

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Integração Semi-Lagrangeana num Modelo
Oceano-Atmosfera e Ajuste Geostrófico no
Domínio Tempo**

por

Sandra Eliza Vielmo

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen
Orientador

Porto Alegre, agosto de 2005

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Sandra Eliza Vielmo

Integração Semi-Lagrangeana num Modelo Oceano-Atmosfera e Ajuste Geostrófico no Domínio Tempo / Sandra Eliza Vielmo .—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2005.

165 p.: il.

Tese de Doutorado—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2005. Orientador: Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen

Área: Vibrações, Controle e Sinais

Palavras chave: Equações de Águas Rasas, Modelo Oceano-Atmosfera, Resposta Dinâmica, Método Semi-Lagrangeano

Integração Semi-Lagrangeana num Modelo Oceano-Atmosfera e Ajuste Geostrófico no Domínio Tempo

por

Sandra Eliza Vielmo

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. José Walter Cardenas Sotil - LNCC

Prof. Dr. Andrei Bourchtein - MAT/UFPel

Prof. Dr. Leandro Farina - PPGMAp/UFRGS

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, agosto de 2005

Aos meus filhos,
Vinícius e Vitor,
meu par ordenado favorito.

AGRADECIMENTOS

Devido ao longo período de duração do doutorado, muitas pessoas se fizeram presentes e participantes neste processo e não poderia deixar de agradecê-las.

Ao Professor Júlio C. R. Claeysen pela confiança, ensinamentos, incentivo e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho.

A Deus a existência de meus pais, Luiz e Zélia, alicerces do que sou hoje e aos meus irmãos Rosângela, Janice, Alberto e Luiz Eduardo, pelo carinho, apoio e confiança depositados.

A Marize e João Carlos, meus professores queridos.

Aos meus filhos Vinícius e Vitor, seres humanos especiais, pelo apoio e incentivo nesta longa caminhada, a qual vivenciamos, vibramos e sofremos sempre ao meu lado.

A Ana de Fátima, meu braço direito, ao Marco e a Juliana pelo cuidado com nossos filhos durante minha ausência. Também, as amigas Ana e Letícia, que estando presentes na vida deles, me ajudaram muito no aspecto emocional.

Aos amigos e colegas de trabalho Rosemaira, Inês e Antônio pelo incentivo, dicas no trabalho e disponibilidade em ajudar com as aulas na universidade.

Aos amigos Sânzara e Nathy, Anabel e Anselmo, pela acolhida em suas residências em Porto Alegre; e Olga, Simone e Carlos Henrique em São Paulo.

Aos amigos Olga, Renata, Rudimar, Hernan, Aline, Nô, Sélia, Emanuel, Romildo e Cleide pelos anos de convívio e grande amizade que tivemos em São Paulo; aos colegas Sânzara, Viviane e Cristiano em Porto Alegre; as amigas Liziani, Jussara, Márcia, Luciana, Maria Luíza, Iracema e Ana Paula em Santa Maria.

Ao Edson, pelo companheirismo e amizade que partilhamos durante grande parte do doutorado.

A Universidade Federal de Santa Maria, em particular ao Departamento de Matemática pela apoio e oportunidade de afastamento e a CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos professores, colegas e funcionários do PPGMap, pelo apoio e incentivo recebidos.

Com certeza existem muitas outras pessoas, as quais não foram citadas, mas que estão incluídas no meu agradecimento.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	x
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 PRELIMINARES	5
2.1 Leis de Conservação das Propriedades da Água do Mar	7
2.2 Aproximações	15
2.3 Condições de Contorno Cinemáticas	25
2.4 Condições de Contorno Dinâmicas	26
3 EFEITOS DE PERTURBAÇÕES NA PRESSÃO DO FLUIDO E DA ROTAÇÃO: LINEARIZAÇÃO	28
3.1 Perturbações na Pressão do Fluido	29
3.1.1 Ondas Longas e Aproximação Hidrostática	30
3.1.2 Simulações Simbólicas	36
3.2 Efeitos da Rotação	43
3.2.1 Equilíbrio Geostrófico: Solução Estacionária	47
3.3 Resposta Dinâmica da Equação de Klein-Gordon	49

3.3.1	Decomposição da Resposta Forçada	52
3.4	Resposta Dinâmica das Equações de Águas Rasas Forçadas	58
3.5	Ajuste Geostrófico Unidimensional	59
3.5.1	Considerações sobre Energia e Dispersão	65
3.6	Adimensionalização	69
3.7	Simulações Simbólicas	72
4	EFEITOS DE PERTURBAÇÕES NA PRESSÃO ATMOSFÉRICA E DO VENTO	82
4.1	Perturbações na Pressão Atmosférica	82
4.2	Forçante devido a Tensão do Vento: Transporte de Ekman	84
4.3	Simulações Simbólicas	90
5	MODELOS NÃO-LINEARES DE ÁGUAS RASAS TRIDIMEN- SIONAL E BIDIMENSIONAL	96
5.1	Equação para Superfície Livre	96
5.2	Modelo Tridimensional	97
5.3	Condições de Contorno relacionadas ao Atrito do Vento e a Topografia do Fundo	99
5.4	Modelo Bidimensional Integrado na Vertical	100
6	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS	106

6.1	Análise Característica das Equações Governantes Bidimensionais em um Fluido Homogêneo	106
6.2	Discretização do Modelo Hidrodinâmico	110
6.3	Método Semi-Lagrangeano	122
6.4	Discretização do Modelo de Transporte	127
7	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	129
7.1	Modelo Hidrodinâmico	129
7.1.1	Baía Fechada com profundidade constante - 2D	129
7.1.2	Baía Aberta com canal em forma de S - 2D	135
7.1.3	Baía de Guanabara - 3D	137
7.1.4	Lagoa dos Patos - 3D	142
7.2	Modelo de Transporte	147
7.2.1	Teste Teórico - 2D	148
8	CONCLUSÕES	152
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	154
	APÊNDICE A-1	161
A-1.1	Derivada Material D/Dt : Derivada de Stokes	161
A-1.2	Teorema de Transporte de Reynolds	162
A-1.3	Conservação da Vorticidade Potencial para uma Camada Homogênea Rasa	163

A-1.4	Restrição da Estabilidade para os Métodos de Diferença Central, Upwind e Semi-lagrangeano	165
-------	---	-----

Lista de Figuras

Figura 2.1	Componentes de Ω	10
Figura 2.2	Acelerações de Coriolis e Centrífuga	12
Figura 2.3	Geometria da superfície perturbada	23
Figura 3.1	Propagação de η sem os efeitos de rotação para o exemplo 1. . .	38
Figura 3.2	Propagação de u sem os efeitos de rotação para o exemplo 1. . .	39
Figura 3.3	Propagação de η sem os efeitos de rotação para o exemplo 2. . .	41
Figura 3.4	Propagação de u sem os efeitos de rotação para o exemplo 2. . .	42
Figura 3.5	A resposta impulso $h(t, x)$ e sua derivada $h_t(t, x)$	63
Figura 3.6	Soluções geostróficas v_g e η_g e condição inicial η_o para o exemplo 1.	72
Figura 3.7	Perfis da velocidade v para o exemplo 1, sob os efeitos de rotação.	73
Figura 3.8	Perfis da velocidade u para o exemplo 1, sob os efeitos de rotação.	74
Figura 3.9	Propagação de u e v , sob os efeitos de rotação para o exemplo 1.	75
Figura 3.10	Perfis da elevação η para o exemplo 1, sob efeitos de rotação. . .	76
Figura 3.11	Perfis da elevação η para o exemplo 1, sob efeitos de rotação em t=25.	76
Figura 3.12	Decomposição de η para o exemplo 1, sob os efeitos de rotação.	77
Figura 3.13	Soluções geostróficas v_g e η_g e condição inicial η_o para o exemplo 2.	79

Figura 3.14	Perfis da velocidade u para o exemplo 2, sob os efeitos de rotação.	79
Figura 3.15	Perfis da velocidade v para o exemplo 2, sob os efeitos de rotação.	80
Figura 3.16	Perfis da elevação η para o exemplo 2, sob efeitos de rotação. . .	80
Figura 4.1	Resposta particular $\eta_p(t, x, y)$, com x (km) e y (km).	93
Figura 4.2	Resposta livre $\eta_{hp}(t, x, y)$ induzida pela particular.	94
Figura 4.3	Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$	95
Figura 6.1	Malha Computacional e Notações.	110
Figura 6.2	Malha Semi-Lagrangeana	124
Figura 7.1	Elevação $\eta(t, x, y)$ em t=24h, com $\tau^{xs} = \tau$ e $\tau^{ys}=0$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.	130
Figura 7.2	Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$ em t=24h, com $\tau^{xs}=0$ e $\tau^{ys} = \tau$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.	131
Figura 7.3	Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$ em t=24h, com $\tau^{xs} = \tau^{ys} = \tau$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.	132
Figura 7.4	Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$ em t=24h, com $\tau^{xs} > \tau^{ys}$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.	133
Figura 7.5	Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$ em t=24h, com $\tau^{xs} < \tau^{ys}$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.	134
Figura 7.6	Circulação em t=12hs pelos métodos (a) ADI, (b) Benqué e (c) Presente trabalho.	136
Figura 7.7	Circulação em t=12hs pelos métodos (a) ADI e Benqué e (b) presente trabalho.	136

Figura 7.8	Circulação em $t=18$ hs pelos métodos (a) ADI e Benqué e (b) presente trabalho.	137
Figura 7.9	(a) Geometria e (b) Batimetria da Baía de Guanabara.	138
Figura 7.10	Nível d'água η e campo de velocidades em $t=109$ hs, (a) na superfície e (b) 10m de profundidade.	139
Figura 7.11	Nível d'água η e campo de velocidades em $t=115$ hs, (a) na superfície e (b) 10m de profundidade.	140
Figura 7.12	Diferenças das velocidades u e v entre a superfície e 10m de profundidade para os tempos $t=109$ hs e $t=115$ hs.	141
Figura 7.13	Diferenças da velocidade vertical w entre a superfície e 10m de profundidade para os tempos $t=109$ hs e $t=115$ hs.	142
Figura 7.14	Geometria e Batimetria da Lagoa dos Patos.	144
Figura 7.15	Imagem de Satélite e detalhe da região estuariana da Lagoa dos Patos. As áreas sombreadas correspondem a regiões de enseada da Lagoa.	145
Figura 7.16	Elevação da superfície livre da Lagoa dos Patos em $t=60$ dias, com ventos NE e SO e o Canal de Rio Grande fechado.	146
Figura 7.17	Elevação da superfície livre da Lagoa dos Patos em $t=60$ dias, com ventos NE e SO e o Canal de Rio Grande aberto.	147
Figura 7.18	Comparação dos esquemas: (ce), (up) e (la) para advecção e diferenças finitas explícitas para a difusão.	149
Figura 7.19	Comparação dos esquemas: (ce), (up) e (la) para advecção e Crank-Nicolson para difusão.	150

Figura 7.20 Comparação dos esquemas: (ce), (up) e (la) para advecção e diferenças finitas implícitas para difusão.	150
Figura 7.21 Método Semi-Lagrangeano para a equação de advecção-difusão em vários instantes de tempo.	151

Lista de Símbolos

m	massa do elemento de fluido	kg
dv	volume do elemento de fluido	m^3
$\rho(t, x, y, z)$	densidade do fluido	kg/m^3
ρ_o	densidade de referência constante	
ρ_a	densidade do ar	
F_R	força Resultante	$N = m \text{ kg}/s^2$
$p(t, x, y, z)$	pressão	$Pa = N/m^2$
$p'(t, x, y, z)$	perturbação na pressão	
$p_h(t, x, y, z)$	pressão hidrostática	
$q(t, x, y, z)$	pressão hidrodinâmica	
$p_a(t, x, y, z)$	pressão atmosférica	
$p'_a(t, x, y, z)$	perturbação de p_a	
$\mathbf{u}(t, x, y, z)$	vetor velocidade	m/s
u, v, w	velocidades nas direções x, y e z	
(u_E, v_E, w_E)	Velocidade de Ekman	
(U_E, V_E)	transporte do volume de Ekman	m^2/s
$\eta(t, x, y)$	elevação da superfície livre	m
$\eta'(t, x, y)$	perturbação de η	
η_E	deslocamento de Ekman	
$h(x, y)$	batimetria da água	m
$H(t, x, y) = h + \eta$	profundidade total do oceano	m
$E(t, x, y, z)$	energia interna específica	$J/kg = Nm/kg$
$T(t, x, y, z)$	temperatura	K
$s(t, x, y, z)$	salinidade específica	kg_{sal}/kg_{agua}
Ω	velocidade de rotação da Terra	s^{-1}
$\mathbf{\Omega}$	vetor velocidade angular	

g	aceleração da gravidade	m/s^2
\mathbf{a}	vetor aceleração	
f	parâmetro de Coriolis	s^{-1}
μ	viscosidade dinâmica ou absoluta	$Ns/m^2 = kg/m\ s$
ν_H, ν_V	viscosidade cinemática horiz. e vert.	m^2/s
χ	dissipação viscosa	kg/ms^3
k_c	condutividade térmica	$W/mK = m\ kg/s^3K$
c_v	calor específico a volume constante	$J/kgK = m^2/s^2K$
κ_{dc}	difusão térmica	m^2/s
κ_H, κ_V	difusão térmica hor. e vert.	
k_{ds}	difusão salina	m^2/s
ϵ_H, ϵ_V	difusão salina hor. e vert.	
τ^{xs}, τ^{ys}	tensão na superfície livre	$Pa = kg/m\ s^2$
τ^{xb}, τ^{yb}	tensão no fundo	
C_{Ds}	coef. de arrasto devido ao vento	
C_{Db}	coef. de arrasto devido ao fundo	
C_z	coeficiente de fricção de Chezy	\sqrt{m}/s
n	coeficiente de Manning	$s/m^{1/3}$
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	espaçamentos em x, y e z	m
Δt	espaçamento no tempo	s

RESUMO

Este trabalho visa o uso da função de Green de valor inicial no ajuste geostrófico e do método Semi-Lagrangeano na integração de um modelo acoplado oceano-atmosfera descrito pelas equações de águas rasas.

O ajuste geostrófico é considerado através de perturbações na pressão e do vento. No caso de sistemas sem rotação, é discutida a relação da equação hidrostática com ondas longas não-dispersivas. Com rotação, a conservação da vorticidade potencial permite escolher a elevação correspondente a um estado de equilíbrio geostrófico. O sistema de equações de águas rasas é desacoplado em equações de Klein-Gordon com valores iniciais e termos não-homogêneos acoplados. A resposta dinâmica formada pela resposta transiente e a resposta forçada é obtida para uma perturbação inicial da elevação. A ação do vento como forçante nas equações de momento 2D, através do transporte de Eckman, conduz a uma equação de águas rasas forçada. Uma decomposição da resposta forçada é realizada com uma resposta permanente, que satisfaz a equação de Helmholtz, e com o uso da base dinâmica gerada pela resposta impulso.

Um modelo hidrodinâmico 3D introduzido por Casulli e governado por equações não-lineares de águas rasas é integrado na vertical para a obtenção de um modelo 2D. Com isto, as condições de contorno devido a tensão do vento e a fricção devido a topografia do fundo, transformam-se em forçantes do modelo. O modelo foi integrado com um método semi-implícito em diferenças finitas, utilizando-se o método Semi-Lagrangeano para a parte advectiva.

Simulações simbólicas foram realizadas para o ajuste geostrófico devido a perturbações de duração infinita e finita para a elevação e para o efeito da tensão do vento. Foram realizadas simulações numéricas para variadas geometrias, em particular a Baía de Guanabara e a Lagoa do Patos.

ABSTRACT

This work seeks the use of the Green function of initial value in the geostrophic adjustment and the Semi-Lagrangian method for the integration of a ocean-atmosphere coupled model described by shallow water equations. The geostrophic adjustment is considered through disturbances in the pressure and of the wind. In the case of systems without rotation, a relationship of the hydrostatic equation with non-dispersive long waves is argued. With rotation, the conservation of the potential vorticity allows to choose the corresponding elevation for a state of geostrophic equilibrium. The system of shallow water equations is decoupled in equations from Klein-Gordon with initial values and non-homogeneous terms that are coupled. The dynamic response formed by the transient response and the forced response is obtained for an initial disturbance of the elevation. The action of the wind as a forcing term in the 2D moment equations, through the transport of Eckman, leads to an equation forced shallow water equation. A decomposition of the forced response is carried through with a permanent response, that satisfies the Helmholtz equation, and with the use of the dynamic basis generated by the impulse response.

A hydrodynamic model 3D introduced by Casulli and governed by non-linear shallow water equations was integrated in the vertical for the obtention of a 2D model. With this, the boundary conditions due the stress of the wind and the friction due the topography of the bottom, become forcing terms of the model. The model was integrated with an semi-implicit method in finite differences, and by using the Semi-Lagrangian method for the advective part.

Symbolic simulations had been performed for the geostrophic adjustment due to disturbances of infinite and finite duration for the elevation and the effect of the stress of the wind. Numerical simulations for several geometries, in particular the Guanabara Bay and the Lagoon of Patos.

1 INTRODUÇÃO

Vários aspectos da atmosfera e do oceano podem ser apreciados em termos de efeitos forçantes, os quais tendem a perturbar o sistema, e a força da gravidade que pode ser vista como uma força restauradora do estado de equilíbrio. Uma característica observada é que certos movimentos na atmosfera e no oceano são de cunho inercial. É bastante conhecido que perturbações de escala sinótica na atmosfera e oceano, satisfazem, aproximadamente, as condições de balanço geostrófico entre os gradientes da pressão e a aceleração de Coriolis. Neste trabalho, tem-se interesse em analisar como o sistema se comporta quando determinadas forças agem e para tal, são abordados problemas lineares e não-lineares relativos a um modelo oceano-atmosfera descrito pelas equações de águas rasas.

Inicialmente, considerando problemas lineares associados as equações de águas rasas, a função de Green de valor inicial é utilizada na resolução do problema de ajuste introduzido por Rossby [53] e posteriormente por Cahn [7], Blumen [5] e Gill [24], com o objetivo de melhor compreender o mecanismo pelo qual a pressão e a distribuição da velocidade tendem a experimentar um ajuste mútuo; isto é, se aproximam de um 'equilíbrio geostrófico', onde o gradiente de pressão está em balanço com a aceleração de Coriolis. Isto permite caracterizar os transientes induzidos por uma perturbação da pressão em torno do estado geostrófico. Os efeitos da rotação e da tensão do vento são formulados através de uma equação de Klein-Gordon não-homogênea - conhecida como equação de águas rasas forçada. O primeiro passo na aproximação não-linear foi realizada por Obukhov [49]. Uma correção não-linear de baixa ordem foi discutida em Blumen [5] e posteriormente por Dewar et al [17]. Recentemente, Reznik et al [51] e Zeitlin et al [68] apresentaram um estudo do processo de ajuste geostrófico não-linear para o caso de um domínio infinito bidimensional. Posteriormente, Zeitlin et al [69] e Bouchut et al [6] continuaram o ajuste não-linear no contexto das equações primitivas continuamente estratificadas.

Escoamentos de águas rasas são encontrados em uma grande variedade de meios aquáticos naturais, como por exemplo, rios, lagoas, reservatórios, regiões costeiras e estuários. Os escoamentos em baías ou estuários ocorrem em regime turbulento, devido a difusão turbulenta e as correntes advectivas consequentes da maré nos contornos abertos e dos ventos. Tais escoamentos são responsáveis pela mistura d'água doce com a do mar; conseqüentemente, pelo transporte e dispersão de processos de natureza física, química, biológica e geológica, os quais interagem entre si de uma forma extremamente complexa. Alguns destes processos são transporte de temperatura, salinidade e poluentes. Como a descarga de água doce e a geometria destes ambientes podem ser alteradas artificialmente, essa interferência externa pode modificar a circulação e os processos de assimilação e renovação das substâncias introduzidas nesses ecossistemas costeiros.

Os modelos numéricos usados para descrever a hidrodinâmica e o processo de transporte do sistema oceano-atmosfera, se tornam ferramentas importantes para entender a resposta do sistema perante perturbações na regularidade do mesmo. A componente principal destes modelos é o esquema numérico usado para representar as variáveis envolvidas. Vários métodos numéricos são propostos na literatura, Griebel et al [28], Hall [32], Strikwerda [61] e Weiyan [66]. Entre os mais utilizados estão o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos, uma combinação de ambos ou, ainda, a combinação destes com o método das características, usado na abordagem semi-lagrangeana, Casulli [10], Stanforth et al [60] e Temper-ton et al [62]. Neste trabalho, as equações governantes são discretizadas usando os métodos de diferenças finitas e semi-Lagrangeano, Casulli et al [8] e [9].

Assim, no capítulo 2, apresentam-se as equações gerais que são utilizadas no trabalho, com uma pequena descrição da leis de conservação, a partir das quais estas equações são obtidas. Além disso, são analisadas algumas aproximações que reduzem as equações gerais a situações particulares. Também, uma descrição das condições de contorno cinemáticas e dinâmicas na superfície e no fundo do fluido.

No capítulo 3, são abordados os efeitos de variações na pressão de um fluido homogêneo e uma discussão da aproximação hidrostática com as equações de águas rasas linearizadas, no processo de ajuste geostrófico do sistema atmosfera-oceano. Ainda, serão analisados os efeitos da rotação e a obtenção das equações resultantes a partir destas hipóteses, chamadas equações de Klein-Gordon forçadas. A solução destas equações é obtida através do método da transformada de Fourier em termos de uma solução fundamental, denominada também de solução dinâmica ou resposta-impulso do sistema. Além disso, é analisada a decomposição de respostas forçadas, as quais são definidas através da integral de convolução da solução fundamental com o termo não homogêneo. Esta teoria é aplicada na resolução simbólica de uma equação de Klein-Gordon unidimensional particular.

No capítulo 4, considera-se os efeitos de variações na pressão atmosférica e os efeitos da tensão do vento como uma forçante para as equações linearizadas. Realiza-se simulações simbólicas no Maple, para a obtenção de resposta dinâmica de uma equação de Klein-Gordon forçada pelo vento, no domínio bidimensional.

No capítulo 5, a partir da integração da equação da continuidade, é obtida a equação para a superfície livre. Um modelo de águas rasas não-lineares tridimensionais é apresentado, Debnath [16], em conjunto com as condições iniciais e de contorno necessárias para a resolução do problema. São abordadas algumas simplificações das condições de contorno dinâmicas relacionadas ao atrito do vento e a topografia do fundo. Ainda, a partir do modelo tridimensional é obtido o modelo bidimensional integrado na vertical, onde as condições de contorno do modelo hidrodinâmico 3D são incorporadas como forçantes do modelo 2D. Foi realizado um acoplamento do transporte de massa ao modelo hidrodinâmico, considerando a equação da conservação de salinidade na forma não-conservativa.

No capítulo 6, é feita uma análise característica das equações do modelo hidrodinâmico, com o objetivo de melhor justificar a escolha dos métodos de discretização utilizado. É realizada uma descrição do método numérico de diferenças

finitas com integração semi-implícita. Nas equações de momento, o gradiente de pressão e a difusão vertical são discretizados implicitamente; os termos de difusão horizontal e Coriolis explicitamente e a parte advectiva pelo método semi-Lagrangiano, o qual também é descrito neste capítulo. A equação da superfície livre é discretizada por um esquema implícito em diferenças finitas. Ainda, é adicionada uma equação de advecção-difusão, que descreve o transporte da salinidade, o qual é discretizado por diferenças finitas.

No capítulo 7, algumas aplicações bidimensionais e tridimensionais das equações de águas rasas não-lineares são resolvidas numericamente, usando o Fortran. Inicialmente, para o modelo hidrodinâmico, seção 7.1, a primeira aplicação bidimensional, foi resolvida simbolicamente no capítulo 4 para o caso linear, usando o software Maple. No presente capítulo, as equações não-lineares forçadas pelos efeitos do vento são resolvidas. A segunda aplicação bidimensional, representa uma baía com canal em forma de S, proposta em Benqué et al [3] e cujos resultados são comparados aos deste trabalho. As duas últimas, descrevendo aplicações tridimensionais, são os estuários da Baía de Guanabara, no Rio de Janeiro e a Lagoa dos Patos, no Rio Grande do Sul. Na seção 7.2 é apresentado um teste teórico bidimensional para o processo de transporte da salinidade, cuja solução numérica é comparada com a solução analítica.

2 PRELIMINARES

Diversos processos, com diferentes graus de atuação e diferentes escalas de ocorrência, estão envolvidos na interação do oceano com os astros celestes próximos da terra, a atmosfera e a própria terra; isto é, os continentes e o fundo oceânico. Esses processos geram diferentes movimentos, cada qual com frequência e período típicos. Alguns movimentos são particularmente importantes:

- *os movimentos gerados por interação gravitacional dos oceanos com alguns astros, principalmente a Lua e o Sol*, denominados de maré astronômica;
- *os movimentos gerados por atuação dos ventos na superfície dos oceanos*, denominados Circulação Dirigida pelo Vento;
- *os movimentos gerados por gradientes de densidade*, que ocorrem em larga escala nos oceanos devido as diferenças de absorção da radiação solar.

A transferência de propriedades entre o oceano e a atmosfera é de extrema importância para a dinâmica dos oceanos, pois a atmosfera entra em movimento por absorção diferenciada da radiação solar e então os ventos atuam sobre os oceanos, gerando as correntes superficiais. Mas, para que isso ocorra é necessário que momento seja transferido da atmosfera para o oceano. Além disso, oceano e atmosfera trocam calor e vapor d'água, que vêm também a alterar o movimento da água do mar. A densidade da água no oceano é em torno de $\rho = 1035 \text{kg/m}^3$, resultando mais densa que o ar. Próximo a superfície do mar, a densidade do ar, que varia com a temperatura, pressão e umidade, tem valores típicos $\rho_a = 1.2 - 1.3 \text{kg/m}^3$. Assim, a interface entre estes dois meios é estável; ou seja, toda vez que ela se deforma, a atuação da gravidade a fará retornar ao estado de equilíbrio. Devido a esta estabilidade da interface, estes dois meios nunca se misturam significativamente.

Encontramos apenas porções de ar na água e vice-versa; bolhas e spray, respectivamente. Portanto, a transferência de propriedades entre a água e o ar se restringe às proximidades da interface. No entanto, como a atmosfera tem menor densidade e maior dinâmica, as propriedades transferidas do oceano para a atmosfera espalham-se mais, atingindo maior distância. Apesar da distribuição de propriedades na atmosfera ser mais dinâmica, o oceano absorve muito mais radiação que a atmosfera. A quantidade de partículas e moléculas em suspensão nos oceanos é muito maior e, além disso, processos como fotossíntese e outras reações químicas que ocorrem na água do mar utilizam energia, mantendo-a no meio e evitando que seja perdida. A taxa de absorção varia de acordo com o comprimento de onda. Os comprimentos de onda menores penetram a maiores profundidades no mar. Em áreas costeiras, onde existe maior quantidade de material em suspensão na água, a difusão da radiação é maior e é dada em função do tamanho e da quantidade de partículas em suspensão. O resultado é que a penetração de radiação solar no mar é bem menor que na atmosfera. Cerca de 80% da radiação solar é absorvida nos primeiros 10 metros do oceano. O nível de extinção total da luz no oceano ocorre próximo dos 200 m de profundidade. Em áreas costeiras, essa profundidade é menor. Nos dois lados da interface ar/mar existe uma camada dentro da qual a troca de momento é mais efetiva. Esta camada é chamada *Camada de Ekman*.

As forças que atuam no oceano são a expressão analítica das interações deste com sua vizinhança. Ou seja, das interações do oceano com a atmosfera, com o fundo oceânico, com os continentes e com os astros Sol e Lua, resultam os movimentos.

2.1 Leis de Conservação das Propriedades da Água do Mar

O estudo do movimento nos oceanos será realizado com base nas equações da dinâmica dos fluídos, segundo Aris [1], Gill [24], Landau et al [38], Majda [45], Serrin [55] e outros e algumas propriedades de conservação relativas a elementos da água do mar, mais especificamente:

1. densidade (ρ)
2. as 3 componentes da velocidade $\mathbf{u} = (u, v, w)$
3. pressão (p)
4. temperatura (T)
5. salinidade (s)

Para estas sete variáveis, considera-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

- Conservação da Massa:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

- Conservação de Momento:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{\mu}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{F}_e, \quad (2.2)$$

- Conservação da Energia:

$$\rho \frac{D(c_v T)}{Dt} = \nabla \cdot (k_c \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{u} + Q_H \quad (2.3)$$

- Conservação de Sal:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \nabla \cdot (\rho k_{ds} \nabla s) \quad (2.4)$$

- Equação de Estado:

$$F(\rho, p, T, s) = 0 \quad (2.5)$$

Uma breve descrição sobre estas equações é dada a seguir.

- **Conservação da Massa: Equação da Continuidade**

Seja $\rho(t, \mathbf{x})$ a massa por unidade de volume de um fluido no tempo t e posição \mathbf{x} , conforme Aris [1]. Então, a massa em qualquer volume finito V é

$$m = \int_V \rho(t, \mathbf{x}) dV$$

Se V é um volume material, isto é, se é composto pelas mesmas partículas de fluido e se não existem fontes ou sumidouros no meio, a massa não muda. Inserindo $F = \rho$ na equação (A-1.4), obtém-se

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = 0. \quad (2.6)$$

Utilizando argumentos de continuidade com o integrando em volumes arbitrariamente pequenos, resulta

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.7)$$

Substituindo a derivada material, decorre a equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.8)$$

As equações (2.7) ou (2.8) descrevem a conservação de massa e são conhecidas como *Equação da Continuidade*.

Além disso, observe-se que combinando a equação da continuidade com o teorema de transporte de Reynolds (A-1.2) aplicado a função $F = \rho F$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho F \, dV &= \int_{V(t)} \left(\frac{D}{Dt}(\rho F) + \rho F(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \left(\rho \frac{DF}{Dt} + F \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \rho \frac{DF}{Dt} \, dV, \end{aligned}$$

pois o segundo termo se anula por (2.7).

- **Conservação de Momento: 2ª Lei de Newton**

A equação vetorial que expressa a conservação de momento é expressa pela segunda lei de Newton:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F}_R,$$

onde \mathbf{F}_R é a força resultante por unidade de volume.

Considerando inicialmente, que as forças que atuam são as forças devido ao Gradiente de Pressão, a gravidade, a viscosidade e alguma força externa \mathbf{F}_e , citando Weiyang [66], obtém-se a equação

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{F}_e, \quad (2.9)$$

onde $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ é a aceleração devido a gravidade e μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica ou absoluta do fluido. Esta equação representa a *conservação de momento* para um fluido viscoso sujeito a um campo gravitacional. Se $\mu = 0$, o fluido é considerado *ideal ou invíscido* e a

equação é chamada *Equação de Euler* em homenagem a L. Euler, que a descobriu em 1755, segundo Landau et al [38].

A equação (2.9) expressa a conservação de momento linear do escoamento de um fluido. Em movimentos de grande escala os efeitos de rotação da Terra são importantes. E daí que a aceleração inercial deve ser corrigida na equação de conservação de momento com a inclusão das acelerações de Coriolis e centrífuga.

- *Força de Coriolis e Força Centrífuga:* Considerando o movimento de uma partícula A de acordo com dois referenciais que estão em movimento relativo de translação uniforme sem movimento de rotação; ou seja, um referencial é fixo e o outro está em movimento em relação ao primeiro com velocidade constantes, demonstra-se que as acelerações da partícula em relação aos dois referenciais são iguais, isto é, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t$, Gill [24] e Dutton [19]. Porém, caso o referencial móvel apresente um movimento de rotação em relação ao referencial fixo, surgem os efeitos das forças de Coriolis e centrífuga. Neste caso, o referencial móvel apresenta uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\Omega}$ em relação ao referencial fixo, cujas componentes são $(0, \Omega \cos \phi, \Omega \sin \phi)$, com $\Omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ a velocidade de rotação da Terra e ϕ a latitude, conforme figura 2.1.

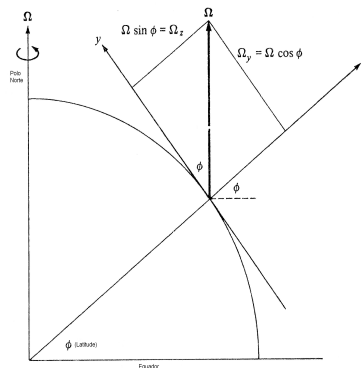


Figura 2.1 Componentes de Ω

No caso do movimento apresentar rotação, é demonstrado em Gill [24] que:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{cent}} = \mathbf{a}_t + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.10)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição em relação ao referencial fixo. Os termos $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ são a aceleração de Coriolis e aceleração Centrípeta, respectivamente. A Força de Coriolis atua no sentido de defletir todos os movimentos que ocorrem na superfície da Terra, porém seu efeito só é sentido em movimentos de larga e média escalas. A deflexão do movimento causada pela força de Coriolis ocorre para esquerda no hemisfério sul e para a direita no hemisfério norte. O efeito da força centrípeta será levado em consideração junto com a aceleração da gravidade. Considerando um corpo que esteja parado na superfície da Terra, este corpo está sujeito apenas a aceleração da gravidade e a centrípeta, portanto a partir da equação (2.10), tem-se

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}_e + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.11)$$

onde \mathbf{g}_e é a aceleração da gravidade efetiva medida na superfície da Terra. Chamando \mathbf{a} de \mathbf{g} , resulta

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.12)$$

O termo $-\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ refere-se a aceleração centrífuga, que aponta em direção contrária ao centro da Terra, conforme figura 2.2. Desta forma, \mathbf{g}_e é a gravidade somada ao efeito da centrífuga e como esta aceleração é muito pequena quando comparada a

aceleração da gravidade \mathbf{g} , a deflecção de \mathbf{g}_e é pequena e usaremos a aproximação $\mathbf{g}_e \approx \mathbf{g}$.

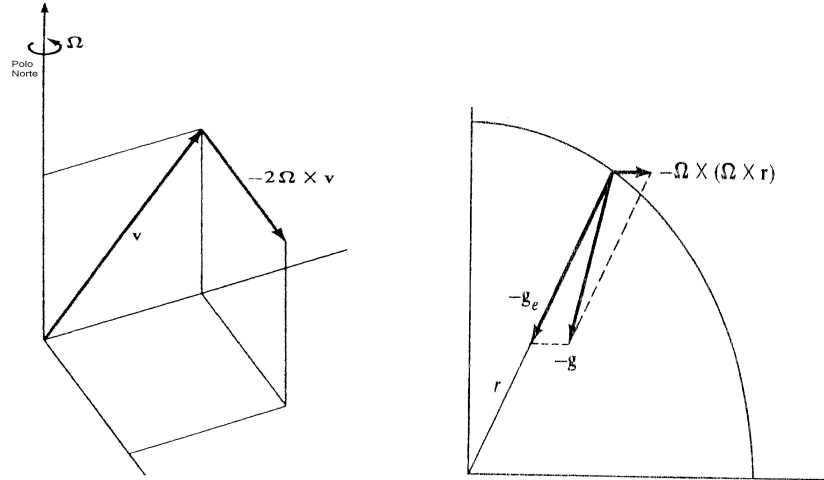


Figura 2.2 Acelerações de Coriolis e Centrífuga

Assim, substituindo (2.10) na equação de momento (2.9) e desprezando a aceleração centrífuga em (2.12), resulta

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho}\nabla\left(\frac{\mu}{3}\nabla \cdot \mathbf{u}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (\mu\nabla\mathbf{u}) + \mathbf{F}_e. \quad (2.13)$$

que representa a equação vetorial de conservação de momento ou movimento de um fluido.

- **Conservação de Energia Interna: 1ª Lei da Termodinâmica**

Pela 1ª lei da termodinâmica, a variação da energia total em um volume material é a soma do calor transferido e o trabalho realizado no volume, citando Aris [1] e Holton [34]. Para a energia total serão consideradas somente a energia interna e energia cinética ($\frac{1}{2}u^2$), onde $u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Utilizando a taxa de variação da energia cinética em um volume material,

o teorema de transporte de Reynolds e o teorema de Green, obtém-se

$$\int_V \left[\rho \frac{DE}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} + p \nabla \cdot \mathbf{u} - Q_H \right] dV = 0,$$

onde E denota a energia interna específica, isto é, a energia interna por unidade de massa, \mathbf{q} é o fluxo de calor no volume, $-p \nabla \cdot \mathbf{u} + Q_H$ é a dissipação de energia por tensão interna e intercâmbio reversível de energia de "deformação", com Q_H denotando a dissipação viscosa para um fluido Newtoniano. Assumindo a continuidade do integrando, resulta

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{u} + Q_H. \quad (2.14)$$

Assumindo a lei de Fourier para a condução de calor associada ao gradiente de temperatura T ,

$$\mathbf{q} = -k_c \nabla T,$$

onde k_c é um coeficiente de condutividade térmica e a relação $E = c_v T$, com c_v denotando o calor específico a volume constante, a equação (2.14) se reduz a

$$\rho \frac{D(c_v T)}{Dt} = \nabla \cdot (k_c \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{u} + Q_H.$$

Esta equação é uma forma da 1ª Lei da Termodinâmica. Outras formas podem incluir a entropia específica ou a temperatura potencial.

- **Conservação de Sal:**

A quantidade de sal por unidade de volume de água do mar é expressa por ρs , onde s é a salinidade e o fluxo advectivo é $\rho s \mathbf{u}$. Supondo que não existam outras formas de transporte do sal, a equação que representa

a sua conservação é dada por

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) = 0. \quad (2.15)$$

Porém, em geral, existem outras formas de transporte do sal, como a difusão molecular, que ocorre devido a existência de gradientes de salinidade. Sempre que houver uma diferença de concentração entre os dois lados de uma face do volume, vai haver difusão molecular de sal da área de maior concentração para a de menor, dada por

$$-\rho k_{ds} \nabla s,$$

onde k_{ds} é um coeficiente de difusão salina na água. Assim, a equação (2.15) satisfaz

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u} - \rho k_{ds} \nabla s) = 0.$$

Usando a definição de derivada substantiva dada na equação (A-1.2) para ρs , obtém-se

$$\frac{D(\rho s)}{Dt} + \rho s \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\rho k_{ds} \nabla s),$$

que após substituição da equação da conservação da massa, resulta em

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \nabla \cdot (\rho k_{ds} \nabla s). \quad (2.16)$$

Esta equação representa a conservação de sal. A difusão de sal pode ser também causada por gradientes de temperatura e pressão, mas os efeitos são secundários em escalas muito pequenas para as quais a difusão é importante.

- **Equação de Estado:**

O conceito de estado de um fluido vem da comparação de amostras diferentes de fluidos que estão em equilíbrio. Se as duas amostras podem existir em contato uma com a outra sem uma mudança nas suas propriedades, as duas amostras têm o mesmo estado; caso contrário, possuem estados diferentes. Existe uma escolha de variáveis que podem ser usadas para especificar o estado de um fluido, mas as variáveis geralmente usadas para defini-lo são a pressão p , a temperatura T e constituintes químicas, como a salinidade s . A mais importante das equações de estado é aquela que relaciona a densidade do fluido com essas variáveis por uma equação do tipo

$$F(\rho, p, T, s) = 0$$

As equações (2.1)-(2.5) modelam o escoamento de fluidos compressíveis ou incompressíveis, turbulentos ou laminares e a equação vetorial (2.2) representa as *equações de Navier-Stokes*.

2.2 Aproximações

Devido a natureza não linear das equações de Navier-Stokes, existem muito poucos casos para os quais as mesmas possam ser resolvidas analiticamente sem introduzir certas aproximações. Dependendo das propriedades do escoamento e do fluido, podem-se simplificar consideravelmente as equações, visando reduzir as dificuldades inerentes à sua solução numérica.

- **Fluido Homogêneo x Fluido Incompressível**

As equações para conservação de calor (2.3) e sal (2.4) são utilizadas, em conjunto com a equação do estado (2.5) da água do mar, para estudar o oceano caso este não possa ser considerado *homogêneo*. Uma outra aproximação que pode ser usada é considerar o oceano *incompressível*. Assim, reescrevendo a equação da conservação de massa (2.8) como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.17)$$

tem-se as seguintes definições, conforme Soares [58]:

DEFINIÇÃO1

Um fluido é considerado **homogêneo**, se não existe variação espacial da densidade ($\nabla \rho = \mathbf{0}$) e, neste caso, a equação da continuidade (2.17) se reduz a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.18)$$

DEFINIÇÃO2

Um fluido é considerado **incompressível** se $D\rho/Dt = 0$, ou seja, se as variações local e a advectiva se anulam mutuamente. Em particular, se ambas variações são nulas. A equação da continuidade (2.17) se reduz a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.19)$$

significando que os fluxos nas faces do volume nas três direções devem se compensar, de modo que não haja variação total da densidade, ou seja, o que entra no elemento de volume deve ser igual ao que sai. Segundo Gill [24], esta é uma boa aproximação quando se cumprem as seguintes condições:

- (i) A velocidade da partícula é pequena comparada com a velocidade do som;
- (ii) A velocidade de fase (ou comprimento de onda dividido pelo período) das perturbações é pequena comparada com a velocidade do som;
- (iii) A escala vertical do movimento é pequena comparada com a escala de altura H_s (definida como um valor médio de $\rho/|D\rho/Dz|$).

A última condição é automaticamente satisfeita no oceano, pois H_s é em torno de 40 vezes a profundidade, mas não é verdadeiro para alguns movimentos atmosféricos.

Observe-se que, quando um fluido é homogêneo e incompressível, a partir das equações (2.18) e (2.19), a densidade será constante.

Assim, a substituição da condição de incompressibilidade (2.19) na equação vetorial de momento (2.13), resulta

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (\mu\nabla\mathbf{u}) + \mathbf{F}_e, \quad (2.20)$$

e na equação (2.3), resulta

$$\rho\frac{D(c_v T)}{Dt} = \nabla \cdot (k_c \nabla T) + Q_H. \quad (2.21)$$

• Viscosidade Constante

O valor de μ nas equações de momento depende do estado do fluido (mais especificamente, de variações na temperatura), mas na maioria dos casos, as variações são suficientemente pequenas para considerá-lo constante. Em problemas geofísicas é frequente considerar uma

separação das escalas horizontal e vertical. Considerando

$$\nabla = \nabla_H + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

onde

$$\nabla_H = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y},$$

o termo de difusão na equação (2.20) escreve-se

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho} \left(\nabla_H \cdot (\mu_H \nabla_H \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \right).$$

Muitos modelos negligenciam estes termos ($\mu_H = \mu_V = 0$) ou os consideram constantes e diferentes ou ainda, usam um coeficiente de viscosidade horizontal constante e um coeficiente vertical variável. Considerando esta possibilidade, tem-se

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) = \nu_H \nabla_H^2 \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \quad (2.22)$$

onde $\nu = \mu/\rho$ é o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido e

$$\nabla_H^2 \mathbf{u} = \nabla_H \cdot \nabla_H \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \quad (2.23)$$

denota o laplaceano horizontal de \mathbf{u} .

Assim, substituindo a aproximação (2.22) na equação vetorial de momento (2.20) segue que

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu_H \nabla_H^2 \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \mathbf{F}_e, \quad (2.24)$$

- **Termos da Força de Coriolis**

Substituindo o termo $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ devido a força de Coriolis

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} &= 2\Omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= (2\Omega \cos\phi w - 2\Omega \sin\phi v)\mathbf{i} + (2\Omega \sin\phi u)\mathbf{j} - (2\Omega \cos\phi u)\mathbf{k} \end{aligned}$$

na equação vetorial (2.24), obtém-se as três equações de momento:

– Momento na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} + 2\Omega \cos\phi w - 2\Omega \sin\phi v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_H \nabla_H^2 u + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F_{xe} \quad (2.25)$$

– Momento na direção y:

$$\frac{Dv}{Dt} + 2\Omega \sin\phi u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_H \nabla_H^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial v}{\partial z} \right) + F_{ye} \quad (2.26)$$

– Momento na direção z:

$$\frac{Dw}{Dt} - 2\Omega \cos\phi u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu_H \nabla_H^2 w + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial w}{\partial z} \right) + g + F_{ze}. \quad (2.27)$$

Considerando $f = 2\Omega \sin\phi$ e $\dot{f} = 2\Omega \cos\phi$, o quociente dos termos $\dot{f} w$ e $f v$ na equação (2.25) satisfaz

$$\frac{\dot{f} w}{f v} = \frac{2\Omega \cos\phi w}{2\Omega \sin\phi v} = \cotg\phi \frac{w}{v}$$

Se $\cotg\phi$ for pequeno, é possível desprezar o termo $\dot{f} w$ em comparação a $f v$, pois a razão de aspecto do movimento em estudo é sempre menor que 1.

Uma outra aproximação é feita na equação (2.27), quando o termo $\dot{f} u$ é comparado com g e negligenciado, pois este tem uma ordem de grandeza bem menor que a gravidade.

Então, resultam as seguintes equações de momento:

– Momento na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_H \nabla_H^2 u + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) + fv + F_{xe} \quad (2.28)$$

– Momento na direção y:

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_H \nabla_H^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial v}{\partial z} \right) - fu + F_{ye} \quad (2.29)$$

– Momento na direção z:

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu_H \nabla_H^2 w + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial w}{\partial z} \right) + g + F_{ze}, \quad (2.30)$$

onde $f = 1.47 \times 10^{-4} \sin \phi \text{ s}^{-1}$. Para latitudes próximas de $\theta = 45^\circ$, o parâmetro de Coriolis é $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. O uso de uma aproximação constante para f é adequado para tratar processos de ajuste, caracterizados por escalas temporal da ordem de f^{-1} ou menor.

- **Calor Específico, Condução Térmica e Difusão Salina Constantes**

Considerando o calor específico a volume constante c_v e o coeficiente de condutividade térmica k_c constantes na equação (2.21), segue que

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa_{dc} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho} Q_H,$$

onde $\kappa_{dc} = k_c/\rho c_v$ é o coeficiente de difusão de calor. Valores típicos são $1.4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ para a água e $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ para o ar. O termo de aquecimento interno Q_H não é relevante para o oceano e será negligenciado. Se forem considerados coeficientes de difusão do calor diferentes nas direções horizontal e vertical, resulta

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa_H \nabla_H^2 T + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_V \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (2.31)$$

que corresponde a uma *equação de advecção-difusão*.

Além disso, em geral, o coeficiente ρk_{ds} em (2.4) é uma função do estado do fluido, mas as variações são suficientemente pequenas para considerá-lo como uma constante. Então, considerando coeficientes de difusão salina diferentes nas direções horizontal e vertical, tem-se que a equação (2.4) se reduz a

$$\frac{Ds}{Dt} = \epsilon_H \nabla_H^2 s + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_V \frac{\partial s}{\partial z} \right), \quad (2.32)$$

• Pressão Hidrostática

A ênfase deste trabalho é sobre movimentos com escala horizontal suficientemente grande comparada com a escala vertical, garantindo a validade da aproximação hidrostática.

Um corpo que esteja em repouso na superfície da Terra, está sujeito a dois tipos de força: a força de superfície devido ao gradiente de pressão e a força de corpo expressa pelo gradiente do potencial Φ , chamado geopotencial, que é a soma do potencial gravitacional da Terra e o potencial centrífugo associado com a rotação da Terra, conforme equação (2.11). Se o fluido está em repouso e em equilíbrio, as força de corpo dada pelo gradiente do geopotencial e a força do gradiente de pressão

estão em balanço, isto é

$$\rho^{-1}\nabla p + \nabla\Phi = 0.$$

A direção de $\nabla\Phi$ é chamada vertical e a sua magnitude é chamada aceleração g devido a gravidade. É suficientemente preciso considerar g como uma constante, dada aproximadamente por $g \approx 9.8ms^{-2}$. Assim, considerando $\Phi \approx gz$ e devido que as superfícies de altura são definidas de forma a serem geralmente coincidentes com as superfícies geopotencial, segue

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (2.33)$$

Esta equação descreve a *aproximação hidrostática* e é suficiente em muitos problemas geofísicas, onde o escoamento é caracterizado por ter uma escala horizontal bem maior que a escala vertical. Como, por exemplo, quando consideramos o fluxo de uma maré no oceano, onde a velocidade horizontal é em torno de $1m/s$ e a velocidade vertical é da ordem de $10^{-5}m/s$, a cada ciclo de maré.

A superfície livre de um líquido confinado e em estado de equilíbrio sujeito a um campo gravitacional é uma superfície plana. Se, devido a ação de alguma perturbação externa, a superfície desloca-se da sua posição de equilíbrio em algum ponto, um movimento na forma de ondas ocorrerá no líquido. Este deslocamento (ou elevação) da superfície livre, denotado por $z = \eta(t, x, y)$, é mostrado na figura 2.3.

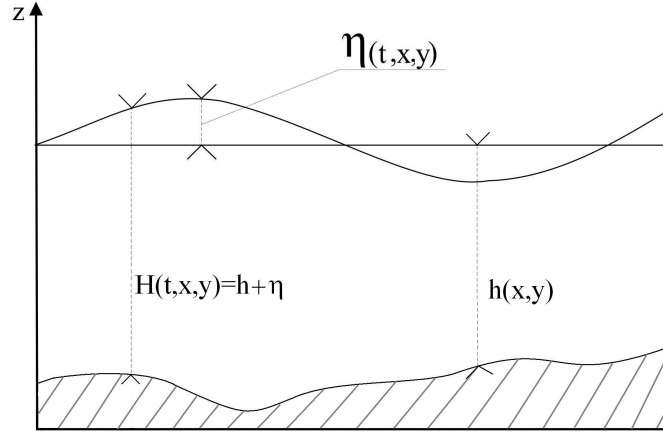


Figura 2.3 Geometria da superfície perturbada

Se a pressão em $z = \eta$ é dada pela pressão atmosférica p_a , a aproximação hidrostática para a pressão em qualquer profundidade z pode ser obtida da integração da equação (2.33) como

$$p = p_a + g\rho_o(\eta - z) + g \int_z^\eta \rho' dz, \quad (2.34)$$

onde escrevemos $\rho = \rho_o + \rho'$. Observe-se que, no caso de densidade constante ($\rho' = 0$), a pressão no fundo $z = -h(x, y)$ será dada por $p = p_a + g\rho_o H$, onde $H(t, x, y) = h(x, y) + \eta(t, x, y)$ é a profundidade total da água e $h(x, y)$ é a profundidade da água (batimetria), medida a partir do nível de equilíbrio até o fundo, conforme a figura 2.3.

Supondo que p_a é constante, derivando (2.34) com respeito a x e y e substituindo nas equações (2.28)-(2.29), decorrem as equações de momento:

$$\frac{Du}{Dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^\eta \rho' dz \right) + \nu_H \nabla_H^2 u + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) + fv + F_{xe},$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_z^\eta \rho' dz \right) + \nu_H \nabla_H^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial v}{\partial z} \right) - fu + F_{ye},$$

onde ∇_H^2 denota o Laplaceano horizontal definido em (2.23).

Se as variações das variáveis de estado a modelar não modificam o escoamento, seus gradientes podem ser negligenciados nas equações de movimento, as quais se reduzem a

$$\frac{Du}{Dt} = -g\frac{\partial\eta}{\partial x} + \nu_H\nabla_H^2 u + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_V\frac{\partial u}{\partial z}\right) + fv + F_{xe}, \quad (2.35)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g\frac{\partial\eta}{\partial y} + \nu_H\nabla_H^2 v + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_V\frac{\partial v}{\partial z}\right) - fu + F_{ye}. \quad (2.36)$$

– Correção Não-Hidrostática

Para problemas onde a topografia de fundo varia muito rapidamente, a aproximação hidrostática não é adequada. Também, em aplicações que envolvem ondas curtas, Mahadevan et al [42], [43], onde a razão entre as escalas vertical e horizontal do movimento não é suficientemente pequena. Nestes casos, é necessário corrigir a aproximação hidrostática com a introdução de uma *componente hidrodinâmica* $q(t, x, y, z)$ e utilizando a pressão não-hidrostática

$$p(t, x, y, z) = p_a + g\rho(\eta - z) + q.$$

Derivando esta correção e substituindo em (2.28)-(2.30), obtém-se as equações de momento modificadas:

$$\frac{Du}{Dt} = -g\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x} + \nu_H\nabla_H^2 u + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_V\frac{\partial u}{\partial z}\right) + fv + F_{xe}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial y} + \nu_H\nabla_H^2 v + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_V\frac{\partial v}{\partial z}\right) - fu + F_{ye}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial z} + \nu_H\nabla_H^2 w + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_V\frac{\partial w}{\partial z}\right) + F_{ze}$$

OBSERVAÇÃO 1

Recentemente Azerad et al [2] têm utilizado a análise assintótica com relação a um parâmetro ϵ , relativo a razão entre as escalas vertical e horizontal, para justificar matematicamente a aproximação hidrostática nas equações primitivas da dinâmica de fluidos geofísicos. Os autores não eliminam a velocidade vertical na média nem assumem que a profundidade é constante. Para tanto, utilizam diferentes coeficientes de viscosidade na horizontal e vertical. Esta hipótese de viscosidade anisotrópica é fundamental para a derivação das equações primitivas: no caso estacionário, considerando viscosidade isotrópica, o modelo assintótico é linear, com difusão horizontal que se anula.

OBSERVAÇÃO 2

Na hipótese de um fluido incompressível e pressão não-hidrostática, pode-se obter a velocidade (u, v, w) e o deslocamento η da superfície livre em duas etapas, conforme sugerido em Casulli [11].

2.3 Condições de Contorno Cinemáticas

Para estudar as mudanças que ocorrem no escoamento de um fluido, além das equações governantes, são também necessárias condições apropriadas para os contornos do domínio.

Assim, uma condição de contorno cinemática na superfície livre $z = \eta(t, x, y)$, é dada por

$$\frac{D(z - \eta)}{Dt} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta}{\partial y} = w_s \quad (2.37)$$

onde (u_s, v_s, w_s) é a velocidade na superfície livre.

Uma condição análoga para o contorno no fundo $z = -h(x, y)$ é

$$\frac{D(z + h)}{Dt} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$u_b \frac{\partial h}{\partial x} + v_b \frac{\partial h}{\partial y} + w_b = 0 \quad (2.38)$$

onde h é a batimetria e (u_b, v_b, w_b) é a velocidade no fundo.

2.4 Condições de Contorno Dinâmicas

As condições de contorno dinâmicas aqui consideradas são provenientes dos efeitos de atrito devido ao vento e a topografia do fundo.

O arrasto do vento sobre a superfície da água transfere momento do vento para a água e é expresso pelas condições de contorno dinâmicas dada pelas tensões do vento na superfície livre (τ^{xs}, τ^{ys}) divididas pela densidade e definidas por

$$\tau^{xs} = \mu_V \frac{\partial u}{\partial z} - \mu_H \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (2.39)$$

$$\tau^{ys} = \mu_V \frac{\partial v}{\partial z} - \mu_H \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (2.40)$$

O atrito ocorre não só entre o vento e o oceano, mas entre quaisquer duas camadas que apresentam movimento relativo. Portanto, ocorre também entre camadas de água que estejam se locomovendo com velocidades diferentes. O atrito entre as várias camadas d'água do oceano é responsável pela transferência do momento adquirido a partir do vento para profundidades maiores, expresso pelos termos de viscosidade na equação de momento (2.24).

Além disso, existe o atrito entre a água e o fundo oceânico, dado pelas condições de contorno dinâmicas no fundo, especificadas pelas tensões de fricção

com o fundo (τ^{xb}, τ^{yb}) divididas pela densidade e definidas por

$$\tau^{xb} = \mu_V \frac{\partial u}{\partial z} + \mu_H \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (2.41)$$

$$\tau^{yb} = \mu_V \frac{\partial v}{\partial z} + \mu_H \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (2.42)$$

3 EFEITOS DE PERTURBAÇÕES NA PRESSÃO DO FLUIDO E DA ROTAÇÃO: LINEARIZAÇÃO

Vários aspectos da atmosfera e do oceano podem ser apreciados em termos de efeitos forçantes e a força da gravidade. Uma característica observada é que certos movimentos na atmosfera e no oceano são de cunho inercial. É bastante conhecido que perturbações de escala sinótica na atmosfera e oceano satisfazem, aproximadamente, as condições de balanço geostrófico entre os gradientes da pressão e a aceleração de Coriolis. É geralmente aceito que qualquer perturbação com escala suficientemente grande tem uma tendência a espalhar sua parte redundante numa forma de ondas de gravidade que se propagam rapidamente com o intuito de recuperar o estado de balanço geostrófico.

Neste capítulo serão abordados os efeitos de variações na pressão de um fluido homogêneo e uma discussão da aproximação hidrostática com as equações de águas rasas na sua forma linearizada. Isto corresponde ao ajuste de um fluido homogêneo de profundidade constante que inicialmente possui um deslocamento inicial pequeno de sua superfície livre. O processo de ajuste é melhor entendido na ausência de forças externas. Os efeitos da rotação foram considerados inicialmente por Rossby [53] para esclarecer os mecanismos pelos quais as distribuições de pressão e de velocidade na atmosfera e no oceano tendem para um ajuste geostrófico mútuo.

Considera-se inicialmente um problema de valor inicial em desbalanço e estuda-se o efeito dos transientes na solução permanente constituída pelo equilíbrio geostrófico, Rossby [53], Cahn [7], Blumen [5], Gill [23], Schoenstadt [54], Kuo et al [37]. Para tanto, será explorado o uso da resposta impulso ou função de Green de valor inicial, Claeysen et al [13], Polyanin [50], Morse et al [47], das equações de Klein-Gordon que são derivadas das equações de águas rasas e do princípio da conservação da vorticidade potencial.

As equações de momento de um fluido invíscido e incompressível

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}, \quad (3.1)$$

serão aproximadas e convenientemente acopladas com a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.2)$$

as condições de contorno cinemáticas

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta}{\partial y} = w_s \quad (3.3)$$

e

$$u_b \frac{\partial h}{\partial x} + v_b \frac{\partial h}{\partial y} + w_b = 0, \quad (3.4)$$

onde h é a profundidade da água e (u_s, v_s, w_s) e (u_b, v_b, w_b) e são as velocidades na superfície livre e no fundo do oceano, respectivamente.

3.1 Perturbações na Pressão do Fluido

Para movimentos de larga escala no oceano e na atmosfera, os termos dominantes na equação de momento são a aceleração da gravidade e a componente vertical do gradiente de pressão, os quais estão aproximadamente em balanço. Em outras palavras, nenhum dos outros termos de aceleração em (3.1) aproxima a aceleração da gravidade.

Considerando um estado de equilíbrio como o de um fluido que se encontra em repouso e que tem uma profundidade h , a velocidade do fluido é nula e a pressão $p_0(z) = p_a - \rho g z$ satisfaz a equação hidrostática (2.33), onde ρ é constante.

Suponha agora que o equilíbrio é levemente perturbado, conforme a figura 2.3. Assim, é conveniente definir uma perturbação na pressão a partir de uma solução de equilíbrio por

$$p = p_0(z) + p' = p_a - \rho g z + p', \quad (3.5)$$

onde p' denota a perturbação na pressão da solução de equilíbrio.

Substituindo a perturbação da pressão em (3.1), tem-se

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\Omega \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p'. \quad (3.6)$$

Supondo perturbações suficientemente pequenas, de modo que produtos de perturbações sejam desprezíveis quando comparados com as próprias perturbações, a equação acima se reduz a equação linear

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\Omega \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p'. \quad (3.7)$$

3.1.1 Ondas Longas e Aproximação Hidrostática

Desprezando os efeitos da rotação e considerando a validade da aproximação hidrostática para a pressão de equilíbrio, a perturbação na pressão satisfaz a equação de Laplace. Supondo que esta perturbação seja proporcional a um deslocamento da superfície livre, caracterizado por uma onda plana, é possível obter que, dependendo da profundidade do oceano, a perturbação na pressão é uma onda longa (*águas rasas*), a qual resultaria diretamente por integração da equação hidrostática.

Portanto, desprezando os efeitos da rotação, as equações (3.7) se reduzem a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (3.9)$$

Derivando as equações (3.8)-(3.9) em relação a x , y e z , respectivamente, adicionando-as e usando a equação da continuidade (3.2), obtém-se a equação de Laplace para a perturbação da pressão p' :

$$\nabla^2 p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0. \quad (3.10)$$

A condição de contorno (3.3), para pequenos deslocamentos da superfície livre, se reduz a

$$w = \partial\eta/\partial t \quad \text{em} \quad z = \eta, \quad (3.11)$$

e a condição (3.4), se reduz a

$$w = 0 \quad \text{em} \quad z = -h. \quad (3.12)$$

Além disso, pelo fato da pressão na superfície livre $z = \eta$ ser p_a , resulta

$$p = p_0 + p' = p_a, \quad \text{ou} \quad p' = \rho g \eta \quad \text{em} \quad z = \eta, \quad (3.13)$$

por (3.5).

No caso de supor que a profundidade h é constante e desde que diferenças nas soluções para w e p' entre $z = \eta$ e $z = 0$ sejam pequenas, as equações (3.11) e (3.13) podem ser aplicadas a $z = 0$.

Assim, o problema consiste em resolver a equação de Laplace (3.10) sujeita as condições de contorno (3.12) no fundo e (3.11) e (3.13) em $z = 0$. Existe, de fato, uma grande variedade de soluções dependendo das condições iniciais, isto é, da natureza dos deslocamentos iniciais.

Por um instante, considere-se a elevação da superfície livre, caracterizada por uma onda plana da forma

$$\eta = A \exp i(kx + ly - \omega t), \quad (3.14)$$

onde (k, l) denota os números de onda nas direções x e y , respectivamente, ω a frequência e A a amplitude.

Assumindo que a perturbação na pressão seja proporcional a η por

$$p'(t, x, y, z) = P(z)\eta(t, x, y) \quad (3.15)$$

e aplicando a equação de Laplace (3.10) para p' , obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária para $P(z)$

$$P''(z) - \kappa^2 P(z) = 0,$$

onde $\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$ denota a magnitude do vetor número de onda. A solução desta equação em termos de valores iniciais é dada em Claeyssen et al [14] por

$$P(z) = \cosh(\kappa z)P(0) + \frac{\sinh(\kappa z)}{\kappa}P'(0). \quad (3.16)$$

Das condições de contorno, tem-se que $P(0) = \rho g$. Para obter $P'(0)$, utiliza-se a condição

$$0 = P'(-h) = -\kappa \sinh(\kappa h)P(0) + \cosh(\kappa h)P'(0).$$

Assim,

$$P'(0) = \frac{\kappa \rho g \sinh(\kappa h)}{\cosh(\kappa h)}.$$

Substituindo $P(0)$ e $P'(0)$ em (3.16), resulta

$$P(z) = \frac{\rho g \cosh(\kappa(z + h))}{\cosh(\kappa h)},$$

e a perturbação na pressão (3.15) satisfaz

$$p'(t, x, y, z) = \rho g \frac{\cosh(\kappa(z + h))}{\cosh(\kappa h)} \eta(t, x, y). \quad (3.17)$$

Uma solução de (3.9), que corresponde a componente vertical da velocidade, é dada por

$$w = -i \frac{\kappa g \sinh(\kappa(z + h))}{\omega \cosh(\kappa h)} \eta.$$

Esta solução verifica a condição de contorno (3.11), $w = \partial\eta/\partial t$ em $z = 0$, se

$$\omega^2 = g\kappa \tanh(\kappa h). \quad (3.18)$$

Esta equação, chamada *relação de dispersão*, determina a frequência e, portanto a *velocidade de fase* $c = \omega/\kappa$ das ondas para um dado número de onda. Uma importante propriedade é que a frequência não depende da direção da onda, mas unicamente da magnitude do número de onda.

A escala de comprimento que aparece na relação de dispersão e que determina o tipo de onda é a profundidade h do fluido. Diferentes aproximações são obtidas conforme κ^{-1} relaciona-se com h .

No caso de ondas longas, onde $\kappa^{-1} \gg h$, a relação (3.18) é aproximada por

$$\omega^2 = g\kappa^2 h$$

e a velocidade de fase c satisfaz

$$c^2 = gh \quad (3.19)$$

Neste caso, a quantidade $c = \sqrt{gh}$ é chamada velocidade de onda de *águas rasas* e estas ondas são *não-dispersivas*, pois a velocidade de fase não depende da magnitude do número de onda. Esta aproximação é válida somente para ondas, cujos comprimentos são muito maiores que a profundidade do fluido. Esta restrição é necessária para que as velocidades verticais sejam pequenas e a aproximação hidrostática seja

válida. Se a profundidade do oceano é de $4km$, a velocidade das ondas de gravidade de águas rasas será aproximadamente $200m/s$. Assim, ondas longas na superfície do oceano viajam muito rapidamente e tais ondas não são excitadas pelas tensões do vento, mas podem ser produzidas por distúrbios de escala muito grande, como terremotos devido a falhas geológicas ocasionadas pelo movimento das placas tectônicas ou erupções vulcânicas, chamados *tsunamis*. Porém, se a profundidade do oceano é $h = 40m$, a velocidade das ondas de gravidade de águas rasas será $20m/s$ e tais ondas podem ser excitadas pelas tensões do vento.

Ainda, como $h \gg \eta$, tem-se $H = h + \eta \simeq h$ e a velocidade c satisfaz

$$c^2 = gH$$

Assim, a correspondente aproximação para (3.17) é

$$p' = \rho g \eta,$$

mostrando que a perturbação na pressão independe da profundidade, sendo este o resultado obtido se a pressão for calculada a partir da equação hidrostática.

De fato, supondo a equação hidrostática (2.33) válida para a pressão p e como o fluido é homogêneo, esta mesma equação implica que a perturbação na pressão p' satisfaz

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = 0,$$

e pela condição de contorno $p' = \rho g \eta$ em $z = \eta$, implica em

$$p' = \rho g \eta$$

em todo o fluido, ou seja $p' = f(t, x, y)$. Portanto, as equações de momento (3.8) se reduzem a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

mostrando que as correntes variando com o tempo independem da profundidade. Isto permite simplificar a equação da continuidade (3.2) através de integração na vertical. Foi observado anteriormente que para diferenças pequenas nas soluções para w e p' , as equações (3.11) e (3.13) podem ser aplicadas a $z = 0$. Assim, integrando entre o fundo constante $z = -h$ e a superfície $z = 0$, tem-se

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^0 \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h}^0 \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0,$$

o qual decorre a equação para a superfície livre

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

Assim, o sistema de equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \tag{3.21}$$

descreve o modelo de equações de águas rasas linearizadas sem o efeito de Coriolis, para uma profundidade do oceano constante.

Uma equação com uma única variável η pode ser obtida, derivando (3.21) em relação a t e substituindo as equações (3.20), resultando

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3.22)$$

que corresponde a uma equação da onda bidimensional homogênea. Esta onda se propaga com uma velocidade $c = \sqrt{gh}$ e é uma onda não-dispersiva. Uma vez que a equação (3.22) possui soluções da forma $\eta = A \exp i(kx + ly - \omega t)$, observa-se que a aproximação hidrostática apresenta resultados semelhantes aos da aproximação de ondas longas (3.14).

3.1.2 Simulações Simbólicas

Exemplo 1: Considerando o sistema (3.20)-(3.21) em um domínio unidimensional infinito, com $h = g = 1$ e condições iniciais

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_o(x) = 0, \\ v(0, x) &= v_o(x) = 0, \\ \eta(0, x) &= \eta_o(x) = \text{sgn}(x) = -1 + 2\mathcal{H}(x), \quad \eta_t(0, x) = 0, \end{aligned}$$

a solução da equação de Laplace (3.22) é dada por

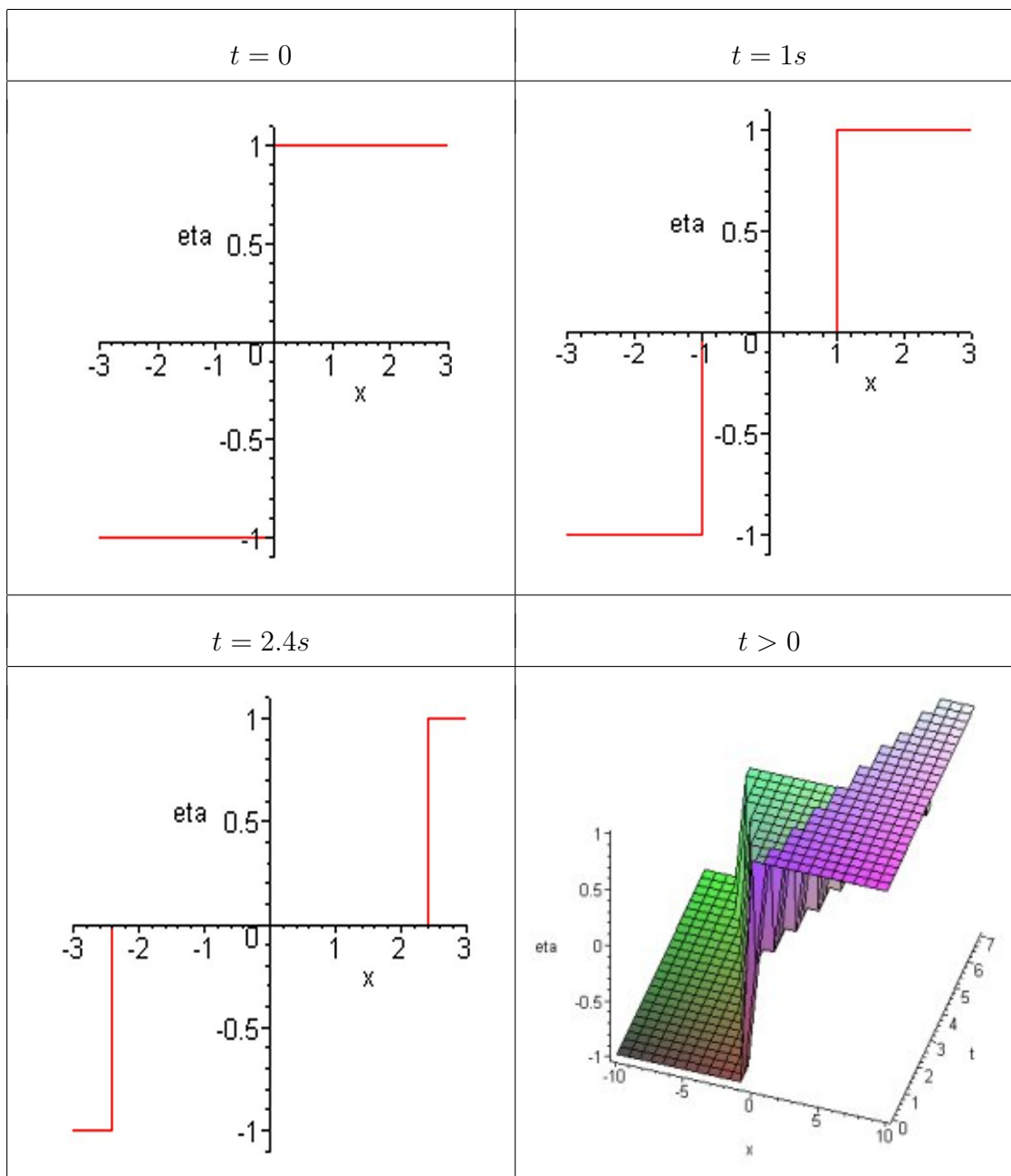
$$\eta(t, x) = \frac{1}{2}[\eta_o(x - t) + \eta_o(x + t)] = -1 + \mathcal{H}(x - t) + \mathcal{H}(x + t),$$

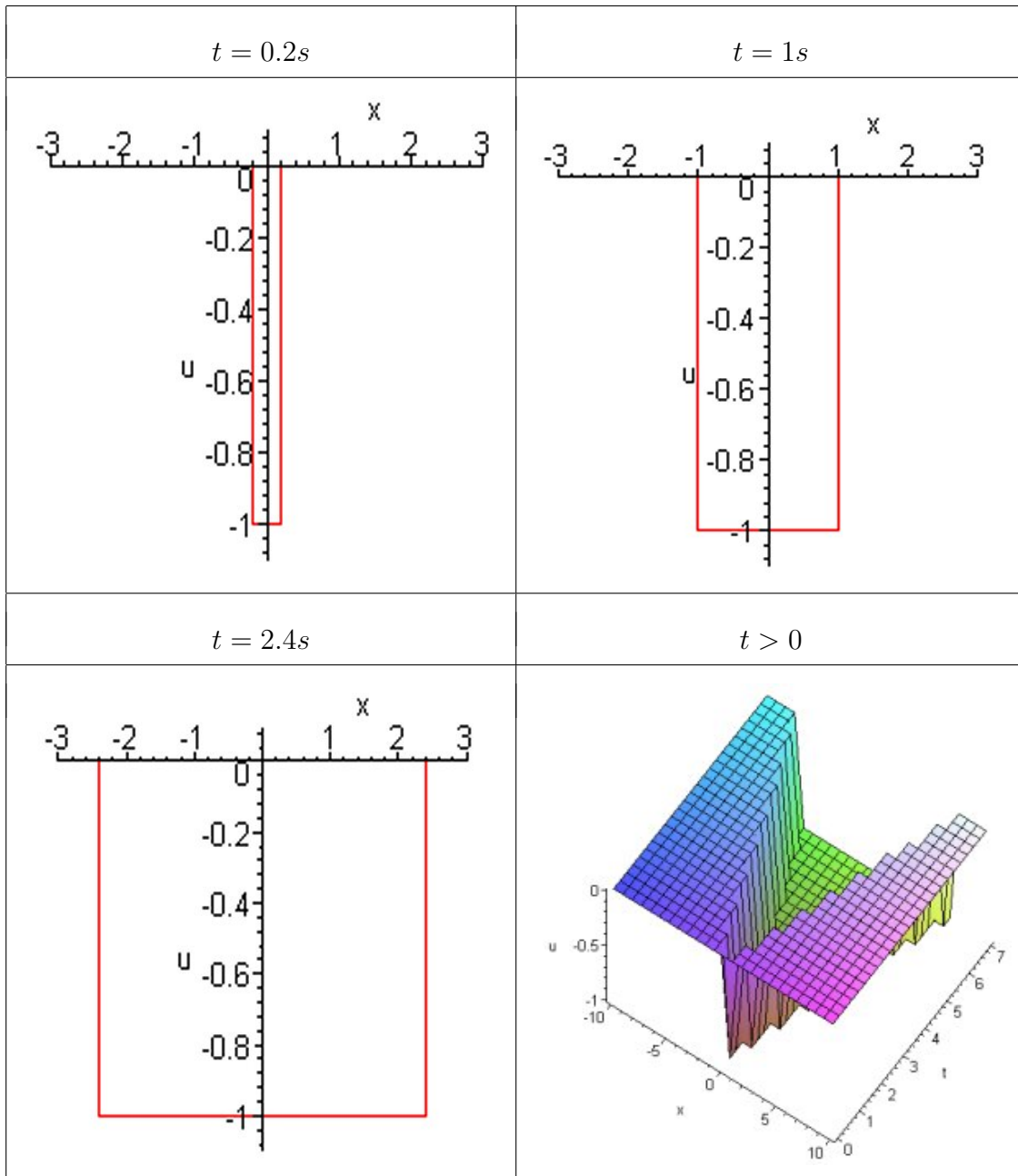
onde \mathcal{H} é a distribuição de Heaviside.

Analogamente, a solução para (3.20) é dada por

$$\begin{aligned} u(t, x) &= - \int_0^t \eta_x(\tau, x) d\tau = -\mathcal{H}(-x+t) - \mathcal{H}(x+t) + \mathcal{H}(-x) + \mathcal{H}(x) \\ v(t, x) &= 0. \end{aligned}$$

As soluções η e u são mostradas nas figuras 3.1 e 3.2, para alguns instantes de tempo. Observe-se que a descontinuidade inicial propaga-se ao longo das características $\xi = x-t$ e $\zeta = x+t$. A solução no sentido clássico não é diferenciável nos pontos das características, porém no sentido das funções generalizadas ou teoria das distribuições, Duff et al [18], Gel'Fand et al [22], Lin et al [40], Stakgold [59], é diferenciável com a introdução da função Delta.

Figura 3.1 Propagação de η sem os efeitos de rotação para o exemplo 1.

Figura 3.2 Propagação de u sem os efeitos de rotação para o exemplo 1.

Exemplo 2: Analogamente ao exemplo 1, considerando o sistema (3.20)-(3.21) em um domínio unidimensional finito $[-L,L]$, com $h = g = 1$ e condições iniciais

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_o(x) = 0, \\ v(0, x) &= v_o(x) = 0, \\ \eta(0, x) &= \eta_o(x) = \begin{cases} 1, & |x| < L \\ 0, & |x| > L, \end{cases} \quad , \quad \eta_t(0, x) = 0, \end{aligned}$$

a solução de (3.22) é dada por

$$\begin{aligned} \eta(t, x) &= \frac{1}{2}[\eta_o(x-t) + \eta_o(x+t)] \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{H}(1+x-t) - \mathcal{H}(x-t-1) + \mathcal{H}(1+x+t) - \mathcal{H}(x+t-1)), \end{aligned}$$

e a solução para (3.20) é dada por

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2}(-\mathcal{H}(-1-x+t) + \mathcal{H}(-x+t+1) - \mathcal{H}(1+x+t) + \mathcal{H}(x+t-1) \\ &\quad + \mathcal{H}(-x-1) - \mathcal{H}(1-x) + \mathcal{H}(1+x) - \mathcal{H}(x-1)), \\ v(t, x) &= 0 \end{aligned}$$

As soluções η e u são mostradas nas figuras 3.3 e 3.4, para alguns instantes de tempo.

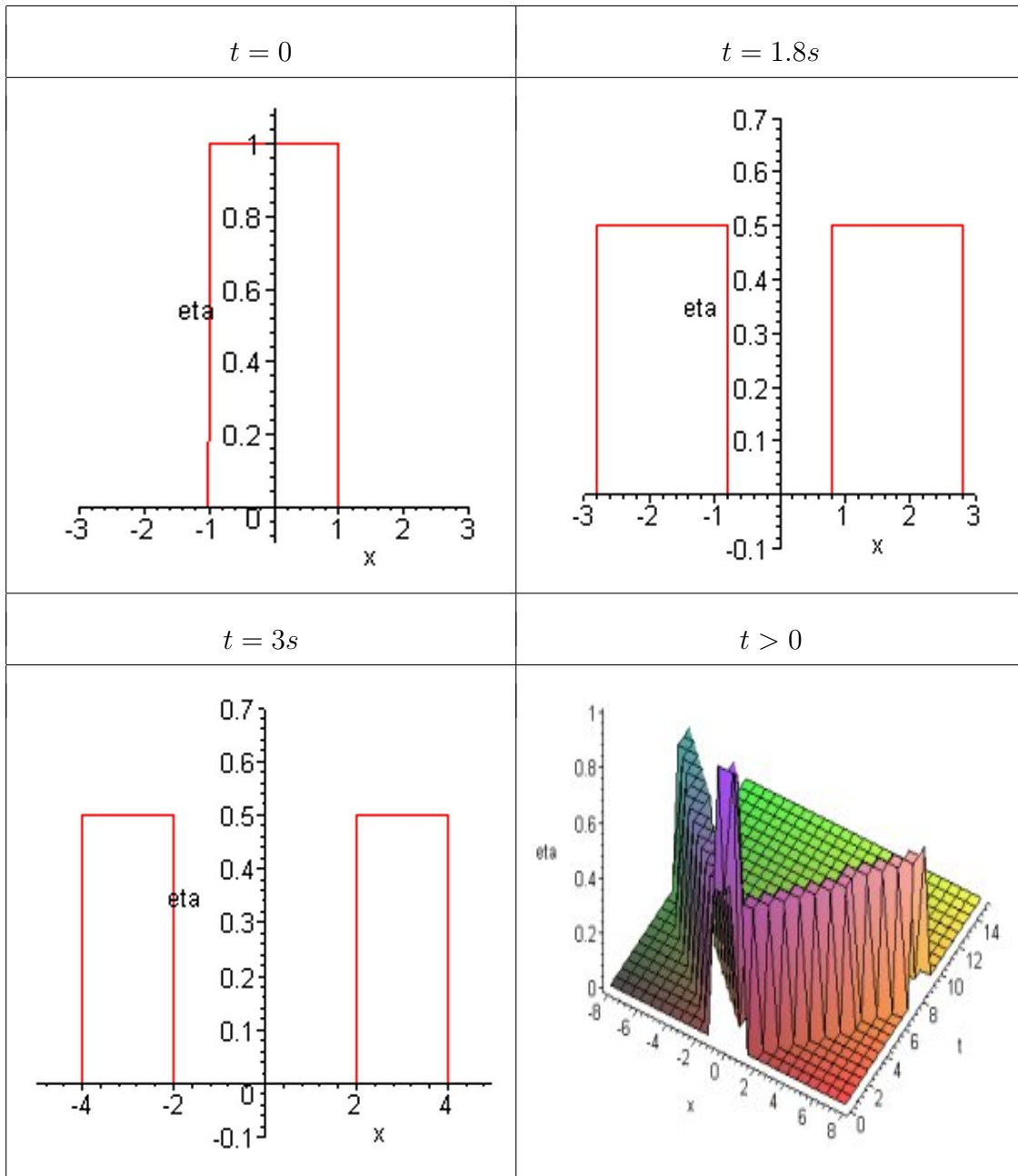
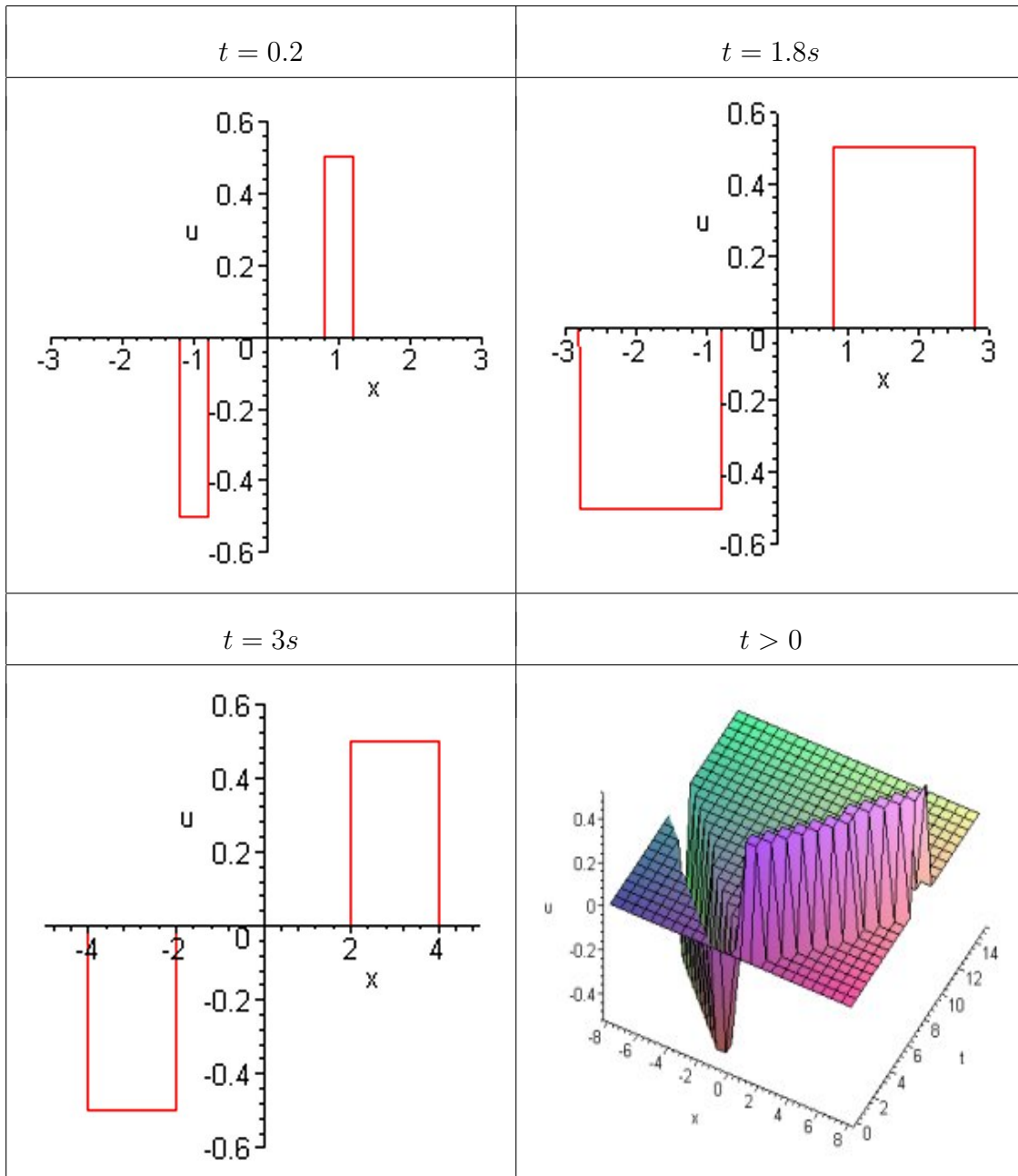


Figura 3.3 Propagação de η sem os efeitos de rotação para o exemplo 2.

Figura 3.4 Propagação de u sem os efeitos de rotação para o exemplo 2.

3.2 Efeitos da Rotação

A seguir, considere-se profundidade h constante. Como a equação da continuidade não contém o efeito de Coriolis, tem-se que a equação da superfície livre é a mesma obtida em (3.21). Com o efeito de Coriolis incluído, o movimento do fluido na sua forma linearizada é descrito pelo sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.25)$$

com as condições iniciais

$$u(0, x, y) = u_o(x, y), \quad v(0, x, y) = v_o(x, y), \quad \eta(0, x, y) = \eta_o(x, y). \quad (3.26)$$

A equação (3.25) pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\eta}{h} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.27)$$

Agora, considerando a vorticidade relativa

$$\bar{\xi} = \nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

a componente vertical será referida por

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.28)$$

Como η independe de z , a velocidade (u, v) é independente da profundidade, de forma análoga ao caso sem rotação. Tomando a divergência das equações

de momento $[\partial/\partial x$ de (3.23) + $\partial/\partial y$ de (3.24)], obtém-se a equação

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + fh\zeta = 0. \quad (3.29)$$

Se $f = 0$, esta equação se reduz à equação (3.22), associada a um sistema sem efeitos de rotação.

A partir das equações (3.23), (3.24) e (3.27) pode-se derivar uma equação importante na teoria de fluidos sujeitos a um sistema em rotação, a equação de conservação da vorticidade potencial. Inicialmente, elimina-se a variável η , calculando o rotacional $[\partial/\partial y$ de (3.23) - $\partial/\partial x$ de (3.24)] e obtém-se a equação para a componente vertical da vorticidade

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\zeta}{f} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.30)$$

Subtraindo a equação da continuidade (3.27) de (3.30), resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{h} \right) = 0. \quad (3.31)$$

Esta equação é uma forma linearizada da equação geral que expressa a *conservação da vorticidade potencial* para um fluido homogêneo raso sujeito a rotação, obtida no apêndice A-1.3. A grandeza

$$Q = \frac{\zeta}{f} - \frac{f\eta}{h^2}, \quad (3.32)$$

é a vorticidade potencial linearizada e a equação (3.31) expressa o fato que Q preserva seu valor inicial para qualquer tempo, ou seja

$$Q(t, x, y) = Q(0, x, y). \quad (3.33)$$

Como a vorticidade potencial é preservada no tempo, de (3.32) e (3.33), tem-se

$$fh\zeta = fh^2Q(0, x, y) + f^2\eta.$$

Substituindo em (3.29), obtém-se que a elevação subsequente a um estado inicial $\eta(0, x) = \eta_o(x)$, $\eta_t(0, x) = \eta_1(x)$ pode, em princípio, ser determinado resolvendo a equação

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \right) + f^2\eta = -fh^2Q(0, x, y) \quad (3.34)$$

em termos de um valor inicial para a vorticidade. Esta equação corresponde a uma equação de Klein-Gordon bidimensional não-homogênea. De (3.32) e (3.33), pode ser observado que o termo $Q(0, x, y)$ depende das condições iniciais para a velocidade e elevação da superfície livre. Mais precisamente, considerando o estado inicial (3.26), tem-se que

$$-fh^2Q(0, x, y) = -fh^2 \left(\frac{\zeta_o}{h} - \frac{f\eta_o}{h^2} \right) = -fh \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) + f^2\eta_o. \quad (3.35)$$

Portanto, a equação (3.34) se reduz a

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \right) + f^2\eta = f^2\eta_o - fh \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right), \quad (3.36)$$

e utilizando (3.25), tem-se as condições iniciais

$$\eta(0, x, y) = \eta_o(x, y), \quad \eta_t(0, x, y) = -h(u_x(0, x, y) + v_y(0, x, y)) \quad (3.37)$$

Por um raciocínio similar, escrevendo o sistema (3.23)-(3.25) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -f & g\frac{\partial}{\partial x} \\ f & \frac{\partial}{\partial t} & g\frac{\partial}{\partial y} \\ h\frac{\partial}{\partial x} & h\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e desacoplando as equações, tem-se que u e v satisfazem

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f^2 u \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f^2 v \right] = 0.$$

Ou, ainda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f^2 u = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f^2 u \right]_{t=0}.$$

Utilizando as equações do sistema (3.23)-(3.25) em $t=0$, decorre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f^2 u = \frac{\partial}{\partial y} \left(c^2 \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) - fg\eta_o \right). \quad (3.38)$$

Utilizando (3.23), tem-se as condições iniciais

$$u(0, x, y) = u_o(x, y), \quad u_t(0, x, y) = fv(0, x, y) - g\eta_x(0, x, y). \quad (3.39)$$

Similarmente,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f^2 v = -\frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) - fg\eta_o \right) \quad (3.40)$$

e utilizando (3.24), tem-se as condições iniciais

$$v(0, x, y) = v_o(x, y), \quad v_t(0, x, y) = -fu(0, x, y) - g\eta_y(0, x, y). \quad (3.41)$$

Observa-se que u , v e η satisfazem uma equação de Klein-Gordon não-homogênea, porém, as condições iniciais bem como os termos não-homogêneos estão acoplados.

3.2.1 Equilíbrio Geostrófico: Solução Estacionária

A solução estacionária (u, v, η) , por (3.23) e (3.24) deve impor um balanço entre a aceleração de coriolis e o gradiente de pressão, isto é,

$$fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{e} \quad fv = g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.42)$$

e satisfazer a versão estacionária da equação da continuidade (3.25) de maneira exata, isto é, é não-divergente com

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.43)$$

Este balanço é conhecido como *balanço geostrófico* e tem a propriedade que o escoamento ocorre ao longo dos contornos de pressão constante, isto é, ao longo das isóbaras.

Observe-se que a solução do equilíbrio estacionário não está em repouso, mas em um balanço geostrófico, isto é, um balanço entre a aceleração de coriolis e o gradiente de pressão dividido pela densidade. Além disso, esta solução é degenerativa no sentido que qualquer campo de velocidade em balanço geostrófico satisfaz a equação da continuidade exatamente. Portanto, a solução estacionária não pode ser obtida considerando simplesmente uma solução das equações em estado estacionário. Outras informações são necessárias. Esta informação é dada pelo princípio da conservação da vorticidade potencial, isto é, a vorticidade potencial em cada elemento de fluido é a mesma do instante inicial. Assim, para escoamento em balanço geostrófico, a substituição de (3.42) em (3.28) mostra que a vorticidade será dada por

$$\zeta = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right). \quad (3.44)$$

Além disso, usando a equação (3.33), obtém-se

$$\begin{aligned}\zeta &= \zeta_o + \frac{f}{h}(\eta - \eta_o) \\ &= \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) + \frac{f}{h}(\eta - \eta_o).\end{aligned}\quad (3.45)$$

Portanto, igualando (3.44) e (3.45), a elevação η correspondente ao estado geostrófico, satisfaz

$$-c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + f^2 \eta = f^2 \eta_o - fh \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right), \quad (3.46)$$

que é a versão estacionária de (3.36).

Introduzindo o *raio de deformação de Rossby*

$$a = \frac{c}{|f|}$$

na equação (3.46), obtém-se uma forma alternativa para a elevação η correspondente ao estado geostrófico

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \eta = -\frac{1}{a^2} \eta_o + \frac{f}{g} \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right). \quad (3.47)$$

O raio de deformação de Rossby representa a escala de comprimento horizontal na qual os efeitos de rotação se tornam importantes e escolhe-se $|f|$ para garantir que o raio não seja negativo. Os valores do raio de Rossby variam com a latitude, pois $f = 1.47 \times 10^{-4} \sin \phi \text{ s}^{-1}$. Estimativas podem ser baseadas no valor $f = 1.0 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ para a latitude $\phi = 45^\circ$, mas o raio de Rossby será maior próximo ao equador, onde $f = 0.25 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, para a latitude $\phi = 10^\circ$. Para águas profundas em um oceano, onde $h = 4\text{km}$ ou 5km , $c \approx 200\text{m/s}$ e portanto, o raio de Rossby é $a \approx 2000\text{km}$, para a latitude $\phi = 45^\circ$ e $a \approx 8000\text{km}$, para a latitude $\phi = 10^\circ$. Estes valores são grandes se comparados com a profundidade, de modo

que a aproximação hidrostática é válida nesta escala. Para aplicações em costas continentais e em oceanos rasos, os valores são bem menores. Por exemplo, para $h = 40m$, $c \approx 20m/s$, tem-se $a \approx 200km$, para a latitude $\phi = 45^\circ$ e $a \approx 800km$, para a latitude $\phi = 10^\circ$. Se f tende a zero (eventos próximo ao equador), a tende a infinito, indicando que para escalas de comprimento pequenas em comparação com a , os efeitos de rotação são menores, enquanto que para escalas comparáveis ou maiores que a , os efeitos de rotação são mais importantes. Quando o raio de Rossby é muito grande ($f \simeq 0$), a equação (3.47) se reduz ao caso estacionário de um sistema sem rotação.

Na seguinte seção é formulada uma representação da solução da equação de Klein-Gordon não-homogênea em termos de uma solução fundamental.

3.3 Resposta Dinâmica da Equação de Klein-Gordon

O uso da transformada de Fourier com respeito a variável espacial em d dimensões

$$\hat{\eta}(t, \omega) = \mathcal{F}(\eta(t, \mathbf{x})) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \mathbf{x}, \omega \rangle} \eta(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

onde $\langle \mathbf{x}, \omega \rangle$ denota o produto interno

$$\langle \mathbf{x}, \omega \rangle = \sum_{k=1}^d x_k \omega_k,$$

que define a norma euclideana

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^d |x_k|^2},$$

permite obter a resposta dinâmica ou solução do problema inicial de Cauchy

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) - c^2 \Delta \eta(t, \mathbf{x}) + f^2 \eta(t, \mathbf{x}) = F(t, \mathbf{x}), \quad (3.48)$$

$$\eta(0, \mathbf{x}) = \eta_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = \eta_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (3.49)$$

através de uma fórmula de variação de parâmetros. Sendo

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_k^2}(t, \mathbf{x})\right) = (i\omega_k)^2 \mathcal{F}(\eta(t, \mathbf{x})) = -\omega_k^2 \hat{\eta}(t, \omega)$$

e aplicando a transformada de Fourier na equação (3.48), tem-se a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial t^2}(t, \omega) + \beta^2(\omega) \hat{\eta}(t, \omega) = \hat{F}(t, \omega). \quad (3.50)$$

onde $\beta^2(\omega)$ é definida por

$$\beta^2(\omega) = c^2 \omega^2 + f^2$$

com $\omega^2 = \langle \omega, \omega \rangle$ e $\hat{F}(t, \omega)$ denota a transformada de Fourier do termo forçante $F(t, \mathbf{x})$. Aplicando-se a transformada de Fourier nas condições iniciais (3.49), decorre que

$$\hat{\eta}(0, \omega) = \hat{\eta}_0(\omega), \quad \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t}(0, \omega) = \hat{\eta}_1(\omega). \quad (3.51)$$

A solução do problema de valor inicial (3.50) e (3.51), em termos da base fundamental ou dinâmica e dos valores iniciais, no caso de coeficientes constantes, é dada por Claeysen et al [14], [15] e Miller [46] como

$$\hat{\eta}(t, \omega) = \frac{d\hat{h}}{dt}(t, \omega) \hat{\eta}_0(\omega) + \hat{h}(t, \omega) \hat{\eta}_1(\omega) + \int_0^t \hat{h}(t - \tau, \omega) \hat{F}(\tau, \omega) d\tau, \quad (3.52)$$

onde $\widehat{h}(t, \omega)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \widehat{h}}{dt^2}(t, \omega) + \beta^2(\omega) \widehat{h}(t, \omega) &= 0 \\ \widehat{h}(0, \omega) &= 0, \quad \frac{d\widehat{h}}{dt}(0, \omega) = 1, \quad \omega \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

dada por

$$\widehat{h}(t, \omega) = \frac{\sin(\beta(\omega)t)}{\beta(\omega)}.$$

Além disso, $\{\widehat{h}', \widehat{h}\}$ é uma base de soluções, pois o seu Wronskiano calculado com o uso de valores iniciais de $\widehat{h}(t)$, é não nulo.

Aplicando-se em (3.52), a transformada inversa de Fourier

$$\eta(t, \mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\eta}(t, \omega)) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \mathbf{x}, \omega \rangle} \widehat{\eta}(t, \omega) d\omega, \quad \widehat{\eta}(t, \omega) = \mathcal{F}(\eta(t, \mathbf{x}))$$

e a propriedade da convolução

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\phi}(\omega)\widehat{\psi}(\omega)) = (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\mathbf{x} - \xi)\psi(\xi) d\xi,$$

obtem-se a resposta dinâmica η devido a uma força externa e condições iniciais:

$$\begin{aligned} \eta(t, \mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h}{\partial t}(t, \mathbf{x} - \xi) \eta_0(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} h(t, \mathbf{x} - \xi) \eta_1(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h(t - \tau, \mathbf{x} - \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{3.53}$$

onde $h(t, \mathbf{x})$ é a *resposta impulso, solução fundamental ou dinâmica* ou, ainda, *função de Green temporal* ou no domínio tempo e satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) - c^2 \Delta h(t, \mathbf{x}) + f^2 h(t, \mathbf{x}) &= 0, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ h(0, \mathbf{x}) &= 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde $\delta(\mathbf{x})$ é a função delta de Dirac.¹

A resposta dinâmica η pode ser considerada como a adição de duas parcelas

$$\eta(t, \mathbf{x}) = \eta_h(t, \mathbf{x}) + \eta_F(t, \mathbf{x}), \quad (3.55)$$

onde

$$\eta_h(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h}{\partial t}(t, \mathbf{x} - \xi) \eta_0(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} h(t, \mathbf{x} - \xi) \eta_1(\xi) d\xi$$

é a resposta livre do sistema, associada as condições iniciais e corresponde a solução do problema homogêneo

$$\frac{\partial^2 \eta_h}{\partial t^2} - c^2 \Delta \eta_h + f^2 \eta_h = 0, \quad (3.56)$$

$$\eta_h(0, \mathbf{x}) = \eta_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \frac{\partial \eta_h}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = \eta_1(\mathbf{x}).$$

3.3.1 Decomposição da Resposta Forçada

A segunda parcela de (3.55) é chamada resposta forçada do sistema e corresponde a solução de (3.48) com condições iniciais nulas. De (3.53), esta resposta é dada por

$$\eta_F(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h(t - \tau, \mathbf{x} - \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (3.57)$$

¹Para a transformada de Fourier com funções generalizadas, veja-se Lions et al [41], Rogers et al [52]. Na prática, considera-se como o limite de transformadas que aproximam as funções generalizadas.

O cálculo desta resposta forçada η_F requer, em princípio, realizar duas integrações (uma espacial em \mathbb{R}^d e outra temporal) com um núcleo $h(t, \mathbf{x})$, que dependendo da dimensão espacial, está associada a algumas funções especiais. Em geral, não é uma tarefa fácil. Porém, para forçantes do tipo

$$F(t, \mathbf{x}) = e^{\lambda t} r(\mathbf{x})$$

é possível simplificar os cálculos envolvidos na resposta forçada. Pois, uma solução particular ou permanente $\eta_p(t, \mathbf{x})$ do mesmo tipo

$$\eta_p(t, \mathbf{x}) = e^{\lambda t} \vartheta(\mathbf{x})$$

requer a resolução do problema não-homogêneo

$$\Delta \vartheta(\mathbf{x}) + \gamma \vartheta(\mathbf{x}) = -\frac{r(\mathbf{x})}{c^2}, \quad (3.58)$$

onde $\gamma = -(f^2 + \lambda^2)/c^2$ e Δ denota o operador de Laplace em \mathbb{R}^d . Esta equação é referida como *equação de Helmholtz não-homogênea* e está associada a problemas relacionados a oscilações do estado estacionário. Para $\gamma < 0$, esta equação descreve os processos de transferência de massa.

Agora, supondo que $\eta_p(t, \mathbf{x})$ seja uma solução particular da forma $\eta_p(t, \mathbf{x}) = e^{\lambda t} \vartheta(\mathbf{x})$, deve-se determinar uma solução homogênea $\eta_{hp}(t, \mathbf{x})$, induzida por $\eta_p(t, \mathbf{x})$, que satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 \eta_{hp}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \eta_{hp} + f^2 \eta_{hp} = 0,$$

e tal que

$$\eta_F(t, \mathbf{x}) = \eta_p(t, \mathbf{x}) + \eta_{hp}(t, \mathbf{x}) = e^{\lambda t} \vartheta(\mathbf{x}) + \eta_{hp}(t, \mathbf{x}) \quad (3.59)$$

possui condições iniciais nulas. Ou seja,

$$\eta_{hp}(0, \mathbf{x}) = -\eta_p(0, \mathbf{x})$$

Ainda, derivando (3.59) e aplicando em $t = 0$, resulta

$$\frac{\partial \eta_{hp}}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = -\frac{\partial \eta_p}{\partial t}(0, \mathbf{x}).$$

Resumindo, a resposta forçada η_F do problema inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_F}{\partial t^2} - c^2 \Delta \eta_F + f^2 \eta_F &= F(t, \mathbf{x}), & F(t, \mathbf{x}) &= e^{\lambda t} r(\mathbf{x}), \\ \eta_F(0, \mathbf{x}) &= 0, & \frac{\partial \eta_F}{\partial t}(0, \mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

é dada por

$$\begin{aligned} \eta_F(t, \mathbf{x}) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h(t - \tau, \mathbf{x} - \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau \\ &= \eta_p(t, \mathbf{x}) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h}{\partial t}(t, \mathbf{x} - \xi) \eta_p(0, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} h(t, \mathbf{x} - \xi) \frac{\partial \eta_p}{\partial t}(0, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde $\eta_p(t, \mathbf{x}) = e^{\lambda t} \vartheta(\mathbf{x})$ é uma solução particular não-homogênea.

Assim, a resposta dinâmica $\eta(t, \mathbf{x})$ será dada por

$$\begin{aligned} \eta(t, \mathbf{x}) &= \eta_h(t, \mathbf{x}) + \eta_p(t, \mathbf{x}) + \eta_{hp}(t, \mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h}{\partial t}(t, \mathbf{x} - \xi) \eta_0(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} h(t, \mathbf{x} - \xi) \eta_1(\xi) d\xi \\ &\quad + \eta_p(t, \mathbf{x}) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h}{\partial t}(t, \mathbf{x} - \xi) \eta_p(0, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} h(t, \mathbf{x} - \xi) \frac{\partial \eta_p}{\partial t}(0, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.62)$$

sendo necessário conhecer as condições iniciais $\eta_0(\mathbf{x})$ e $\eta_1(\mathbf{x})$, a função de Green temporal ou resposta impulso $h(t, \mathbf{x})$ e uma resposta permanente ou particular $\eta_p(t, \mathbf{x})$.

A função de Green temporal ou resposta impulso $h(t, \mathbf{x})$ depende da dimensão espacial e pode ser encontrada em Bleistein [4], Morse et al [47], Polyanin [50], Tijonov et al [63] entre outros. Assim, para

- $x \in \mathbb{R}$:

$$h(t, x) = \frac{\mathcal{H}(ct - |x|)}{2c} J_0 \left(\frac{f}{c} \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right), \quad (3.63)$$

onde $\mathcal{H}(z)$ é a função de Heaviside definida por

$$\mathcal{H}(z) = \begin{cases} 1 & : z \geq 0 \\ 0 & : z < 0 \end{cases}$$

e $J_0(z)$ é uma função de Bessel do primeiro tipo dada pela relação

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}$$

para $\nu = 0$ e Γ é a função Gama definida por $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi$.

- $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$h(t, x, y) = \frac{\mathcal{H}(ct - r)}{2\pi c^2} \frac{\cos(f\sqrt{t^2 - r^2/c^2})}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}} \quad (3.64)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$h(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\frac{\delta(t - r/c)}{r} - \frac{f J_1(f\sqrt{t^2 - r^2/c^2})}{c \sqrt{t^2 - r^2/c^2}} \mathcal{H}(t - r/c) \right] \quad (3.65)$$

onde $\delta(k)$ é a função delta de Dirac, $J_1(k)$ é a função de Bessel do primeiro tipo e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Uma solução permanente da forma $\eta_p(t, \mathbf{x}) = e^{\lambda t} \vartheta(\mathbf{x})$ pode ser escolhida, onde $\vartheta(\mathbf{x})$ é a solução da equação de Helmholtz não-homogênea em \mathbb{R}^d .

Para

- $x \in \mathbb{R}$:

$$\vartheta''(x) + \gamma \vartheta(x) = -r(x)/c^2,$$

com $\gamma = -(f^2 + \lambda^2)/c^2$. Uma solução particular $\vartheta(x)$ é dada pela convolução

$$\vartheta(x) = \frac{1}{c^2} \int_0^x h(\xi - x) r(\xi) d\xi, \quad (3.66)$$

onde

$$h(x - \xi) = \frac{\sin(\gamma(x - \xi))}{\gamma} \quad (3.67)$$

denota a solução fundamental da equação. Observe-se que no caso unidimensional, para entradas simples $r(x)$, a solução $\vartheta(x)$ pode ser obtida por outros meios. Em particular, no caso harmônico $r(x) = a \cos \alpha x + b \sin(\alpha x)$, procura-se obter uma solução da mesma forma $v(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$.

- $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: Uma solução da equação de Helmholtz não-homogênea

$$\Delta_2 \vartheta(x, y) + \gamma \vartheta(x, y) = -r(x, y)/c^2,$$

é definida pela convolução

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi, y - \zeta) r(\xi, \zeta) d\xi d\zeta, \quad (3.68)$$

onde

$$g(x, y) = K_0(s\rho), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.69)$$

é a função de Green no domínio espacial e $K_0(z)$ é a função de Bessel modificada do segundo tipo. Aqui $s = i\sqrt{\gamma}$, conforme Polyanin [50].

- $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: Uma solução da equação de Helmholtz não-homogênea

$$\Delta_3 \vartheta(x, y, z) + \gamma \vartheta(x, y, z) = -r(x, y, z)/c^2,$$

é definida pela convolução

$$\vartheta(x, y, z) = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi, y - \zeta, z - \varepsilon) r(\xi, \zeta, \varepsilon) d\xi d\zeta d\varepsilon \quad (3.70)$$

onde

$$g(x, y, z) = \frac{\exp(-s\rho)}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.71)$$

é a função de Green no domínio espacial, Polyanin [50].

Portanto, para condições iniciais

$$\eta(0, \mathbf{x}) = \eta_0(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = \eta_1(x\mathbf{x})$$

e forçante $F(t, \mathbf{x}) = e^{\lambda t} r(\mathbf{x})$ em um domínio infinito, obtém-se a resposta dinâmica da equação (3.48) por (3.62) em cada uma das três dimensões espaciais.

Este mesmo procedimento é utilizado para obter a resposta dinâmica das velocidades em um domínio finito, onde a obtenção da resposta dinâmica é realizada com o uso da transformada de Laplace. A fórmula de variação de parâmetros e a decomposição da resposta forçada são semelhantes ao caso de dimensão infinita. No caso de domínio finito, a resposta impulso pode ser determinada em variadas situações com o uso do método espectral de Fourier, Claeysen et al [13].

3.4 Resposta Dinâmica das Equações de Águas Rasas Forçadas

Como cada componente do sistema de equações de águas rasas, equações (3.23)-(3.25), com as condições iniciais dadas em (3.26) satisfaz uma equação de Klein-Gordon não-homogênea, representadas pelas equações (3.36),(3.38) e (3.40) com valores iniciais (3.37), (3.39) e (3.41), segue que

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \eta \end{bmatrix} = \int_{\mathbb{R}^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial h(t,x-\xi,y-\zeta)}{\partial t} u(0, \xi, \zeta) + h(t, x - \xi, y - \zeta) u_t(0, \xi, \zeta) + \int_0^t h(t - \tau, x - \xi, y - \zeta) F_1(\xi, \zeta) d\tau \\ \frac{\partial h(t,x-\xi,y-\zeta)}{\partial t} v(0, \xi, \zeta) + h(t, x - \xi, y - \zeta) v_t(0, \xi, \zeta) + \int_0^t h(t - \tau, x - \xi, y - \zeta) F_2(\xi, \zeta) d\tau \\ \frac{\partial h(t,x-\xi,y-\zeta)}{\partial t} \eta(0, \xi, \zeta) + h(t, x - \xi, y - \zeta) \eta_t(0, \xi, \zeta) + \int_0^t h(t - \tau, x - \xi, y - \zeta) F_3(\xi, \zeta) d\tau \end{bmatrix} d\xi, \quad (3.72)$$

onde F_k denota a respectiva componente da forçante $F(x, y)$ dada por

$$F(x, y) = \begin{cases} -\frac{\partial F_o}{\partial y}, & k = 1 \\ \frac{\partial F_o}{\partial x}, & k = 2 \\ \frac{f}{g} F_o, & k = 3 \end{cases},$$

e

$$F_o(x, y) = fg\eta_o - c^2 \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right)$$

está associado a vorticidade relativa e elevação iniciais.

De maneira compacta, tem-se

$$q(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(t, x - \xi, y - \zeta) q(0, \xi, \zeta) d\xi d\zeta, \quad (3.73)$$

onde

$$h(t, x, y) = \frac{\partial h(t, x, y)}{\partial t} E_1 + h(t, x, y) E_2 + \int_0^t h(t - \tau, x, y) d\tau E_3, \quad q = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Aqui, E_1 denota a matriz identidade de ordem 3, E_2 e E_3 denotam os operadores diferenciais espacial

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & f & -g \frac{\partial}{\partial x} \\ -f & 0 & -g \frac{\partial}{\partial y} \\ -h \frac{\partial}{\partial x} & -h \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_3 = \begin{bmatrix} -c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & c^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & -fg \frac{\partial}{\partial y} \\ c^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & fg \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{fc^2}{g} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{fc^2}{g} \frac{\partial}{\partial x} & f^2 \end{bmatrix}.$$

3.5 Ajuste Geostrófico Unidimensional

Uma explanação do processo de ajuste geostrófico com rotação foi conduzida no trabalho de Rossby [53], e posteriormente, Cahn [7], Blumen [5], Gill [23], entre outros. Para tanto, supõe-se que somente uma das variáveis possui valor inicial não nulo e que o estado inicial independe de y . Então, podemos assumir que a solução em tempos subseqüentes também independe de y , e a partir das equações (3.23)-(3.25), tem-se o sistema unidimensional

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Rossby [53] considerou o estado inicial $v_o = 0$, $\eta_o = 0$ e u_o constante numa faixa finita. Aqui, serão considerados os valores iniciais utilizados por Gill

[23],

$$\begin{aligned}\eta(0, x) &= \eta_o(x) = \text{sgn}(x) \\ u(0, x) &= u_o(x) = 0, \\ v(0, x) &= v_o(x) = 0.\end{aligned}\tag{3.75}$$

onde $x \in \mathbb{R}$. Isto é motivado pelo experimento conduzido por Marsigli em Gill [23], no ajuste sem rotação. Das equações (3.74), consideram-se os valores iniciais para as derivadas

$$\begin{aligned}\eta_t(0, x) &= 0, \\ u_t(0, x) &= -g\eta_x(0, x) = -2g\delta(x) \\ v_t(0, x) &= 0.\end{aligned}\tag{3.76}$$

Nestas condições, o estado de equilíbrio (u_g, v_g, η_g) , correspondente ao estado geostrófico, pode ser determinado a partir de uma solução particular de (3.47), isto é,

$$\frac{d^2\eta_g}{dx^2} - \frac{1}{a^2}\eta_g = -\frac{1}{a^2}\eta_o(x) = -\frac{1}{a^2}\text{sgn}(x).\tag{3.77}$$

e das equações (3.42),

$$f u_g = -g \frac{\partial \eta_g}{\partial y} = 0, \quad f v_g = g \frac{\partial \eta_g}{\partial x},$$

ou seja,

$$u_g = 0, \quad v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta_g}{\partial x}.$$

Para determinar a elevação e as velocidades nos tempos subsequentes, considere-se o problema evolutivo representado pelas equações de Klein-Gordon forçadas e as

respectivas condições iniciais, equações (3.36)-(3.41) para o caso unidimensional

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + f^2 u = 0 \quad (3.78)$$

$$u(0, x) = 0,$$

$$u_t(0, x) = -g\eta'_o(x) = -2g\delta(x)$$

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} + f^2 v = -fg\eta'_o(x) = 2fg\delta(x) \quad (3.79)$$

$$v(0, x) = 0,$$

$$v_t(0, x) = 0.$$

$$\eta_{tt} - c^2 \eta_{xx} + f^2 \eta = f^2 \eta_o(x) = f^2 \operatorname{sgn}(x) \quad (3.80)$$

$$\eta(0, x) = \operatorname{sgn}(x),$$

$$\eta_t(0, x) = 0$$

Observa-se que a solução para a componente v vem a ser a resposta forçada da equação de Klein-Gordon com $F(t, x) = 2fg\delta(x)$, cuja solução é dada pela equação (3.57), isto é

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau, x - \xi) 2fg\delta(\xi) d\xi d\tau \\ &= 2fg \int_0^t h(t - \tau, x) d\tau = 2fg \int_0^t h(\tau, x) d\tau \end{aligned} \quad (3.81)$$

Utilizando (3.63) para a função $h(t, x)$, segue

$$v(t, x) = \frac{gf}{c} \begin{cases} \int_0^t J_0\left(\frac{f}{c}\sqrt{c^2\tau^2 - x^2}\right) d\tau, & |x| \leq ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases} \quad (3.82)$$

$$= \frac{gf}{c} \mathcal{H}(ct - |x|) \int_0^t J_0\left(\frac{f}{c}\sqrt{c^2\tau^2 - x^2}\right) d\tau. \quad (3.83)$$

Fazendo uma mudança de variável na integração, segue que

$$v(t, x) = g \begin{cases} \int_0^{\frac{f}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}} (c^2r^2 + f^2x^2)^{-\frac{1}{2}} J_0(r)r \, dr, & |x| \leq ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases}. \quad (3.84)$$

Agora, comparando o sistema (3.78) com (3.54), observa-se que a solução para a componente u será um múltiplo da resposta impulso da equação de Klein-Gordon, ou seja

$$u(t, x) = -2gh(t, x) = -\frac{g}{c} \begin{cases} J_0\left(\frac{f}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right), & |x| \leq ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases}. \quad (3.85)$$

A solução do problema de valor inicial (3.80) é representada pela fórmula de variação de parâmetros (3.53), ou seja

$$\eta(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x - \xi)\eta_0(\xi) \, d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau, x - \xi)F(\tau, \xi) \, d\xi d\tau.$$

onde $F(t, x) = f^2 \operatorname{sgn}(x)$. A contribuição da parte forçada pode ser decomposta segundo (3.61), onde devido ao tipo de forçante, a solução particular $\eta_p(t, x)$ pode ser escolhida independente do tempo, isto é

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau, x - \xi)F(\tau, \xi)d\xi d\tau = \eta_p(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x - \xi)\eta_p(\xi) \, d\xi.$$

Assim,

$$\eta(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x - \xi) [\eta_0(\xi) - \eta_p(\xi)] \, d\xi + \eta_p(x). \quad (3.86)$$

onde

$$h(t, x) = \frac{\mathcal{H}(ct - |x|)}{2c} J_0\left(\frac{f}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2}\right)$$

e

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = \frac{\delta(ct - |x|)}{2} J_0 \left(\frac{f}{c} \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right) - \frac{ft}{2} \mathcal{H}(ct - |x|) \frac{J_1 \left(\frac{f}{c} \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}.$$

A seguir, gráficos da resposta impulso unidimensional em variados domínios espacial e temporal, sendo que o último gráfico corresponde a sua derivada.

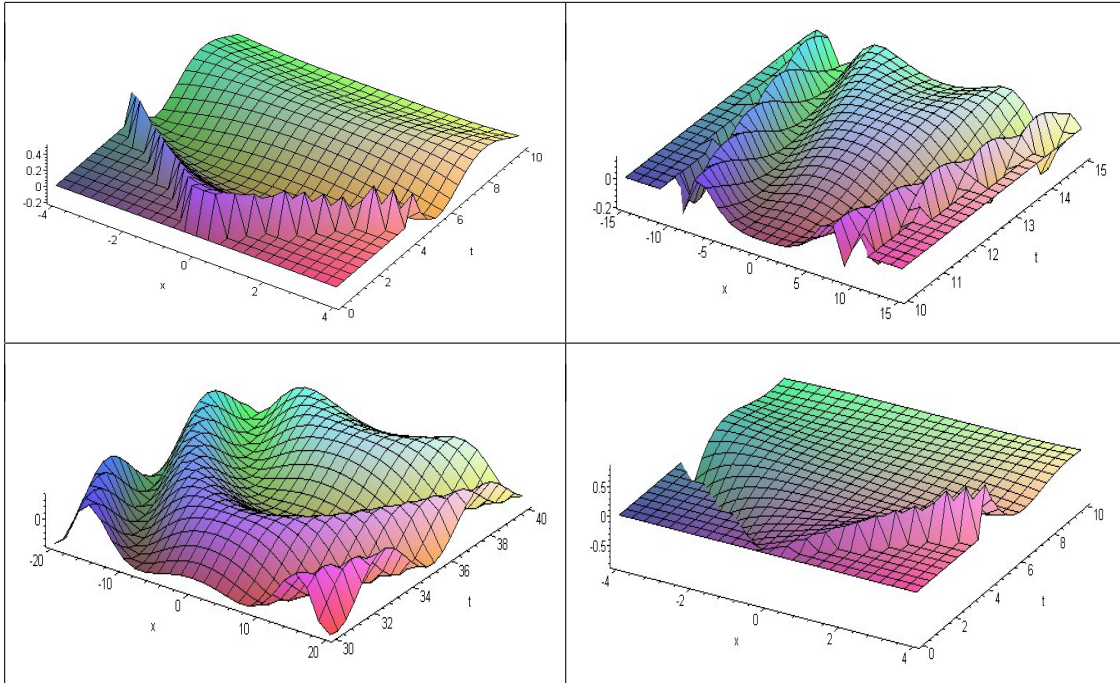


Figura 3.5 A resposta impulso $h(t, x)$ e sua derivada $h_t(t, x)$.

Aqui, $\eta_p(x)$ corresponde a solução do estado geostrófico ou estacionário e satisfaz (3.77), ou seja,

$$\frac{d^2 \eta_p}{dx^2} - \frac{1}{a^2} \eta_p = -\frac{1}{a^2} \eta_o(x) = -\frac{1}{a^2} \operatorname{sgn}(x). \quad (3.87)$$

onde $a = c/|f| = (gh)^{1/2}/|f|$ é o *raio de deformação* de Rossby.

Uma solução particular $\eta_p(x)$ é dada por

$$\eta_p(x) = \begin{cases} 1 + c_1 e^{-x/a} + c_2 e^{x/a} & : x \geq 0 \\ -1 + d_1 e^{-x/a} + d_2 e^{x/a} & : x < 0 \end{cases}$$

Para que esta solução seja continuamente diferenciável na origem $x = 0$, as constantes devem ser escolhidas de maneira que os limites laterais da função e sua derivada coincidam. Assim, $d_1 + d_2 = c_1 + c_2 + 2$, $d_2 - d_1 = c_2 - c_1$. Decorre que $d_2 = c_2 + 1$, $d_1 = c_1 + 1$. Por outro lado, para que esta solução tenda ao valor $\eta_o(x) = \text{sgn}(x)$ é necessário eliminar os termos que crescem exponencialmente. Escolhendo, $c_2 = 0$ e $d_1 = 0$, obtém-se $c_1 = -1$, $d_2 = 1$. Então, uma solução particular é dada por

$$\eta_g(x) = \text{sgn}(x)(1 - e^{-|x|/a}) = \begin{cases} 1 - e^{-x/a} & : x \geq 0 \\ -1 + e^{x/a} & : x < 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

Estes mesmos valores das constantes são obtidos, quando se procura uma solução anti-simétrica ou ímpar em torno de $x=0$, Gill [24].

O campo de velocidade geostrófico associado com essa solução é dado por

$$u_g = 0, \quad v_g = \frac{g}{fa} e^{-|x|/a}. \quad (3.89)$$

Outra solução particular $\eta_p(x)$ é dada por

$$\eta_{p1}(x) = \int_0^x h(x - \xi) \left(-\frac{1}{a^2} \eta_o(\xi)\right) d\xi$$

onde

$$h(x) = a \sinh(x/a) = \frac{a}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a})$$

é a solução fundamental associada com a equação (3.87). Integrando, segue que

$$\begin{aligned} \eta_{p1}(x) &= \begin{cases} -1 + \frac{1}{2}e^{-x/a} + \frac{1}{2}e^{x/a}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/a} - \frac{3}{2}e^{x/a}, & x > 0. \end{cases} \\ &= \operatorname{sgn}(x) \begin{cases} 1 - \cosh\left(\frac{|x|}{a}\right), & x \leq 0 \\ 1 - \cosh\left(\frac{|x|}{a}\right) + e^{\frac{x}{a}}, & x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Observa-se que esta solução particular, ainda que continuamente diferenciável, contém o valor inicial $\eta_o(x)$ seguido de um termo homogêneo que é ilimitado no infinito. Por tal motivo será considerado nas simulações, a solução $\eta_p(x)$ descrita anteriormente.

3.5.1 Considerações sobre Energia e Dispersão

As equações de energia para o movimento de águas rasas pode ser derivado diretamente das equações de momento e da equação da continuidade. Multiplicando (3.23) por ρhu , (3.24) por ρhv e adicionando obtém-se a variação local da energia cinética

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho h (u^2 + v^2) \right] = -\rho gh \left[u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right].$$

Multiplicando (3.27) por $\rho g \eta$, segue a variação local da energia potencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho g \eta^2 \right) = -\rho gh \left[\eta \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} \right].$$

Assim, a variação local da energia mecânica é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho h (u^2 + v^2) + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \right) = -\rho gh \left[\frac{\partial (u\eta)}{\partial x} + \frac{\partial (v\eta)}{\partial y} \right].$$

No caso do ajuste unidimensional, em que não há variação em y , proposto em Gill [24], segue que

$$\frac{dE}{dt} + F(t) = 0$$

onde

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \rho h (u^2 + v^2) + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \right) dx,$$

$$F(t) = \rho g h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial(u\eta)}{\partial x} dx$$

são a energia total perturbada por unidade de comprimento na direção y e o valor médio da taxa por unidade de comprimento na direção y da transferência de energia na direção x , no ponto x .

Substituindo os valores iniciais (3.75) e os valores geostróficos para u , v e η no infinito, segue que a diferença entre as energia potencial inicial e final é

$$U = 2 \frac{1}{2} \rho g \int_0^{\infty} (1 - (1 - e^{-x/a})) dx = \frac{3}{2} \rho g a.$$

Similarmente, a diferença entre as energia cinética inicial e final é

$$K = 2 \frac{1}{2} \rho h g^2 (fa)^{-2} \int_0^{\infty} e^{-2x/a} dx = \frac{1}{2} \rho g a.$$

A dissipação ou absorção de uma unidade de energia é atribuída a existência de oscilações (*transientes*) de inércia em torno da posição de equilíbrio.

A procura de soluções ondulatórias

$$\eta = A \exp i(kx + ly - \omega t),$$

para a equação

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + f^2 \eta = 0$$

resulta na seguinte relação de dispersão

$$\omega^2 = f^2 + \kappa^2 c^2, \quad (3.91)$$

onde $\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$ é a magnitude do número de onda horizontal. Ondas com esta relação de dispersão (k, l em \mathbb{R}) podem ser referidas como *ondas de Poincaré*. Para ondas longas ($\kappa^{-1} \gg h$) comparadas com o raio de Rossby a , tem-se $\kappa^{-1} \gg a$ e a relação de dispersão (3.91) se reduz a

$$\omega \approx f,$$

isto é, a frequência é aproximadamente constante e igual a f . Neste caso, a gravidade não tem efeito e as partículas do fluido se movem mediante sua própria inércia. Por esta razão, f é algumas vezes chamada frequência inercial.

As ondas curtas comparadas com o raio de Rossby, são pouco afetadas pela rotação e movimentam-se com uma velocidade

$$\omega \approx c\kappa,$$

quase comparando-se as ondas de gravidade num sistema sem rotação. Entretanto, todas as ondas longas possuem frequências perto da frequência inercial.

No caso unidimensional, a solução do problema inicial

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - c^2 \eta_{xx} + f^2 \eta &= 0 \\ \eta(0, x) &= \text{sgn}(x) \\ \eta_t(0, x) &= 0 \end{aligned}$$

pode ser obtida aplicando a transformada de Fourier no espaço e a transformada de Laplace no tempo, decorrendo

$$\eta(t, x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa x - \omega t)} \frac{i\omega \hat{\eta}_o(\kappa)}{\omega^2 - c^2\kappa^2 - f^2} d\kappa d\omega.$$

onde Γ é o caminho no plano complexo $[c - i\infty, c + i\infty]$. Utilizando cálculo de resíduos com os zeros $\omega^2 = c^2\kappa^2 + f^2$, Bleistein [4], obtém-se

$$\eta_h(t, x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa x \mp \sqrt{c^2\kappa^2 + f^2}t)} \hat{\eta}_o(\kappa) d\kappa.$$

Assim, a solução homogênea é uma superposição de *ondas planas* na qual κ é o número de onda e ω corresponde a frequência da dispersão (3.91). Os pontos de fase constante, de cada uma dessas ondas movimentam-se com a velocidade de fase

$$|v_f| = \left| \frac{\omega}{\kappa} \right| = \sqrt{c^2 + \frac{f^2}{\kappa^2}}.$$

desde uma velocidade característica mínima c até um valor máximo ilimitado. Assim, o dado inicial propaga-se com diferente velocidade de acordo com sua decomposição de Fourier. Similarmente, a velocidade de grupo

$$\frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{c^2\kappa}{\omega} = \frac{c^2\kappa}{\sqrt{c^2\kappa^2 + f^2}}$$

é a velocidade dos pontos de amplitude constante, Main [44]. A velocidade de grupo possui um valor máximo c , obtido no limite das ondas curtas, entretanto tende para zero quando o comprimento de onda torna-se ilimitado. Estas variações afetam a resposta livre (*transiente*), pois as ondas curtas se afastam rapidamente de uma descontinuidade inicial, entretanto as ondas longas se afastam muito vagarosamente (quanto maior o número de onda, menor a velocidade de grupo).

3.6 Adimensionalização

Introduzindo a seguinte adimensionalização

$$\begin{aligned} \tau &= ft, & X &= \frac{f}{c}x, & Y &= \frac{f}{c}y, \\ U &= \frac{c}{g\eta^o}u, & V &= \frac{c}{g\eta^o}v, & N &= \frac{\eta}{\eta^o} \end{aligned}$$

onde η^o denota uma amplitude característica da elevação η , é equivalente a supor que $f=g=h=1$ no sistema (3.23)-(3.25), isto é

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v &= -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u &= -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.92}$$

De (3.36)-(3.40), segue que as componentes da velocidade e a elevação satisfazem o seguinte problema adimensional

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) + q = F(x, y)$$

em que o termo não-homogêneo é da forma

$$F(x, y) = \begin{cases} -\frac{\partial F_o}{\partial y}, & q = u \\ \frac{\partial F_o}{\partial x}, & q = v \\ F_o, & q = \eta \end{cases},$$

onde

$$F_o(x, y) = \eta_o - \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right)$$

está associado a vorticidade e elevação iniciais. Aqui, u_o e v_o são os valores iniciais adimensionalizados das componentes da velocidade. As condições iniciais são

$$q(0, x, y) = \begin{cases} u_o(x, y), & q = u \\ v_o(x, y), & q = v \\ \eta_o(x, y), & q = \eta \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial q}{\partial t}(0, x, y) = \begin{cases} v_o - \frac{\partial \eta_o}{\partial x}, & q = u \\ -u_o - \frac{\partial \eta_o}{\partial y}, & q = v \\ -\frac{\partial u_o}{\partial x} - \frac{\partial v_o}{\partial y}, & q = \eta \end{cases} .$$

Observa-se que as soluções estacionárias de (3.92) correspondem as soluções do estado geostrófico

$$u = -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

acrescido da propriedade de conservação da vorticidade potencial, ou seja, $\Delta \eta = \zeta = \eta + \zeta_o - \eta_o$ e da equação da continuidade.

Para o caso unidimensional

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q = F(t, x) \quad (3.93)$$

segue de (3.62),(3.63) e (3.72) que a solução de (3.93) é dada por

$$\begin{aligned}
q(t, x) &= \frac{1}{2} [q(0, x+t) + q(0, x-t)] \\
&- \frac{t}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_1(\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2})}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2}} q(0, \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_0(\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2})}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2}} q_t(0, \xi) d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_0(\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2})}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2}} F(\tau, \xi) d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Por outro lado, para entradas do tipo $F(t, x) = e^{\lambda t} r(x)$, de (3.61) tem-se a resposta forçada

$$\begin{aligned}
q_f(t, x) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_0(\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2})}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2}} F(\tau, \xi) d\xi d\tau \\
&= e^{\lambda t} \vartheta(x) - \frac{1}{2} [\vartheta(x+t) + \vartheta(x-t)] + \frac{t}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_1(\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2})}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2}} \vartheta(\xi) d\xi \\
&- \lambda \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_0(\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2})}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2}} \vartheta(\xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{3.95}$$

onde $\vartheta(x)$ é solução particular da equação de Helmholtz (3.58) em uma dimensão espacial, isto é,

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \gamma \vartheta(x) = -r(x), \tag{3.96}$$

onde $\gamma = -(1 + \lambda^2)$.

3.7 Simulações Simbólicas

Exemplo 1: Considerando o problema colocado em Gill [24] e utilizando a forma adimensional com $\eta^o = 1$, tem-se a solução para o estado geostrófico

$$\eta_g(x) = \operatorname{sgn}(x)(1 - e^{-|x|}) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \\ -1 + e^x, & x < 0 \end{cases}$$

$$u_g = 0, \quad v_g = \eta'_g(x) = \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|},$$

cujos gráficos são mostrados na seguinte figura.

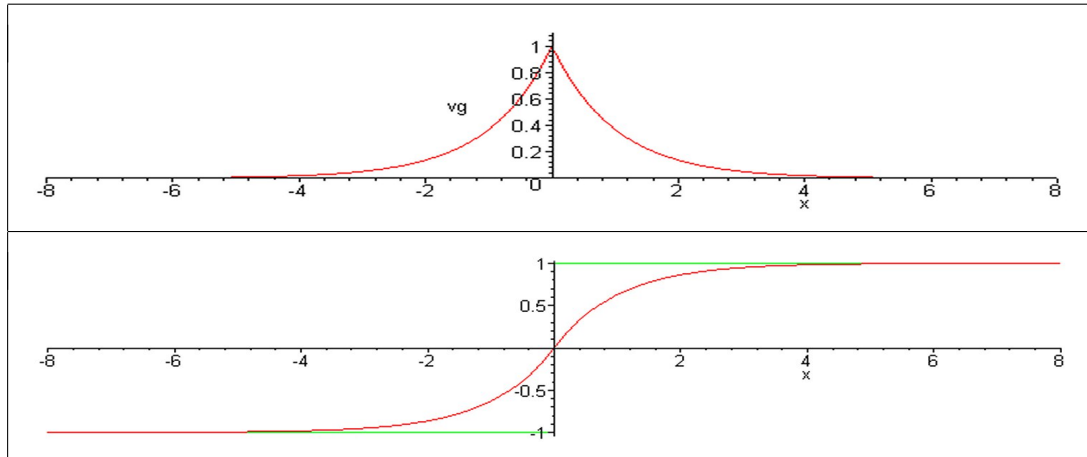


Figura 3.6 Soluções geostróficas v_g e η_g e condição inicial η_o para o exemplo 1.

A componente v da velocidade é

$$v(t, x) = \begin{cases} \int_0^t J_0(\sqrt{\tau^2 - x^2}) d\tau, & |x| \leq t \\ 0, & |x| > t \end{cases} \quad (3.97)$$

$$= \begin{cases} \int_0^{\sqrt{t^2 - x^2}} (r^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} J_0(r) r dr, & |x| \leq t \\ 0, & |x| > t \end{cases}$$

cujos perfis para $t=2$, $t=4$, $t=6$ e $t=8$ são mostrados a seguir na figura 3.7.

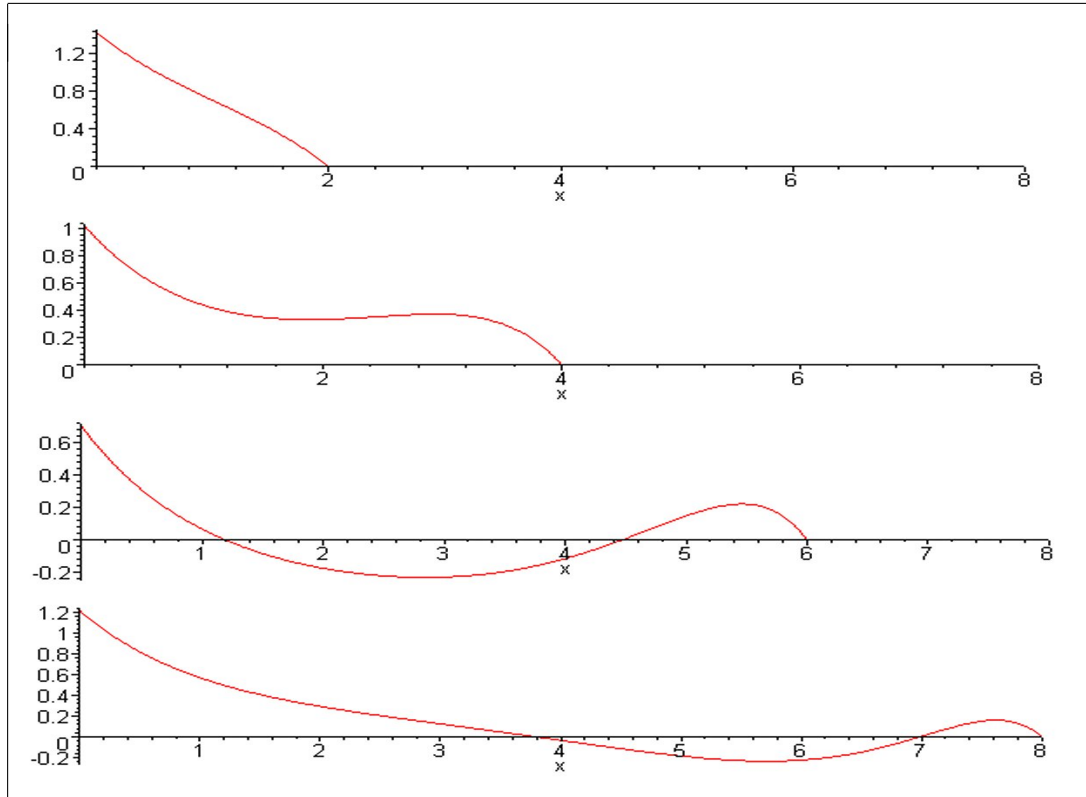


Figura 3.7 Perfis da velocidade v para o exemplo 1, sob os efeitos de rotação.

E, a componente u da velocidade é

$$u(t, x) = -\frac{\partial v}{\partial t} = \begin{cases} -J_0(\sqrt{t^2 - x^2}), & |x| \leq t \\ 0, & |x| > t, \end{cases} \quad (3.98)$$

cujos perfis para $t=2$, $t=4$, $t=6$ e $t=8$ são mostrados a seguir na figura 3.8.

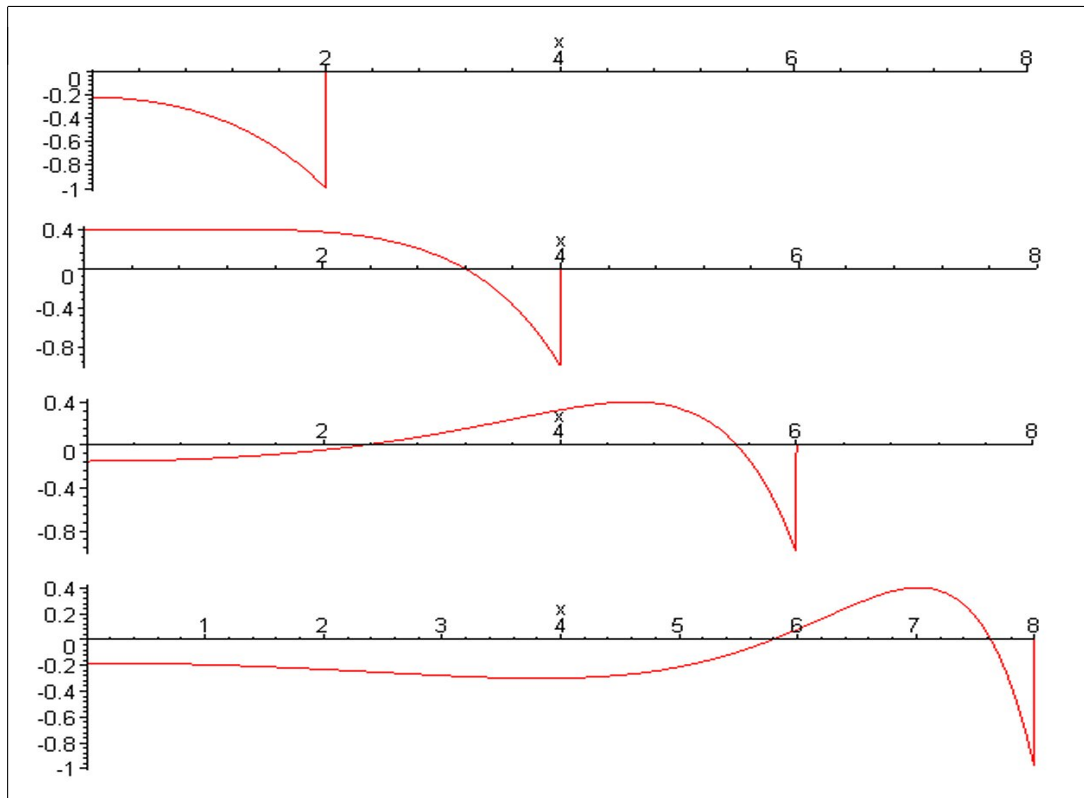


Figura 3.8 Perfis da velocidade u para o exemplo 1, sob os efeitos de rotação.

A figura 3.9 mostra a propagação das velocidades u e v ao longo do tempo, quando os efeitos da rotação são considerados.

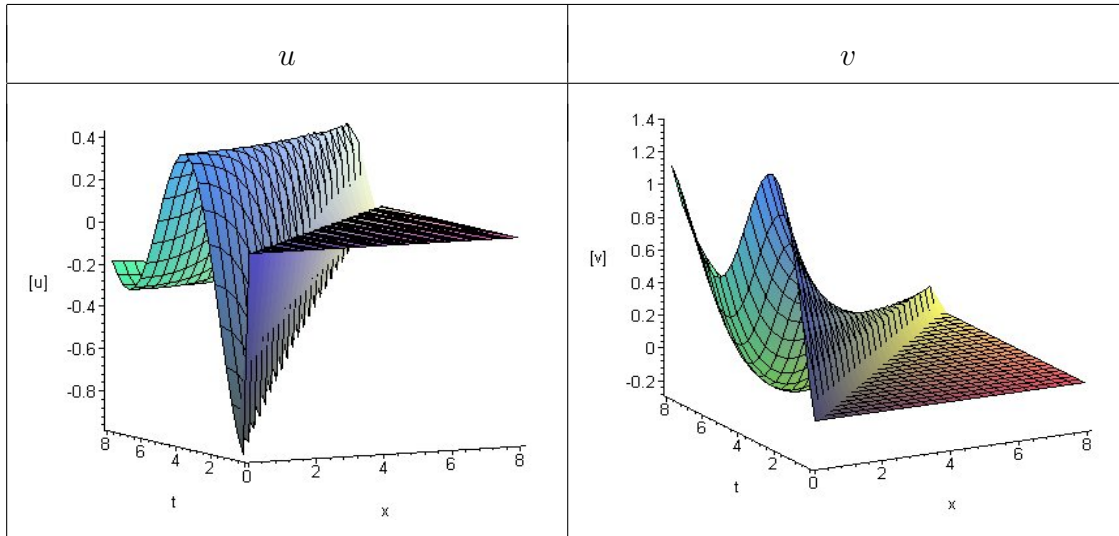


Figura 3.9 Propagação de u e v , sob os efeitos de rotação para o exemplo 1.

A elevação é dada por (3.86)

$$\eta(t, x) = \frac{t}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_1\left(\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2}} \operatorname{sgn}(\xi) e^{-|\xi|} d\xi$$

$$- \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|} + \operatorname{sgn}(x). \quad (3.99)$$

ou, pela conservação da vorticidade potencial (3.45) e pela solução de v em (3.97), tem-se Gill [23]

$$\eta(t, x) = \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_0(x)$$

$$= \begin{cases} x \int_0^{\sqrt{t^2-x^2}} \frac{J_1(r)}{\sqrt{x^2+r^2}} dr, & |x| < t \\ \operatorname{sgn}(x), & |x| > t \end{cases} \quad (3.100)$$

A elevação da superfície livre η dada por (3.100) é visualizada na figura 3.10 para $t=2$, $t=4$, $t=6$ e $t=8$.

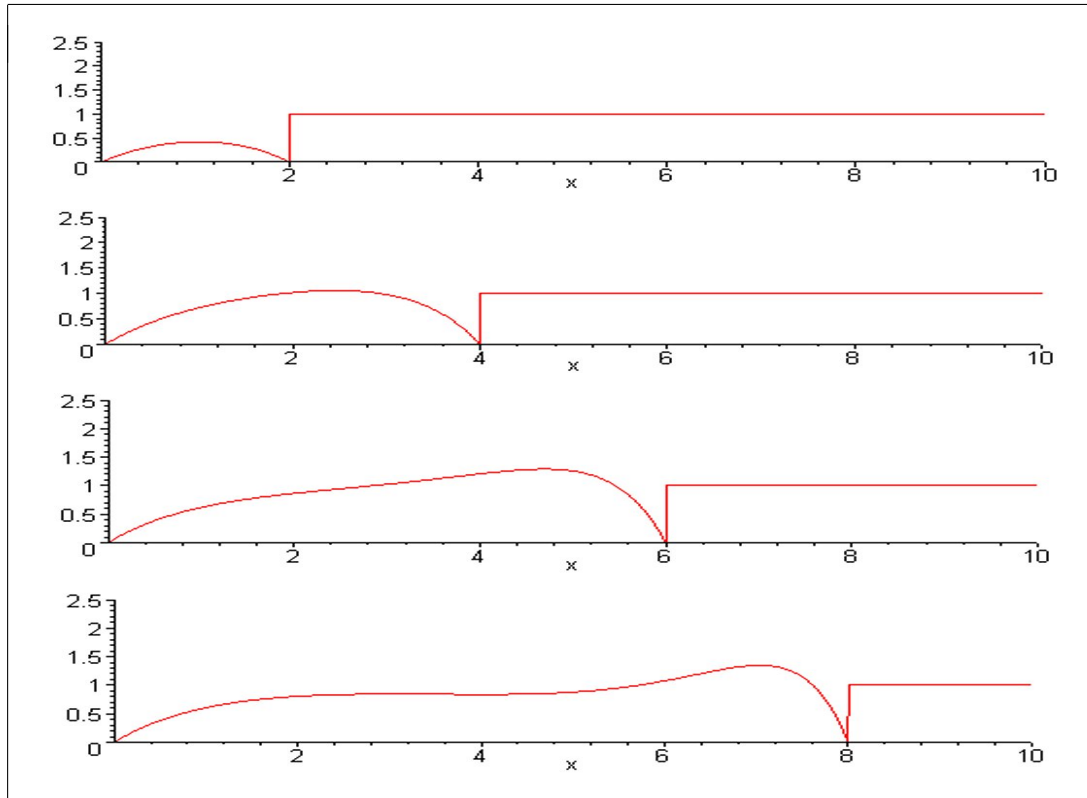


Figura 3.10 Perfis da elevação η para o exemplo 1, sob efeitos de rotação.

Na figura 3.11, tem-se a elevação da superfície livre dada pela equação (3.99), em $t=25$.

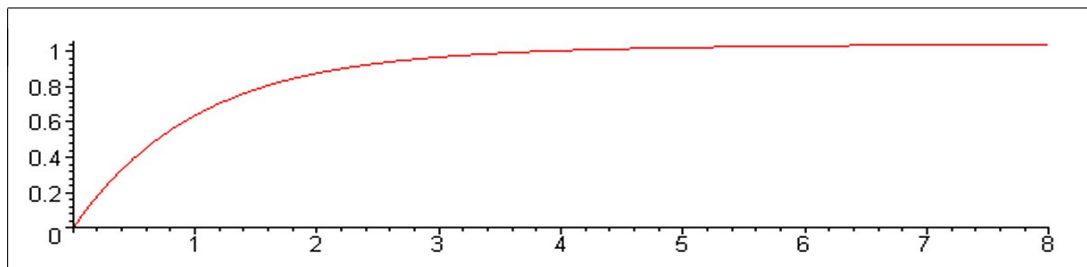


Figura 3.11 Perfis da elevação η para o exemplo 1, sob efeitos de rotação em $t=25$.

A decomposição da resposta dinâmica na equação de Klein-Gordon em termos de uma solução permanente (geostrófica) e uma solução homogênea total (homogênea dos valores iniciais mais a homogênea induzida pela permanente) é mostrada na figura 3.12.

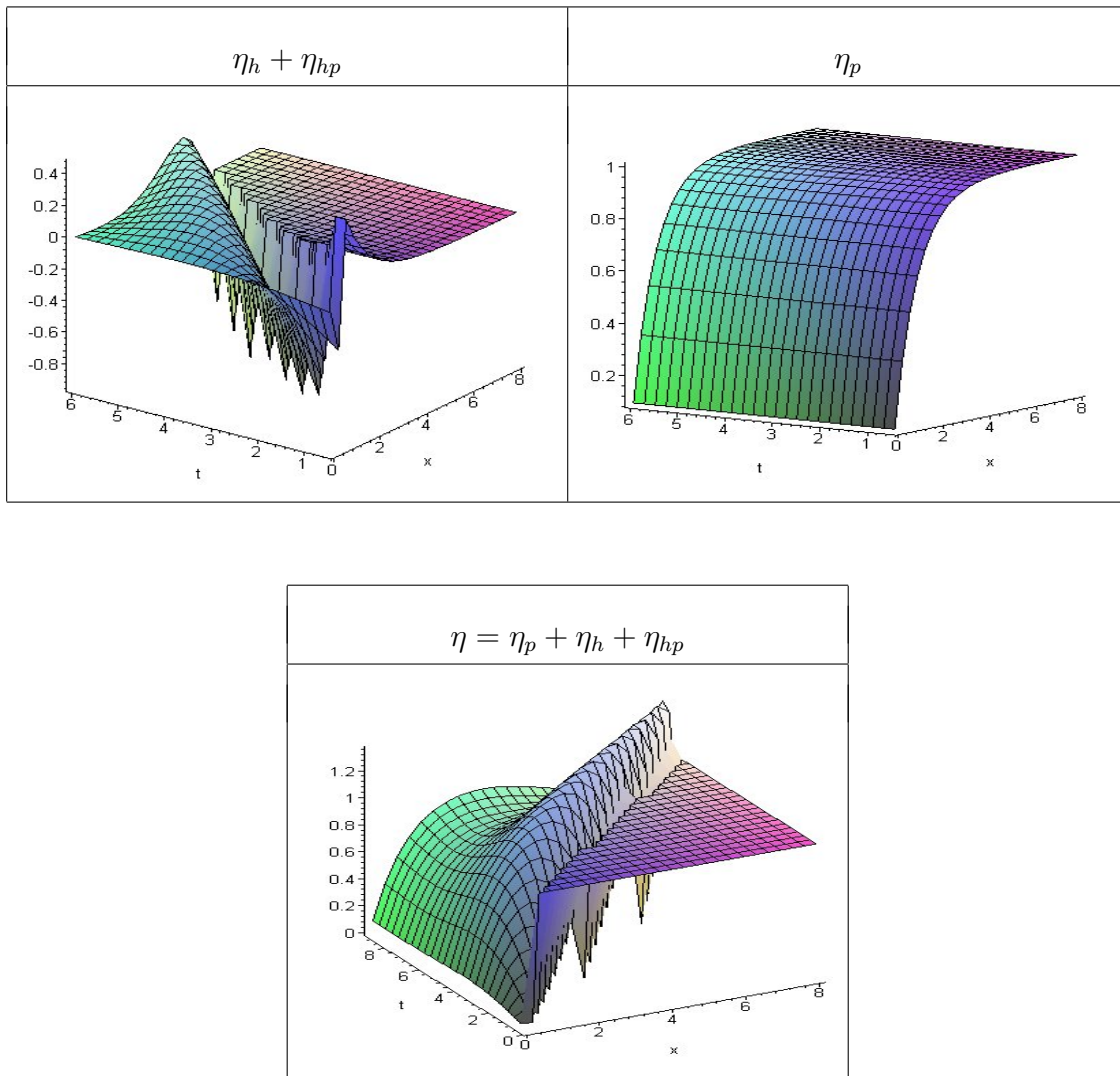


Figura 3.12 Decomposição de η para o exemplo 1, sob os efeitos de rotação.

Observa-se que a propagação das velocidades u e v e da elevação η com o passar do tempo, tendem a sua respectiva solução permanente, que no caso foi tomada como sendo a solução geostrófica.

Exemplo 2: Para o caso do pulso

$$\eta_o(x) = \mathcal{H}(x + 1) - \mathcal{H}(x - 1)$$

tem-se que $v(t, x)$ é a resposta forçada da equação

$$v_{tt} - v_{xx} + v = \eta_o'(x) = \delta(x + 1) - \delta(x - 1).$$

Assim,

$$v(t, x) = \int_0^t [h(\tau, x + 1) - h(\tau, x - 1)] d\tau$$

$$u(t, x) = -\frac{\partial v}{\partial t} = h(t, x - 1) - h(t, x + 1)$$

$$\eta(t, x) = \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_o(x).$$

onde

$$h(t, x) = \frac{1}{2} \mathcal{H}(t - |x|) J_o(\sqrt{t^2 - x^2}).$$

Um estado de equilíbrio geostrófico é dado por

$$u_g = 0, \quad v_g = -\eta_g'(x), \quad \eta_g''(x) - \eta_g(x) = -\eta_o(x)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_g(x) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathcal{H}(x + 1) \right) e^{x+1} - \frac{1}{2} \mathcal{H}(x + 1) e^{-1-x} + \frac{1}{2} \mathcal{H}(x - 1) e^{1-x} \\ &+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathcal{H}(x - 1) \right) e^{x-1} + \mathcal{H}(x + 1) - \mathcal{H}(x - 1), \end{aligned}$$

cujos gráficos são mostrados na seguinte figura.

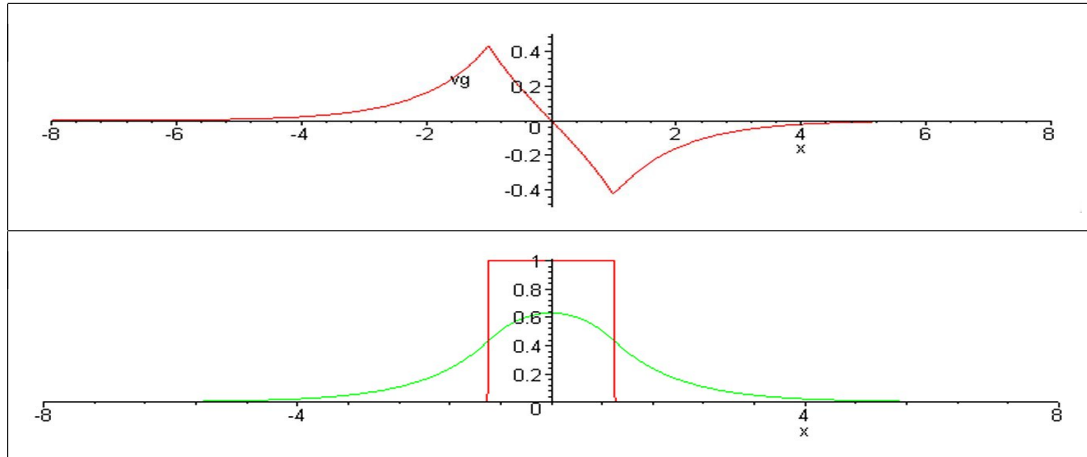


Figura 3.13 Soluções geostróficas v_g e η_g e condição inicial η_o para o exemplo 2.

Os perfis das velocidades u e v e a elevação η para $t=2$, $t=4$, $t=6$ e $t=8$ são mostrados a seguir nas figuras 3.14 e 3.15 e 3.16, respectivamente.

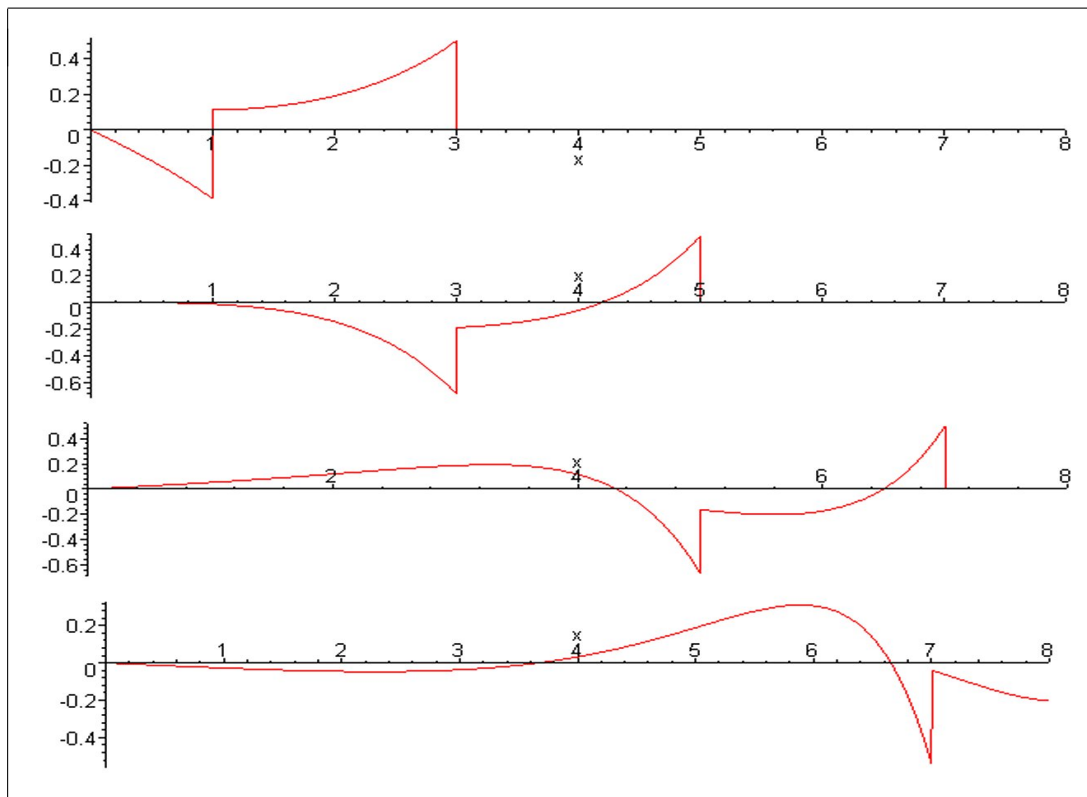


Figura 3.14 Perfis da velocidade u para o exemplo 2, sob os efeitos de rotação.

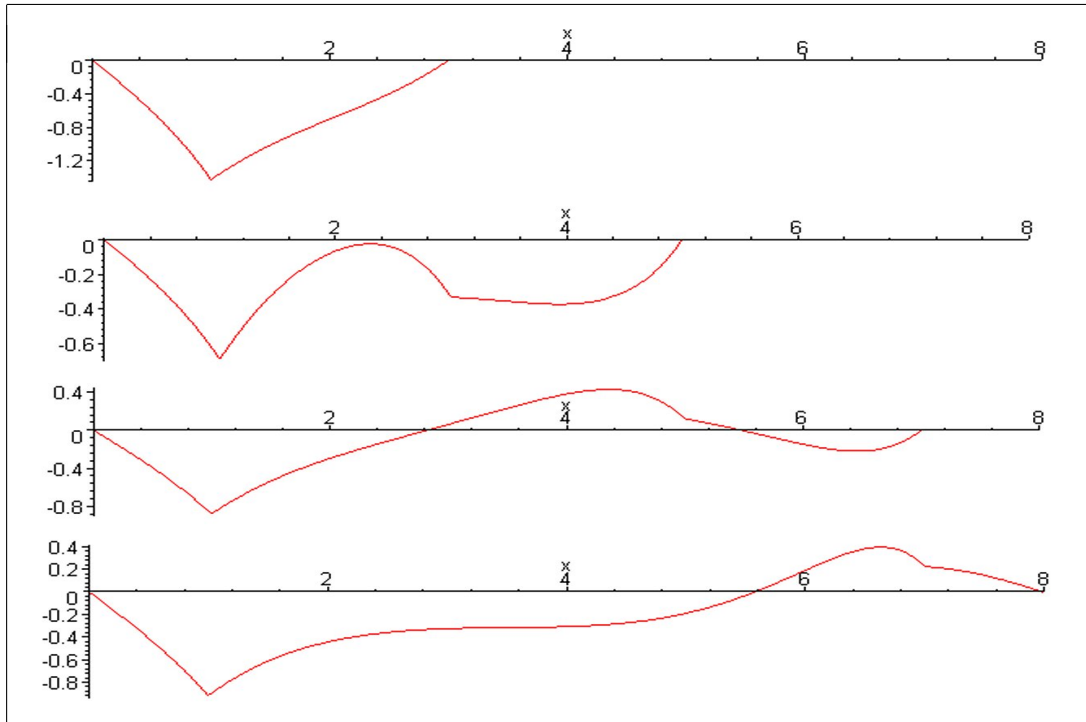


Figura 3.15 Perfis da velocidade v para o exemplo 2, sob os efeitos de rotação.

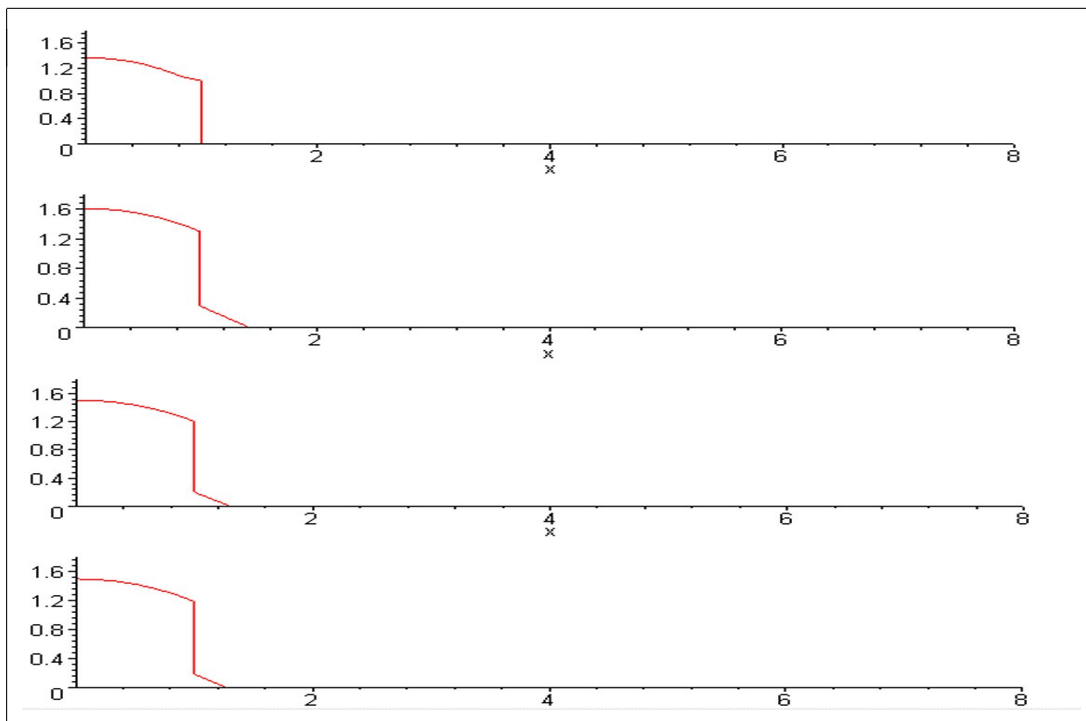


Figura 3.16 Perfis da elevação η para o exemplo 2, sob efeitos de rotação.

Observa-se que a propagação das velocidades u e v e da elevação η com o passar do tempo, tendem a sua respectiva solução permanente, que no caso foi tomada como sendo a solução geostrófica.

4 EFEITOS DE PERTURBAÇÕES NA PRESSÃO ATMOSFÉRICA E DO VENTO

4.1 Perturbações na Pressão Atmosférica

Nos capítulos anteriores, considerou-se a pressão atmosférica constante. Mas, se forem consideradas variações na pressão atmosférica p_a na superfície $z = \eta$, estas variações podem fazer o mar se mover. Acrescentando-se uma perturbação na pressão atmosférica p'_a , a equação (3.13) satisfaz

$$p' = \rho g \eta + p'_a,$$

que pode também ser escrita como

$$p' = \rho g \eta', \quad (4.1)$$

onde

$$\eta' = \eta - \eta_a \quad (4.2)$$

é chamado de *nível do mar ajustado* e η_a é dado por

$$\eta_a = -p'_a / \rho g,$$

onde η_a é chamado de elevação da superfície de um *barômetro inverso* desde que seja igual a *depressão* que será registrada por um barômetro de água, isto sendo aproximadamente 1cm por milibar de mudança na pressão.

Considerando que a profundidade da água h é constante e que o movimento produzido pelas diferenças de pressão é suficientemente pequeno para as

equações lineares serem aplicadas, então (3.7), com a substituição (4.1), satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \eta'}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= -g \frac{\partial \eta'}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.3}$$

e a equação para superfície livre (3.25) se reduz a

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \eta_a}{\partial t}.\tag{4.4}$$

Observe que a equação para superfície livre (4.4) está escrita em termos do nível do mar ajustado η' , o qual tem o efeito de transferir o termo forçante da equação de momento para a equação da superfície livre.

Assim, quando são consideradas perturbações da pressão atmosférica, tem-se o sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \eta'}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= -g \frac{\partial \eta'}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \eta_a}{\partial t}.\end{aligned}$$

Derivando a equação (4.4) e substituindo as equações (4.3), uma equação para η' é obtida, a saber

$$\frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial y^2} \right) + fh\zeta = -\frac{\partial^2 \eta_a}{\partial t^2}.\tag{4.5}$$

Substituindo a vorticidade ζ dada pela equação (3.45), onde $\eta = \eta' + \eta_a$, obtém-se

$$\frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial y^2} \right) + f^2 \eta' = F^a,\tag{4.6}$$

onde o termo forçante devido a perturbações na pressão atmosférica F^a é dado por

$$F^a = f^2 \eta_0 - fh \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta_a.$$

4.2 Forçante devido a Tensão do Vento: Transporte de Ekman

Quando o vento sopra sobre a superfície da Terra, uma tensão é exercida sobre a superfície, seja ela a terra ou o mar. Essa tensão representa uma força retardadora de importância considerável para a atmosfera e uma força motriz de grande importância para o oceano.

A tensão horizontal (τ^x, τ^y) na superfície da Terra é um vetor horizontal representando a força por unidade de área exercida entre a superfície e a camada vizinha de ar ou água. Para incorporar o efeito de tensões horizontais nas equações do movimento, é útil imaginar o oceano ou a atmosfera divididos em um conjunto de finas camadas horizontais, como se fosse um pedaço de madeira compensada, onde cada camada é livre para se mover. Se a tensão é exercida no topo (fronteira superior) de uma camada de espessura δz , ela tenderá a se mover exercendo uma tensão na camada imediatamente abaixo, dada aproximadamente por

$$\left(\tau^x - \delta z \frac{\partial \tau^x}{\partial z}, \tau^y - \delta z \frac{\partial \tau^y}{\partial z} \right).$$

Uma tensão igual e oposta será exercida sobre o fundo (fronteira inferior) da camada original. Assim, a força líquida por unidade de área sobre tal camada será a diferença entre a tensão sobre o topo e o fundo, representada por

$$\left(\frac{\partial \tau^x}{\partial z}, \frac{\partial \tau^y}{\partial z} \right) \delta z.$$

Multiplicando-se pela área $\delta x \delta y$ e dividindo-se pela massa $\rho \delta x \delta y \delta z$ de uma camada, segue que a força por unidade de massa devida a tensões horizontais é

$$\rho^{-1} \left(\frac{\partial \tau^x}{\partial z}, \frac{\partial \tau^y}{\partial z} \right).$$

Incluindo-se estas forças nas equações do momento linearizadas (4.3), têm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - f v &= -g \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^x}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f u &= -g \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^y}{\partial z}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

A razão para incluir somente a derivada vertical da tensão horizontal deve-se ao fato que a escala vertical da atmosfera e as camadas de fronteira oceânicas (isto é, as regiões adjacentes a superfície onde as tensões são comparáveis com os valores na superfície) é muito menor que a escala horizontal nos quais as tensões variam. Tipicamente, a camada atmosférica é 1km de espessura e a camada oceânica é 10 - 100m de espessura. Em contraste, a escala horizontal de variações da tensão pode ser 100-1000km.

Nas equações (4.7), pode ser visto que existem duas forças tendendo a acelerar o fluido: aquela devida ao gradiente de pressão horizontal e aquela devida ao gradiente de tensão vertical. Para converter as equações (4.7) na forma das equações (4.3), a velocidade (u, v) é dividida em uma velocidade (u_p, v_p) dirigida pelo gradiente de pressão, e uma velocidade (u_E, v_E) induzida pelas tensões do vento e confinada à camada na qual as tensões agem e é chamada *velocidade de Ekman*. A camada onde as tensões agem é referida como *camada de Ekman*. Assim, a velocidade (u, v) é escrita como

$$u = u_p + u_E \quad \text{e} \quad v = v_p + v_E, \tag{4.8}$$

onde a velocidade (u_p, v_p) satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_p}{\partial t} - f v_p &= -g \frac{\partial \eta'}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_p}{\partial t} + f u_p &= -g \frac{\partial \eta'}{\partial y},\end{aligned}\quad (4.9)$$

e, no caso de um escoamento estacionário, satisfaz a velocidade geostrófica. A velocidade de Ekman satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_E}{\partial t} - f v_E &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^x}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_E}{\partial t} + f u_E &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^y}{\partial z}.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Pelo fato da tensão ser nula fora da camada de Ekman, a integração das equações (4.10), com respeito a z na camada de profundidade constante h , satisfaz

$$\frac{\partial U_E}{\partial t} - f V_E = \frac{\tau^{xs}}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_E}{\partial t} + f U_E = \frac{\tau^{ys}}{\rho}, \quad (4.11)$$

onde (U_E, V_E) corresponde ao transporte do volume de Ekman, definido por

$$(U_E, V_E) = \left(\int u_E dz, \int v_E dz \right) = (h u_E, h v_E)$$

e podemos escrever

$$u = u_p + \frac{U_E}{h}, \quad \text{e} \quad v = v_p + \frac{V_E}{h}.$$

A magnitude da velocidade vertical de Ekman w_E fora da camada limite, que resulta da convergência ou da divergência do transporte de Ekman, pode ser obtida pela integração da equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

com respeito a z e usando-se a condição $w = 0$ na fronteira, obtém-se

$$w_E = \frac{\partial U_E}{\partial x} + \frac{\partial V_E}{\partial y}. \quad (4.12)$$

Para o caso estacionário, combinado com (4.11) obtém-se

$$\rho w_E = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau^{ys}}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau^{xs}}{f} \right). \quad (4.13)$$

Geralmente, o vento varia muito mais rápido do que f , assim (4.13) fornece uma expressão aproximada para w_E ,

$$w_E = \frac{1}{f\rho} \left(\frac{\partial \tau^{ys}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{xs}}{\partial y} \right). \quad (4.14)$$

Esta equação é válida somente para condições estacionárias ou quando as variações no tempo são suficientemente lentas. Entretanto, não é difícil calcular o resultado quando as variações no tempo são incluídas. Se f é considerado constante, através de cálculos algébricos nas equações (4.11), o transporte de Ekman (U_E, V_E) satisfaz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) (U_E, V_E) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau^{xs}}{\partial t} + f\tau^{ys}, \frac{\partial \tau^{ys}}{\partial t} - f\tau^{xs} \right). \quad (4.15)$$

Aplicando-se na equação (4.14), obtém-se

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) w_E = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tau^{xs}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{ys}}{\partial y} \right) + \frac{f}{\rho} \left(\frac{\partial \tau^{ys}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{xs}}{\partial y} \right). \quad (4.16)$$

Agora, retornando às equações de momento (4.9), observe-se que os termos forçantes nestas equações foram removidos, tendo a mesma forma das equações (4.3). No entanto, a equação para superfície livre (4.4) agora satisfaz

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \eta^F}{\partial t}, \quad (4.17)$$

onde

$$\eta^F = \eta_a + \eta_E \quad (4.18)$$

e η_E denota o *deslocamento de Ekman*, que para pequenos deslocamentos da superfície livre satisfaz

$$w_E = \frac{\partial \eta_E}{\partial t}. \quad (4.19)$$

Mais detalhes sobre o processo de Ekman podem ser encontrados em Gill [24].

Assim, quando são considerados os efeitos de tensão do vento além das perturbações na pressão atmosférica, tem-se o seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} - f v_p = -g \frac{\partial \eta'}{\partial x}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} + f u_p = -g \frac{\partial \eta'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \eta^F}{\partial t}, \quad (4.21)$$

As equações de momento (4.20) e a equação para superfície livre (4.21) podem ser reduzidas a uma equação para η' , semelhante a equação (4.6). Primeiro, a equação para a perturbação da vorticidade potencial é obtida tomando o rotacional das equações do momento (4.20) e o divergente da velocidade é substituída usando (4.21). Para um oceano de profundidade constante, o resultado é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_p}{\partial x} - \frac{\partial u_p}{\partial y} - \frac{f}{h} \eta' - \frac{f}{h} \eta^F \right) = 0, \quad (4.22)$$

e integrando com respeito ao tempo, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_p}{\partial x} - \frac{\partial u_p}{\partial y} - \frac{f}{h} \eta' - \frac{f}{h} \eta^F &= \left[\frac{\partial v_p}{\partial x} - \frac{\partial u_p}{\partial y} - \frac{f}{h} \eta' - \frac{f}{h} \eta^F \right]_{t=0} \\ &= \frac{\partial (v_p)_o}{\partial x} - \frac{\partial (u_p)_o}{\partial y} - \frac{f}{h} (\eta'_o + \eta_o^F). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Agora, tomando-se o divergente das equações do momento (4.20) e substituindo a divergência da velocidade a partir de (4.21) e a vorticidade a partir de (4.23), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial y^2} \right) + f^2 \eta' = F^{av}, \quad (4.24)$$

onde o termo forçante devido a perturbações na pressão atmosférica e tensão do vento F^{av} é dado por

$$F^{av} = f^2 \eta'_o + f^2 \eta_o^F - fh \left(\frac{\partial (v_p)_o}{\partial x} - \frac{\partial (u_p)_o}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta^F \quad (4.25)$$

e por (4.16), (4.29) e (4.19), F^{av} satisfaz

$$\frac{\partial F^{av}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \frac{\partial \eta_a}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tau^{xs}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{ys}}{\partial y} \right) - \frac{f}{\rho} \left(\frac{\partial \tau^{ys}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{xs}}{\partial y} \right). \quad (4.26)$$

Observe-se que o termo forçante, além de ser proporcional ao rotacional da tensão do vento, é também proporcional a divergência da tensão na superfície.

OBSERVAÇÃO

Na ausência de perturbações na pressão atmosférica ($p'_a = 0$ e $\eta_a = 0$) e de efeitos do vento ($u_E = v_E = 0$), tem-se $u = u_p$, $v = v_p$, $\eta = \eta'$ e $\eta^F = 0$. Assim, a equação (4.24) se reduz a

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + f^2 \eta = f^2 \eta_o - fh \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right),$$

que é idêntica a equação (3.36) associada aos efeitos de perturbações na pressão do fluido e de rotação.

A equação (4.24) é chamada *equação de águas rasas forçadas ou equação de Klein-Gordon forçada* e governa o comportamento de pequenas perturbações em um oceano de profundidade uniforme, quando essas perturbações estão sujeitas a forçantes de um dos tipos descritos acima.

4.3 Simulações Simbólicas

A equação de Klein-Gordon forçada (4.24) sem perturbações na pressão atmosférica e condições iniciais nulas, se reduz a

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + f^2 \eta = F, \quad (4.27)$$

onde o termo forçante

$$F = - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta^F, \quad (4.28)$$

satisfaz

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tau^{xs}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{ys}}{\partial y} \right) - \frac{f}{\rho} \left(\frac{\partial \tau^{ys}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{xs}}{\partial y} \right). \quad (4.29)$$

Assim, considerando-se condições iniciais nulas e condições de contorno de Dirichlet homogêneas, a solução da equação (4.27), para um domínio retangular, $0 \leq x \leq L_x$ $0 \leq y \leq L_y$, pode ser escrita como

$$\eta(t, x, y) = \int_0^t \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h(t - \tau, x, y, \xi, \zeta) F(\tau, \xi, \zeta) d\zeta d\xi d\tau, \quad (4.30)$$

onde $h(t - \tau, x, y, \xi, \zeta)$ é a função de Green no domínio temporal, que para $t > \tau \geq 0$ satisfaz a equação homogênea

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + f^2 h = 0, \quad (4.31)$$

com condições iniciais semi-homogêneas

$$\begin{aligned} h(0, x, y, \xi, \zeta) &= 0 \quad \text{em } t = \tau, \\ \frac{\partial h}{\partial t}(0, x, y, \xi, \zeta) &= \delta(x - \xi)\delta(y - \zeta) \quad \text{em } t = \tau, \end{aligned}$$

e condições de contorno homogêneas, cuja solução é dada por

$$h(t, x, y, \xi, \zeta) = \frac{4}{L_x L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\lambda_{nm} t)}{\lambda_{nm}} \text{sen}(p_n x) \text{sen}(q_m y) \text{sen}(p_n \xi) \text{sen}(q_m \zeta), \quad (4.32)$$

com

$$p_n = \frac{n\pi}{L_x}, \quad q_m = \frac{m\pi}{L_y} \quad \text{e} \quad \lambda_{nm} = \sqrt{c^2(p_n^2 + q_m^2) + f^2}.$$

Utilizando o método da decomposição de respostas forçadas dada pela equação (3.62), pode-se reescrever a solução de (4.30) como

$$\begin{aligned} \eta(t, x, y) &= \eta_p(t, x, y) - \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x, y, \xi, \zeta) \eta_p(0, \xi, \zeta) d\zeta d\xi \\ &\quad - \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h(t, x, y, \xi, \zeta) \frac{\partial \eta_p}{\partial t}(0, \xi, \zeta) d\zeta d\xi. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Considerando uma tensão do vento da forma

$$\tau^{xs} = \tau_1 e^{i\omega t} \cos(\omega_1 x) \cos(\omega_2 y) \quad \text{e} \quad \tau^{ys} = 0 \quad (4.34)$$

usada em Garibotti [21], e substituindo na equação (4.29), obtém-se

$$F = e^{i\omega t} \frac{\tau_1 [\omega \omega_1 \sin(\omega_1 x) \cos(\omega_2 y) + i f \omega_2 \cos(\omega_1 x) \sin(\omega_2 y)]}{\rho \omega} = e^{i\omega t} r(x, y) \quad (4.35)$$

Supondo uma resposta particular da mesma forma da entrada, ou seja,

$$\eta_p(t, x, y) = e^{i\omega t} \vartheta(x, y), \quad (4.36)$$

e substituindo na equação (4.31), obtém-se o problema de contorno não homogêneo para $\vartheta(x, y)$

$$\Delta \vartheta(x, y) + \gamma \vartheta(x, y) = -\frac{r(x, y)}{c^2}, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0 \quad \text{em } x = 0, L_x \\ \vartheta &= 0 \quad \text{em } y = 0, L_y, \end{aligned} \tag{4.38}$$

onde $\gamma = (f^2 - \omega^2) / -c^2$. A solução desse problema é dada por

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{c^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} g(x, y, \xi, \zeta) r(\xi, \zeta) d\zeta d\xi, \tag{4.39}$$

onde $g(x, y, \xi, \zeta)$ é a função de Green espacial dada por

$$g(t, x, y, \xi, \zeta) = \frac{4}{L_x L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(p_n x) \text{sen}(q_m y) \text{sen}(p_n \xi) \text{sen}(q_m \zeta)}{p_n^2 + q_m^2 - \gamma},$$

com

$$p_n = \frac{n\pi}{L_x} \quad \text{e} \quad q_m = \frac{m\pi}{L_y}.$$

Para as simulações, serão considerados os parâmetros $L_x = 10^7 m$, $L_y = 5 \times 10^6 m$, $\rho = 1035 kg/m^3$, $f = 10^{-4} s^{-1}$, $g = 9.81 m/s^2$, $h = 200 m$, $\omega_1 = 2\pi/L_x$, $\omega_2 = 2\pi/L_y$ e $\tau_1 = 1.0$. Observe-se que a condição $\gamma < 0$, implica $\omega^2 < f^2$ e assim será considerado um valor de $\omega = 7.292 \times 10^{-5}$.

Os gráficos de $\eta_p(t, x, y)$ são mostrados na figura 4.1 para o tempo $t = 86400 s$.

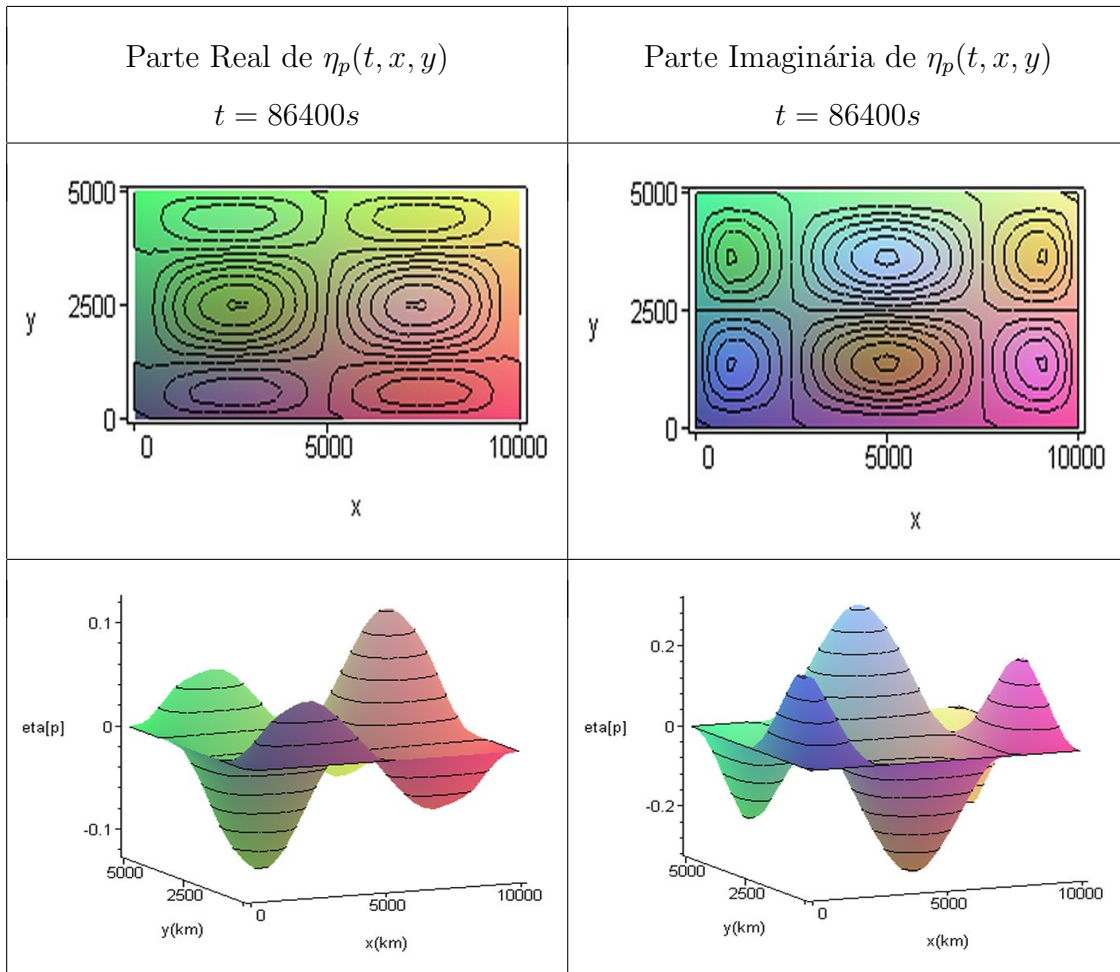


Figura 4.1 Resposta particular $\eta_p(t, x, y)$, com x (km) e y (km).

Tendo-se calculado a resposta particular $\eta_p(t, x, y)$, a resposta livre induzida pela particular $\eta_{hp}(t, x, y)$ é calculada pelos dois últimos termos da equação (4.33). A parte real e a parte imaginária são mostradas na figura 4.2 no instante de tempo $t = 86400s$.

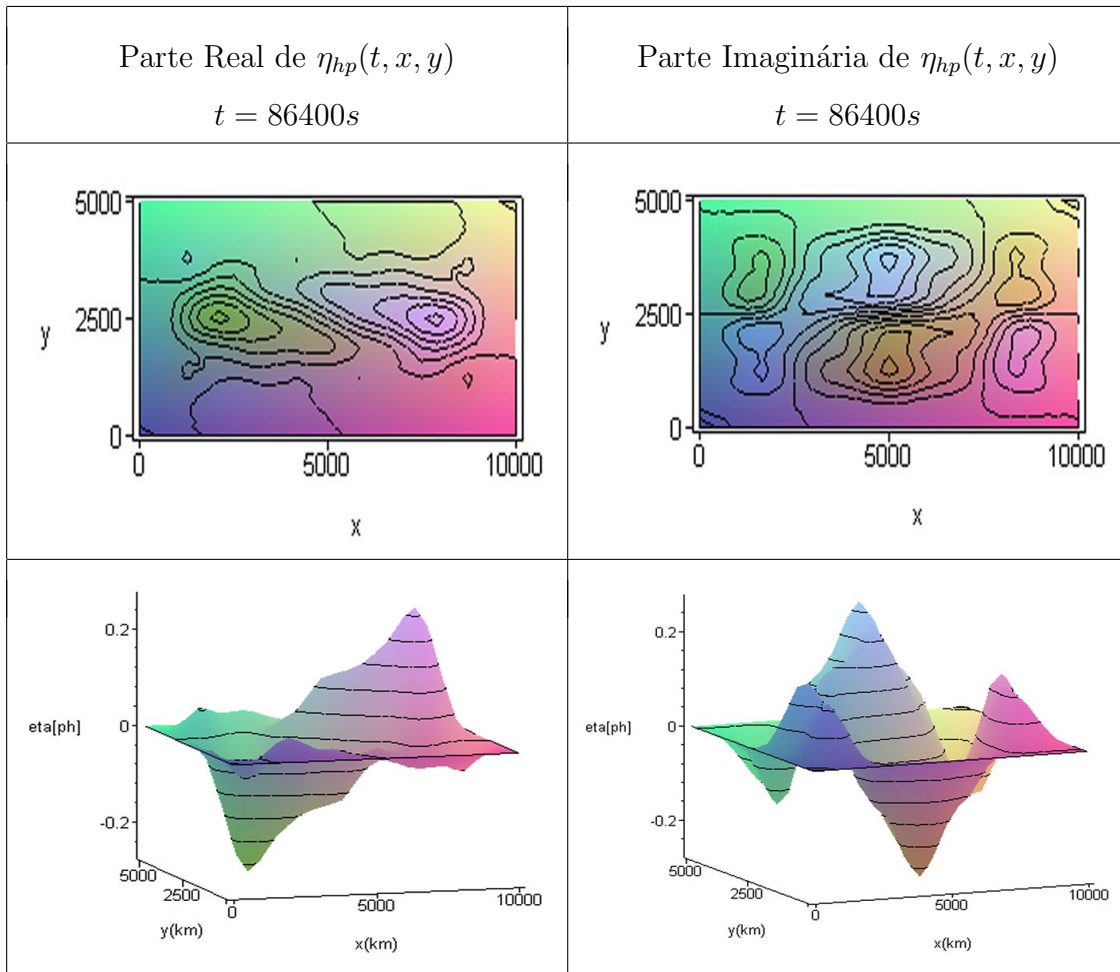


Figura 4.2 Resposta livre $\eta_{hp}(t, x, y)$ induzida pela particular.

A resposta dinâmica ou total $\eta(t, x, y)$ é dada pela soma das duas soluções anteriores e sua parte real e imaginária são mostradas na figura a seguir.

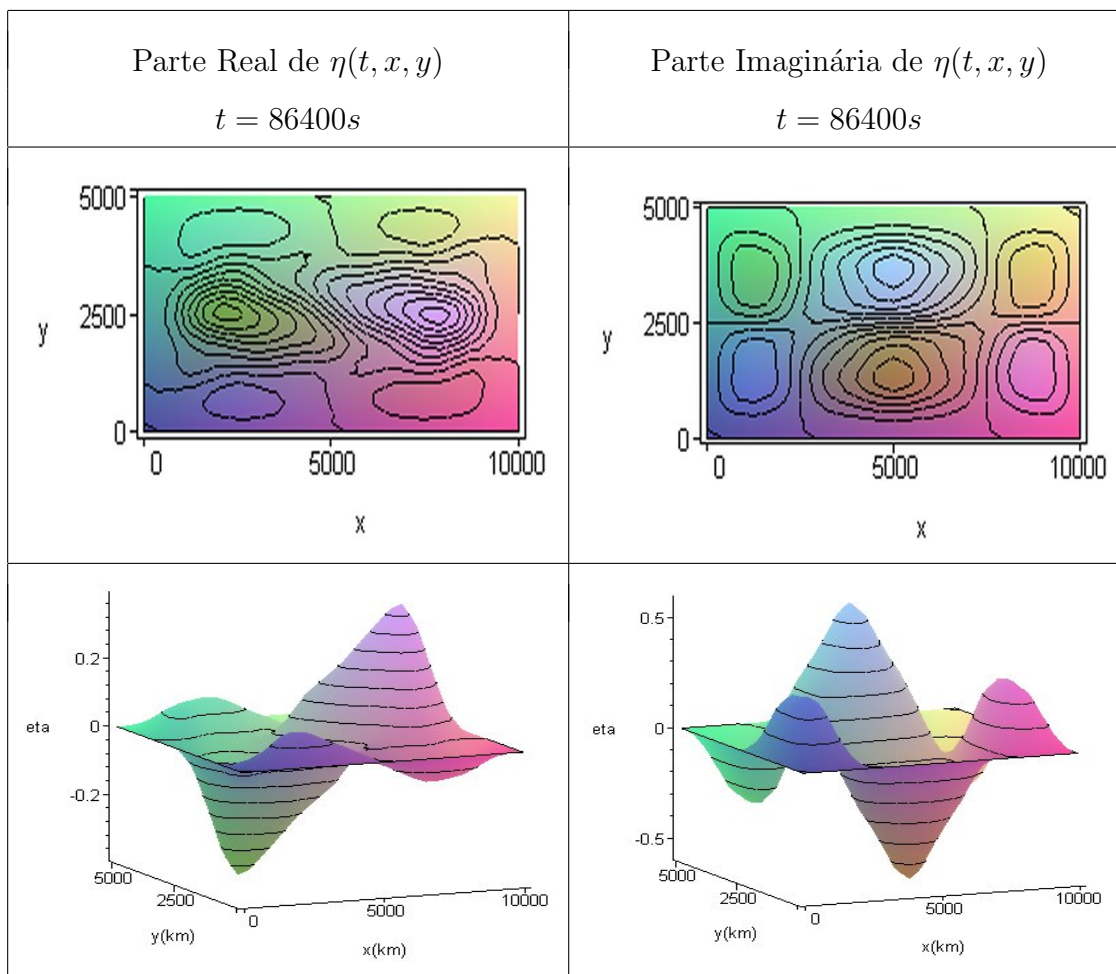


Figura 4.3 Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$.

5 MODELOS NÃO-LINEARES DE ÁGUAS RASAS TRIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL

Escoamentos incompressíveis de grande escala nos quais as escalas dos movimentos horizontais são pelo menos 20 vezes maiores do que a profundidade, podem ser considerados como quase horizontais ou escoamentos em águas rasas. Este conceito é relativo ao comprimento do fenômeno de interesse e não à geometria aparente do corpo d'água. Por exemplo, uma Baía (ou oceano propriamente dito) é um corpo d'água raso para correntes de maré; entretanto, pode ser um corpo d'água profundo para escoamentos referentes a ondas geradas pelo vento. As equações governantes deste tipo de movimento são as chamadas *equações de águas-rasas* e são obtidas a partir das leis de conservação, considerando a aproximação da pressão hidrostática e as condições de contorno na superfície livre e no fundo.

5.1 Equação para Superfície Livre

Integrando a equação da continuidade (2.19) do fundo $z = -h$ até a superfície livre $z = \eta$, vem

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0.$$

Usando as regras da cadeia e de Leibniz para integração, segue que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right] - u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_b \frac{\partial(-h)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right] - v_s \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_b \frac{\partial(-h)}{\partial y} + w_s - w_b = 0.$$

Substituindo as condições de contorno cinemáticas para a superfície livre e o fundo (2.37) e (2.38), obtém-se:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right] = 0, \quad (5.1)$$

chamada de equação para superfície livre de um escoamento tridimensional na forma conservativa.

5.2 Modelo Tridimensional

Assim, o modelo tridimensional para um escoamento de águas rasas não-homogêneo é governado pelas seguintes equações:

- Movimento na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu_H \nabla_H^2 u + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) + fv, \quad (5.2)$$

- Movimento na direção y:

$$\frac{Dv}{Dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \nu_H \nabla_H^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial v}{\partial z} \right) - fu, \quad (5.3)$$

- Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5.4)$$

- Superfície Livre

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right] = 0, \quad (5.5)$$

- Transporte de Calor

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa_H \nabla_H^2 T + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_V \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (5.6)$$

- Transporte de Sal

$$\frac{Ds}{Dt} = \epsilon_H \nabla_H^2 s + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_V \frac{\partial s}{\partial z} \right), \quad (5.7)$$

- Equação de Estado

$$F(\rho, p, T, s) = 0. \quad (5.8)$$

Este sistema de sete equações nas variáveis u , v , w , $\eta(p)$, T , s e ρ modela o transporte de calor e sal em corpos de águas rasas. Em geral, este sistema não é resolvido simultaneamente e costuma-se desacoplá-lo. As equações (5.2)-(5.5) constituem um sistema nas variáveis u , v , w e η , chamado *modelo hidrodinâmico*, que após resolvido, fornece os valores de entrada ao *modelo de transporte*, constituído pelas equações (5.6) e (5.7), as quais após substituição em (5.8), fornecem ρ .

Como condições iniciais, devem ser especificados valores de u , v , w , η , T e s para todo o domínio de integração no tempo inicial t_o .

Para o modelo hidrodinâmico, deverá ser informado a elevação da superfície livre η e/ou as velocidades nos contornos abertos. Nos contornos fechados deve-se respeitar a condição de não existência de fluxo normal ao contorno.

Para o modelo de transporte, dois tipos de condições são possíveis nos contornos abertos; o valor prescrito (condição de contorno tipo Dirichlet), onde é conhecida a variação da concentração (temperatura e salinidade) com o tempo ou a condição de fluxo normal (condição de contorno tipo Neumann), também variável no tempo. Nos contornos fechados tem-se a condição de fluxo nulo.

OBSERVAÇÃO

As equações (5.2)-(5.3) e (5.6)-(5.7) podem ser escritas na forma conservativa. Adicionando a equação de continuidade (5.4) multiplicada por u ao membro esquerdo de (5.2), resulta a equação de momento na direção x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu_H \nabla_H^2 u + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) + fv. \quad (5.9)$$

Analogamente, adicionando a equação de continuidade multiplicada por v ao membro esquerdo de (5.3), resulta a equação de momento na direção y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \nu_H \nabla_H^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial v}{\partial z} \right) - fu. \quad (5.10)$$

Adicionando a equação de continuidade (5.4) multiplicada por T ao membro esquerdo de (5.6), resulta a equação do transporte na forma conservativa

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} = \kappa_H \nabla_H^2 T + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_V \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (5.11)$$

Analogamente, a forma conservativa da equação (5.7) é dada por

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(us)}{\partial x} + \frac{\partial(vs)}{\partial y} + \frac{\partial(ws)}{\partial z} = \epsilon_H \nabla_H^2 s + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_V \frac{\partial s}{\partial z} \right). \quad (5.12)$$

5.3 Condições de Contorno relacionadas ao Atrito do Vento e a Topografia do Fundo

Sob a hipótese que a superfície livre é quase um plano horizontal, as condições de contorno dinâmicas na superfície livre (2.39)-(2.40) se reduzem a

$$\tau^{xs} = \mu_V \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{e} \quad \tau^{ys} = \mu_V \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (5.13)$$

Em geral, considera-se

$$\tau^{xs} = C_{Ds}\rho_a\sqrt{u_a^2 + v_a^2} u_a \quad \text{e} \quad \tau^{ys} = C_{Ds}\rho_a\sqrt{u_a^2 + v_a^2} v_a, \quad (5.14)$$

com $\rho_a = 1.30kg/m^3$ a densidade do ar, $C_{Ds} = 2. \times 10^{-3}$ o coeficiente de arrasto do vento e (u_a, v_a) a velocidade do vento.

Analogamente, as condições de contorno dinâmicas no fundo (2.41)-(2.42) são dadas pela especificação da tensão no fundo na forma da fórmula de Manning-Chezy por

$$\tau^{xb} = \mu_V \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{e} \quad \tau^{yb} = \mu_V \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (5.15)$$

onde, em geral,

$$\tau^{xb} = \gamma u \quad \text{e} \quad \tau^{yb} = \gamma v, \quad (5.16)$$

com

$$\gamma = C_{Db}\rho_o\sqrt{u_b^2 + v_b^2}$$

com $\rho_o = 1035kg/m^3$ a densidade da água, $C_{Db} = g/C_z^2$ o coeficiente de arrasto da fricção com o fundo, $C_z = H^{1/6}/n$ o coeficiente de fricção de Chezy, n o coeficiente de Manning, $H(t, x, y)$ a profundidade total da água e (u_b, v_b) a velocidade no fundo.

5.4 Modelo Bidimensional Integrado na Vertical

A circulação em uma classe de baías e estuários, águas costeiras e lagos pode ser satisfatoriamente representada pela solução de um conjunto de equações de águas rasas bidimensionais, Vreugdenhil [65].

Substituindo as velocidades médias na vertical denotadas por

$$U = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u dz \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} v dz,$$

diretamente na equação (5.5), resulta

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0, \quad (5.17)$$

que corresponde a equação para superfície livre bidimensional.

Integrando verticalmente o lado esquerdo da equação de momento na direção x , equação (5.9), do fundo do mar $z = -h$ até a superfície livre $z = \eta$, resulta:

$$L.E. = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial(uu)}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial(uv)}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial(uw)}{\partial z} dz$$

Aplicando a regra de Leibniz a cada uma das integrais, satisfaz

$$\begin{aligned} L.E. &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u v dz \\ &- u_s \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_s \right) - u_b \left(u_b \frac{\partial h}{\partial x} + v_b \frac{\partial h}{\partial y} + w_b \right) \end{aligned}$$

e, com o uso das condições de contorno (2.37) e (2.38), se reduz a:

$$L.E. = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u v dz \quad (5.18)$$

Mas,

$$\int_{-h}^{\eta} u u dz = HUU + \int_{-h}^{\eta} (u - U)^2 dz, \quad (5.19)$$

e

$$\int_{-h}^{\eta} u v dz = HUV + \int_{-h}^{\eta} (u - U)(v - V) dz. \quad (5.20)$$

De fato,

$$\int_{-h}^{\eta} (u - U)^2 dz = \int_{-h}^{\eta} u u dz - 2 \int_{-h}^{\eta} u U dz + \int_{-h}^{\eta} U U dz = \int_{-h}^{\eta} u u dz - HUU$$

que resulta na equação (5.19). Analogamente, demonstra-se (5.20). Além disso,

$$\int_{-h}^{\eta} (u - U) dz = \int_{-h}^{\eta} u dz - U \int_{-h}^{\eta} dz = HU - HU = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-h}^{\eta} (v - V) dz = 0$$

e, por integração por partes, resultam

$$\int_{-h}^{\eta} (u - U)^2 dz = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-h}^{\eta} (u - U)(v - V) dz = 0.$$

Assim, substituindo estes resultados na equação (5.18), tem-se

$$L.E. = \frac{\partial}{\partial t}(HU) + \frac{\partial}{\partial x}(HUU) + \frac{\partial}{\partial y}(HUV). \quad (5.21)$$

Agora, integrando verticalmente o lado direito de (5.9), obtém-se

$$\begin{aligned} L.D. &= -g \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} dz + \nu_H \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dz + \nu_H \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dz \\ &+ \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz + f \int_{-h}^{\eta} v dz. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de Leibniz as integrais, a equação satisfaz

$$\begin{aligned} L.D. &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu_H \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b \frac{\partial(-h)}{\partial x} \right) \\ &+ \nu_H \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial y} dz - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right) \\ &+ \nu_V \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_s - \nu_V \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_b + fHV, \end{aligned}$$

que, após o uso do fato que $\nu_V = \mu_V/\rho$ e das condições de contorno (2.39) e (2.41), se reduz a:

$$L.D. = -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu_H \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \nu_H \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial y} dz + \frac{\tau^{xs} - \gamma u}{\rho} + fHV. \quad (5.22)$$

Considerando aproximações padrões das velocidades locais com suas médias verticais, o termo de viscosidade na direção x da equação anterior satisfaz

$$\nu_H \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \nu_H \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial U}{\partial x} dz = \nu_H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} dz \right) = \nu_H \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial U}{\partial x} \right).$$

De maneira análoga para o termo de viscosidade na direção y , obtém-se

$$\nu_H \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial y} dz = \nu_H \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

Substituindo estas aproximações na equação (5.22), resulta

$$L.D. = -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu_H \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \nu_H \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\tau^{xs} - \gamma U}{\rho} + fHV. \quad (5.23)$$

Igualando as equações (5.21) e (5.23), resulta a equação de momento bidimensional na direção x na forma conservativa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(HU) + \frac{\partial}{\partial x}(HUU) + \frac{\partial}{\partial y}(HUV) = -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu_H \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \nu_H \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ + \frac{\tau^{xs} - \gamma U}{\rho} + fHV. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Da mesma forma, pode-se obter a equação de momento bidimensional na direção y na forma conservativa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(HV) + \frac{\partial}{\partial x}(HUV) + \frac{\partial}{\partial y}(HVV) = -gH \frac{\partial \eta}{\partial y} + \nu_H \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \nu_H \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ + \frac{\tau^{ys} - \gamma V}{\rho} - fHU. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Agora, integrando as equações (5.11) e (5.12) na vertical, usando as condições de contorno cinemáticas (2.37) e (2.38) e considerando que os produtos entre o transporte difusivo na superfície e fundo com os gradientes de η e h são

mulos, já que o transporte deve ser paralelo aos contornos e os vetores $\nabla\eta$ e ∇h são normais a estes, resulta

$$\frac{\partial}{\partial t}(HT_m) + \frac{\partial}{\partial x}(HUT_m) + \frac{\partial}{\partial y}(HVT_m) = \kappa_H \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial T_m}{\partial y} \right) \right] \quad (5.26)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(Hs_m) + \frac{\partial}{\partial x}(HUs_m) + \frac{\partial}{\partial y}(HVs_m) = \epsilon_H \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial s_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial s_m}{\partial y} \right) \right] \quad (5.27)$$

onde T_m e s_m são os valores médias na vertical para a temperatura T e salinidade s , definidos por

$$T_m = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} T \, dz \quad \text{e} \quad s_m = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} s \, dz.$$

Substituindo a equação para superfície livre (5.17) em (5.24) - (5.27), obtém-se as respectivas equações na forma não-conservativa

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\nu_H}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] + \frac{\tau^{xs} - \gamma U}{\rho H} + fV, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\nu_H}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] + \frac{\tau^{ys} - \gamma V}{\rho H} - fU, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + U \frac{\partial T_m}{\partial x} + V \frac{\partial T_m}{\partial y} = \frac{\kappa_H}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial T_m}{\partial y} \right) \right], \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial s_m}{\partial t} + U \frac{\partial s_m}{\partial x} + V \frac{\partial s_m}{\partial y} = \frac{\epsilon_H}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial s_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial s_m}{\partial y} \right) \right]. \quad (5.31)$$

Resumindo, a equação de superfície livre (5.17) e as equações (5.28) - (5.31) constituem um sistema de cinco equações diferenciais parciais com cinco incógnitas $U(t, x, y)$, $V(t, x, y)$, $\eta(t, x, y)$, $T_m(t, x, y)$ e $s_m(t, x, y)$.

OBSERVAÇÃO

Se as variáveis u , v , T e s independem de z , estas coincidem com os valores médios na vertical U , V , T_m e s_m , respectivamente. De fato, para a variável u tem-se

$$U = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u \, dz = \frac{1}{H} u \int_{-h}^{\eta} dz = u. \quad (5.32)$$

Analogamente, para as outras variáveis.

Neste caso, o sistema acima pode ser simplesmente escrito como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\nu_H}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\tau^{xs} - \gamma u}{\rho H} + fv, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\nu_H}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\tau^{ys} - \gamma v}{\rho H} - fu, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0, \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\kappa_H}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right], \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\kappa_H}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial s}{\partial y} \right) \right]. \quad (5.37)$$

6 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

Nos capítulos anteriores foram descritas as equações que descrevem a circulação em corpos de águas rasas, as quais acrescidas das condições iniciais e de contorno formam um modelo matemático. Este modelo normalmente não possui solução analítica, salvo em casos muito simplificados. Então, faz-se necessário usar um método numérico para resolvê-lo. Diversos métodos são propostos na literatura para resolver as equações (5.2)-(5.7). Entre os mais utilizados estão o Método de Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos, ou uma combinação de ambos. Também são utilizadas combinações destes métodos com outros, como por exemplo, a combinação do método das características com o de diferenças finitas ou elementos finitos, usados na abordagem do método Semi-Lagrangeano, Griebel et al [28], Hall et al [32], Lavrenov [39], Vreugdenhil [65], Weiyan [66] entre outros.

Neste trabalho, serão utilizados métodos de diferenças finitas e Semi-Lagrangeano.

6.1 Análise Característica das Equações Governantes Bidimensionais em um Fluido Homogêneo

As equações (5.33), (5.34) e (5.35), formam um sistema hiperbólico de equações diferenciais parciais quasilinear nas variáveis independentes t , x e y . Para determinar uma discretização semi-implícita particular, cuja estabilidade independa da velocidade $c = \sqrt{gH}$, inicialmente o cone característico das equações governantes é obtido, John [36], Godunov [25] e Hall et al [32]. Por simplificação, as equações

serão consideradas para um fluido invíscido

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\tau^{xs} - \gamma u}{\rho H} + fv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\tau^{ys} - \gamma v}{\rho H} - fu,\end{aligned}\tag{6.1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y}$$

ou, na forma matricial,

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} = \mathbf{D}(\mathbf{W})\tag{6.2}$$

onde $\mathbf{W} = (u, v, \eta)^T$ e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ H & 0 & u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & g \\ 0 & H & v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\tau^{xs} - \gamma u}{\rho H} + fv \\ \frac{\tau^{ys} - \gamma v}{\rho H} - fu \\ -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Uma superfície $S : \{\varphi(t, x, y) = 0\}$ é uma *superfície característica* de sistema (6.2),

se

$$\det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{I} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{B} \right) = 0,$$

onde \mathbf{I} denota a matriz identidade; ou seja,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - c^2 \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) \right] = 0,\tag{6.3}$$

onde $c^2 = gH$, que se reduz a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0\tag{6.4}$$

ou

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - c^2 \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \right] = 0. \quad (6.5)$$

Tem-se que o cone

$$\varphi(t, x, y) = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - (u^2 + v^2)(t - t_o)^2 = 0 \quad (6.6)$$

com centro em (t_o, x_o, y_o) verifica (6.4), se

$$(x - x_o) - u(t - t_o) = 0, \quad (y - y_o) - v(t - t_o) = 0. \quad (6.7)$$

Similarmente, o cone

$$\varphi(t, x, y) = [(x - x_o) - u(t - t_o)]^2 + [(y - y_o) - v(t - t_o)]^2 - c^2(t - t_o)^2 = 0 \quad (6.8)$$

verifica (6.5).

Assim, o cone característico local com vértice em (t_o, x_o, y_o) consiste das seguintes superfícies características:

- A reta que passa em (t_o, x_o, y_o) e é paralela ao vetor $(1, u, v)$, dada pelas equações na forma paramétrica (6.7);
- O cone representado pela equação (6.8).

Note que, enquanto a primeira parte do cone característico, equação (6.7), depende unicamente das velocidades do fluido u e v ; a segunda parte, equação (6.8), depende da velocidade de propagação da onda $c = \sqrt{gH}$. Esta velocidade surge dos coeficientes g e H nas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , que correspondem aos coeficientes de $\partial\eta/\partial x$ na primeira equação, de $\partial\eta/\partial y$ na segunda equação e de $\partial u/\partial x$ e $\partial v/\partial y$ na terceira equação do sistema (6.1). Assim, estas derivadas serão discretizadas

implicitamente, de modo que a estabilidade do método independa da velocidade $c = \sqrt{gH}$. A análise realizada para o modelo bidimensional, pode ser estendida ao modelo tridimensional.

Uma severa limitação dos métodos numéricos explícitos é a restrição de estabilidade imposta pela condição de Courant-Friedrich-Lewy (*condição CFL*), Strikwerda [61]. Geralmente, esta restrição requer um passo de tempo muito menor que aquele permitido pelas considerações de precisão. Por outro lado, métodos implícitos, muitas vezes incondicionalmente estáveis, envolvem a solução de um grande número de equações não-lineares acopladas. Além disso, para precisão, o passo de tempo não pode ser tomado arbitrariamente grande de modo que esses métodos se tornem pouco práticos.

As baías e estuários possuem uma geometria bastante complexa e a região contendo o fluido varia com a maré, devendo-se determinar o deslocamento da superfície livre a partir da posição de equilíbrio. Uma maneira bastante eficiente de se modelar numericamente o problema é adotar uma malha cartesiana com células contendo água ou não, dependendo do nível da superfície livre. Para a discretização das equações, uma malha alternada (*staggered grid*) de células retangulares de comprimento Δx , largura Δy e altura Δz_k é considerada. Cada célula é numerada em seu centro com índice i , j e k , onde o deslocamento da superfície livre η , a temperatura T e a salinidade s são definidas no centro da célula e as velocidades u , v e w são posicionadas conforme a figura 6.1. A profundidade da água (batimetria) h é especificada nos mesmos pontos das velocidades horizontais u e v .

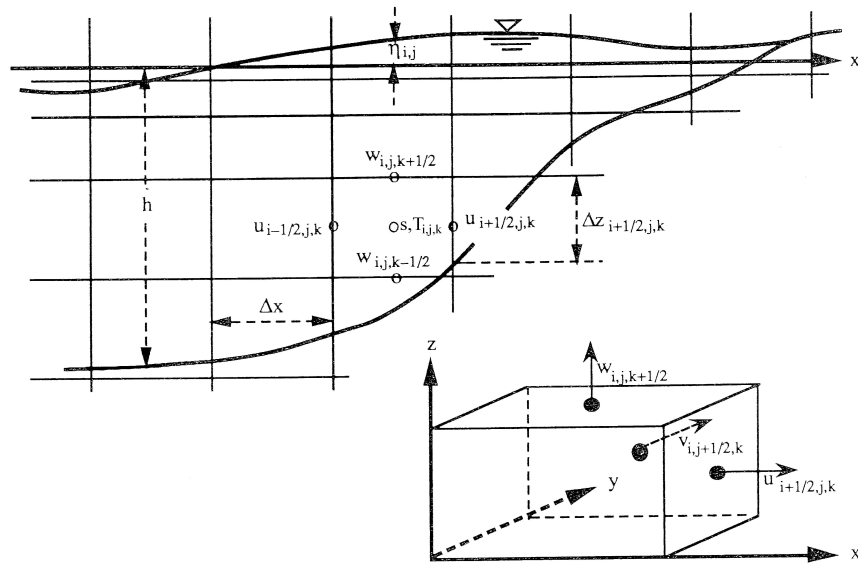


Figura 6.1 Malha Computacional e Notações.

6.2 Discretização do Modelo Hidrodinâmico

A partir da análise característica da seção anterior, uma discretização θ -diferenças finitas para o gradiente do deslocamento da superfície livre nas equações de momento (5.2)-(5.3) e para o divergente da velocidade na equação da superfície livre (5.5) é proposta. O parâmetro θ é introduzido para controlar o grau de implícitude das variáveis discretizadas. Os termos convectivos, viscosos horizontais e de Coriolis nas equações de momento são discretizados explicitamente e, para evitar uma restrição de estabilidade devida ao termo de viscosidade vertical, este termo é discretizado implicitamente.

Então, uma discretização semi-implícita geral das equações de momento (5.2)-(5.3) têm a forma

$$\begin{aligned}
u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} &= F u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) + (1 - \theta) (\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n)] \\
&+ \nu_V \Delta t \frac{\nu_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1}}{\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}} - \nu_{k-\frac{1}{2}} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}}{\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k}}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} &= F v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} [\theta (\eta_{i,j+1}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) + (1 - \theta) (\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n)] \\
&+ \Delta t \frac{\nu_{k+\frac{1}{2}} \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k+1}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} - \nu_{k-\frac{1}{2}} \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2},k-1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}}{\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k}},
\end{aligned} \tag{6.10}$$

onde F é um operador de diferenças finitas explícito e não-linear, que inclui a discretização dos termos advectivos, termos de viscosidade horizontais e termos de Coriolis.

Os termos $\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k}$ e $\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k}$ representam a espessura da k -ésima camada da água, mais simplesmente denotada por Δz_k . Se, em particular, o fundo e a superfície livre atravessam a mesma face vertical do k -ésimo bloco, então $\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k}$ ou $\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k}$ devem ser iguais a altura total da água $H = h + \eta$ naquele ponto e $\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}$ é definido como sendo a média de $\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k}$ e $\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k+1}$. Como a espessura da camada da superfície depende da posição da superfície livre, que varia com o tempo, então a espessura Δz também varia com o nível de tempo n .

Discretizando a equação para a superfície livre (5.5), obtém-se

$$\begin{aligned}
\eta_{i,j}^{n+1} &= \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k} u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-\frac{1}{2},j,k} u_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \right] \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta y} \theta \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k} v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j-\frac{1}{2},k} v_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} \right] \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta x} (1-\theta) \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k} u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-\frac{1}{2},j,k} u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n \right] \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta y} (1-\theta) \left[\sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k} v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j-\frac{1}{2},k} v_{i,j-\frac{1}{2},k}^n \right]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

onde os índices m e M denotam os limites do fundo e da superfície livre do estêncil, respectivamente.

Discretizando as condições de contorno na superfície livre (5.13), tem-se

$$\begin{aligned}
\mu V \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,M+1}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j,M}^{n+1}}{\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,M+\frac{1}{2}}} &= \tau^{xs}, \\
\mu V \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},M+1}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2},M}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},M+\frac{1}{2}}} &= \tau^{ys}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Analogamente, na interface sedimento-água (5.15), tem-se

$$\begin{aligned}
\mu V \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,m}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j,m-1}^{n+1}}{\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,m-\frac{1}{2}}} &= \gamma_{i+\frac{1}{2},j,m}^n u_{i+\frac{1}{2},j,m}^{n+1}, \\
\mu V \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},m}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2},m-1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}} &= \gamma_{i,j+\frac{1}{2},m}^n v_{i,j+\frac{1}{2},m}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Nas equações (6.12)-(6.13), os valores de u e v nos níveis $M+1$ e $m-1$ são fictícios; eles também aparecem nas equações de momento discretizadas (6.9) e

(6.10), quando $k = M$ e $k = m$. Substituindo as condições de contorno nas equações (6.9) e (6.10), os valores fictícios serão substituídos por valores de u e v definidos dentro do domínio de interesse.

Para qualquer estrutura dada para F, as equações (6.9)-(6.11) constituem um sistema linear com $N_x N_y (2N_z + 1)$ equações e variáveis u^{n+1} , v^{n+1} e η^{n+1} sobre a malha computacional inteira. Este sistema deve ser resolvido a cada passo de tempo para determinar recursivamente os valores das variáveis a partir de dados iniciais. Devido a grande dimensão deste sistema, mesmo para valores pequenos de N_x , N_y e N_z , o sistema formado pelas equações (6.9), (6.10) e (6.11) é decomposto em um conjunto de $2N_x N_y$ sistemas tridiagonais independentes de N_z equações e um sistema com cinco diagonais com $N_x N_y$ equações. Inicialmente, as equações (6.9), (6.10) e (6.11) são escritas na forma matricial como

$$\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2},j}^n \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \mathbf{G}_{i+\frac{1}{2},j}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta(\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1})] \Delta \mathbf{Z}_{i+\frac{1}{2},j}^n \quad (6.14)$$

$$\mathbf{A}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} [\theta(\eta_{i,j+1}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1})] \Delta \mathbf{Z}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}^{n+1} &= \delta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta \left[\left(\Delta \mathbf{Z}_{i+\frac{1}{2},j}^n \right)^T \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \left(\Delta \mathbf{Z}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right)^T \mathbf{U}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \theta \left[\left(\Delta \mathbf{Z}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right)^T \mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \left(\Delta \mathbf{Z}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right)^T \mathbf{V}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right], \quad (6.16) \end{aligned}$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{U} , \mathbf{V} , $\Delta \mathbf{Z}$, \mathbf{G} e δ são definidas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta z_M + a_{M-\frac{1}{2}} & -a_{M-\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{M-\frac{1}{2}} & \Delta z_{M-1} + a_{M-\frac{1}{2}} + a_{M-\frac{3}{2}} & -a_{M-\frac{3}{2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -a_{m+\frac{1}{2}} & \Delta z_m + a_{m+\frac{1}{2}} + \gamma \end{bmatrix},$$

com $a_k = \frac{\nu_H \Delta t}{\Delta z_k}$,

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_{i+\frac{1}{2},j,M}^{n+1} \\ u_{i+\frac{1}{2},j,M-1}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{i+\frac{1}{2},j,m+1}^{n+1} \\ u_{i+\frac{1}{2},j,m}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_{i,j+\frac{1}{2},M}^{n+1} \\ u_{i,j+\frac{1}{2},M-1}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{i,j+\frac{1}{2},m+1}^{n+1} \\ u_{i,j+\frac{1}{2},m}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \Delta z_M \\ \Delta z_{M-1} \\ \vdots \\ \Delta z_{m+1} \\ \Delta z_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \begin{bmatrix} \Delta z_M \left(F u_{i+\frac{1}{2},j,M}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) (\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n) \right) + \Delta t \tau^{xs} \\ \Delta z_{M-1} \left(F u_{i+\frac{1}{2},j,M-1}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) (\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n) \right) \\ \vdots \\ \Delta z_{m+1} \left(F u_{i+\frac{1}{2},j,m+1}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) (\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n) \right) \\ \Delta z_m \left(F u_{i+\frac{1}{2},j,m}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) (\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n) \right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \begin{bmatrix} \Delta z_M \left(F v_{i,j+\frac{1}{2},M}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} (1 - \theta) (\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n) \right) + \Delta t \tau^{ys} \\ \Delta z_{M-1} \left(F v_{i,j+\frac{1}{2},M-1}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} (1 - \theta) (\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n) \right) \\ \vdots \\ \Delta z_{m+1} \left(F v_{i,j+\frac{1}{2},m+1}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} (1 - \theta) (\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n) \right) \\ \Delta z_m \left(F v_{i,j+\frac{1}{2},m}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} (1 - \theta) (\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n) \right) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \delta_{i,j}^n &= \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) \left[[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{U}]_{i+\frac{1}{2},j}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{U}]_{i-\frac{1}{2},j}^n \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} (1 - \theta) \left[[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{V}]_{i,j+\frac{1}{2}}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{V}]_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right]. \end{aligned}$$

Então, a substituição das expressões para $\mathbf{U}_{i\pm\frac{1}{2},j}^{n+1}$ e $\mathbf{V}_{i,j\pm\frac{1}{2}}^{n+1}$ a partir das equações (6.9) e (6.10) em (6.11), satisfaz o seguinte sistema para η :

$$\begin{aligned}
& \eta_{i,j}^{n+1} - g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \theta^2 \left[[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i+\frac{1}{2},j}^n (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) \right. \\
& \quad \left. - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i-\frac{1}{2},j}^n (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i-1,j}^{n+1}) \right] \\
& - g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta y)^2} \theta^2 \left[[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j+\frac{1}{2}}^n (\eta_{i,j+1}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) \right. \\
& \quad \left. - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j-\frac{1}{2}}^n (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j-1}^{n+1}) \right] \\
& = \delta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta \left[[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i+\frac{1}{2},j}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i-\frac{1}{2},j}^n \right] \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \theta \left[[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j+\frac{1}{2}}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right] \tag{6.17}
\end{aligned}$$

ou, ainda

$$\begin{aligned}
& -g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \theta^2 [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i+\frac{1}{2},j}^n \eta_{i+1,j}^{n+1} - g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta y)^2} \theta^2 [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j+\frac{1}{2}}^n \eta_{i,j+1}^{n+1} \\
& + \left(1 - g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \theta^2 [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i+\frac{1}{2},j}^n - g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta y)^2} \theta^2 [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right. \\
& \quad \left. - g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \theta^2 [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i-\frac{1}{2},j}^n - g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta y)^2} \theta^2 [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \eta_{i,j}^{n+1} \\
& - g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \theta^2 [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i-\frac{1}{2},j}^n \eta_{i-1,j}^{n+1} - g \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta y)^2} \theta^2 [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j-\frac{1}{2}}^n \eta_{i,j-1}^{n+1} \\
& = \delta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta \left[[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i+\frac{1}{2},j}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i-\frac{1}{2},j}^n \right] \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \theta \left[[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j+\frac{1}{2}}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right]. \tag{6.18}
\end{aligned}$$

Como a matriz \mathbf{A} é positiva definida, \mathbf{A}^{-1} é também positiva definida e assim os números $(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}$ são não-negativos. Portanto, a equação (6.17) constitui um sistema linear com cinco diagonais de $N_x N_y$ equações para $\eta_{i,j}^{n+1}$, cuja matriz é simétrica e positiva definida. Logo, possui uma única solução que pode ser determinada rapidamente por um método de gradiente conjugado preconditionado.

Posteriormente, substituindo as novas posições da superfície livre nas equações (6.9) e (6.10), obtemos os valores de u^{n+1} e v^{n+1} a partir da resolução de $2N_x N_y$ sistemas tridiagonais com N_z variáveis. Todos estes sistemas são independentes uns dos outros, simétricos e positivos definidos, cujas soluções podem ser obtidas por um método direto.

Finalmente, pela discretização da equação da continuidade (5.4), obtém-se a componente vertical da velocidade no tempo t_{n+1}

$$w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = w_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k}^n u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - \Delta z_{i-\frac{1}{2},j,k}^n u_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k}^n v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - \Delta z_{i,j-\frac{1}{2},k}^n v_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1}}{\Delta y} \quad (6.19)$$

para $k = m, \dots, M$.

Como a superfície livre é calculada em todo o domínio computacional, antes de avançar para o seguinte passo de tempo, alguns dos espaçamentos verticais $\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k}$ e $\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k}$ devem ser atualizados para contabilizar a nova localização da superfície livre. Assim, em cada passo de tempo, as novas alturas totais da água $H_{i\pm\frac{1}{2},j}^{n+1}$ e $H_{i,j\pm\frac{1}{2}}^{n+1}$ são atualizadas por

$$H_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \max\left(0, h_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1} + \eta_{i+1,j}^{n+1}}{2}\right)$$

e

$$H_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \max\left(0, h_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1} + \eta_{i,j+1}^{n+1}}{2}\right).$$

A análise da estabilidade do esquema de diferenças finitas semi-implícito (6.9), (6.10) e (6.11) pode ser vista através do método de *von Neumann*, sob as hipóteses que as equações diferenciais governantes (5.2)-(5.5) são lineares, com coeficientes constantes e definidas num domínio infinito horizontal ou com condições de

fronteira periódicas em um domínio finito. Assim, se Δz denota a altura constante da camada, negligenciando as tensões do vento ($\tau^{xs} = \tau^{ys} = 0$) e assumindo que $a_1 = a_2 = \dots = a_{N_z}$ e γ são constantes na matriz \mathbf{A} , então as equações em diferenças (6.14)-(6.16) se reduzem a

$$\mathbf{A}\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + g\frac{\Delta t}{\Delta x}\theta(\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1})\Delta\mathbf{Z} = \Delta z F\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - (1-\theta)g\frac{\Delta t}{\Delta x}[\theta(\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n)]\Delta\mathbf{Z}, \quad (6.20)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + g\frac{\Delta t}{\Delta y}\theta(\eta_{i,j+1}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1})\Delta\mathbf{Z} = \Delta z F\mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (1-\theta)g\frac{\Delta t}{\Delta y}[\theta(\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n)]\Delta\mathbf{Z}, \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}^{n+1} &= \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\theta\left[(\Delta\mathbf{Z})^T\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - (\Delta\mathbf{Z})^T\mathbf{U}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y}\theta\left[(\Delta\mathbf{Z})^T\mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\Delta\mathbf{Z})^T\mathbf{V}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x}(1-\theta)\left[(\Delta\mathbf{Z})^T\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^n - (\Delta\mathbf{Z})^T\mathbf{U}_{i-\frac{1}{2},j}^n\right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y}(1-\theta)\left[(\Delta\mathbf{Z})^T\mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - (\Delta\mathbf{Z})^T\mathbf{V}_{i,j-\frac{1}{2}}^n\right], \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde $F\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ e $F\mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ denotam a discretização em diferenças finitas explícita dos termos de viscosidade horizontal, ou seja,

$$\begin{aligned} F\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^n &= \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \nu_H\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(\mathbf{U}_{i+\frac{3}{2},j}^n - 2\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{U}_{i-\frac{1}{2},j}^n\right) \\ &\quad + \nu_H\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}\left(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j-1}^n\right) \end{aligned} \quad (6.23)$$

e

$$\begin{aligned} F\mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= \mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \nu_H\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(\mathbf{V}_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - 2\mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \mathbf{V}_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n\right) \\ &\quad + \nu_H\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}\left(\mathbf{V}_{i,j+\frac{3}{2}}^n - 2\mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \mathbf{V}_{i,j-\frac{1}{2}}^n\right), \end{aligned} \quad (6.24)$$

enquanto os termos convectivos não lineares e os termos de Coriolis não estão sendo considerados.

Teorema 6.1. *Se $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ e se o passo de tempo Δt satisfaz a desigualdade*

$$\Delta t \leq \left[2\nu_H \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right]^{-1}, \quad (6.25)$$

então o esquema de diferenças finitas semi-implícito (6.9)-(6.11) é estável no sentido de von Neumann.

Demonstração. Substituindo $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^n$, $\mathbf{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ e $\eta_{i,j}^n$ em (6.20)-(6.24) pelas correspondentes componentes de Fourier $\hat{\mathbf{U}}^n e^{I[(i+\frac{1}{2})\alpha+j\beta]}$, $\hat{\mathbf{V}}^n e^{I[\alpha+(j+\frac{1}{2})\beta]}$ e $\hat{\eta}^n e^{I[i\alpha+j\beta]}$, após algumas simplificações, as equações (6.20)-(6.22) satisfazem

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{U}}^{n+1} + Ip\theta g\hat{\eta}^{n+1}\Delta\mathbf{Z} = \Delta z f_a \hat{\mathbf{U}}^n - Ip(1-\theta)g\hat{\eta}^n\Delta\mathbf{Z} \quad (6.26)$$

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{V}}^{n+1} + Iq\theta g\hat{\eta}^{n+1}\Delta\mathbf{Z} = \Delta z f_a \hat{\mathbf{V}}^n - Iq(1-\theta)g\hat{\eta}^n\Delta\mathbf{Z}, \quad (6.27)$$

$$\hat{\eta}^{n+1} + Ip\theta(\Delta\mathbf{Z})^T\hat{\mathbf{U}}^{n+1} + Iq\theta(\Delta\mathbf{Z})^T\hat{\mathbf{V}}^{n+1} = \hat{\eta}^n - Ip(1-\theta)(\Delta\mathbf{Z})^T\hat{\mathbf{U}}^n - Iq(1-\theta)(\Delta\mathbf{Z})^T\hat{\mathbf{V}}^n, \quad (6.28)$$

onde $I = (-1)^2$; $\hat{\mathbf{U}}^n$, $\hat{\mathbf{V}}^n$ e $\hat{\eta}^n$ são as funções amplitude de \mathbf{U} , \mathbf{V} e η no nível de tempo t_n ; α e β são os ângulos de fase de x e y ; $p = 2(\Delta t/\Delta x)\text{sen}(\alpha/2)$; $q = 2(\Delta t/\Delta y)\text{sen}(\beta/2)$ e o fator de amplificação do operador de diferenças explícito é dado por

$$f_a = 1 - 2\nu_H\Delta t \left[\frac{1 - \cos(\alpha)}{(\Delta x)^2} + \frac{1 - \cos(\beta)}{(\Delta y)^2} \right]. \quad (6.29)$$

As equações (6.26)-(6.28) podem ser escritas na forma matricial

$$\mathbf{P}\hat{\mathbf{W}}^{n+1} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{W}}^n,$$

onde

$$\hat{\mathbf{W}}^k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^n \\ \hat{\mathbf{V}}^n \\ \hat{\eta}^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & Ip\theta g\Delta\mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & Iq\theta g\Delta\mathbf{Z} \\ Ip\theta(\Delta\mathbf{Z})^T & Iq\theta(\Delta\mathbf{Z})^T & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Delta z f_a I_d & \mathbf{0} & -Ip(1-\theta)g\Delta\mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \Delta z f_a I_d & -Iq(1-\theta)g\Delta\mathbf{Z} \\ -Ip(1-\theta)(\Delta\mathbf{Z})^T & -Iq(1-\theta)(\Delta\mathbf{Z})^T & 1 \end{bmatrix},$$

com I_d denotando a matriz identidade de ordem N_z . Assim, a matriz de amplificação do método é $\mathbf{G} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$ e uma condição para a estabilidade é que o raio espectral de \mathbf{G} seja menor ou igual a um, para quaisquer α e β . Equivalentemente, o valor absoluto de cada autovalor de \mathbf{G}^{-1} não deve ser menor que um. O polinômio característico da matriz \mathbf{G}^{-1} é dado por

$$\det(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{Q}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d & \mathbf{0} & Ipgs\Delta\mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d & Iqgs\Delta\mathbf{Z} \\ Ips(\Delta\mathbf{Z})^T & Iqs(\Delta\mathbf{Z})^T & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (6.30)$$

onde $s = \theta + \lambda(1 - \theta)$. A seguir, será mostrado que a equação (6.30) não é satisfeita para qualquer número complexo λ tal que $|\lambda| < 1$. Assume que $|\lambda| < 1$ e considere a matriz \mathbf{A} real, simétrica e estritamente diagonal dominante. Note que quando a desigualdade (6.25) é satisfeita, a equação (6.29) implica $|f_a| \leq 1$. Portanto, $|\lambda\Delta z f_a| \leq \Delta z$, e assim, a matriz $\mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d$ permanece estritamente diagonal dominante e inversível. Considere então,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} I_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_d & \mathbf{0} \\ -Ips(\Delta\mathbf{Z})^T[\mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d]^{-1} & -Iqs(\Delta\mathbf{Z})^T[\mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d]^{-1} & 1 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\det(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{T}) \cdot \det(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{Q}) = \det[\mathbf{T}(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{Q})].$$

Assim, a equação (6.30) pode ser escrita como

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d & \mathbf{0} & I p g s \Delta \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d & I q g s \Delta \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & b \end{bmatrix} = 0,$$

onde $b = g(p^2 + q^2)s^2(\Delta \mathbf{Z})^T[\mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d]^{-1}\Delta \mathbf{Z} + 1 - \lambda$. Desde que $\det(\mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d) \neq 0$, é necessário mostrar somente que, para $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, tem-se $b \neq 0$. Por outro lado, como \mathbf{A} é real e simétrica, possui N_z autovalores reais $\lambda_k \geq \Delta z$ e um sistema completo de autovetores \mathbf{x}_k , os quais formam uma base ortonormal. Consequentemente, o vetor $[\mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d]^{-1}\Delta \mathbf{Z}$ pode ser expresso como

$$[\mathbf{A} - \lambda\Delta z f_a I_d]^{-1}\Delta \mathbf{Z} = \sum_{k=1}^{N_z} \frac{(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{x}_k}{\lambda_k - \lambda\Delta z f_a} \mathbf{x}_k.$$

Assim, a desigualdade $b \neq 0$ pode ser escrita como

$$g(p^2 + q^2)s^2 \sum_{k=1}^{N_z} \frac{[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{x}_k]^2}{|\lambda_k - \lambda\Delta z f_a|^2} (\lambda_k - \bar{\lambda}\Delta z f_a) + 1 - \lambda \neq 0. \quad (6.31)$$

Como $s \neq 0$, a desigualdade (6.31) pode ser dividida por s , para obter

$$g(p^2 + q^2)s \sum_{k=1}^{N_z} \frac{[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{x}_k]^2}{|\lambda_k - \lambda\Delta z f_a|^2} (\lambda_k - \bar{\lambda}\Delta z f_a) + \frac{(1 - \lambda)\bar{s}}{|s|^2} \neq 0. \quad (6.32)$$

Nesta última desigualdade, tem-se

$$g(p^2 + q^2) \frac{[(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{x}_k]^2}{|\lambda_k - \lambda\Delta z f_a|^2} \geq 0.$$

Além disso,

$$\operatorname{Re}[s(\lambda_k - \bar{\lambda}\Delta z f_a)] > 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}[(1 - \lambda)\bar{s}] > 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[s(\lambda_k - \bar{\lambda}\Delta z f_a)] &= \operatorname{Re}[(\theta + \lambda(1 - \theta))(\lambda_k - \bar{\lambda}\Delta z f_a)] \\ &= \theta[\lambda_k - f_a\Delta z \operatorname{Re}(\lambda)] + (1 - \theta)[\lambda_k \operatorname{Re}(\lambda) - |\lambda|^2 \Delta z f_a] \\ &= (1 - \theta)[\lambda_k + \operatorname{Re}(\lambda)(\lambda_k - \Delta z f_a) - |\lambda|^2 \Delta z f_a] \\ &\quad + (2\theta - 1)[\lambda_k - f_a\Delta z \operatorname{Re}(\lambda)] \\ &\geq (1 - \theta)[\lambda_k - |\lambda|(\lambda_k - \Delta z f_a) - |\lambda|^2 \Delta z f_a] \\ &\quad + (2\theta - 1)[\lambda_k - |f_a\Delta z \lambda|] \\ &= (1 - \theta)[(\lambda_k + |\lambda|\Delta z f_a)(1 - |\lambda|)] \\ &\quad + (2\theta - 1)[\lambda_k - |f_a\Delta z \lambda|] \\ &\geq (\lambda_k - |f_a\Delta z \lambda|)[(1 - \theta)(1 - |\lambda|) + (2\theta - 1)] > 0. \end{aligned}$$

A validade de $\operatorname{Re}[(1 - \lambda)\bar{s}] > 0$ pode ser mostrada de maneira análoga, com $\bar{\lambda}$ substituindo λ e $\lambda_k = f_a = \Delta z = 1$. Isto prova que o lado esquerdo de (6.32) tem parte real estritamente positiva. Assim, quando $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ e a restrição de estabilidade (6.25) for satisfeita, a matriz \mathbf{G}^{-1} não possui autovalores λ tais que $|\lambda| < 1$. Portanto, o raio espectral de \mathbf{G} é menor ou igual a um e o esquema (6.9)-(6.11) é estável no sentido de *von Neumann*. \square

Observe-se que a estabilidade do esquema de diferenças finitas semi-implícito é independente da velocidade $c = \sqrt{gH}$, da fricção do fundo e viscosidade vertical. O mesmo depende unicamente da viscosidade horizontal pela relação (6.25). Este método se torna incondicionalmente estável quando os termos de viscosidade horizontal são negligenciados ($\nu_H = 0$).

Usando expansões em série de Taylor pode-se mostrar que as discretizações propostas são consistentes com as equações de águas rasas e para $\theta = 1/2$, obtém-se

uma aproximação de segunda ordem, enquanto para $\theta \neq 1/2$, o erro de amortecimento tem a forma de uma difusão. A estabilidade do método ($\theta \geq 1/2$), corresponde a um coeficiente de difusão não-negativo, Casulli et al [8].

O método de diferenças finitas semi-implícito aqui descrito para problemas tridimensionais, se reduz ao caso bidimensional quando é considerada apenas uma camada vertical.

6.3 Método Semi-Lagrangeano

As maiores dificuldades no tratamento numérico dos fluxos com superfície livre surgem a partir da discretização dos termos advectivos e viscosos horizontais. Para ilustrar o método Semi-Lagrangeano (ou Euleriano-Lagrangeano), considere-se por um instante a equação de adveccção-difusão bidimensional

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \nu_H \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right), \quad (6.33)$$

que, na forma Lagrangeana satisfaz

$$\frac{Dc}{Dt} = \nu_H \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right), \quad (6.34)$$

onde D/Dt indica que a razão de variação do tempo é calculada ao longo da linha de corrente definida por

$$\frac{Dx}{Dt} = u \quad \text{e} \quad \frac{Dy}{Dt} = v. \quad (6.35)$$

Uma discretização explícita natural para a equação (6.34) é simplesmente dada por

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{k+1} = & c_{i-a,j-b}^k + \nu_H \Delta t \left(\frac{c_{i-a+1,j-b}^k - 2c_{i-a,j-b}^k + c_{i-a-1,j-b}^k}{(\Delta x)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{c_{i-a,j-b+1}^k - 2c_{i-a,j-b}^k + c_{i-a,j-b-1}^k}{(\Delta y)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{k+1} = & \left[1 - \Delta t \left(\frac{2\nu_H}{(\Delta x)^2} + \frac{2\nu_H}{(\Delta y)^2} \right) \right] c_{i-a,j-b}^k \\
 & + \Delta t \frac{\nu_H}{(\Delta x)^2} c_{i-a+1,j-b}^k + \Delta t \frac{\nu_H}{(\Delta x)^2} c_{i-a-1,j-b}^k \\
 & + \Delta t \frac{\nu_H}{(\Delta y)^2} c_{i-a,j-b+1}^k + \Delta t \frac{\nu_H}{(\Delta y)^2} c_{i-a,j-b-1}^k
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

onde $a = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ e $b = v \frac{\Delta t}{\Delta y}$ são os *números de Courant*.

É interessante observar o significado físico da equação (6.36). O valor de c no tempo t_{k+1} em (i, j) está relacionado com o valor de c no tempo t_k em $(i - a, j - b)$, o qual difunde-se em um tempo decorrido Δt . Ou seja, $(i - a, j - b)$ denota um ponto na mesma linha de corrente que passa por (i, j) no tempo t_{k+1} , conforme a figura 6.2. Porém, em geral, a e b não são inteiros, e portanto $(i - a, j - b)$ não é um ponto da malha. Por esta razão uma fórmula de interpolação deve ser usada para definir $c_{i-a,j-b}$ e seus vizinhos na equação (6.36). A precisão, estabilidade e difusão numérica desta equação dependem da fórmula de interpolação usada.

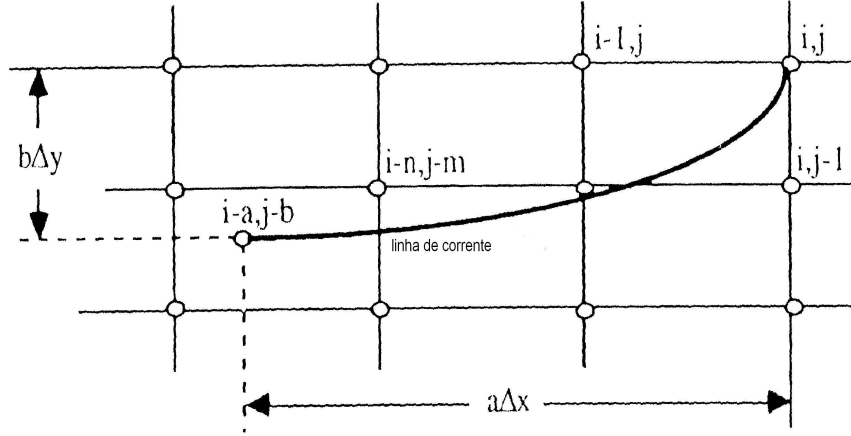


Figura 6.2 Malha Semi-Lagrangeana

Em Casulli et al [8], [9], [10] e Stanforth et al [60] são apresentadas várias formas de discretização para obter a e b . Os métodos Semi-Lagrangeanos usam uma interpolação de $c_{i-a, j-b}^k$ entre três ou mais pontos, conforme Temperton et al [62], Wilders et al [67]. Considerando o caso em que $c_{i-a, j-b}^k$ é aproximado por uma interpolação bilinear sobre os quatro pontos vizinhos na malha e que $a = n + p$, $b = m + q$, com n, m inteiros e $0 \leq p, q \leq 1$, tem-se

$$\begin{aligned} c_{i-a, j-b}^k &= (1-p) [(1-q)c_{i-n, j-m}^k + qc_{i-n, j-m-1}^k] \\ &+ p [(1-q)c_{i-n-1, j-m}^k + qc_{i-n-1, j-m-1}^k]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

No caso de $c_{i-a, j-b}^k$ ser aproximado por uma interpolação biquadrática sobre os nove pontos vizinhos na malha, tem-se

$$\begin{aligned} c_{i-a, j-b}^k &= \frac{1}{2}p(1+p) \left[\frac{1}{2}q(1+q)c_{i-n-1, j-m-1}^k + (1-q^2)c_{i-n-1, j-m}^k - \frac{1}{2}q(1-q)c_{i-n-1, j-m+1}^k \right] \\ &+ (1-p^2) \left[\frac{1}{2}q(1+q)c_{i-n, j-m-1}^k + (1-q^2)c_{i-n, j-m}^k - \frac{1}{2}q(1-q)c_{i-n, j-m+1}^k \right] \\ &- \frac{1}{2}p(1-p) \left[\frac{1}{2}q(1+q)c_{i-n+1, j-m-1}^k + (1-q^2)c_{i-n+1, j-m}^k - \frac{1}{2}q(1-q)c_{i-n+1, j-m+1}^k \right]. \end{aligned}$$

O método Semi-Lagrangeano aqui descrito, pode ser aplicado na discretização de uma equação não-linear, como por exemplo, as equações de momento. Neste caso, a determinação de a e b requer a resolução das equações diferenciais ordinárias (6.35), nas quais os termos à direita u e v são conhecidos unicamente no nível de tempo t_k . Portanto, é assumido que as mesmas não variam sobre um passo de tempo e, em cada ponto (i, j) da malha, as equações (6.35) podem ser integradas numericamente retrocedendo no tempo, de t_{k+1} a t_k usando o método de Euler. Assim, Δt é dividido em N partes iguais de comprimento $\tau = \Delta t/N$ e as equações (6.35) são discretizadas na forma descendente por

$$x^{s-1} = x^s - \tau u^k(x^s, y^s), \quad x^N = x_i,$$

$$y^{s-1} = y^s - \tau v^k(x^s, y^s), \quad y^N = y_j,$$

com $s = N, N-1, N-2, \dots, 2, 1$. As velocidades $u^k(x^s, y^s)$ e $v^k(x^s, y^s)$ são interpoladas com uma fórmula similar a (6.38), pois (x^s, y^s) não é um ponto da malha. Logo, em (x_i, y_j) , a e b são definidos por

$$a = \frac{x_i - x^0}{\Delta x} \quad \text{e} \quad b = \frac{y_j - y^0}{\Delta y}. \quad (6.39)$$

Deste modo, as linhas de corrente, as quais em geral não são linhas retas, são melhor aproximadas.

A precisão, a estabilidade, a difusão numérica e as falsas oscilações dependem da fórmula de interpolação escolhida. Se for utilizada uma interpolação linear, obtém-se um método de primeira ordem, livre de oscilações e a difusão numérica pode ser controlada reduzindo o incremento espacial ou aumentando o passo de tempo. Porém, se uma interpolação biquadrática for utilizada, a aproximação será de segunda ordem, livre de difusão numérica e o efeito global das falsas oscilações pode ser controlado aumentando o passo de tempo, segundo Casulli [10].

A condição de estabilidade do esquema Semi-Lagrangeano explícito (6.36) e (6.38) pode ser obtida pela análise de *von Neumann* sob a hipótese que a equação diferencial governante (6.33) seja linear, com coeficientes constantes e definida em um domínio infinito ou com condições de contorno periódicas em um domínio finito. Em Casulli [9] é demonstrado que para a estabilidade deste método, o passo de tempo Δt deve satisfazer a desigualdade

$$\Delta t \leq \left[2\nu_H \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right]^{-1}, \quad (6.40)$$

o que permite escolher um passo de tempo maior (sem perda da precisão), tornando o método Semi-Lagrangeano mais atrativo em comparação com métodos Eulerianos.

Por outro lado, observa-se que com a restrição (6.40) satisfeita, o lado direito da equação (6.37) pode ser vista como uma média ponderada entre zero e valores de c no tempo t^k . Além disso, este método, embora explícito, se torna incondicionalmente estável para equações de advecção pura ($\nu_H = 0$) e nenhuma condição adicional é necessária para a estabilidade, devido a condição (6.40) ser idêntica a condição (6.25), como foi observado na seção anterior.

OBSERVAÇÃO

Embora a desigualdade (6.40) sobre Δt seja suficiente para assegurar a estabilidade do método, para a precisão será imposta uma limitação em τ . Especificamente, em cada passo de tempo t_k , a subdivisão do tempo será tomada suficientemente pequena de modo que os números de Courant correspondentes não excedam a unidade, conforme Casulli [10]. Isto é,

$$\tau \leq \min \left[\frac{\Delta x}{\max_{i,j} |u_{i+\frac{1}{2},j}^k|}, \frac{\Delta y}{\max_{i,j} |v_{i,j+\frac{1}{2}}^k|} \right].$$

Assim, com a discretização semi-lagrangeana definida acima, o termo $Fu_{i+\frac{1}{2},j,k}^n$ na equação (6.9) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
Fu_{i+\frac{1}{2},j,k}^n &= u_{i+\frac{1}{2}-a,j-b,k-d}^n \\
&+ \nu_H \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+\frac{3}{2}-a,j-b,k-d}^n - 2u_{i+\frac{1}{2}-a,j-b,k-d}^n + u_{i-\frac{1}{2}-a,j-b,k-d}^n) \\
&+ \nu_H \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{i+\frac{1}{2}-a,j-b+1,k-d}^n - 2u_{i+\frac{1}{2}-a,j-b,k-d}^n + u_{i+\frac{1}{2}-a,j-b-1,k-d}^n) \\
&+ fv_{i+\frac{1}{2}-a,j-b,k-d}^n.
\end{aligned}$$

Analogamente, para $Fv_{i,j+\frac{1}{2},k}^n$ na equação (6.10), obtém-se

$$\begin{aligned}
Fv_{i,j+\frac{1}{2},k}^n &= v_{i-a,j+\frac{1}{2}-b,k-d}^n \\
&+ \nu_H \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{i-a+1,j+\frac{1}{2}-b,k-d}^n - 2v_{i-a,j+\frac{1}{2}-b,k-d}^n + v_{i-a-1,j+\frac{1}{2}-b,k-d}^n) \\
&+ \nu_H \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (v_{i-a,j+\frac{3}{2}-b,k-d}^n - 2v_{i-a,j+\frac{1}{2}-b,k-d}^n + v_{i-a,j-\frac{1}{2}-b,k-d}^n) \\
&- fv_{i-a,j+\frac{1}{2}-b,k-d}^n
\end{aligned}$$

onde as velocidades u e v são aproximadas por interpolação linear.

6.4 Discretização do Modelo de Transporte

Para o processo de simulação do modelo de transporte, representado pelas equações de transporte de calor (5.6) e salinidade (5.7), será considerada somente a segunda equação, dada por

$$\frac{Ds}{Dt} = \epsilon_H \nabla_H^2 s + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_V \frac{\partial s}{\partial z} \right). \quad (6.41)$$

Segundo Sladkevich [57], os gradientes na direção horizontal são muito menores que aqueles na direção vertical e, portanto estes termos podem ser desprezados ou discretizados explicitamente. Assim, a equação (6.41) será discretizada pelos métodos Semi-Lagrangeano para os termos advectivos; diferenças finitas explícitas para os termos de difusão horizontal e θ -diferenças finitas implícitas para o termo de difusão vertical.

$$s_{i,j,k}^{n+1} = F s_{i,j,k}^n + \Delta t \frac{\epsilon_{k+\frac{1}{2}} \frac{s_{i,j,k+1}^{n+1} - s_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k+\frac{1}{2}}} - \epsilon_{k-\frac{1}{2}} \frac{s_{i,j,k}^{n+1} - s_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k-\frac{1}{2}}}}{\Delta z_{i,j,k}}$$

onde F é um operador de diferenças finitas explícito e não-linear, que inclui a discretização dos termos advectivos e difusivos horizontais. Aqui, será usado o método Semi-Lagrangeano. Observe-se que a discretização é semelhante a realizada nas equações de momento. Portanto, a equação (6.41) tem a restrição de estabilidade dada por

$$\Delta t \leq \left[2\epsilon_H \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right]^{-1}. \quad (6.42)$$

Na ausência de difusão, obtém-se uma equação de advecção e não existirá restrição em Δt , e o único critério de escolha será o critério de precisão. Ainda, segundo Sladkevich [57] pode-se considerar $\epsilon_V = 0.9\nu_V$.

7 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo serão realizadas algumas simulações numéricas para variadas situações e geometrias, usando os métodos numéricos descritos no capítulo anterior. Inicialmente, serão consideradas simulações para o modelo hidrodinâmico e após, para o modelo de transporte.

7.1 Modelo Hidrodinâmico

7.1.1 Baía Fechada com profundidade constante - 2D

A equação de Klein-Gordon forçada ou águas rasas forçada, resolvida simbolicamente no Maple para as equações linearizadas, agora é implementada no Fortran para o caso não-linear. Os parâmetros utilizados são os mesmos do caso linear: $\rho=1035kg/m^3$, $h=200m$, $f=10^{-4}/s$, $g=9.81m/s^2$. Além disso, considere-se condições iniciais nulas e condições de contorno de Dirichlet homogêneas e uma tensão devido a ação do vento da forma

$$\tau = \tau_1 \cos(\omega_1 x) \cos(\omega_2 y) e^{i\omega t}, \quad (7.1)$$

onde $\tau_1=1.0$, $L_x=10000km$, $L_y=5000km$, $\omega = 2\pi/86400$, $\omega_1 = 2\pi/L_x$ e $\omega_2 = 2\pi/L_y$. Tomando $\Delta x=\Delta y=5km$, $\Delta t=30min$ e considerando variações das tensões do vento nas duas direções, as partes real e imaginária de $\eta(t, x, y)$ são mostrados nas seguintes figuras para $t=24h$, sendo que a resposta não-linear é apresentada na primeira linha e a resposta linear nas duas últimas linhas.

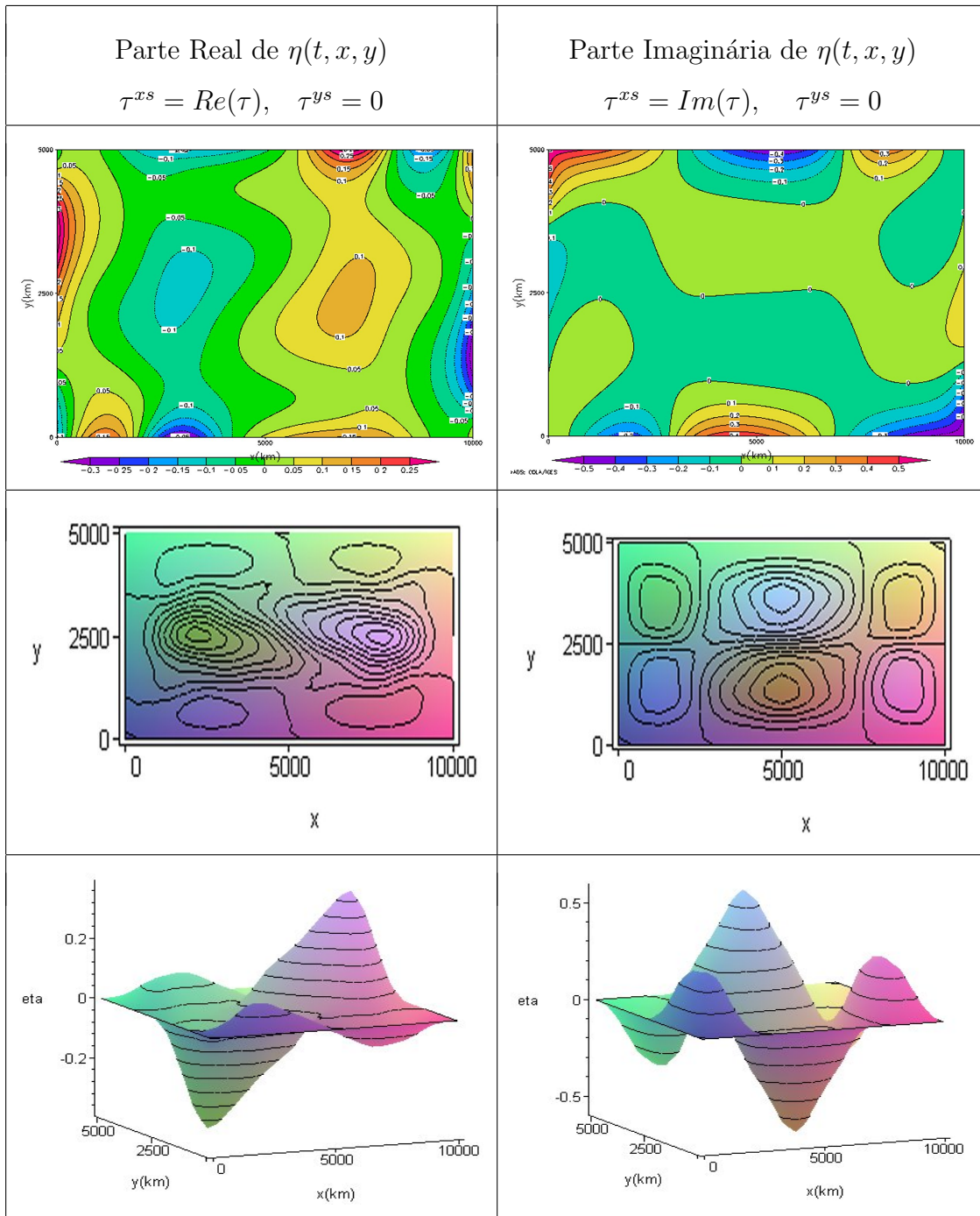


Figura 7.1 Elevação $\eta(t, x, y)$ em $t=24h$, com $\tau^{xs} = \tau$ e $\tau^{ys}=0$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.

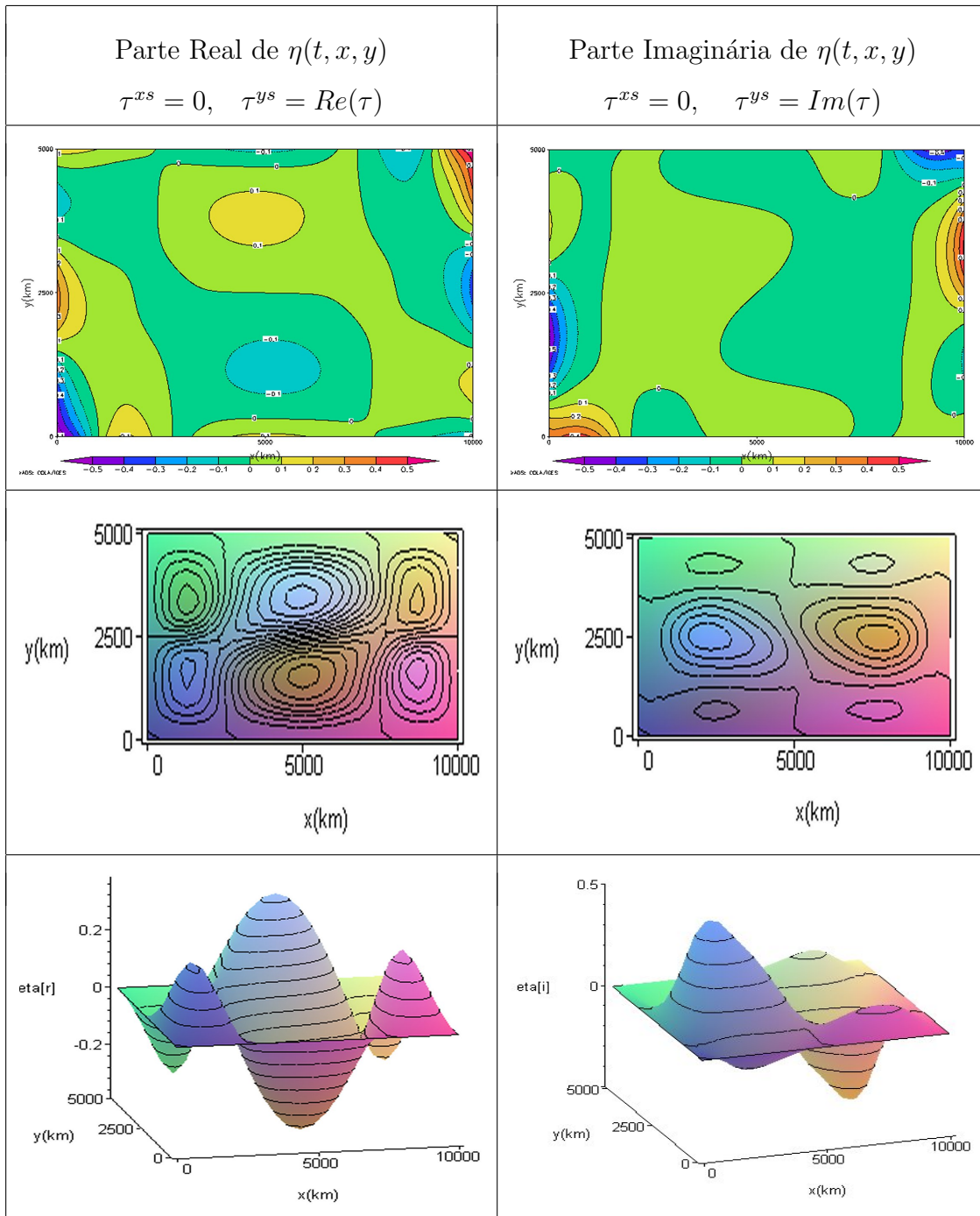


Figura 7.2 Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$ em $t=24h$, com $\tau^{xs}=0$ e $\tau^{ys} = \tau$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.

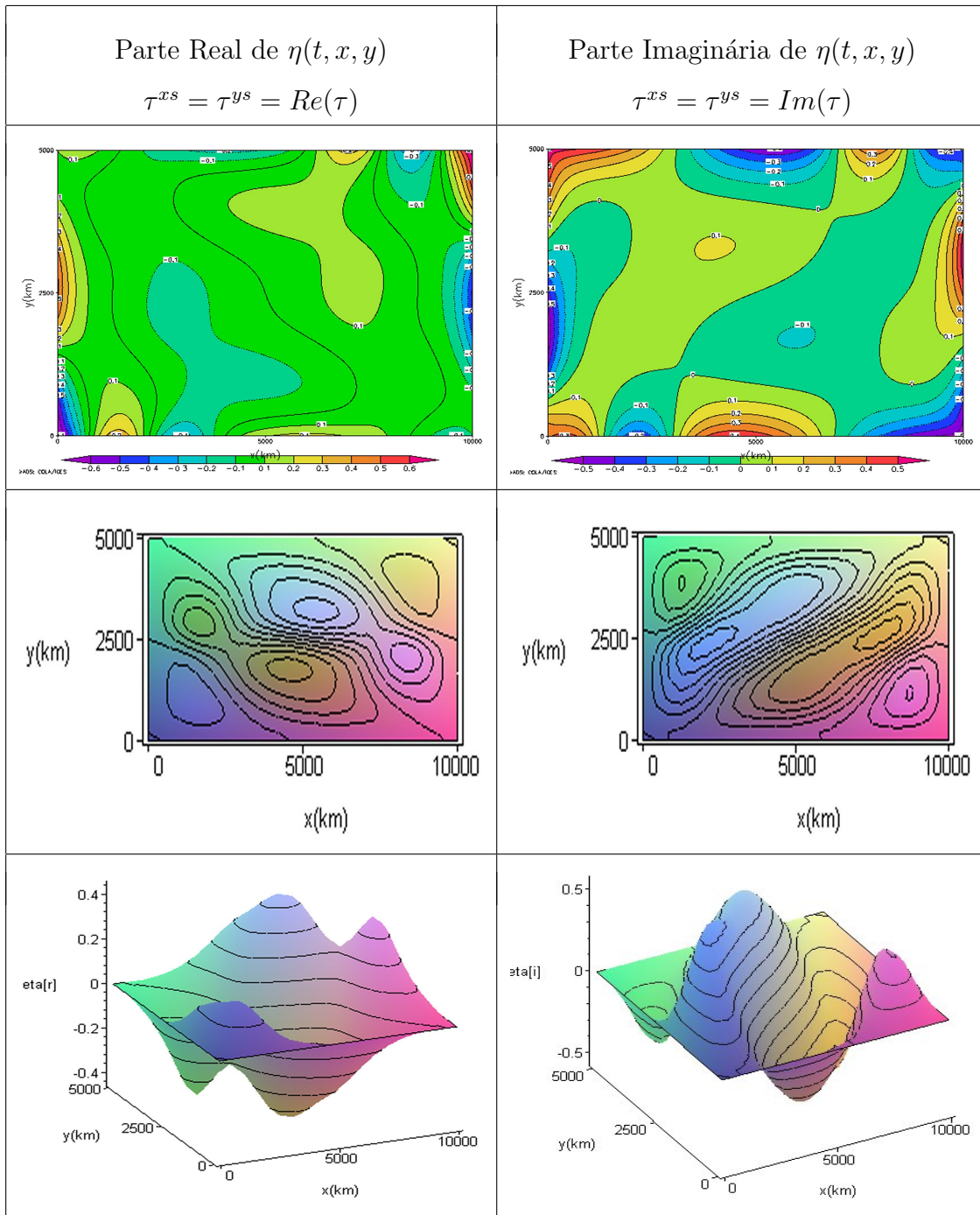


Figura 7.3 Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$ em $t=24h$, com $\tau^{xs} = \tau^{ys} = \tau$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.

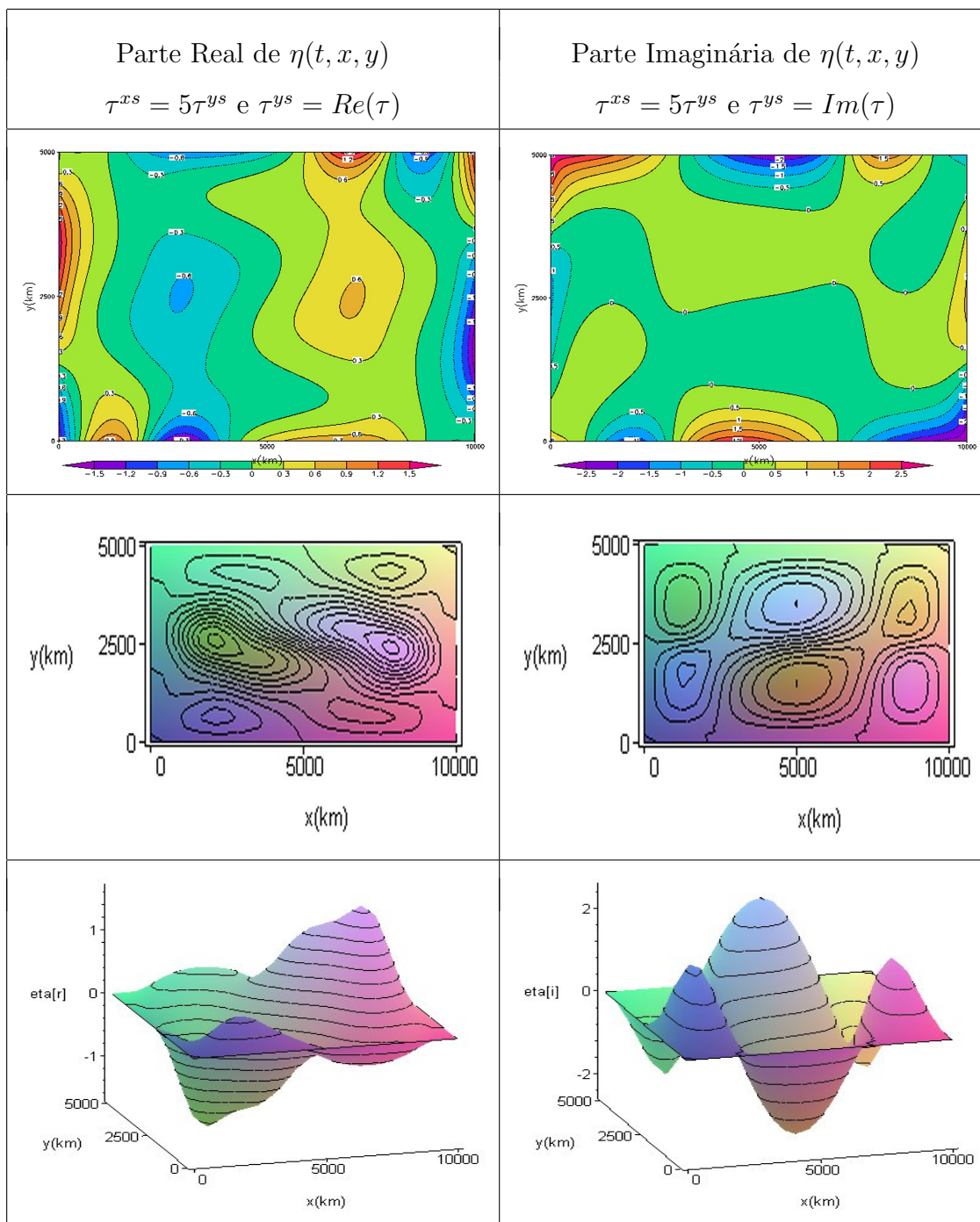


Figura 7.4 Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$ em $t=24h$, com $\tau^{xs} > \tau^{ys}$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.

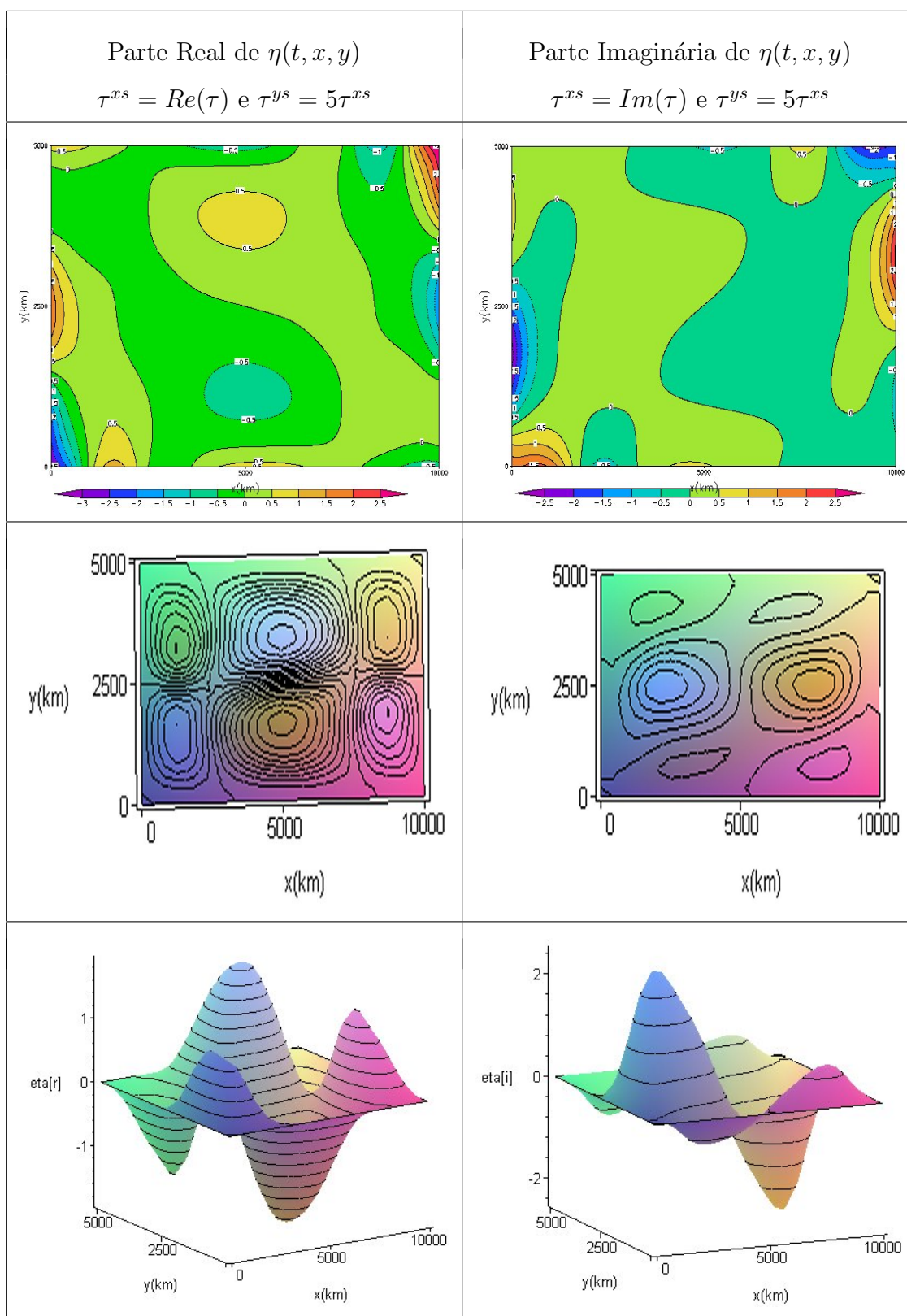


Figura 7.5 Resposta dinâmica $\eta(t, x, y)$ em $t=24\text{h}$, com $\tau^{xs} < \tau^{ys}$. Resposta não-linear na linha 1 e resposta linear nas linhas 2 e 3.

As simulações para o ajuste geostrófico sujeito aos efeitos do vento na superfície livre, utilizando as equações de águas rasas linearizadas e o modelo não-linear exibem uma concordância na amplitude da elevação da superfície livre e um certo deslocamento dos máximos e mínimos devido aos efeitos não-lineares das equações.

7.1.2 Baía Aberta com canal em forma de S - 2D

Este exemplo é apresentado em Benqué et al [3] e consiste de uma bacia retangular com três contornos fechados e um aberto, com um canal em forma de S. A bacia tem 7200m de comprimento por 3600m de largura, profundidade média de 6m e 13m no canal. É considerada uma malha de 26×14 pontos, com $\Delta x = \Delta y = 300$ m e no contorno aberto uma forçante do tipo senoidal com amplitude de 3m e período de 12hs. Os demais parâmetros para simulação são $\nu_H = 0$, $C_z = 53.8$, $\tau^{xs} = \tau^{ys} = 0$ e $f = 0$. Estudos realizados pelos autores usando um modelo numérico do tipo direções alternadas (ADI) propõem que o número de Courant C_r seja calculado pela expressão

$$C_r = \Delta t \sqrt{gH} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}. \quad (7.2)$$

A figura 7.6 compara a circulação em $t = 12$ hs usando o método ADI, o método implícito desenvolvido pelos autores e o método numérico apresentado neste trabalho, considerando um número de Courant $C_r = 95$ ($\Delta t = 30$ min).

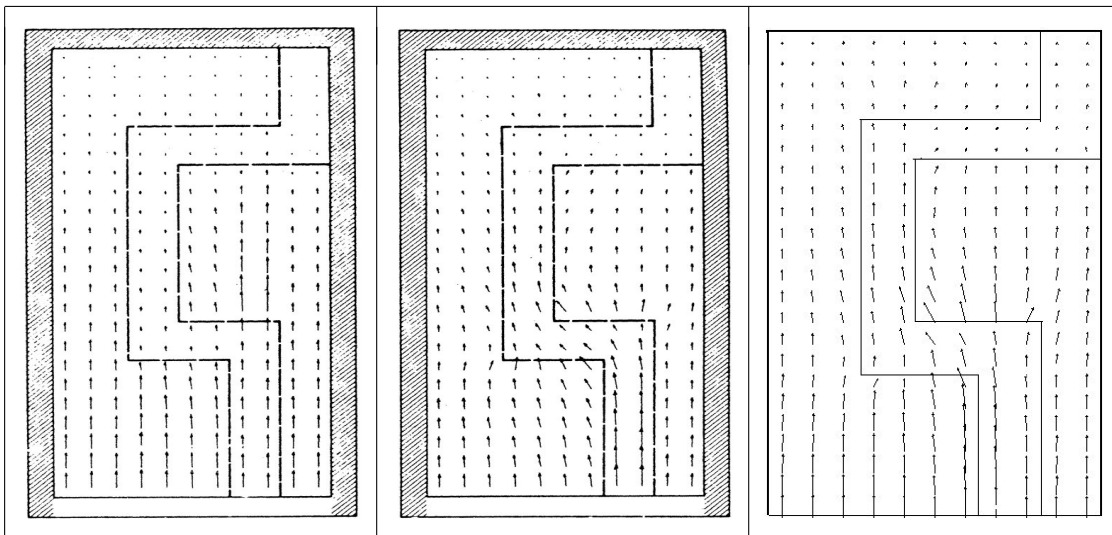


Figura 7.6 Circulação em $t=12\text{hs}$ pelos métodos (a) ADI, (b) Benqué e (c) Presente trabalho.

Na figuras 7.7 e 7.8 é mostrado um detalhe dos campos de velocidades obtidos em Benqué e neste trabalho, para $t=12\text{hs}$ e $t=18\text{hs}$, respectivamente.

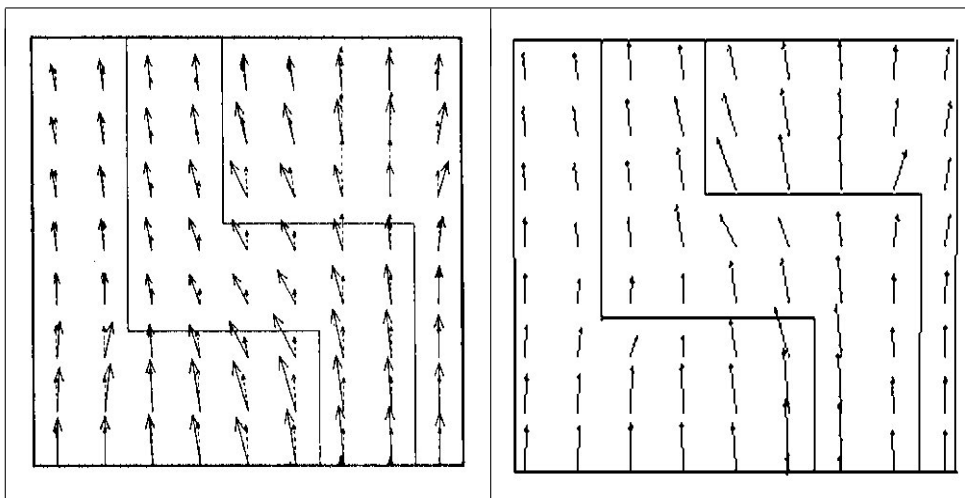


Figura 7.7 Circulação em $t=12\text{hs}$ pelos métodos (a) ADI e Benqué e (b) presente trabalho.

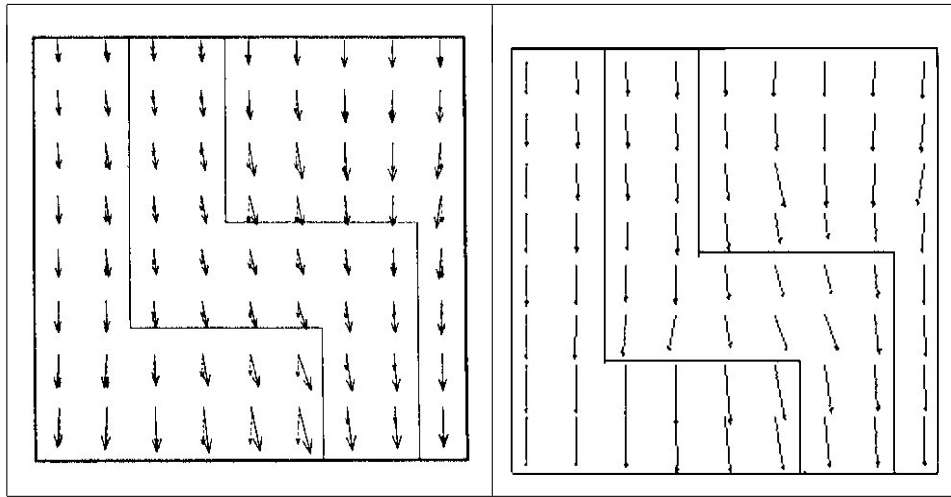


Figura 7.8 Circulação em $t=18\text{hs}$ pelos métodos (a) ADI e Benqué e (b) presente trabalho.

A concordância entre a batimetria e o campo de velocidades indica que o modelo hidrodinâmico "percebe" a presença do canal e portanto pode lidar satisfatoriamente com gradientes de profundidades importantes.

7.1.3 Baía de Guanabara - 3D

A Baía de Guanabara situa-se no Estado do Rio de Janeiro entre as cidades do Rio de Janeiro e Niterói e localiza-se entre as coordenadas $23^{\circ}1'$ e $22^{\circ}41' S$ e longitude 43° e $43^{\circ}3' W$, conforme a imagem Landsat de 10 de setembro de 2001 apresentada na figura 7.9(a) e obtida no Site [56]. A Baía apresenta uma superfície de 384km^2 , da qual 56km^2 é ocupada por ilhas. Seu perímetro é de 131km e possui o volume médio de água de $1,87 \times 10^9\text{m}^3$. Seu diâmetro Norte-Sul é de 26km e o eixo Leste-Oeste é de 28km , comunicando-se com o Oceano Atlântico por uma entrada de $1,6\text{km}$ de largura entre os Fortes de São João (lado Oeste) e a Fortaleza de Santa Cruz (lado leste).

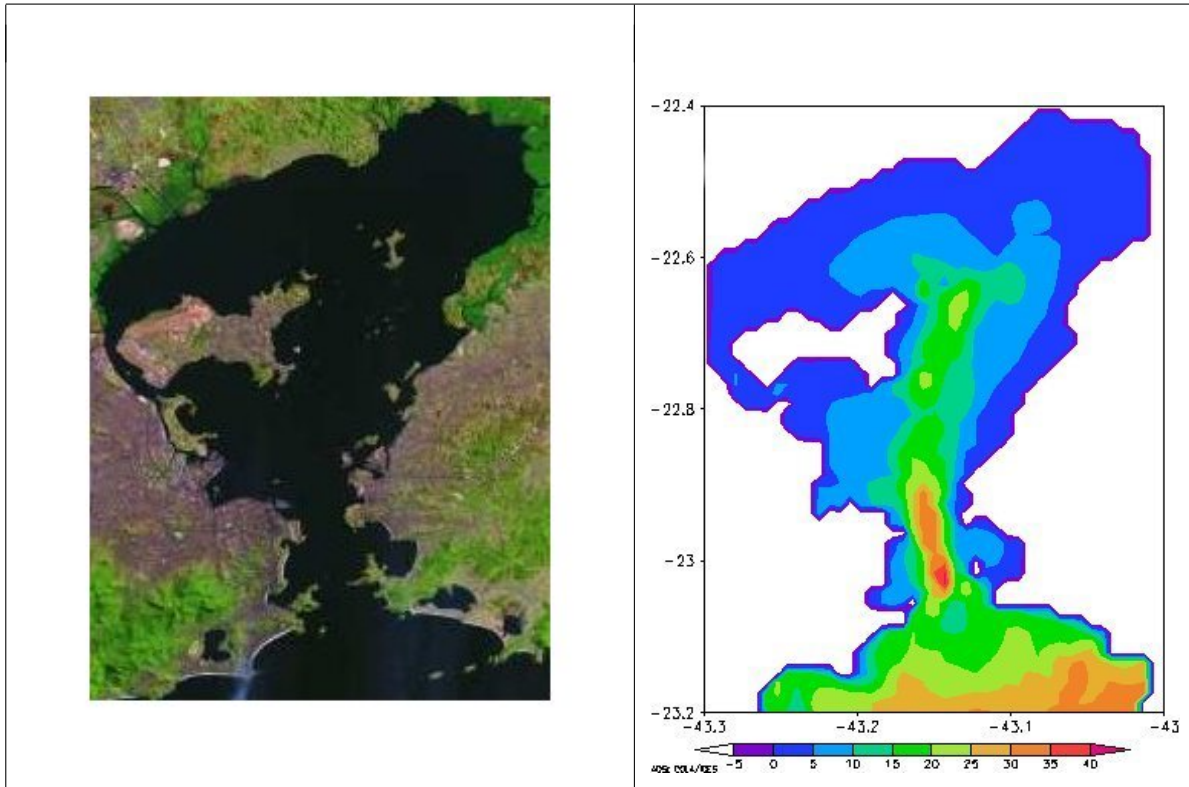


Figura 7.9 (a) Geometria e (b) Batimetria da Baía de Guanabara.

A Baía é circundada por uma cadeia de montanhas (Serra do Mar) e existem aproximadamente 35 rios significativos desaguando em suas águas. A média mensal de aporte de água doce é de $100m^3/s$, sendo maior durante o verão, principalmente em dezembro e janeiro ($186m^3/s$) e menor em julho ($33m^3/s$). A circulação na Baía pode ser considerada como uma composição da circulação gravitacional e residual de maré, modificada pelo vento dominante, sendo necessários em média 11,2 dias para renovar 50% do volume d'água, Carbonel [35]. Com base em sua estrutura física e circulação, a Baía de Guanabara é considerado um estuário de águas rasas. Na batimetria, figura 7.9(b), observa-se a delimitação de um canal de circulação principal que acompanha o eixo de maior profundidade.

No contorno sul da Baía é especificada a elevação $\eta(t) = 0.45\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, que corresponde a uma maré de amplitude 0.45m e período de 12h. No instante inicial, as massas estão em repouso. Os demais parâmetros são $\nu_H = 1.0$, $\nu_V = 0.01$, $C_z = 50$, $\tau^{xs} = \tau^{ys} = 0$ e $f = 0.0000553/\text{s}$ (latitude $22^\circ 50'$). Considerando uma malha $45 \times 62 \times 40$, onde $h_{mx} = 40$ é o número de camadas verticais, $\Delta x = \Delta y = 1200\text{m}$, $\Delta z = 1\text{m}$ e $\Delta t = 900\text{s}$, as figuras 7.10 e 7.11 representam o nível d'água η e o campo de velocidades na (a) superfície e (b) a 10m de profundidade para $t = 109\text{hs}$ (duas horas antes da maré alta no décimo ciclo) e $t = 115\text{hs}$ (duas horas antes da maré baixa no décimo ciclo), respectivamente.

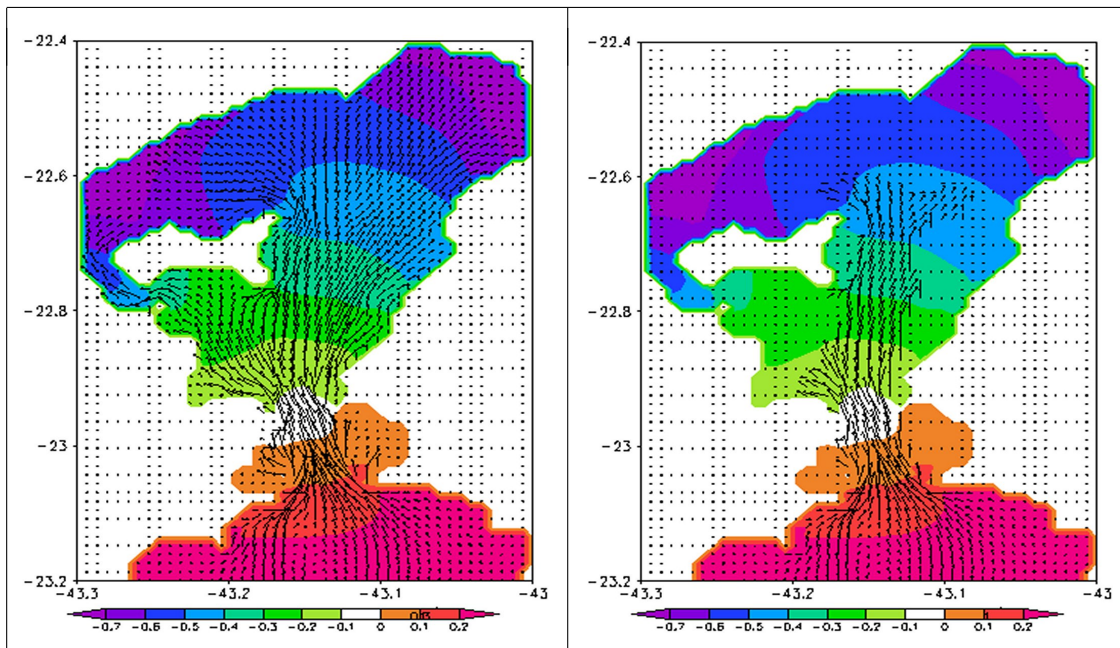


Figura 7.10 Nível d'água η e campo de velocidades em $t = 109\text{hs}$, (a) na superfície e (b) 10m de profundidade.

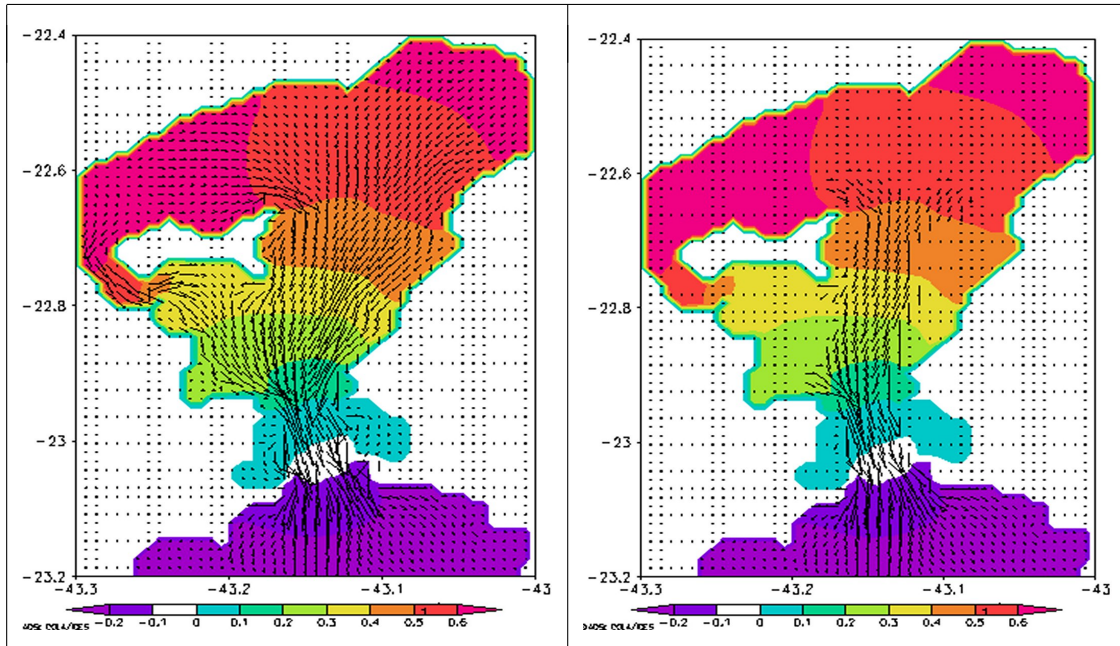


Figura 7.11 Nível d'água η e campo de velocidades em $t=115$ hs, (a) na superfície e (b) 10m de profundidade.

As diferenças para as componentes das velocidades horizontais u , v e velocidade vertical w , entre a superfície e 10m de profundidade para os instantes de tempo $t=109$ hs e $t=115$ hs são mostradas na figuras 7.12 e 7.13.

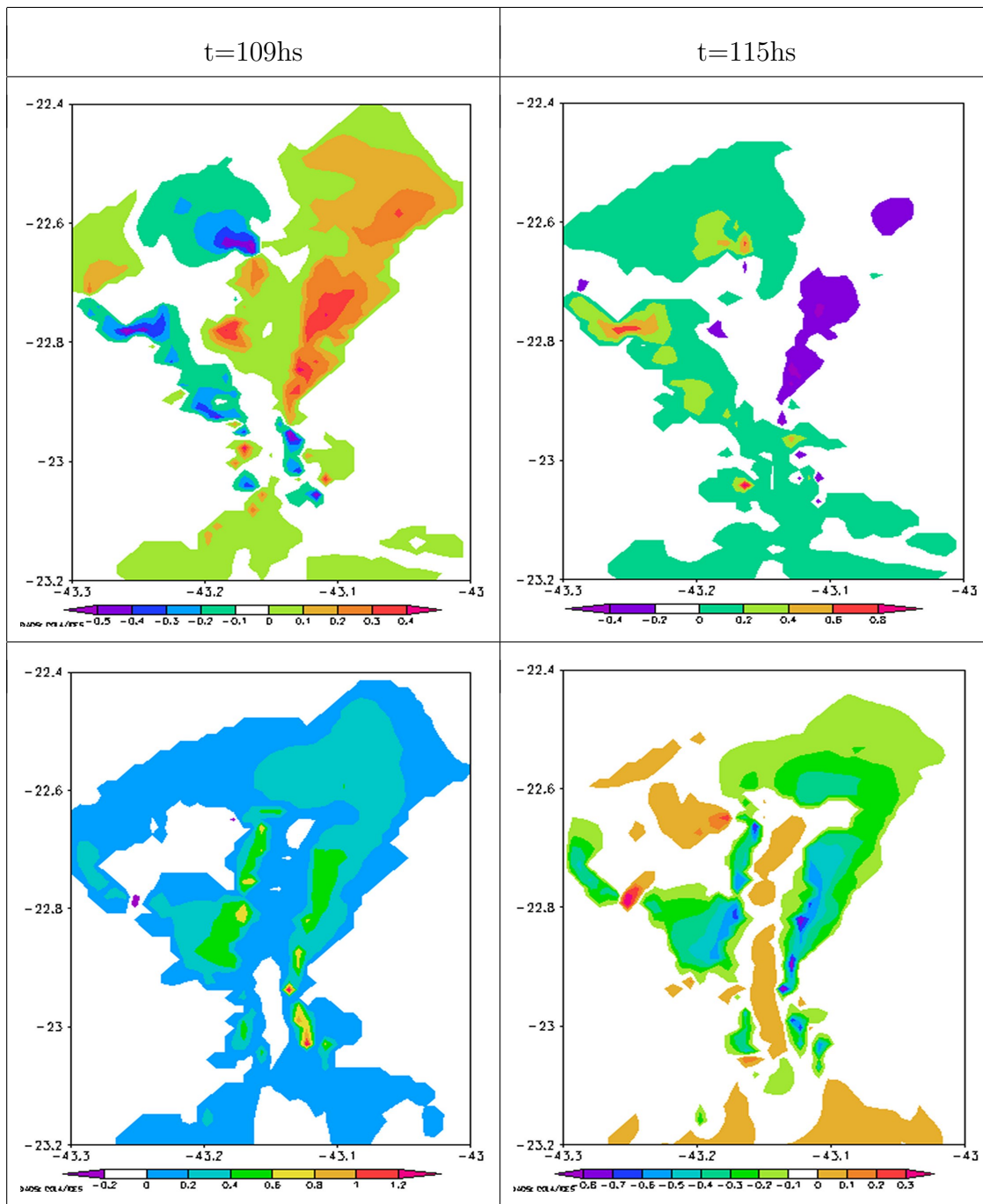


Figura 7.12 Diferenças das velocidades u e v entre a superfície e 10m de profundidade para os tempos $t=109$ hs e $t=115$ hs.

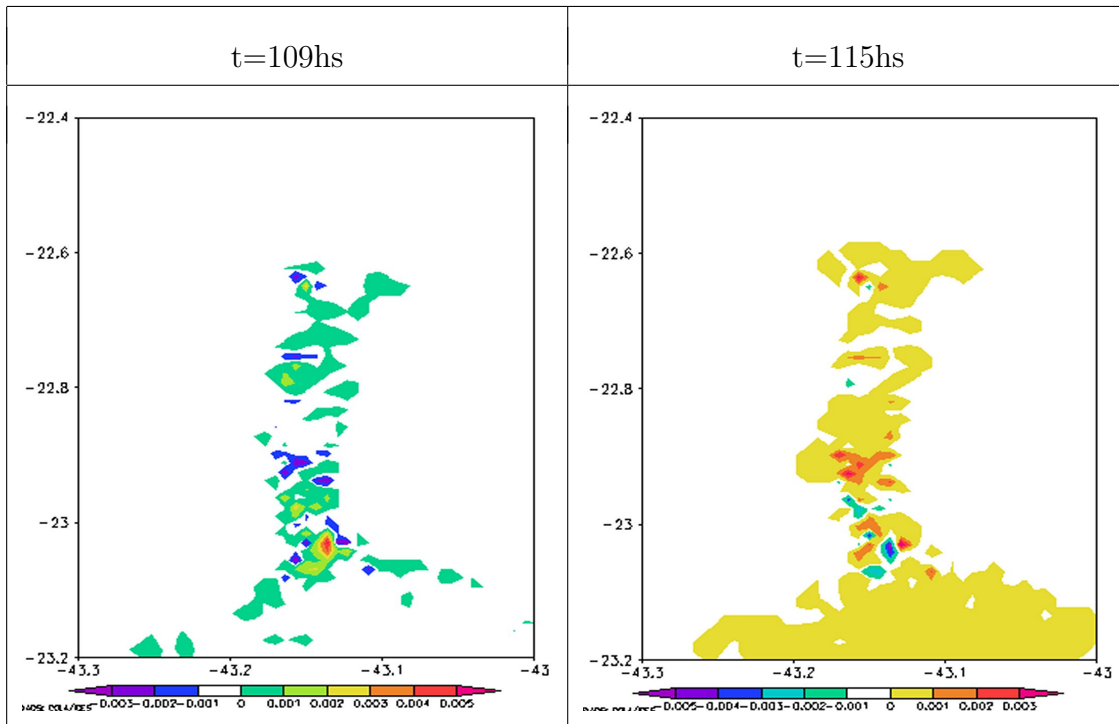


Figura 7.13 Diferenças da velocidade vertical w entre a superfície e 10m de profundidade para os tempos $t=109\text{hs}$ e $t=115\text{hs}$.

Os campos de velocidade superficial indicam, que no setor de ingresso e no canal central da baía, existe um fluxo e refluxo importante durante o período de maré. A 10m de profundidade o padrão de velocidade é similar à superfície. No canal de ingresso as velocidades são maiores na parte central em comparação às velocidades perto das costas laterais. Os padrões de velocidade e nível da superfície mostram tendências de circulação típica de baías.

7.1.4 Lagoa dos Patos - 3D

A Lagoa dos Patos, figura 7.14, considerada uma das maiores lagoas costeiras do mundo, está situada na Planície Costeira do Estado do Rio Grande do Sul entre as latitudes de $30^{\circ}23'30''$ e $32^{\circ}10'$ Sul e entre as longitudes de $50^{\circ}30'$ e

52°15' Oeste, e corresponde a um corpo d'água extenso (9800km^2) e extremamente raso (6m), pouco influenciado pela maré astronômica (0,45m). O sistema lagunar desenvolve-se de forma paralela a linha da costa, e encontra-se abrigado da intensa atividade das ondas do Oceano Atlântico por um sistema de barreiras arenosas. Entretanto, este ambiente é influenciado no setor sul pelas águas oceânicas, que ingressam ciclicamente através do canal de Rio Grande. O eixo principal tem aproximadamente 180km de comprimento, entre os Pontais de Itapuã e da Feitoria, o qual corresponde ao sistema lagunar; e aproximadamente 60km de comprimento, entre o Pontal da Feitoria e o canal de Rio Grande, o qual corresponde ao sistema estuarino, figura 7.15. Observa-se que a zona de mistura entre a água doce e a água salgada raramente ultrapassa esta região, que representa 10% da área total da laguna e as profundidades nessa região são muito variáveis, ressaltando-se que 80% da área tem profundidade inferior a 2m. As grandes dimensões da laguna, aliadas ao fato de ter ligação com o Oceano Atlântico, tornam este corpo d'água um recurso considerável que tem sido utilizado para navegação, irrigação, pesca, lazer, entre outras atividades. Esta laguna recebe as águas de uma bacia hidrográfica de 200.000 km^2 , onde estão situados 260 municípios e onde vive uma população de 7.000.000 de habitantes. As principais fontes de água da Lagoa são: na porção norte, a descarga do Rio Guaíba (tributários: Jacuí, Taquari, Sinos e Caí); na margem oeste, o Rio Camaquã; no estuário, o Canal de São Gonçalo, que liga a Lagoa com a Lagoa Mirim; e a água salgada que entra pelo Canal de Rio Grande. A ligação com o oceano é estabilizada, por meio de molhes, na Barra de Rio Grande, para permitir o acesso de navios de grande porte.

Análises desenvolvidas por Toldo Jr. [64], mostram que os ventos de NE são predominantes durante o ano todo, com velocidades médias de 3 a 5m/s, sendo mais frequentes nos meses de primavera e verão. Durante os meses de outono e inverno, os ventos de S e SO tem sua importância aumentada. Devido a sua extensa área e baixa profundidade, a Lagoa dos Patos muda prontamente seu padrão

hidrológico em função dos ventos, onde a magnitude do efeito está em relação direta com a força e duração do vento e com o estado do nível da lagoa.

Assim, a hidrodinâmica da Lagoa dos Patos está intimamente relacionada à ação de duas forçantes principais: o vento e a descarga fluvial dos rios que compõem a sua bacia hidrográfica.

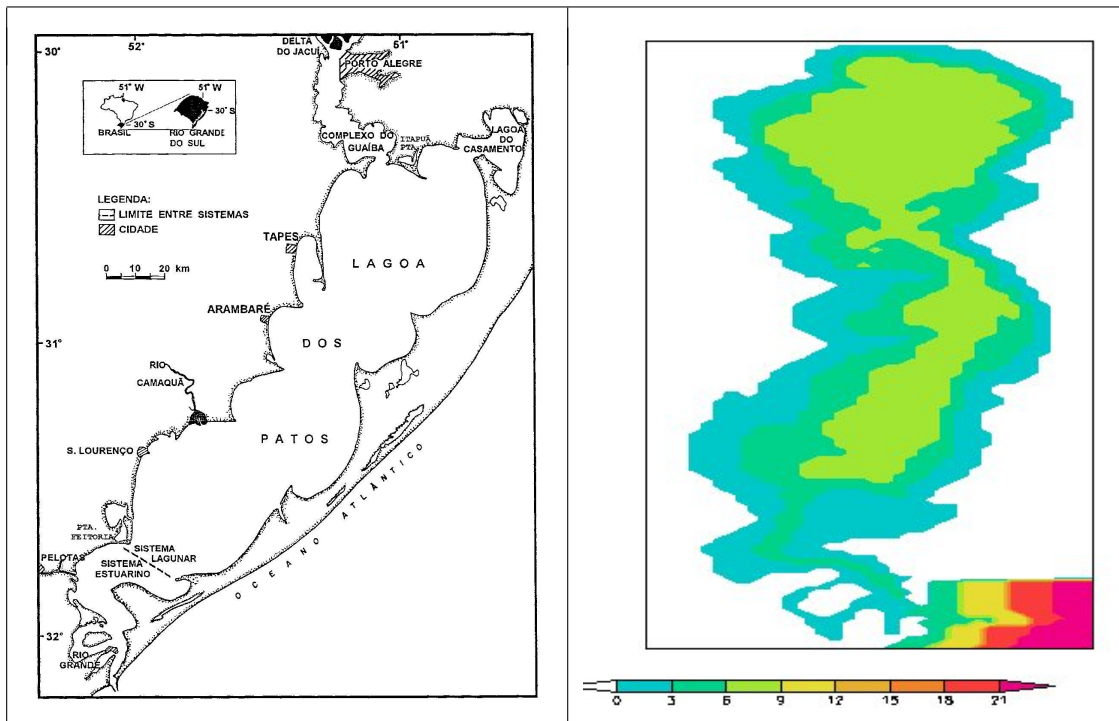


Figura 7.14 Geometria e Batimetria da Lagoa dos Patos.

Na seguinte figura é apresentada uma imagem do satélite Landsat TM e a região estuarina da Lagoa dos Patos.

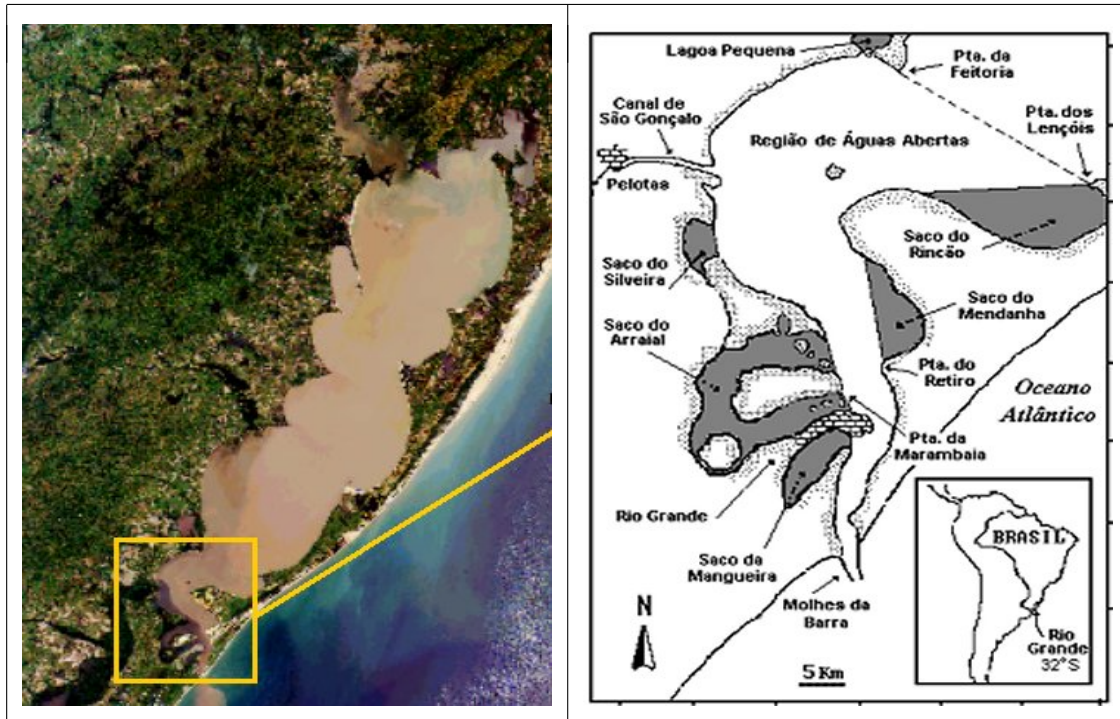


Figura 7.15 Imagem de Satélite e detalhe da região estuariana da Lagoa dos Patos. As áreas sombreadas correspondem a regiões de enseada da Lagoa.

Para as simulações numéricas, inicialmente as massas estão em repouso. Os demais parâmetros são $\nu_H = 200m^2/s$, $\nu_V = 0.0002m^2/s$, $C_z = 50$, e $f = 0.0000386/s$ (latitude 31°). Considerando uma malha $40 \times 120 \times 3$, onde $h_{mx} = 3$ é o número de camadas verticais, $\Delta x = \Delta y = 2000m$ e $\Delta t = 900s$, foram realizados dois experimentos com a tensão do vento $(\tau^{xs}, \tau^{ys}) = \rho_a |\mathbf{u}_a|(u_a, v_a)$, como forçante. No primeiro experimento as forçantes foram aplicadas ao modelo, considerando o canal de acesso à Lagoa dos Patos fechado (sem comunicação com o oceano), com vento nordeste e vento sudoeste de intensidade $5m/s$, cujos resultados são mostrados na figura 7.16.

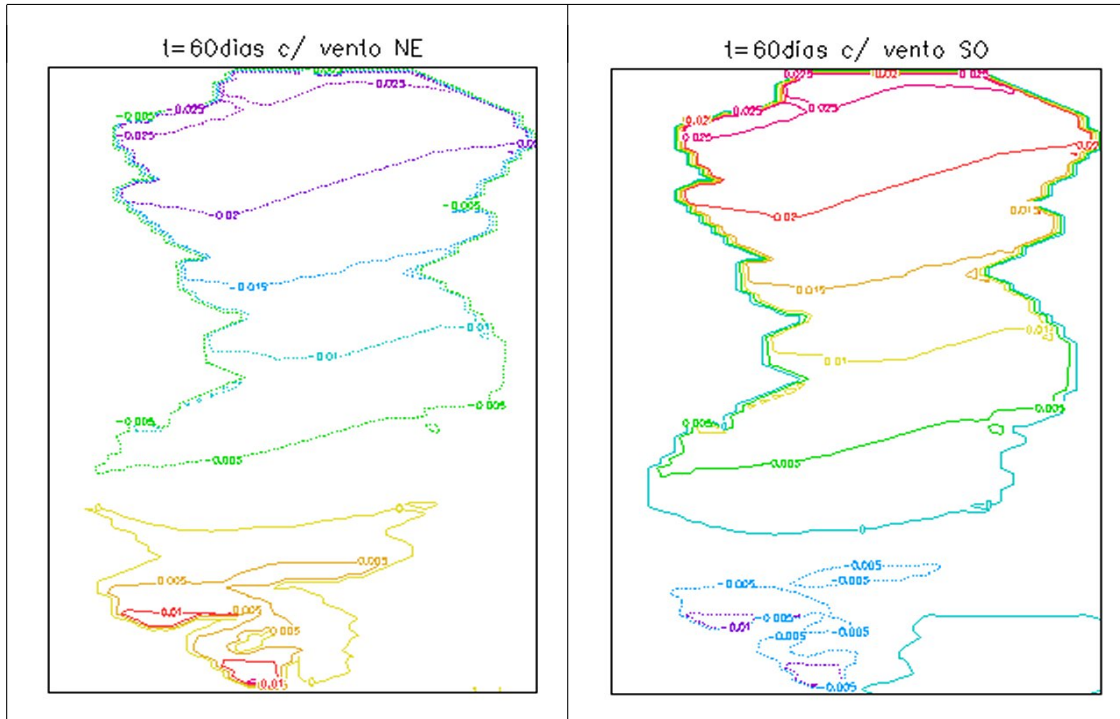


Figura 7.16 Elevação da superfície livre da Lagoa dos Patos em $t=60$ dias, com ventos NE e SO e o Canal de Rio Grande fechado.

O segundo experimento, considera o canal de acesso à Lagoa dos Patos aberto, onde foi especificada a maré $\eta(t) = 0.47\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$. Os resultados são mostrados na figura 7.17.

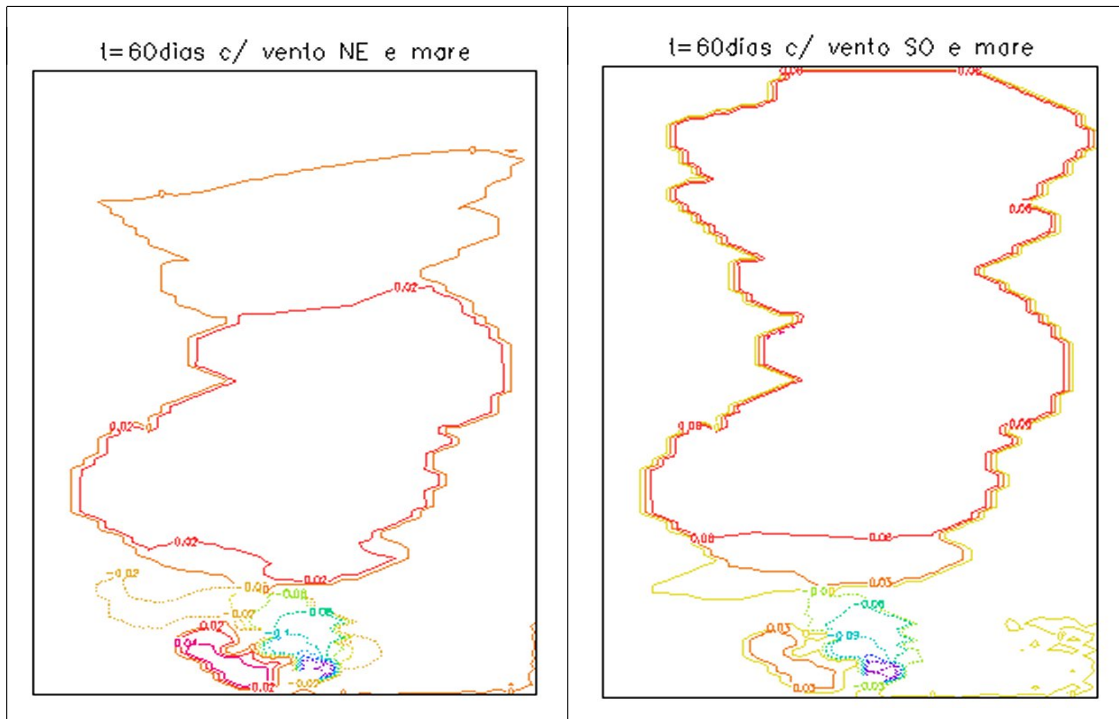


Figura 7.17 Elevação da superfície livre da Lagoa dos Patos em $t=60$ dias, com ventos NE e SO e o Canal de Rio Grande aberto.

7.2 Modelo de Transporte

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos de simulações para a equação de transporte da salinidade. Não serão apresentados exemplos que simulem o transporte de energia ou calor, devido ao fato das duas equações serem semelhantes, mudando somente as condições iniciais e de contorno.

7.2.1 Teste Teórico - 2D

Este exemplo resolve uma equação de advecção-difusão bidimensional não-conservativa para o transporte de salinidade, obtida de

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_o \frac{\partial s}{\partial x} + v_o \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\kappa_H}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial s}{\partial y} \right) \right].$$

Supondo H constante, esta equação se reduz a

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_o \frac{\partial s}{\partial x} + v_o \frac{\partial s}{\partial y} = \epsilon_H \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right). \quad (7.3)$$

A solução analítica da equação (7.3) para uma concentração de salinidade s_o é da forma

$$s(t, x, y) = \frac{s_o}{4\pi\epsilon_H t} \exp \left[-\frac{(x - u_o t)^2}{4\epsilon_H t} - \frac{(y - v_o t)^2}{4\epsilon_H t} \right] \quad (7.4)$$

Com o objetivo de validar a escolha do método de discretização Semi-Lagrangeano para os termos advectivos e θ -diferenças finitas ($\theta = 0$ explícito, $\theta = 1/2$ Crank-Nicolson e $\theta = 1$ implícito), para os termos difusivos, realizada na seção 6.4, foram feitas simulações para a equação (7.3) usando os métodos de diferença central, upwind e Semi-Lagrangeano, para a parte advectiva e variações do θ -diferenças finitas, para a parte difusiva. Observa-se que o espaçamento no tempo Δt , foi obtido a partir das restrições de estabilidade de cada esquema, apresentadas no apêndice A-1.4.

Assim, considerando um domínio $1500\text{m} \times 1200\text{m}$, com $\Delta x = 50\text{m}$, $\Delta y = 100\text{m}$, $\epsilon_H = 10\text{m}^2/\text{s}$, $u_o=0.2\text{m/s}$, $v_o=0$, obtém-se $\Delta t \leq 100\text{s}$ para diferença central e Semi-Lagrangeano e $\Delta t \leq 71\text{s}$ para upwind. Com $s_o=5 \times 10^4$, tempo inicial $t_o=400\text{s}$ e condições iniciais e de contorno fornecidas pela solução exata (7.4), têm-se na figura 7.18, os resultados da discretização dos termos advectivos por diferença central (ce), upwind (up) e Semi-Lagrangeano (la) e os termos difusivos pelo método

explícito (d1); na figura 7.19 os termos difusivos discretizados por Crank-Nicolson (d2); e na figura 7.20 pelo método implícito (d3), para $t=2000s$ e $y=450m$, na primeira coluna; para $x=675m$ e $y=450m$, na segunda coluna. Observe-se que o esquema Semi-Lagrangeano foi testado somente com a parte difusiva discretizada pelo método explícito (d1), em todos os gráficos.

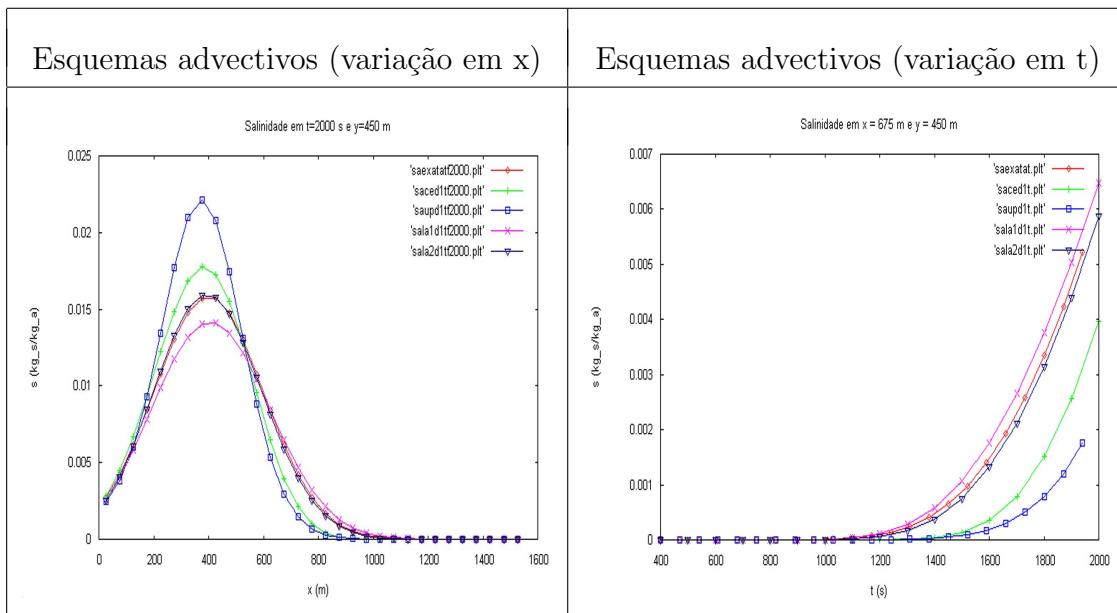


Figura 7.18 Comparação dos esquemas: (ce), (up) e (la) para advecção e diferenças finitas explícitas para a difusão.

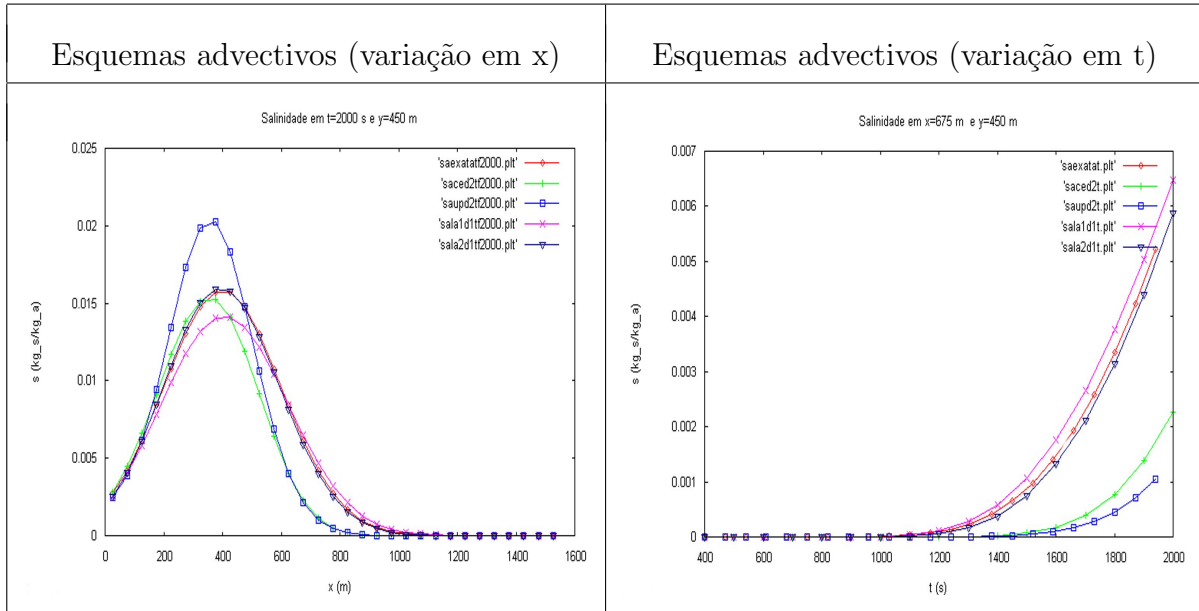


Figura 7.19 Comparação dos esquemas: (ce), (up) e (la) para advecção e Crank-Nicolson para difusão.

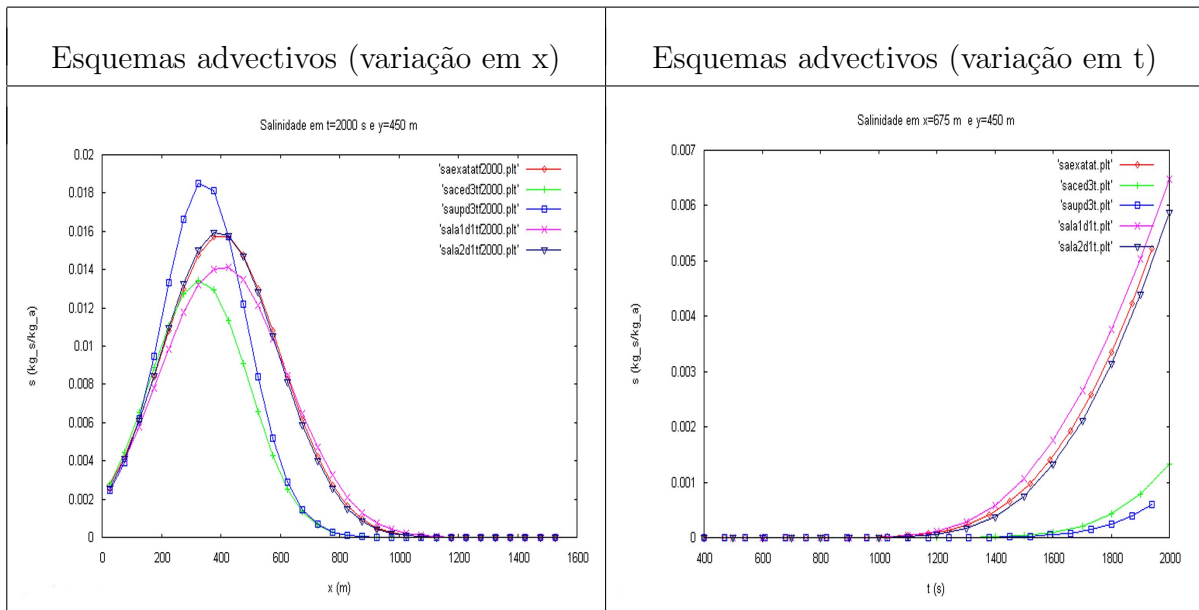


Figura 7.20 Comparação dos esquemas: (ce), (up) e (la) para advecção e diferenças finitas implícitas para difusão.

Na seguinte figura, são comparados os resultados da implementação Semi-Lagrangeana com a solução analítica, em $y=0$. Foi usada a interpolação bilinear e o método explícito para os termos de difusão. Observe-se que esta discretização simula satisfatoriamente a propagação da salinidade ao longo do tempo, onde ocorre um amortecimento da solução devido a existência de termos de difusão.

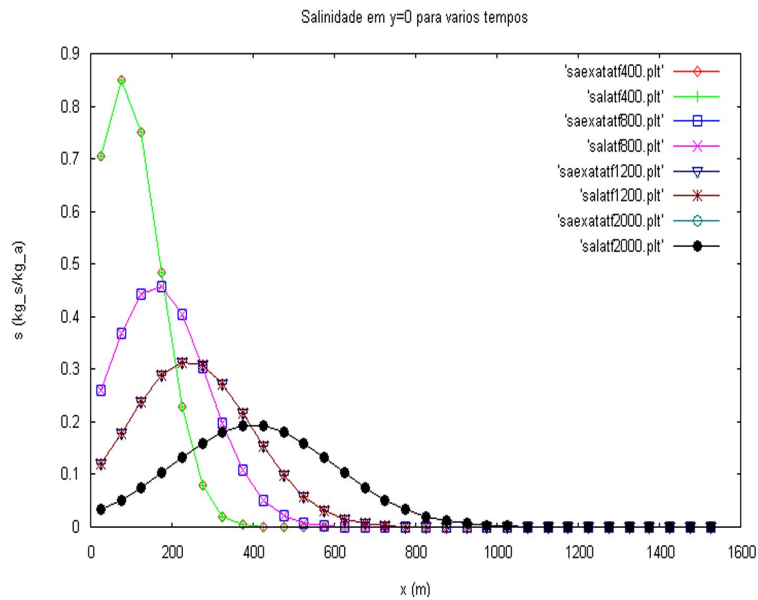


Figura 7.21 Método Semi-Lagrangeano para a equação de advecção-difusão em vários instantes de tempo.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi utilizada a função de Green de valor inicial ou resposta impulso no estudo do ajuste geostrófico e o método Semi-Lagrangeano na integração de um modelo acoplado oceano-atmosfera descrito pelas equações de águas rasas.

O uso da resposta impulso no ajuste geostrófico devido a perturbações na pressão e do vento foi considerado para sistemas com rotação. Foi salientado que a conservação da vorticidade potencial permite escolher a elevação correspondente a um estado de equilíbrio geostrófico. Com o desacoplamento do sistema de equações de águas rasas em equações de Klein-Gordon, o estudo foi reduzido a obtenção da resposta dinâmica para a elevação e componentes da velocidade. Nestas respostas, a parte forçada da elevação foi decomposta numa parte permanente, que satisfaz a equação de Helmholtz, e o transiente induzido foi identificado com o uso da base dinâmica gerada pela resposta impulso.

O método Semi-Lagrangeano mostrou-se eficiente na integração do modelo hidrodinâmico não-linear 3D introduzido por Casulli e governado por equações não-lineares de águas rasas. O acoplamento com um modelo de transporte para a salinidade, foi também integrado pelo mesmo método. Os testes computacionais realizados para os termos advectivos e difusivos com vários métodos de integração em diferenças, mostraram que o método Semi-Lagrangeano foi o que melhor desempenho numérico teve no cálculo da salinidade. Isto também foi observado no cálculo do campo de velocidades em comparação com resultados obtidos utilizando o métodos das direções alternadas. O método do gradiente conjugado preconditionado para a resolução da elevação apresentou-se muito eficiente.

As simulações para o ajuste geostrófico utilizando as equações de águas rasas linearizadas e o modelo não-linear exibem uma certa concordância na am-

plitude da elevação da superfície livre e um deslocamento dos máximos e mínimos devido aos efeitos não-lineares. Para propósitos computacionais, foi construída uma grade batimétrica que simula o contorno da Lagoa dos Patos e foram utilizados dados de vento com amplitude máxima e orientação nordeste ou sudoeste. Isto permitiu comparar o desempenho do método Semi-Lagrangeano com resultados já existentes na literatura.

Em relação a sugestões para trabalhos futuros, pode-se propor que sejam investigadas as seguintes questões: tratamento das equações de ajuste geostrófico com o uso de métodos perturbativos para problemas não-lineares, resposta impulso, função de transferência, Neta et al [48], e com a formulação dinâmica de Lagrange; estudo da estabilidade do método de discretização, considerando o termo de Coriolis; modificações no programa computacional com a possibilidade de considerar coeficientes de difusão variáveis nas equações e acréscimo do termo relativo ao gradiente da densidade nas equações de momento, conforme sugerido em Sladkevich et al [57] e Gross et al [30] e [31]; tratamento das equações de transporte na forma conservativa, como é sugerido em Gross [31] e [29], onde a equação de transporte advectiva é consistente com a equação da superfície livre; e a possibilidade de especificação de condições de Contorno de Neumann para a elevação, como sugerido em Gresho et al [27] e Claeysen et al [12].

Referências Bibliográficas

- [1] ARIS, R. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice-Hall, Canada, 1965.
- [2] AZÉRAD, P., AND GUILLÉN, F. Mathematical justification of hydrostatic approximation in the primitive equations of geophysical fluid dynamics. *SIAM J. Math. Anal.* 33, 4 (2001), 847–859.
- [3] BENQUÉ, J. P., CUNGE, J. A., HAUGHEL, A., AND HOLLY, F. M. New method for tidal current computation. *J. of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division* 108, WW3 (1982), 396–417.
- [4] BLEISTEIN, N. *Mathematical Methods of Wave Phenomena*. Academic Press, New York, 1984.
- [5] BLUMEN, W. Geostrophic adjustment. *Rev. Geophys. Space Phys.* 10, 2 (1972), 485–528.
- [6] BOUCHUT, F., SOMMER, J. L., AND ZEITLIN, V. Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. part 2. high-resolution numerical simulations. *J. Fluid Mech.* 514 (2004), 35–63.
- [7] CAHN, A. An investigation of the free oscillations of a simple current system. *J. Meteorol.* 2, 2 (1945), 113–119.
- [8] CASULLI, V., AND CATTANI, E. Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow. *Computers Math.* 27, 4 (1994), 99–112.
- [9] CASULLI, V., AND CHENG, R. T. Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 15 (1992), 629–648.

- [10] CASULLI, V. Eulerian-Lagrangian methods for hiperbolic and convection dominated parabolic problems. *Computational Methods for Non-Linear Problems*, C. Taylor and D.R.J. Owen and E. Hinton, Pineridge, Swansen (1987).
- [11] CASULLI, V. A semi-implicit difference method for non-hydrostatic, free-surface flows. *I. J. Numer. Meth. Fluids* 30 (1999), 425–440.
- [12] CLAEYSSSEN, J., ASENJO, E. B., AND RUBIO, O. E. Rotating incompressible flow with a Neumann condition for the pressure. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, (2005), Preprint.
- [13] CLAEYSSSEN, J., FERREIRA, I. M., AND COPETTI, R. D. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Appl. Numer. Math.* 47, (2003), 391–405.
- [14] CLAEYSSSEN, J., GALLICCHIO, E., AND TAMAGNA, A. *Sistemas Vibratórios Amortecidos*. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2004.
- [15] CLAEYSSSEN, J. On predicting the response of non-conservative vibrating systems by using dynamical matrix solutions. *Journal of Sound and Vibration* 139 (1990), 73–84.
- [16] DEBNATH, L. K. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and engineers*. Birkhauser, Boston, 1997.
- [17] DEWAR, W. K., AND KILLWORTH, P. D. Do fast gravity waves interact with geostrophic motions? *Deep-Sea Res.* 42, I (1995), 1063–1081.
- [18] DUFF, G. F. D., AND NAYLOR, D. *Differential Equations an Applied Mathematics*. John Wiley and Sons, 1966.
- [19] DUTTON, J. *The Ceaseless Wind: An Introduction to the Theory of Atmospheric Motion*. McGraw-Hill, New York, 1976.

- [20] FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.
- [21] GARIBOTTI, C. R., COSTA, S. N. J., CLAEYSSSEN, J. C. R., AND TSUKAZAN, T. Computing forced response with the dynamical basis. in: Viii workshop on partial differential equations. *VIII Workshop on Partial Differential Equations, IMPA, RJ* (2003).
- [22] GEL'FAND, I. M., SHILOV, G. E., FRIEDMAN, M. D., FEINSTEIN, A., AND PELTZER, C. P. *Generalized Functions: Spaces of Fundamental and Generalized Functions*. Academic Press, Orlando, 1968.
- [23] GILL, A. E. Adjustment under gravity in a rotating channel. *J. Fluid Mech.* 77, 3 (1976), 603–621.
- [24] GILL, A. E. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, New York, 1982.
- [25] GODUNOV, S. K. *Ecuaciones de la Física Matemática*. MIR, Moscou, 1984.
- [26] GRANGER, R. A. *Fluid Mechanics*. Dover, New York, 1995.
- [27] GRESHO, P., AND SANI, R. On pressure boundary conditions for the incompressible navier-stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 7, 10 (1987), 1111–1145.
- [28] GRIEBEL, M., DORNSEIFER, T., AND NEUNHOEFFER, T. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics*. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [29] GROSS, E. S., BONAVENTURA, L., AND ROSATTO, G. Consistency with continuity in conservative advection schemes for free-surface models. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 38 (2002), 307–327.

- [30] GROSS, E. S., KOSEFF, J. R., AND MONISMITH, S. G. Evaluation of advective schemes for estuarine salinity simulations. *J. Hydraulic Engrg.* 125, 1 (1999), 32–46.
- [31] GROSS, E. S., KOSEFF, J. R., AND MONISMITH, S. G. Three-dimensional salinity simulations of south san francisco bay. *J. Hydraulic Engrg.* 125, 11 (1999), 1199–1209.
- [32] HALL, C. A., AND PORSCHING, T. A. *Numerical Analysis of Partial Differential Equations*. Prentice-Hall, New York, 1990.
- [33] HINDMARSH, A. C., GRESHO, P. M., AND GRIFFITHS, D. F. The stability of explicit euler time-integration for certain finite difference approximations of the multi-dimensional advection-diffusion equation. *Int. J. Num. Meth. in Fluids* 4, 9 (1984), 853–897.
- [34] HOLTON, J. R. *An Introduction to Dynamics Meteorology*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [35] HUAMAN, C. A. A. C. Dinâmica e fenômenos de transporte não permanente na Baía de Guanabara e região externa. *Relatório de Projeto de Pesquisa, LNCC* (2003), 1–87.
- [36] JOHN, F. *Partial Differential Equations*. Springer, 1978.
- [37] KUO, A. C., AND POLVANI, L. M. Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment. *J. Phys. Oceanography* 27 (1997), 1614–1634.
- [38] LANDAU, L., AND LIFSHITZ, E. *Course of Theoretical Physics: Fluid Mechanics*, vol. 6. Butterworth-Heinemann, London, 1995.
- [39] LAVRENOV, I. *Wind-Waves in Oceans*. Springer, New York, 2003.
- [40] LIN, C. C., AND SEGEL, L. A. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. Macmillan, New York, 1974.

- [41] LIONS, J. L., AND DAUTRAY, R. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer, Berlin, 1983.
- [42] MAHADEVAN, A., OLIGER, J., AND STREET, R. A nonhydrostatic mesoscale ocean model. ii: Numerical implementation. *J. Phys. Oceanography* 26, 9 (1996), 1881–1900.
- [43] MAHADEVAN, A., OLIGER, J., AND STREET, R. A nonhydrostatic mesoscale ocean model. i: Well posedness and scaling. *J. Phys. Oceanography* 26, 9 (1996), 1868–1880.
- [44] MAIN, I. *Vibrations and Waves in Physics*. Cambridge Press, New York, 1978.
- [45] MAJDA, A. *Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean*. AMS, Courant Lecture Notes, Providence, 2000.
- [46] MILLER, K. S. *Linear Differential Equations in the Real Domain*. Routledge, London, 1963.
- [47] MORSE, P. M., AND FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [48] NETA, B., AND NAVON, I. M. The transfer function analysis of the turkelzwas scheme for the shallow water equations. *Supercomputer Computations Research Institute FSU-SCRI-87-30* (1987), 1–23.
- [49] OBUKHOV, A. M. On the problem of geostrophic wind. *Izv. Geogr. Geophys.* 13 (1949), 281–306.
- [50] POLYANIN, A. D. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman and Hall, New York, 2002.
- [51] REZNIK, G. M., ZEITLIN, V., AND JELLOUL, M. B. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. part 2. two-layer and continuously stratified primitive equations. *J. Fluid Mech.* 445 (2001), 93–120.

- [52] ROGERS, R. C., AND RENARDY, M. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1993.
- [53] ROSSBY, C. G. On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems. *J. Mar. Res.* 2 (1938), 239–263.
- [54] SCHOENDSTADT, A. L. The effect of spatial discretization on the steady-state and transient solutions of a dispersive wave equation. *J. Comp. Phys.* 23 (1977), 364–379.
- [55] SERRIN, I. *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics in Handbuch der Physik*, vol. 8. Springer, New York, 1959.
- [56] SITE: www.cdbrasil.cnpm.embrapa.br.
- [57] SLADKEVICH, M., MILITEEV, A. N., AND RUBIN, H. Simulation of transport phenomena in shallow aquatic environment. *J. Hydraulic. Engrg.* 126, 2 (2000), 123–136.
- [58] SOARES, I. *Dinâmica dos Oceanos*. FURG, Rio Grande, 2003.
- [59] STAKGOLD, I. *Green's functions and boundary value problems*. Wiley-Interscience, New York, 1998.
- [60] STANFORTH, A., AND CÔTÉ, J. Semi-lagrangian integration schemes for atmospheric models—a review. *Mon. Wea. Rev.* 119 (1991), 2206–2223.
- [61] STRIKWERDA, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Chapman and Hall, London, 1998.
- [62] TEMPERTON, C., AND STANFORTH, A. An efficient two-time-level semi-lagrangian semi-implicit integration scheme. *Q. J. Royal Met. Soc.* 113 (1987), 1025–1039.
- [63] TIJONOV, A. N., AND SAMARSKY, A. A. *Ecuaciones da la Física Matemática*. Editorial MIR, Moscou, 1980.

- [64] TOLDO-JR., E. E. *Sedimentação, Predição do padrão de ondas, e dinâmica sedimentar da antepraia e zona de surfe do sistema lagunar da Lagoa dos Patos, RS*. Tese de Doutorado, UFRGS/Geociências, Porto Alegre, 1994.
- [65] VREUGDENHIL, C. B. Computational fluid dynamics: Numerical methods for shallow water flow. *von Karman Institute for Fluid Dynamics* (1990).
- [66] WEIYAN, T. *Shallow Water Hydrodynamics: Mathematical Theory and Numerical Solution for a Two-dimensional System of Shallow Water Equations*. Elsevier, New York, 1992.
- [67] WILDERS, P., STELLING, G., STIJN, V., AND FOKKEMA, G. A fully implicit splitting method for accurate tidal computation. *Int. J. Numer. Meth. in Engrg.* 26, 12 (1988), 2707–2721.
- [68] ZEITLIN, V., MEDVEDEV, S. B., AND PLOUGONVEN, R. Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. part 1. theory. *J. Fluid Mech.* 481 (2003), 269–290.
- [69] ZEITLIN, V., REZNIK, G. M., AND JELLOUL, M. B. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. part 2. two-layer and continuously stratified primitive equations. *J. Fluid Mech.* 491 (2003), 207–228.

Apêndice A-1

A-1.1 Derivada Material D/Dt : Derivada de Stokes

Um conceito importante na teoria de mecânica de fluidos é o de *derivada material*, *substantiva* ou *total*. Considerando um elemento de fluido que se desloca com o escoamento entre dois pontos em um intervalo de tempo Δt , pode-se analisar como a densidade varia em função das coordenadas espaciais e temporal do elemento de fluido, Fortuna [20] e Granger [26]. No ponto 1, o elemento de fluido tem coordenadas espaciais (x_1, y_1, z_1) e temporal t_1 . No ponto 2, (x_2, y_2, z_2) e temporal t_2 . As densidades valem $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$.

Expandindo ρ_2 em série de Taylor (até termos de primeira ordem) em torno de ρ_1 , tem-se

$$\rho_2 \approx \rho_1 + (x_2 - x_1) \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_1 + (y_2 - y_1) \frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_1 + (z_2 - z_1) \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_1 + (t_2 - t_1) \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_1 .$$

Dividindo a expressão anterior por $t_2 - t_1$, resulta

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \approx \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_1 + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_1 + \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_1 + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_1 . \quad (\text{A-1.1})$$

O termo $\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1}$ indica que o lado direito da expressão (A-1.1) fornece a variação média da densidade do elemento de fluido entre os instantes 1 e 2. Considerando agora o limite $t_2 \rightarrow t_1$, a variação instantânea da densidade do elemento de fluido, conforme ele passa pelo ponto 1 será dada por

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt} .$$

No lado direito de (A-1.1), a aplicação do limite fornece

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u, \quad \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v, \quad \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = w$$

que são os valores das componentes da velocidade no ponto 1. Finalmente, no limite $t_2 \rightarrow t_1$, pode-se escrever

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho.$$

A dedução da derivada material utilizou a densidade do fluido, mas, na realidade, qualquer propriedade do fluido, como energia, velocidade, temperatura, pressão, poderia ter sido utilizada. Assim, no caso geral

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (\text{A-1.2})$$

A-1.2 Teorema de Transporte de Reynolds

Seja $F(t, \mathbf{x})$ uma função qualquer e $V(t)$ um volume fechado se movendo com o fluido; isto é, consistindo das mesmas partículas de fluido. Então

$$F(t) = \int_{V(t)} F(t, \mathbf{x}) dV \quad (\text{A-1.3})$$

é uma função de t que pode ser calculada. A derivada material de F , DF/Dt , pode ser obtida pelo *Teorema de Transporte de Reynolds*, demonstrado em Aris [1] e dada por

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} F(t, \mathbf{x}) dV = \int_{V(t)} \left(\frac{DF}{Dt} + F \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV. \quad (\text{A-1.4})$$

Agora, substituindo a definição de derivada material de F e adicionando os termos dos gradientes, a equação (A-1.4) satisfaz

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} F(t, \mathbf{x}) dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (F \mathbf{u}) \right) dV. \quad (\text{A-1.5})$$

Ainda, aplicando o teorema de Green à segunda integral, resulta

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} F(t, \mathbf{x}) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{S(t)} F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A-1.6})$$

onde $S(t)$ é a superfície de $V(t)$.

A-1.3 Conservação da Vorticidade Potencial para uma Camada Homogênea Rasa

As equações de momento bidimensionais de águas rasas para um fluido invíscido podem ser obtidas de (5.33) e (5.34) escrevendo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{A-1.7})$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (\text{A-1.8})$$

Utilizando a relação

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right)$$

na derivada material da velocidade, e a conservação de massa, após algumas manipulações, tem-se a equação

$$\frac{D\bar{\xi}}{Dt} = (\bar{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (\text{A-1.9})$$

A partir das equações (A-1.7) e (A-1.8), pode-se obter as equações de momento sem a variável η (isto é, sem p) por

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (f + \zeta)v = -\frac{\partial B}{\partial x}, \quad (\text{A-1.10})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (f + \zeta)u = -\frac{\partial B}{\partial y} \quad (\text{A-1.11})$$

onde ζ é a componente vertical da vorticidade relativa definida em (3.28) e B é a função de Bernoulli definida por

$$B = g\eta + \frac{1}{2}(u^2 + v^2). \quad (\text{A-1.12})$$

A equação para a componente vertical da vorticidade pode ser obtida eliminando B de (A-1.10) e (A-1.11), resultando

$$\frac{1}{(f + \zeta)} \frac{D}{Dt} (f + \zeta) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (\text{A-1.13})$$

Esta é a versão de águas rasas de (A-1.9) expressa em relação ao sistema de rotação ao invés do sistema fixo, e segue a partir daquela equação e do fato que as componentes horizontais da velocidade são independentes da profundidade e assim o vetor vorticidade é vertical.

Por outro lado, a equação para a superfície livre pode ser escrita como

$$\frac{1}{h + \eta} \frac{D(h + \eta)}{Dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (\text{A-1.14})$$

A subtração de (A-1.14) a partir de (A-1.13), elimina a divergência e resulta em

$$\frac{DQ}{Dt} = 0, \quad (\text{A-1.15})$$

onde

$$Q = (\zeta + f)/(h + \eta), \quad (\text{A-1.16})$$

é chamada vorticidade potencial para um movimento de águas rasas homogêneo e a equação (A-1.15) descreve a conservação da vorticidade potencial. Escrevendo

$$Q = \frac{1}{h}(\zeta + f) \left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{-1},$$

tem-se a forma linearizada (3.32).

A-1.4 Restrição da Estabilidade para os Métodos de Diferença Central, Upwind e Semi-lagrangeano

Para as simulações da equação de advecção-difusão, o espaçamento no tempo Δt foi escolhido de maneira a respeitar as restrições de estabilidade de cada esquema, apresentadas em Casulli et al [8] e Hindmarsh et al [33], a saber

- Diferença central:

$$\Delta t \leq \min \left[\left(2\epsilon_H \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right)^{-1}, \frac{2\epsilon_H}{U^2 + V^2} \right]$$

- Upwind:

$$\Delta t \leq \left[\frac{|U|}{\Delta x} + \frac{|V|}{\Delta y} + 2\epsilon_H \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right]^{-1}$$

- Semi-lagrangeano:

$$\Delta t \leq \left[2\epsilon_H \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right]^{-1}$$