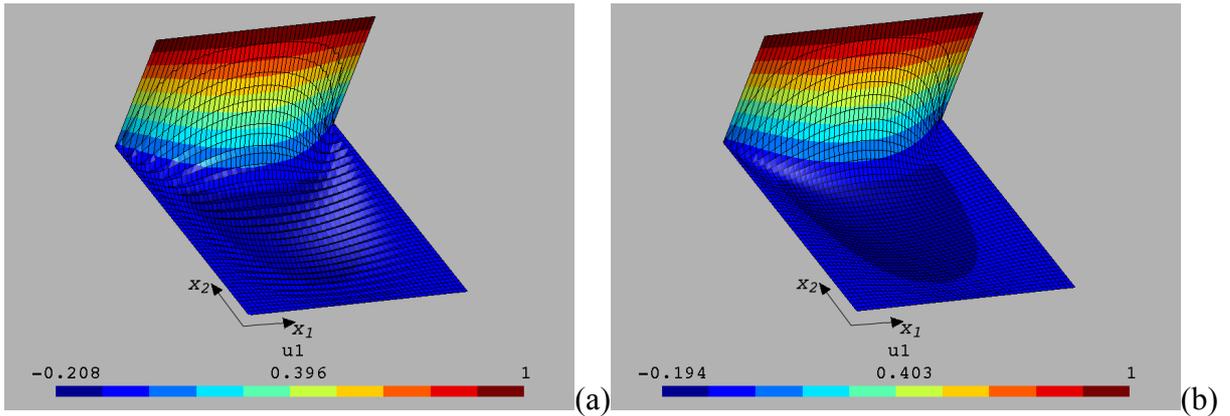


Figura 3.8 – Representação em elevação das isobandas do componente u_1 do vetor velocidade obtidas com a malha de 2500 elementos regulares. (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método GLS.

A Fig. 3.9 mostra uma comparação dos perfis de velocidade u_2 em $x_2/L_c=0.5$ para simulações empregando um fluido newtoniano escoando no interior da geometria apresentada na Fig. 3.1 obtidos com as discretizações regulares apresentadas na Fig. 3.2 – malha com 400 e 2500 elementos. Observa-se uma boa concordância com os resultados obtidos por Botella e Peyret, 1998, para um escoamento com $Re=1000$, mesmo para a malha menos refinada. Esses autores comentam sobre as dificuldades encontradas na simulação do problema da cavidade (citadas anteriormente) e comparam seus resultados com os de Ghia *et al*, 1982 – trabalho mais referido na literatura relacionada à simulação numérica de escoamentos em cavidade forçada. As linhas de corrente para este escoamento são mostradas na Fig. 3.10.

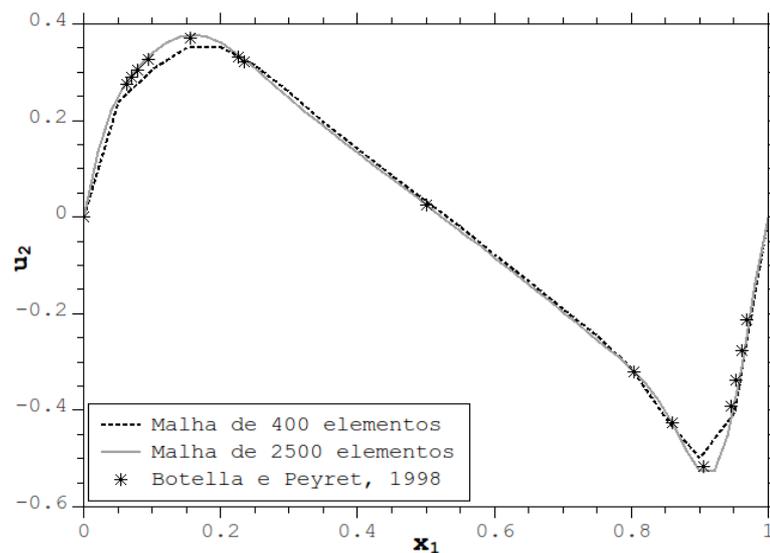


Figura 3.9 – Validação dos resultados com Botella e Peyret, 1998.

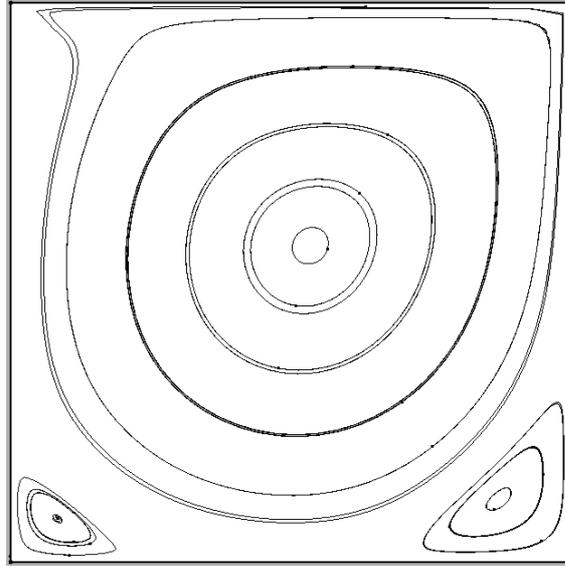


Figura 3.10 – Linhas de corrente para o escoamento de um fluido newtoniano com $Re=1000$.

3.7 Problema Matricial

A discretização das Eqs. (3.29)-(3.32) é obtida expandindo as aproximações de elementos finitos para $\boldsymbol{\tau}_p^h$, \mathbf{u}^h , p^h e \mathbf{S}^h , \mathbf{v}^h , q^h como uma combinação das suas respectivas funções de formas e graus de liberdade, gerando um sistema de equações discretas não-lineares. As funções de aproximação são dadas por

$$\begin{aligned} \tau_{p_{ij}}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\hat{B} \in \Omega^h} N_{\hat{B}}(\mathbf{x}) \tau_{p_{ij}\hat{B}} \quad , \quad S_{ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{\hat{A} \in \Omega^h} N_{\hat{A}}(\mathbf{x}) S_{ij\hat{A}} \\ p^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\hat{B} \in \Omega^h} N_{\hat{B}}(\mathbf{x}) q_{\hat{B}} \quad , \quad q^h(\mathbf{x}) = \sum_{\hat{\lambda} \in \Omega^h} N_{\hat{\lambda}}(\mathbf{x}) q_{\hat{\lambda}} \\ u_i^h(\mathbf{x}) &= \sum_{B \in \Omega^h} N_B(\mathbf{x}) v_{iB} \quad , \quad v_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{A \in \Omega^h} N_A(\mathbf{x}) v_{iA} \end{aligned} \quad (3.33)$$

e são substituídas na formulação GLS. Na Eq (3.33), $N_{\hat{A}}(\mathbf{x})$ e $N_{\hat{B}}(\mathbf{x})$, $N_{\hat{\lambda}}(\mathbf{x})$ e $N_{\hat{B}}(\mathbf{x})$ e $N_A(\mathbf{x})$ e $N_B(\mathbf{x})$ são polinômios para o componente polimérico do tensor de tensão extra, pressão e velocidade, respectivamente. As integrais no L^2 da formulação das Eq. (3.30) e (3.31) são aproximadas via quadratura Gaussiana. O resultante sistema algébrico pode ser escrito na forma residual como

$$[\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)] = [\mathbf{0}] \quad (3.34)$$

onde $[\mathbf{U}_k]$ é o vetor dos graus de liberdade $[\boldsymbol{\tau}_p]$, $[\mathbf{u}]$, $[\mathbf{p}]$ avaliados em todos os pontos nodais

$$[\mathbf{U}_k] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\tau}_{p12}] & [\boldsymbol{\tau}_{p11}] & [\boldsymbol{\tau}_{p22}] & [\mathbf{u}_1] & [\mathbf{u}_2] & [\mathbf{p}] \end{bmatrix}^T \quad (3.35)$$

e $[\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)]$ é dado pelo conjunto de matrizes

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)] = & [(1+\beta)\mathbf{E} + (1-\beta)\mathbf{H}(\eta(\dot{\gamma})) + \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{u})][\boldsymbol{\tau}] \\ & + [\mathbf{M} + \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})) + \beta\mathbf{K}(\eta(\dot{\gamma})) - (1+\beta)\mathbf{H}^T(\eta(\dot{\gamma})) - \mathbf{G}^T][\mathbf{u}] \\ & + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})) + \mathbf{P}][\mathbf{p}] - [\mathbf{F} + \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma}))] \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{H}^T]$ são as matrizes da ligação entre $\boldsymbol{\tau}_p$ e \mathbf{u} , $[\mathbf{E}]$ é a matriz dos termos $\boldsymbol{\tau}_p$, $[\mathbf{N}]$ é matriz dos termos advectivos, $[\mathbf{K}]$ são as matrizes dos termos difusivos, $[\mathbf{G}]$ e $[\mathbf{G}^T]$ são as matrizes dos termos de pressão e continuidade, $[\mathbf{F}]$ é a matriz dos termos forças de campo na equação do movimento. As matrizes com subscrito α denotam os termos GLS para a equação do movimento, $[\mathbf{M}]$ é a matriz dos termos δ e $[\mathbf{P}]$ é a matriz dos termos ε .

A fim de obter a solução do conjunto de equações não-lineares definido pela Eq. (3.36) empregou-se um algoritmo de quasi-Newton, com um método de continuação atuando sobre o termo de aceleração convectiva. Este algoritmo requer uma estimativa inicial $\mathbf{U}_{k=0}$ e, a cada iteração, é resolvido o seguinte sistema linear:

$$[\mathbf{J}(\mathbf{U}_k)][\Delta \mathbf{U}_{k+1}] = -[\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)] \quad (3.37)$$

onde $[\mathbf{J}(\mathbf{U}_k)]$ é definido por

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}(\mathbf{U}_k)] = & [(1+\beta)\mathbf{E} + (1-\beta)\mathbf{H}(\eta(\dot{\gamma})) + \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{u})] + [\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{u}))][\boldsymbol{\tau}] \\ & + [\mathbf{M} + \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})) + \beta\mathbf{K}(\eta(\dot{\gamma})) - (1+\beta)\mathbf{H}^T(\eta(\dot{\gamma})) - \mathbf{G}^T] \\ & + [\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})))][\mathbf{u}] \\ & + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})) + \mathbf{P}] + [\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{G}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})))][\mathbf{p}] + [\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})))] \end{aligned} \quad (3.38)$$

e $[\Delta \mathbf{U}_{k+1}]$ por

$$[\Delta \mathbf{U}_{k+1}] = [\mathbf{U}_{k+1}] - [\mathbf{U}_k] \quad (3.39)$$

O algoritmo de solução é descrito como:

I. Estima-se o vetor $[\mathbf{U}_{k=0}]$ – nas simulações realizadas nesta Tese, campos de tensão, velocidade e pressão oriundos de simulações para escoamentos newtonianos são utilizados – e define-se o critério de convergência – igual a 10^{-6} nesta Tese – e o número de iterações para a atualização da matriz jacobiana.

II. Resolve-se o vetor incremental $[\Delta \mathbf{U}_{k+1}]$ através do sistema dado pela Eq. (3.37).

III. Calcula-se o vetor $[\mathbf{U}_{k+1}^h]$ pela Eq. (3.39).

IV. Se $|\mathbf{R}(\mathbf{U}_{k+1})|_{\infty} > 10^{-7}$, critério de erro empregado nesta Tese, $k=k+1$, retornando-se ao passo II; caso contrário, a solução é armazenada e o algoritmo é finalizado.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados das simulações numéricas realizadas através do código de elementos finitos NNFEM em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Sua validação para a formulação multi campos inelástica é encontrada nos trabalhos de Zinani, 2006, Zinani e Frey, 2006, Zinani e Frey, 2008, Frey *et al.*, 2010a e Santos *et al.*, 2011. A validação de resultados com elasticidade pode ser encontrada em Frey *et al.*, 2010b.

4.1 Escoamentos sobre uma cavidade profunda planar

A equação constitutiva para elasticidade a parâmetros constantes de Oldroyd-B (Eq. (2.31)) foi empregada na simulação de escoamentos laminares e em regime permanente no interior de um canal planar que possui uma cavidade profunda. A geometria é mostrada na Fig. 4.1. As condições de contorno empregadas são não-deslizamento nas paredes do canal e da cavidade ($u_1=0$, $u_2=0$) e perfis desenvolvidos de velocidade e tensão extra na entrada e saída. Todos os comprimentos são relacionados com a altura do canal, H . A relação entre a viscosidade do solvente (μ_s) e a viscosidade total ($\mu_p + \mu_s$), ψ , é tomada como 0.59 [Behr *et al.*, 2004].

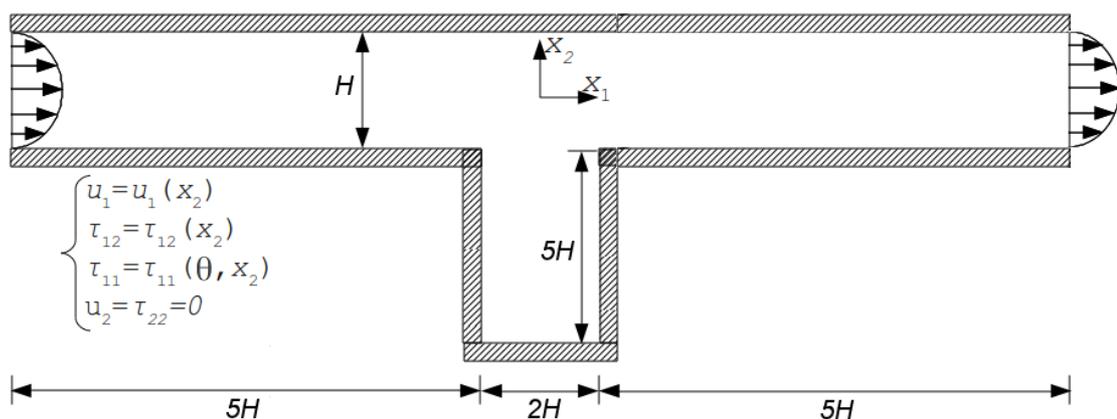


Figura 4.1 – Descrição do problema: escoamento sobre uma cavidade profunda.

O domínio computacional foi discretizado por três malhas diferentes com 550, 2200 e 8800 elementos lagrangianos bilineares. Assim, realizou-se um teste de independência de

malha – apresentado na Fig. 4.2 – baseado no máximo erro relativo observado entre duas discretizações subsequentes para o perfil longitudinal da pressão tomada na parede superior do canal principal – $x_2/H=0.5$. Considerando um erro máximo de 1%, a malha com 2200 elementos Q1/Q1/Q1 foi selecionada. Para esta malha, o valor do tamanho adimensional de malha mínimo h_{Kmin}/H é igual a 0.141.

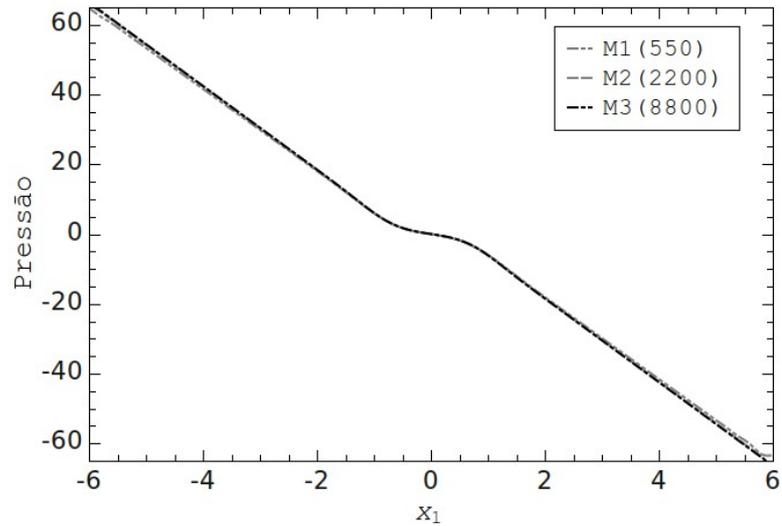


Figura 4.2 – Teste de independência de malha: comparação do perfil longitudinal da pressão em $x_2/H=0.5$ para três discretizações diferentes, com $Re=0$, $\psi=0.59$ e $Wi=0.2$.

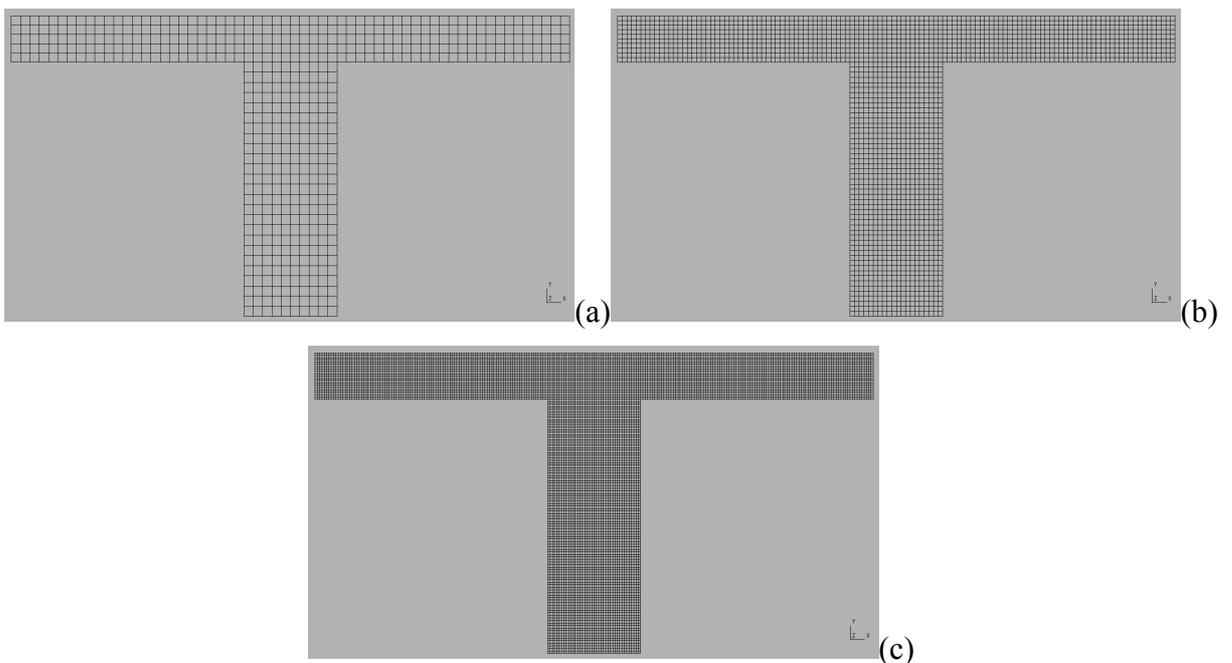


Figura 4.3 – Discretizações utilizadas no teste de independência de malha: (a) 550 elementos; (b) 2200 elementos; (c) 8800 elementos.

A Fig. 4.3 mostra as malhas empregadas para a discretização da geometria e comparadas através do teste de independência de malha. A entrada e a saída do canal encontram-se em $x_I=-6H$ e $x_I=6H$, respectivamente – uma vez que os perfis de velocidade e tensão extra são desenvolvidos e os escoamentos simulados são sem inércia, não há necessidade de um longo comprimento de desenvolvimento. A profundidade da cavidade é de $5H$ e a sua largura é de $2H$.

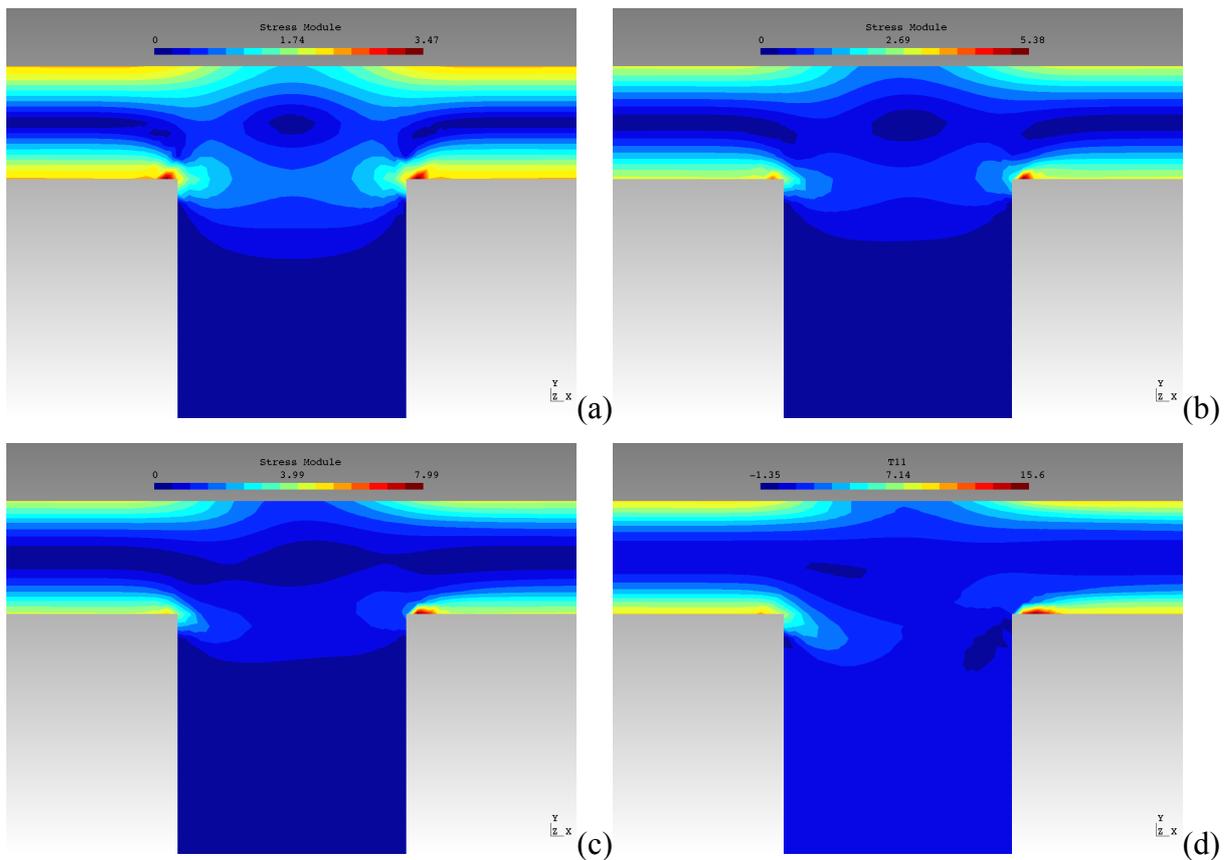


Figura 4.4 – Isobandas da intensidade da parcela polimérica do tensor extra de tensão para escoamentos sem inércia com $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.0$; (b) $Wi=0.1$; (c) $Wi=0.2$; (d) $Wi=0.35$.

A influência da elasticidade na intensidade do tensor de tensão extra (parcela polimérica) é mostrada na Fig. 4.4, para escoamentos sem inércia, com $\psi=0.59$, variando o número de Weissenberg entre 0 e 0.35. A intensidade do tensor extra é dada por $\tau = \sqrt{1/2 \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^2)}$. Para o caso inelástico ($Wi=0$), pode-se observar que as isobandas são simétricas em relação ao plano central da geometria – $x_I/H=0$. Existem apenas dois picos simétricos de tensão nas quinas da cavidade, oriundos destas singularidades. Com o aumento da elasticidade, observa-se o aumento do nível de tensões próximo às paredes do canal e o

desaparecimento do pico de tensões no canal à montante da cavidade, enquanto o pico à jusante aumenta rapidamente e é transportado em direção à saída do canal – estes fenômenos podem ser atribuídos ao efeito advectivo na equação para tensão extra.

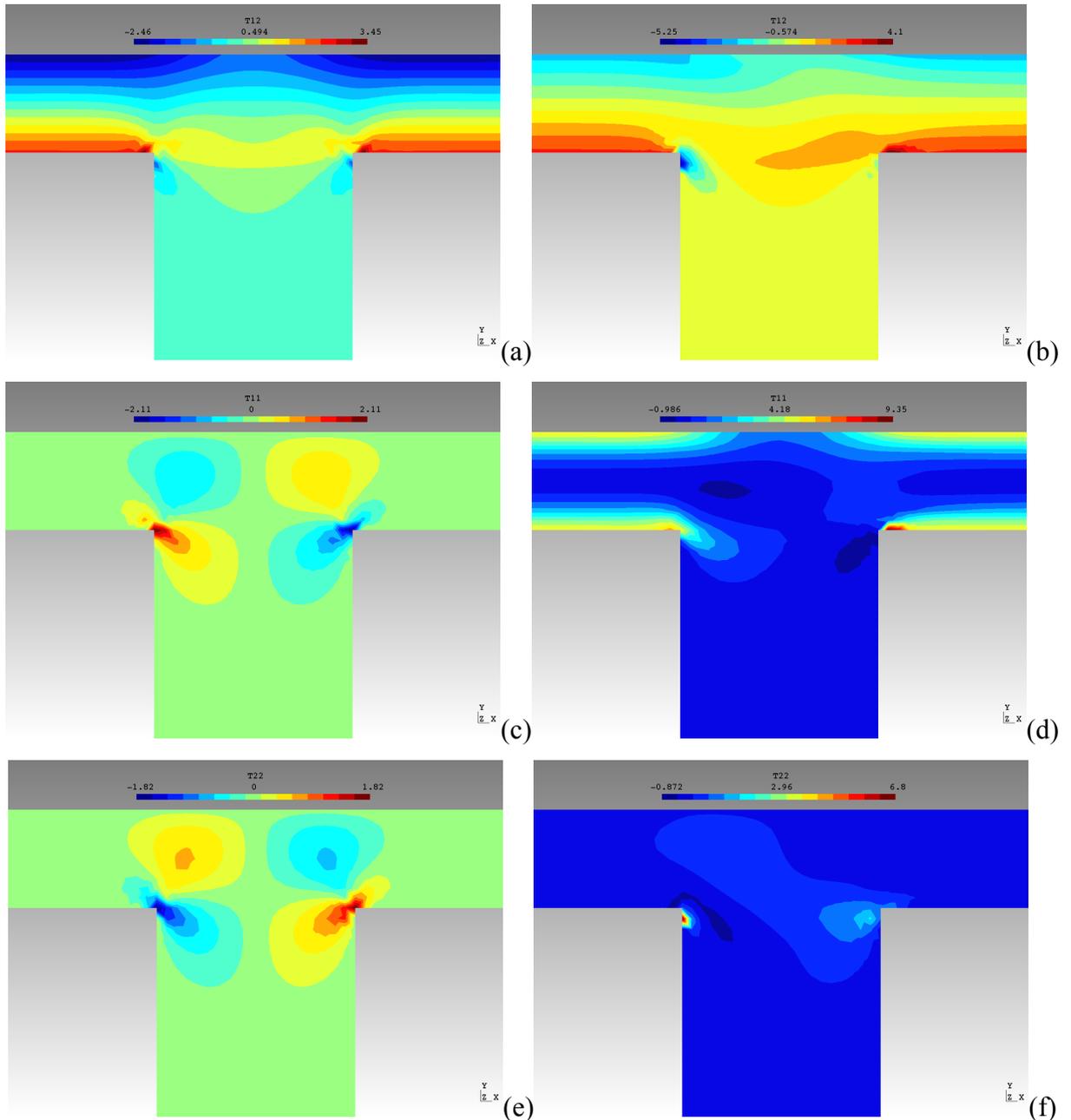


Figura 4.5 – Isobandas dos componentes τ_{p12} , τ_{p11} , e τ_{p22} para escoamentos sem inércia com $\psi=0.59$: (a) τ_{p12} para $Wi=0.0$; (b) τ_{p12} para $Wi=0.35$; (c) τ_{p11} para $Wi=0.0$; (d) τ_{p11} para $Wi=0.35$; (e) τ_{p22} para $Wi=0.0$; (f) τ_{p22} para $Wi=0.35$;

A Fig. 4.5 mostra as isobandas dos componentes do tensor extra de tensão (parcela polimérica) para os casos com $Wi=0.0$ e 0.35 . Para o caso inelástico, as tensões normais são

da ordem de zero no interior do canal principal à montante e à jusante da cavidade e no fundo desta. Ou seja, nestas regiões, a intensidade do tensor de tensão extra depende principalmente do componente τ_{p12} . Com a adição de elasticidade, os componentes normais passam a possuir magnitudes não-nulas em maiores porções do domínio do problema, principalmente próximo às paredes do canal – o que corrobora o observado através da Fig. 4.4 para a intensidade do tensor extra de tensão (parcela polimérica). Os picos do componente normal τ_{p11} da tensão extra presentes na Fig. 4.5(c)-4.5(d) podem ser melhor observados através da representação em elevação da Fig. 4.6.

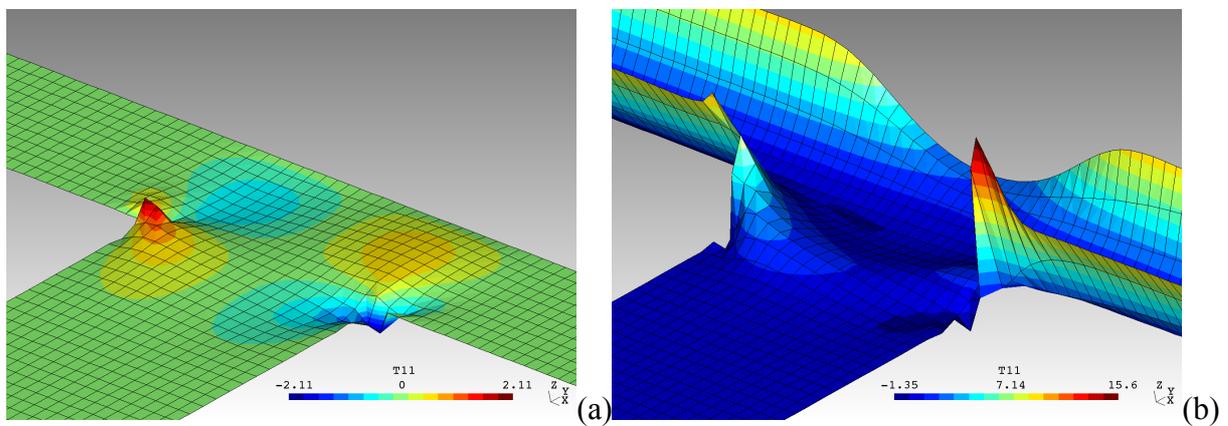
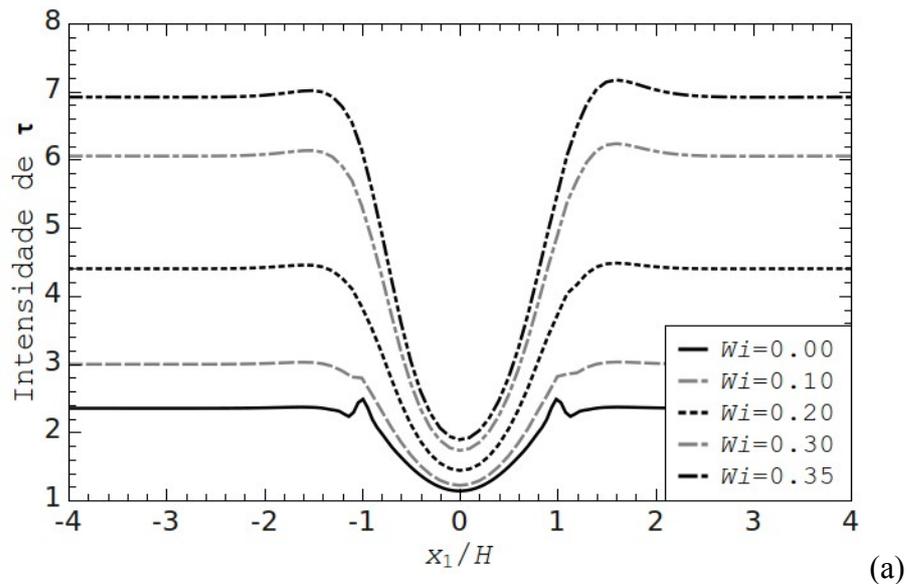


Figura 4.6 – Representação em elevação das isobandas do componente τ_{p11} para escoamentos sem inércia com $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.0$; (b) $Wi=0.35$.



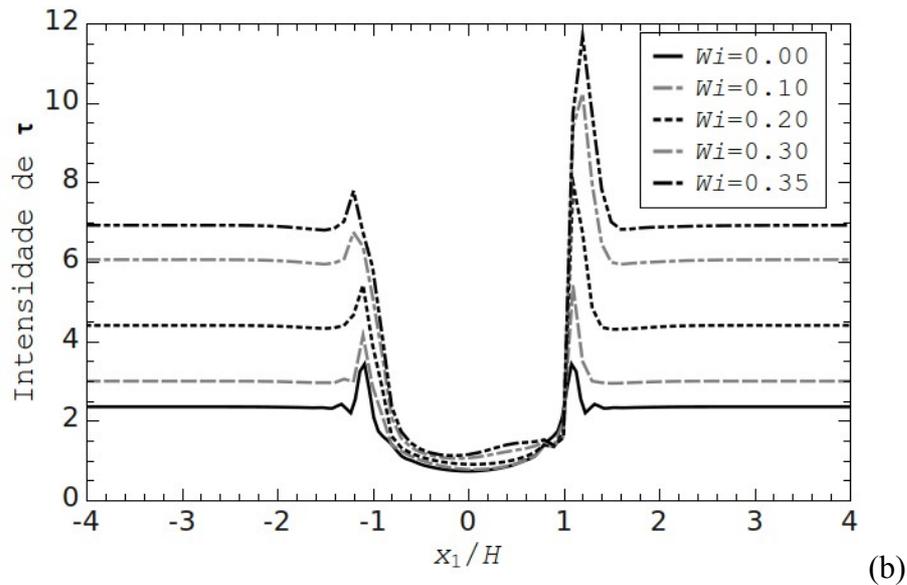


Figura 4.7 – Perfis longitudinais da intensidade do tensor extra para escoamentos sem inércia com $\psi=0.59$: (a) parede superior do canal, $x_2=0.5$; (b) parede inferior do canal, $x_2=-0.5$.

Para uma melhor compreensão dos efeitos da elasticidade ao longo do canal, a Fig. 4.7 apresenta os perfis longitudinais da intensidade do tensor extra de tensão para $x_2=0.5$ e -0.5 , respectivamente as paredes superior e inferior do canal. Para o caso com $Wi=0$, o comportamento da tensão extra é simétrico à montante e à jusante da cavidade profunda. Com o aumento da elasticidade, como já demonstrado anteriormente, há uma amplificação do pico de tensão na quina à montante da cavidade. Na parede superior, há uma influência acentuada na região correspondente à entrada da cavidade nos perfis de tensão extra; entretanto, não ocorrem assimetrias pronunciadas.

4.2 Escoamentos sobre um cilindro confinado

A equação constitutiva para elasticidade de Oldroyd-B (Eq. (2.31)) foi empregada na simulação de escoamentos laminares e em regime permanente em torno de um cilindro mantido entre placas paralelas, problema abordado em diversos trabalhos na literatura [Szadi *et al.*, 1995, Sun *et al.*, 1999, Alves *et al.*, 2001, Behr *et al.*, 2004]. Primeiramente, como na seção anterior, foram obtidos resultados com o modelo de Oldroyd-B a parâmetros constantes (θ_l , μ_p e μ_s). O segundo conjunto de resultados mostrados nesta seção foi obtido através de uma modificação na Eq. (2.31) – referida na literatura como modelo de White-Metzner – que considera μ_s igual a 0 e substitui μ_p e θ_l por funções do segundo invariante do tensor taxa de deformação. Estas funções são dadas, respectivamente, por

$$\mu_p = \eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left(1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^2\right)^{(1-n)/2}} \quad (4.1)$$

$$\theta_1 = \theta(\dot{\gamma}) = \theta_\infty + \frac{\theta_0 - \theta_\infty}{\left(1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^2\right)^{(1-n)/2}} \quad (4.2)$$

A Eq. (4.2) é uma modificação do modelo de viscosidade de Carreau (Eq. (2.24b) e (4.1)) a fim de levar em conta a resposta elástica do material; λ_c é um parâmetro para o ajuste de curvas com dimensão de tempo, θ_0 é um tempo de relaxação para baixas taxas de cisalhamento e θ_∞ um tempo de relaxação para altas taxas de cisalhamento – nas simulações, foram empregados os valores de 10 s, 0.35 s e 1×10^{-6} s, respectivamente. A escolha das Eq. (4.1) e (4.2) para representar o comportamento do material é baseada no trabalho de Valette *et al.*, 2004, onde os autores empregaram uma equação semelhante à de Carreau-Yasuda para a representação da viscosidade e da elasticidade.

Nas simulações realizadas, apenas metade da geometria é considerada, uma vez que, como apontado na literatura, o escoamento é simétrico [Zisis e Mitsoulis, 2002, Mitsoulis e Huilgol, 2004, Naccache e Barbosa, 2007, Frey *et al.*, 2010b]. A geometria é mostrada na Fig. 4.8. As condições de contorno empregadas são simetria ao longo da linha de centro ($u_2=0$, $\tau_{p12}=0$), não-deslizamento nas paredes do canal e sobre o cilindro ($u_1=0$, $u_2=0$) e perfis desenvolvidos analíticos de velocidade e tensão extra (parcela polimérica) na entrada para os casos simulados com o modelo de Oldroyd-B. Para os casos simulados com o modelo de White-Metzner, os perfis desenvolvidos para a entrada são obtidos através de simulações preliminares.

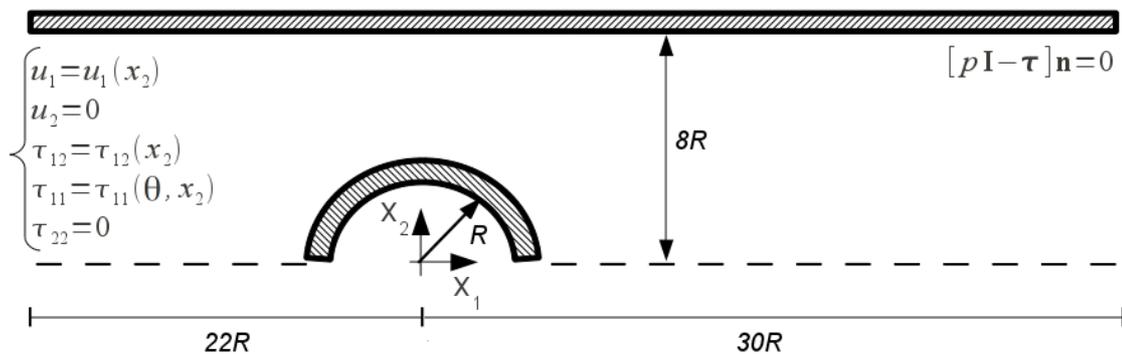


Figura 4.8 – Descrição do problema: escoamento sobre um cilindro mantido entre placas paralelas.

O domínio computacional foi discretizado empregando a mesma malha utilizada por Frey *et al.*, 2010b, onde, através de um teste de independência de malha, foi selecionada uma discretização com 2860 elementos lagrangianos bilineares. De acordo com os autores, o valor do tamanho adimensional de malha mínimo para a discretização, h_{Kmin}/R , é igual a 0.0856. A Fig. 4.9 mostra a região central da geometria (cilindro) para a discretização empregada. A entrada e a saída do canal encontram-se em $x_I=-22R$ e $x_I=30R$, respectivamente; a distância entre a placa superior e a linha de simetria é igual a $8R$.

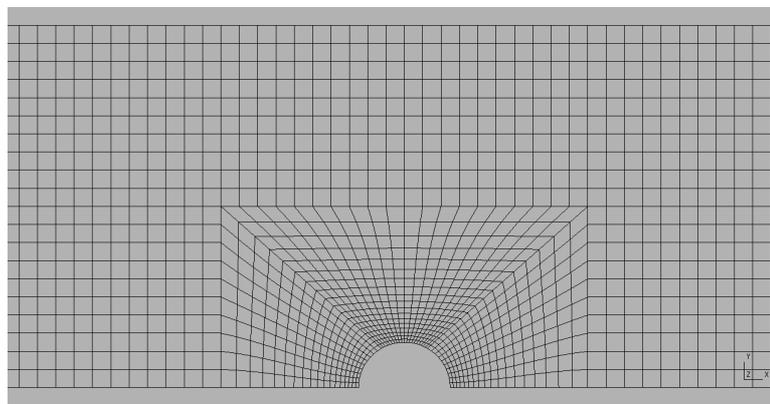
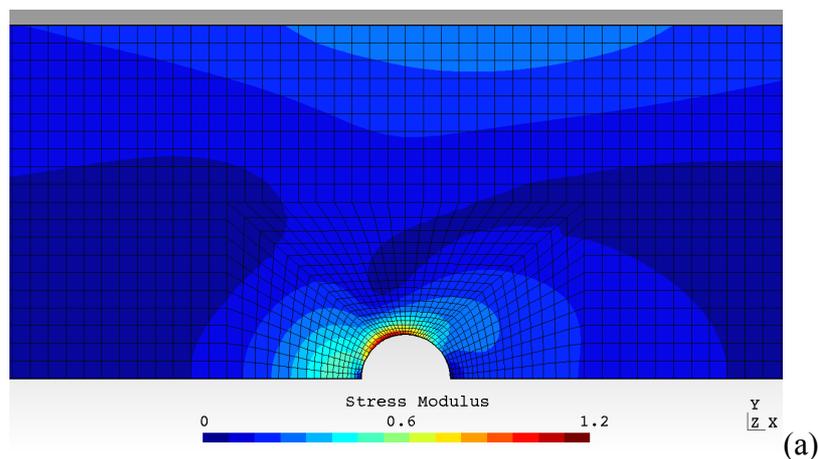


Figura 4.9 – Detalhe da região central da malha empregada.

Os efeitos conjugados da inércia e da elasticidade na intensidade do tensor de tensão extra (parcela polimérica) são investigados através das Fig. 4.10 e 4.11, para $\rho^*=40.8$ e $\psi=0.59$, variando o número de Weissenberg entre 0 e 0.368. Pode-se observar forte influência da inércia nas isobandas de tensão mesmo para o caso com menor elasticidade ($Wi=0.025$), onde a informação da presença de uma obstrução no escoamento entre as placas é carregada a jusante do cilindro.



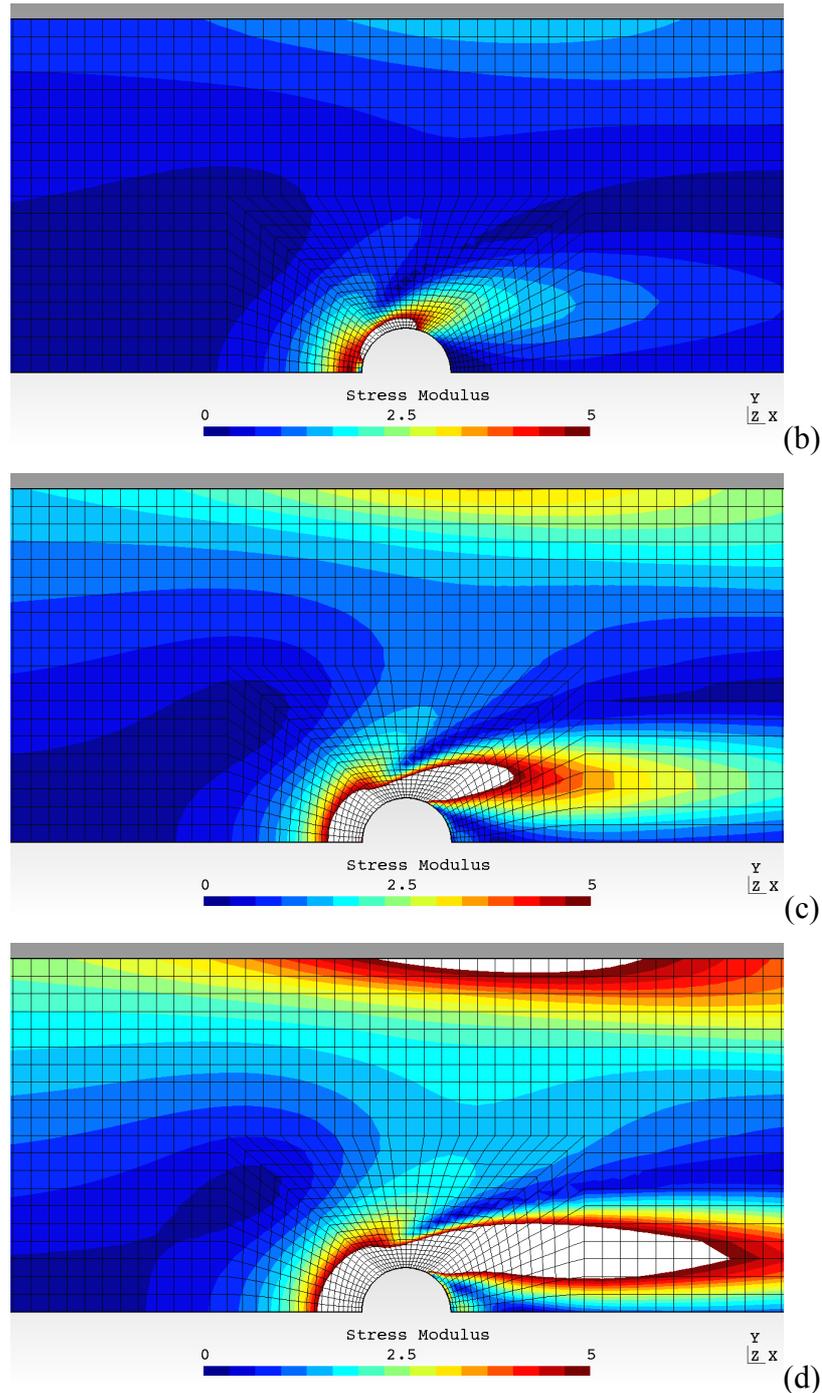


Figura 4.10 – Isobandas da intensidade da parcela polimérica do tensor extra de tensão para $\rho^*=40.8$, $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.025$; (b) $Wi=0.123$; (c) $Wi=0.245$; (d) $Wi=0.368$.

A medida em que se aumenta o nível de inércia e elasticidade, além do aumento no efeito advectivo da tensão extra, o pico de tensão na superfície do cilindro (Fig. 4.11) se torna cada vez mais pronunciado, e seu valor alcança, para $Wi=0.368$, um valor 770 vezes maior que para $Wi=0.025$. Por este motivo, a Fig. 4.10 foi editada estabelecendo um critério de corte no valor das isobandas da intensidade do tensor de tensão extra de modo a proporcionar uma

melhor comparação entre os casos simulados.

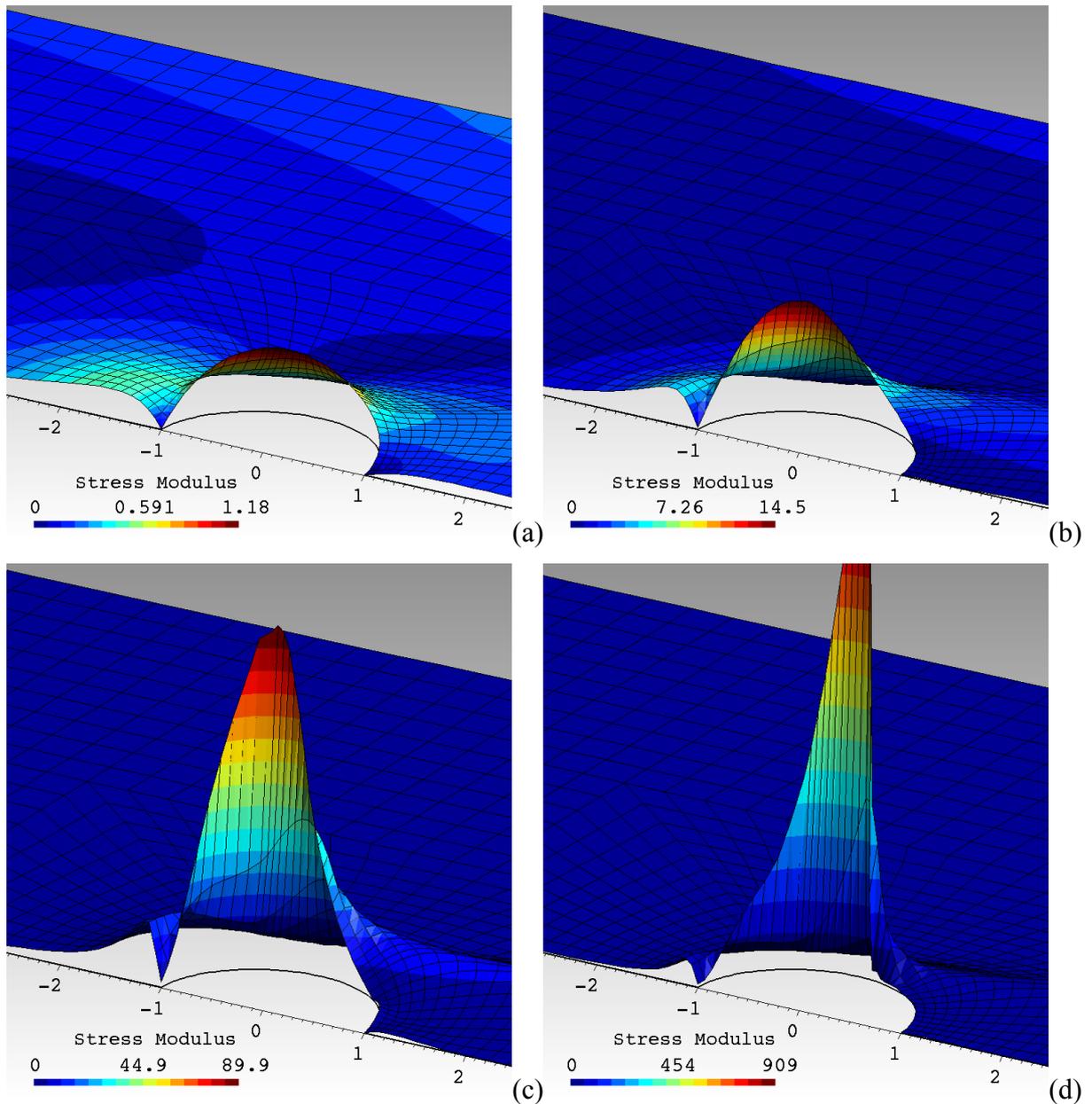


Figura 4.11 – Representação em elevação da intensidade da parcela polimérica do tensor extra de tensão para $\rho^* = 40.8$, $\psi = 0.59$: (a) $Wi = 0.025$; (b) $Wi = 0.123$; (c) $Wi = 0.245$; (d) $Wi = 0.368$.

A influência dos efeitos conjugados de inércia e elasticidade nas isobandas do módulo do vetor velocidade é mostrada na Fig. 4.12. Como nas figuras anteriores, há a advecção da condição de contorno de parede da obstrução ($u_1 = u_2 = 0$) através do campo de velocidades à justante do cilindro. Este efeito advectivo está presente mesmo para o caso com $Wi = 0.025$ e é amplificado com o aumento da elasticidade.

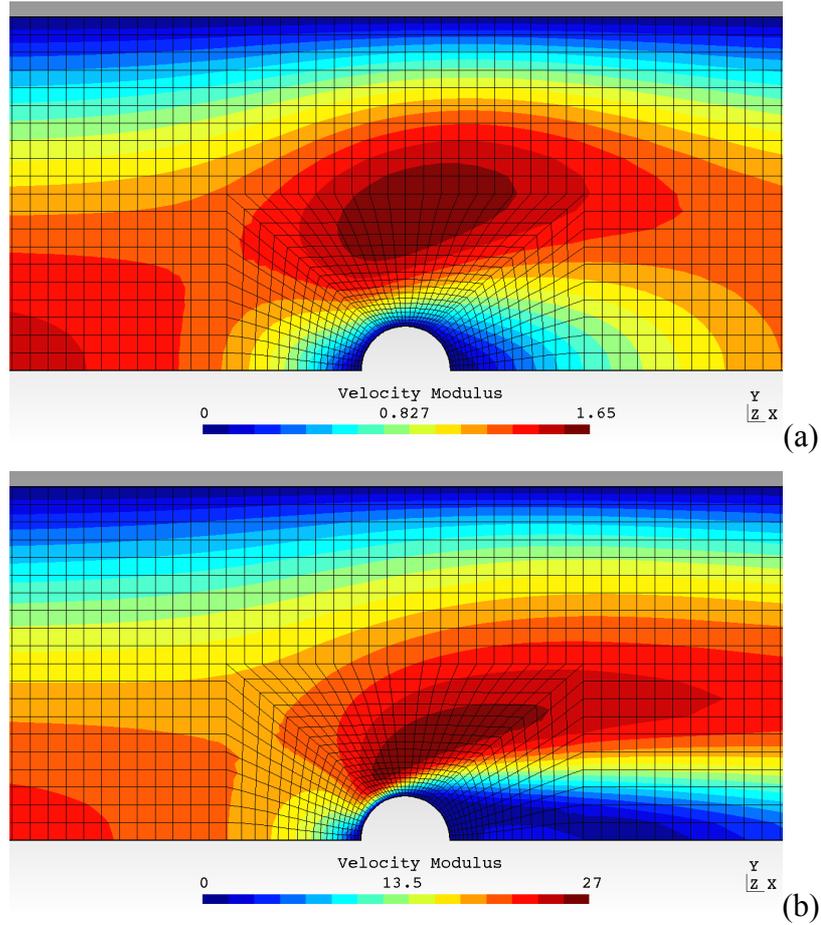
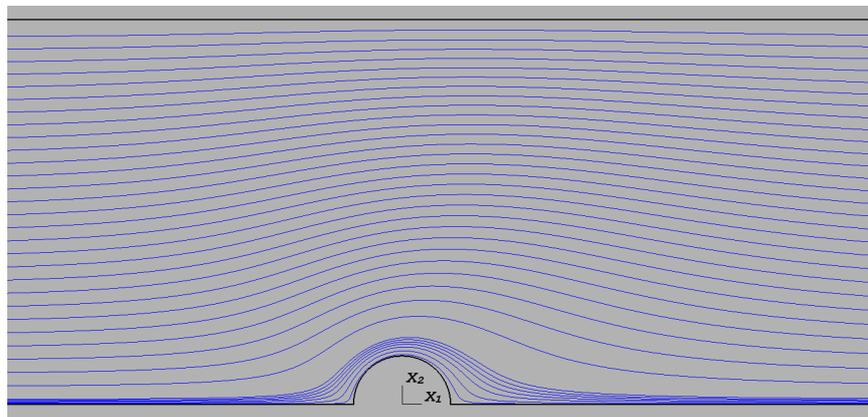


Figura 4.12 – Isobandas do módulo do vetor velocidade para $\rho^*=40.8$, $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.025$; (b) $Wi=0.368$.

A Fig. 4.13 apresenta as linhas de corrente para escoamentos com $\rho^*=40.8$, $\psi=0.59$ e $Wi=0.025$ e 0.368 . Para o caso com menor elasticidade, as linhas de corrente seguem o contorno do cilindro. Com o aumento da elasticidade, ocorre o descolamento da camada limite do fluido, o que acarreta no aparecimento de um vórtice à montante do cilindro.



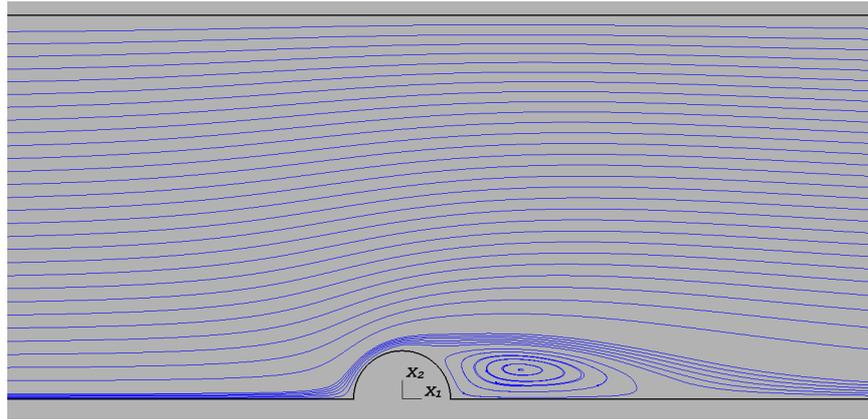
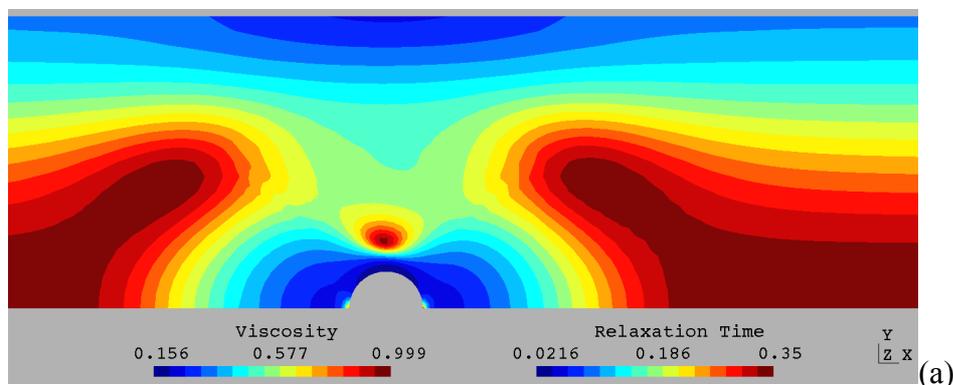


Figura 4.13 – Linhas de corrente para $\rho^*=40.8$, $\psi=0.59$: (a) $Wi=0.025$; (b) $Wi=0.368$.

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos com o modelo de White-Metzner apresentado no início desta seção. Foram simulados escoamentos com $\lambda_c=10$ s, $\eta_0=1$ Pa.s, $\eta_\infty=0.1$ Pa.s, $\theta_0=0.35$ s e $\theta_\infty=10^{-6}$ s, para $\rho^*=0$ e 3.9, variando também o índice *power-law*. A Fig. 4.14 apresenta os resultados obtidos com $n=0.25$ e 0.75, negligenciando-se a inércia do escoamento. Observa-se uma influência acentuada do efeito da diminuição da viscosidade com o aumento da taxa de cisalhamento – *shear thinning* – nas isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para o menor índice *power-law*. O nível de elasticidade do escoamento, mensurado através do número de Weissenberg ($Wi=\theta_0 u_c/R$), é significativamente elevado e acarreta assimetria nas isobandas. Na Fig. 4.15, como já mencionado anteriormente, a introdução de inércia no escoamento advecta à jusante as condições de contorno impostas na superfície do cilindro. À montante, se comparadas as Fig. 4.14 e 4.15, para os mesmos índices *power-law*, não há diferenças significativas.



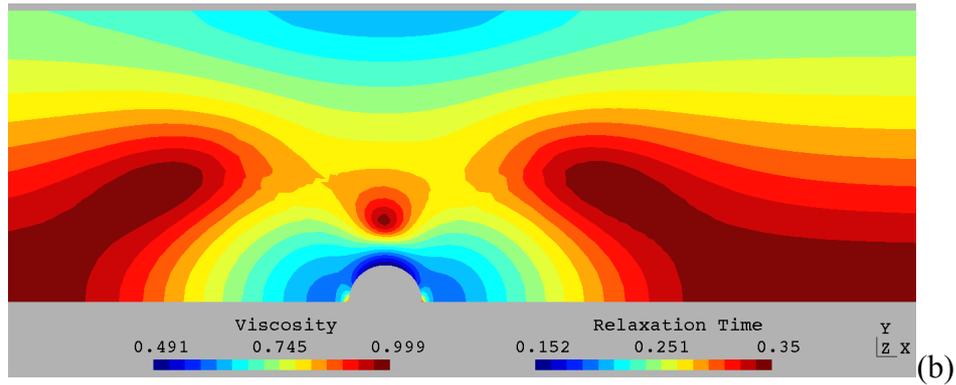


Figura 4.14 – Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0.0$ e $Wi=0.35$:
(a) $n=0.25$; (b) $n=0.75$.

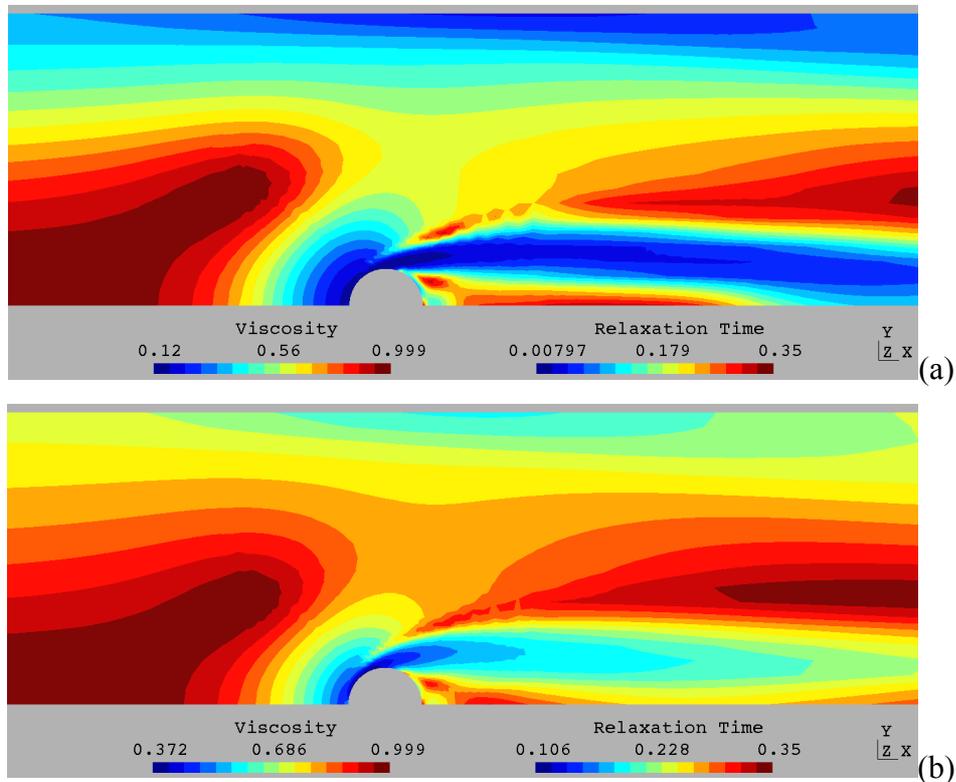


Figura 4.15 – Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=3.9$ e $Wi=0.35$:
(a) $n=0.25$; (b) $n=0.75$.

A Fig. 4.16 mostra os perfis de tensão extra e velocidade horizontal obtidos em uma posição $-11R$ a montante do cilindro, para $Wi=0.35$, $\rho^*=0$, variando o índice *power-law*. Com o aumento da pseudoplasticidade (ou efeito *shear-thinning* no fluido), os perfis de tensão extra tendem a diminuir de intensidade – para uma mesma taxa de cisalhamento, a viscosidade do fluido diminui, refletindo em menores tensões e menor resistência ao escoamento. Deste modo, como apontado por Zinani, 2006, a diminuição do índice *power-*

law acarreta também em um menor gradiente de pressão para escoamentos resultantes de uma mesma cinemática imposta como condição de contorno. Os perfis de velocidade possuem o mesmo comportamento de predições obtidas analiticamente para fluidos de Ostwald-de Waele [Hermany, 2012]: a pseudoplasticidade tende a achatar o perfil, diminuindo a velocidade na linha de simetria e aumentando a velocidade periférica.

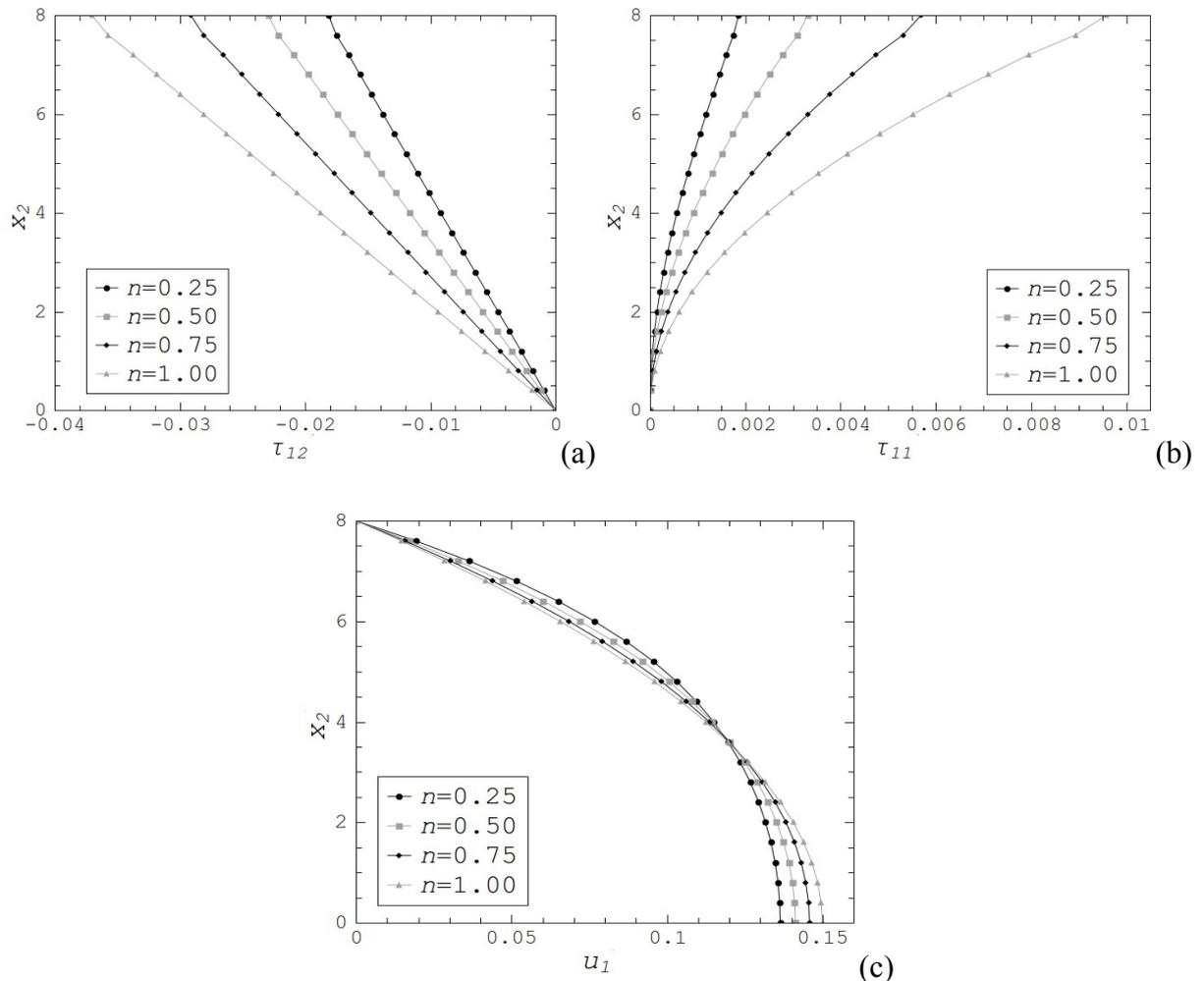


Figura 4.16 – Perfis transversais de tensão extra e velocidade para a variação do índice *power-law*, com $\rho^*=0.0$ e $Wi=0.35$: (a) τ_{12} ; (b) τ_{11} ; (c) u_1 .

4.3 Escoamentos sobre uma expansão-contração abrupta planar

O modelo elasto-viscoplástico apresentado nesta Tese (Eq. (2.54), (2.59), (2.61), (2.62) e (2.63)) foi empregado na simulação de escoamentos laminares e em regime permanente no interior de uma expansão-contração abrupta planar. Esta geometria foi escolhida uma vez que escoamentos através de mudanças abruptas de seção são encontrados em diversos processos

naturais e industriais, como extrusão, preenchimento de moldes e escoamento em meios porosos [de Souza Mendes *et al.*, 2007a]. Como na Seção 4.2, assume-se a hipótese de que o escoamento é simétrico e novamente apenas metade da geometria é considerada nas simulações. A geometria é mostrada na Fig. 4.17. As condições de contorno empregadas são simetria ao longo da linha de centro ($u_2=0$, $\tau_{p12}=0$), não-deslizamento nas paredes do canal ($u_1=0$, $u_2=0$) e perfis planos de velocidade na entrada e saída. Todas as dimensões são relacionadas com a altura do canal menor, h .

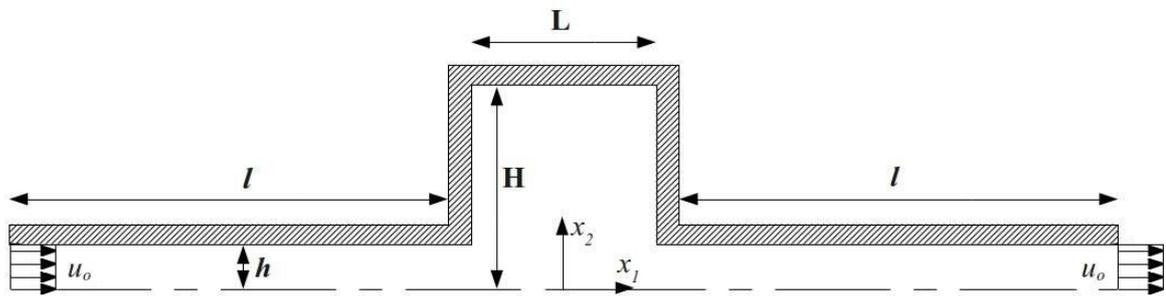


Figura 4.17 – Descrição do problema: expansão-contracção abrupta planar.

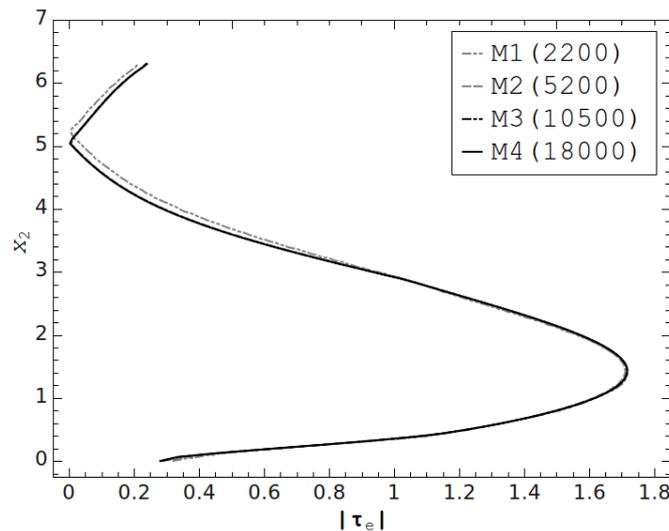


Figura 4.18 – Teste de independência de malha: comparação do perfil transversal da tensão extra polimérica para quatro discretizações diferentes, com $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$ e $\theta_0^*=20$.

O domínio computacional foi discretizado através de quatro malhas diferentes com 2200, 5200, 10500 e 18000 elementos lagrangianos bilineares. Assim, realizou-se um teste de independência de malha baseado no máximo erro relativo observado entre duas discretizações subsequentes para o perfil vertical do módulo da parcela polimérica da tensão extra em $x_1/h=0$

(Fig. 4.18). Considerando um erro máximo de 1%, a malha com 5200 elementos Q1/Q1/Q1 foi selecionada. Para esta malha, o valor do tamanho adimensional de malha mínimo h_{min}/h é igual a 0.145.

A Fig. 4.19 mostra a região central da geometria (a expansão-contracção) para as discretizações empregadas no teste de independência de malha. A entrada e a saída do canal se encontram em $x_I=-20h$ e $x_I=20h$, respectivamente, a fim de garantir o desenvolvimento dos perfis de velocidade, mesmo para escoamentos com alto nível de inércia. A altura do canal maior é $H/h=6.3$ e o seu comprimento $L/H=1$.

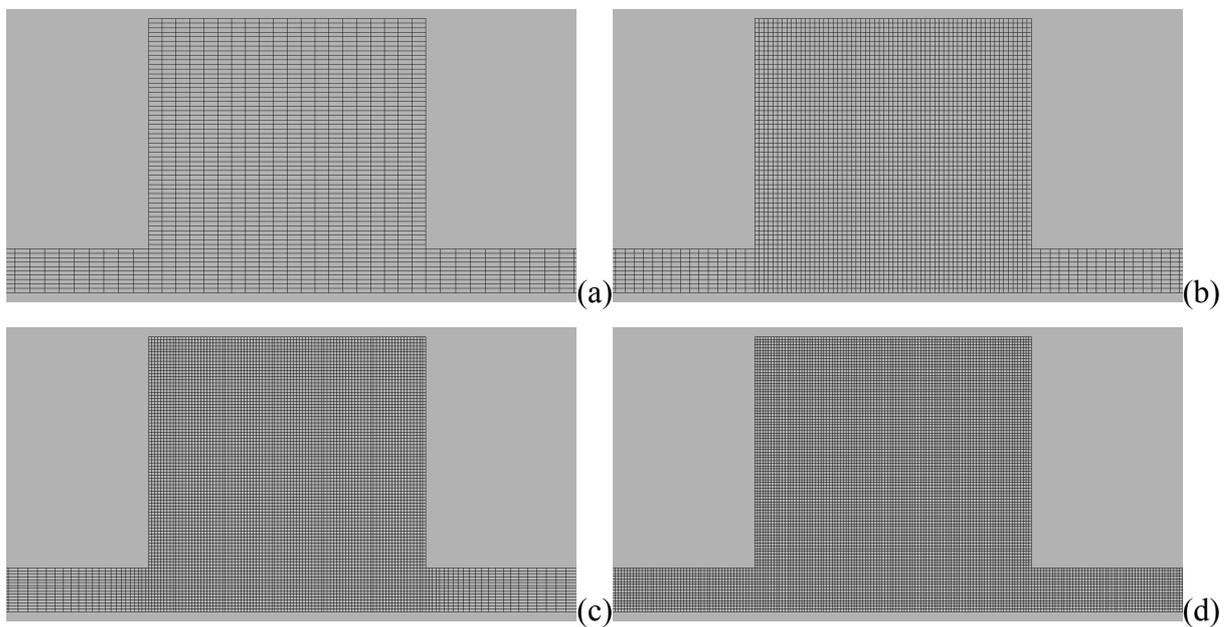


Figura 4.19 – Discretizações utilizadas no teste de independência de malha: (a) 2200 elementos; (b) 5200 elementos; (c) 10500 elementos; (d) 18000 elementos.

As Fig. 4.20 e 4.21 comparam o método de Galerkin clássico com o método de Galerkin-Mínimos Quadrados – tema anteriormente abordado no Capítulo 3. O escoamento em questão é de um fluido viscoelástico de Oldroyd-B a parâmetros constantes, com $\mu_s=0.5$ Pa.s, $\mu_p=0.5$ Pa.s e $\theta_I=0.2$ s, no interior da geometria tratada nesta Seção – expansão-contracção planar. Como na Fig. 3.3, pode-se observar que o campo de pressão é fortemente alterado por oscilações, tanto no interior da expansão-contracção quanto no canal menor – onde apresentam maior amplitude. O campo do componente u_I da velocidade é menos afetado por oscilações, embora elas estejam presentes em todo o domínio.

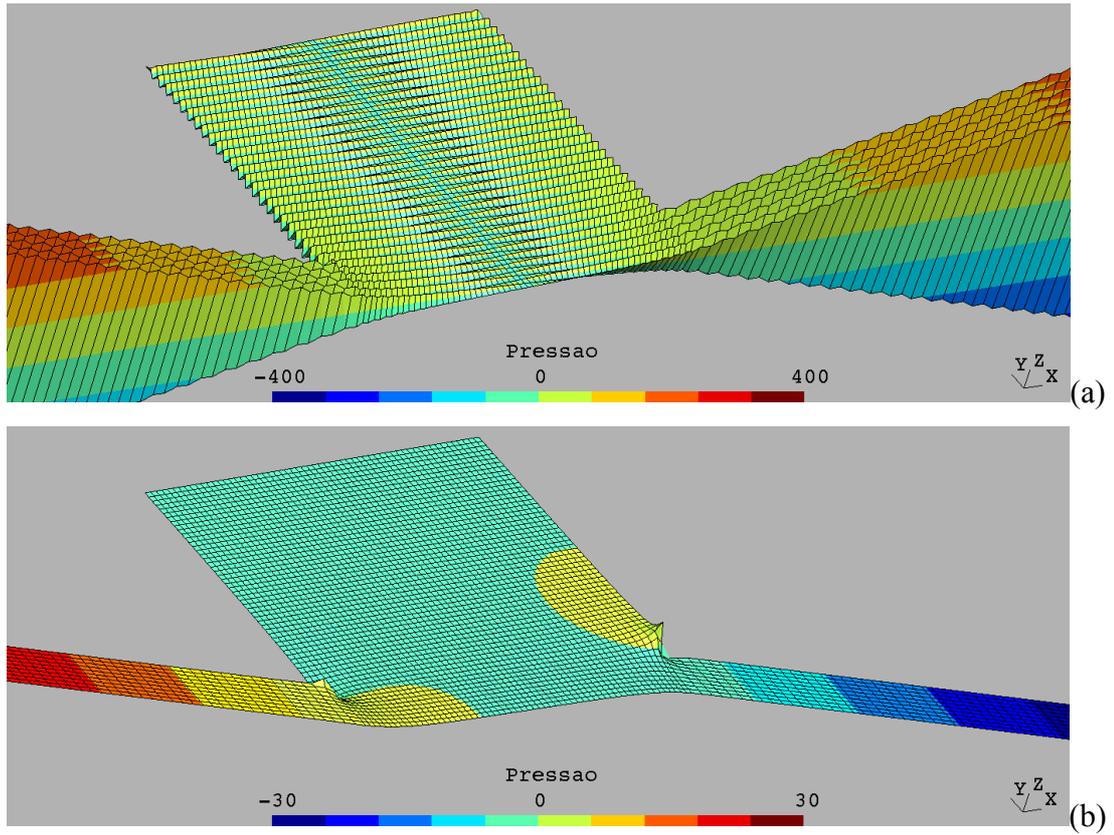
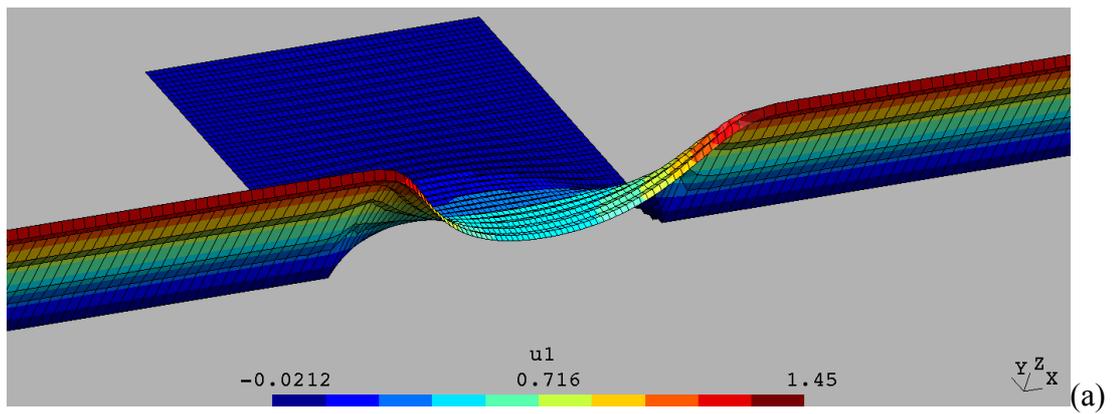


Figura 4.20 – Representação em elevação das isobandas de pressão para o escoamento de um fluido de Oldroyd-B: (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método de Galerkin-Mínimos Quadrados.



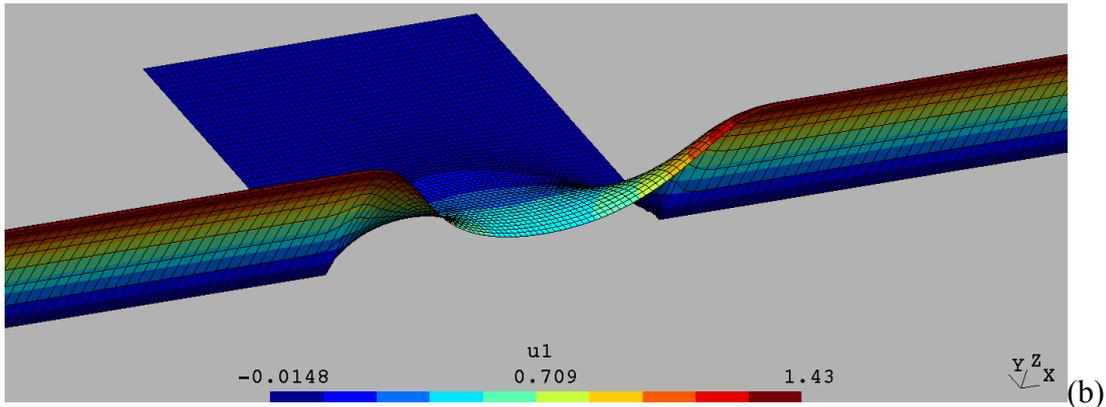


Figura 4.21 – Representação em elevação das isobandas do componente u_1 do vetor velocidade para o escoamento de um fluido de Oldroyd-B: (a) Método de Galerkin clássico; (b) Método de Galerkin-Mínimos Quadrados.

As zonas (aparentemente) rígidas do escoamento são definidas como as regiões que possuem alta viscosidade e a tensão se encontra abaixo da tensão limite de escoamento aparente. A determinação dessas zonas nos escoamentos elasto-viscoplásticos tratados nesta Tese pode ser obtida através de diferentes combinações dos parâmetros do fluido. Diversos trabalhos encontrados na literatura como os de Papanastasiou e Boudouvis, 1997, Burgos e Alexandrou, 1999b, Burgos *et al*, 1999, Mitsoulis e Zisis, 2001, Alexandrou *et al*, 2001, Rudert e Schwarze, 2009, utilizam como critério para a definição das zonas rígidas a tensão limite de escoamento, τ_0 . Ou seja, considerando o modelo elasto-viscoplástico empregado nesta Tese, as regiões do escoamento que apresentem $|\boldsymbol{\tau}| < \tau_{0d}$.

Entretanto, esta abordagem pode levar a resultados imprecisos, uma vez que quando $|\boldsymbol{\tau}| \approx \tau_{0d}$ há um salto abrupto de diversas ordens de grandeza na taxa de cisalhamento, propiciando assim que as flutuações da tensão em torno de τ_{0d} influenciem na determinação das zonas rígidas. Estas flutuações, como apontado por Mitsoulis e Zisis, 2001, e Burgos e Alexandrou, 1999b, são oriundas do parâmetro de regularização da equação para viscosidade empregada (Eq. (2.59)), a razão η_0/τ_0 . Valores altos para a regularização combinados com erros numéricos locais ϵ na taxa de cisalhamento fazem com que o termo regularizador $\exp(-(\dot{\gamma} \pm \epsilon)\eta_0/\tau_0)$ deixe de ser uma função suave, provocando um comportamento de *zig-zag* na interface entre as zonas rígidas e as zonas em escoamento. Nesta Tese, adotou-se outra metodologia, definindo as zonas rígidas como as regiões do escoamento onde a taxa de cisalhamento é menor ou igual a taxa de cisalhamento no fim da região que apresenta viscosidade finita na função viscosidade dada pela Eq. (2.59), $\dot{\gamma}_0$, definida pela razão entre τ_0 e η_0 . Esta metodologia está descrita com mais detalhes em Santos *et al.*, 2011. A Fig. 4.22 mostra a

comparação das zonas rígidas obtidas através do critério clássico (τ) e o critério adotado ($\dot{\gamma}$) em um escoamento de fluido SMD para $\rho^*=0$, $J=10^4$, $n=0.5$ e $U^*=0.1$. Este modelo foi simulado substituindo-se, no problema de valor de contorno da Eq. (3.6), o termo $\eta_e(\dot{\gamma})$ pela Eq. (2.28) e fazendo-se $\eta_s(\dot{\gamma})$ e $\theta(\dot{\gamma})$ iguais a zero.



Figura 4.22 – Escoamento em cavidade forçada – zonas rígidas para $\rho^*=0$, $J=10^4$, $n=0.5$ e $U^*=0.1$: (a) critério de τ ; (b) critério de $\dot{\gamma}$.

A influência da elasticidade do material – introduzida pelo módulo de cisalhamento do material completamente estruturado (G_0) – na morfologia das regiões rígidas do material e nas isobandas de viscosidade e tempo de relaxação é mostrada, respectivamente, nas Fig. 4.23 e 4.24 para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$, variando θ_0^* entre 100 e 5.2×10^3 . Para valores elevados do módulo de cisalhamento (baixos θ_0^*), as zonas rígidas são praticamente simétricas – o que é mostrado também pelas isobandas de viscosidade e tempo de relaxação. Com o aumento de θ_0^* , aumentam os efeitos elásticos no escoamento e os campos citados anteriormente tornam-se assimétricos. Uma comparação experimental qualitativa com o trabalho de de Souza Mendes *et al.*, 2007a é mostrada na Fig. 4.25. Para quantificar a assimetria, foi empregada a seguinte expressão

$$\delta_a = \frac{\delta x_{2m} - \delta x_{2j}}{\delta x_{2m}} \times 100\% \quad (4.1)$$

onde δ_a é a medida relativa de assimetria, δx_{2m} é a distância entre a zona rígida na parede à

montante do canal maior e a linha de simetria e δx_{2j} é a distância entre a zona rígida na parede à jusante do canal maior e a linha de simetria. A presença de elasticidade no escoamento faz com que o valor de δ_a passe de 6.66% para $\theta_0^*=100$ a 27.33% para $\theta_0^*=5.2 \times 10^3$.

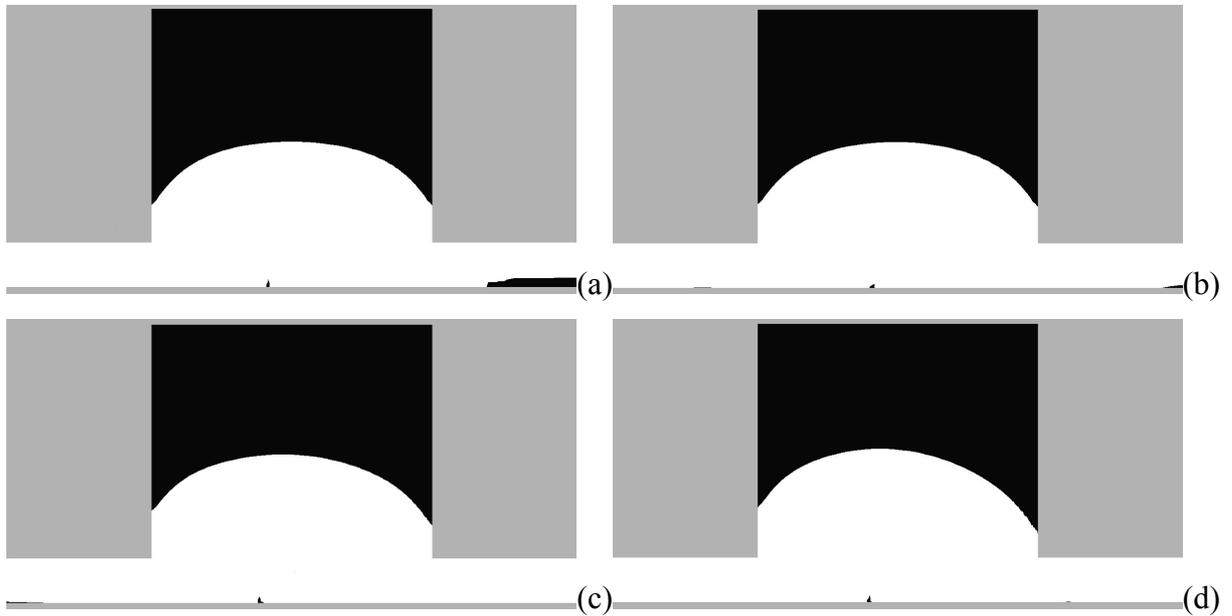


Figura 4.23 – Zonas rígidas para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=2 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=5.26 \times 10^3$.

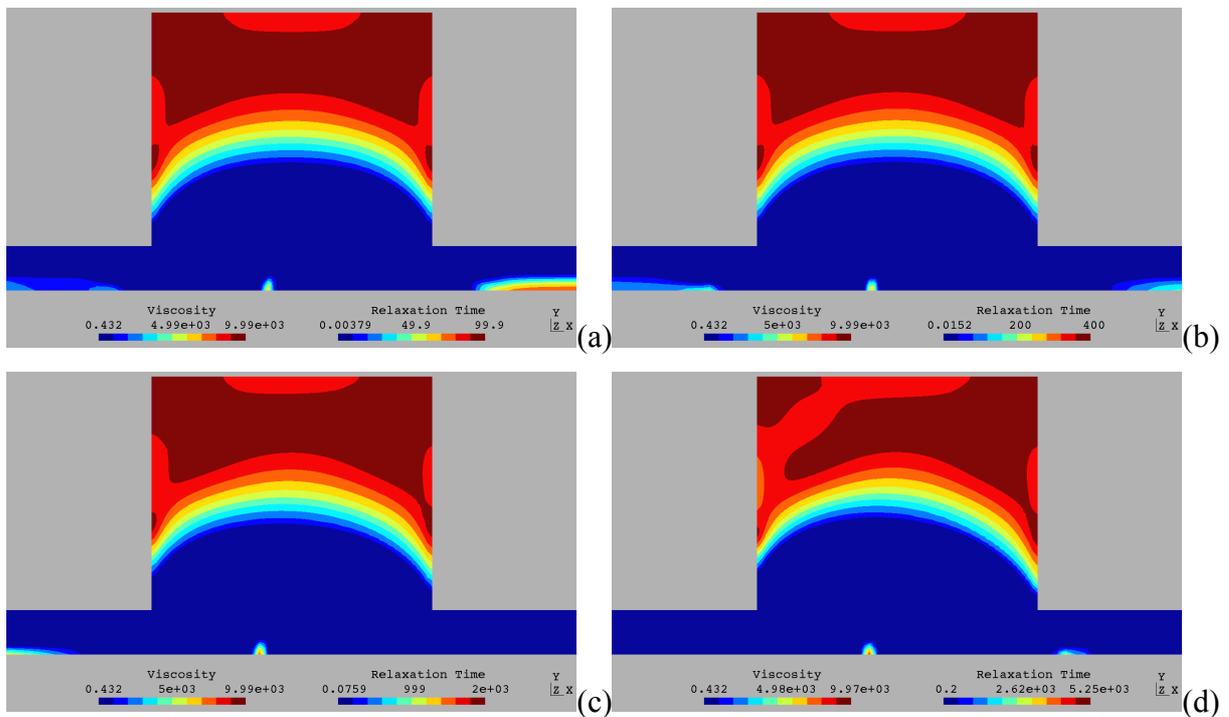


Figura 4.24 – Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=2 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=5.26 \times 10^3$.

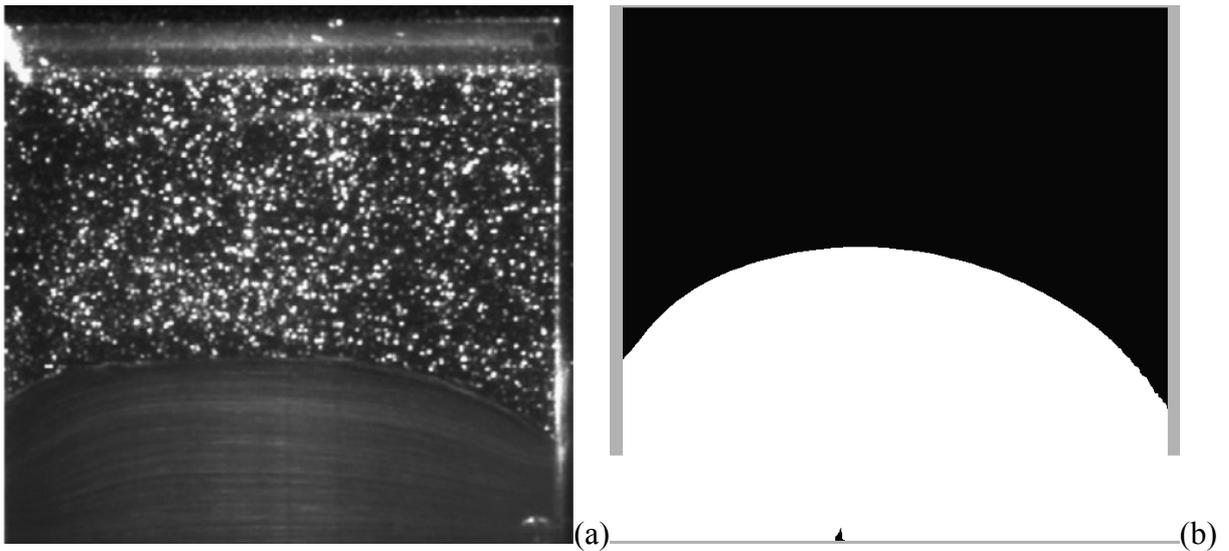
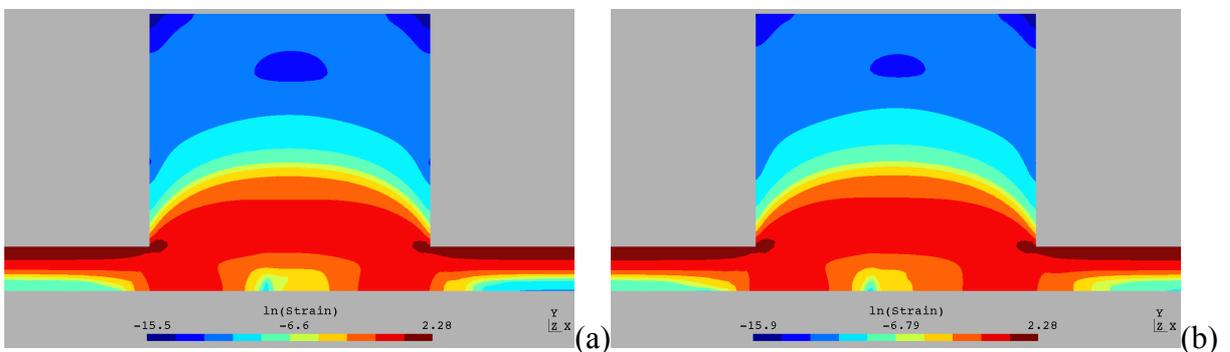


Figura 4.25 – Comparação qualitativa: (a) de Souza Mendes *et al*, 2007a; (b) $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$, $U^*=1.0$ e $\theta_0^*=5.26 \times 10^3$.

A Fig. 4.26 apresenta as isobandas do logaritmo natural da taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$, variando θ_0^* entre 100 e 5.2×10^3 . A taxa de cisalhamento em escoamentos elasto-viscoplásticos pode variar diversas ordens de magnitude. Por exemplo, para um escoamento com $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=2.0$ varia entre 4.95×10^{-5} e 19.5 s^{-1} . Assim, o pós-processamento das isobandas da taxa de cisalhamento exige o emprego de uma escala não-linear. Utiliza-se então uma escala logarítmica. Os resultados da Fig. 4.26 apenas corroboram a tendência de assimetrização observada nas Fig. 4.23 e 4.24 com o aumento da elasticidade.



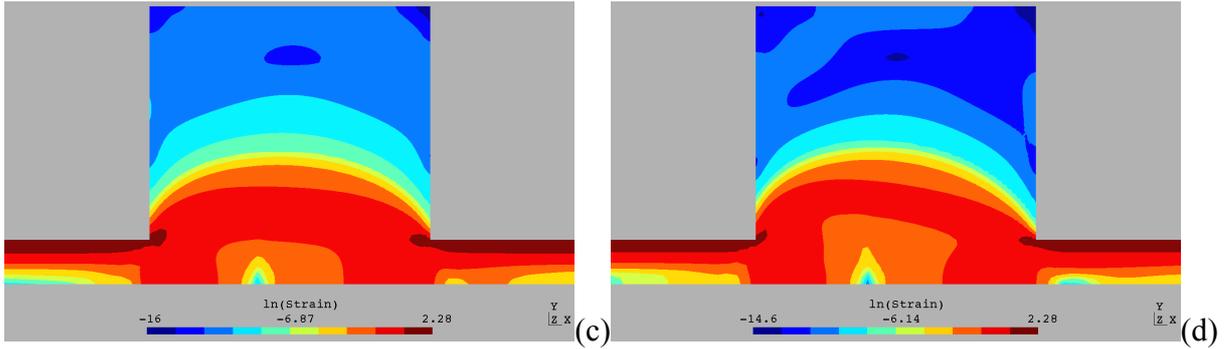


Figura 4.26 – Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=2 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=5.26 \times 10^3$.

As Fig. 4.27-4.29 mostram a influência do índice *power-law* n da Eq. (2.59) na morfologia das zonas rígidas e nas isobandas de viscosidade, tempo de relaxação e taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$. Com o aumento de n , a tendência observada é a simetrização das zonas rígidas presentes no topo da expansão-contracção. Como apontado por de Souza Mendes *et al.*, 2007a, líquidos pseudoplásticos são deslocados mais facilmente que líquidos semelhantes aos de Bingham (maiores índices *power-law*), uma vez que fluidos pseudoplásticos geram maiores taxas de deformação para uma mesma tensão aplicada; este comportamento amplifica os efeitos elásticos, que resulta em zonas rígidas mais assimétricas. Os valores de δ_a para os casos apresentados na Fig. 4.27 são de 15.8%, 26.2%, 29.2% e 36.9%

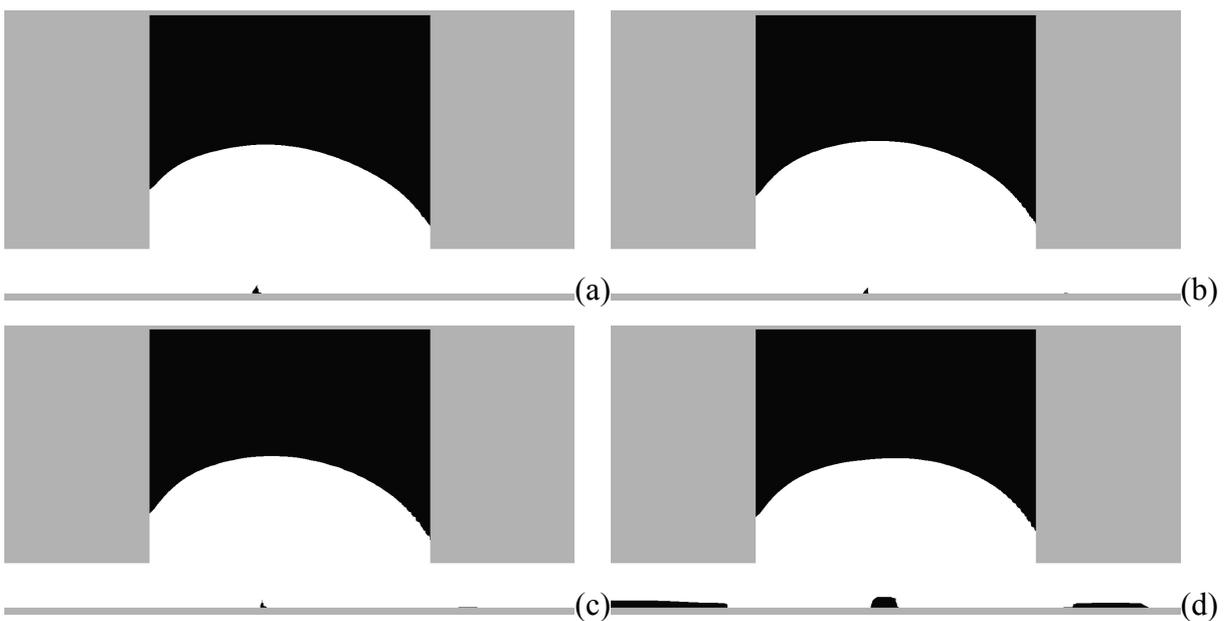


Figura 4.27 – Zonas rígidas para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $n=0.2$; (b) $n=0.5$; (c) $n=0.65$; (d) $n=0.75$.

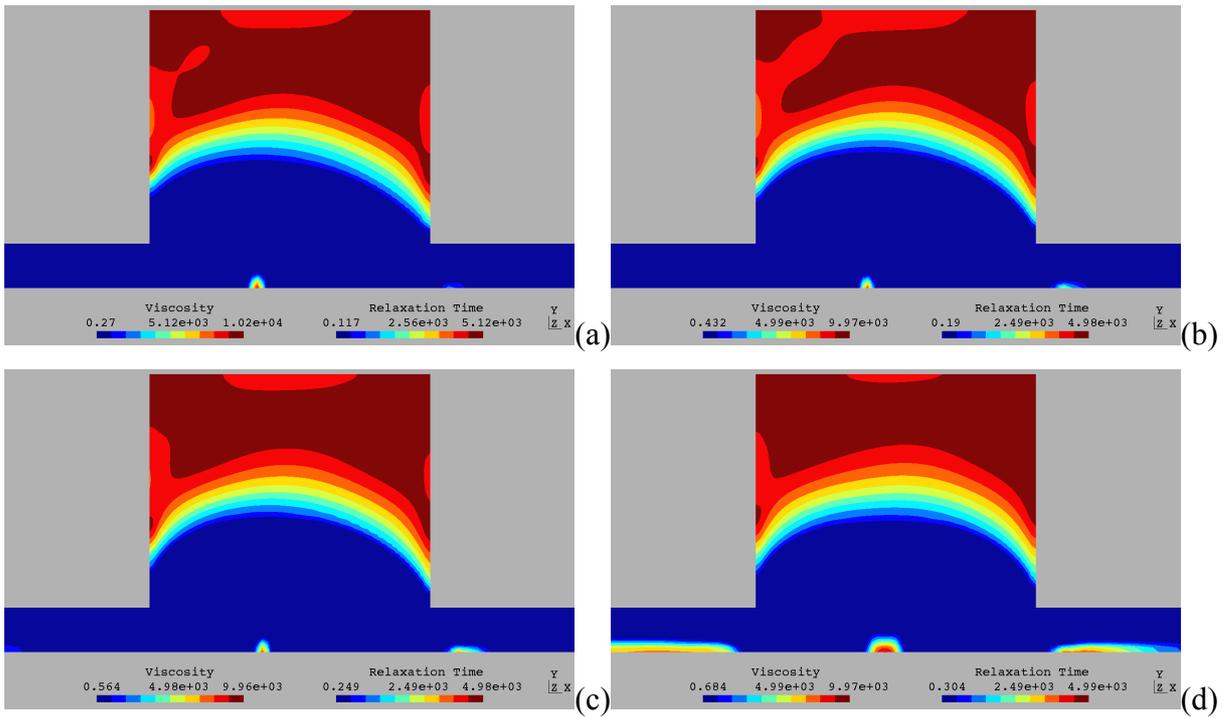


Figura 4.28 – Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $n=0.2$; (b) $n=0.5$; (c) $n=0.65$; (d) $n=0.75$.

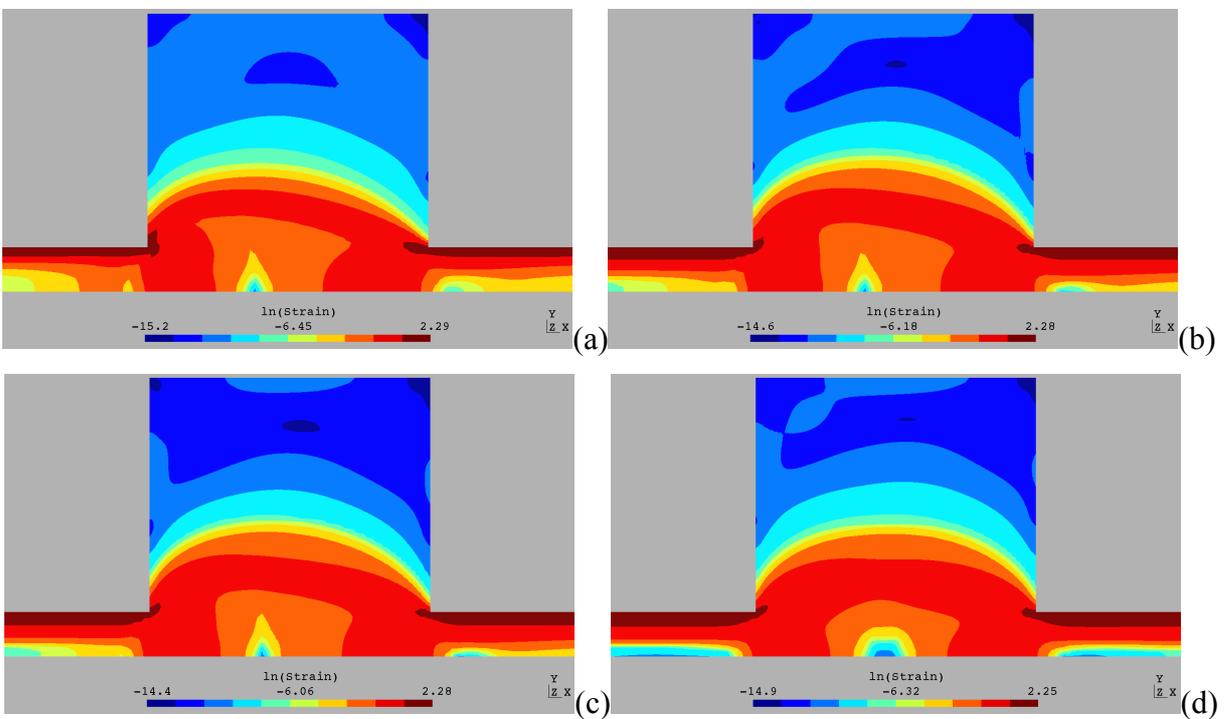


Figura 4.29 – Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $J=5 \times 10^3$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$, e $U^*=1.0$: (a) $n=0.2$; (b) $n=0.5$; (c) $n=0.65$; (d) $n=0.75$.

Nas Fig. 4.30-4.32 é mostrada a influência do número de salto J na morfologia dos escoamentos elasto-viscoplásticos para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$. Este adimensional é variado alterando-se diretamente a viscosidade do material completamente estruturado, η_0 . Cabe observar que esta propriedade reológica é empregada, juntamente com τ_0 , na regularização da Eq. (2.28) – e também na Eq. (2.59). Como já citado, quando a taxa de cisalhamento tende a valores muito baixos, a função viscosidade tende ao valor de η_0 . O decréscimo no tamanho das zonas rígidas com o aumento do parâmetro de regularização – nesta Tese, o *jump number* – está de acordo com os resultados de Liu *et al.*, 2002, embora a diminuição não tenha sido pronunciada. A assimetria também não apresenta uma pronunciada alteração, onde o valor de δ_a fica em torno de 28.5%.

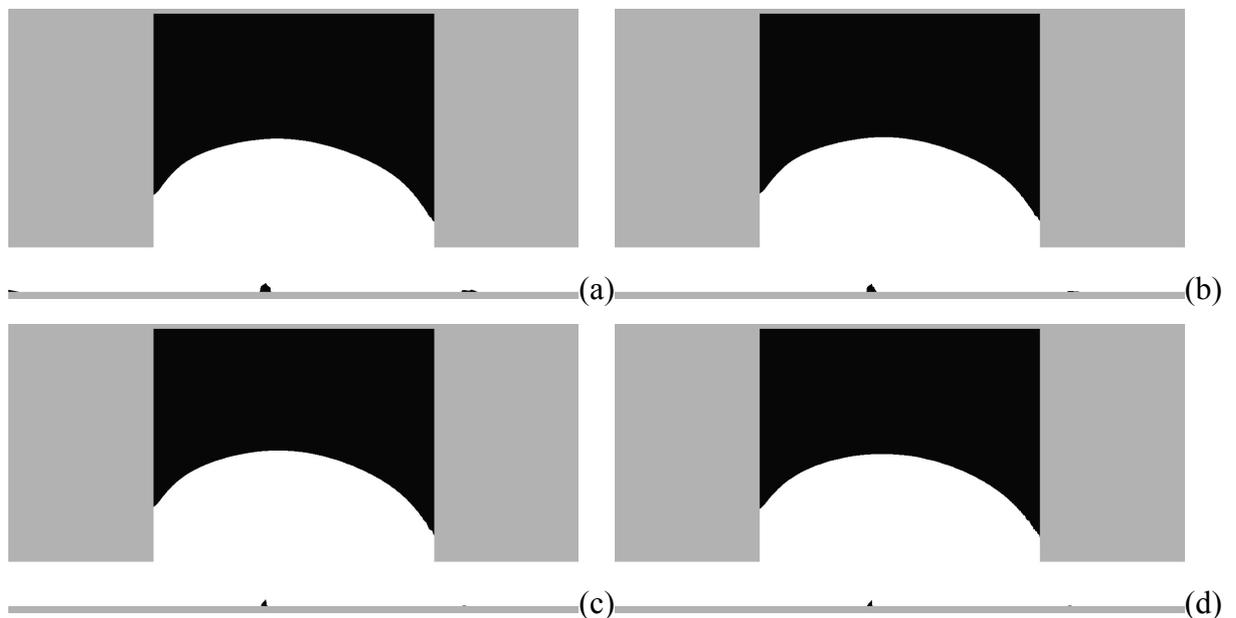


Figura 4.30 – Zonas rígidas para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $J=250$; (b) $J=500$; (c) $J=2500$; (d) $J=5000$.

Através das Fig. 4.31 e 4.32 observa-se, para $J=250$, pequenas zonas submetidas à baixas taxas de deformação e baixo valor para a viscosidade nas quinas superiores e na zona central próxima ao topo da expansão-contração. Com o aumento de J , os campos das figuras apresentam uma tendência a uniformizar seus valores no interior da cavidade. No canal menor, não há uma alteração sensível provocada por J .

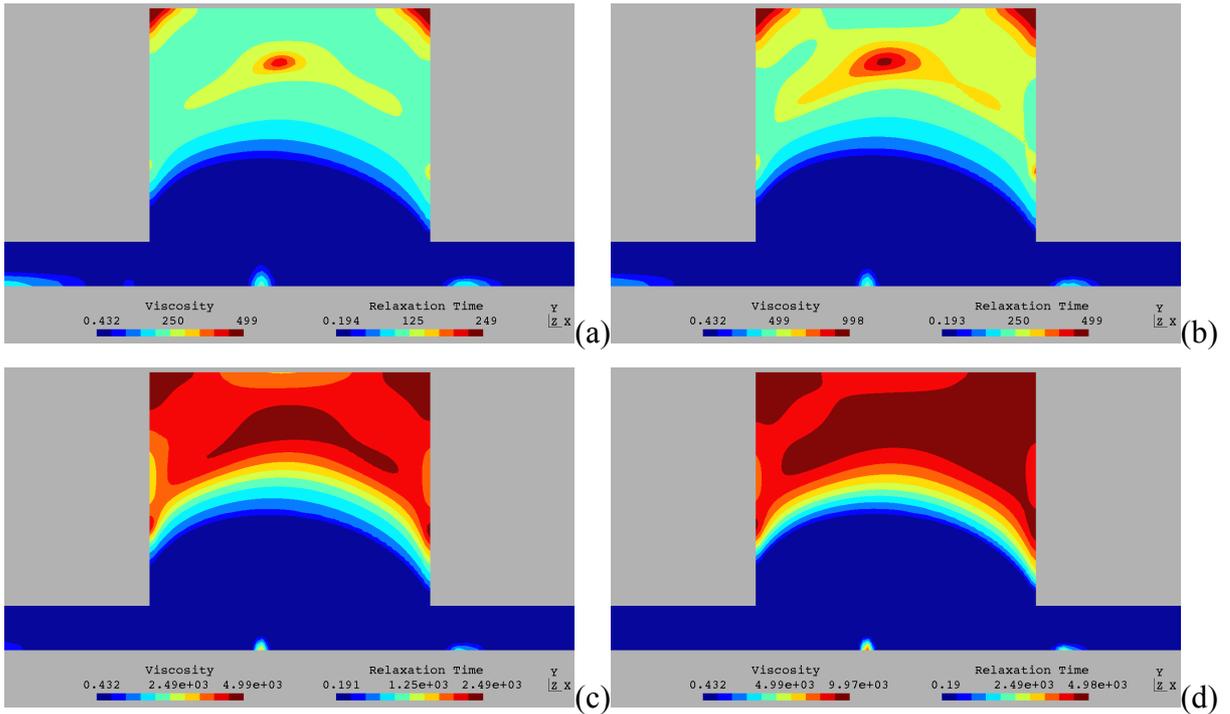


Figura 4.31 – Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $J=250$; (b) $J=5000$; (c) $J=2500$; (d) $J=5000$.

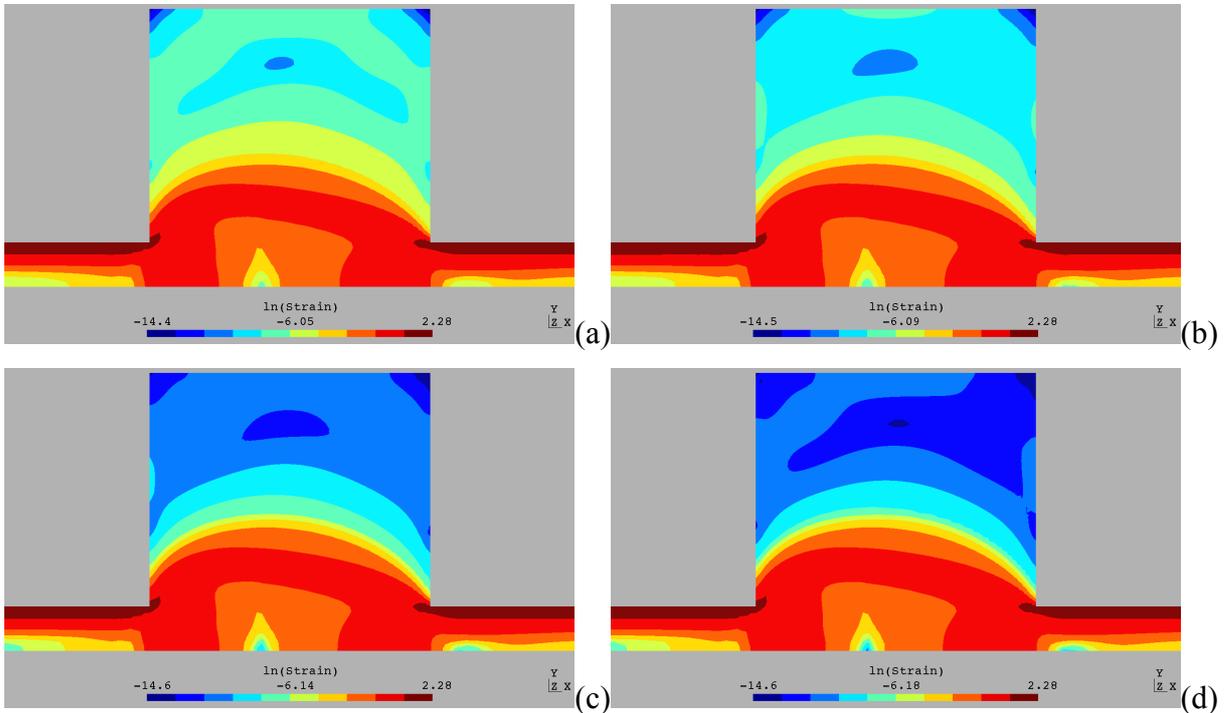


Figura 4.32 – Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $J=250$; (b) $J=5000$; (c) $J=2500$; (d) $J=5000$.

As Fig. 4.33-4.35 mostram os efeitos do aumento da vazão adimensional U^* nas zonas

rígidas, viscosidade, tempo de relaxação e taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $J=5 \times 10^3$. Como mencionado anteriormente, U^* pode ser relacionada com o número de HB (Eq. (3.17)) encontrado em diversos trabalhos na literatura. Deste modo, pode-se relacionar a vazão adimensional com a tensão limite de escoamento do material e interpretar, alternativamente, o aumento da vazão como uma diminuição da tensão limite de escoamento do material. Assim, com o aumento de U^* – equivalente a $1/HB^n$ – ocorre a diminuição das zonas rígidas existentes no canal menor e na expansão-contracção. A assimetria das zonas rígidas do escoamento – observada mesmo para o valor mais baixo de U^* apresentado – é amplificada com o aumento da vazão adimensional até valores de U^* próximo a 1.0 – $\delta_a=17.6\%$ para $U^*=0.1$, $\delta_a=17.9\%$ para $U^*=0.5$ e $\delta_a=29.2\%$ para $U^*=1.0$. Para valores elevados da vazão adimensional, ocorre a diminuição de δ_a , uma vez que o modelo prevê que a elasticidade está associada às regiões aparentemente rígidas do escoamento; ou seja, a diminuição destas regiões leva também a uma diminuição da elasticidade – para $U^*=2.0$, $\delta_a=10.8\%$.

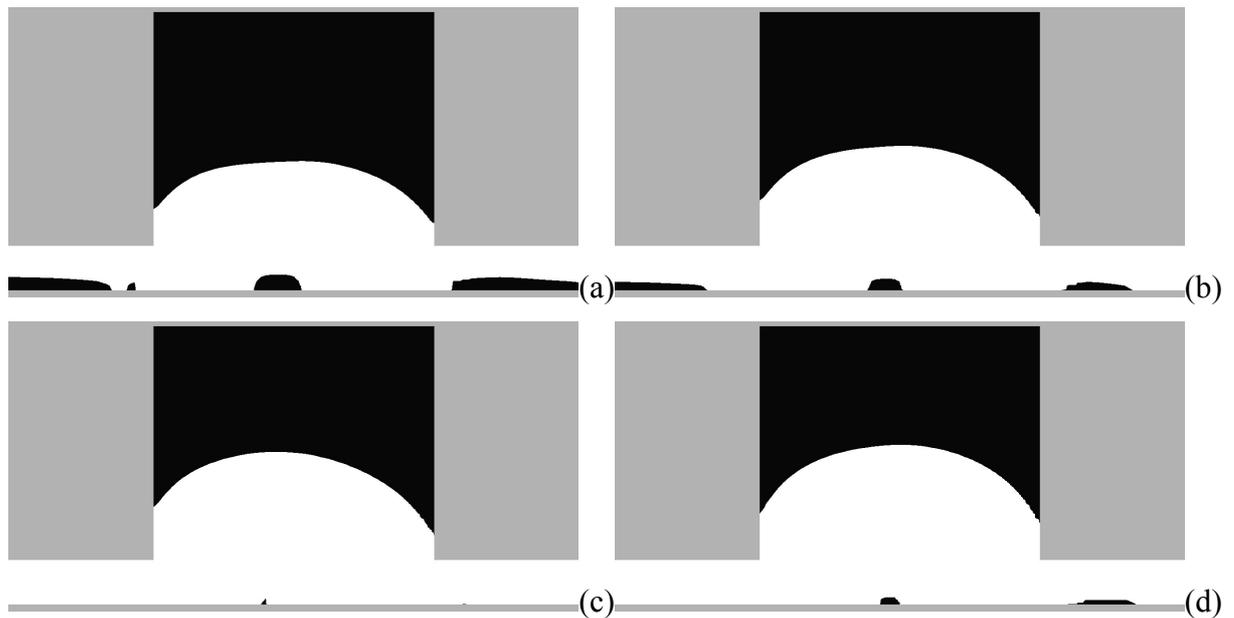


Figura 4.33 – Zonas rígidas para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $J=5000$: (a) $U^*=0.1$; (b) $U^*=0.5$; (c) $U^*=1.0$; (d) $U^*=2.0$.

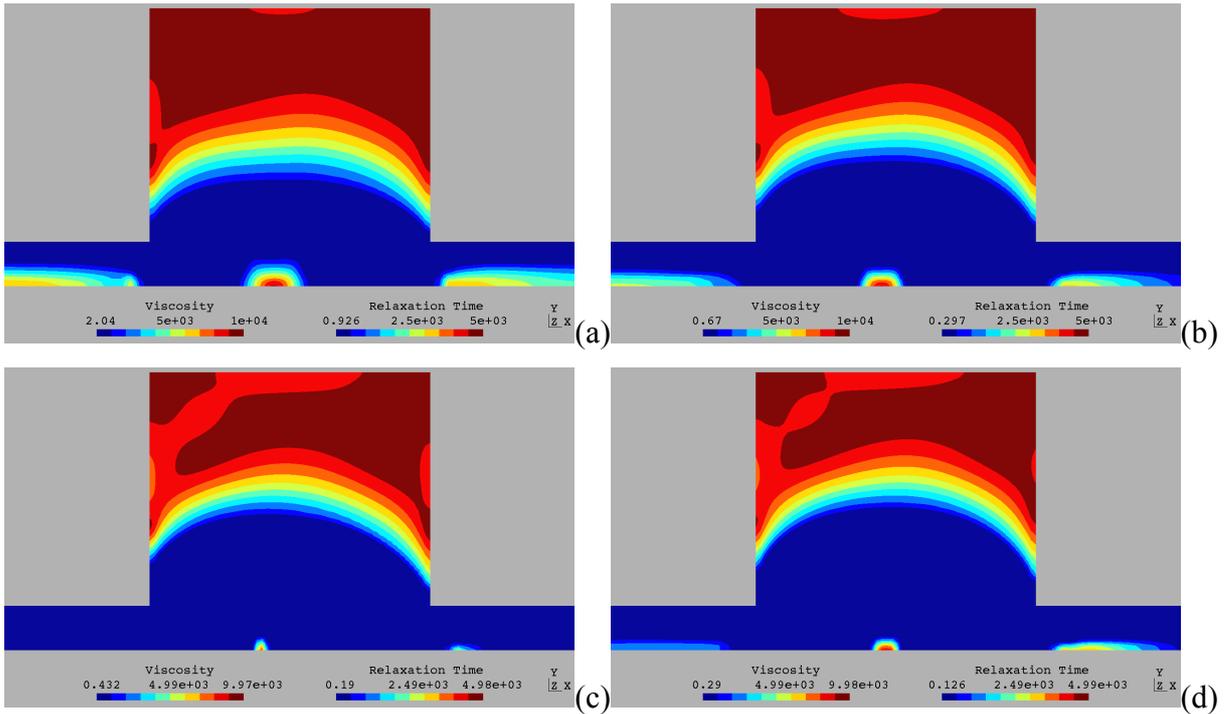


Figura 4.34 – Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $J=5000$: (a) $U^*=0.1$; (b) $U^*=0.5$; (c) $U^*=1.0$; (d) $U^*=2.0$.

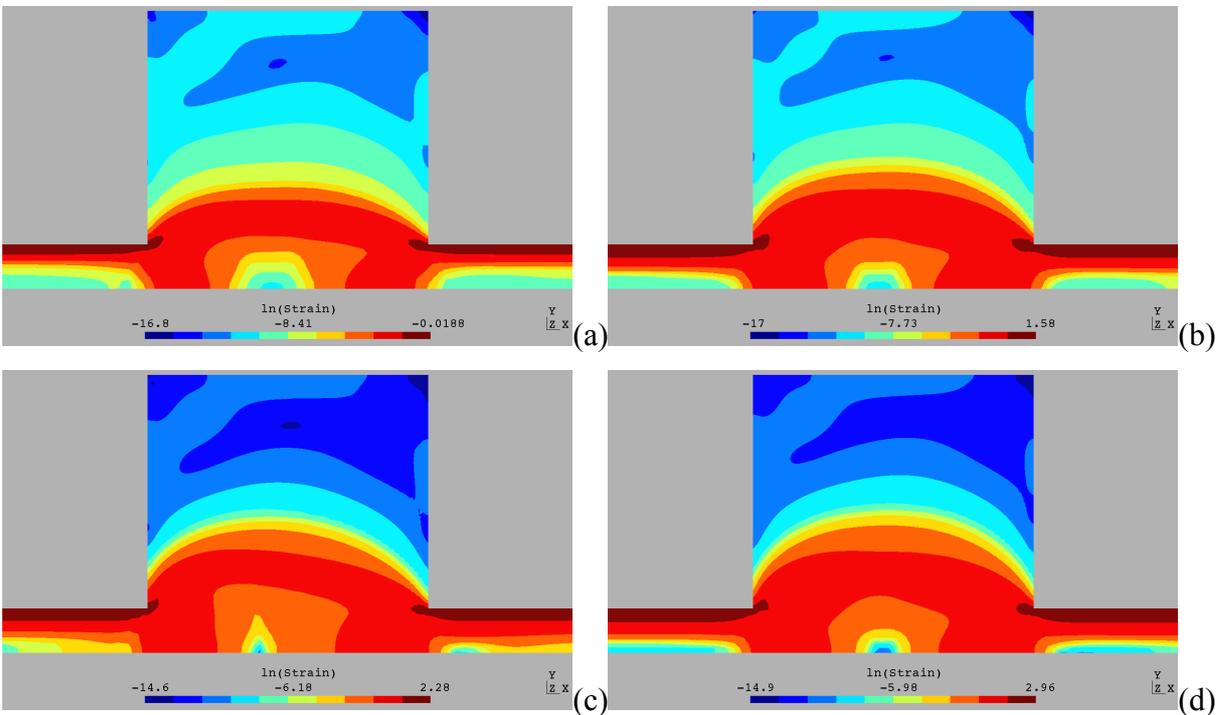


Figura 4.35 – Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=0$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $J=5000$: (a) $U^*=0.1$; (b) $U^*=0.5$; (c) $U^*=1.0$; (d) $U^*=2.0$.

O nível de inércia do fluido, para o modelo aqui introduzido, é alterado através do

parâmetro ρ^* . As Fig. 4.36-4.38 mostram a influência deste grupo adimensional nos escoamentos para $J=5000$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$. Para estes parâmetros e $\rho^*=0$, a elasticidade faz com que a zona rígida no topo da expansão-contracção fique assimétrica, sendo maior à jusante do centro da geometria. Como esperado, a inércia tende a assimetrizar as zonas rígidas na direção oposta, à montante do centro da geometria. A superposição dos efeitos, para uma faixa moderada de ρ^* (2 a 10), deixa a zona rígida no topo da expansão-contracção simétrica, o que é corroborado pelos valores da medida relativa de assimetria: $\delta_a=29.2\%$ para $\rho^*=0$ e $\delta_a=13.3\%$ para $\rho^*=5$.

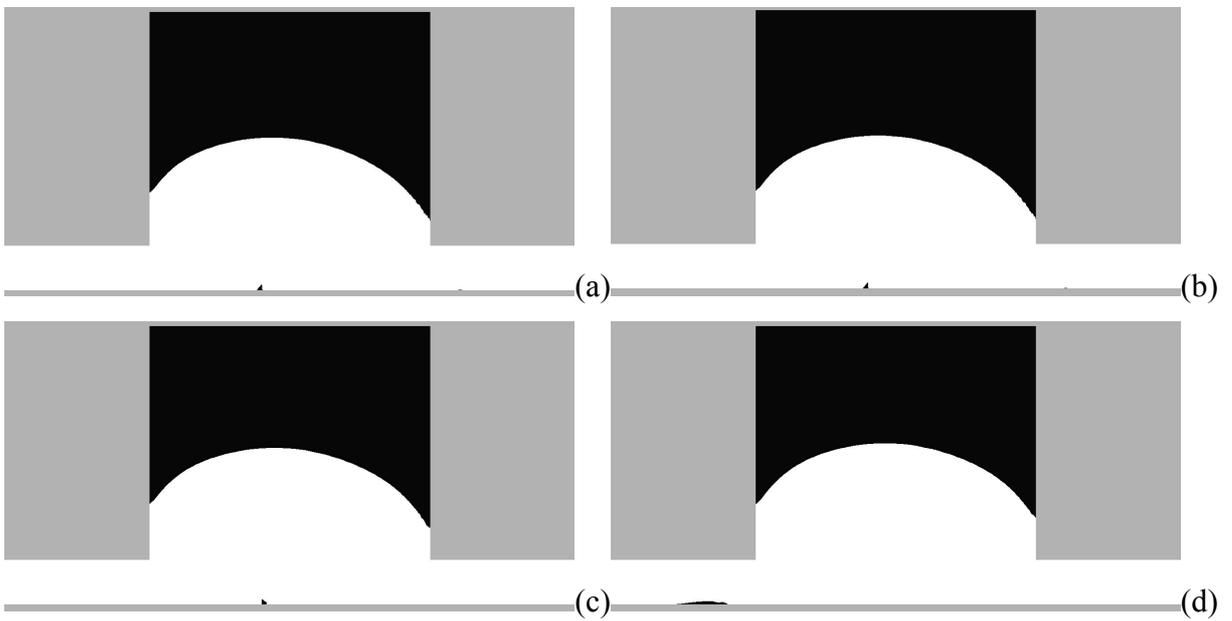
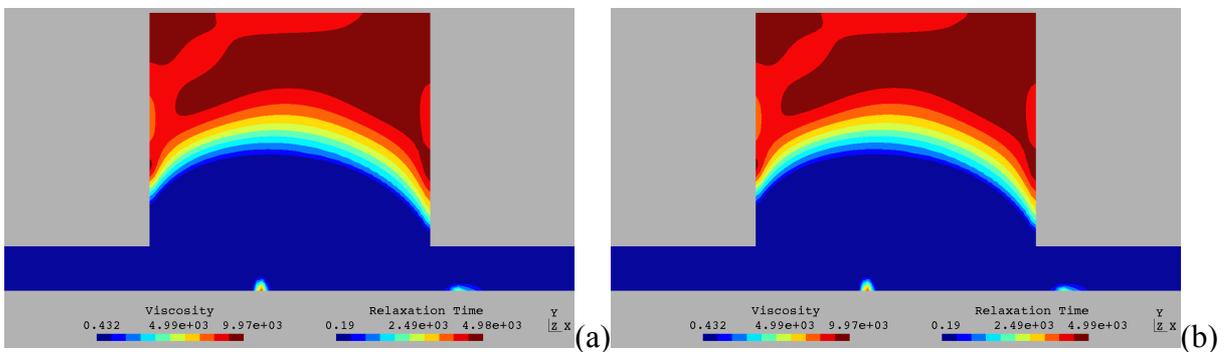


Figura 4.36 – Zonas rígidas para $J=5000$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $\rho^*=0$; (b) $\rho^*=0.1$; (c) $\rho^*=2$; (d) $\rho^*=5$.



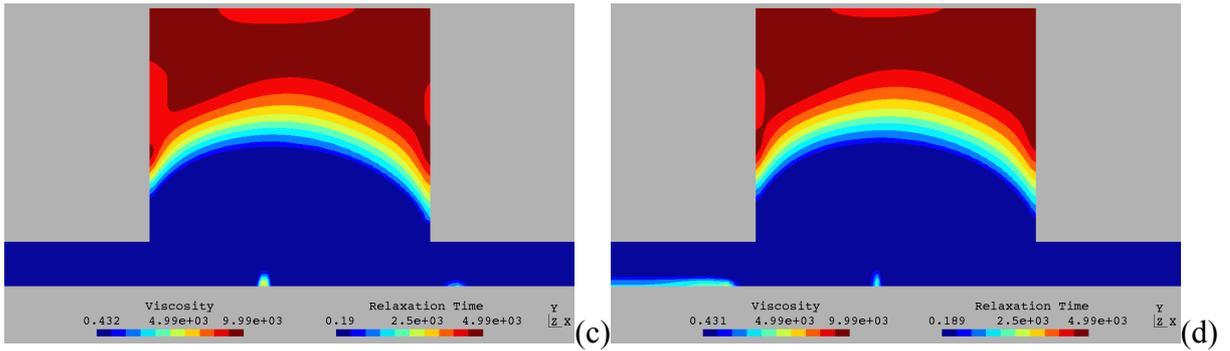


Figura 4.37 – Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $J=5000$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $\rho^*=0$; (b) $\rho^*=0.1$; (c) $\rho^*=2$; (d) $\rho^*=5$.

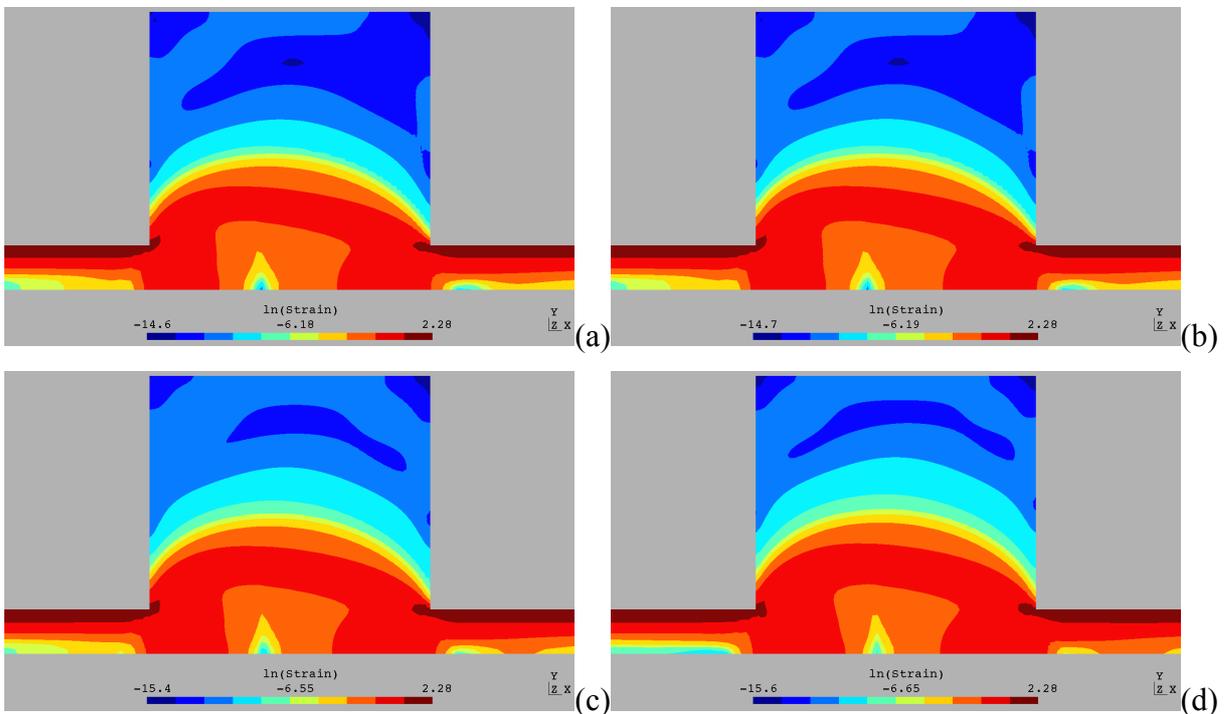


Figura 4.38 – Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $J=5000$, $n=0.5$, $\theta_0^*=5 \times 10^3$ e $U^*=1.0$: (a) $\rho^*=0$; (b) $\rho^*=0.1$; (c) $\rho^*=2$; (d) $\rho^*=5$.

A influência da elasticidade – como citado anteriormente, variada através de G_0 – em escoamentos com inércia do modelo proposto nesta Tese é mostrada nas Fig. 4.39-4.41 para $\rho^*=10$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$, variando θ_0^* entre 100 e 6.3×10^3 . Para valores baixos de θ_0^* , os efeitos de inércia são preponderantes no escoamento, refletindo-se em valores negativos para δ_a . Com o aumento da elasticidade, para um nível fixo de inércia, a sobreposição dos efeitos elásticos e inerciais simetrizam as zonas rígidas no topo da expansão-contração – como também observado nas Fig. 4.36-4-38, mas para um nível fixo de elasticidade. Os valores para a medida relativa de assimetria para os casos apresentados na Fig. 4.39 são,

respectivamente, -35.5, -35.0, -10.5 e -9.74%.

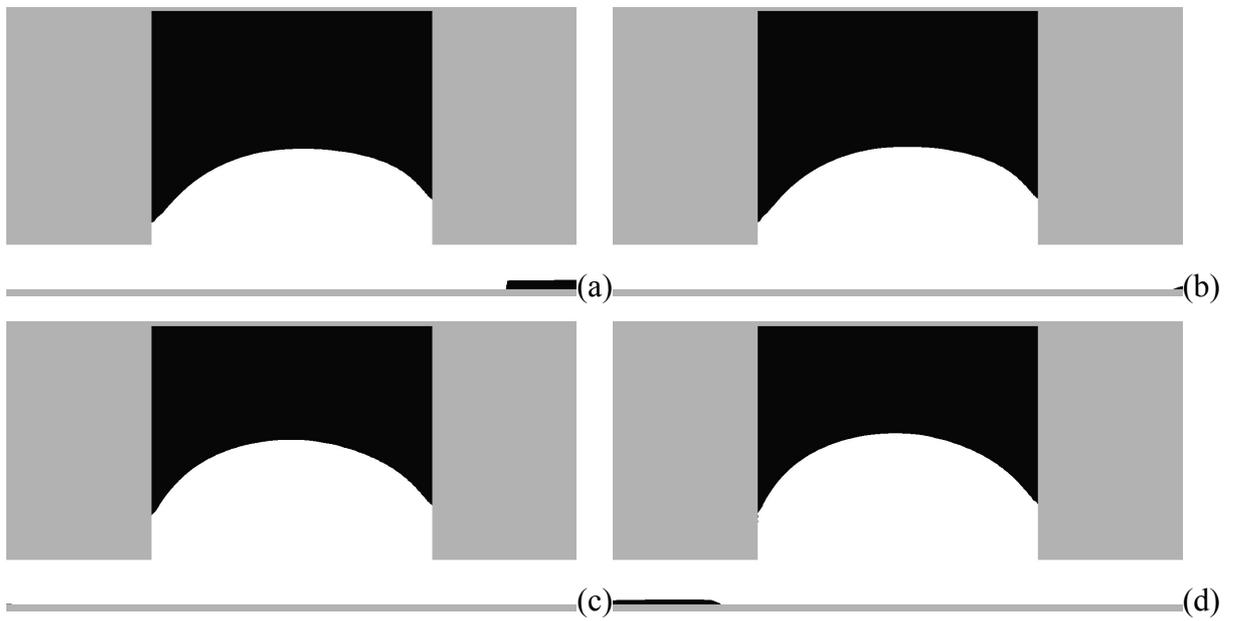


Figura 4.39 – Zonas rígidas para $\rho^*=10$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=5 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=6.3 \times 10^3$.

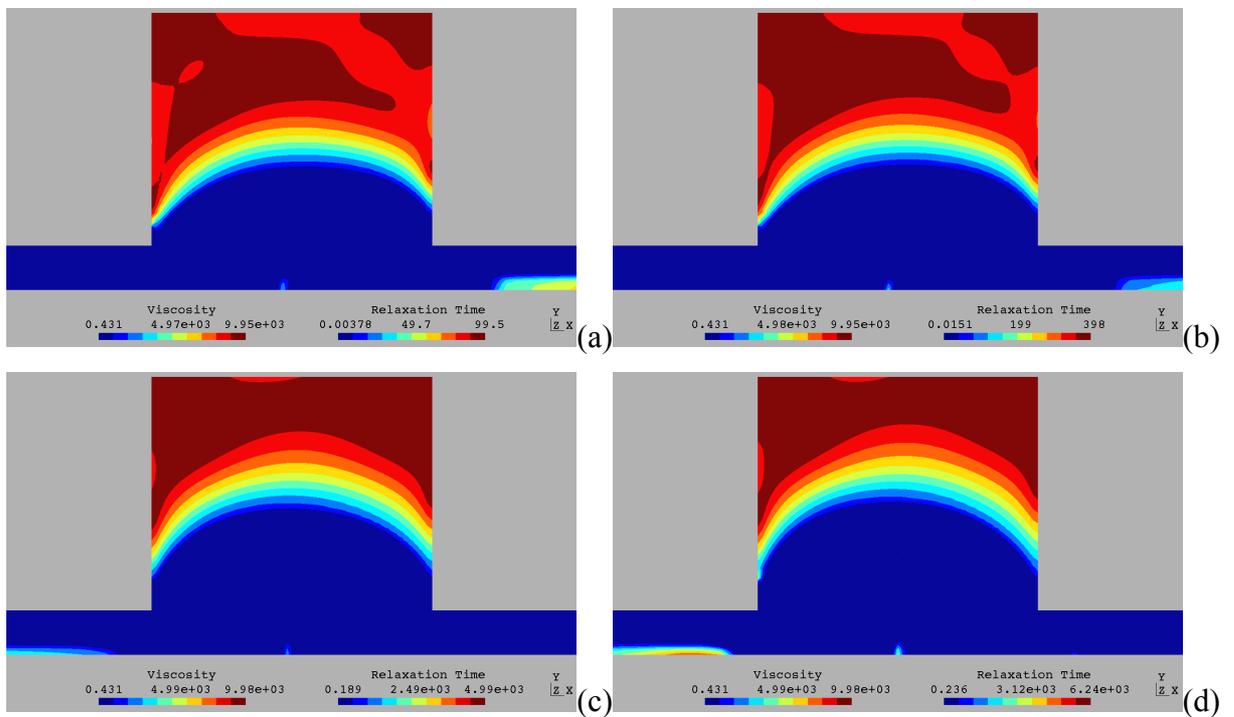


Figura 4.40 – Isobandas de viscosidade e tempo de relaxação para $\rho^*=10$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=5 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=6.3 \times 10^3$.

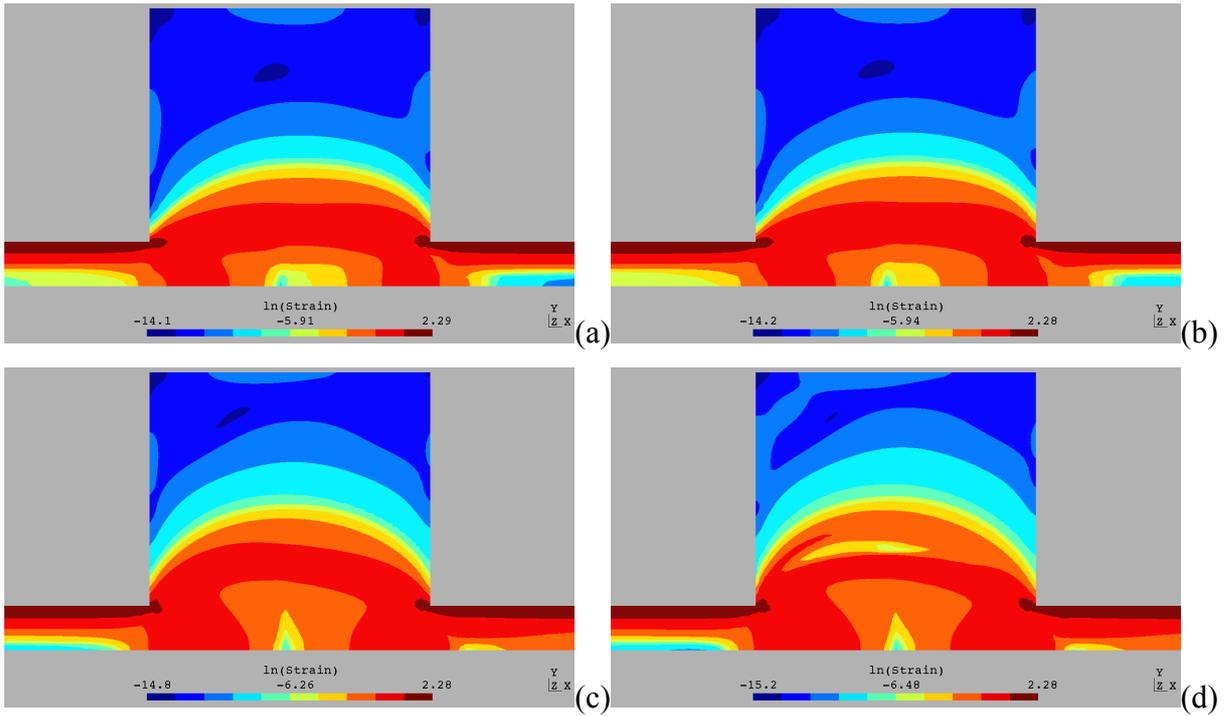


Figura 4.41 – Isobandas do logaritmo da taxa de cisalhamento para $\rho^*=10$, $J=5 \times 10^3$, $n=0.5$ e $U^*=1.0$: (a) $\theta_0^*=100$; (b) $\theta_0^*=400$; (c) $\theta_0^*=5 \times 10^3$; (d) $\theta_0^*=6.3 \times 10^3$.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O escopo desta Tese foi a proposição de uma modelagem mecânica que melhor descreva o escoamento de materiais viscoplásticos reais. Para o alcance deste objetivo, foram realizadas simulações numéricas através do método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados (GLS) de escoamentos de fluidos newtonianos, viscoplásticos e viscoelásticos em geometrias encontradas na literatura correlata – cavidade forçada, cilindro mantido entre placas paralelas e cavidade profunda. Os resultados obtidos mostraram a boa capacidade do código de elementos finitos empregado em capturar os diferentes fenômenos presentes nos escoamentos de fluidos não newtonianos. A partir destas observações, propôs-se uma nova modelagem para elasto-viscoplasticidade, sendo realizadas simulações de escoamentos através de uma expansão-contracção abrupta, geometria encontrada em diferentes processos naturais e industriais. A seguir é apresentada uma revisão geral dos Capítulos que compuseram esta Tese.

O Capítulo 1 apresentou uma motivação para o estudo do escoamento de fluidos não newtonianos, especificamente de materiais que apresentam elasticidade quando submetidos a tensões abaixo de uma tensão limite de escoamento aparente. A necessidade da inclusão de elasticidade nas zonas (aparentemente) rígidas é uma tentativa de reproduzir fenômenos que experimentalmente vêm sendo observados. A complexidade de uma modelagem correta do comportamento reológico desses materiais fez com que diversos modelos fossem propostos ao longo dos anos; dentre eles, destacam-se aqueles empregados como ponto de partida para o modelo proposto nesta Tese, tais como os modelos de Carreau, SMD, convectado superior de Maxwell e Oldroyd-B. As simulações apresentadas foram realizadas a partir de um método de Galerkin mínimos-quadrados, uma alternativa ao método clássico de Galerkin que permite que as aproximações das variáveis do problema sejam de igual ordem, uma vez que não há necessidade de satisfazer as condições de compatibilidade entre os sub-espacos de elementos finitos. Apresentou-se também alguns dos trabalhos publicados recentemente através de uma revisão de artigos de interesse sobre a observação experimental e a aproximação numérica de escoamentos de fluidos viscoplásticos e elasto-viscoplásticos.

O Capítulo 2 introduziu as equações de conservação de massa e de balanço de *momentum* para fluidos incompressíveis nas quais baseia-se o modelo mecânico utilizado nesta Tese. É definido o modelo Fluido Newtoniano Generalizado (FNG), onde a viscosidade newtoniana é generalizada permitindo que a viscosidade do fluido varie com a taxa de cisalhamento. A seguir, houve uma breve revisão dos modelos de viscoplasticidade mais

empregados na literatura – como Bingham, Herschel-Bulkley, Carreau, Bingham e Herschel-Bulkley regularizados por Papanastasiou, Bi-Viscosidade e SMD. Os modelos de viscoelasticidade convectado superior de Maxwell (UCM) e Oldroyd-B também são revisados. Esses modelos são a base dos modelos de elasto-viscoplasticidade e tixotropia propostos recentemente. Ao final, foi apresentado o modelo proposto nesta Tese, que inclui elasticidade nas zonas (aparentemente) rígidas do escoamento de uma maneira reológica e não através de parâmetros numéricos.

O Capítulo 3 abordou detalhadamente a aproximação numérica do modelo mecânico introduzido no Capítulo 2 através de um método de elementos finitos estabilizado. A partir da definição dos subespaços de elementos finitos para o componente polimérico da tensão extra, velocidade e pressão, introduz-se a formulação de Galerkin clássica, onde, através da adição de termos estabilizadores malha-dependentes, obtém-se a formulação GLS. Uma vez que estes termos são resíduos das equações governantes do problema, a solução exata do problema também os satisfaz, preservando a consistência do método. A comparação dos resultados obtidos através dos métodos de Galerkin e GLS para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de uma cavidade forçada mostrou a inexistência de oscilações espúrias para o método estabilizado empregado. Para este mesmo problema, foi apresentada a comparação com resultados da literatura para um escoamento com inércia, mostrando boa concordância.

Os resultados numéricos obtidos a partir das simulações realizadas e sua discussão foram mostrados no Capítulo 4. Inicialmente, foram apresentados resultados empregando o modelo de Oldroyd-B a parâmetros constantes para escoamentos em um canal com uma cavidade profunda e em torno de um cilindro mantido entre placas paralelas objetivando-se a investigação da influência da elasticidade e da inércia na morfologia das isobandas de tensão extra e velocidade. Através da introdução de uma viscosidade e um tempo de relaxação funções do segundo invariante do tensor taxa de deformação no modelo convectado superior de Maxwell (modelo de White-Metzner), foram avaliados os efeitos de *shear-thinning* para o escoamento em torno de um cilindro mantido entre placas paralelas. A seguir, foram apresentados os resultados obtidos com o modelo elasto-viscoplástico proposto nesta Tese. O primeiro passo foi a definição do critério empregado para a determinação das zonas rígidas, o qual é baseado na taxa de cisalhamento e não na intensidade do tensor de tensão extra. Após, é discutida a sensibilidade da dinâmica dos escoamentos à variação de parâmetros como o nível de elasticidade, o índice *power-law* n da função viscosidade, o número de salto, a vazão adimensional e o nível de inércia do fluido. Os resultados obtidos mostraram-se coerentes e

fisicamente realistas, representando qualitativamente os fenômenos observados em trabalhos da literatura. Esta comparação qualitativa mostra mais uma vez a confiabilidade do código de elementos finitos empregado para estas simulações – NNFEM, em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

5.1 Comentários

A formulação multi-campos de elementos finitos baseada no método de Galerkin mínimos-quadrados (GLS) mostrou-se estável na aproximação de escoamentos de fluidos newtonianos, viscoplásticos, viscoelásticos e elasto-viscoplásticos – modelo proposto nesta Tese. A metodologia GLS permite o emprego da mesma interpolação de baixa ordem – elemento quadrangular bi-linear – para a aproximação dos campos do componente polimérico da tensão extra, velocidade e pressão, violando as condições de compatibilidade entre os sub-espacos de tensão extra-velocidade e velocidade-pressão – condição de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi. Outro ponto que pode ser destacado é a extensão natural para problemas tridimensionais, uma vez que não necessita satisfazer novas condições de compatibilidade entre os sub-espacos – no método de Galerkin clássico, uma combinação específica de interpolações de elementos finitos para problemas bidimensionais não necessariamente satisfaz as condições para problemas tridimensionais.

Para os escoamentos elasto-viscoplásticos simulados, pode-se fazer algumas observações. Pela variação da elasticidade do material observa-se a assimetria das zonas rígidas na geometria com o aumento do nível elástico. A influência do índice *power-law* vai na direção contrária: maiores n tornam as zonas rígidas mais simétricas, uma vez que os líquidos pseudoplásticos são deslocados mais facilmente que líquidos semelhantes aos de Bingham ($n \approx 1.0$). Analisando-se a influência do número de salto, observa-se a diminuição das regiões rígidas do escoamento com o aumento deste parâmetro, uma vez que este diminui o valor da taxa de cisalhamento limite de escoamento, propiciando que regiões do fluido que apresentam menores taxas de cisalhamento passem a escoar. Este comportamento está de acordo inclusive com a literatura de viscoplasticidade. Pode-se verificar uma forte influência da vazão adimensional na diminuição das zonas rígidas no escoamento de fluidos elasto-viscoplásticos, onde a atuação deste número adimensional acaba também amplificando os efeitos elásticos – assimetria das zonas rígidas. A inércia, variada através da massa específica adimensional, tende a assimetrizar as zonas rígidas na direção oposta àquela dos

efeitos elásticos, à montante do centro da geometria. A superposição dos efeitos, para uma faixa moderada de inércia, acaba deixando a zona rígida no topo da expansão-contração simétrica.

5.2 Perspectivas Futuras

Como observado em diversos trabalhos numéricos na literatura, modelos que preveem elasticidade lidam com dificuldades numéricas que impõem um valor limite para o número de Weissenberg para o qual soluções estáveis podem ser obtidas [Afonso *et al.*, 2009, Tomé *et al.*, 2012]. Esta limitação é conhecida como *High-Weissenberg Number Problem* (HWNP). Fattal e Kupferman, 2004, propuseram uma metodologia chamada de formulação *matrix-logarithm* ou conformação logarítmica para as equações constitutivas viscoelásticas, baseado na reformulação da equação constitutiva em termos do logaritmo do tensor conformação. De acordo com os autores, ao aplicar o logaritmo no tensor conformação, reduz-se as variações de grande amplitude – encontradas principalmente em pontos de singularidades, como pontos de estagnação e quinas, e próximo às paredes.

Afonso *et al.*, 2009, investigam a performance da metodologia da conformação logarítmica aproximando as equações através do método de volumes finitos, para escoamentos sem inércia, em regime permanente e transiente, de fluidos de Oldroyd-B a Phan-Thien-Tanner (PTT) em torno de um cilindro. Em comparação com a metodologia padrão, a formulação com a conformação logarítmica da tensão mostrou-se mais robusta, sendo possível alcançar escoamentos com maiores números de Weissenberg.

Assim, algumas perspectivas para trabalhos futuros são:

- Implementação da conformação logarítmica da tensão no código de elementos finitos NNFEM, possibilitando a obtenção de resultados com maiores níveis de elasticidade para escoamentos de fluidos viscoelásticos como os modelos convectado superior de Maxwell, Oldroyd-B, White-Metzner.
- Implementação de modelos não lineares como Giesekus, Phan-Thien-Tanner e FENE-P [Azaiez *et al.*, 1996].
- Extensão do método de Galerkin mínimos-quadrados para a resolução de problemas tridimensionais.
- Resolução de problemas de fronteira livre.
- Implementação de esquemas para malhas adaptativas visando a melhor captura

da interface entre as zonas (aparentemente) rígidias e escoantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdali, S.S., Mitsoulis, E., Markatos, N.C., 1992. “Entry and exit flows of Bingham fluids”, **Journal of Rheology**, vol 36(2), pp. 389-407.
- Afonso, A., Oliveira, P.J., Pinho, F.T., Alves, M.A., 2009. “The log-conformation tensor approach in the finite-volume method framework”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 157, pp. 55-65.
- Alexandrou, A. N., Le Menn, P., Georgiou, G., Entov, V., 2005. "Flow instabilities on Herschel-Bulkley fluids", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 116, pp. 19-32.
- Alexandrou, A. N., McGilvray, T. M., and Burgos, G., 2001. "Steady Herschel-Bulkley fluid in tree-dimensional expansions", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 100, pp. 77-96.
- Alves, M.A., Pinho, F.T., Oliveira, P.J., 2001. "The flow of viscoelastic fluids past a cylinder: finite-volume high-resolution methods", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 97, pp. 207-232.
- Astarita G., Marrucci G., 1974. “**Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics**” McGraw-Hill, London.
- Azaiez, J., Guénette, R., Aït-Kadi, A., 1996. “Numerical simulation of viscoelastic flows through a planar contraction”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 62, pp. 253-277.
- Babuška, I., 1973. “The finite element method with Lagrangian multipliers”, **Numer. Math.**, vol. 20, pp. 179-192.
- Barnes, H.A., 1999. “The yield stress — a review or ‘ $\pi\alpha\nu\tau\alpha$ ρει’—everything flows? ”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol 81, pp. 133-178.
- Behr, A.M., Franca, L.P., Tezduyar, T.E., 1993. “Stabilized finite element methods for the velocity – pressure – stress formulation of incompressible flows”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 104, pp. 31-48.
- Behr, M., Arora, D., Coronado-Matutti, O., Pasquali, M., 2004, “Stabilized finite element methods of GLS type for Oldroyd-B viscoelastic fluid”, **European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering – ECCOMAS 2004**.
- Beverly, C.R., Tanner, R.I., 1989. “Numerical analysis of extrudate swell in viscoelastic materials with yield stress”, **Journal of Rheology**, vol 33 (6), pp. 989–1009.
- Bird, R.B, Armstrong, R.C., Hassager, O., 1987. “**Dynamics of Polymeric Liquids**”, vol. 1, John Wiley & Sons, USA.

Bodnár, T., Sequeira, A., 2010. “Numerical Study of the Significance of the Non-Newtonian Nature of Blood in Steady Flow Through a Stenosed Vessel ”, **Advances in Mathematical Fluid Mechanics**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Brezzi, F., 1974. “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers”, **RAIRO Ser. Rouge** 8, pp. 129-151.

Botella, O., Peyret, R., 1998. “Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow”, **Computers & Fluids**, vol. 47, pp. 421-433.

Burgos, G.R., Alexandrou, A.N., 1999a. “On the determination of yield surfaces in Herschel-Bulkley fluids”, **Journal of Rheology**, vol 43 (3), pp. 463-484.

Burgos, G.R., Alexandrou, A.N., 1999b. “Flow development of Herschel–Bulkley fluids in a sudden three-dimensional square expansion”, **Journal of Rheology**, vol 43 (3), pp. 485-498.

Burgos, G.R., Alexandrou, A.N., and Entov, V., 1999. “On the determination of yield surfaces in Herschel-Bulkley fluids”, **Journal of Rheology**, vol. 43 (3), pp. 463-483.

Carter, R.E., Warren, R.C., 1987. “Extrusion stresses, die swell, and viscous heating effects in double-based propellants”, **Journal of Rheology**, vol 31, pp. 151–173.

Chang, P., Patten, T.W., Finlayson, B.A., 1979. “Collocation and Galerkin finite element methods for viscoelastic fluid flow – I”, **Computers and Fluids**, vol 7, pp. 267-283.

Ciarlet, P.G., 1978. “**The finite element method for elliptic problems**”, North-Holland, Amsterdam.

De Souza Mendes, P.R., Dutra, E.S.S., 2004. “Viscosity Function for Yield-Stress Liquids”, **Applied Rheology**, vol. 14, pp. 296-302.

De Souza Mendes, P.R., 2007. “Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics ”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 147, pp. 109-116.

De Souza Mendes, P.R., Naccache, M.F., Vargas, P.R., Marchesini, F.H., 2007a. “Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions – contractions”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 142, pp. 207-217.

De Souza Mendes, P.R., Dutra, E.S.S., Siffert, J.R.R., Naccache, M.F., 2007b. “Gas displacement of viscoplastic liquids in capillary tubes ”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 145, pp. 30-40.

De Souza Mendes, P.R., 2009. “Modeling the thixotropic behavior of structured fluids”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 164, pp. 66-75.

Dullaert, K., Mewis, J., 2006. “A structural kinetics model for thixotropy, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol 139, pp. 21–30.

Fattal, R., Kupferman, R., 2004. “Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol 123, pp. 281–285.

Franca, L.P., and Frey, S.L., 1992. “Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 99, pp. 209-233.

Frey, S., Silveira, F.S., Zinani, F., 2010a. “Stabilized mixed approximations for inertial viscoplastic fluid flows”, **Mechanics Research Communications**, vol. 37, pp. 145-152.

Frey, S., Fonseca, C.E., Zinani, F., Naccache, M.F., 2010b. “Galerkin least-squares approximations for upper-convected Maxwell fluid flows”, **Mechanics Research Communications**, vol. 37, pp. 666-671.

Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, C.T.,. “High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method”, **Journal of Computational Physics**, vol. 48, pp. 387-411.

Hermany, L. *Aproximações Estabilizadas de escoamentos de Fluidos Viscoplasticos Através de uma Expansão Seguida de uma Contração Axissimétrica*, 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986. “A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 59, pp. 85-99.

Hughes, T.J.R., 1987. “**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

Huilgol, R.R., Phan-Thien, N., 1997. “**Fluid Mechanics of Viscoelasticity**”, Rheology Series, vol. 6, Elsevier Science B.V., Amsterdam, Holanda.

Johnson, C., 1987. “**Numerical solution of partial differential equations by the finite element method**”, Cambridge University Press, Cambridge.

Jay, P., Magnin, A., and Piau, J. M., 2001. "Viscoplastic fluid flow through a sudden axisymmetric expansion", **AIChE Journal**, vol. 47, pp. 2155-2166.

Liu, B.T., Muller, S.J., Denn, M.M., 2002, “Convergence of a regularization method for creeping flow of a Bingham material about a rigid sphere”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 102, pp. 179-191.

Matallah, H., Townsend, P., Webster, M.F., 1998. “Recovery and stress-splitting schemes for viscoelastic flows”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 75, pp.

139-166.

Mitsoulis, E., Zisis, T., 2001. "Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 101, pp. 173-180.

Mitsoulis, E., Huilgol, R.R., 2004. "Entry flows of Bingham plastics in expansions", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 122, pp. 45-54.

Mujumdar, A., Beris, A.N., Metzner, A.B., 2002. "Transient phenomena in thixotropic systems", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol 102, pp. 157–178.

Nassar, B., de Souza Mendes, P.R., Naccache, M.F., 2011. "Flow of elasto-viscoplastic liquids through an axisymmetric expansion–contraction", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 166, pp. 386-394.

Naccache, M.F., Barbosa, R.S., 2007. "Creeping flow of viscoplastic materials through a planar expansion followed by a contraction", **Mechanics Research Communications**, vol. 34, pp. 423-431.

O'Donovan, E.J., Tanner, R.I., 1984. "Numerical study of the Bingham squeeze film problem", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 15, pp. 75-83.

Oden, J.T., 1972. "**Finite elements of nonlinear continua**", McGraw-Hill, New York.

Oden, J.T., Reddy, J.N., 1983. "**Variational methods in theoretical mechanics**", Springer-Verlag, Berlin.

Papanastasiou, T.C., 1987. "Flows of Materials with Yield", **Journal of Rheology**, vol. 31 (5), pp. 385-404.

Papanastasiou, T.C., Boudouvis, A.G., 1997. "Flows of viscoplastic materials: models and computations". **Computers & Structures**, vol 64, pp. 677-694

Rajagopalan, D., Armstrong, R.C., Brown, R.A., 1990. "Finite element methods for calculation of steady, viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 36, pp. 159-192.

Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994. "**The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**", CRC Press Inc., USA.

Rudert, A., Schwarze, R., 2009. "Experimental and numerical investigation of a viscoplastic Carbopol gel injected into a prototype 3D mold cavity ", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 161, pp. 60-68.

Santos, D.D., Frey, S.L., Naccache, M.F., de Souza Mendes, P.R., 2011. "Numerical approximations for flow of viscoplastic fluids in a lid-driven cavity ", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** , vol. 166, pp. 667-679.

Saramito, P., 2007. "A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows",

Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, vol 145, pp. 1–14.

Sikorski, D., Tabuteau, H, de Bruyn , J.R., 2009. “Motion and shape of bubbles rising through a yield-stress fluid ”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol 159, pp. 10-16.

Sofou, S., Muliawan, E.B., Hatzikiriakos, S.G., Mitsoulis, E., 2008. “Rheological characterization and constitutive modeling of bread dough”, **Rheologica Acta**, vol 47, pp. 369–381.

Sun, J., Smith, M.D., Armstrong, R.C., Brown, R.A., 1999. "Finite element method for viscoelastic flows based on the discrete adaptive viscoelastic stress splitting and the discontinuous Galerkin method: DAVSS-G/DG", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 89, pp 281-307.

Szady, M.J., Salamon, T.R., Liu, A.W., Bornside, D.E., Armstron, R.C., Brown, R.A., 1995. "A new mixed finite element method for viscoelastic flows governed by differential constitutive equations", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 59, pp. 215-243.

Tomé, M.F., Castelo, A., Afonso, A.M., Alves, M.A., Pinho, F.T., 2012. “Application of the log-conformation tensor to three-dimensional time-dependent free surface flows”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 175-176, pp. 44-54.

Valette, R., Laure, P., Demay, Y., Agassant, J.F., 2004. “Convective linear stability analysis of two-layer coextrusion flow for molten polymers”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 121, pp. 41-53.

Vradis, G.C., Ötügen, M.V., 1997, “The axisymmetric sudden expansion of a non-Newtonian viscoplastic fluid”, **Journal of Fluids Engineering**, vol. 119, pp. 193-200.

Zinani, F.S.F. *Desenvolvimento e Implementação Computacional de Formulações Galerkin Mínimos-Quadrados para escoamentos Não-Newtonianos Sensíveis à Cinemática*, 2006. Tese (Doutoramento em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Zinani, F.; Frey, S.L., 2006. “Galerkin Least-Squares Finite Element Approximations for Isochoric Flows of Viscoplastic Liquids”. **Journal of Fluids Engineering - Transactions of the Asme, Estados Unidos**, v. 128, n. 4, p. 856-863.

Zinani, F.S.F. e Frey, S.L., 2008, “Galerkin Least-Squares Multifield Approximations for Flows of Inelastic Non-Newtonian Fluids ”, **Journal of Fluids Engineering**, vol. 130, pp. 1-14.

Zisis, T., Mitsoulis, E., 2002. “Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** , vol. 105, pp. 1-20.