Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Funções Elípticas e Equações Diferenciais, com aplicação a interação não gravitacional

Dissertação de Mestrado

THIAGO DA SILVA E SILVA

Porto Alegre, 11 de abril de 2013

Dissertação submetida por Thiago da Silva e Silva[*] , como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Luís Gustavo Doninelli Mendes

Banca examinadora:
Prof. Dr. Luís Gustavo Doninelli Mendes (PPGMat - UFRGS, ORIENTADOR)
Prof. Dr. Fábio Souto de Azevedo (PPGMap - UFRGS)
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPGMat - UFRGS)
Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha (PPGMat - UFRGS)

[*]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por estarem sempre presentes nos momentos em que mais precisei e aos meus familiares por me ajudarem a seguir meus objetivos. Um muito obrigado especial a minha tia, Helena, por todo apoio e carinho.

Agradeço ao meu orientador, Professor Luis Gustavo Mendes, pela dedicação e empenho em todas as etapas da dissertação. Mais especificamente, pela amizade que construímos e que espero manter.

Agradeço aos meus amigos da pós-graduação pelo companheirismo em todos os momentos. Que a nossa amizade continue firme e forte daqui pra frente.

Agradeço ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul por me proporcionar a experiência de trabalhar e estudar ao mesmo tempo, além de adquirir novos conhecimentos. Foi, sem dúvida, um grande enriquecimento na área de Equações Diferenciais.

Agradeço aos professores que me guiaram até aqui. Em especial, aos professores Lino Soares, Andrei Bourchtein e Lioudmilla Bourchtein por sempre me incentivarem a continuar meus estudos. Aos professores do PPGMat por me proporcionarem novos conhecimentos e estarem sempre presentes para eventuais dúvidas. Também quero agradecer à banca examinadora pela disposição em examinar este trabalho e pelas inúmeras correções e sugestões.

Enfim, quero dizer a todos que, de uma forma ou de outra, me ajudaram a concretizar este sonho: MUITO OBRIGADO!

Resumo

Neste trabalho nos interessamos em expor algumas ligações entre funções elípticas e equações diferenciais não-lineares. Mais especificamente, focamos na integração de alguns tipos de equações diferenciais através de funções elípticas e expomos uma aplicação a um problema mecânico de atração central não-gravitacional.

Abstract

In this work we expose relationships between elliptic functions and nonlinear differential equations. We give an application to a mechanical problem of a non-gravitacional central force.

Índice

Introdução

A teoria de funções elípticas se desenvolveu numa das mais elegantes áreas clássicas da matemática, tendo como uma de suas fontes e motivações os problemas da mecânica analítica. Dois de seus autores fundamentais foram Karl Wilhelm Theodor Weierstrass e Carl Gustav Jakob Jacobi.

No capítulo 1, apresentamos as noções fundamentais de funções elípticas complexas e demonstramos a equação diferencial da função de Weierstrass, bem como relações entre funções elípticas e algumas das notáveis fórmulas aditivas (expondo e detalhando o material de [1] e [2]).

Originalmente as funções elípticas foram introduzidas como funções inversas de integrais, muitas delas importantes nas aplicações mecânicas. E os autores clássicos produziram equações diferenciais para elas. Mas é possível inverter o processo e introduzir as funções fundamentais de Jacobi via sistemas de equações diferenciais, conforme [4].

No capítulo 2, fórmulas aditivas serão usadas para integrar um tipo de equação diferencial de grau quatro via funções elípticas. Nesse ponto, introduzimos a função seno de Jacobi via esse mesmo tipo de equação. E relembraremos as expressões originais de algumas funções de Jacobi como funções inversas de integrais elípticas, que serão usadas no próximo capítulo.

A aplicação que temos em vista é a integração de equações do movimento em campos centrais não-gravitacionais.

Uma das propriedades das funções de Jacobi é que essas funções degeneram em funções trigométricas (circulares ou hiperbólicas) quando um parâmetro κ tende a 0 ou 1. Quando se perturba o problema de atração gravitacional do tipo $\frac{1}{r^2}$ para $\frac{1}{r^k}$ pode-se esperar que se possa ainda integrar as equações diferenciais do movimento via as funções de Jacobi.

Mas por um resultado de Wittaker e Watson (vide [1]) e Broucke (vide [5]) são poucos os valores de k que permitem integração por funções elípticas. Por exemplo, $k = 4$, o qual será focado em todo detalhe no capítulo 3 deste trabalho, expandindo a seção 5.3 de [3].

O estudo qualitativo das soluções para $\frac{1}{r^k}$, $\forall k > 0$ foi feito em [7] e o caso $k = 4$ dá <u>qualitativamente</u> o aspecto do caso geral $k > 3$.

Capítulo 1

Funções Elípticas sobre $\mathbb{C}$

Vamos apresentar neste capítulo alguns conceitos e proposições sobre Funções Elípticas que serão necessários ao longo da dissertação, expondo material de [1] e [2].

No Apêndice reunimos fatos de Variável Complexa que usaremos ao longo do trabalho.

1.1 Definição e propriedades gerais

Começaremos com algumas definições e propriedades sobre Funções Elípticas que podem ser encontrados em [1] e [2].

Definição 1.1.1. *Sejam ω, ω' dois números (reais ou complexos) cuja razão não seja um número puramente real. Uma função que satisfaça as equações $f(z+2\omega) = f(z)$ e $f(z+2\omega') = f(z)$, para todos os valores de z para os quais f(z) existe, é chamada função duplamente periódica de z, com períodos 2ω e $2\omega'$.*

Definição 1.1.2. *Dado um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, chamaremos de* <u>*célula*</u> *ou* <u>*paralelogramo periódico*</u> *ao paralelogramo ABCD, onde $A = z_0$,$B = z_0+2\omega$,$C = z_0+2\omega+2\omega'$ e $D = z_0+2\omega'$.*

Definição 1.1.3. *Uma função meromorfa e duplamente periódica é chamada uma função elíptica.*

Observe que se tivermos uma função duplamente periódica sem pólos, isso implica que teremos uma função inteira (isto é, definida em todo o plano complexo) e limitada (pois todos seus valores se resumem a avaliar uma única célula e uma função contínua num compacto assume máximo e mínimo). O teorema de Liouville, conforme o Apêndice, nos mostra que essa função só pode ser constante.

Portanto só faz sentido trabalharmos com funções que possuam pólos. Assim, definimos o seguinte.

Definição 1.1.4. *A ordem de uma função elíptica é o número de pólos que ela possui no paralelogramo periódico, observando que:*

Um pólo de ordem p é contado p-vezes;

*Se o pólo está nos vértices (ou nas arestas), então apenas um deles é contado.**

Com a definição de ordem dada, afirmamos que "funções elípticas são pelo menos de ordem dois". Isso resulta diretamente do teorema abaixo.

Teorema 1.1.1. *A soma dos resíduos nos pólos de uma função elíptica f em seu paralelogramo periódico é zero.*

Demonstração: Podemos escolher o vértice $O(z = z_0)$ tal que o paralelogramo periódico $OABC$ contenha todos os pólos. Por um lado, sabemos que:

*Para evitar erros de contagem, é melhor escolher o paralelogramo periódico tal que todos os pólos se encontrem dentro da célula.

$$\int_{OABC} f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f)$$

Por outro, temos que tanto as integrais $\int_{OA}$ e $\int_{BC}$ quanto as $\int_{AB}$ e $\int_{CO}$ se cancelam, pois:

$\displaystyle\int_{OA} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_0+2\omega} f(z)dz$

Fazendo $u = z - 2\omega'$, vem:

$\displaystyle\int_{BC} f(z)dz = \int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'} f(z)dz = \int_{z_0+2\omega}^{z_0} f(u+2\omega')du$

Lembrando que $f(u+2\omega') = f(u)$ por causa da periodicidade de f e utilizando z como variável muda ao invés de u, obtemos:

$\displaystyle\int_{BC} f(z)dz = \int_{z_0+2\omega}^{z_0} f(u)du = \int_{z_0+2\omega}^{z_0} f(z)dz = -\int_{OA} f(z)dz$

De modo análogo,

$\displaystyle\int_{CO} f(z)dz = \int_{z_0+2\omega'}^{z_0} f(z)dz$

Fazendo $v = z - 2\omega$, vem:

$\displaystyle\int_{AB} f(z)dz = \int_{z_0+2\omega}^{z_0+2\omega+2\omega'} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_0+2\omega'} f(v+2\omega)dv$

Como $f(v+2\omega) = f(v)$ pela periodicidade de f e utilizando z como variável muda ao invés de v, chegamos a:

$\displaystyle\int_{AB} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_0+2\omega'} f(z)dz = -\int_{CO} f(z)dz$

Logo,

$\displaystyle\int_{OABC} f(z)dz = \int_{OA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CO} f(z)dz = 0$

Portanto, o lado esquerdo da equação inicial é zero, o que implica em

$$\sum Res(f) = 0$$

■

A seguir, outra consequência imediata do teorema acima:

Corolário 1.1.1. *O número de zeros de uma função elíptica no paralelogramo periódico é igual a sua ordem; isto é, ao número de pólos*

Demonstração: Seja f uma função elíptica. Então f' também é elíptica e a função φ definida por $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ também o é.

Por um lado, temos que a soma dos resíduos de φ no paralelogramo periódico é igual a:

$$\sum(Res(\varphi)) = Z(f) - P(f)$$

,

onde $Z(f)$ e $P(f)$ denotam, respectivamente, o número de zeros e o número de pólos de f.

Por outro, φ é uma função elíptica. Logo, $\sum(Res(\varphi)) = 0$.

Assim, segue o resultado. ■

Corolário 1.1.2. *Se uma função elíptica g tem ordem $N > 0$, então g assume cada valor $c \in \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ exatamente N vezes.*

Demonstração: Esta é a definição de N se $c = \infty$; Logo, podemos assumir que $c \in \mathbb{C}$. Tomando $f = g - c$, notamos que f é elíptica e tem ordem N. Pelo corolário (1.1.1), f tem exatamente N zeros, isto é, g assume N vezes o valor c. ■

Abaixo veremos um teorema que relaciona a soma dos zeros com a soma dos pólos.

Teorema 1.1.2. *A soma dos zeros de uma função elíptica menos a soma dos pólos no paralelogramo periódico é igual a um de seus períodos, isto é, w.*

Demonstração: Seja f uma função elíptica com período $w = 2m\omega + 2m'\omega'$, onde

$m, m' \in \mathbb{Z}$. Seja s a ordem de f e α_k, β_k com $(k = 1, ..., s)$ seus respectivos zeros e pólos.

Então
$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k - \sum_{k=1}^{s} \beta_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{OABCO} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$$

onde os vértices de OABC são z_0, $z_0+2\omega$, $z_0+2\omega+2\omega'$ e $z_0+2\omega'$ respectivamente e não existem zeros nem pólos na fronteira.

Primeiramente, considere $\int_{OA}$ e $\int_{BC}$:

$$\int_{OA} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \int_{z_0}^{z_0+2\omega} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$$

$$\int_{BC} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \int_{z_0+2\omega}^{z_0} (u+2\omega') \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

onde a última igualdade resulta da substituição $z = u + 2\omega'$

Utilizando z como variável muda no lado direito da última igualdade de $\int_{BC}$, vem:

$$\left(\int_{OA} + \int_{BC} \right) \frac{zf'(z)}{f(z)} dz =$$
$$= - \int_{z_0}^{z_0+2\omega} 2\omega' \frac{f'(z)}{f(z)} dz =$$
$$= -2\omega' \log f(z)]_{z_0}^{z_0+2\omega} = -2\omega' i[-2m'\pi] = 2m'\omega'[2\pi i]$$

onde $m' \in \mathbb{Z}$ e o termo $-2i\pi m'$ surge da definição de logaritmo complexo.

Da mesma forma, obtemos:

$$\left(\int_{AB} + \int_{CO} \right) \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = 2m\omega[2\pi i]$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e o termo $-2i\pi m$ também surge da definição de logaritmo complexo.

Assim, $\frac{1}{2\pi i} \int_{OABCO} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = 2m\omega + 2m'\omega' = w$ e o teorema fica demonstrado.

■

1.2 A função $\wp(z)$

1.2.1 Definição e a equação diferencial de $\wp(z)$

Já vimos que funções elípticas são pelo menos de ordem dois, conforme teorema (1.1.1).

Dentre as funções elípticas de ordem exatamente igual a dois, apresentaremos agora[†] a função $\wp(z)$ de Weierstrass, caracterizada por possuir um pólo duplo em cada paralelogramo periódico.

Nessa seção, estaremos preocupados em construir a função $\wp(z)$ de acordo com a sua caracterização. Sendo assim, temos que:

Como $\wp$ tem um pólo duplo, podemos escolher $w = 2m\omega + 2m'\omega'$ como seu "único"(entende-se por único no paralelogramo considerado) pólo, onde 2ω e $2\omega'$ são os períodos da função $\wp$ e $m, m' \in \mathbb{Z}$.

Além disso, como a soma dos resíduos de uma função elíptica é zero, a parte principal de f no pólo é $\frac{A}{(z-w)^2}$. Tome, por simplicidade, $A = 1$. Com os dados acima, construímos a função elíptica de Weierstrass:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + {\sum}' \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

Onde: $\sum'$ denota o somatório sobre $m, m' \in \mathbb{Z}$ com o termo $m = m' = 0$ excluído.

A seguir, algumas propriedades imediatas (ou quase imediatas) da função $\wp(z)$:

[†]Também temos as funções elípticas de Jacobi, cuja ordem é exatamente dois, mas que se caracterizam por possuírem dois pólos simples. Ao invés de introduzi-la neste Capítulo, optamos por apresentá-la através de uma equação diferencial no Capítulo 2

1) $\wp(z)$ é uma função duplamente periódica[‡] $(2\omega, 2\omega')$ com w como seu único pólo (em cada paralelogramo periódico);

2) Na vizinhança da origem, sua parte principal é $\dfrac{1}{z^2}$;

3) $\wp(z) - \dfrac{1}{z^2} = 0$ quando $z \longrightarrow 0$

Afirmação 1.2.1. *As três propriedades acima determinam $\wp$ completamente.*

Demonstração: De fato, se existisse f com as mesmas propriedades, então $f(z) - \wp(z)$ seria uma função duplamente periódica sem singularidades (por 1 e 2); Logo, pelo teorema (4.0.5), $f(z) - \wp(z) = C$, C constante. Pela terceira propriedade, C=0. Assim $f(z) = \wp(z)$.

∎

4) $\wp(z)$ é uma função par e $\wp'(z)$ é ímpar;

Observe que, na vizinhança da origem, $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ pode ser expandida em série de potências.

Para tal, considere $g(z) := \frac{1}{(z-w)^2}$. Daí:

$g(0) = \frac{1}{w^2}$;

$g'(z) = \frac{-2}{(z-w)^3}$; $g'(0) = \frac{2}{w^3}$

e, sucessivamente, obtemos:

$$g(z) - g(0) = zg'(0) + z^2 g''(0) + \frac{z^3}{3!} g'''(0) + ...$$

isto é,

[‡]A convergência de $\wp(z)$ é baseada em ideias clássicas e apresentada - por exemplo - em [2]. Como estamos interessados mais em apresentar propriedades, optamos por não apresentá-la aqui.

$$\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2z}{w^3} + \frac{3z^2}{w^4} + ... + (n+1)\frac{z^n}{w^{n+2}} + ...$$

Agora, perceba que os termos ímpares, quando somados, se tornam nulos pois:

Afirmação 1.2.2.

$$\sum{}' \frac{1}{w^{2n-1}} = 0$$

Demonstração: Sejam $m, m' \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos.

Se na soma ocorre o termo

$$\frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^{2n-1}} \tag{1.1}$$

então, como $\sum'$ percorre $m, m' \in \mathbb{Z}$ (exceto $m = m' = 0$), ocorre também o termo

$$\frac{1}{(2(-m)\omega + 2(-m')\omega')^{2n-1}} \tag{1.2}$$

que é igual a:

$$\frac{1}{(-1)^{2n-1}(2m\omega + 2m'\omega')^{2n-1}} = \frac{-1}{(2m\omega + 2m'\omega')^{2n-1}}$$

Logo, a soma de (1.1) com (1.2) é nula. Como $m, m' \in \mathbb{Z}$ são arbitrários, segue o resultado.

∎

Finalmente, com a afirmação acima obtemos a seguinte expansão da função de Weierstrass:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_3 z^4 + ... + c_n z^{2n-2} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n-2} \tag{1.3}$$

onde:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 3\sum{}' \frac{1}{w^4}, \quad c_3 = 5\sum{}' \frac{1}{w^6}$$
$$c_n = (2n-1)\sum{}' \frac{1}{w^{2n}}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Diferenciando (1.3), vem:

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_3 z^3 + ... + (2n-2)c_n z^{2n-3} + ... \tag{1.4}$$

1.2.2 A equação diferencial de $\wp(z)$ e algumas consequências:

Queremos estudar a relação algébrica existente entre $\wp(z)$ e $\wp'(z)$. Após obter tal relação, desejamos mostrar a ligação existente entre os semiperíodos ω e ω' da função $\wp(z)$ tanto com seus zeros como com certas constantes η, η', definidas posteriormente.

Proposição 1.2.1. *A relação algébrica entre $\wp(z)$ e $\wp'(z)$ é dada por*

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

onde:

$$g_2 = 60\sum{}' w^{-4} \qquad e \qquad g_3 = 140\sum{}' w^{-6}$$

Demonstração: Considere as expansões em série de potências de $\wp(z)$ e de $\wp'(z)$, dadas pelas equações (1.3) e (1.4). Note que:

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{3c_2}{z^2} + 3c_3 + ...$$

$$\wp'^2(z) = \frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_3 + ...$$

onde os termos que não aparecem nas equações acima se tornam nulos quando $z = 0$.

Com o objetivo de eliminar o termo z^{-6} quando somarmos as equações acima, multiplique a primeira equação por -4. Daí,

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) = -\frac{20c_2}{z^2} - 28c_3 + ...$$

A idéia aqui é usar fortemente a terceira propriedade da função $\wp(z)$, isto é:

$\wp(z) - \dfrac{1}{z^2} = 0$ quando $z \longrightarrow 0$

Agora, observe que as funções elípticas:

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) \quad \text{e} \quad -20c_2\wp(z) - 28c_3$$

têm os *mesmos períodos e partes principais.*

Pelo teorema (4.0.5), a diferença entre essas duas funções é constante.

E pelo fato de que a diferença é nula em $z = 0$, resulta que elas são iguais.

Pondo $g_2 := 20c_2$, $g_3 := 28c_3$ e lembrando de (1.3), segue o resultado.

■

A seguir, uma consequência imediata da equação obtida acima.

Corolário 1.2.1. $\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \dfrac{g_2}{2}$

Demonstração: Basta derivar a equação da proposição acima e dividir ambos os membros por $2\wp'(z)$. Segue o resultado.

■

1.2.3 Cúbicas projetivas na forma de Weierstrass

A relação algébrica entre $\wp(z)$ e $\wp'(z)$ que obtivemos acima é de extrema importância. De fato, considere o caso especial de uma curva cúbica na chamada "forma de Weierstrass", cujas coordenadas (x', y') satisfazem:

$$(y')^2 = 4(x')^3 - g_2(x') - g_3$$

onde $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$.

De acordo com a proposição (1.2.1), as coordenadas dessa curva podem ser expressas em termos de funções elípticas:

$$x' = \wp(u) \qquad\qquad y' = \wp'(u) \tag{1.5}$$

e os pares (x', y') estão em correspondência um-a-um com u dentro de uma célula. Antes de mostrarmos isso, note que $\wp(0+w) = \wp(0) = \infty$ e $\wp'(0) = \infty$. Além disso, mostraremos na afirmação (1.2.3) que $\wp(\omega_k + w) = \wp(\omega_k) = e_k$ e $\wp'(\omega_k + w) = \wp'(\omega_k) = 0$. Seja θ a aplicação que leva u nos pontos $(x' = \wp(u), y' = \wp'(u))$ da cúbica. Temos então que:

$$\theta(0 + w) = \theta(0) = (\infty, \infty) \quad \text{e} \quad \theta(\omega_k + w) = \theta(\omega_k) = (e_k, 0)$$

Para cada ponto restante (x', y') da cúbica, temos $x' \neq \infty, e_k$ e $y' \neq \infty, 0$. Como $\wp(u)$ é par e de ordem 2, segue do corolário (1.1.2) que para cada $x' \neq \infty, e_k$ existem duas soluções distintas $u = \pm u_1$ para $\wp(u) = x'$. Como $\wp'(u)$ é uma função ímpar, $\wp'(u_1) \neq \wp'(-u_1)$, pois $\wp'(u_1) \neq 0$. Então existe um único u em cada célula satisfazendo $\theta(u) = (x', y')$ e, portanto, θ é uma bijeção[§].

[§]Maiores detalhes sobre a demonstração podem ser encontrados na referência [8].

O ponto $u = 0$ é pólo tanto de $\wp(z)$ quanto de $\wp'(z)$. Então é natural estendermos o plano $(x', y') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ao plano projetivo, o que é feito adjuntando mais dois sistemas de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2):

$$x_1 := \frac{x'}{y'} \quad \text{e} \quad y_1 := \frac{1}{y'}$$
$$x_2 := \frac{1}{x'} \quad \text{e} \quad y_2 := \frac{y'}{x'}$$

.

Temos então que:

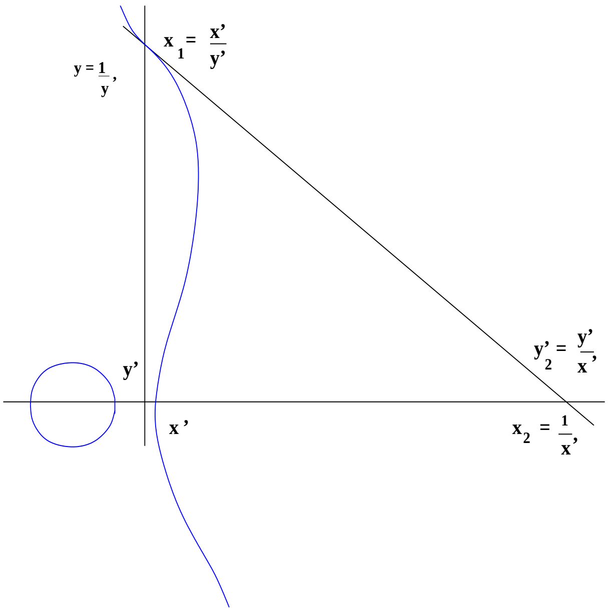
$$y_1 = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\wp'(u)} = -\frac{1}{2}u^3 + O(u^7)$$

e

$$x_1 = \frac{x'}{y'} = \frac{\wp(u)}{\wp'(u)} = -(\frac{1}{2})u - (\frac{1}{20})g_2 u^5 + O(u^7),$$

ou seja $(x_1, y_1) \sim (u, u^3)$ o que significa que temos uma *inflexão*.

Ou seja, o completamento projetivo da cúbica em (x', y') tem inflexão com a reta no infinito $y_1 = 0$, quando o parâmetro $u = 0$.



Cúbica no plano projetivo

Vamos continuar estabelecendo a correspondência entre valores do parâmetro u e a cúbica:

$$(y')^2 = 4(x')^3 - g_2x' - g_3$$

Agora, sejam e_1, e_2, e_3 as raízes de $4(x')^3 - g_2x' - g_3$. Então temos:

$$4(x')^3 - g_2x' - g_3 = 4(x' - e_1)(x' - e_2)(x' - e_3)$$

e, portanto, obtemos:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0; \qquad e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = \frac{-g_2}{4}; \qquad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4} \quad (1.6)$$

Pela proposição (1.2.1) e pelas considerações acima, vemos que a cada raiz e_k do polinômio cúbico em $\wp(z)$ (k=1,2,3), correspondem os três zeros z_k de $\wp'(z)$ no paralelogramo periódico, isto é,

$$\wp(z_k) = e_k$$

O que vamos mostrar a seguir é que os zeros de $\wp'(z)$ estão estritamente relacionados com os semiperíodos da função $\wp(z)$.

Afirmação 1.2.3. *$z_k = \omega_k$ (k=1,2,3), onde*

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = -\omega - \omega' \quad e \quad \omega_3 = \omega'$$

Demonstração: Do fato de $\wp'(z)$ ser periódica e ímpar, vem:

$$\wp'(z + 2\omega) = \wp'(z) = -\wp'(-z)$$

Tome $z = -\omega$ na equação acima. Obtemos:

$$\wp'(\omega) = -\wp'(\omega)$$

Se ω não é pólo, temos que $\wp'(\omega)$ é finito e assim obtemos:

$$2\wp'(\omega) = 0$$

donde $\wp'(\omega) = 0$.

Da mesma forma, chegamos à $\wp'(\omega') = 0$ e $\wp'(-\omega - \omega') = 0$.

■

Assim, temos $\wp(\omega_1) = e_1$, $\wp(\omega_2) = e_2$ e $\wp(\omega_3) = e_3$, onde $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = -\omega - \omega'$ e $\omega_3 = \omega'$.

1.2.4 Expressão de uma função elíptica em termos de $\wp(z)$

Vamos mostrar que toda função elíptica se escreve em função de $\wp(z)$.

Como $\wp(z)$ é uma função par, precisamos dividir em dois casos: f par e f ímpar. Para ambos os casos, considere o paralelogramo $ABCD$, onde

$$A = \omega + \omega', \quad B = \omega' - \omega, \quad C = -\omega' - \omega \quad \text{e} \quad D = \omega - \omega'$$

CASO 1: Seja $f = f_1$ par.

Temos que dentro do paralelogramo $ABCD$, os zeros e os pólos aparecem aos pares. Respectivamente, temos $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, ..., \pm\alpha_k$ e $\pm\beta_1, \pm\beta_2, ..., \pm\beta_l$.

Sabemos do corolário (1.1.1) que o número de zeros de uma função elíptica é igual ao número de pólos. Então, se:

$k < l$, $z = 0$ é um zero de ordem $2(l-k)$;

$k > l$, $z = 0$ é um pólo de ordem $2(k-l)$.

A ordem s da função elíptica f é o valor máximo entre $\{2k, 2l\}$.

Para encontrarmos f em termos de $\wp(z)$, defina:

$$\varphi(z) := \frac{[\wp(z)-\wp(\alpha_1)].[\wp(z)-\wp(\alpha_2)]...[\wp(z)-\wp(\alpha_k)]}{[\wp(z)-\wp(\beta_1)].[\wp(z)-\wp(\beta_2)]...[\wp(z)-\wp(\beta_l)]}$$

Note que φ tem os mesmos zeros e pólos de f; Além disso, a periodicidade de φ segue diretamente da periodicidade de $\wp$. Por isso, $\dfrac{f}{\varphi}$ é uma função duplamente periódica sem singularidades; logo, pelo teorema (4.0.5), $\dfrac{f}{\varphi}$ é uma constante. Assim, temos:

$$f(z) = C\frac{[\wp(z)-\wp(\alpha_1)].[\wp(z)-\wp(\alpha_2)]...[\wp(z)-\wp(\alpha_k)]}{[\wp(z)-\wp(\beta_1)].[\wp(z)-\wp(\beta_2)]...[\wp(z)-\wp(\beta_l)]}$$

CASO 2: $f = f_2$ ímpar

Sabemos que $\wp'(z)$ é ímpar; Daí, $\dfrac{f(z)}{\wp'(z)}$ é par. Utilizando o resultado anterior, vem:

$$f(z) = C\frac{[\wp(z) - \wp(\alpha_1)].[\wp(z) - \wp(\alpha_2)]...[\wp(z) - \wp(\alpha_k)]}{[\wp(z) - \wp(\beta_1)].[\wp(z) - \wp(\beta_2)]...[\wp(z) - \wp(\beta_l)]}\wp'(z)$$

Agora note que uma função elíptica geral $f(z)$ pode ser escrita como uma soma de uma função par com uma função ímpar, como segue:

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2} = f_1(z) + f_2(z)$$

1.3 A função $\zeta(z)$

1.3.1 Definição e relação existente com $\wp(z)$

Essa função é de grande importância na teoria, pois precisamos dela para a representação da integral de uma função elíptica. Para construí-la, primeiramente considere um caminho no plano complexo que una os pontos 0 e z e que tal caminho não passe por pólo algum. Assim, temos: ¶

$$\int_0^z \wp(z) - \frac{1}{z^2}\, dz = -\sum{}' \left[\frac{1}{z-w} + \frac{z}{w^2} + \frac{1}{w}\right] \tag{1.7}$$

Agora defina:

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum{}' \left[\frac{1}{z-w} + \frac{z}{w^2} + \frac{1}{w}\right] \tag{1.8}$$

Comparando (1.7) e (1.8), vem:

¶Uso no integrando z ao invés da variável muda u para simplificar a notação

$$\int_0^z \wp(z) - \frac{1}{z^2}\, dz = \frac{1}{z} - \zeta(z)$$

Diferenciando a equação acima, obtemos:

$$\zeta'(z) = -\wp(z) \tag{1.9}$$

Em outras palavras, a função zeta é o oposto aditivo da integral termo a termo da série da função $\wp$ de Weierstrass na vizinhança da origem. Além disso, $\zeta(z)$ é uma função ímpar. De fato, temos que:

$$\zeta(-z) = \frac{1}{-z} + \sum{}' \left[\frac{1}{-z-w} + \frac{-z}{w^2} + \frac{1}{w}\right]$$

Agora note que:

$$\sum{}' \left[\frac{1}{-z-w} + \frac{-z}{w^2} + \frac{1}{w}\right] = -\sum{}' \left[\frac{1}{z+w} + \frac{z}{w^2} + \frac{1}{-w}\right] = -\sum{}' \left[\frac{1}{z-w} + \frac{z}{w^2} + \frac{1}{w}\right]$$

onde a última igualdade é válida porque o somatório é sobre todos $m, m' \in \mathbb{Z}$ (exceto $m = m' = 0$), então tanto faz utilizar w ou $-w$.[‖]

Portanto,

$$\zeta(-z) = -\zeta(z)$$

Mas o lado direito da equação (1.7) é uma função meromorfa com pólo simples em $z = w$. Isso nos diz algo:

Observação 1.3.1. *$\zeta(z)$ não é uma função elíptica nem possui dupla periodicidade*

[‖]Lembrando que $w = 2m\omega + 2m'\omega'$, onde 2ω e $2\omega'$ são os períodos da função $\wp$

Demonstração. Note que a afirmação acima segue diretamente do fato de $\zeta(z)$ ter apenas um pólo simples e, portanto, possuir resíduo(Já sabemos do teorema (1.1.1) que funções elípticas f tem $\sum Res(f) = 0$). Utilizando a contrapositiva do teorema (1.1.1), segue o resultado.

■

Apesar de não termos dupla periodicidade nem elipticidade para a função $\zeta(z)$, note que $\zeta(z+w)$ e $\zeta(z)$ possuem a mesma derivada, conforme mostrado a seguir:

$$\zeta'(z+w) = -\wp(z+w) = -\wp(z) = \zeta'(z)$$

onde a primeira e a terceira igualdades seguem de (1.9), e a segunda segue da periodicidade de $\wp(z)$.

Logo, $\zeta(z+w)$ e $\zeta(z)$ diferem por uma constante. Esse fato nos ajudará a "remediar"a falta da dupla periodicidade para a função $\zeta(z)$, conforme a próxima definição.

Definição 1.3.1. *As constantes fundamentais η e η' são definidas de forma que:*

$$\zeta(z+2\omega) = \zeta(z) + 2\eta \qquad \zeta(z+2\omega') = \zeta(z) + 2\eta' \tag{1.10}$$

Note que utilizando o fato de $\zeta(z)$ ser uma função ímpar e colocando $z = -\omega$, $z = -\omega'$ respectivamente nas equações de (1.10), obtemos a seguinte relação funcional que envolve a função ζ, os semiperíodos ω, ω' de $\wp(z)$ e as constantes η e η':

$$\zeta(\omega) = \eta \qquad \zeta(\omega') = \eta' \tag{1.11}$$

Com as relações acima, obtemos a seguinte generalização:

Afirmação 1.3.1. $\zeta(z+w) = \zeta(z+2m\omega+2m'\omega') = \zeta(z) + 2m\eta + 2m'\eta'$

Demonstração: Para os naturais, faremos a prova por indução. Para $m = m' = 1$, temos por definição que:

$$\zeta(z + 2\omega + 2\omega') = \zeta(z + 2\omega) + 2\eta' = \zeta(z) + 2\eta + 2\eta'$$

.

Supondo a afirmação válida para $m, m' \in \mathbb{N}$, vem:

$$\zeta(z + 2(m+1)\omega + 2(m'+1)\omega') = \zeta(z + 2m\omega + 2m'\omega' + 2\omega + 2\omega') =$$

$$= \zeta(z + 2m\omega + 2m'\omega') + 2\eta + 2\eta' = \zeta(z) + 2m\eta + 2m'\eta' + 2\eta + 2\eta' =$$

$$= \zeta(z) + 2(m+1)\eta + 2(m'+1)\eta'$$

Para os inteiros negativos, note primeiramente que:

$$\zeta'(z - 2\omega) = -\wp(z - 2\omega) = -\wp(z) = \zeta'(z)$$

onde a primeira e a última igualdades seguem de (1.9) e a igualdade intermediária segue da periodicidade de $\wp(z)$.

Logo, $\zeta(z - 2\omega) - \zeta(z) = C$, onde C é uma constante a ser determinada. Ao substituir $z = \omega$ obtemos $C = -2\eta$. Repetindo o mesmo processo de indução para $\zeta(z - 2n\omega)$, n inteiro positivo, fica demonstrada a afirmação.

■

Como já sabemos que $\zeta'(z) = -\wp(z)$ por (1.9), temos a seguir a expansão em série de potências da função $\zeta(z)$ na vizinhança da origem, obtida integrando termo a termo a série de $\wp(z)$ e trocando o sinal de cada parcela. Assim, vem:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{c_2 z^3}{3} - \frac{c_3 z^5}{5} - ... - \frac{c_n z^{2n-1}}{2n-1} - ... \qquad (1.12)$$

No que segue, apresentamos uma relação de grande valia entre os semiperíodos ω, ω' de $\wp(z)$ e as constantes η, η'.

Afirmação 1.3.2. *Correspondente aos ω_k:*

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = -\omega - \omega' \quad e \quad \omega_3 = \omega'$$

temos:

$$\zeta(\omega_k) = \eta_k$$

onde:

$$\eta_1 = \eta, \qquad \eta_2 = -\eta - \eta' \qquad e \qquad \eta_3 = \eta'$$

Demonstração: $\zeta(\omega_1) = \eta_1$ e $\zeta(\omega_3) = \eta_3 =$ são provenientes de (1.11). Para mostrar que $\zeta(\omega_2) = \eta_2$, note que pela afirmação (1.3.1), vem:

$$\zeta(z + 2\omega + 2\omega') = \zeta(z) + 2\eta + 2\eta'$$

Pondo $z = -\omega - \omega' = \omega_2$ na equação acima, obtemos:

$$\zeta(\omega + \omega') = \zeta(-\omega - \omega') + 2\eta + 2\eta'$$

Pelo fato de $\zeta(z)$ ser uma função ímpar, vem:

$$-2\eta - 2\eta' = \zeta(-\omega - \omega') - \zeta(\omega + \omega') = 2\zeta(-\omega - \omega')$$

ou seja:

$$\zeta(\omega_2) = -\eta - \eta' = \eta_2$$

$\blacksquare$

Proposição 1.3.1. *$\eta\omega' - \omega\eta' = \dfrac{\pi i}{2}$, onde $i = \sqrt{-1}$*

Demonstração: Sem perda de generalidade**, suponha que $Im(\dfrac{\omega'}{\omega}) \geq 0$ e considere o paralelogramo $OABC$, onde o vértice $O = z_0$, o vértice $A = z_0 + 2\omega$, $B = z_0 + 2\omega + 2\omega'$ e $C = z_0 + 2\omega'$. Então, temos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{OABCO} \zeta(z)dz = \sum Res(\zeta(z)) = 1$$

onde a última igualdade segue de (1.12).

Assim, obtemos:

$$\int_{OABCO} \zeta(z)dz = 2\pi i \tag{1.13}$$

Agora, analisemos em separado as integrais $\int_{OA}$ e $\int_{BC}$:

$$\int_{OA} \zeta(z)dz + \int_{BC} \zeta(z)dz = \int_{z_0}^{z_0+2\omega} \zeta(z)dz + \int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'} \zeta(z)dz$$

Na $\int_{BC}$, faça a substituição $u = z - 2\omega'$; Daí, vem:

$$\int_{OA} \zeta(z)dz + \int_{BC} \zeta(z)dz = \int_{z_0}^{z_0+2\omega} \zeta(z)dz + \int_{z_0+2\omega}^{z_0} \zeta(u + 2\omega')du$$

Lembrando que $\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta'$, temos:

$$\int_{OA} \zeta(z)dz + \int_{BC} \zeta(z)dz = \int_{z_0}^{z_0+2\omega} \zeta(z)dz - \int_{z_0}^{z_0+2\omega} \zeta(z)dz - \int_{z_0}^{z_0+2\omega} 2\eta' dz =$$

**Se $Im(\dfrac{\omega'}{\omega}) \leq 0$, a integral será computada no sentido horário

$$= -\int_{z_0}^{z_0+2\omega} 2\eta' dz = -2\eta'(z_0 + 2\omega - z_0) = -4\omega\eta'$$

Analogamente, obtemos $\int_{AB}$ e $\int_{CO}$, cuja soma é $4\omega'\eta$.

Portanto, substituindo os resultados obtidos em (1.13), vem:

$$4\omega'\eta - 4\omega\eta' = 2\pi i$$

Dividindo por quatro ambos os membros da equação acima, segue o resultado.

■

1.3.2 Expressão de uma função elíptica em termos de $\zeta(z)$

Suponha que os k-pólos β_r de uma função elíptica $f(z)$ com períodos $(2\omega, 2\omega')$ sejam em geral de ordem p_r e a parte principal na vizinhança de β_r seja conhecida por:

$$\frac{B_{r,1}}{z - \beta_r} + \frac{B_{r,2}}{(z - \beta_r)^2} + ... + \frac{B_{r,p_r}}{(z - \beta_r)^{p_r}}$$

Com base nisso, defina a seguinte função:

$$\varphi(z) := \sum_{r=1}^{k} \left\{ B_{r,1}\zeta(z - \beta_r) - B_{r,2}\zeta'(z - \beta_r) + ... + (-1)^{p_r - 1} \frac{B_{r,p_r}}{(p_r - 1)!} \zeta^{(p_r - 1)}(z - \beta_r) \right\}$$

Agora, observe que como $z = 0$ é um pólo simples de $\zeta(z)$, φ tem os mesmos pólos e a mesma parte principal de f.

Quanto à periodicidade, note que:

$$\zeta(z - \beta_r + 2\omega) = \zeta(z - \beta_r) + 2\eta$$

e derivando a equação acima, obtemos:

$$\zeta'(z - \beta_r + 2\omega) = \zeta'(z - \beta_r)$$

Derivando sucessivamente, vem:

$$\zeta^{(p_r-1)}(z - \beta_r + 2\omega) = \zeta^{(p_r-1)}(z - \beta_r)$$

Com base no que temos acima, vemos que:

$$\varphi(z + 2\omega) = \varphi(z) + 2\eta \sum_{r=1}^{k} B_{r,1}$$

No entanto, $\sum\limits_{r=1}^{k} B_{r,1}$ é a soma dos resíduos de f, logo igual a zero pelo teorema (1.1.1).

Assim, $\varphi(z + 2\omega) = \varphi(z)$. De forma análoga, $\varphi(z + 2\omega') = \varphi(z)$.

Das relações acima, $f(z) - \varphi(z)$ é uma função duplamente periódica sem singularidades. Portanto, constante pelo teorema (4.0.5).

Finalmente,

$$f(z) = C + \sum_{r=1}^{k} \sum_{q=1}^{p_r} \frac{(-1)^{q-1} B_{r,q}}{(q-1)!} \zeta^{(q-1)}(z - \beta_r)$$

1.4 A função $\sigma(z)$

1.4.1 Definição e expressão de uma função elíptica em termos de $\sigma(z)$

A função $\sigma(z)$ é obtida de modo parecido com a função $\zeta(z)$. Para construí-la, considere um caminho ligando os pontos 0 e z de forma que este não passe por pólos e considere a seguinte integral:

$$\int_0^z \zeta(z) - \frac{1}{z}\, dz = \sum{}' \left[\ln\left(1 - \frac{z}{w}\right) + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2} \right] \tag{1.14}$$

Para evitar a ocorrência de função logarítmica multivalente, colocamos o lado direito de (1.14) igual a $\ln(\frac{\sigma(z)}{z})$. Assim, temos:

$$\int_0^z (\zeta(z) - \frac{1}{z})dz = \ln\left(\frac{\sigma(z)}{z}\right) \tag{1.15}$$

Portanto, comparando (1.14) e (1.15), vem:

$$\sigma(z) = z\Pi' \left\{ \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left(\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}\right) \right\} \tag{1.16}$$

onde Π' é o produto extendido a todos os inteiros $m, m' \in \mathbb{Z}$, exceto o caso $m = m' = 0$.

Note que, diferenciando (1.15), obtemos:

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} - \frac{1}{z}$$

ou seja:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z) \tag{1.17}$$

Abaixo, algumas propriedades da função $\sigma(z)$:

1) $\sigma(z)$ é uma função ímpar;

2) $\sigma(z)$ não tem singularidade na parte finita do plano;

3) $z = w$ como sua única raiz ($w = 0$ está incluído em $w = 2m\omega + 2m'\omega'$)

Note que a função $\sigma(z)$ não é uma função elíptica. De fato, caso fosse, teríamos uma função duplamente periódica sem singularidades. Logo uma constante, pelo teorema (4.0.5).

Assim, de forma a achar um análogo da dupla periodicidade, obtemos as seguintes relações:

Afirmação 1.4.1.

$$\sigma(z + 2\omega) = -\exp(2\eta(z + \omega))\sigma(z) \tag{1.18}$$

$$\sigma(z + 2\omega') = -\exp(2\eta'(z + \omega'))\sigma(z) \tag{1.19}$$

$$\sigma(z + 2\omega + 2\omega') = -\exp[2(\eta + \eta')(z + \omega + \omega')]\sigma(z) \tag{1.20}$$

Demonstração: Note que

$$\frac{\sigma'(z + 2\omega)}{\sigma(z + 2\omega)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z + 2\omega) - \zeta(z) = 2\eta$$

onde a primeira igualdade segue de (1.17) e a segunda segue de (1.10).

Integrando a equação acima, vem:

$$\ln(\sigma(z+2\omega)) - \ln(\sigma(z)) = 2\eta z + \ln C$$

$$\ln\left(\frac{\sigma(z+2\omega)}{\sigma(z)}\right) = 2\eta z + \ln C$$

$$\frac{\sigma(z+2\omega)}{\sigma(z)} = C\exp(2\eta z)$$

$$\sigma(z+2\omega) = C\exp(2\eta z)\sigma(z)$$

Substituindo $z = -\omega$ na última equação para obtermos o valor de C e lembrando que $\sigma(z)$ é uma função ímpar, obtemos:

$$\sigma(\omega) = C\exp(-2\eta\omega)[-\sigma(\omega)]$$

$$1 = -C\exp(-2\eta\omega)$$

$$C = -\exp(2\eta\omega)$$

Daí, chegamos à (1.18). De forma análoga, obtemos (1.19). Para mostrarmos (1.20), utlizaremos (1.19) para $\tilde{z} = z + 2\omega$ e após a equação(1.18). Logo, temos:

$$\sigma(z+2\omega+2\omega') = -\exp(2\eta'(z+2\omega+\omega'))\sigma(z+2\omega) =$$
$$= -\exp(2\eta'(z+2\omega+\omega'))[-\exp(2\eta(z+\omega))\sigma(z)]$$

$$\sigma(z+2\omega+2\omega') = \exp(2\eta'(z+2\omega+\omega') + 2\eta(z+\omega))\sigma(z)$$

Fazendo os cálculos apenas com o expoente, vem:

$$2\eta'(z+2\omega+\omega')+2\eta(z+\omega)=2\eta'(z+\omega')+2\eta(z+\omega)+4\eta'\omega$$

Reescrevendo, vem:

$$2\eta'(z+2\omega+\omega')+2\eta(z+\omega)=2\eta'(z+\omega')+2\eta(z+\omega)+2\eta'\omega+2\eta'\omega$$

$$2\eta'(z+2\omega+\omega')+2\eta(z+\omega)=2\eta'(z+\omega+\omega')+2\eta(z+\omega)+2\eta'\omega$$

Da proposição (1.3.1) $[2\eta'\omega=2\eta\omega'-\pi i]$, segue que:

$$2\eta'(z+2\omega+\omega')+2\eta(z+\omega)=2\eta'(z+\omega+\omega')+2\eta(z+\omega+\omega')-\pi i$$

$$2\eta'(z+2\omega+\omega')+2\eta(z+\omega)=2(\eta+\eta')(z+\omega+\omega')-\pi i$$

Utilizando a última igualdade, obtemos:

$$\sigma(z+2\omega+2\omega')=\exp[2(\eta+\eta')(z+\omega+\omega')]\exp[-\pi i]\sigma(z)$$

ou seja:

$$\sigma(z+2\omega+2\omega')=-\exp[2(\eta+\eta')(z+\omega+\omega')]\sigma(z)$$

conforme queríamos demonstrar.

∎

Expressando uma função elíptica em termos de $\sigma(z)$

Seja $f(z)$ uma função elíptica com períodos $(2\omega, 2\omega')$ e de ordem s.

De acordo com o corolário (1.1.1), sejam α_r e β_r, $(r = 1, ..., s)$, os respectivos s-zeros e s-pólos de $f(z)$ no paralelogramo periódico.

Pelo teorema (1.1.2), podemos escrever:

$$\sum_{r=1}^{s} \alpha_r - \sum_{r=1}^{s} \beta_r = 2\Omega$$

onde 2Ω é um certo período.

Com as hipóteses acima, construa a seguinte função:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z-\alpha_1)...\sigma(z-\alpha_s)}{\sigma(z-\beta_1)...\sigma(z-\beta_{s-1})\sigma(z-\beta_s-2\Omega)}$$

Note que:

φ tem os mesmos zeros e pólos de f, pois $z = 0$ é um zero simples de $\sigma(z)$.

Agora, verifiquemos a periodicidade de φ:

Primeiramente, temos por (1.18) que:

$$\sigma(z-\alpha_1+2\omega) = -\exp(2\eta(z-\alpha_1+\omega))\sigma(z-\alpha_1)$$

$$\sigma(z-\alpha_2+2\omega) = -\exp(2\eta(z-\alpha_2+\omega))\sigma(z-\alpha_2)$$

e, sucessivamente, obtemos:

$$\sigma(z-\alpha_s+2\omega) = -\exp(2\eta(z-\alpha_s+\omega))\sigma(z-\alpha_s)$$

Também temos:

$$\sigma(z - \beta_1 + 2\omega) = -\exp(2\eta(z - \beta_1 + \omega))\sigma(z - \beta_1)$$

e, sucessivamente, vem:

$$\sigma(z - \beta_{s-1} + 2\omega) = -\exp(2\eta(z - \beta_{s-1} + \omega))\sigma(z - \beta_{s-1})$$

$$\sigma(z - \beta_s - 2\Omega + 2\omega) = -\exp(2\eta(z - \beta_s - 2\Omega + \omega))\sigma(z - \beta_s - 2\Omega)$$

Daí, segue que:

$$\varphi(z + 2\omega) = \frac{(-1)^s \exp(2\eta(sz + s\omega - \alpha_1 - ... - \alpha_s))}{(-1)^s \exp(2\eta(sz + s\omega - \beta_1 - ... - \beta_s - 2\Omega))}\varphi(z)$$

$$\varphi(z + 2\omega) = \exp\left(2\eta\left(-\sum_{r=1}^{s}\alpha_i + \sum_{r=1}^{s}\beta_i + 2\Omega\right)\right)\varphi(z)$$

Mas sabemos que $\left(-\sum\limits_{r=1}^{s}\alpha_i + \sum\limits_{r=1}^{s}\beta_i\right) = -2\Omega$ por hipótese.

Daí,

$$\varphi(z + 2\omega) = \exp(0)\varphi(z) = \varphi(z)$$

De forma análoga, $\varphi(z + 2\omega') = \varphi(z)$.

Portanto, $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ é uma função duplamente periódica sem singularidades, o que implica pelo Teorema (4.0.5) que $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ é constante.

Assim, obtemos:

$$f(z) = C\frac{\sigma(z-\alpha_1)...\sigma(z-\alpha_s)}{\sigma(z-\beta_1)...\sigma(z-\beta_{s-1})\sigma(z-\beta_s-2\Omega)}$$

.

Agora que já sabemos trabalhar com a função $\sigma(z)$, temos que a expressão da integral de uma função elíptica f em termos de $\zeta(z)$ é:

$$\int f(z)dz = Cz + C' + \sum_{r=1}^{k} B_{r,1} \ln \sigma(z-\beta_r) + \sum_{r=1}^{k}\sum_{q=1}^{p_r-1} \frac{(-1)^q B_{r,q+1}}{(q)!}\zeta^{(q-1)}(z-\beta_r)$$

.

1.5 Fórmulas de adição para $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ e $\wp(z)$:

Definição 1.5.1. *Uma fórmula de adição para uma função f é uma expressão obtida para $f(z+u)$, u sendo uma constante arbitrária.*

(1) Obtenção da fórmula de adição para $\sigma(z)$:

Primeiramente, expresse a função elíptica $g(z) = \wp(z) - \wp(u)$ em termos de $\sigma(z)$; Para tal, lembre-se que:

a) g tem duas raízes: u e $-u$;

b) $z = 0$ é pólo duplo de g.

Daí, temos:

$$\wp(z) - \wp(u) = C\frac{\sigma(z+u)\sigma(z-u)}{\sigma^2(z)} \tag{1.21}$$

Para encontrarmos o valor de C, faça o seguinte:

a) Multiplique a equação acima por $\sigma^2(z)$;

b) Faça $z \longrightarrow 0$.

Note que com as condições acima, obtemos:

$$[\wp(z) - \wp(u)]\sigma^2(z) = C\sigma(z+u)\sigma(z-u) \tag{1.22}$$

E quando $z \longrightarrow 0$, $\sigma(z) \approx z$ e $\wp(z) \approx \dfrac{1}{z^2}$ de forma que:

$$[\wp(z) - \wp(u)]\sigma^2(z) \longrightarrow 1$$

Como $\sigma(z)$ é analítica na vizinhança da origem, temos que quando $z \longrightarrow 0$:

$$C\sigma(z+u)\sigma(z-u) \longrightarrow C\sigma(u)\sigma(-u) = -C\sigma^2(u)$$

Assim, fazendo $z \longrightarrow 0$ na equação (1.22), vem:

$$1 = -C\sigma^2(u)$$

ou seja, $C = \dfrac{-1}{\sigma^2(u)}$.

Substituindo o valor de C em (1.21), obtemos:

$$\wp(z) - \wp(u) = -\frac{\sigma(z+u)\sigma(z-u)}{\sigma^2(u)\sigma^2(z)} \tag{1.23}$$

que é a fórmula de adição para a função sigma.

(2) Obtenção da fórmula de adição para $\zeta(z)$:

Para encontrarmos a fórmula de adição para a função zeta, vamos primeiramente tomar o logaritmo em ambos os lados da equação (1.23) para após tomarmos a derivada.

Tomando logaritmos, vem:

$$\ln[\wp(z) - \wp(u)] = \ln\left[-\frac{\sigma(z+u)\sigma(z-u)}{\sigma^2(u)\sigma^2(z)}\right]$$

Derivando, temos:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(u)} = \frac{\sigma'(z+u)}{\sigma(z+u)} + \frac{\sigma'(z-u)}{\sigma(z-u)} - 2\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(u)} = \zeta(z+u) + \zeta(z-u) - 2\zeta(z)$$

Trocando z por u na equação acima (note que $\zeta(z)$ é ímpar), obtemos:

$$\frac{-\wp'(u)}{\wp(z) - \wp(u)} = \zeta(z+u) - \zeta(z-u) - 2\zeta(u)$$

Somando as duas equações acima, vem:

$$\frac{\wp'(z) - \wp'(u)}{\wp(z) - \wp(u)} = 2[\zeta(z+u) - \zeta(z) - \zeta(u)]$$

isto é,

$$\zeta(z+u) - \zeta(z) - \zeta(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(z) - \wp'(u)}{\wp(z) - \wp(u)}\right] \tag{1.24}$$

que é a formula de adição para a função zeta.

(3) Obtenção da fórmula de adição para a função $\wp(z)$:

Derivando a equação (1.24), vem:

$$-\wp(z+u) + \wp(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{(\wp(z) - \wp(u))\wp''(z) - (\wp'(z) - \wp'(u))\wp'(z)}{(\wp(z) - \wp(u))^2}\right]$$

Utilizando o fato de que $\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \dfrac{g_2}{2}$, vem:

$$-\wp(z+u) + \wp(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{6\wp^2(z) - \dfrac{g_2}{2}}{\wp(z) - \wp(u)} - \frac{(\wp'(z))^2 - \wp'(u)\wp'(z)}{(\wp(z) - \wp(u))^2}\right]$$

Trocando z por u na equação acima, segue que:

$$-\wp(z+u) + \wp(u) = \frac{1}{2}\left[-\frac{6\wp^2(u) - \dfrac{g_2}{2}}{\wp(z) - \wp(u)} - \frac{(\wp'(u))^2 - \wp'(u)\wp'(z)}{(\wp(z) - \wp(u))^2}\right]$$

Somando as duas equações acima, vem:

$$-2\wp(z+u)+\wp(z)+\wp(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{6(\wp^2(z) - \wp^2(u))}{\wp(z) - \wp(u)} - \frac{(\wp'(z))^2 - 2\wp'(u)\wp'(z) + (\wp'(u))^2}{(\wp(z) - \wp(u))^2}\right]$$

$$-2\wp(z+u) + \wp(z) + \wp(u) = 3\wp(z) + 3\wp(u) - \frac{1}{2}\frac{(\wp'(z) - \wp'(u))^2}{(\wp(z) - \wp(u))^2}$$

$$-2\wp(z+u) - 2\wp(z) - 2\wp(u) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(u))}{\wp(z) - \wp(u)}\right)^2$$

ou seja, a fórmula de adição para a função de Weierstrass é dada por:

$$\wp(z+u) + \wp(z) + \wp(u) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(u))}{\wp(z) - \wp(u)}\right)^2 \tag{1.25}$$

Capítulo 2

Resolução da equação diferencial $k^2\left(\dfrac{dX}{du}\right)^2 = k^2X^4 + 2hX^2 + 2$ e a função seno de Jacobi

Neste capítulo estamos interessados em encontrar a solução de uma equação diferencial que faz parte de um tipo geral estudado por Briot-Bouquet. Em seguida, desejamos introduzir a função $sn(u,\kappa)$ de Jacobi através da equação.

2.1 A resolução da equação diferencial

Vamos aqui utilizar o conhecimento de curvas algébricas na resolução da equação diferencial acima citada, tendo como base a referência [2].

A idéia é associar à EDO uma curva quártica de coordenadas (X,Y) e considerar uma curva cúbica auxiliar de coordenadas (x,y); em seguida, desejamos expressar as coordenadas da quártica em termos das coordenadas da cúbica e, logo após, escrever as coordenadas da cúbica em termos de funções elípticas. Mais especificamente, expressar (x,y) em termos da função $\wp(z)$ (Assim, (X,Y) também ficam expressas em termos de funções elípticas).

Para tal, considere a **curva quártica** C_4:

$$C_4 : Y^2 = k^2X^4 + 2hX^2 + 2 \tag{2.1}$$

onde h e k são constantes.

Assim, podemos reescrever C_4 da seguinte forma:

$$C_4 : Y^2 = k^2X^4 + 2hX^2 + 2 = P(X) = a_0X^4 + 4a_1X^3 + 6a_2X^2 + 4a_3X + a_4$$

onde $a_0 = k^2$, $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = \frac{h}{3}$ e $a_4 = 2$.

Multiplicando a equação acima por $a_0 = k^2$, vem:

$$k^2Y^2 = k^4X^4 + 6k^2(\frac{h}{3})X^2 + 2k^2$$

Queremos parametrizar C_4 por funções elípticas. Já sabemos do capítulo 1 que as cúbicas são parametrizadas por $\wp(z)$ e $\wp'(z)$, através da relação algébrica da proposição (1.2.1). Por isso, introduzimos uma cúbica auxiliar C_3 da seguinte forma:

Considerando os polinômios homogêneos $\varphi_i(X)$ de grau $\leq i$, definidos abaixo:

$\varphi_1(X) := -1$

$\varphi_2(X) = k^2X^2$

$\varphi_3(X) = 2k^2hX^2 + 2k^2$

a equação de uma cúbica auxiliar C_3, de coordenadas (x, y), será dada por:

$$x^3\varphi_3(\frac{y}{x}) + 2x^2\varphi_2(\frac{y}{x}) + x\varphi_1(\frac{y}{x}) = 0$$

Substituindo os valores de $\varphi_1(X)$, $\varphi_2(X)$ e $\varphi_3(X)$ na equação acima, vem:

$$x^3[2k^2h\frac{y^2}{x^2} + 2k^2] + 2x^2k^2\frac{y^2}{x^2} + x(-1) = 0$$

ou seja, **a equação da cúbica auxiliar** C_3 é dada por:

$$2k^2hy^2x + 2k^2x^3 + 2k^2y^2 - x = 0 \tag{2.2}$$

Com a equação da quártica C_4 e da cúbica C_3 dadas anteriormente, afirmamos:

Afirmação 2.1.1. *As coordenadas* (X, Y) *de* C_4 *se expressam em termos das coordenadas* (x, y) *de* C_3 *através das equações:*

$$X = \frac{y}{x} \qquad e \qquad Y = \sqrt{P(X)} = \frac{1}{kx} - k(\frac{y}{x})^2$$

Demonstração:

Fazendo $y = X \cdot x$ na equação (2.2), ou seja, eliminando y, obtemos:

$$(2hk^2X^2 + 2k^2)x^3 + (2k^2X^2)x^2 - x = 0$$

.

Dividindo ambos os membros da equação acima por x^3, vem:

$$\frac{1}{x^2} - (2k^2X^2)\frac{1}{x} - (2hk^2X^2 + 2k^2) = 0$$

que é uma equação quadrática na variável $w = \frac{1}{x}$.

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:

$$\frac{1}{x} = \frac{2k^2X^2 + \sqrt{4k^4X^4 + 4(2hk^2X^2 + 2k^2)}}{2} =$$
$$= k^2X^2 + \sqrt{k^2(k^2X^4 + 2hX^2 + 2)}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{x} = k^2X^2 + \sqrt{k^2P(X)} = k^2X^2 + kY$$

Logo:

$$Y = \frac{1}{kx} - k(\frac{y}{x})^2$$

■.

Com a afirmação acima, temos:

Afirmação 2.1.2. *As coordenadas x e y da cúbica auxiliar são expressas em termos de funções elípticas como:*

$$x = \frac{1}{2k^2\wp(u) - \frac{h}{3}} \qquad e \qquad y = \frac{k^2\wp'(u)}{(2k^2\wp(u) - \frac{h}{3})(2k^2\wp(u) + \frac{2h}{3})}$$

Demonstração: Resolvendo a equação (2.2) com relação a variável y, vem:

$$(2hk^2x + 2k^2)y^2 + (2k^2x^3 - x) = 0$$

$$y^2 = \frac{x - 2k^2x^3}{2hk^2x + 2k^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{x(1-2k^2x^2)}{2hk^2x+2k^2}} = \frac{\sqrt{x(1-2k^2x^2)(2hk^2x+2k^2)}}{2hk^2x+2k^2}$$

Note que $x = 0$ é um zero do polinômio quártico que se encontra dentro da raiz quadrada da equação acima. Assim, pondo:

$$x = \frac{1}{\xi}$$

temos:

$$y = \frac{\sqrt{\frac{1}{\xi}(1-2k^2\frac{1}{\xi^2})(2hk^2\frac{1}{\xi}+2k^2)}}{2hk^2\frac{1}{\xi}+2k^2}$$

$$y = \frac{\frac{1}{\xi^2}\sqrt{(\xi^2-2k^2)(2hk^2+2k^2\xi)}}{\frac{2hk^2+2k^2\xi}{\xi}}$$

Então:

$$y = \frac{\sqrt{2k^2(\xi^2-2k^2)(h+\xi)}}{2k^2\xi(h+\xi)}$$

ou, equivalentemente,

$$y = \frac{\sqrt{2k^2(\xi^3+\xi^2h-2k^2\xi-2k^2h)}}{2k^2\xi(h+\xi)}$$

.

Na última equação, observe que o polinômio em ξ que está dentro da raiz quadrada é um polinômio cúbico. Sendo assim, precisamos de uma mudança de variável adequada para chegarmos na forma de Weierstrass, isto é, desejamos transformar a raiz quadrada acima para o formato $\sqrt{4x'^3 - g_2x' - g_3}$, com g_2,$g_3 \in \mathbb{C}$.

Logo, fazendo a substituição:

$$\xi = 2k^2x' - \frac{h}{3}$$

na equação anterior, obtemos:

$$y = \frac{\sqrt{2k^2[(2k^2x' - \frac{h}{3})^3 + h(2k^2x' - \frac{h}{3})^2 - 2k^2(2k^2x' - \frac{h}{3} + h)]}}{2k^2(2k^2x' - \frac{h}{3})(h + 2k^2x' - \frac{h}{3})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2k^2[8k^6x'^3 + 6k^2(\frac{h}{3})^2x' - 4k^2\frac{h^2}{3}x' - 4k^4x' - (\frac{h}{3})^3 + h(\frac{h}{3})^2 - 4k^2\frac{h}{3}]}}{2k^2(2k^2x' - \frac{h}{3})(2k^2x' + \frac{2h}{3})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2k^2.2k^6[4x'^3 + (\frac{3k^2(\frac{h}{3})^2 - 2k^2\frac{h^2}{3} - 2k^4}{k^6})x' + (\frac{-2k^2\frac{h}{3} + \frac{h(\frac{h}{3})^2}{2} - \frac{(\frac{h}{3})^3}{2}}{k^6})]}}{2k^2(2k^2x' - \frac{h}{3})(2k^2x' + \frac{2h}{3})}$$

Agora, note que $2k^2\frac{h^2}{3} = 6k^2(\frac{h}{3})^2$. Daí,

$$y = \frac{\sqrt{4k^8[4x'^3 + (\frac{-2k^4 - 3k^2(\frac{h}{3})^2}{k^6})x' + (\frac{-2k^2\frac{h}{3} + \frac{\frac{h^3}{9} - \frac{h^3}{27}}{2}}{k^6})]}}{2k^2(2k^2x' - \frac{h}{3})(2k^2x' + \frac{2h}{3})} =$$

$$= \frac{\sqrt{4k^8[4x'^3 - (\frac{2k^2 + 3(\frac{h}{3})^2}{k^4})x' - (\frac{k^2\frac{h}{3}.2 + \frac{-\frac{h^3}{9} + \frac{h^3}{27}}{2}}{k^6})]}}{2k^2(2k^2x' - \frac{h}{3})(2k^2x' + \frac{2h}{3})} =$$

$$= \frac{\sqrt{4k^8[4x'^3 - (\frac{k^2.2 + 3(\frac{h}{3})^2}{k^4})x' - (\frac{k^2\frac{h}{3}.2 - \frac{h^3}{27}}{k^6})]}}{2k^2(2k^2x' - \frac{h}{3})(2k^2x' + \frac{2h}{3})}$$

Definindo:

$$g_2 := \frac{k^2.2 + 3(\frac{h}{3})^2}{k^4} \qquad \text{e} \qquad g_3 := \frac{k^2\frac{h}{3}.2 - \frac{h^3}{27}}{k^6}$$

obtemos que o polinômio sob o sinal da raiz quadrada torna-se

$$4a_0^4(4x'^3 - g_2x' - g_3), \quad \text{onde} \quad a_0 = k^2$$

.

Assim, temos:

$$y = \frac{2k^4\sqrt{4x'^3 - g_2x' - g_3}}{2k^2(2k^2x' - \frac{h}{3})(2k^2x' + \frac{2h}{3})}$$

$$y = \frac{k^2\sqrt{4x'^3 - g_2x' - g_3}}{(2k^2x' - \frac{h}{3})(2k^2x' + \frac{2h}{3})} \tag{2.3}$$

Note que pondo $y' = \sqrt{4x'^3 - g_2x' - g_3}$, temos pela proposição (1.2.1) e pelas equações (1.5) que $x' = \wp(u)$ e $y' = \wp'(u)$. Daí, vem:

$$x = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{2k^2\wp(u) - \frac{h}{3}}$$

.

Logo, a equação (2.3)torna-se:

$$y = \frac{k^2\wp'(u)}{(2k^2\wp(u) - \frac{h}{3})(2k^2\wp(u) + \frac{2h}{3})}$$

.

■.

Uma vez tendo expressa as coordenadas de C_4 pelas coordenadas de C_3 e as coordenadas de C_3 em termos de $\wp(u)$ e $\wp'(u)$, chegamos à seguinte afirmação:

Afirmação 2.1.3. *As coordenadas (X, Y) da quártica são expressas em termos de funções elípticas por:*

$$X = \frac{k^2\wp'(u)}{2k^2\wp(u)+\frac{2h}{3}} \qquad e \qquad Y = k\left(2\wp(u)+\wp(v)-\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2\right)$$

onde as coordenadas X *e* Y *da quártica são tais que* $k\dfrac{dX}{du} = Y$.

Demonstração:

Logo, as expressões* para X e Y são:

$$X = \frac{y}{x} = \frac{\frac{k^2\wp'(u)}{(2k^2\wp(u)-\frac{h}{3})(2k^2\wp(u)+\frac{2h}{3})}}{\frac{1}{2k^2\wp(u)-\frac{h}{3}}}$$

$$X = \frac{k^2\wp'(u)}{2k^2\wp(u)+\frac{2h}{3}} \tag{2.4}$$

$$Y = \sqrt{P(X)} = \frac{1}{kx} - k\left(\frac{y}{x}\right)^2 \tag{2.5}$$

ou, equivalentemente,

$$kY = \sqrt{k^2P(X)} = \frac{1}{x} - k^2\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

.

Introduzindo um parâmetro v tal que:

$$\wp(v) = -\frac{\frac{h}{3}}{k^2} \qquad \text{e} \qquad \wp'(v) = 0$$

,

obtemos:

*Lembre que (x, y) são as coordenadas da cúbica auxiliar e (X, Y) são as coordenadas da quártica.

$$X = \frac{k^2\wp'(u)}{2k^2(\wp(u) - (-\frac{\frac{h}{3}}{k^2}))} = \frac{\wp'(u)}{2(\wp(u) - \wp(v))} = \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{2(\wp(u) - \wp(v))}$$

onde a última igualdade segue do fato que $\wp'(v) = 0$;

Para encontrar Y, note primeiramente que:

$$\frac{1}{x} = 2k^2\wp(u) - \frac{h}{3} = k^2(2\wp(u) - \frac{\frac{h}{3}}{k^2}) = k^2(2\wp(u) + \wp(v))$$

Juntamente com o fato de que $X = \frac{y}{x}$, temos que:

$$Y = \sqrt{P(X)} = \frac{\sqrt{k^2P(X)}}{k} = \frac{1}{k}(k^2(2\wp(u) + \wp(v)) - k^2X^2)$$

ou seja,

$$Y = k\left(2\wp(u) + \wp(v) - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2\right)$$

.

Conforme já tínhamos anunciado no capítulo 1, aqui precisaremos das fórmulas de adição:

Observe que, por um lado, ao utilizarmos (1.25), vem:

$$Y = \sqrt{P(X)} = k(2\wp(u) + \wp(v) - \wp(u+v) - \wp(u) - \wp(v)) = k(\wp(u) - \wp(u+v))$$

.

Por outro lado, ao derivarmos (1.24) e utilizarmos a igualdade (1.9), vem:

$$\frac{dX}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{2}\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right) = \wp(u) - \wp(u+v)$$

.

Note, pelas duas equações acima, que temos:

$$k\frac{dX}{du} = Y$$

e, portanto, as coordenadas (X,Y) da quártica $Y^2 = k^2X^4 + 2hX^2 + 2$ satisfazem a equação diferencial:

$$k^2(\frac{dX}{du})^2 = Y^2 = k^2X^4 + 2hX^2 + 2$$

isto é, $X = \dfrac{k^2\wp'(u)}{2k^2\wp(u) + \frac{2h}{3}}$ é solução da equação diferencial:

$$k^2(\frac{dX}{du})^2 = k^2X^4 + 2hX^2 + 2 \tag{2.6}$$

$\blacksquare$.

2.2 A introdução da função $sn(u, \kappa)$ de Jacobi via equação diferencial

Meyer([4]) introduz as três funções de Jacobi via um sistema de equações diferenciais, mais especificamente da seguinte forma:

Teorema-Definição 2.2.1. *(Meyer) Seja $\kappa \in (0, 1)$, $u \in \mathbb{R}$. As funções $sn(u, \kappa)$, $cn(u, \kappa)$ e $dn(u, \kappa)$ podem ser definidas como as soluções p, q, r, respectivamente, do sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} p'(u) = q(u)r(u) \\ q'(u) = -r(u)p(u) \\ r'(u) = -\kappa^2 p(u)q(u) \end{cases}$$

que satisfazem as condições iniciais:

$sn(0,\kappa) = p(0) = 0 \qquad cn(o,\kappa) = q(0) = 1 \qquad dn(0,\kappa) = r(0) = 1$

Também temos que:

Afirmação 2.2.1. *As funções $I = p^2 + q^2$ e $J = \kappa^2 p^2 + r^2$ são constantes ao longo das soluções do Teorema- definição (2.2.1) e a função $sn(u,\kappa)$ satisfaz a equação diferencial*

$$(p'(u))^2 = (1-p^2)(1-\kappa^2 p^2) = 1 - (1+\kappa^2)p^2 + \kappa^2 p^4$$

com as condições iniciais

$$p(0) = 0 \qquad e \qquad p'(0) = 1$$

Demonstração: De fato, temos:

$$\frac{d}{du} I(p(u), q(u)) = 2.p.p' + 2.q.q' = 2p(qr) + 2q(-rp) \equiv 0$$

e

$$\frac{d}{du} J(p(u), r(u)) = \kappa^2.(2.p.p') + 2.r.r' = 2\kappa^2.p.(qr) + 2r.(-\kappa^2.pq) \equiv 0$$

Então I e J são constantes ao longo das soluções. Mais especificamente, $I = J = 1$ para a solução $(sn(u,\kappa), cn(u,\kappa), dn(u,\kappa))$ de (2.2.1).

Da definição (2.2.1) e das identidades

$$p^2(u) + q^2(u) = 1 \qquad \text{e} \qquad \kappa^2 p^2(u) + r^2(u) = 1$$

obtemos:

$$p'' = (q.r)' = (-r.p)r + q(-\kappa^2.p.q) =$$

$$= -p(1-\kappa^2.p^2) - \kappa^2 p(1-p^2)$$

Ou seja:

$$p'' = -(1+\kappa^2)p + 2\kappa^2.p^3 \tag{2.7}$$

Note que já sabemos que $sn(u,\kappa)$ satisfaz a equação acima. Mas (2.7) tem uma integral. De fato, basta multiplicar a equação por $2p'$ e integrar. Daí, obtemos:

$$L = (p')^2 + (1+\kappa^2)p^2 - \kappa^2 p^4$$

A constante L é igual a 1 para $sn(u,\kappa)$, pois $sn(0,\kappa) = 0$ e $sn'(0,\kappa) = 1$.

$\blacksquare$

Agora note que substituindo X por $\frac{-1}{X}$ na equação (2.6), vem:

$$k^2\left(\frac{d(\frac{-1}{X})}{du}\right)^2 = \frac{1}{X^4}k^2\left(\frac{dX}{du}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{X^4}(k^2X^4 + 2hX^2 + 2) = k^2 + 2h\left(\frac{-1}{X}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{X}\right)^4$$

Ou seja:

$$k^2\left(\frac{d(\frac{-1}{X})}{du}\right)^2 = k^2 + 2h\left(\frac{-1}{X}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{X}\right)^4 \tag{2.8}$$

Dividindo a equação (2.8) por k^2, obtemos:

$$\left(\frac{d(\frac{-1}{X})}{du}\right)^2 = 1 + \frac{2h}{k^2}\left(\frac{-1}{X}\right)^2 + \frac{2}{k^2}\left(\frac{-1}{X}\right)^4 \tag{2.9}$$

Note que se introduzirmos a variável $\kappa := \dfrac{\sqrt{2}}{k}$ e supusermos que as variáveis h e k estejam interligadas através da equação $h = -\dfrac{(k^2+2)}{2}$, então a equação (2.9) torna-se:

$$\left(\frac{d(\frac{-1}{X})}{du}\right)^2 = 1-(1+\kappa^2)\left(\frac{-1}{X}\right)^2+\kappa^2\left(\frac{-1}{X}\right)^4$$

Então temos que $\dfrac{-1}{X}$ e $sn(u,\kappa)$ satisfazem a mesma equação diferencial. Desejamos mostrar a seguinte proposição:

Proposição 2.2.1. $\dfrac{-1}{X} = sn(u,\kappa)$

Demonstração:

Como $\dfrac{-1}{X}$ e $sn(u,\kappa)$ satisfazem a mesma equação diferencial, basta mostrar que $\dfrac{-1}{X}$ satisfaz as mesmas condições iniciais de $sn(u,\kappa)$ e a proposição segue do teorema de existência e unicidade das EDOs, isto é, devemos mostrar que:

$$\frac{-1}{X}=0 \quad \text{e} \quad \frac{d(\frac{-1}{X})}{du}=1, \quad \text{se} \quad u=0$$

Lembre-se de que $X = \dfrac{k^2\wp'(u)}{2k^2\wp(u)+\frac{2h}{3}}$. Daí, vem:

$$\frac{-1}{X} = -\left(\frac{2k^2\wp(u)+\frac{2h}{3}}{k^2\wp'(u)}\right) = -\left(\frac{2\wp(u)-(\frac{\kappa^2+1}{3})}{\wp'(u)})\right) =$$

$$= u+\left(-\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)\kappa^2\right)u^3+O(u^5)$$

Assim, $\left(-\dfrac{1}{X}\right)|_{u=0}=0.$

Agora, calculando $\dfrac{d(\frac{-1}{X})}{du}$, vem:

$$\frac{d(\frac{-1}{X})}{du} = \frac{1}{X^2}\frac{dX}{du} = \left(\frac{2\wp(u)-\frac{\kappa^2+1}{3}}{\wp'(u)}\right)^2\frac{dX}{du} =$$

$$= \left(\frac{2\wp(u)-\frac{\kappa^2+1}{3}}{\wp'(u)}\right)^2\left(\frac{(2\wp(u)-\frac{\kappa^2+1}{3})\wp''(u)-2(\wp'(u))^2}{(2\wp(u)-\frac{\kappa^2+1}{3})^2}\right) =$$

$$= \frac{(2\wp(u) - \frac{\kappa^2+1}{3})\wp''(u) - 2(\wp'(u))^2}{\wp'(u)^2} = 1 + \left(-\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\kappa^2\right)u^2 + O(u^4)$$

Portanto, obtemos $\left(\frac{d(\frac{-1}{X})}{du}\right)|_{u=0} = 1.$

Pelo teorema de existência e unicidade das EDOs, segue o resultado esperado.

■

Vale ressaltar que, historicamente, as funções elípticas apareceram como funções inversas de integrais elípticas. De acordo com [3], temos - por exemplo - que:

$$\int_x^b \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2-t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} cn^{-1}\left[\frac{x}{b}, \frac{b}{a^2+b^2}\right] \tag{2.10}$$

onde: $0 \leq x \leq b$.

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2-t^2)}} = \frac{1}{a} sn^{-1}\left[\frac{x}{b}, \frac{b}{a}\right] \tag{2.11}$$

onde: $0 \leq x \leq b < a$

$$\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-b^2)}} = \frac{1}{a} ns^{-1}\left[\frac{x}{a}, \frac{b}{a}\right] \tag{2.12}$$

onde: $b < a \leq x$.†

Essas formas são *chamadas* de *Formas de Legendre* e assim serão referidas ao longo do texto.

† $ns(t) = \frac{1}{sn(t)}$

Capítulo 3

Funções Elípticas Reais aplicadas a interações não gravitacionais

Neste capítulo apresento em detalhes a integração, através de funções elípticas ou elementares, de um problema de atração central do tipo $\frac{\mu}{r^4}$, onde r é a distância do ponto até o atrator.

No livro do Lawden[3] (1989), este tópico está resumido numa seção de cinco páginas do capítulo 5. É curioso que na seção seguinte, o autor trata do caso $\frac{1}{r^5}$, produzindo resultados análogos e não comenta nada sobre o "isomorfismo"entre os casos.

Foi o trabalho de McGehee[7] (década de 80) que explicou que, para todo $k > 3$, a estrutura qualitativa das soluções para $\frac{1}{r^k}$ é sempre a mesma.

Não podemos deixar de mencionar que o caso $k = 3$ e algumas soluções elementares para $k = 5$ aparecem já na segunda edição do *Principia* (onde é conhecida a participação de Cotes).

3.1 A equação diferencial das órbitas em coordenadas polares

Neste trabalho, vamos supor que uma partícula de massa unitária é atraída para um centro de massa O por uma força radial $\frac{\mu}{r^4}$, sendo $r(t)$ e $\theta(t)$ suas coordenadas polares no tempo t no plano de movimento(conforme [3]).
Inicialmente recapitularemos que a energia total e o momento angular são constantes.

Se a posição da partícula é dada por

$$\mathbf{x}(t) = r(t) \cdot e^{i\theta(t)},$$

então a velocidade em cada instante é dada por:

$$\mathbf{x}' = r' \cdot e^{i\theta} + i \cdot r \cdot e^{i\theta} \cdot \theta'$$

e a força é dada por:

$$\mathbf{x}'' = e^{i\theta} \cdot [r'' - r \cdot (\theta')^2] + i \cdot e^{i\theta} \cdot [2r' \cdot \theta' + r \cdot \theta''].$$

Supondo que a força/aceleração é radial e de módulo $||\mathbf{x}''|| = \frac{\mu}{r^4}$, temos:

$$r'' - r \cdot (\theta')^2 = -\frac{\mu}{r^4} \quad \text{e} \quad 2r'\theta' + r\theta'' \equiv 0.$$

Temos

$$\begin{aligned}(\frac{||\mathbf{x}'||^2}{2} - \frac{\mu}{3r^3})' &=< \mathbf{x}'', \mathbf{x}' > + \frac{\mu \cdot r'}{r^4} = \\ &= -\frac{\mu \cdot r'}{r^4} + \frac{\mu \cdot r'}{r^4} \equiv 0.\end{aligned}$$

Então

$$\frac{||\mathbf{x}'||^2}{2} - \frac{\mu}{3r^3} \equiv E, \quad E \in \mathbb{R},$$

onde E é a energia total da trajetória.

Por outro lado,

$$\frac{1}{r} \cdot (r^2 \cdot \theta')' = 2r' \cdot \theta' + r \cdot \theta'' \equiv 0$$

Logo:

$$r^2 \cdot \theta' \equiv h, \quad h \in \mathbb{R},$$

chamado de momento angular da trajetória.

Note que se $h \neq 0$ e $r \neq 0$, então sempre $\theta' > 0$ ou sempre $\theta' < 0$.

Portanto, $\theta(t)$ admite uma função inversa $t = t(\theta)$.

Em suma, $r(t)$ pode ser visto como $r(\theta)$.

Se $r(\theta(t)) = \frac{1}{u(\theta(t))}$, então

$$r' = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{du}{d\theta} = -h \cdot \frac{du}{d\theta}.$$

Também $\quad r \cdot \theta' = \frac{h}{r} = h \cdot u.$

De

$$||\mathbf{x}'||^2 = (r')^2 + (r \cdot \theta')^2 \quad \text{e} \quad \frac{||\mathbf{x}'||^2}{2} - \frac{\mu}{3r^3} \equiv E$$

obtemos:

$$h^2[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2] = 2E + \frac{2\mu}{3}u^3$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{3}{2\mu}$, vem:

$$\frac{3h^2}{2\mu}[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2] = u^3 + \frac{3E}{\mu}$$

Definindo $\alpha := \frac{3h^2}{2\mu}$ e $\beta := \frac{3E}{\mu}$, vem:

$$\alpha(\frac{du}{d\theta})^2 = u^3 - \alpha u^2 + \beta = f(u). \tag{3.1}$$

A equação (3.1) determina *a equação polar da órbita.*

Note que α é positivo (pois h^2 e μ são positivos), mas $\beta \in \mathbb{R}$. Daqui em diante, sempre deveremos assumir que o sentido do movimento será naquele que θ cresce*, ou seja, $h > 0$.

3.2 Integração da equação polar

Considere a função auxiliar $g(u) = u^3 - \alpha u^2 = u^2(u - \alpha)$. Ela possui uma raiz dupla em $u = 0$ e uma raiz simples em $u = \alpha$. Calculando a derivada primeira de g, temos:

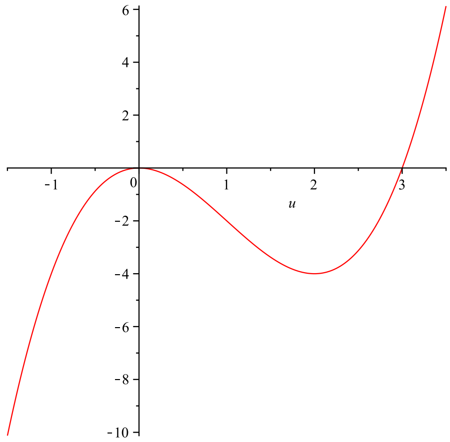
$$g'(u) = 3u^2 - 2u\alpha = u(3u - 2\alpha)$$

Assim, como $g' > 0$ em $(-\infty, 0) \cup (\frac{2\alpha}{3}, +\infty)$, temos que g é crescente neste intervalo. De modo parecido, concluímos que g é decrescente no intervalo $(0, \frac{2\alpha}{3})$.

Note que os pontos de máximo e mínimo locais estão respectivamente em $u = 0$ e $u = \frac{2\alpha}{3}$. Mais especificamente, são os pontos $A(0, 0)$ e $B(\frac{2\alpha}{3}, -\frac{4\alpha^3}{27})$.

A derivada segunda de g nos informa que $u = \frac{\alpha}{3}$ é um ponto de inflexão. Abaixo segue um esboço qualitativo de $g(u)$.

*Isto é, $\theta' > 0$



$g(u)$ para $\alpha = 3$

Com base na análise da função g, concluímos que para resolver a equação (3.1) existem cinco casos a considerar. São eles:

(i) $\beta < 0$; (ii)$\beta = 0$; (iii) $0 < \beta < \frac{4\alpha^3}{27}$; (iv) $\beta = \frac{4\alpha^3}{27}$; (v) $\beta > \frac{4\alpha^3}{27}$.

3.2.1 Caso (i)

Como $\beta < 0$, através da análise do gráfico de g podemos ver que $f(u)$ possui uma raiz real $a > \alpha$ e duas raízes complexas. Mostremos que a parte real das raízes complexas é negativa.

De fato, sejam λ_1 e λ_2 as raízes complexas. Então, temos:

$$u^3 - \alpha u^2 + \beta = (u - a)(u - \lambda_1)(u - \lambda_2)$$

Comparando o coeficiente de u^2, vem:

$$\alpha = a + \lambda_1 + \lambda_2$$

Daí, obtemos:

$$2Re(\lambda_1) = \alpha - a < 0$$

Portanto, podemos escrever:

$$\lambda_1 = -b + ci$$

$$\lambda_2 = -b - ci$$

com $b, c > 0$.

Logo, obtemos $f(u) = (u - a)\{(u + b)^2 + c^2\}$; De acordo com a equação (3.1), vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \int \frac{du}{\sqrt{(u - a)\{(u + b)^2 + c^2\}}} \tag{3.2}$$

O objetivo é chegar no formato da integral de Legendre, para encontrarmos as funções inversas de Jacobi. Em outras palavras, precisamos obter um polinômio adequado de grau 4 dentro do radicando. Para atingirmos nosso propósito, considere os polinômios:

$$S_1 = u - a$$

$$S_2 = (u + b)^2 + c^2$$

Queremos encontrar um novo formato para S_1 e S_2, de forma a conseguirmos atingir nosso objetivo. Assim, seja:

$$S_1 + \lambda S_2 = \lambda u^2 + (2b\lambda + 1)u + \lambda(b^2 + c^2) - a$$

Estamos à procura dos valores de λ para os quais o discriminante $D(\lambda)$ do polinômio em u acima seja zero. Assim, para cada λ encontrado, isso implica que $S_1 + \lambda S_2$ tem raiz dupla.

Fazendo $D(\lambda) = 0$, vem:

$$(2b\lambda + 1)^2 - 4\lambda(\lambda(b^2 + c^2) - a) = 0$$

$$(-4c^2)\lambda^2 + 4(a + b)\lambda + 1 = 0$$

Daí, obtemos:

$$\lambda_1 = \frac{a + b - \sqrt{(a + b)^2 + c^2}}{2c^2} \tag{3.3}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{a + b + \sqrt{(a + b)^2 + c^2}}{2c^2} \tag{3.4}$$

Afirmação 3.2.1. *$u_1 = q$ é a raiz dupla de $S_1+\lambda S_2$ correspondente à λ_1 e $u_2 = -p$ é a raiz dupla de $S_1 + \lambda S_2$ correspondente à λ_2, onde $p := \sqrt{(a + b)^2 + c^2} - a$ e $q := \sqrt{(a + b)^2 + c^2} + a$.*

Demonstração: De fato, $S_1 + \lambda S_2 = \lambda u^2 + (2b\lambda + 1)u + \lambda(b^2 + c^2) - a$. Resolvendo para u, vem:

$$u = \frac{-(2b\lambda + 1) \pm \sqrt{D(\lambda)}}{2\lambda}$$

Tomando $\lambda = \lambda_1$ e lembrando que $D(\lambda_1) = 0$, obtemos:

$$u_1 = -\left(b + \frac{1}{2\lambda_1}\right)$$

Como $\lambda_1 = \dfrac{a+b-\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{2c^2}$, vem:

$$u_1 = -\left(b + \frac{2c^2}{2[(a+b)-\sqrt{(a+b)^2+c^2}]}\right)$$

$$u_1 = -\left(\frac{ab+b^2-b\sqrt{(a+b)^2+c^2}+c^2}{[(a+b)-\sqrt{(a+b)^2+c^2}]}\right)\left(\frac{(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+c^2}}\right)$$

$$u_1 = \frac{c^2(\sqrt{(a+b)^2+c^2}+a)}{c^2} = \sqrt{(a+b)^2+c^2}+a = q$$

Agora tomando $\lambda = \lambda_2 = \dfrac{(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{2c^2}$ e lembrando que $D(\lambda_2) = 0$, vem:

$$u_2 = -\left(b + \frac{1}{2\lambda_2}\right)$$

$$u_2 = -\left(b + \frac{c^2}{(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+c^2}}\right)$$

Racionalizando a fração acima, obtemos:

$$u_2 = -\left(b-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+c^2}\right)$$

$$u_2 = -\left(\sqrt{(a+b)^2+c^2}-a\right) = -p$$

.

$\blacksquare$

Portanto, da afirmação (3.2.1), obtemos:

$$S_1 + \lambda_2 S_2 = \lambda_2 (u+p)^2 \tag{3.5}$$

$$S_1 + \lambda_1 S_2 = \lambda_1 (u-q)^2 \tag{3.6}$$

Subtraindo a equação (3.6) de (3.5), chegamos a:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) S_2 = \lambda_2 (u+p)^2 - \lambda_1 (u-q)^2$$

Isto é:

$$^{\dagger} S_2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) (u+p)^2 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) (u-q)^2 \tag{3.7}$$

Agora, multiplicando a equação (3.5) por λ_1, a equação (3.6) por $(-\lambda_2)$ e somando os resultados obtidos, vem:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) S_1 = (\lambda_1 \lambda_2)[(u+p)^2 - (u-q)^2]$$

Ou seja:

$$^{\ddagger} S_1 = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) [(u+p)^2 - (u-q)^2] \tag{3.8}$$

Substituindo os valores de λ_1 e λ_2 (vide (3.3) e (3.4)) nas novas expressões de S_1 e S_2 (equações (3.8) e (3.7), respectivamente), obtemos:

$$S_1 = \left(\frac{1}{4\sqrt{(a+b)^2 + c^2}} \right) [(u+p)^2 - (u-q)^2]$$

†Note que esta é apenas uma nova forma de expressar S_2.

‡Sabemos que $S_1 = u - a$ e que a equação aqui obtida nada mais é do que um novo formato para S_1.

Note que $p+q = 2\sqrt{(a+b)^2+c^2}$. Daí, vem:

$$S_1 = \left(\frac{1}{2(p+q)}\right)[(u+p)^2 - (u-q)^2] \tag{3.9}$$

Quanto à S_2, temos:

$$S_2 = \left(\frac{(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{2\sqrt{(a+b)^2+c^2}}\right)(u+p)^2 - \left(\frac{(a+b)-\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{2\sqrt{(a+b)^2+c^2}}\right)(u-q)^2$$

Note que: $\sqrt{(a+b)^2+c^2}+(a+b) = q+b$ e $\sqrt{(a+b)^2+c^2}-(a+b) = p-b$. Daí, vem:

$$S_2 = \left(\frac{1}{p+q}\right)\left[(q+b)(u+p)^2 + (p-b)(u-q)^2\right] \tag{3.10}$$

Substituindo os valores obtidos em (3.9) e (3.10) na equação (3.2), vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{2}(p+q)\int \frac{du}{\sqrt{[(u+p)^2-(u-q)^2][(q+b)(u+p)^2+(p-b)(u-q)^2]}}$$

Reescrevendo a integral, vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{2}(p+q)\int \frac{du}{\sqrt{(u+p)^2(u+p)^2(p-b)\left[1-\left(\frac{u-q}{u+p}\right)^2\right]\left[\left(\frac{q+b}{p-b}\right)+\left(\frac{u-q}{u+p}\right)^2\right]}}$$

Com o objetivo de deixar a integral no formato de Legendre, faça as transformações:

$$x = \frac{u-q}{u+p} \tag{3.11}$$

$$d^2 = \frac{q+b}{p-b} \tag{3.12}$$

Daí, obtemos:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{\frac{2}{p-b}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(d^2+x^2)}}$$

Utilizando a fórmula (2.10), temos que:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{\frac{2}{p-b}}\sqrt{\frac{p-b}{p+q}}cn^{-1}(x)$$

com módulo k tal que $k^2 = \dfrac{p-b}{p+q}$. Simplificando, vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{\frac{2}{p+q}}cn^{-1}(x)$$

.

Daí, isolando $cn^{-1}(x)$, obtemos:

$$cn^{-1}(x) = \sqrt{\frac{p+q}{2\alpha}}\theta$$

.

Definindo $\gamma := \sqrt{\dfrac{p+q}{2\alpha}}$, vem:

$$x = cn(\gamma\theta)$$

.

Retornando à variável u - de acordo com (3.11) - temos:

$$\frac{u-q}{u+p} = cn(\gamma\theta)$$

Logo,

$$u = \frac{p.cn(\gamma\theta) + q}{1 - cn(\gamma\theta)}$$

Mas $u = \frac{1}{r}$. Daí, vem:

$$r = \frac{1 - cn(\gamma\theta)}{q + p.cn(\gamma\theta)} \tag{3.13}$$

onde $p < q$.

Escolhemos para ilustração os parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ e obtemos:

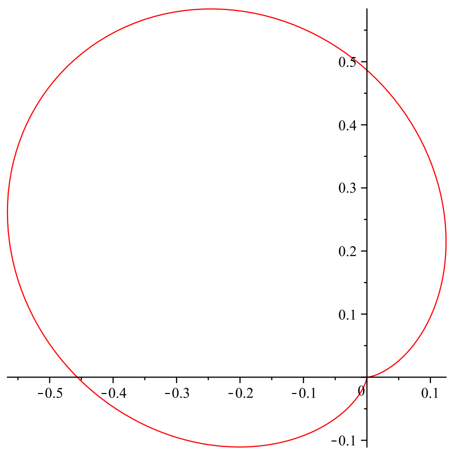


Ilustração: caso 1

Do ponto de vista físico, como $\theta' \cdot r^2 = h$ é constante, segue que há uma ejeção com velocidade ângular infinita e um retorno.

3.2.2 Caso (ii)

Veremos a seguir que o caso (ii) pode ser resolvido apenas com funções elementares (sem a introdução das funções elípticas), pois temos a presença de uma raiz dupla. De fato:

No caso (ii), temos $f(u) = g(u)$. Logo, f tem uma raiz dupla em $u = 0$ e uma raiz simples em $u = \alpha$. Portanto, substituindo o valor de β na equação (3.1), vem:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{u^2(u-\alpha)}{\alpha}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{u\sqrt{u-\alpha}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u-\alpha}} = \int \alpha^{\frac{-1}{2}} d\theta$$

Efetuando a substituição $u = \frac{1}{v}$, temos que $du = -\frac{1}{v^2}dv$ e a equação acima se torna:

$$\alpha^{\frac{-1}{2}}\theta = \int \frac{\frac{-1}{v^2}dv}{\frac{1}{v}\sqrt{\frac{1}{v}-\alpha}} = -\int \frac{dv}{v\sqrt{\frac{1}{v}-\alpha}}$$

.

Como $v = \sqrt{v^2}$ e $2\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4\alpha}$, vem:

$$\alpha^{\frac{-1}{2}}\theta = -\frac{2\alpha}{2\alpha^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}} \int \frac{dv}{\sqrt{v-\alpha v^2}} = -\alpha^{\frac{-1}{2}} \int \frac{2\alpha dv}{\sqrt{4\alpha v - 4\alpha^2 v^2}}$$

.

Somando e subtraindo 1 dentro da raiz quadrada, obtemos:

$$\alpha^{\frac{-1}{2}}\theta = \alpha^{\frac{-1}{2}}\left(-\int \frac{2\alpha dv}{\sqrt{1-(4\alpha^2v^2-4\alpha v+1)}}\right) = \alpha^{\frac{-1}{2}}\left(-\int \frac{2\alpha dv}{\sqrt{1-(2\alpha v-1)^2}}\right)$$

.

Para fins de cálculo, utilize a transformação $t = 2\alpha v - 1$. Daí, $dt = 2\alpha dv$ e:

$$\left(-\int \frac{2\alpha dv}{\sqrt{1-(2\alpha v-1)^2}}\right) = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos(t)$$

.

Portanto,

$$\alpha^{\frac{-1}{2}}\theta = \alpha^{\frac{-1}{2}}\arccos(t) = \alpha^{\frac{-1}{2}}\arccos(2\alpha v-1) = \alpha^{\frac{-1}{2}}\arccos(\frac{2\alpha}{u}-1)$$

ou seja,

$$\alpha^{\frac{-1}{2}}\theta = \alpha^{\frac{-1}{2}}\arccos(\frac{2\alpha}{u}-1)$$

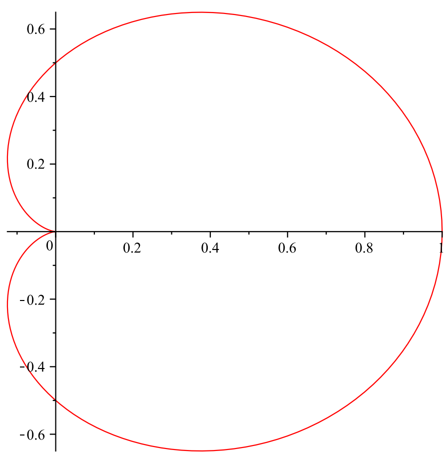
.

Simplificando a equação acima e isolando $\frac{1}{u}$ de forma que encontremos a equação que descreva a órbita em questão (isto é, retornando à variável $r = \frac{1}{u}$), temos:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1+\cos(\theta)}{2\alpha} \tag{3.14}$$

que é uma cardióide.

Para a ilustração do caso 2, escolhemos os parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 0$:



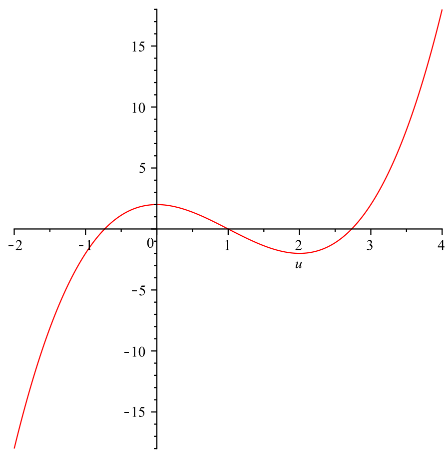
Caso 2: cardióide

Novamente temos ejeção com velocidade ângular infinita e retorno.

É interessante que no *Principia de Newton*, recíproca da proposição VII, estuda-se o caso $k = 5$. Newton obtém a órbita correspondente que é um círculo passando pelo centro.

3.2.3 Caso(iii)

Quando $0 < \beta < \frac{4\alpha^3}{27}$, temos três raízes reais $u_1 < 0 < u_2 < \frac{2\alpha}{3} < u_3$. Note que $0 \leq u \leq u_2$ ou $u \geq u_3$ fazem com que $f(u) \geq 0$, conforme esboço qualitativo do gráfico abaixo.



$\alpha = 3,\ 0 < \beta = 2 < 4$

Como temos duas possibilidades para u, teremos dois tipos de órbitas.

Reescrevendo a equação (3.1), vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \int \frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}} \tag{3.15}$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = u_1 + \frac{1}{x^2} \tag{3.16}$$

com $x > 0$, temos por objetivo chegar a:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = -\frac{2}{\sqrt{(u_2-u_1)(u_3-u_1)}}\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}}$$

com $a^2 = \dfrac{1}{u_2 - u_1}$ e $b^2 = \dfrac{1}{u_3 - u_1}$.

Introduzindo a variável x em (3.15), vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \int \frac{-2x^{-3}dx}{\sqrt{\frac{1}{x^2}(u_1 - u_2 + \frac{1}{x^2})(u_1 - u_3 + \frac{1}{x^2})}}$$

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \int \frac{-2x^{-3}dx}{\sqrt{\frac{1}{x^6}(-(u_2-u_1)x^2+1)(1-(u_3-u_1)x^2)}}$$

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \int \frac{-2dx}{\sqrt{(u_2-u_1)(-x^2+\frac{1}{u_2-u_1})(u_3-u_1)(\frac{1}{u_3-u_1}-x^2)}}$$

Definindo a e b de forma que: $a^2 = \frac{1}{u_2-u_1}$ e $b^2 = \frac{1}{u_3-u_1}$, chegamos a:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = -\frac{2}{\sqrt{(u_2-u_1)(u_3-u_1)}}\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}}$$

.

Note que $a > b$.

Chegou o momento de dividir a resolução do caso (iii) em duas partes: quando $u \geq u_3$ e $0 \leq u \leq u_2$.

Caso (iii) - parte 1

Se $u \geq u_3$, então $x \leq b$ pois:

$$u - u_1 \geq u_3 - u_1 > 0$$

$$\frac{1}{x^2} \geq u_3 - u_1$$

$$x^2 \leq \frac{1}{u_3 - u_1} = b^2$$

.

Logo $x \leq b$.

Utilizando a fórmula (2.11), vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \frac{-2}{\sqrt{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)}}\sqrt{u_2 - u_1}sn^{-1}\left(\sqrt{u_3 - u_1}x, \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}}\right)$$

Logo,

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \frac{-2}{\sqrt{u_3 - u_1}}sn^{-1}(\sqrt{u_3 - u_1}x)$$

com módulo k tal que $k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$.

Efetuando certos cálculos para isolar x, vem:

$$sn^{-1}(\sqrt{u_3 - u_1}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_3 - u_1}{\alpha}}\theta$$

Se definirmos $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_3 - u_1}{\alpha}}$, obtemos:

$$\sqrt{u_3 - u_1}x = sn(-\gamma\theta)$$

Lembrando que $sn(t)$ é uma função ímpar, tem-se:

$$\sqrt{u_3 - u_1}x = -sn(\gamma\theta)$$

Elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado, obtemos:

$$sn^2(\gamma\theta) = (u_3 - u_1)x^2$$

.

Mas $x^2 = \frac{1}{u-u_1}$, daí:

$$u - u_1 = (u_3 - u_1)\frac{1}{sn^2(\gamma\theta)}$$

Assim, a expressão para u é:

$$u = u_1 + (u_3 - u_1)ns^2(\gamma\theta)$$

.

Finalmente, como r é o inverso de u, tem-se:

$$r = \frac{1}{u_1 + (u_3 - u_1)ns^2(\gamma\theta)} \tag{3.17}$$

Caso (iii) - parte 2

Se $0 \leq u \leq u_2$, então $x \geq a$ pois:

$$u - u_1 = \frac{1}{x^2}$$

com $x > 0$.

De $u \leq u_2$, vem:

$u - u_1 \leq u_2 - u_1$

$$\frac{1}{u-u_1} \geq \frac{1}{u_2-u_1} = a^2$$

Logo,

$$x^2 \geq a^2$$

o que implica $x \geq a$.

Assim, utilizando (2.12), vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \frac{-2}{\sqrt{(u_2-u_1)(u_3-u_1)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}$$

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \frac{-2}{\sqrt{(u_2-u_1)(u_3-u_1)}} \sqrt{u_2-u_1}\, ns^{-1}\left(\sqrt{u_2-u_1}x, \sqrt{\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}}\right)$$

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \frac{-2}{\sqrt{u_3-u_1}} ns^{-1}\left(\sqrt{u_2-u_1}x\right)$$

Isolando x, vem:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_3-u_1}{\alpha}}\theta = ns^{-1}(\sqrt{u_2-u_1}x)$$

Definindo $\gamma := \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_3-u_1}{\alpha}}$, obtemos:

$$ns(-\gamma\theta) = \sqrt{u_2-u_1}x$$

Levando em conta que $ns(t)$ é uma função ímpar, então ao elevarmos ao quadrado a equação acima tem-se:

$$ns^2(\gamma\theta) = (u_2 - u_1)x^2 = (u_2 - u_1)\frac{1}{u - u_1}$$

Isolando u, vem:

$$u - u_1 = (u_2 - u_1)\frac{1}{ns^2(\gamma\theta)}$$

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)sn^2(\gamma\theta)$$

Voltando a r, obtemos:

$$r = \frac{1}{u_1 + (u_2 - u_1)sn^2(\gamma\theta)}$$

onde k é tal que $k^2 = \dfrac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$, $\gamma := \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u_3 - u_1}{\alpha}}$ e $0 \leq u \leq u_2$.

Escolhemos os parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2$ para a ilustração abaixo:

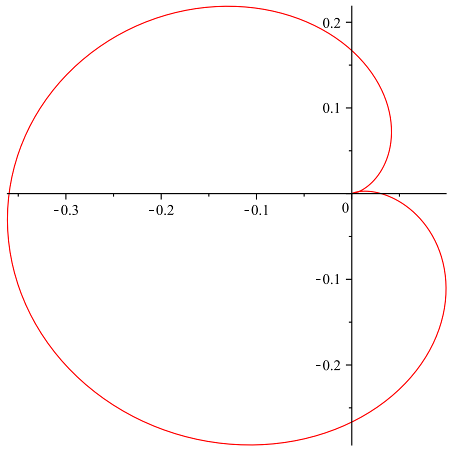


Figura: caso 3 - parte 1

3.2.4 Caso(iv)

Quando $\beta = \frac{4\alpha^3}{27}$, podemos encontrar a solução da EDO em termos de funções elementares, assim como no caso (ii). Isso se deve ao fato da presença de uma raiz dupla. De fato, temos que $f(u) = u^3 - \alpha u^2 + \frac{4\alpha^3}{27}$ tem uma raiz dupla $u_1 = u_2 = \frac{2\alpha}{3}$. Reescrevendo o polinômio de forma a obter a terceira raiz u_3, vem:

$$\left(u - \frac{2\alpha}{3}\right)\left(u - \frac{2\alpha}{3}\right)(u - u_3) = u^3 - \alpha u^2 + \frac{4\alpha^3}{27}$$

Comparando os termos independentes, vem:

$$\left(-\frac{2\alpha}{3}\right)\left(-\frac{2\alpha}{3}\right)(-u_3) = \frac{4\alpha^3}{27}$$

Simplificando, obtemos que a terceira raiz u_3 é dada por:

$$u_3 = -\frac{\alpha}{3}$$

.

Daí, a equação (3.1) toma a seguinte forma:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \int \frac{du}{\sqrt{(u - \frac{2\alpha}{3})^2(u + \frac{\alpha}{3})}} = \int \frac{du}{(u - \frac{2\alpha}{3})\sqrt{(u + \frac{\alpha}{3})}}$$

Vamos dividir em duas partes: $u > \frac{2\alpha}{3}$ e $u < \frac{2\alpha}{3}$.

Caso (i): Quando $u > \frac{2\alpha}{3}$

Utilizando a transformação $u - \frac{2\alpha}{3} = \frac{1}{v}$, daí $du = -\frac{dv}{v^2}$ e a equação (3.1) fica:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = -\int \frac{dv}{v\sqrt{\frac{1}{v} + \alpha}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{v + \alpha v^2}} = -\alpha^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dv}{\sqrt{\frac{v}{\alpha} + v^2}} = -\alpha^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dv}{\sqrt{(v + \frac{1}{2\alpha})^2 - (\frac{1}{2\alpha})^2}}$$

Daí:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = -\alpha^{-\frac{1}{2}} \int \frac{2\alpha dv}{\sqrt{(2\alpha v + 1)^2 - 1}}$$

.

Fazendo a substituição $t = 2\alpha v + 1$, daí $dt = 2\alpha dv$ e tem-se:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = -\alpha^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = -\alpha^{-\frac{1}{2}} \cosh^{-1}(t)$$

Retornando à v, vem:

$$\theta = -\cosh^{-1}(2\alpha v + 1)$$

Voltando à variável u, temos:

$$\theta = -\cosh^{-1}\left(\frac{u + \frac{4\alpha}{3}}{u - \frac{2\alpha}{3}}\right)$$

Com o objetivo de isolar u, obtemos:

$$\cosh(-\theta) = \frac{u + \frac{4\alpha}{3}}{u - \frac{2\alpha}{3}}$$

Lembrando que $\cosh(t)$ é uma função par, temos que a expressão para u é dada por:

$$u = \frac{2\alpha}{3}\left(\frac{\cosh(\theta) + 2}{\cosh(\theta) - 1}\right)$$

Daí, a equação da órbita para $u > \frac{2\alpha}{3}$ é dada por:

$$r = \frac{3}{2\alpha}\left(\frac{\cosh(\theta) - 1}{\cosh(\theta) + 2}\right)$$

Caso (iv) - parte 2: Quando $u < \frac{2\alpha}{3}$

Utilizando a transformação $(\frac{2\alpha}{3} - u) = \frac{1}{v}$, temos $du = \frac{dv}{v^2}$ e daí:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \int \frac{du}{(u - \frac{2\alpha}{3})\sqrt{(u + \frac{\alpha}{3})}} = -\int \frac{dv}{v\sqrt{\alpha - \frac{1}{v}}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^2 - v}} = -\alpha^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - \frac{v}{\alpha}}}$$

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = -\alpha^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dv}{\sqrt{(v - \frac{1}{2\alpha})^2 - (\frac{1}{2\alpha})^2}}$$

Daí:

$$\theta = -\int \frac{2\alpha dv}{\sqrt{(2\alpha v - 1)^2 - 1}}$$

Analogamente à parte 1, temos:

$$\theta = -\cosh^{-1}(2\alpha v - 1)$$

Retornando à u e lembrando que $cosh(t)$ é uma função par, obtemos:

$$\cosh(\theta) = \frac{u + \frac{4\alpha}{3}}{\frac{2\alpha}{3} - u}$$

Isolando u, vem:

$$u = \frac{2\alpha}{3}\left(\frac{\cosh(\theta) - 2}{1 + \cosh(\theta)}\right)$$

Logo, temos que a equação da órbita quando $u < \frac{2\alpha}{3}$ é:

$$r = \frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1 + \cosh(\theta)}{\cosh(\theta) - 2}\right)$$

Escolhemos os parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 4$ para ilustrar os casos $4(a)$ e $4(b)$.

Na primeira figura, temos que o corpo é ejetado com velocidade angular infinita e tende à trajetória circular:

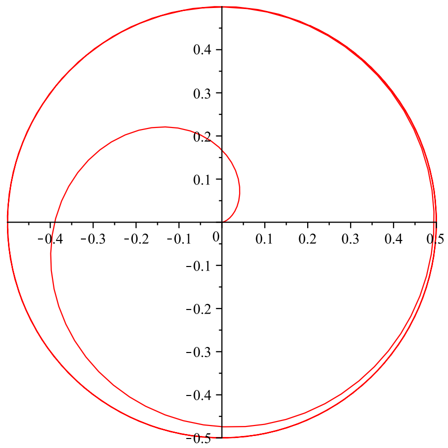


Figura: caso 4(a)

Agora o corpo vem do infinito e tende ao círculo:

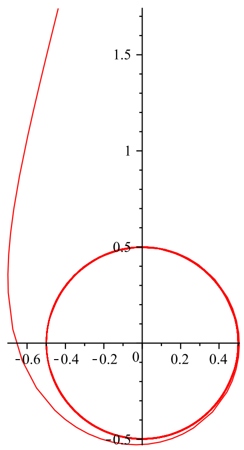


Figura: caso 4(b)

Não custa lembrar que esta trajetória circular é instável, enquanto que no caso gravitacional uma possível trajetória circular com centro no sol é estável: sua perturbação produziria uma elipse com foco no sol.

3.2.5 Caso (v)

Quando $\beta > \frac{4\alpha^3}{27}$, se nota através da análise do gráfico de g que $f(u)$ possui uma raiz real $u = -a$, onde $a > \alpha > 0$. Além disso, temos duas raízes complexas com parte real positiva. O raciocínio para mostrar este fato é inteiramente análogo ao feito no caso (i).

Logo, podemos definir as raízes complexas por:

$$\lambda_1 = b + ci$$

$$\lambda_2 = b - ci$$

com $b, c > 0$.

Logo, obtemos $f(u) = (u + a)\{(u - b)^2 + c^2\}$; De acordo com a equação (3.1), vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \int \frac{du}{\sqrt{(u + a)\{(u - b)^2 + c^2\}}} \tag{3.18}$$

O objetivo é chegar no formato da integral de Legendre, para encontrarmos as funções inversas de Jacobi. Em outras palavras, precisamos obter um polinômio adequado de grau 4 dentro do radicando. Para atingirmos nosso propósito, considere os polinômios:

$$S_1 = u + a$$

$$S_2 = (u - b)^2 + c^2$$

Queremos encontrar um novo formato para S_1 e S_2, de forma a conseguirmos atingir nosso objetivo. Assim, seja:

$$S_1 + \lambda S_2 = \lambda u^2 + (-2b\lambda + 1)u + \lambda(b^2 + c^2) + a$$

Estamos à procura dos valores de λ para os quais o discriminante $D(\lambda)$ do polinômio em u acima seja zero. Assim, para cada λ encontrado, isso implica que $S_1 + \lambda S_2$ tem raiz dupla.

Fazendo $D(\lambda) = 0$, vem:

$$(-2b\lambda + 1)^2 - 4\lambda(\lambda(b^2 + c^2) + a) = 0$$

$$(-4c^2)\lambda^2 - 4(a + b)\lambda + 1 = 0$$

Daí, resolvendo a equação do segundo grau para os lambdas, obtemos:

$$\lambda_1 = \frac{-(a + b) - \sqrt{(a + b)^2 + c^2}}{2c^2} \tag{3.19}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{-(a + b) + \sqrt{(a + b)^2 + c^2}}{2c^2} \tag{3.20}$$

Afirmação 3.2.2. *$u_1 = q$ é a raiz dupla de $S_1 + \lambda S_2$ correspondente à λ_1 e $u_2 = -p$ é a raiz dupla de $S_1 + \lambda S_2$ correspondente à λ_2, onde $p := \sqrt{(a + b)^2 + c^2} + a$ e $q := \sqrt{(a + b)^2 + c^2} - a$.*

Demonstração: De fato, $S_1 + \lambda S_2 = \lambda u^2 + (-2b\lambda + 1)u + \lambda(b^2 + c^2) + a$. Resolvendo para u, vem:

$$u = \frac{(2b\lambda - 1) \pm \sqrt{D(\lambda)}}{2\lambda}$$

Tomando $\lambda = \lambda_1$ e lembrando que $D(\lambda_1) = 0$, obtemos:

$$u_1 = \left(b - \frac{1}{2\lambda_1}\right)$$

Como $\lambda_1 = \dfrac{-(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + c^2}}{2c^2}$, vem:

$$u_1 = \left(b + \frac{2c^2}{2[(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + c^2}]}\right)$$

$$u_1 = \left(\frac{ab + b^2 + b\sqrt{(a+b)^2 + c^2} + c^2}{[(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + c^2}]}\right)\left(\frac{(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + c^2}}{(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + c^2}}\right)$$

$$u_1 = \frac{c^2(a - \sqrt{(a+b)^2 + c^2})}{-c^2} = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} - a = q$$

Agora tomando $\lambda = \lambda_2 = \dfrac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + c^2}}{2c^2}$ e lembrando que $D(\lambda_2) = 0$, vem:

$$u_2 = \left(b - \frac{1}{2\lambda_2}\right)$$

$$u_2 = \left(b - \frac{c^2}{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + c^2}}\right)$$

Racionalizando a fração acima, obtemos:

$$u_2 = \left(b - (a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + c^2}\right)$$

$$u_2 = -\left(\sqrt{(a+b)^2 + c^2} + a\right) = -p$$

.

∎

Portanto, da afirmação (3.2.2), obtemos:

$$S_1 + \lambda_2 S_2 = \lambda_2 (u+p)^2 \tag{3.21}$$

$$S_1 + \lambda_1 S_2 = \lambda_1 (u-q)^2 \tag{3.22}$$

Subtraindo a equação (3.22) de (3.21), chegamos a:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) S_2 = \lambda_2 (u+p)^2 - \lambda_1 (u-q)^2$$

Isto é:

$$^{\S}S_2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)(u+p)^2 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)(u-q)^2 \tag{3.23}$$

Agora, multiplicando a equação (3.21) por λ_1, a equação (3.22) por $(-\lambda_2)$ e somando os resultados obtidos, vem:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) S_1 = (\lambda_1 \lambda_2)[(u+p)^2 - (u-q)^2]$$

Ou seja:

$$^{\P}S_1 = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)[(u+p)^2 - (u-q)^2] \tag{3.24}$$

[§]Note que esta é apenas uma nova forma de expressar S_2.

[¶]Sabemos que $S_1 = u - a$ e que a equação aqui obtida nada mais é do que um novo formato para S_1.

Substituindo os valores de λ_1 e λ_2 (vide (3.19) e (3.20)) nas novas expressões de S_1 e S_2 (equações (3.24) e (3.23), respectivamente), obtemos:

$$S_1 = \left(\frac{1}{4\sqrt{(a+b)^2+c^2}}\right)\left[(u+p)^2-(u-q)^2\right]$$

Note que $p+q = 2\sqrt{(a+b)^2+c^2}$. Daí, vem:

$$S_1 = \left(\frac{1}{2(p+q)}\right)\left[(u+p)^2-(u-q)^2\right] \tag{3.25}$$

Quanto à S_2, temos:

$$S_2 = \left(\frac{-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{2\sqrt{(a+b)^2+c^2}}\right)(u+p)^2 - \left(\frac{-(a+b)-\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{2\sqrt{(a+b)^2+c^2}}\right)(u-q)^2$$

Note que: $\sqrt{(a+b)^2+c^2}-(a+b) = q-b$ e $\sqrt{(a+b)^2+c^2}+(a+b) = p+b$. Daí, vem:

$$S_2 = \left(\frac{1}{p+q}\right)\left[(q-b)(u+p)^2+(p+b)(u-q)^2\right] \tag{3.26}$$

Substituindo os valores obtidos em (3.25) e (3.26) na equação (3.18), vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{2}(p+q)\int \frac{du}{\sqrt{[(u+p)^2-(u-q)^2][(q-b)(u+p)^2+(p+b)(u-q)^2]}}$$

Reescrevendo a integral, vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{2}(p+q)\int \frac{du}{\sqrt{(u+p)^2(u+p)^2(p+b)\left[1-\left(\frac{u-q}{u+p}\right)^2\right]\left[\left(\frac{q-b}{p+b}\right)+\left(\frac{u-q}{u+p}\right)^2\right]}}$$

Com o objetivo de deixar a integral no formato de Legendre, faça as transformações:

$$x = \frac{u-q}{u+p} \tag{3.27}$$

$$d^2 = \frac{q-b}{p+b} \tag{3.28}$$

Daí, obtemos:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{\frac{2}{p+b}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(d^2+x^2)}}$$

Utilizando a fórmula (2.10), temos que:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{\frac{2}{p+b}} \sqrt{\frac{p+b}{p+q}} cn^{-1}(x)$$

com módulo k tal que $k^2 = \dfrac{p+b}{p+q}$. Simplificando, vem:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\theta = \sqrt{\frac{2}{p+q}} cn^{-1}(x)$$

.

Daí, isolando $cn^{-1}(x)$, obtemos:

$$cn^{-1}(x) = \sqrt{\frac{p+q}{2\alpha}}\theta$$

.

Definindo $\gamma := \sqrt{\dfrac{p+q}{2\alpha}}$, vem:

$$x = cn(\gamma\theta)$$

.

Retornando à variável u - de acordo com (3.27) - temos:

$$\frac{u-q}{u+p} = cn(\gamma\theta)$$

Logo,

$$u = \frac{p.cn(\gamma\theta)+q}{1-cn(\gamma\theta)}$$

Mas $u = \frac{1}{r}$. Daí, vem:

$$r = \frac{1-cn(\gamma\theta)}{q+p.cn(\gamma\theta)} \tag{3.29}$$

onde $p > q$.

De forma análoga se obtém a ilustração do caso V, a qual será omitida aqui.

Capítulo 4

Apêndice

Abaixo estão os principais fatos de Variável Complexa que podem ser encontrados na referência [6].

Começamos relembrando a definição de índice de uma curva:

Definição 4.0.1. *Se γ é uma curva retificável em $\mathbb{C}$ então para $a \notin \gamma$ temos que*

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

é chamado o índice de γ relativo ao ponto a.

A seguir, o teorema da fórmula integral de Cauchy:

Teorema 4.0.1. *Seja G um subconjunto aberto do plano e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Se γ é uma curva retificável em G tal que $n(\gamma; w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} - G$, então para $a \in G - \{\gamma\}$ temos:*

$$n(\gamma; a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a}$$

Abaixo, a definição de resíduo e o teorema dos Resíduos:

Definição 4.0.2. *Suponha que f tenha uma singularidade isolada em $z = a$ e seja*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

sua expansão em série de Laurent em torno de $z = a$. Então o resíduo de f em z=a é o coeficiente a_{-1} e denotaremos isso por $Res(f, a) = a_{-1}$.

Teorema 4.0.2. *Seja f uma função analítica na região G exceto pelas singularidades isoladas a_1, a_2, ..., a_n. Se γ é uma curva retificável fechada em G que não passa pelos a_k e se $n(\gamma; w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} - G$, então:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma; a_k) Res(f, a_k)$$

Note que, se o índice da curva para cada singularidade é $n(\gamma; a_k) = 1$, temos que $\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k)$.

A seguir, o teorema do Princípio do Argumento:

Teorema 4.0.3. *Seja f uma função meromorfa com pólos p_1, p_2, ..., p_m e zeros z_1, z_2, ..., z_n. Se γ é uma curva retificável fechada em G que não passa pelos zeros e pólos e tal que $n(\gamma; w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} - G$, então:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma; z_k) - \sum_{j=1}^{m} n(\gamma; p_j)$$

Observe que, se $n(\gamma; z_k) = 1$ para cada k e $n(\gamma; p_j) = 1$ para cada j, então $\dfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \dfrac{f'(z)}{f(z)} dz = Z(f) - P(f)$, onde $Z(f)$ e $P(f)$ são respectivamente o número de zeros e o número de pólos de f.

Para finalizar, uma generalização do teorema acima:

Teorema 4.0.4. *Seja f uma função meromorfa com pólos p_1, p_2, ..., p_m e zeros z_1, z_2, ..., z_n. Se g é uma função analítica em G e γ é uma curva retificável fechada em G que não passa pelos zeros e pólos e tal que $n(\gamma; w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} - G$, então:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} g(z_k)n(\gamma; z_k) - \sum_{j=1}^{m} g(p_j)n(\gamma; p_j)$$

Em particular, para $g(z) = z$ e $n(\gamma; z_k) = n(\gamma; p_j) = 1$ para todo k e j, temos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{j=1}^{m} p_j$$

Teorema 4.0.5. *Funções duplamente periódicas sem singularidades são constantes*

Demonstração: Como f não tem singularidades na célula $OABC$ (conjunto fechado e limitado), então $|f(z)| \leq M$ na célula. Pela dupla periodicidade, a limitação vale $\forall z \in \mathbb{C}$.

Sejam z, z' pertencentes à célula $OABC$ e C um contorno tal que z, z' estejam dentro de C. Então pela fórmula de Cauchy, temos:

$$f(z') - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{1}{\varsigma - z'} - \frac{1}{\varsigma - z}\right) f(\varsigma)d\varsigma$$

Tome por C o círculo com centro em z e raio ρ, com $\rho \geq 2|z' - z|$; isto é, $\varsigma = z + \rho.e^{i\theta}$. Daí, pondo $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\sin(\theta)$, vem:

$$\varsigma - z = x + iy$$

$$d\varsigma = \left(\frac{dx}{d\theta} + i\frac{dy}{d\theta}\right)d\theta \text{ e}$$

$$|d\varsigma| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta = \rho d\theta$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
|f(z') - f(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{z' - z}{(\varsigma - z')(\varsigma - z)} \right) f(\varsigma) d\varsigma \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|z' - z|}{\frac{1}{2}\rho.\rho} M.\rho d\theta \\
&\leq \frac{2M|z' - z|}{\rho}
\end{aligned}
$$

Fazendo $\rho \to \infty$, obtemos $|f(z') - f(z)| = 0$ e logo $f(z') = f(z)$, ou seja, f é constante.

■

Referências Bibliográficas

[1] Wittaker, E.T.; Watson, G.N. *"A course of Modern Analysis"*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[2] Wang, Z. X.; Guo, D. R., *"Special Functions"*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd., Singapore, 1989.

[3] Lawden, Derek F., *"Elliptic functions and applications"*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[4] Meyer, Kenneth R.; *Jacobi Elliptic Functions from a Dynamical Systems Point of View*, The Mathematical Association of America, Monthly 108 (October 2001), 729-737.

[5] Broucke, R., *Notes on the central force* r^n, Astrophysics and Space Science, 72 (1980), 33-53.

[6] Conway, John B., *"Functions of One Complex Variable"*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[7] McGehee, R.; *Double collisions for a classical particle system with nongravitacional interaction*, Comment. Math. Helvetici 56 (1981), 524-557.

[8] Jones, G. A.; Singermann, D., *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge etc., Cambridge University Press 1987.