

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Passeio Aleatório Quântico Em Um Ambiente Periódico**  
Dissertação de Mestrado

Thomas Michael Bartlett

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

**Porto Alegre, 9 de maio de 2013**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Passeio Aleatório Quântico Em Um Ambiente Periódico**  
Dissertação de Mestrado

Thomas Michael Bartlett

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática.

**Porto Alegre, 9 de maio de 2013**

Dissertação de Mestrado defendida por Thomas Michael Bartlett <sup>1</sup> e aprovada em 23 de abril de 2013 pela banca examinadora constituída por:

Professor Orientador:  
Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Banca examinadora:  
Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera (IM - UFRGS, ORIENTADOR)  
Prof. Dr. Carlos Felipe Lardizabal Rodrigues (IM - UFRGS)  
Profa. Dra. Sandra Denise Prado (IF - UFRGS)  
Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco (IM - UFBA)

---

<sup>1</sup>Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

## Resumo

O passeio aleatório quântico foi totalmente entendido por [3] e desde então muitos esforços foram feitos para compreender casos mais gerais como no passeio aleatório tradicional. Nós introduzimos o caso periódico e discutimos a heurística sendo considerada como uma partícula quântica difundindo em um cristal atômico linear. Assim, estendemos o teorema de Grimmett-Janson-Scudo [3] para este caso que é um método para obter a densidade de probabilidade limite do operador posição dependendo da diagonalização da matriz de evolução unitária e mostramos que o caso periódico é de fato balístico, [9]. Como um exemplo, é discutida a densidade probabilidade limite de período dois.

**Palavras-chave:** Passeio Aleatório Quântico; Ambiente Periódico; Método de Grimmett-Janson-Scudo.

### **Abstract**

The homogeneous quantum random walk was completely understood by [3] and since then many efforts were made to comprehend more general cases like in the traditional random walk. We introduce the periodic case and discuss a heuristic to be considered as a quantum particle diffusion in a atomic linear crystal. Thus, we extend the theorem of Grimmett-Janson-Scudo [3] to this case which is a method to obtain the limit of the probability density of the position operator depending on the diagonalization of the unitary evolution matrix and show that the periodic case is in fact ballistic, [9]. As an example, it is shown the limit probability density of the period two.

**Key-words:** Quantum Random Walk; Periodic Environment; Grimmett-Janson-Scudo Method.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>O passeio aleatório quântico em um ambiente periódico</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Teorema G-J-S para o caso periódico</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>O Período Dois</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>29</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O passeio aleatório quântico (QRW) pode ser entendido como uma partícula quântica presa a um cristal discreto de uma dimensão onde cada átomo do cristal altera o estado quântico. E esta ideia, que norteia a definição formal do passeio aleatório quântico, é semelhante à heurística do passeio aleatório clássico. Este é definido, de modo heurístico, como uma partícula presa a uma rede unidimensional, de tal modo que se ela estiver no sítio  $x \in \mathbb{Z}$ , então a probabilidade de ela dar um próximo passo à direita é  $p(x)$  e a probabilidade de que seja dado um passo para a esquerda é  $q(x) = 1 - p(x)$ . E para decidir o próximo passo procede-se da mesma forma. Assim, se o QRW encontra-se no sítio  $x \in \mathbb{Z}$  a chance de encontrá-lo no átomo à direita será determinada por uma matriz  $P(x)$  e a chance de encontrá-lo no átomo à esquerda pela matriz  $Q(x)$ . Semelhantemente ao passeio clássico, a relação matricial estabelecida é  $P(x) + Q(x) = A(x) \in U_2(\mathbb{C})$ , sendo  $U_2(\mathbb{C}^2)$  matrizes unitárias com coeficientes complexos. Assim, o QRW pode ser considerado uma quantização do famoso processo estocástico clássico, já que objetos que comutam entre si no mundo clássico, representados pelas funções  $p(x)$  e  $q(x)$ , são transformados em objetos que não necessariamente comutam no mundo quântico, representados pelos operadores  $P(x)$  e  $Q(x)$  e a função de probabilidade  $\mathbb{P}(x)$  do passeio clássico torna-se o estado quântico  $\Psi(x)$  com  $\|\Psi(x)\|^2$  sendo a probabilidade de encontrar a partícula em  $x \in \mathbb{Z}$ . E como uma teoria geral de quantização de sistemas clássicos ainda é um tanto obscura, o estudo do QRW foi motivado por ser um exemplo claro de uma possível quantização de um modelo probabilístico clássico e por ter uma solução relativamente fácil de ser demonstrada e entendida.

Esta monografia divide-se em quatro capítulos. O primeiro capítulo é a presente introdução ao QRW, o segundo contém a definição do passeio aleatório quântico em um ambiente periódico e a expressão matricial da sua evolução temporal unitária. O terceiro capítulo é a extensão do teorema de Grimmett-Janson-Scudo [3] para o ambiente periódico. Este teorema afirma que a distribuição da posição normalizada pelo tempo converge fracamente para uma distribuição bem determinada para tempos grandes. O quarto capítulo apresenta e demonstra a densidade de probabilidade limite do QRW num ambiente de período dois.

## Capítulo 2

# O passeio aleatório quântico em um ambiente periódico

Primeiramente, vamos considerar o passeio aleatório quântico nos inteiros  $\mathbb{Z}$ . Para cada tempo  $n \in \mathbb{N}$ , o estado da partícula é transformado por um operador unitário descrito por uma rotação dos graus de liberdade internos seguido por uma translação condicionada na posição. Estes graus de liberdade internos representam a moeda que no passeio aleatório tradicional determina a translação na posição. Dessa forma, a heurística do passeio aleatório quântico é uma partícula quântica distribuída nos sítios  $x \in \mathbb{Z}$  e em cada tempo  $n \in \mathbb{N}$  o estado quântico dos graus de liberdade internos da partícula  $\Psi_n(x)$  é transformado em cada sítio  $x \in \mathbb{Z}$  por uma transformação unitária  $A_x$  e uma parte do estado da partícula translada para a esquerda e uma parte para a direita conforme os graus de liberdade internos. Essa heurística norteará as definições que seguirão. Deste modo, o estado desse sistema quântico pertence ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_P$ , no qual  $\mathcal{H}_M$  está associado aos graus de liberdade internos e  $\mathcal{H}_P$  à posição. No nosso caso, vamos considerar  $\mathcal{H}_M = \mathbb{C}^2$  e  $\mathcal{H}_P = l^2(\mathbb{Z})$ . Uma base apropriada para  $\mathcal{H}_P$  é a base de autovetores do operador posição

$$Xv_x = xv_x \quad , \quad x \in \mathbb{Z}.$$

sujeito a  $\langle v_x, v_{x'} \rangle = \delta_{x,x'}$ , delta de Kronecker. Assim, um estado geral  $\Psi$  do sistema com respeito a essa base é

$$\Psi = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^2 \psi_j(x) v_x \otimes w_j \quad ,$$

com  $\{w_1, w_2\}$  sendo a base canônica do  $\mathcal{H}_M$ .

A rotação no grau de liberdade interno que participa da evolução temporal unitária  $U$  consiste em um operador unitário  $A$  que age em  $\mathcal{H}_M$ ,

$$A \Psi = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^2 \psi_j(x) v_x \otimes A_x w_j \quad , \quad \text{com } A_x = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix} \in U_2(\mathbb{C}).$$

Além da rotação, a translação condicionada na posição é definida por

$$S(v_x \otimes w_1) = v_{x+1} \otimes w_1 \quad \text{e} \quad S(v_x \otimes w_2) = v_{x-1} \otimes w_2.$$



Portanto, a evolução temporal unitária  $U$  torna-se

$$U\Psi = S \circ A\Psi = \sum_{x \in \mathbb{Z}} [(a_x \psi_1(x) + b_x \psi_2(x)) v_{x+1} \otimes w_1 + (c_x \psi_1(x) + d_x \psi_2(x)) v_{x-1} \otimes w_2].$$

De agora em diante, vamos representar o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_M$  na forma vetorial deixando a sua base e a de  $\mathcal{H}_P$  subentendida,

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{Z}} \quad \text{com } \psi_1, \psi_2 \in l^2(\mathbb{Z}).$$

Já a ação da evolução temporal fica, nessa representação,

$$(U\Psi)(x) = \begin{pmatrix} a_{x-1} \psi_1(x-1) + b_{x-1} \psi_2(x-1) \\ c_{x+1} \psi_1(x+1) + d_{x+1} \psi_2(x+1) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{Z}}.$$

Logo, dado um estado inicial  $\Psi_0 \in \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_P$ , o estado  $\Psi_n$  da partícula em um instante de tempo  $n \in \mathbb{N}$  é

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \Psi_n(-1) \\ \Psi_n(0) \\ \Psi_n(1) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \ddots & Q_{-1} & & & & \\ & & \ddots & 0 & Q_0 & & \\ & & & P_{-1} & 0 & Q_1 & \\ & & & & P_0 & 0 & \ddots \\ & & & & & P_1 & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \vdots \\ \Psi_0(-1) \\ \Psi_0(0) \\ \Psi_0(1) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, a evolução temporal do passeio aleatório quântico é semelhante a do passeio aleatório clássico em que a probabilidade de encontrar a partícula no sítio  $x \in \mathbb{Z}$  torna-se o estado quântico  $\Psi_n(x)$  e as funções  $p(x)$  e  $q(x)$  tornam-se matrizes  $2 \times 2$ ,  $Q(x)$  e  $P(x)$ . Contudo, não será no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_P = l^2(\mathbb{Z}) \times l^2(\mathbb{Z})$  que trabalharemos a partir de agora mas no espaço de Hilbert isomorfo  $L^2([-\pi, \pi]) \times L^2([-\pi, \pi])$ . E o isomorfismo isométrico entre estes dois espaços é a transformada de Fourier aplicada componente a componente,

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{Z}} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \psi_1(x) e^{ixk} \\ \sum_{x \in \mathbb{Z}} \psi_2(x) e^{ixk} \end{pmatrix},$$

com o isomorfismo inverso

$$\hat{\Psi}(k) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(k) \\ \hat{\psi}_2(k) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixk} \hat{\psi}_1(k) dk \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixk} \hat{\psi}_2(k) dk \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{Z}}.$$

Neste espaço, os operadores rotação  $A$  e de translação condicionada  $S$  tornam-se

$$\begin{aligned} (A\hat{\Psi})(k) &= \begin{pmatrix} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_x \psi_1(x) + b_x \psi_2(x)) e^{ixk} \\ \sum_{x \in \mathbb{Z}} (c_x \psi_1(x) + d_x \psi_2(x)) e^{ixk} \end{pmatrix} \\ \text{e } (S\hat{\Psi})(k) &= \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(k) \\ \hat{\psi}_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik} \hat{\psi}_1(k) \\ e^{-ik} \hat{\psi}_2(k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainda não colocamos nenhuma restrição nas matrizes  $A_x$  e isso faz com que o passeio aleatório quântico esteja em um ambiente qualquer. Então a fim de tornar o ambiente periódico com período  $N \in \mathbb{N}$  impomos a condição  $A_{xN+j} = A_j \in U_2(\mathbb{C})$  para todo  $x \in \mathbb{Z}$  e todo  $j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ . Isso significa que, na heurística do passeio quântico, em cada sítio  $xN+j \in \mathbb{Z}$  os graus de liberdade internos são transformados da mesma maneira que o  $j \in \mathbb{Z}$ . Por exemplo, se o período é 2, os graus de liberdade internos são transformados nos sítios 0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, ... pela mesma matriz unitária  $A_0$  e nos sítios 1, -1, 3, -3, 5, -5, ... pela mesma matriz unitária  $A_1$ .

Assim, se dividirmos  $\mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_P$  em seus  $N$  subespaços  $\mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_P = L^2([-\pi, \pi]) \times L^2([-\pi, \pi]) = H^{(0)} \times H^{(1)} \times \dots \times H^{(N-1)}$ , com  $H^{(j)} = \text{span}(\{e^{i(xN+j)k}, x \in \mathbb{Z}\}) \times \text{span}(\{e^{i(xN+j)k}, x \in \mathbb{Z}\})$ , um estado  $\hat{\Psi}$  é escrito como

$$\hat{\Psi}(k) = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}^{(0)}(k) \\ \hat{\Psi}^{(1)}(k) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}^{(N-1)}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1^{(0)}(k) \\ \hat{\psi}_2^{(0)}(k) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1^{(1)}(k) \\ \hat{\psi}_2^{(1)}(k) \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1^{(N-1)}(k) \\ \hat{\psi}_2^{(N-1)}(k) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a evolução temporal em cada  $H^{(j)}$  torna-se

$$(U\hat{\Psi}^{(j)})(k) = S(P_j + Q_j)\hat{\Psi}^{(j)}(k) = e^{ik}P_j\hat{\Psi}^{(j)}(k) + e^{-ik}Q_j\hat{\Psi}^{(j)}(k),$$

$$\text{com } P_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_j & d_j \end{pmatrix}.$$

Note que  $e^{ik}P_j\hat{\Psi}^{(j)}(k)$  e  $e^{-ik}Q_j\hat{\Psi}^{(j)}(k)$  não pertencem a  $H^{(j)}$ , mas a  $H^{(j+1)}$  e a  $H^{(j-1)}$  respectivamente. Então,

$$U : H^{(j)} \longrightarrow H^{(j+1)} \oplus H^{(j-1)}$$

$$\hat{\Psi}^{(j)}(k) \mapsto e^{ik}P_j\hat{\Psi}^{(j)}(k) + e^{-ik}Q_j\hat{\Psi}^{(j)}(k) \quad .$$

E o operador  $U_{2N \times 2N}$  pode ser escrito na forma matricial da seguinte forma:

$$U(k) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik}Q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{ik}P_{N-1} \\ e^{ik}P_0 & 0 & e^{-ik}Q_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik}P_1 & 0 & e^{-ik}Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik}P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & e^{-ik}Q_{N-1} \\ e^{-ik}Q_0 & 0 & 0 & \cdots & & e^{ik}P_{N-2} & 0 \end{pmatrix}$$

E a evolução temporal de  $\hat{\Psi}_0(k)$  no tempo  $n$  torna-se

$$\hat{\Psi}_n(k) = (U_{2N \times 2N}(k))^n \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_0^{(0)}(k) \\ \hat{\Psi}_0^{(1)}(k) \\ \hat{\Psi}_0^{(2)}(k) \\ \hat{\Psi}_0^{(3)}(k) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_0^{(N-2)}(k) \\ \hat{\Psi}_0^{(N-1)}(k) \end{pmatrix}.$$

## Capítulo 3

# Teorema G-J-S para o caso periódico

Nesse capítulo, vamos estender o Teorema de Grimmett-Janson-Scudo [3] para o caso periódico geral definido no capítulo anterior. Sejam  $\lambda_1(k), \lambda_2(k), \dots, \lambda_{2N}(k)$  os autovalores de  $U_{2N \times 2N}(k)$  e  $v_1(k), v_2(k), \dots, v_{2N}(k)$  os autovetores associados a eles.

**Proposição 1.** *Suponha que  $\lambda_i(k) \neq \lambda_j(k)$  para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, 2N\}$ ,  $i \neq j$ , e para todo  $k \in [-\pi, \pi)$ , então  $\lambda_j(k)$  e  $v_j(k)$  são funções  $C^\infty$  em  $k$ .*

*Demonstração.* Essa demonstração é baseada no teorema da função implícita. Seja  $p(k, \lambda)$  o polinômio característico de  $U(k)$ . Estamos interessados nas raízes  $\lambda(k)$  tais que  $p(k, \lambda(k)) = 0$ . Como  $\lambda_i(k) \neq \lambda_j(k) \forall i, j \forall k$ , temos que em um ponto  $k_0$ ,  $p(k_0, \lambda_0) = 0$ , o teorema da função implícita afirma que existe um intervalo  $I$  em torno de  $k_0$  e uma função  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $p(k, \lambda(k)) = 0$  e  $\lambda(k)$  é tão suave quanto  $p(k, \lambda)$  que é  $C^\infty$ . Os autovetores de  $U(k)$  são  $C^\infty$  porque são obtidos resolvendo  $U(k)v(k) = \lambda(k)v(k)$  e esse processo é  $C^\infty$ .  $\square$

Agora, a posição do QRW em um instante de tempo  $n$  será considerada como uma variável aleatória, i.e.,  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  com a probabilidade associada  $\mathbb{P}(\{X_n(\omega) = x\}) = \|\psi_n(x)\|_{l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)}^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} |(\psi_n)_1(x)|^2 + |(\psi_n)_2(x)|^2$  com  $\psi_n(x) = ((\psi_n)_1(x), (\psi_n)_2(x)) = U^n \psi_0(x)$  para cada  $n \geq 0$ .

Vamos calcular agora os momentos de  $X_n$  como um ponto chave do teorema. Desta forma,  $\mathbb{E}(X_n^r) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} x^r \mathbb{P}(\{X_n(\omega) = x\}) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} x^r \langle \psi_n(x), \psi_n(x) \rangle$  e usaremos o seguinte lema para este cálculo.

**Lema 1.** *Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  funções  $b - a$  periódicas então,  $\forall r \in \mathbb{N}$ , temos*

$$\int_a^b \left[ \frac{d^r}{dx^r} f(x) \right] g(x) dx = (-1)^r \int_a^b f(x) \left[ \frac{d^r}{dx^r} g(x) \right] dx$$

*Demonstração.* Temos que

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(a)g(a) - f(b)g(b) - \int_a^b f(x)g'(x)dx .$$

Como  $f$  e  $g$  são periódicas,  $f(a)g(a) = f(b)g(b)$ . Usando esta ideia para  $\frac{d^r}{dx^r} f(x)$  obtém-se o lema por indução em  $r$ .  $\square$

**Proposição 2.**

$$\mathbb{E}(X_n^r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle \hat{\psi}_n(k), \left( i \frac{d}{dk} \right)^r \hat{\psi}_n(k) \right\rangle dk .$$

*Demonstração.* Como o QRW foi introduzido no espaço de Fourier, os momentos serão calculados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_n(k) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{ikx} \psi_n(x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}; \\ \psi_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \hat{\psi}_n(k) dk ; \\ \mathbb{E}(X_n^r) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} x^r \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \hat{\psi}_n(k) dk, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik'x} \hat{\psi}_n(k') dk' \right\rangle = \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \hat{\psi}_n(k) dk, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^r e^{ik'x} \hat{\psi}_n(k') dk' \right\rangle = \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \hat{\psi}_n(k) dk, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \left( -i \frac{d}{dk'} \right)^r e^{ik'x} \right] \hat{\psi}_n(k') dk' \right\rangle . \end{aligned}$$

Assim usando o lema no segundo argumento do produto interno,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^r) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \hat{\psi}_n(k) dk, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik'x} \left( i \frac{d}{dk'} \right)^r \hat{\psi}_n(k') dk' \right\rangle = \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k'-k)x} \left\langle \hat{\psi}_n(k), \left( i \frac{d}{dk'} \right)^r \hat{\psi}_n(k') \right\rangle dk' dk . \end{aligned}$$

Na definição do produto interno, usamos a identidade  $\langle av, w \rangle = \bar{a} \langle v, w \rangle \forall a \in \mathbb{C} \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ .

Finalmente, usando a fórmula  $\frac{1}{2\pi} \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{i(k'-k)x} = \delta(k' - k)$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(k' - k) \left\langle \hat{\psi}_n(k), \left( i \frac{d}{dk'} \right)^r \hat{\psi}_n(k') \right\rangle dk' dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle \hat{\psi}_n(k), \left( i \frac{d}{dk} \right)^r \hat{\psi}_n(k) \right\rangle dk . \end{aligned}$$

$\square$

Com essa forma de expressar os momentos de  $X_n$ , Grimmett, Janson e Scudo desenvolveram um método de obter a convergência fraca de  $X_n$  para o caso de período 1, ou seja,  $N = 1$ . [3].

**Teorema 1.** *Sejam  $\Omega = [\pi, -\pi) \times \{1, 2\}$  e  $\mu$  uma probabilidade em  $\Omega$  dada por*

*$d\mu_j = \left| \left\langle v_j(k), \hat{\psi}_0(k) \right\rangle \right|^2 \frac{dk}{2\pi}$  em cada  $[0, 2\pi) \times j$  e  $j = 1, 2$ . Suponha que  $\lambda_j(k), v_j(k)$  são  $C^\infty$  e seja  $h_j(k) = i \frac{\lambda_j'(k)}{\lambda_j(k)}$  e defina  $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  por  $h(j, k) = h_j(k)$ . Então  $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{w} Y = h(Z)$  com  $Z$  sendo uma variável aleatória de  $\Omega$  com distribuição  $\mu$ .*

Seguimos, então, para o resultado principal da monografia que é uma extensão direta do método de Grimmett, Janson, Scudo [3] para o caso do QRW em um ambiente periódico. Seguimos aqui a mesma notação do artigo de Norio Konno [6]. Este método é baseado no Método dos Momentos cujo enunciado é:

*Teorema(Método dos Momentos):* Suponha que a distribuição de  $X$  seja determinada pelos seus momentos, que  $X_n$  tenha momentos de todas as ordens e que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n^r) = \mathbb{E}(X^r)$ ,  $\forall r \in \mathbb{N}$ . Então  $X_n \xrightarrow{w} X$  (converge fracamente) .

A prova deste teorema encontra-se no livro [2], página 408, como Teorema 30.2 .

**Teorema 2.** *Sejam  $\Omega = [\pi, -\pi) \times \{1, \dots, 2N\}$  e  $\mu$  uma probabilidade em  $\Omega$  dada por  $d\mu_j = \left| \langle v_j(k), \hat{\psi}_0(k) \rangle \right|^2 \frac{dk}{2\pi}$  em cada  $[0, 2\pi) \times j$ . Suponha que  $\lambda_j(k), v_j(k)$  são  $C^\infty$  e seja  $h_j(k) = i \frac{\lambda'_j(k)}{\lambda_j(k)}$  e defina  $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  por  $h(j, k) = h_j(k)$ . Então  $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{w} Y = h(Z)$  com  $Z$  sendo uma variável aleatória de  $\Omega$  com distribuição  $\mu$ .*

Obs.: Supondo que  $\lambda_i(k) \neq \lambda_j(k) \forall i, j \forall k$ , pela proposição 1 tem-se que  $\lambda_j(k)$  são  $C^\infty$  .

*Demonstração.* Usando a forma diagonalizada de  $U_{2N \times 2N}(k)$ ,

$$\hat{\psi}_n(k) = U^n(k) \hat{\psi}_0(k) = \sum_{j=1}^{2N} \lambda_j^n(k) \langle v_j(k), \hat{\psi}_0(k) \rangle v_j(k).$$

Já que  $\lambda_j(k), v_j(k)$  são  $C^\infty$  por hipótese, podemos calcular as  $r$ -ésimas derivadas de  $\hat{\psi}_n(k)$  com  $n > r$  a fim de usar a proposição 2.

$$\begin{aligned} \left( i \frac{d}{dk} \right)^r \psi_n(k) &= (i)^r \sum_{j=1}^{2N} \frac{d^r}{dk^r} \left[ \lambda_j^n(k) \langle v_j(k), \hat{\psi}_0(k) \rangle v_j(k) \right] \text{ e ainda} \\ \frac{d^r}{dk^r} \left[ \lambda_j^n \langle v_j, \hat{\psi}_0 \rangle v_j \right] &= n(n-1) \cdots (n-r+1) (\lambda'_j)^r \lambda_j^{n-r} \langle v_j, \hat{\psi}_0 \rangle v_j + O(n^{r-1}). \end{aligned}$$

Conseqüentemente pela proposição 2,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{2N} \left[ \overline{\lambda_j^n \langle v_j, \hat{\psi}_0 \rangle} (i)^r \frac{n!}{(n-r)!} (\lambda'_j)^r \lambda_j^{n-r} \langle v_j, \hat{\psi}_0 \rangle \right] dk + O(n^{r-1}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{2N} \left[ \overline{\lambda_j^n} \lambda_j^n \left( \frac{i \lambda'_j}{\lambda_j} \right)^r \overline{\langle v_j, \hat{\psi}_0 \rangle} \langle v_j, \hat{\psi}_0 \rangle \right] dk \cdot \frac{n!}{(n-r)!} + O(n^{r-1}). \end{aligned}$$

Com esse comportamento assintótico dos  $r$ -momentos do QRW periódico, podemos usar a definição de  $O(n^{r-1})$  para ver que quando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{E} \left( \left( \frac{X_n}{n} \right)^r \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{2N} \left( \frac{i \lambda'_j}{\lambda_j} \right)^r \left| \langle v_j, \hat{\psi}_0 \rangle \right|^2 dk \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-r)! n^r}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{\frac{O(n^{r-1})}{n^r}}_{\rightarrow 0}.$$

Acima usamos que uma função  $f(n) = O(g(n))$  com  $g(n) > 0$  se e somente se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(n)|}{g(n)}$  existe. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O(n^{r-1})}{n^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O(n^{r-1})}{n^{r-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \text{const.} \cdot 0 = 0.$$

Também temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-r)!n^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) = 1.$$

Portanto, no limite de tempos grandes temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \left( \frac{X_n}{n} \right)^r \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{2N} \left( \frac{i\lambda'_j(k)}{\lambda_j(k)} \right)^r \left| \langle v_j(k), \hat{\psi}_0(k) \rangle \right|^2 dk.$$

Assim, note que  $\mathbb{E} \left( \left( \frac{X_n}{n} \right)^r \right) \rightarrow \int_{\Omega} h^r d\mu$  para todo  $r \in \mathbb{N}$ . Como  $h$  é limitada, podemos aplicar o teorema anterior para obter a convergência fraca desejada  $\frac{X_n}{n} \rightarrow_w Y := h(Z)$  onde  $\mathbb{E}(Y^r) = \int_{\Omega} h^r(z) d\mu(z)$ .  $\square$

Obs.: Note que o suporte de  $Y$  é  $[\min h, \max h]$ , i.e., a probabilidade de encontrar  $Y$  em  $(-\infty, \min h) \cup (\max h, +\infty)$  é nula.

**Corolário 1.** *O limite no tempo para passos de tamanho  $s \geq 1$  é o mesmo que para passos de tamanho um. Em outras palavras, sejam  $\tilde{\lambda}_j(k)$  e  $\tilde{v}_j(k)$  os autovalores e autovetores  $C^\infty$  de  $U_{2N \times 2N}^s(k)$ ,  $\tilde{h}(j, k) = \frac{i\tilde{\lambda}'_j(k)}{s \cdot \tilde{\lambda}_j(k)}$  e  $\tilde{Z}$  variável aleatória em  $\Omega$  com distribuição  $\tilde{\mu}$  dada por  $d\tilde{\mu}_j = \left| \langle \tilde{v}_j(k), \hat{\psi}_0(k) \rangle \right|^2 \frac{dk}{2\pi}$ . Então  $\frac{X_{s \cdot n}}{s \cdot n} \rightarrow_w Y = \tilde{h}(\tilde{Z})$ ,  $\tilde{h} = h$ ,  $\tilde{Z} = Z$  e  $\tilde{\mu} = \mu$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, note que  $\frac{X_{s \cdot n}}{s \cdot n}$  é uma subsequência de  $\frac{X_n}{n}$ , então, ambas convergem fracamente para o mesmo limite.

Como  $\tilde{\lambda}_j(k) = \lambda_j^s(k)$  e  $\tilde{v}_j(k) = v_j(k)$ , a base diagonalizadora de  $U_{2N \times 2N}^s(k)$  é a mesma de  $U_{2N \times 2N}(k)$  exceto pela potenciação de  $\lambda_j(k)$  por  $s$ . Portanto,  $\tilde{\mu} = \mu$  e

$$\tilde{h}(j, k) = \frac{i(\lambda_j^s)'(k)}{s \cdot \lambda_j^s(k)} = s\lambda_j^{s-1}(k) \frac{i\lambda'_j(k)}{s \cdot \lambda_j^s(k)} = h(j, k).$$

$\square$

Temos, até agora, que o limite da distribuição da posição está bem definido. No entanto, sabemos apenas os  $r$ -ésimos momentos e não calculamos ainda o limite da distribuição de  $Y$  em si. Passemos, então, a calculá-lo.

Como  $Y = h(Z)$  e  $Z$  é uma variável aleatória com distribuição  $\mu$ , temos que, dado um  $y \in [\min h, \max h]$ ,

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{(-\infty, y]}(h(z)) d\mu(z) = \int_{h^{-1}((-\infty, y])} d\mu(z)$$

$$= \sum_{j=1}^{2N} \int_{h_j^{-1}((-\infty, y])} \left| \langle v_j(k), \hat{\psi}_0(k) \rangle \right|^2 \frac{dk}{2\pi}.$$

A densidade de probabilidade é  $f(y) = \frac{d}{dy} \mathbb{P}[Y \leq y]$ . Supondo que

$$h_j^{-1}((-\infty, y]) = \bigcup_{l \in L_j} [k_{1,j,l}(y), k_{2,j,l}(y)]$$

seja uma união disjunta e  $L_j$  enumerável, temos que

$$f(y) = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{l \in L_j} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dy} \int_{k_{1,j,l}(y)}^{k_{2,j,l}(y)} p_j(k) dk.$$

Como  $L_j$  é o conjunto de índices de intervalos  $[k_{1,j,l}(y), k_{2,j,l}(y)] \subset [-\pi, \pi]$ , pode acontecer de  $L_j$  ser infinito. Caso isso aconteça, a convergência da série de funções em  $y$  acima será uniforme, já que todas as parcelas são todas positivas e de soma menor ou igual a 1. Assim, usando a igualdade  $\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$ ,

$$f(y) = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{l \in L_j} \frac{1}{2\pi} [p_j(k_{2,j,l}(y))k'_{2,j,l}(y) - p_j(k_{1,j,l}(y))k'_{1,j,l}(y)],$$

com  $p_j(k) = \left| \langle v_j(k), \hat{\psi}_0(k) \rangle \right|^2$  o que conclui a prova do seguinte teorema:

**Teorema 3.** *Com a notação acima, tem-se*

$$f(y) = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{l \in L_j} \frac{1}{2\pi} [p_j(k_{2,j,l}(y))k'_{2,j,l}(y) - p_j(k_{1,j,l}(y))k'_{1,j,l}(y)].$$

Esta fórmula nos dá uma idéia do que precisamos para obter a densidade de probabilidade limite. Precisamos calcular as funções  $p_j(k) = \left| \langle v_j(k), \hat{\psi}_0(k) \rangle \right|^2$  e das funções  $k_{2,j,l}(y)$  e  $k_{1,j,l}(y)$ .

Isto conclui o que podemos dizer sobre o caso periódico com um período geral  $N$ , pois o resultado é baseado na diagonalização da matriz  $U_{2N \times 2N}$ , que não é difícil de determinar para  $N = 1, 2$  e  $4$ .



## Capítulo 4

# O Período Dois

O objetivo deste capítulo é obter a distribuição do passeio aleatório quântico (QRW) do período dois. Se o período é dois, temos apenas duas matrizes unitárias para incluir na evolução do passeio quântico :

$$U_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & A_1(k) \\ A_0(k) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{ik}P_1 + e^{-ik}Q_1 \\ e^{ik}P_0 + e^{-ik}Q_0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$A_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{p}e^{i\alpha} & \sqrt{1-p}e^{i\beta} \\ \sqrt{1-p}e^{-i(\beta+\theta)} & -\sqrt{p}e^{-i(\alpha+\theta)} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{q}e^{i\gamma} & \sqrt{1-q}e^{i\delta} \\ \sqrt{1-q}e^{-i(\delta+\phi)} & -\sqrt{q}e^{-i(\gamma+\phi)} \end{pmatrix},$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{p}e^{i\alpha} & \sqrt{1-p}e^{i\beta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-p}e^{-i(\beta+\theta)} & -\sqrt{p}e^{-i(\alpha+\theta)} \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{q}e^{i\gamma} & \sqrt{1-q}e^{i\delta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-q}e^{-i(\delta+\phi)} & -\sqrt{q}e^{-i(\gamma+\phi)} \end{pmatrix}.$$

Consideramos acima as matrizes unitárias mais gerais possíveis a fim de descobrir a riqueza de parâmetros do QRW em detrimento da facilidade das contas para o leitor acompanhar. Contudo, nesta monografia, não consideraremos os casos em que  $p = 0$  ou  $q = 0$  ou  $p = q$  e  $\delta - \beta + \frac{\phi - \theta}{2} = n\pi$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

Assim, o estado do QRW no tempo dois é dado por

$$\hat{\Psi}_2 = U_{4 \times 4}^2 \hat{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} A_1(k)A_0(k) & 0 \\ 0 & A_0(k)A_1(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_0^{(0)}(k) \\ \hat{\psi}_0^{(1)}(k) \end{pmatrix}.$$

Este fato é claro se tivermos percebido a seguinte intuição do modelo. No primeiro passo, a parte dos sítios pares do estado inicial  $\hat{\psi}_0^{(0)}(k)$  é transformada pela matriz  $A_0$  e depois é transladada para os sítios ímpares. No segundo passo, essa parte está agora nos sítios ímpares e transformada pela matriz  $A_1$  e transladada de volta aos sítios pares. Então, o estado inicial nos pares tem a evolução unitária  $S \circ A_1 \circ S \circ A_0$  para passos de tamanho dois. No espaço de Fourier, a evolução de dois passos para os pares é  $A_1(k)A_0(k)$ . Analogamente, a evolução dupla nos sítios ímpares é  $A_0(k)A_1(k)$ .

Passemos agora para a diagonalização das matrizes  $A_1(k)A_0(k)$  e  $A_0(k)A_1(k)$ , pois se  $v_1(k), v_2(k)$ ,

$\lambda_1(k), \lambda_2(k)$  são os autovetores e autovalores de  $A_1(k)A_0(k)$  e  $v_3(k), v_4(k), \lambda_3(k), \lambda_4(k)$  são os de  $A_0(k)A_1(k)$ , então  $\lambda_1(k), \lambda_2(k), \lambda_3(k), \lambda_4(k)$  são os autovalores de  $U_{4 \times 4}$  e  $\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_4 \end{pmatrix}$  são seus respectivos autovetores.

**Proposição 3.** *Considere as matrizes dadas por:*

$$\begin{aligned} A_1(k)A_0(k) &= \begin{pmatrix} a_{10}(k) & b_{10}(k) \\ c_{10}(k) & d_{10}(k) \end{pmatrix} e \\ A_0(k)A_1(k) &= \begin{pmatrix} a_{01}(k) & b_{01}(k) \\ c_{01}(k) & d_{01}(k) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde temos as funções definidas por:

$$\begin{aligned} a_{10}(k) &= \sqrt{pq}e^{i(2k+\alpha+\gamma)} + \sqrt{(1-p)(1-q)}e^{i(\delta-\beta-\theta)}, \\ b_{10}(k) &= \sqrt{p(1-q)}e^{i(2k+\gamma+\beta)} - \sqrt{(1-p)q}e^{i(\delta-\alpha-\theta)}, \\ c_{10}(k) &= -\sqrt{p(1-q)}e^{-i(2k+\gamma+\beta+\theta+\phi)} + \sqrt{(1-p)q}e^{-i(\delta-\alpha+\phi)}, \\ d_{10}(k) &= \sqrt{pq}e^{-i(2k+\alpha+\gamma+\theta+\phi)} + \sqrt{(1-p)(1-q)}e^{-i(\delta-\beta+\phi)}, \\ a_{01}(k) &= \sqrt{pq}e^{i(2k+\alpha+\gamma)} + \sqrt{(1-p)(1-q)}e^{i(\beta-\delta-\phi)}, \\ b_{01}(k) &= \sqrt{p(1-q)}e^{i(2k+\alpha+\delta)} - \sqrt{(1-p)q}e^{i(\beta-\gamma-\phi)}, \\ c_{01}(k) &= -\sqrt{p(1-q)}e^{-i(2k+\alpha+\delta+\theta+\phi)} + \sqrt{(1-p)q}e^{-i(\beta-\gamma+\theta)} e \\ d_{01}(k) &= +\sqrt{pq}e^{-i(2k+\alpha+\gamma+\theta+\phi)} + \sqrt{(1-p)(1-q)}e^{-i(\beta-\delta+\theta)}. \end{aligned}$$

Considere ainda as matrizes da evolução  $U_{4 \times 4}^2$  e  $\lambda_1(k), \lambda_2(k), v_1(k), v_2(k)$  os autovalores e autovetores associados a  $A_1(k)A_0(k)$  e  $\lambda_3(k), \lambda_4(k), v_3(k), v_4(k)$  a  $A_0(k)A_1(k)$ . Defina  $\eta := \alpha + \gamma + \frac{\theta + \phi}{2}$  e  $\nu := \delta - \beta + \frac{\phi - \theta}{2}$ . Se  $p \neq q$  ou  $|\cos \nu| < 1$ , então temos

$$\begin{aligned} \lambda_1(k) = \lambda_3(k) &= e^{-i(\frac{\theta+\phi}{2})} \left[ \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right) \right. \\ &\quad \left. + i \sqrt{1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2} \right] e \text{ ainda} \\ \lambda_2(k) = \lambda_4(k) &= e^{-i(\frac{\theta+\phi}{2})} \left[ \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right) \right. \\ &\quad \left. - i \sqrt{1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

E os autovetores são

$$\begin{aligned} v_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{|b_{10}(k)|^2 + |\lambda_1(k) - a_{10}(k)|^2}} \begin{pmatrix} b_{10}(k) \\ \lambda_1(k) - a_{10}(k) \end{pmatrix}, \\ v_2(k) &= \frac{1}{\sqrt{|b_{10}(k)|^2 + |\lambda_2(k) - a_{10}(k)|^2}} \begin{pmatrix} b_{10}(k) \\ \lambda_2(k) - a_{10}(k) \end{pmatrix}, \\ v_3(k) &= \frac{1}{\sqrt{|b_{01}(k)|^2 + |\lambda_3(k) - a_{01}(k)|^2}} \begin{pmatrix} b_{01}(k) \\ \lambda_3(k) - a_{01}(k) \end{pmatrix} e \\ v_4(k) &= \frac{1}{\sqrt{|b_{01}(k)|^2 + |\lambda_4(k) - a_{01}(k)|^2}} \begin{pmatrix} b_{01}(k) \\ \lambda_4(k) - a_{01}(k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainda mais,  $\lambda_j(k), v_j(k)$  são  $C^\infty$  para  $j = 1, 2, 3, 4$ .

*Demonstração.* Primeiro note que  $\lambda = \frac{\text{tr}(A)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr}(A)}{2}\right)^2 - \det(A)}$  e  $v_\lambda = \frac{1}{\sqrt{|b|^2 + |\lambda - a|^2}} \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$

são os autovalores e autovetores de uma matriz  $2 \times 2$  geral  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Deste modo, basta calcular  $\text{tr}(A_1(k)A_0(k))$  e  $\det(A_1(k)A_0(k))$  para encontrar  $\lambda_j$  e  $v_j$ , pois  $\text{tr}(A_1(k)A_0(k)) = \text{tr}(A_0(k)A_1(k))$  e  $\det(A_1(k)A_0(k)) = \det(A_0(k))\det(A_1(k)) = \det(A_1(k)A_0(k))$ , já que

$$\begin{aligned} \lambda_1(k) &= \frac{\text{tr}(A_1(k)A_0(k))}{2} + \sqrt{\left(\frac{\text{tr}(A_1(k)A_0(k))}{2}\right)^2 - \det(A_1(k)A_0(k))} = \lambda_3(k) \\ \lambda_2(k) &= \frac{\text{tr}(A_1(k)A_0(k))}{2} - \sqrt{\left(\frac{\text{tr}(A_1(k)A_0(k))}{2}\right)^2 - \det(A_1(k)A_0(k))} = \lambda_4(k) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_1(k)A_0(k)) &= a_{10}(k) + d_{10}(k) \\ &= \sqrt{pq} \left( e^{i(2k+\alpha+\gamma)} + e^{-i(2k+\alpha+\gamma+\theta+\phi)} \right) \\ &\quad + \sqrt{(1-p)(1-q)} \left( e^{i(\beta-\delta-\phi)} + e^{-i(\beta-\delta+\theta)} \right) \\ &= 2e^{-i\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)} \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right). \end{aligned}$$

Já o determinante é

$$\begin{aligned} \det(A_1(k)A_0(k)) &= \det \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \det(A_0) \det \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \det(A_1) \\ &= e^{-i\theta} e^{-i\phi} = e^{-i(\theta+\phi)}. \end{aligned}$$

Logo, se  $p \neq q$  ou  $|\cos \nu| < 1$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_1(k) = \lambda_3(k) &= e^{-i(\frac{\theta+\phi}{2})} \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right) \\ &+ \sqrt{\left( e^{-i(\frac{\theta+\phi}{2})} \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right) \right)^2 - e^{-i(\theta+\phi)}} \\ &= e^{-i(\frac{\theta+\phi}{2})} \left[ \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right) \right. \\ &\quad \left. + i \sqrt{1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \lambda_2(k) = \lambda_4(k) &= e^{-i(\frac{\theta+\phi}{2})} \left[ \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right) \right. \\ &\quad \left. - i \sqrt{1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Agora para provar que  $\lambda_j(k)$  são  $C^\infty$ , precisamos mostrar que

$$\begin{aligned} 1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow \left| \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right| &< 1. \end{aligned}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right| &< \\ \left| \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) \right| + \left| \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right| &< \\ \sqrt{pq} + \sqrt{(1-p)(1-q)} |\cos \nu| &. \end{aligned}$$

Desse modo, vemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{pq} + \sqrt{(1-p)(1-q)} &< 1 \\ \Leftrightarrow (1-p)(1-q) &< (1 - \sqrt{pq})^2 \\ \Leftrightarrow 1 - (p+q) + pq &< 1 - 2\sqrt{pq} + pq \\ \Leftrightarrow -(p+q) &< -2\sqrt{pq} \\ \Leftrightarrow 0 &< (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2. \end{aligned}$$

Portanto, se  $p \neq q$  ou  $|\cos \nu| < 1$  então

$$\left| \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right| < 1,$$

e, conseqüentemente, os  $\lambda_j(k), v_j(k)$  são  $C^\infty$ .  $\square$

**Teorema 4.** *Seja  $\Omega = [-\pi, \pi) \times \{1, 2, 3, 4\}$ . Então  $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{w} Y = h(Z)$  sendo  $Z$  uma variável aleatória de  $\Omega$  com distribuição  $\mu$  como definido no corolário 1 do capítulo 1. E ainda temos as*

seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
I(k) &:= \sqrt{1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2}; \\
h_1(k) &= \frac{-\sqrt{pq} \sin(2k + \eta)}{\sqrt{1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2}} = \frac{-\sqrt{pq} \sin(2k + \eta)}{\sqrt{I(k)}}; \\
h_1(k) &= h_3(k) = -h_2(k) = -h_4(k); \\
d\mu_j(k) &= p_j(k) \frac{dk}{2\pi}; \\
p_1(k) &= \frac{1}{2} \left( |\psi^{(1)}(k)|^2 + |\psi^{(2)}(k)|^2 + \left( |\psi^{(1)}(k)|^2 - |\psi^{(2)}(k)|^2 \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left( -h_1(k) + \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{\sqrt{I(k)}} \right) \right) + \frac{1}{\sqrt{I(k)}} \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\}; \\
p_2(k) &= \frac{1}{2} \left( |\psi^{(1)}(k)|^2 + |\psi^{(2)}(k)|^2 + \left( |\psi^{(1)}(k)|^2 - |\psi^{(2)}(k)|^2 \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left( -h_2(k) - \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{\sqrt{I(k)}} \right) \right) - \frac{1}{\sqrt{I(k)}} \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\}; \\
p_3(k) &= \frac{1}{2} \left( |\psi^{(3)}(k)|^2 + |\psi^{(4)}(k)|^2 + \left( |\psi^{(3)}(k)|^2 - |\psi^{(4)}(k)|^2 \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left( -h_3(k) + \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{\sqrt{I(k)}} \right) \right) + \frac{1}{\sqrt{I(k)}} \Im \left\{ \overline{\psi^{(3)}(k)} \psi^{(4)}(k) b_{01}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\}; \\
p_4(k) &= \frac{1}{2} \left( |\psi^{(3)}(k)|^2 + |\psi^{(4)}(k)|^2 + \left( |\psi^{(3)}(k)|^2 - |\psi^{(4)}(k)|^2 \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left( -h_4(k) - \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{\sqrt{I(k)}} \right) \right) - \frac{1}{\sqrt{I(k)}} \Im \left\{ \overline{\psi^{(3)}(k)} \psi^{(4)}(k) b_{01}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\}.
\end{aligned}$$

*Demonstração.* De fato, pelo corolário 1 temos que  $\frac{X_n}{n} \rightarrow_w Y = h(Z)$  e que  $h(j, k) = \frac{i\lambda'_j(k)}{2\lambda_j(k)}$ .

Sejam  $\omega_1(k) = \frac{\theta+\phi}{2} + \arccos \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)$  e

$\omega_2(k) = \frac{\theta+\phi}{2} - \arccos \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)$ .

Assim,  $\lambda_1(k) = \lambda_3(k) = e^{i(\omega_1(k))}$  e  $\lambda_2(k) = \lambda_4(k) = e^{i(\omega_2(k))}$ . Desse modo,

$$\begin{aligned}
h_j(k) &= i \frac{\lambda_j'(k)}{2\lambda_j(k)} = i \frac{(i\omega_j'(k))e^{i\omega_j(k)}}{2e^{i\omega_j(k)}} = -\frac{1}{2}\omega_j'(k), \\
h_1(k) &= \frac{-1}{2} \left( \arccos \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right) \right)' \\
&= (-1) \frac{-1}{2\sqrt{1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2}} (-\sqrt{pq} \sin(2k + \eta) 2) \\
&= \frac{-\sqrt{pq} \sin(2k + \eta)}{\sqrt{1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2}}.
\end{aligned}$$

Analogamente,  $h_2(k) = -h_1(k)$ . Agora, a fim de provar a fórmula de  $p_1(k)$ , temos que relembrar que

$$\begin{aligned}
p_1(k) &= \left| \langle v_1(k), \hat{\psi}_0(k) \rangle \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{|b_{10}(k)|^2 + |\lambda_1(k) - a_{10}(k)|^2}} \left\langle \begin{pmatrix} b_{10}(k) \\ \lambda_1(k) - a_{10}(k) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(k) \\ \psi^{(2)}(k) \end{pmatrix} \right\rangle \right|^2 \\
&= \frac{1}{|b_{10}(k)|^2 + |\lambda_1(k) - a_{10}(k)|^2} \left| \overline{b_{10}(k)}\psi^{(1)}(k) + \overline{(\lambda_1(k) - a_{10}(k))}\psi^{(2)}(k) \right|^2 \\
&= \frac{1}{|b_{10}(k)|^2 + |\lambda_1(k) - a_{10}(k)|^2} \cdot \left( |b_{10}(k)|^2 \left| \psi^{(1)}(k) \right|^2 + |\lambda_1(k) - a_{10}(k)|^2 \left| \psi^{(2)}(k) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\Re \left\{ b_{10}(k) \overline{(\lambda_1(k) - a_{10}(k))} \psi^{(1)}(k) \psi^{(2)}(k) \right\} \right).
\end{aligned}$$

Calculemos  $|\lambda_1(k) - a_{10}(k)|^2$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(k) - a_{10}(k) &= e^{-i(\frac{\theta+\phi}{2})} \left[ \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right) + i\sqrt{I(k)} \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{pq} e^{i(2k+\eta)} - \sqrt{(1-p)(1-q)} e^{i\nu} \right] \\
&= e^{-i(\frac{\theta+\phi}{2})} i \left[ - \left( \sqrt{pq} \sin(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu \right) + \sqrt{I(k)} \right].
\end{aligned}$$

Defina  $s_1(k) = \left( \sqrt{pq} \sin(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu \right)$ . Então,

$$\begin{aligned}
|\lambda_1(k) - a_{10}(k)|^2 &= \left( -s_1(k) + \sqrt{I(k)} \right)^2 = \left( -s_1(k) + \sqrt{I(k)} \right)^2 \frac{(s_1(k) + \sqrt{I(k)})}{(s_1(k) + \sqrt{I(k)})} \\
&= \frac{(-s_1(k) + \sqrt{I(k)})}{(s_1(k) + \sqrt{I(k)})} \\
&\quad \left( 1 - \left( \sqrt{pq} \cos(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left( \sqrt{pq} \sin(2k + \eta) + \sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu \right)^2 \right) \\
&= \frac{(-s_1(k) + \sqrt{I(k)})}{(s_1(k) + \sqrt{I(k)})} (1 - |a_{10}(k)|^2) = \frac{(-s_1(k) + \sqrt{I(k)})}{(s_1(k) + \sqrt{I(k)})} |b_{10}(k)|^2,
\end{aligned}$$

pois  $1 - |a_{10}(k)|^2 = |b_{10}(k)|^2$ .

Logo ficamos com:

$$\begin{aligned}
&|b_{10}(k)|^2 \left| \psi^{(1)}(k) \right|^2 + |\lambda_1(k) - a_{10}(k)|^2 \left| \psi^{(2)}(k) \right|^2 \\
&= \frac{|b_{10}(k)|^2}{s_1(k) + \sqrt{I(k)}} \left( \left| \psi^{(1)}(k) \right|^2 (s_1(k) + \sqrt{I(k)}) + \left| \psi^{(2)}(k) \right|^2 (-s_1(k) + \sqrt{I(k)}) \right) \\
&= \frac{|b_{10}(k)|^2 \sqrt{I(k)}}{s_1(k) + \sqrt{I(k)}} \left( \left| \psi^{(1)}(k) \right|^2 + \left| \psi^{(2)}(k) \right|^2 + \left( \left| \psi^{(1)}(k) \right|^2 - \left| \psi^{(2)}(k) \right|^2 \right) \frac{s_1(k)}{\sqrt{I(k)}} \right).
\end{aligned}$$

Na equação anterior, fazendo por um instante  $|\psi^{(1)}(k)|^2 = 1$  e  $|\psi^{(2)}(k)|^2 = 1$ , temos

$$|b_{10}(k)|^2 + |\lambda_1(k) - a_{10}(k)|^2 = \frac{2|b_{10}(k)|^2 \sqrt{I(k)}}{s_1(k) + \sqrt{I(k)}}.$$

Ainda falta simplificar

$$\begin{aligned}
&\Re \left\{ b_{10}(k) \overline{(\lambda_1(k) - a_{10}(k)) \psi^{(1)}(k) \psi^{(2)}(k)} \right\} \\
&= \Re \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} (-i) \right\} (-s_1(k) + \sqrt{I(k)}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{I(k)}} \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\} \frac{|b_{10}(k)|^2 \sqrt{I(k)}}{(s_1(k) + \sqrt{I(k)})}.
\end{aligned}$$

Juntando as equações anteriores, obtemos

$$\begin{aligned}
p_1(k) &= \frac{\frac{|b_{10}(k)|^2 \sqrt{I(k)}}{s_1(k) + \sqrt{I(k)}} \left( |\psi^{(1)}(k)|^2 + |\psi^{(2)}(k)|^2 + \left( |\psi^{(1)}(k)|^2 - |\psi^{(2)}(k)|^2 \right) \frac{s_1(k)}{\sqrt{I(k)}} \right)}{\frac{2|b_{10}(k)|^2 \sqrt{I(k)}}{s_1(k) + \sqrt{I(k)}}} \\
&+ \frac{\frac{|b_{10}(k)|^2 \sqrt{I(k)}}{s_1(k) + \sqrt{I(k)}} \frac{1}{\sqrt{I(k)}} 2\Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\}}{\frac{2|b_{10}(k)|^2 \sqrt{I(k)}}{s_1(k) + \sqrt{I(k)}}} \\
&= \frac{1}{2} \left( \left| \psi^{(1)}(k) \right|^2 + \left| \psi^{(2)}(k) \right|^2 + \left( \left| \psi^{(1)}(k) \right|^2 - \left| \psi^{(2)}(k) \right|^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \left( -h_1(k) + \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{\sqrt{I(k)}} \right) \right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{I(k)}} \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\}.
\end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que as expressões de  $p_2(k), p_3(k), p_4(k)$  são as do enunciado.  $\square$

Agora temos as expressões de  $p_j(k)$  e para obter a distribuição  $f(y)$ , pelo Teorema 2 do capítulo 2, temos de inverter  $h_j(k)$  a fim de obter as funções  $k_{1,j,l}$  e  $k_{2,j,l}$  que são os extremos dos intervalos de  $h_j((-\infty, y])$

**Proposição 4.** *Sejam  $y_- := \min h$ ,  $k_- \in [-\frac{\pi}{4} - \frac{\eta}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\eta}{2}]$  tal que  $h_1(k_-) = y_-$ . Sejam  $k_1 : [y_-, 0] \rightarrow [-\frac{\eta}{2}, k_-]$  tal que  $h_1(k_1(y)) = y$  e  $k_2 : [y_-, 0] \rightarrow [k_-, \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}]$  tal que  $h_1(k_2(y)) = y$ . Então, definindo*

$$\begin{aligned}
I_1(y) &= 1 - (A \operatorname{sen}(2k_1(y) + \eta) - B)^2, \\
I_2(y) &= 1 - (A \operatorname{sen}(2k_2(y) + \eta) - B)^2, \\
\Delta(y) &= (A^2 - y^2)(1 - y^2) + B^2 y^2, \\
A &= \sqrt{pq} \quad e \\
B &= \sqrt{(1-p)(1-q)} \cos \nu, \quad \text{temos as identidades:}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
y_- = \min h_j = -\max h_j = -\sqrt{\frac{1 + A^2 - B^2 - \sqrt{(1 + A^2 - B^2)^2 - 4A^2}}{2}} \\
k_1(y) = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{1}{A(1-y^2)} \left( By^2 + \sqrt{(1-y^2)(A^2-y^2) + B^2 y^2} \right) \right) - \frac{\eta}{2}, \\
\cos(2k_1(y) + \eta) = \frac{1}{A(1-y^2)} \left( By^2 + \sqrt{(1-y^2)(A^2-y^2) + B^2 y^2} \right), \\
\sin(2k_1(y) + \eta) = \frac{-y}{A(1-y^2)} \sqrt{(1-A^2)(1-y^2) - B^2(1+y^2) - 2B\sqrt{\Delta(y)}}, \\
\sqrt{I_1(y)} = \frac{1}{(1-y^2)} \sqrt{(1-A^2)(1-y^2) - B^2(1+y^2) - 2B\sqrt{\Delta(y)}}, \\
k'_1(y) = \frac{-\sqrt{I_1(y)}}{2\sqrt{\Delta(y)}}.
\end{array} \right.$$

e



$$\left\{ \begin{array}{l} k_2(y) = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{1}{A(1-y^2)} \left( By^2 - \sqrt{(1-y^2)(A^2-y^2) + B^2y^2} \right) \right) - \frac{\eta}{2} \\ \cos(2k_2(y) + \eta) = \frac{1}{A(1-y^2)} \left( By^2 - \sqrt{(1-y^2)(A^2-y^2) + B^2y^2} \right) \\ \sin(2k_2(y) + \eta) = \frac{-y}{A(1-y^2)} \sqrt{(1-A^2)(1-y^2) - B^2(1+y^2) + 2B\sqrt{\Delta(y)}} \\ \sqrt{I_2(y)} = \frac{1}{(1-y^2)} \sqrt{(1-A^2)(1-y^2) - B^2(1+y^2) + 2B\sqrt{\Delta(y)}} e \\ k_2'(y) = \frac{\sqrt{I_2(y)}}{2\sqrt{\Delta(y)}} \end{array} \right.$$

*Demonstração.* Observando o número de fórmulas no enunciado é de se esperar que esta proposição envolva muitos cálculos. Para evitar que a demonstração fique desnecessariamente muito longa, omitiremos a maior parte deles, deixando-os apenas indicados.

Para inverter  $h_1(k)$  precisamos saber em que intervalo tal função é inversível. Assim, precisamos encontrar seu mínimo e seu máximo. Derivando  $h_1(k)$ , obtemos:

$$h_1'(k) = \frac{A^2B \cos^2(2k + \eta) - A(1 - A^2 - B^2) \cos(2k + \eta) + A^2B}{\frac{1}{2}I_1(k)^{\frac{3}{2}}}.$$

A fim de descobrir os pontos tais que  $h_1'(k) = 0$ , vamos resolver a equação  $A^2BX^2 - A(1 - A^2 - B^2)X + A^2B = 0$ , que tem apenas uma solução  $X_c \in [-1, 1]$ , a saber

$$X_c = \frac{(1 - A^2 - B^2) - \sqrt{(1 - A^2 - B^2)^2 - 4A^2B^2}}{2AB}.$$

Seja  $k_- = \frac{1}{2} \arccos(X_c) - \frac{\eta}{2}$  se  $B > 0$  ou  $k_- = \frac{1}{2} \arccos(X_c) - \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$  se  $B < 0$ . Então  $k_- \in [-\frac{\eta}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}]$  e  $h_1(k_-) = \min h_1$ . Para descobrir o máximo, note que  $h_1'(-k_- - \eta) = h_1'(k_-) = 0$  e

$$\begin{aligned} h_1(-k_- - \eta) &= \frac{A \sin(2(-k_- - \eta) + \eta)}{\sqrt{1 - (A \cos(2(-k_- - \eta) + \eta) + B)^2}} \\ &= \frac{-A \sin(2k_- + \eta)}{\sqrt{1 - (A \cos(2k_- + \eta) + B)^2}} = -h_1(k_-). \end{aligned}$$

Portanto, sendo  $k_+ = -k_- - \eta$ , temos que  $h_1(k_+) = \max h_1 = -\min h_1$ . Substituindo,  $k_-$  em  $h_1(k)$ , ficamos com

$$\min h_1 = h_1(k_-) = -\sqrt{\frac{1 + A^2 - B^2 - \sqrt{(1 + A^2 - B^2)^2 - 4A^2}}{2}}.$$

Como  $h_1(k) = h_3(k) = -h_2(k) = -h_4(k)$ , tem-se

$$\begin{aligned} y_+ := \max h_1 = \max h_2 = \max h_3 = \max h_4 &= \sqrt{\frac{1 + A^2 - B^2 - \sqrt{(1 + A^2 - B^2)^2 - 4A^2}}{2}}, \\ y_- := \min h_1 = \min h_2 = \min h_3 = \min h_4 &= -\sqrt{\frac{1 + A^2 - B^2 - \sqrt{(1 + A^2 - B^2)^2 - 4A^2}}{2}}. \end{aligned}$$

Tendo o máximo e mínimo de  $h_1(k)$  podemos definir o intervalo em que é inversível. No entanto, vamos inverter apenas o intervalo em que  $y_- \leq h_1(k) \leq 0$ . Sejam  $k_1 : [y_-, 0] \rightarrow [-\frac{\eta}{2}, k_-]$  e

$k_2 : [y_-, 0] \rightarrow [k_-, \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}]$  tais que  $h_1(k_1(y)) = y$  e  $h_1(k_2(y)) = y$ . Logo, dado  $y \in [y_-, 0]$ ,

$$\begin{aligned}
h_1(k_j(y)) &= y \\
\Rightarrow (h_1(k_j(y)))^2 &= y^2 \\
\Leftrightarrow A^2 \sin^2(2k_j(y) + \eta) &= y^2 (1 - (A \cos(2k_j(y) + \eta) + B)^2) \\
\Leftrightarrow A^2(1 - \cos^2(2k_j(y) + \eta)) &= y^2 - y^2 (A^2 \cos^2(2k_j(y) + \eta) \\
&\quad + 2AB \cos(2k_j(y) + \eta) + B^2) \\
\Leftrightarrow (A^2(1 - y^2)) (\cos(2k_j(y) + \eta))^2 &- (2AB y^2) \cos(2k_j(y) + \eta) \\
&+ (y^2(1 - B^2) - A^2) = 0 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2k_j(y) + \eta) = \frac{1}{A(1 - y^2)} (By^2 + \sqrt{(1 - y^2)(A^2 - y^2) + B^2 y^2}) =: c_1(y) \\ \text{ou} \\ \cos(2k_j(y) + \eta) = \frac{1}{A(1 - y^2)} (By^2 - \sqrt{(1 - y^2)(A^2 - y^2) + B^2 y^2}) =: c_2(y). \end{cases}
\end{aligned}$$

Como  $\cos(2k_1(y) + \eta) \geq \cos(2k_2(y) + \eta)$  e  $c_1(y) \geq c_2(y)$ , então  $\cos(2k_1(y) + \eta) = c_1(y)$  e  $\cos(2k_2(y) + \eta) = c_2(y)$ . Desse modo,

$$\begin{aligned}
k_1(y) &= \frac{1}{2} \arccos(c_1(y)) - \frac{\eta}{2}, \\
k_2(y) &= \frac{1}{2} \arccos(c_2(y)) - \frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

Desse modo, temos

$$\begin{cases} k_1(y) = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{A(1 - y^2)} (By^2 + \sqrt{(1 - y^2)(A^2 - y^2) + B^2 y^2})\right) - \frac{\eta}{2} \\ \cos(2k_1(y) + \eta) = \frac{1}{A(1 - y^2)} (By^2 + \sqrt{(1 - y^2)(A^2 - y^2) + B^2 y^2}) \\ k_2(y) = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{A(1 - y^2)} (By^2 - \sqrt{(1 - y^2)(A^2 - y^2) + B^2 y^2})\right) - \frac{\eta}{2} \\ \cos(2k_2(y) + \eta) = \frac{1}{A(1 - y^2)} (By^2 - \sqrt{(1 - y^2)(A^2 - y^2) + B^2 y^2}). \end{cases}$$

A expressão  $\sin(2k_j(y) + \eta) = \frac{-y}{A(1 - y^2)} \sqrt{(1 - A^2)(1 - y^2) - B^2(1 + y^2) + (-1)^j 2B \sqrt{\Delta(y)}}$  é obtida através de manipulações algébricas dos elementos envolvidos. A expressão de  $\sqrt{I_1(y)}$  obtém-se fazendo

$$\begin{aligned}
y = h_1(k_1(y)) &= \frac{-A \sin(2k_1(y) + \eta)}{\sqrt{I_1(y)}} \\
\Leftrightarrow 1 &= \frac{\frac{1}{(1 - y^2)} \sqrt{(1 - A^2)(1 - y^2) - B^2(1 + y^2) - 2B \sqrt{\Delta(y)}}}{\sqrt{I_1(y)}} \\
\Leftrightarrow \sqrt{I_1(y)} &= \frac{1}{(1 - y^2)} \sqrt{(1 - A^2)(1 - y^2) - B^2(1 + y^2) - 2B \sqrt{\Delta(y)}}.
\end{aligned}$$

Computar  $k'_1(y)$  e  $k'_2(y)$  utiliza apenas as definições das funções envolvidas, e sua demonstração será omitida nesta versão do trabalho.  $\square$

Abaixo encontram-se os gráficos de  $h_1(k)$  e  $h_2(k)$ .

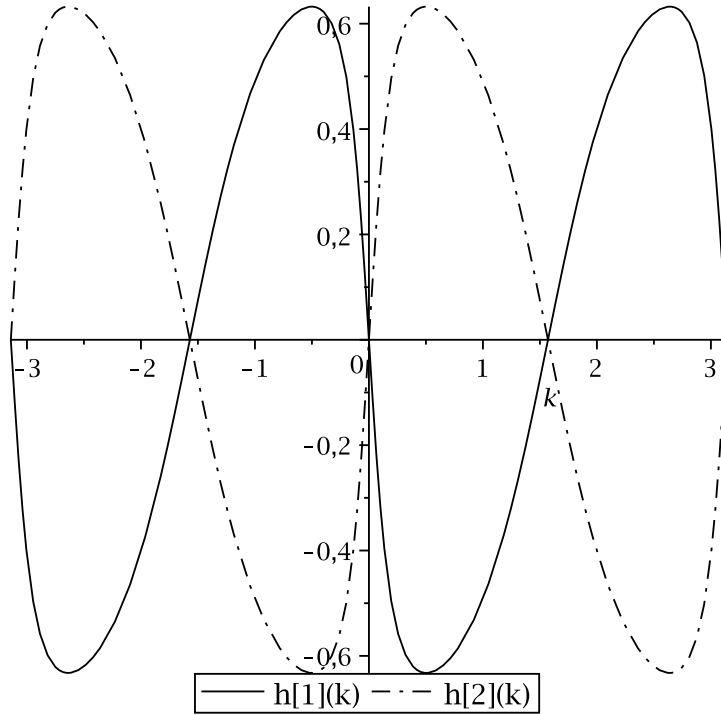


Figura 4.1:  $h_1(k)$  em linha preta e  $h_2(k)$  em linha pontilhada para  $p = \frac{4}{10}$ ,  $q = \frac{7}{10}$  e  $\eta = 0$

Observando-se os gráficos tem-se uma boa idéia de como estender  $k_1(y)$  e  $k_2(y)$  para  $[y_-, y_+]$ . As extensões são

$$k_1 : [y_-, y_+] \rightarrow [k_+, k_-] \text{ com } \begin{cases} k_1(y) = k_1(y), & \text{se } y \leq 0 \\ k_1(y) = -k_1(-y) - \eta, & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

$$k_2 : [y_-, y_+] \rightarrow [k_-, k_+ + \pi] \text{ com } \begin{cases} k_2(y) = k_2(y), & \text{se } y \leq 0 \\ k_2(y) = -k_2(-y) + \pi - \eta, & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

Tendo essas extensões de  $k_1(y)$  e  $k_2(y)$  podemos encontrar os conjuntos  $h_1^{-1}((-\infty, y])$  e  $h_2^{-1}((-\infty, y])$  para calcular a densidade de probabilidade  $f(y)$  do QRW de período dois.

Se  $y \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} h_1^{-1}((-\infty, y]) &= h_3^{-1}((-\infty, y]) = [-\pi, k_2(y) - \pi] \cup [k_1(y), k_2(y)] \cup [k_1(y) + \pi, \pi], \\ h_2^{-1}((-\infty, y]) &= h_4^{-1}((-\infty, y]) = [-\pi, k_1(-y) - \pi] \cup [k_2(-y) - \pi, k_1(-y)] \cup [k_2(-y), \pi]. \end{aligned}$$

E se  $y \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} h_2^{-1}((-\infty, y]) &= h_4^{-1}((-\infty, y]) = [k_1(y) - \pi, k_2(y) - \pi] \cup [k_1(y), k_2(y)], \\ h_1^{-1}((-\infty, y]) &= h_3^{-1}((-\infty, y]) = [k_2(-y) - \pi, k_1(-y)] \cup [k_2(-y), k_1(-y) + \pi]. \end{aligned}$$

Para facilitar a notação no teorema a seguir, introduzimos as seguintes definições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(y) := k_1(y) \\ \sigma_2(y) := k_1(-y) \\ \sigma_3(y) := k_1(y) + \pi \\ \sigma_4(y) := k_1(-y) - \pi \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_1(y) := k_2(y) \\ \tau_2(y) := k_2(-y) \\ \tau_3(y) := k_2(y) - \pi \\ \tau_4(y) := k_2(-y) - \pi \end{array} \right. .$$

**Teorema 5.** *Seja  $f(y)$  a densidade de probabilidade de  $Y$  tal que  $\frac{X_n}{n} \Rightarrow Y$ , ou seja, do QRW de período dois e matrizes  $A_0$  e  $A_1$ . Então,*

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{\mathbb{1}_{[y_-, y_+]}(y)}{\pi \sqrt{\Delta(y)}} \left[ \frac{\sqrt{I_1(y)} + \sqrt{I_2(y)}}{2} \right. \\ &\quad - \frac{y}{8} \left( \sqrt{I_1(y)} \sum_{j=1}^4 [g_\psi(\sigma_j(y)) + 2\Re\{Z(\sigma_j(y))\}] + \sqrt{I_2(y)} \sum_{j=1}^4 [g_\psi(\tau_j(y)) + 2\Re\{Z(\tau_j(y))\}] \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{8} \sum_{j=1}^4 [(-1)^j (g_\psi(\sigma_j(y)) + g_\psi(\tau_j(y)))] \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 [(-1)^j (\Im\{T(\sigma_j(y)) + T(\tau_j(y))\})] \\ &\quad \left. - \frac{By^2 + \sqrt{\Delta(y)}}{4(1-y^2)} \sum_{j=1}^4 (-1)^j \Im\{Z(\sigma_j(y))\} - \frac{By^2 - \sqrt{\Delta(y)}}{4(1-y^2)} \sum_{j=1}^4 (-1)^j \Im\{Z(\tau_j(y))\} \right] \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} T(k) &:= \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) e^{i(-\alpha+\beta+\nu)} \sqrt{p(1-q)} + \overline{\psi^{(3)}(k)} \psi^{(4)}(k) e^{i(-\gamma+\delta-\nu)} \sqrt{q(1-p)} \\ Z(k) &:= \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) e^{i(-\alpha+\beta)} \sqrt{\frac{1-p}{p}} + \overline{\psi^{(3)}(k)} \psi^{(4)}(k) e^{i(-\gamma+\delta)} \sqrt{\frac{1-q}{q}} \\ e \quad g_\psi(k) &:= |\psi^{(1)}(k)|^2 + |\psi^{(3)}(k)|^2 - |\psi^{(2)}(k)|^2 - |\psi^{(4)}(k)|^2 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Faremos apenas para  $y \geq 0$ , pois para  $y \leq 0$  é análogo. Do capítulo anterior,

temos que

$$\begin{aligned}
f(y) &= \sum_{j=1}^4 \sum_{l \in L_j} \frac{1}{2\pi} [p_j(k_{2,j,l}(y))k'_{2,j,l}(y) - p_j(k_{1,j,l}(y))k'_{1,j,l}(y)] \\
&= \frac{1}{2\pi} [(p_1 + p_3)(k_2(y) - \pi) + (p_1 + p_3)(k_2(y) \\
&\quad + (p_2 + p_4)(k_2(-y) - \pi) + (p_2 + p_4)(k_2(-y)))] k'_2(y) \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} [(p_1 + p_3)(k_1(y) + \pi) + (p_1 + p_3)(k_1(y) - \pi) \\
&\quad + (p_2 + p_4)(k_1(-y) - \pi) + (p_2 + p_4)(k_1(-y))] k'_1(y).
\end{aligned}$$

Assim, vamos calcular agora  $(p_1 + p_3)(k)$  e  $(p_2 + p_4)(k)$ .

$$\begin{aligned}
(p_1 + p_3)(k) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^4 |\psi^{(j)}(k)|^2 + g_\psi(k) \left( -h_1(k) + \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{\sqrt{I(k)}} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{I(k)}} \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} + \overline{\psi^{(3)}(k)} \psi^{(4)}(k) b_{01}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left( 1 + g_\psi(k) \left( -h_1(k) + \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{\sqrt{I(k)}} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{I(k)}} \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} + \overline{\psi^{(3)}(k)} \psi^{(4)}(k) b_{01}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(p_2 + p_4)(k) &= \frac{1}{2} \left( 1 + g_\psi(k) \left( -h_2(k) - \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{\sqrt{I(k)}} \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{I(k)}} \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} + \overline{\psi^{(3)}(k)} \psi^{(4)}(k) b_{01}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\}.
\end{aligned}$$

Simplificando  $b_{10}(k)e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})}$  e  $b_{01}(k)e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})}$ , temos

$$\begin{aligned}
b_{10}(k)e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} &= \sqrt{p(1-q)} e^{i(2k+\gamma+\beta+\frac{\theta+\phi}{2})} - \sqrt{(1-p)q} e^{i(\delta-\alpha-\theta+\frac{\theta+\phi}{2})}, \\
b_{01}(k)e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} &= \sqrt{p(1-q)} e^{i(2k+\alpha+\delta+\frac{\theta+\phi}{2})} - \sqrt{(1-p)q} e^{i(\beta-\gamma-\phi+\frac{\theta+\phi}{2})}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\gamma + \beta + \frac{\theta + \phi}{2} &= (\alpha + \gamma + \frac{\theta + \phi}{2}) - \alpha + \beta = \eta - \alpha + \beta \\
\delta - \alpha - \theta + \frac{\theta + \phi}{2} &= (\delta - \beta + \frac{\phi - \theta}{2}) - \alpha + \beta = \nu - \alpha + \beta \\
\alpha + \delta + \frac{\theta + \phi}{2} &= (\alpha + \gamma + \frac{\theta + \phi}{2}) - \gamma + \delta = \eta - \gamma + \delta \\
\beta - \gamma - \phi + \frac{\theta + \phi}{2} &= (-\delta + \beta - \frac{\phi - \theta}{2}) - \gamma + \delta = -\nu - \gamma + \delta.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
b_{10}(k)e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} &= e^{i(-\alpha+\beta)} \left( \sqrt{p(1-q)} e^{i(2k+\eta)} - \sqrt{(1-p)q} e^{i(\nu)} \right), \\
b_{01}(k)e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} &= e^{i(-\gamma+\delta)} \left( \sqrt{p(1-q)} e^{i(2k+\eta)} - \sqrt{(1-p)q} e^{i(-\nu)} \right).
\end{aligned}$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned}
& \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) e^{i(-\alpha+\beta)} \sqrt{q(1-p)} e^{i(2k+\eta)} \right\} \\
&= \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) e^{i(-\alpha+\beta)} \sqrt{q(1-p)} (\cos(2k+\eta) + i \sin(2k+\eta)) \right\} \\
&= \cos(2k+\eta) \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) e^{i(-\alpha+\beta)} \sqrt{q(1-p)} \right\} \\
&+ \sin(2k+\eta) \Re \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) e^{i(-\alpha+\beta)} \sqrt{q(1-p)} \right\}.
\end{aligned}$$

Definindo  $\Im(k) = \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) b_{10}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} + \overline{\psi^{(3)}(k)} \psi^{(4)}(k) b_{01}(k) e^{i(\frac{\theta+\phi}{2})} \right\}$  e agrupando os termos da expressão de  $\Im(k)$ , temos que

$$\begin{aligned}
\Im(k) &= \Im \left\{ \overline{\psi^{(1)}(k)} \psi^{(2)}(k) e^{i(-\alpha+\beta)} \left( \sqrt{q(1-p)} e^{i(2k+\eta)} - \sqrt{p(1-q)} e^{i\nu} \right) \right. \\
&+ \left. \overline{\psi^{(3)}(k)} \psi^{(4)}(k) e^{i(-\gamma+\delta)} \left( \sqrt{p(1-q)} e^{i(2k+\eta)} - \sqrt{q(1-p)} e^{-i\nu} \right) \right\} \\
&= -\Im \{T(k)\} + A \cos(2k+\eta) \Im \{Z(k)\} + A \sin(2k+\eta) \Re \{Z(k)\}.
\end{aligned}$$

Lembrando que  $\sqrt{I(k_1(y))} = \sqrt{I_1(y)}$  e  $\sqrt{I(k_2(y))} = \sqrt{I_2(y)}$ , temos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{I(k_1(\pm y) \pm \pi)} &= \sqrt{I(k_1(\pm y))} = \sqrt{I(k_1(y))} = \sqrt{I_1(y)} \\
\sqrt{I(k_2(\pm y) \pm \pi)} &= \sqrt{I(k_2(\pm y))} = \sqrt{I(k_2(y))} = \sqrt{I_2(y)},
\end{aligned}$$

pois  $\sqrt{I(k)}$  é  $\pi$ -periódica e  $\cos(2k_j(y) + \eta) = \cos(2k_j(-y) + \eta)$ .

Partimos agora para o cálculo de  $f(y)$ .

$$\begin{aligned}
f(y) &= \frac{1}{\pi \sqrt{\Delta(y)}} \left[ \frac{\sqrt{I_1(y)} + \sqrt{I_2(y)}}{2} - \frac{y}{8} \left( \sqrt{I_1(y)} \sum_{j=1}^4 g_\psi(\sigma_j(y)) + \sqrt{I_2(y)} \sum_{j=1}^4 g_\psi(\tau_j(y)) \right) \right. \\
&- \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{8} \sum_{j=1}^4 (-1)^j (g_\psi(\sigma_j(y)) + g_\psi(\tau_j(y))) \\
&\left. - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 (-1)^j (\Im(\sigma_j(y)) + \Im(\tau_j(y))) \right].
\end{aligned}$$

Usando  $\Im(k) = -\Im \{T(k)\} + A \cos(2k+\eta) \Im \{Z(k)\} + A \sin(2k+\eta) \Re \{Z(k)\}$ , temos que a última parcela de  $f(y)$  é

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 (-1)^j (\Im(\sigma_j(y)) + \Im(\tau_j(y))) = - \sum_{j=1}^4 (-1)^j (\Im \{T(\sigma_j(y))\} + \Im \{T(\tau_j(y))\}) \\
&+ \frac{By^2 + \sqrt{\Delta(y)}}{(1-y^2)} \sum_{j=1}^4 (-1)^j \Im \{Z(\sigma_j(y))\} + \frac{By^2 - \sqrt{\Delta(y)}}{(1-y^2)} \sum_{j=1}^4 (-1)^j \Im \{Z(\tau_j(y))\} \\
&+ \frac{y}{2} \left( \sqrt{I_1(y)} 2 \sum_{j=1}^4 \Re \{Z(\sigma_j(y))\} + \sqrt{I_2(y)} 2 \sum_{j=1}^4 \Re \{Z(\tau_j(y))\} \right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
f(y) &= \frac{\mathbb{1}_{[y_-, y_+]}(y)}{\pi \sqrt{\Delta(y)}} \left[ \frac{\sqrt{I_1(y)} + \sqrt{I_2(y)}}{2} \right. \\
&- \frac{y}{8} \left( \sqrt{I_1(y)} \sum_{j=1}^4 [g_\psi(\sigma_j(y)) + 2\Re\{Z(\sigma_j(y))\}] + \sqrt{I_2(y)} \sum_{j=1}^4 [g_\psi(\tau_j(y)) + 2\Re\{Z(\tau_j(y))\}] \right) \\
&- \frac{\sqrt{(1-p)(1-q)} \sin \nu}{8} \sum_{j=1}^4 [(-1)^j (g_\psi(\sigma_j(y)) + g_\psi(\tau_j(y)))] \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 [(-1)^j (\Im\{T(\sigma_j(y)) + T(\tau_j(y))\})] \\
&- \left. \frac{By^2 + \sqrt{\Delta(y)}}{4(1-y^2)} \sum_{j=1}^4 (-1)^j \Im\{Z(\sigma_j(y))\} - \frac{By^2 - \sqrt{\Delta(y)}}{4(1-y^2)} \sum_{j=1}^4 (-1)^j \Im\{Z(\tau_j(y))\} \right].
\end{aligned}$$

□

Obs.: O caso  $p \neq q$  e  $|\cos(\nu)| < 1$  foi excluído, pois para o período  $1$   $p = q$  e  $\cos(\nu) = 1$ , mas a distribuição gerada pelo Teorema 4 é diferente dada pelo Teorema 1 de Konno [8]. Ou seja, o Teorema 4 gera para  $p = q, \alpha = \gamma, \beta = \delta, \theta = \phi$ .

$$f(y) = \frac{\left( \sqrt{p(p-2)} + \sqrt{(1-y^2)^2 - (1-p)(2y\sqrt{p^2-y^2} - (1-y^2)^2)} \right) (1-y)}{2\pi(1-y^2)(p^2-y^2)}$$

e a densidade probabilidade limite do passeio aleatório quântico de período 1 é

$$f(y) = \frac{\sqrt{1-p^2}(1-y)}{\pi(1-y^2)\sqrt{p^2-y^2}},$$

segundo [6].

**Corolário 2.** Se  $\hat{\psi}_0 = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(k) \\ \psi^{(2)}(k) \\ \psi^{(3)}(k) \\ \psi^{(4)}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \\ \psi^{(3)} \\ \psi^{(4)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ , ou seja, se o estado inicial está

confinado nos primeiros dois sítios da rede, então

$$\begin{aligned}
f(y) &= \frac{\sqrt{I_1(y)} + \sqrt{I_2(y)}}{2\pi \sqrt{\Delta(y)}} \left[ 1 - y \left( |\psi^{(1)}|^2 + |\psi^{(3)}|^2 - |\psi^{(2)}|^2 - |\psi^{(4)}|^2 + \right. \right. \\
&+ \left. \left. 2\Re \left\{ \overline{\psi^{(1)}} \psi^{(2)} e^{i(-\alpha+\beta)} \sqrt{\frac{1-p}{p}} + \overline{\psi^{(3)}} \psi^{(4)} e^{i(-\gamma+\delta)} \sqrt{\frac{1-q}{q}} \right\} \right) \right] \mathbb{1}_{[y_-, y_+]}(y),
\end{aligned}$$

com

$$y \in \left[ -\sqrt{\frac{1+A^2-B^2 - \sqrt{(1+A^2-B^2)^2 - 4A^2}}{2}}, \sqrt{\frac{1+A^2-B^2 - \sqrt{(1+A^2-B^2)^2 - 4A^2}}{2}} \right].$$

Um artigo que é similar a este corolário é [8] em que os autores do artigo consideram evolução temporal periódica, isto é, evoluir no tempo 1 com a matriz unitária  $A_1$  e no tempo 2 com a matriz  $A_0$ , no tempo 3 com a  $A_1$  e no 4 com a  $A_0$  e assim por diante. No artigo [8], é argumentado que esta evolução equivale a considerar o ambiente periódico de período dois e enunciam que a densidade de probabilidade limite é a  $f(y)$  do corolário 2 .

**Corolário 3.** *Se o estado inicial é  $\rho = \sum_{j=1}^4 t_j |e_j\rangle\langle e_j|$  com  $\sum_{j=1}^4 t_j = 1$  e  $\{e_j\}_{j=1}^4$  a base canônica do  $\mathbb{C}^4$ , então*

$$f(y) = \frac{\sqrt{I_1(y)} + \sqrt{I_2(y)}}{2\pi\sqrt{\Delta(y)}} [1 - y(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)] \mathbf{1}_{[y-, y+]}(y) .$$

Suponha que  $t_1 = t_2$  e  $t_3 = t_4$ , por exemplo  $\rho = \frac{1}{2}|e_1\rangle\langle e_1| + \frac{1}{2}|e_2\rangle\langle e_2|$ , isto é, a matriz densidade do estado quântico da partícula é com probabilidade  $\frac{1}{2}$  o estado  $(1, 0)$  no sítio  $0 \in \mathbb{Z}$  e com probabilidade  $\frac{1}{2}$  o estado  $(0, 1)$  no sítio  $0 \in \mathbb{Z}$ . Então  $f(y)$  é simétrica em relação a variável  $y$ . E o gráfico da função  $f$  é o seguinte:

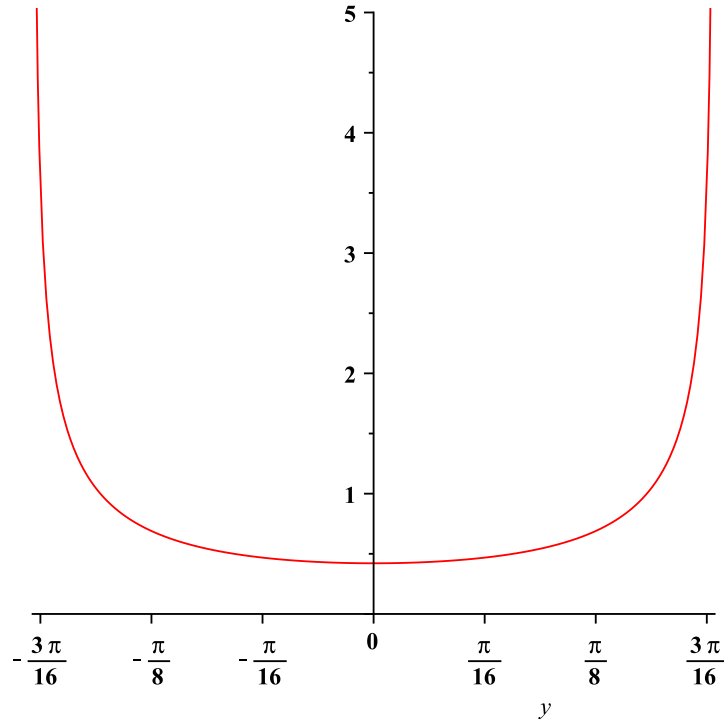


Figura 4.2: Gráfico de  $f(y)$  com  $p = \frac{4}{10}, \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{4}, \theta = \pi$  e  $q = \frac{7}{10}, \gamma = \frac{\pi}{5}, \delta = \frac{\pi}{7}, \phi = \frac{\pi}{2}$ .

**Corolário 4.** *Se o estado inicial é  $\rho = |(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\rangle\langle(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})|$ , então*

$$f(y) = \frac{\sqrt{I_1(y)} + \sqrt{I_2(y)}}{2\pi\sqrt{\Delta(y)}} F(y) \mathbf{1}_{[y-, y+]}(y),$$



*com*

$$F(y) = 1 - \frac{y}{2} \left( \sqrt{\frac{1-p}{p}} \cos(-\alpha + \beta) + \sqrt{\frac{1-q}{q}} \cos(-\gamma + \delta) \right).$$

## Capítulo 5

# Conclusões e Perspectivas

Na presente monografia conclui-se que pode-se obter a evolução temporal do passeio aleatório quântico em um ambiente periódico de período  $N$  como uma matriz  $2N \times 2N$  e coeficientes dependentes de uma variável  $k \in [-\pi, \pi)$ . Também pode-se obter a convergência da variável aleatória posição através do método de Grimmett, Janson, Scudo [3] e obter a densidade de probabilidade limite do passeio aleatório quântico em um ambiente aleatório em função da diagonalização da matriz evolução temporal  $2N \times 2N$  e do estado quântico da partícula no tempo zero. Assim, pode-se fazer o cálculo da densidade de probabilidade limite do caso que em o período do ambiente é dois com matriz de rotação dos graus de liberdade internos gerais  $A_0$  e  $A_1 \in U_2(\mathbb{C})$ .

As perspectivas dessa dissertação são estudar que mais pode-se obter da função densidade de probabilidade do passeio aleatório quântico em ambiente periódico descrita no Teorema 3 do capítulo 3 e calcular a densidade de probabilidade limite do período 3 e 4. O autor acredita que pode-se obter uma expressão fácil do polinômio característico do ambiente periódico. Também pode-se estudar o ambiente geral não periódico dado por matrizes  $A_x \in U_2(\mathbb{C})$  ou o caso em que essas matrizes são escolhidas ao acaso tornando-se um problema de matrizes aleatórias.

# Bibliografia

- [1] AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Quantum random walks. *Phys. Rev. A*, 48, 1687-1690, 1993.
- [2] BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*. 3rd ed. , Ed. Wiley, 1998.
- [3] GRIMMETT, G.; JANSON, S.; SCUDO, P.F. Weak limits for quantum random walks. *Phys. Rev. E*, 69, 026119, 2004. (arXiv:quant-ph/0309135)
- [4] KEMPE, J. Quantum random walk - an introductory overview. *Cont. Phys.*, 44, 307-327, 2003, (arXiv:quant-ph/0303081).
- [5] KONNO, N. One-dimensional discrete-time quantum walks on random environments. *Quant. Inf. Proc.* 8, 387399, 2009, (arXiv:0904.0392).
- [6] KONNO, N. Quantum Walks. In: *Quantum Potential Theory*, Franz Schürmann Editions, *Lec. N. Math.*, 1954, 309-452, 2009.
- [7] LINDEN, N.; SHARAM, J. Inhomogeneous Quantum Walks. *ArXiv:0906.3692v1*, 2009.
- [8] MACHIDA, T.; KONNO, N. Limit theorem for time-dependent coined quantum walk on the line. *arXiv:1004.0425v2*, 2010.
- [9] RIBEIRO, P.; MILMAN, P.; MOSSERI, R. Aperiodic quantum random walks. *Phys. Rev. Lett.* 93, 190503, 2004, (arXiv:quant-ph/0406071).
- [10] TAO, T. 254A, Notes3a: Eigenvalues and sum of hermitian matrices. **What's new**, Disponível em: [http : //terrytao.wordpress.com/2010/01/12/254a - notes - 3a - eigenvalues - and - sums - of - hermitian - matrices/](http://terrytao.wordpress.com/2010/01/12/254a-notes-3a-eigenvalues-and-sums-of-hermitian-matrices/) . Acesso em : 21 mar. 2013.