

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Solução do modelo puff de dispersão de poluentes na camada limite atmosférica  
pelo método GILTT**

por

Everson Jonatha Gomes da Silva

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Setembro de 2012

**Solução do modelo puff de dispersão de poluentes na camada limite atmosférica  
pelo método GILTT**

por

Everson Jonatha Gomes da Silva

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Tiziano Tirabassi

Aprovada por:

Prof. Dr. Francisco Fernando Lamego Simões Filho (CNEN/RJ)

Prof. Dr. Jonas da Costa Carvalho (UFPEL/RS)

Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos Franca

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 28 de Setembro de 2012

## AGRADECIMENTOS

Agradeço

A minha família, especialmente aos meus pais, Cezar e Ionize, por todo o carinho em minha criação;

A minha namorada, Roberta, e sua família pela compreensão e apoio nos momentos difíceis;

Aos professores Marco Tullio M. B. de Vilhena e Tiziano Tirabassi pelos ensinamentos e orientações;

Aos professores Régis Sperotto e Daniela Buske pela colaboração extremamente importante na elaboração deste trabalho;

Aos meus amigos e colegas, os quais me motivaram muito para concluir esta etapa;

A CAPES pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes;

E a todos que de uma forma ou outra contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Solução do modelo puff de dispersão de poluentes na camada limite atmosférica pelo método GILTT

O objetivo deste trabalho é obter uma nova solução analítica para a equação de advecção-difusão que descreve o modelo *Puff*. Este modelo simula o comportamento de um poluente para uma emissão instantânea em condições meteorológicas não homogêneas e não estacionárias. Sendo assim, usou-se o método da GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) para encontrar esta solução. Com o modelo apresentado, neste trabalho, busca-se aperfeiçoar o modelo desenvolvido por [Pereira, 2007], o qual assume uma difusão longitudinal homogênea, utilizando-se de uma Gaussiana nesta direção. Para isso, resolve-se um problema tridimensional transiente levando em conta os coeficientes de difusão em todas as direções. Para efeitos de comparação e validação do modelo proposto, são utilizados os dados do experimento de Copenhague e os resultados obtidos no modelo Gaussiano apresentados em [Pereira, 2007]. Dessa forma, obteve-se uma evolução em relação ao modelo apresentado por [Pereira, 2007], conforme a intenção inicial deste trabalho.

## ABSTRACT

Solution of the puff model for pollutant dispersion in the atmospheric boundary layer by the GILTT method

The objective of this work is to present a new analytical approach for the solution of the advection-diffusion equation that describes a puff model. This model simulate the behavior of a pollutant for an instantaneous emission in non homogeneous and non stationary meteorological conditions. Thus was used the GILTT method (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) to find the solution. With the model presented in this work we aim to refine the model developed by [Pereira, 2007], which assumes a homogeneous longitudinal diffusion, using a Gaussian in this direction. For this purpose, in the present work, we solve a transient three-dimensional problem taking into account the diffusion coefficients in all directions. For comparison and validation of the proposed model we used data from the experiment of Copenhagen and the results obtained with the Gaussian model presented by [Pereira, 2007]. Therefore, was obtained an improvement compared with the model presented by [Pereira, 2007], as the original intention of this work.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM MODELO A PUFF</b> .....	<b>10</b>
3.1	Modelo a <i>Puff</i> .....	10
3.2	A equação de advecção-difusão: Dedução .....	13
3.3	Solução produto .....	15
3.4	Solução via GILTT .....	17
<b>4</b>	<b>VALIDAÇÃO DO MODELO E RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	<b>23</b>
4.1	Dados para validação do modelo .....	23
4.1.1	<i>Dados Experimentais: O Experimento de Copenhagen</i> .....	23
4.1.2	<i>Parametrização Turbulenta</i> .....	26
4.1.3	<i>Perfil de Vento</i> .....	27
4.1.4	<i>Dados Estatísticos</i> .....	27
4.2	Resultados .....	28
4.2.1	<i>Caso bidimensional</i> .....	28
4.2.2	<i>Caso tridimensional</i> .....	34
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>37</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>38</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### 1. Caracteres Arábicos

$A$	matriz de coeficientes do problema transformado
$B$	matriz de coeficientes do problema transformado
$C_T$	Concentração total de um poluente
$\bar{c}$	concentração média de um contaminante passivo ( $g/m^3$ )
$c_{puff}$	concentração média de um contaminante passivo para cada <i>puff</i>
$c_1(x, t)$	concentração média de um contaminante passivo para o problema unidimensional em $x$
$c_2(y, t)$	concentração média de um contaminante passivo para o problema unidimensional em $y$
$c_3(z, t)$	concentração média de um contaminante passivo para o problema unidimensional em $z$
$c_n(t)$	coeficientes da expansão por série
$C_o$	concentrações observadas experimentalmente
$C_p$	concentrações previstas pelo modelo
$CLC$	camada limite convectiva
$CLP$	camada limite planetária
$Cor$	coeficiente de correlação
$D$	matriz diagonal dos autovalores da matriz $F$ de coeficientes do problema transformado
$F$	matriz de coeficientes do problema transformado
$Fa2$	fator de dois
$Fb$	fração de inclinação
$Fs$	desvio fracional padrão
$f_x$	função adimensional

$G(t)$	matriz da transformada inversa de $Y(t)$
$H$	função de Heaviside
$H_s$	altura da fonte ( $m$ )
$I$	matriz identidade
$k$	constante de Von-Kármán
$K_x$	coeficiente de difusão na direção $x$ ( $m^2/s$ )
$K_y$	coeficiente de difusão na direção $y$ ( $m^2/s$ )
$K_z$	coeficiente de difusão na direção $z$ ( $m^2/s$ )
$L$	comprimento de Monin-Obukov ( $m$ )
$L_x$	Distância da condição de contorno para a direção $x$
$L_y$	Distância da condição de contorno para a direção $y$
$N$	número de autovalores
$Nmse$	erro quadrático médio normalizado
$Q$	intensidade da fonte ( $g/s$ )
$S$	fonte
$s$	variável transformada
$T_x$	escala de tempo lagrangeano para a dispersão longitudinal
$t$	tempo ( $s$ )
$u_*$	velocidade de fricção ( $m/s$ )
$\bar{u}$	velocidade média do vento orientado na direção $x$ ( $m/s$ )
$\bar{u}_1$	velocidade média do vento analisada na altura $z_1$
$\bar{v}$	velocidade média do vento orientado na direção $y$ ( $m/s$ )
$\bar{w}$	velocidade média do vento orientado na direção $z$ ( $m/s$ )
$w_*$	escala de velocidade convectiva ( $m/s$ )
$x_0$	coordenada $x$ do baricentro
$y_0$	coordenada $y$ do baricentro
$X$	matriz dos autovetores da matriz $F$ de coeficientes do problema transformado



$X^{-1}$	matriz inversa de $X$
$Y(t)$	vetor de incógnitas do problema transformado
$\overline{Y(s)}$	transformada de Laplace aplicada em $Y(t)$ .
$z$	altura acima da superfície ( $m$ )
$z_0$	comprimento de rugosidade aerodinâmico ( $m$ )
$z_i$	altura da camada limite convectiva ( $m$ )
$\Delta M$	quantidade de massa ( $g$ )
$\Delta t_1$	intervalo de liberação de cada <i>puff</i>
$\Delta t_2$	intervalo de cálculo da concentração

## 2. Caracteres Gregos

$\delta$	função delta de Dirac
$\eta$	variável auxiliar que representa $A^{-1}Q\psi_m$
$\lambda_n$	autovalor do problema de Sturm-Liouville
$\psi_{puff}$	Gaussiana
$\psi_m$	função estabilidade
$\sigma_x$	parâmetro de dispersão longitudinal
$\sigma_u$	desvio padrão da componente longitudinal
$\xi$	vetor representado por $X^{-1}\eta$
$\zeta_n$	autofunção do problema de Sturm-Liouville

## ÍNDICE DE FIGURAS

3.1	Esquema ilustrativo representando a dispersão de poluentes. . . . .	11
3.2	Esquema ilustrativo representando a dispersão de poluentes. . . . .	11
4.1	Experimento de Copenhagen. . . . .	24
4.2	Gráfico de espalhamento para comparação das concentrações preditas ( $C_p$ ) pelo modelo GILTT- <i>puff</i> e pelo modelo de [Pereira, 2007] para $\Delta t_1 = 600s$ e $\Delta t_1 = 60s$ . . . . .	29
4.3	Gráficos de espalhamento dos dados observados experimentalmente de concentração ( $C_o$ ) em comparação com os resultados de concentração do modelo ( $C_p$ ), para o modelo GILTT- <i>puff</i> e para o modelo de [Pereira, 2007]. . . . .	32
4.4	Gráficos de espalhamento dos dados observados experimentalmente de concentração ( $C_o$ ) em comparação com os resultados de concentração do modelo ( $C_p$ ), para o modelo GILTT- <i>puff</i> e para o modelo de [Pereira, 2007]. . . . .	33
4.5	Gráficos de espalhamento dos dados observados experimentalmente da concentração ( $C_o$ ) em comparação com os resultados de concentração do modelo GILTT- <i>puff</i> para o caso tridimensional. . . . .	35

## ÍNDICE DE TABELAS

4.1	Parâmetros meteorológicos do experimento de Copenhagen [Gryning et al., 1987]. . . . .	25
4.2	Velocidade de fricção $u_*$ em $(m/s)$ para diferentes passos de tempo nos experimentos de Copenhagen. Todos os passos correspondem a 10 <i>min.</i> . . . . .	25
4.3	Comprimento de Monin-Obukhov $L$ em $(m)$ para diferentes passos de tempo nos experimentos de Copenhagen. Todos os passos correspondem a 10 <i>min.</i> . . . . .	26
4.4	Avaliação estatística do modelo GILTT-Puff utilizando o experimento de Copenhagen. . . . .	31
4.5	Avaliação estatística do modelo de [Pereira, 2007] utilizando o experimento de Copenhagen. . . . .	31
4.6	Concentrações observadas ( $Co$ ) e preditas ( $Cp1$ - [Pereira, 2007] e $Cp2$ - GILTT- <i>puff</i> ), com $\Delta t_1(s) = 600$ e $\Delta t_2(s) = 60$ . . . . .	34
4.7	Índices estatísticos - problema tridimensional . . . . .	34
4.8	Concentrações observadas ( $Co$ ) e as Preditas ( $Cp$ ), com $\Delta t_1(s) = 600$ e $\Delta t_2(s) = 60$ . . . . .	36

## 1 INTRODUÇÃO

A preocupação com a qualidade do ar cresceu nas últimas décadas devido ao aumento da emissão de poluentes na atmosfera ocasionada pelo crescimento industrial e pelo desenvolvimento tecnológico. A poluição do ar causada por essas emissões gera sérios problemas ao meio ambiente, por este motivo surge a necessidade de estudos para a compreensão do processo de dispersão dos poluentes emitidos com o objetivo de prever possíveis consequências do impacto ambiental nos diversos ecossistemas.

No entanto, problemas operacionais e elevados custos dificultam as pesquisas experimentais, por este motivo os modelos matemáticos são utilizados para o entendimento do fenômeno, o qual controla o transporte, a dispersão e a transformação físico-química da imersão de poluentes na atmosfera. Com isso, a literatura apresenta diversos trabalhos com diferentes modelos que descrevem este fenômeno, entre eles encontra-se o modelo a *Puff*, o qual será utilizado neste trabalho.

Modelos a *Puff* são utilizados para abordagens práticas para descrever a dispersão de uma emissão de poluentes por uma fonte dependente do tempo e uma camada limite planetária (CLP) não homogênea e não estacionária. A maior parte das operações dos modelos a *Puff* são baseadas em aproximações Gaussianas; estes modelos Gaussianos são teoricamente baseados em uma exata, mas não realista solução da equação do transporte e difusão na atmosfera, em casos onde ambos, vento e coeficientes de difusão turbulenta são constantes com a altura, dessa forma, a solução é forçada a representar a situação real pelos parâmetros empíricos "sigmas" [Pereira et al., 2011].

Sendo assim, busca-se, com este trabalho, apresentar uma solução analítica para o modelo a *Puff* através da solução produto da equação de advecção-difusão tridimensional com a utilização da técnica da GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*). Esta solução é possível pela linearidade do problema; além disso, a concentração tridimensional pode ser expressa como produto de três soluções unidimensionais para o campo longe da fonte (*farfield*), pois nessa região a fonte descrita como a função generalizada delta

de Dirac é nula, ou seja, é válida na região onde as condições meteorológicas dominam a dispersão do poluente.

Conseqüentemente, tem-se, como objetivo principal deste trabalho, obter, com esta solução apresentada, resultados mais favoráveis em relação aos resultados apresentados em [Pereira, 2007], visto que, com esta solução, leva-se em conta a não homogeneidade da turbulência em todas as direções o que não acontece com a aproximação Gaussiana.

Para atingir nosso objetivo, o trabalho é organizado da seguinte maneira: o capítulo 1 apresenta a introdução; o capítulo 2 refere-se a revisão bibliográfica - que situa o leitor sobre o tema desta dissertação; em seguida, divide-se o capítulo 3 em quatro subseções: *modelo a Puff* expõe o modelo de dispersão utilizado no trabalho; *A equação de advecção-difusão: Dedução* demonstra a equação que descreve o modelo; *a solução produto* e *Solução via GILTT*, onde é resolvida a equação unidimensional pela técnica da GILTT. O capítulo 4 mostra os dados utilizados neste trabalho e os resultados encontrados para os casos bidimensional e tridimensional. Por fim, no capítulo 5, é feita a conclusão deste trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As primeiras soluções analíticas conhecidas para a equação de advecção-difusão foram as chamadas Gaussianas. Os modelos baseados neste tipo de solução usam parâmetros de dispersão empíricos de modo a forçar a solução Gaussiana a representar o campo de concentração; nestes modelos, o coeficiente de difusão e a velocidade do vento são constantes com a altura. Por outro lado, existem modelos baseados em soluções analíticas não-Gaussianas.

Em 1923, [Roberts, 1923] apresentou uma solução bidimensional para fontes ao nível do solo com a velocidade do vento e o coeficiente de difusão vertical  $K_z$  ( $m^2/s$ ) dados pelas leis de potência como uma função da altura:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^m ; K_z = K_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^n \quad (2.1)$$

onde  $z_1$  é a altura na qual  $\bar{u}_1$  e  $K_1$  são analisados;  $m$  e  $n$  variam entre 0 e 1.

Já, em 1955, [Rounds, 1955] encontrou uma solução bidimensional para fontes elevadas, com o mesmo perfil de vento, porém somente para perfis lineares de  $K_z$ . Função potência da altura, com os expoentes seguindo a lei conjugada de Schmidt ( $\alpha = 1 - \beta$ ), para  $\bar{u}$  e  $K_z$ , foi a forma utilizada por Smith, em 1957, para resolver a equação de transporte e difusão bidimensional [Smith, 1957a]. Smith, em [Smith, 1957b], divulgou uma outra solução com  $\bar{u}$  constante, contudo o  $K_z$  usado foi:

$$K_z = K_0 z^\alpha (z_i - z)^\beta \quad (2.2)$$

onde  $K_0$  é uma constante,  $\alpha$  e  $\beta$  valem 0 ou 1 de acordo com a altura da camada limite  $z_i$ .

Uma solução muito utilizada, no Reino Unido, para o transporte de longa escala de poluentes foi proposta em 1975 por Scriven e Fisher [Scriven e Fisher, 1975]. Nesta solução  $\bar{u}$  é considerado constante e  $K_z$  dado por:

$$K_z \equiv z \text{ para } 0 \leq z \leq z_t \text{ e } K_z = K_z(z_t) \text{ para } z_t \leq z \leq z_i \quad (2.3)$$

na qual  $z_t(m)$  é uma altura predeterminada (geralmente a altura da camada superficial). Esta solução tem como condições de contorno:

$$K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = V_g \bar{c} \quad (2.4)$$

em que  $V_g$  é a velocidade de deposição ( $m/s$ ).

Yeh e Huang e Berlyand [Yeh e Huang, 1975], [Berlyand, 1975], em 1975, apresentaram soluções para um problema bidimensional de fontes elevadas com  $\bar{u}$  e  $K_z$  dados por perfil de potência, e tendo como condições de contorno  $K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = 0$  e  $z = \infty$ . As soluções encontradas foram obtidas em termos de funções de Green. A solução de Berlyand tem sido utilizada na Rússia. Em 1978, Demuth [Demuth, 1978] apresentou uma solução dada em termos de funções de Bessel considerando uma camada verticalmente limitada, ou seja,  $K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = 0$  e  $z = a$ , com a constante. Na Itália, quatro modelos baseados nas soluções de [Yeh e Huang, 1975], [Berlyand, 1975] e [Demuth, 1978] têm sido utilizados: KAPPAG [Tirabassi et al., 1986], KAPPAG-LT [Tirabassi et al., 1989], CISP [Tirabassi e Rizza, 1992] e MAOC [Tirabassi e Rizza, 1993].

No trabalho de Van Ulden [Van Ulden, 1978] foi utilizada a teoria da similaridade de Monin-Obukhov para gerar uma solução para a difusão vertical a partir de fontes contínuas próximas ao solo, supondo que  $\bar{u}$  e  $K_z$  seguem os perfis de similaridade. Com isso, Van Ulden obteve resultados similares aos de Roberts, porém ele formulou um modelo para fontes não superficiais, mas aplicável a fontes dentro da camada limite superficial. Esta solução é utilizada no modelo SPM [Tirabassi e Rizza, 1995].

Em 1980, Nieuwstadt [Nieuwstadt, 1980] apresentou uma solução para um problema unidimensional dependente do tempo e utilizou os polinômios de Legendre e coeficiente de difusão dado por:

$$K_z = G_c u_* z \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) \quad (2.5)$$

onde  $G_c$  é uma constante e  $u_*$  é a velocidade de fricção. Esta solução foi um caso particular da solução de [Smith, 1957b]. No ano seguinte [Nieuwstadt e Haan, 1981] estenderam esta solução utilizando os polinômios de Jacobi para o caso de crescimento da altura da camada limite.



Koch [Koch, 1989] desenvolveu uma solução analítica bidimensional para uma fonte ao nível do solo, onde o vento e as difusividades seguem os perfis de potência, incluindo efeitos de absorção de contaminante pelo solo. A deposição foi considerada em termos de funções hipergeométricas.

[Chrysikopoulos et al., 1992] apresentaram uma solução tridimensional para o transporte de emissões sem empuxo de uma fonte aérea contínua ao nível do solo, para os mesmos perfis de  $\bar{u}$  e  $K_z$  dados em (2.1), incluindo um termo de deposição seca. As funções de Bessel e hipergeométricas foram incorporadas à solução.

Sharan, em 1996, desenvolveu outros modelos matemáticos, os quais [Sharan et al., 1996a], [Sharan et al., 1996b] são utilizados para dispersão tridimensional atmosférica. Nestes modelos, foram utilizados coeficientes de difusão constantes e parametrizações em termos da distância da fonte, respectivamente. As funções de Bessel e as combinações lineares da função de Green são usadas para esta solução. Sharan e Yadav [Sharan e Yadav, 1998] descreveram o processo de dispersão em condições de ventos fracos usando coeficientes de difusão variáveis, os quais foram considerados como uma função linear da distância da fonte. Resultados idênticos foram encontrados com o modelo de [Cirillo e Poli, 1992].

Em 1992, Van Ulden [Van Ulden, 1992] propôs uma solução aproximada para a dispersão de poluentes de contaminantes passivos liberados por uma fonte instantânea (*a Puff*) próxima ao solo, descrevendo o campo de concentração como uma soma de *Puffs*. [Tirabassi e Rizza, 1995] usaram esta solução no modelo chamado SPM - *Skewed Puff Model*. Em 1997 [Tirabassi e Rizza, 1997] desenvolveram um modelo *Puff* não-Gaussiano usando a expansão de Gram-Charlier para o campo de concentração e o sistema finito de equações para os momentos correspondentes. Com base nesta metodologia [Sertori, 2001] apresentou um modelo que simula uma emissão (acidental ou contínua) de poluentes na proximidade do solo. [Scire et al., 2000] apresentou um modelo para aplicações sobre o terreno complexo e com turbulência não homogênea, o qual foi denominado CALPUFF - *California Puff Model* e tem sido acoplado a modelos atmosféricos.

Podemos observar que diversos métodos são aplicados para encontrar soluções analíticas da equação de advecção-difusão. Neste trabalho, são de interesse particular as soluções analíticas obtidas através da aplicação da técnica GITT (*Generalized Integral Transform Technique*). O teorema de Cauchy-Kowalewsky garante a existência e unicidade de uma

solução analítica para a equação de advecção-difusão [Courant e Hilbert, 1989]. Sabemos que as soluções analíticas podem ser expressas ou na forma integral, como é o caso da solução obtida aplicando a transformada de Laplace, ou com uma formulação em série, como na técnica GITT. Estas soluções são equivalentes [Moreira et al., 2010] e assim, a seguir, daremos enfoque aos modelos que utilizam essas técnicas para obter a solução analítica da equação de advecção-difusão.

Em 1998, [Vilhena et al., 1998] introduziram a técnica ADMM (*Advection Diffusion Multilayer Method*). A ideia básica do método ADMM é baseada na discretização da camada limite planetária (CLP) em  $N$  subcamadas, em que cada subcamada a equação de advecção-difusão é resolvida pela técnica da transformada de Laplace considerando valores médios para o coeficiente de difusão e perfil de vento. Assim, o problema com coeficiente variável foi substituído por um conjunto de problemas com coeficientes constantes (coeficientes médios), acoplados por condições de continuidade de concentração e fluxo de contaminante nas interfaces. A solução semi-analítica é dada em forma integral. Desta forma, vários foram os trabalhos publicados utilizando esta técnica: [Moura et al., 1995], [Ferreira Neto, 2003], [Moreira et al., 2004], [Costa et al., 2004], [Moreira et al., 2005a], [Moreira et al., 2005b], [Moreira et al., 2005d], [Buligon et al., 2006]. Uma revisão completa do método ADMM pode ser encontrada em [Moreira et al., 2006b].

A partir deste ponto, direcionamos o foco desta revisão aos trabalhos desenvolvidos pelo método da GITT (técnica da transformada integral generalizada) e por sua variação GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*), os quais são a base do presente trabalho. A GITT é um método híbrido (analítico-numérico) [Cotta, 1993], [Cotta e Mikhaylov, 1997] derivado da transformação integral clássica [Mikhaylov e Özisik, 1984] para problemas lineares de difusão, o qual vem sendo utilizado com grande êxito na solução de diferentes classes de problemas lineares e não-lineares de difusão e advecção-difusão [Cheroto et al., 1999], [Liu et al., 2000], [Magno et al., 2002], [Pereira et al., 2002], [Alves et al., 2002], [Cotta e Barros, 2007]. É vasta a literatura a respeito da GITT, e a sua aplicação em problemas de poluição atmosférica vem crescendo muito nos últimos anos: [Moura, 1999], [Cataldi et al., 2000], [Ribeiro et al., 2000], [Ribeiro et al., 2002], [Velloso et al., 2003], [Storch e Pimentel, 2003], [Velloso et al., 2004], [Storch e Pimentel, 2005], [Pérez Guerrero et al., 2012].

Para a solução de problemas diferenciais parciais, a técnica de transformação integral GITT combina uma expansão em série com uma integração. Na expansão, é usada uma base trigonométrica determinada com o apoio de um problema auxiliar. A integração é feita em todo o intervalo da variável transformada e faz proveito da propriedade de ortogonalidade da base usada na expansão. Este procedimento resulta em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO), que, uma vez solucionado, é facilmente invertido para a obtenção do resultado da equação original. A solução do sistema EDO (também chamado de problema transformado) resultante da aplicação da GITT é feita numericamente com o auxílio de subrotinas numéricas.

A GITT tem como única aproximação o truncamento de um somatório infinito que fornece o resultado da equação governante do problema original. Determinado procedimento permite o controle automático do erro a partir da ordem de truncamento do referido somatório.

A principal diferença em resolver a equação de advecção-difusão utilizando a GITT em relação à solução obtida pelo método ADMM [Moreira et al., 2006b] reside no fato de que com a técnica da GITT não há necessidade de discretização do domínio.

No ano de 2006, a técnica GITT foi utilizada juntamente com o método ADMM por [Costa et al., 2006] para resolver a equação de advecção-difusão tridimensional. A técnica recebeu o nome de GIADMT (*Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer Technique*). A ideia básica da solução do problema consiste na transformação do problema tridimensional num problema bidimensional pela aplicação da técnica GITT na variável  $y$ . O problema bidimensional é então resolvido pelo método ADMM [Moreira et al., 2006b]. A aplicação do método GIADMT pode ser encontrada nos trabalhos [Costa et al., 2006], [Vilhena et al., 2008], [Costa et al., 2010] e [Costa et al., 2012].

[Wortmann et al., 2005] apresentaram uma nova solução analítica para a equação de advecção-difusão bidimensional e simularam a dispersão de poluentes considerando um coeficiente de difusão variável com a altura. Neste trabalho, o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) resultante da aplicação da GITT (problema transformado) foi resolvido analiticamente pelo uso da transformada de Laplace e diagonalização. Tal procedimento recebeu o nome de GILTT e foi uma novidade em relação ao uso típico da GITT (na GITT a solução do problema transformado é numérica [Cotta, 1993], [Cotta e Mikhaylov, 1997]).

De acordo com os trabalhos analisados, podemos resumir a obtenção da solução do problema via GILTT da seguinte forma: procede-se à transformação integral normalmente até a obtenção do sistema EDO. Aplica-se a transformada de Laplace neste sistema, o que resulta em um sistema algébrico. A matriz dos coeficientes do sistema transformado é decomposta em seus autovalores e autovetores. Após a diagonalização, esta matriz é invertida para se obter a solução do sistema algébrico. Esta inversão, por ser uma matriz diagonalizada e a transformada de Laplace são analíticas e sem custo computacional. Assim, a solução analítica do problema transformado é finalmente encontrada.

Muitos avanços foram feitos no estudo da dispersão de poluentes utilizando o método GILTT na equação de advecção-difusão bidimensional, sendo que os trabalhos de maior relevância são os seguintes: [Wortmann et al., 2005], [Moreira et al., 2006a], [Buske et al., 2007b], [Buske et al., 2007c], [Tirabassi et al., 2008], [Buske et al., 2007a], [Tirabassi et al., 2009], [Moreira et al., 2009a], [Moreira et al., 2009b], [Buske et al., 2010] e [Schuch et al., 2011]. Uma revisão completa do método pode ser encontrada em [Moreira et al., 2009b]. Para se obter a solução tridimensional aproximada, inicialmente a técnica GILTT utilizava uma aproximação na variável  $y$  assumindo que a pluma de poluente possui uma distribuição gaussiana, e recebe o nome de GILTTG. Em 2009, surgiu o novo método 3D-GILTT (*Three-dimensional Generalized Integral Laplace Transform Technique*) [Buske et al., 2009a], [Buske et al., 2009b], [Buske et al., 2011a], [Buske et al., 2011b], [Buske et al., 2012a], [Buske et al., 2012b], [Vilhena et al., 2012] que resolveu a equação tridimensional de advecção-difusão de forma analítica. Para tanto, se utilizou a técnica GITT na variável  $y$  do problema, e o problema bidimensional resultante foi resolvido pelo método GILTT conforme descrito acima.

Uma aplicação importante dos métodos ADMM e GILTT foi apresentada por [Pereira, 2007]. Neste trabalho, [Pereira, 2007] resolveu um problema a *puff* bidimensional transiente utilizando os métodos ADMM e GILTT e realizou um estudo comparativo entre os resultados obtidos com ambas as técnicas. Além disso, o modelo a *Puff* bidimensional foi descrito como o produto da solução analítica de um problema unidimensional transiente (em  $z$  e  $t$ ) por uma gaussiana em  $x$ , caracterizando a difusão nesta direção. Esta foi a primeira vez que os modelos ADMM e GILTT foram aplicados a uma fonte pontual. Em [Pereira et al., 2011], uma generalização do trabalho anterior é apresentada, considerando uma Gaussiana

em  $y$ , de modo a obter uma solução tridimensional, embora apenas resultados para o caso bidimensional foram apresentados. [Tirabassi et al., 2010] apresenta uma comparação entre os resultados de [Pereira, 2007] e o método ADMM.

Como se pode ver, são muitos os intuitos de se chegar a uma solução mais abrangente da equação de advecção-difusão. Espera-se, com o presente trabalho, uma evolução na obtenção de soluções analíticas desta equação.

### 3 SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM MODELO A PUFF

A dispersão de uma substância liberada na atmosfera é modelada pela difusão turbulenta provocada pela variação de temperatura e de vento na camada limite planetária. Isto ocorre devido ao aquecimento e resfriamento da superfície da Terra, fazendo com que o transporte das partículas seja dominado na horizontal pelo vento médio - advecção - e na vertical pela turbulência. Por este motivo, a equação de advecção-difusão é fortemente usada para modelar o transporte e a dispersão de poluentes na atmosfera.

Modelar um determinado problema é expressar com a linguagem matemática algum fenômeno; sendo assim, a literatura apresenta diversos modelos para estudar a dispersão de poluentes na atmosfera, entre eles, encontram-se problemas com emissão contínua de poluentes, conhecidos como modelos de pluma, e os com emissão instantânea, denominados modelos a *Puff*. Tem-se como objetivo neste trabalho investigar este último modelo.

Assim, neste capítulo, é apresentado um método para o cálculo da concentração média do modelo a *Puff*, descrito pela equação de advecção-difusão, através de uma solução produto [Özisik, 1974] utilizando-se a técnica GILTT. Esta solução é possível pela linearidade do problema. Além disso a concentração tridimensional pode ser expressa como produto de três soluções unidimensionais para o campo longe da fonte (*farfield*), pois nessa região a fonte descrita como a função generalizada delta de Dirac é nula, ou seja, é válida na região onde as condições meteorológicas dominam a dispersão do poluente.

#### 3.1 Modelo a *Puff*

Consideremos que uma fonte pontual de altura  $H_s$  libera instantaneamente um poluente a uma taxa de emissão constante  $Q$  em um tempo  $t_{0_{Puff}}$ , conforme a figura (3.1 ).

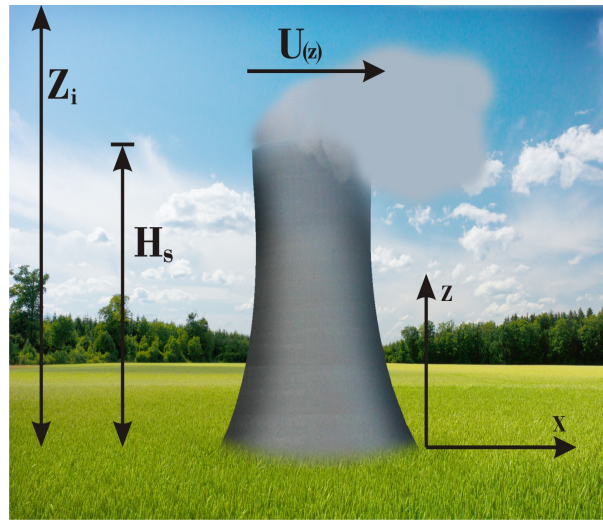


Figura 3.1 – Esquema ilustrativo representando a dispersão de poluentes.

Leva-se em conta que para cada *Puff* emitido em um instante  $t_{0_{Puff}}$  na atmosfera libera-se uma quantidade de massa  $\Delta M = Q\Delta t_1$ , ou seja, uma taxa de emissão de poluentes é liberada a cada intervalo  $\Delta t_1$ , também, que a concentração média de poluente de cada *Puff* emitido, denotada por  $c_{puff}$ , é calculada em um intervalo de tempo  $\Delta t_2$ . A trajetória de um *Puff* é descrita pelo seu baricentro (centro de massa), o qual é definido da seguinte forma:

$$x_0 = \bar{u}\Delta t; \quad y_0 = \bar{v}\Delta t \quad (3.1)$$

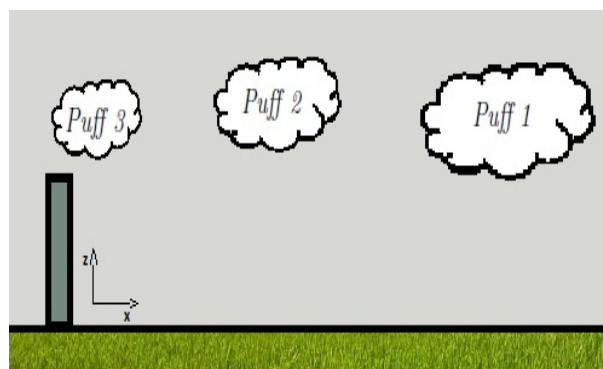


Figura 3.2 – Esquema ilustrativo representando a dispersão de poluentes.

Conseqüentemente, a concentração total de um poluente em um determinado ponto no espaço é dada pela sobreposição dos *Puffs* emitidos (uma amostragem), ou seja, pela soma das concentrações ( $c_{puff}$ ) de todos os *Puffs*, conforme a equação abaixo.

$$C_T(x, y, z, t) = \sum_{puff=1}^{total\ de\ puffs} \Delta M_{puff} \left\{ \int_{t=0}^{\infty} c_{puff}(x, y, z, t) H(t - t_{0_{puff}}) dt \right\} \quad (3.2)$$

onde  $H$  é a função de Heaviside. [Spiegel, 1965]

Nos modelos encontrados na literatura,  $c_{puff}$  é calculada com uma aproximação Gaussiana, como por exemplo, em [Pereira, 2007] onde tem-se:

$$c_{puff}(x, z, t) = c_{puff}(z, t) \psi_{puff}(x, t) \quad (3.3)$$

No trabalho de [Pereira, 2007],  $c_{puff}(z, t)$  é obtido analiticamente pelo método GILTT e  $\psi_{puff}(x, t)$  representa uma Gaussiana na direção  $x$  dada por:

$$\psi_{puff}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - x_0}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

onde  $x_0 = \bar{u}\Delta t$ ;  $x_0$  é o baricentro e  $\bar{u}$  é a componente horizontal da velocidade do vento médio;  $\sigma_x$  é o parâmetro de dispersão longitudinal definido como [Gryning e Lyck, 1984]:

$$\sigma_x = \sigma_u t f_x(t/T_x) \quad (3.5)$$

onde  $f_x$  é a função adimensional do tempo de viagem  $t/T_x$  dada como:

$$f_x = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{t}{2T_x}}} \quad (3.6)$$

e  $T_x$  é a escala de tempo Lagangeano para a dispersão longitudinal sendo:

$$T_x = 600s \text{ para fontes elevadas } (H_s/z_i > 0,1)$$

$$T_x = 200s \text{ para fontes ao nível do solo } (H_s/z_i \leq 0,1)$$

em que  $\sigma_u$  é o desvio padrão da componente longitudinal da velocidade do vento definido por:

$$\left( \frac{\sigma_u}{u_*} \right)^2 = 0.35 \left( -\frac{H_s}{\kappa L} \right)^{2/3} + \left( 2 - \frac{z_i}{H_s} \right) \quad (3.7)$$



onde  $u_*$  é a velocidade de fricção,  $\kappa$  é a constante de Von-Kármán ( $\kappa \approx 0.4$ ),  $z_i$  é a altura da camada limite planetária e  $L$  é o comprimento de Monin-Obukhov [Moreira D.M., 2008].

No presente trabalho, a proposta é aperfeiçoar a solução apresentada por [Pereira, 2007] de forma a torná-la mais realista. A ideia aqui é substituir a aproximação Gaussiana em  $x$  por uma solução analítica mais geral nesta direção, bem como, o problema será generalizado para o caso tridimensional.

### 3.2 A equação de advecção-difusão: Dedução

A modelagem do fenômeno de transporte é dada pela equação da conservação de massa (equação da continuidade). Considerando uma espécie genérica  $C$  que se conserva na atmosfera temos [Blackadar, 1997]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = S \quad (3.8)$$

Nesta equação,  $u$ ,  $v$  e  $w$  ( $m/s$ ) representam as componentes instantâneas do vento nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ; e  $S$  representa uma fonte. Considerando os efeitos da turbulência, nesta equação, é feita uma decomposição de Reynolds [Stull, 1988], ou seja, as variáveis de interesse são definidas como a soma de suas médias de *ensemble* (ilustradas aqui com uma barra superior nas variáveis) e as flutuações (representadas por linha) [Arya, 1995]:

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'; \quad w = \bar{w} + w'; \quad C = \bar{c} + c' \quad (3.9)$$

Substituindo as variáveis da equação (3.9) na equação (3.8), obtemos:

$$\frac{\partial(\bar{c} + c')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{c} + c')}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial(\bar{c} + c')}{\partial y} + (\bar{w} + w') \frac{\partial(\bar{c} + c')}{\partial z} = S \quad (3.10)$$

Aplicando a média e suas propriedades em toda a equação (3.10) e considerando que

$$\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = \overline{c'} = 0 \quad (3.11)$$

temos:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial c'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial c'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial c'}{\partial z}} = S \quad (3.12)$$

Usando as propriedades das médias é fácil demonstrar que:

$$\overline{u' \frac{\partial c'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial c'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial c'}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{u' c'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v' c'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w' c'}}{\partial z} \quad (3.13)$$

Logo, a equação(3.12) fica:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u' c'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v' c'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w' c'}}{\partial z} = S \quad (3.14)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{u' c'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v' c'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w' c'}}{\partial z} + S \quad (3.15)$$

Com isso chegamos a equação de advecção-difusão, onde  $\bar{c}$  representa a concentração média de um poluente ( $g/m^3$ ) e  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  são as componentes do vento médio ( $m/s$ ) orientadas nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Os termos  $\overline{u' c'}$ ,  $\overline{v' c'}$  e  $\overline{w' c'}$  correspondem aos fluxos turbulentos ( $g/sm^2$ ) nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O termo de difusão molecular é desconsiderado, pois a turbulência domina os processos de transporte e dispersão.

A equação (3.15) apresenta quatro variáveis desconhecidas e não pode ser resolvida diretamente. Uma das maneiras de solucionar o problema de fechamento é baseada na hipótese de transporte por gradiente (ou teoria K), que em analogia com a lei de Fick da difusão molecular assume que o fluxo turbulento de concentração é proporcional à magnitude do gradiente de concentração média [Seinfeld e Pandis, 1997]. Logo,

$$\overline{u' c'} = -K_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (3.16)$$

$$\overline{v' c'} = -K_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \quad (3.17)$$

$$\overline{w' c'} = -K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (3.18)$$

onde  $K_x$ ,  $K_y$  e  $K_z$  são os coeficientes de difusão turbulenta ( $m^2/s$ ) nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, os quais em princípio contém toda a informação da complexidade da turbulência, mas são geralmente parametrizados.

Substituindo as equações (3.16), (3.17) e (3.18) na equação (3.15), chegamos a

equação de advecção-difusão, com fechamento Fickiano da turbulência, para um sistema de coordenadas cartesianas, em que a direção  $x$  coincide com a direção do vento médio, dada por [Arya, 1999]:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) + S \quad (3.19)$$

Contudo, nos modelos a *Puff*, a expansão do poluente emitido instantaneamente é independente da velocidade do vento; cada *Puff* é meramente carregado através do vento, sendo assim, os termos advectivos da equação (3.19) são desconsiderados, tornando-a puramente difusiva [Roberts, 1923]. Assim, a equação (3.19) se reduz a:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) + S \quad (3.20)$$

### 3.3 Solução produto

Dada a equação (3.20) que descreve o modelo a *Puff* tridimensional e considerando que  $c_{puff} = \bar{c}$  podemos rescrevê-la como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{puff}(x, y, z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial c_{puff}(x, y, z, t)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial c_{puff}(x, y, z, t)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial c_{puff}(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + S \end{aligned} \quad (3.21)$$

com o termo fonte representado por:

$$S = Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - H_s)\delta(t - t_0) \quad (3.21a)$$

onde  $Q$  é a taxa de emissão do poluente( $g/s$ );  $x_0$  e  $y_0$  são os baricentros do *Puff*;  $H_s$  é a altura da fonte (m);  $t_0$  é o tempo de liberação instantânea(s); as  $\delta(*)$  são as funções delta de Dirac;  $K_x, K_y, K_z$  são os coeficientes de difusão ( $m^2/s$ ) nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

A equação (3.21) está sujeita as condições de contorno:

$$K_x \frac{\partial c_{puff}}{\partial x} = 0 \quad em \quad x = 0, \quad x = L_x, \quad (3.21b)$$

$$K_y \frac{\partial c_{puff}}{\partial y} = 0 \quad em \quad y = 0, \quad y = L_y, \quad (3.21c)$$

$$K_z \frac{\partial c_{puff}}{\partial z} = 0 \quad em \quad z = 0, \quad z = z_i, \quad (3.21d)$$

onde  $L_x$  e  $L_y$  são distâncias longe da fonte, e  $z_i$  é a altura da camada limite. Considerando que no início da liberação não há poluentes no ar, temos que a condição inicial é dada por:

$$c_{puff}(x, y, z, t) = 0 \quad em \quad t = 0 \quad (3.21e)$$

Para resolver a equação (3.21), neste trabalho, vamos escrevê-la como um produto das soluções de três problemas unidimensionais, conforme descrito em [Özisk, 1974]. Sendo assim, temos:

$$c_{puff}(x, y, z, t) = c_1(x, t)c_2(y, t)c_3(z, t) \quad (3.22)$$

onde  $c_1(x, t)$  é representado pelo problema unidimensional na direção  $x$ , escrito como:

$$\frac{\partial c_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial c_1(x, t)}{\partial x} \right) + Q\delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \quad (3.23)$$

sujeito as condições de contorno e inicial:

$$K_x \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0 \quad em \quad x = 0, \quad x = L_x, \quad (3.23b)$$

$$c_1(x, t) = 0 \quad em \quad t = 0 \quad (3.23c)$$

ainda,  $c_2(y, t)$  é descrita pela equação unidimensional na direção  $y$ , dada por:

$$\frac{\partial c_2(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial c_2(y, t)}{\partial y} \right) + Q\delta(y - y_0)\delta(t - t_0) \quad (3.24)$$

com condições de contorno e inicial:

$$K_y \frac{\partial c_2}{\partial y} = 0 \quad em \quad y = 0, \quad y = L_y, \quad (3.24b)$$

$$c_2(y, t) = 0 \quad em \quad t = 0 \quad (3.24c)$$

finalmente  $c_3(z, t)$  é representada pela equação unidimensional na direção  $z$ , dada por:

$$\frac{\partial c_3(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial c_3(z, t)}{\partial z} \right) + Q\delta(z - H_s)\delta(t - t_0) \quad (3.25)$$

para as condições de contorno e inicial são:

$$K_z \frac{\partial c_3}{\partial z} = 0 \quad em \quad z = 0, \quad z = z_i, \quad (3.25b)$$

$$c_3(z, t) = 0 \quad em \quad t = 0 \quad (3.25c)$$

Cabe salientar que a solução de cada um dos problemas unidimensionais ( $c_1(x, t)$ ,  $c_2(y, t)$  e  $c_3(z, t)$ ) será encontrada utilizando o método GILTT. Uma vez que a solução do problema (3.21) foi encontrada, temos a concentração de poluentes em cada *Puff*. Logo obtemos a solução da equação (3.2):

$$C_T(x, y, z, t) = \sum_{puff=1}^{total\ de\ puffs} \Delta M_{puff} \left\{ \int_{t=0}^{\infty} c_{puff}(x, y, z, t) H(t - t_0) dt \right\}$$

### 3.4 Solução via GILTT

A seguir será apresentada a solução da equação unidimensional (3.25) pelo método GILTT. Para os demais casos a solução é análoga.

Conforme descrito anteriormente, na técnica GILTT, inicialmente, escolhemos um problema auxiliar de Sturm-Liouville, cuja solução será utilizada como base na expansão em série da concentração de poluentes. De forma a simplificar a escolha do problema auxiliar de Sturm-Liouville, a equação (3.25) é reescrita fazendo-se o uso da regra do produto da derivada. Ainda, dividindo a equação por  $K_z$ , o termo Laplaciano em  $z$  é utilizado para determinar o seguinte problema de Sturm-Liouville:

$$\zeta_n''(z) + \lambda_n^2 \zeta_n(z) = 0 \quad em \quad 0 < z < z_i, \quad (3.26)$$

cujas respectivas condições de contorno são as mesmas do problema original, ou seja:

$$\zeta_n'(z) = 0 \quad em \quad z = 0 \ e \ z = z_i. \quad (3.26a)$$

A solução do problema auxiliar (3.26) é dada por [Özsisik, 1974]:

$$\zeta_n(z) = \cos(\lambda_n z), \quad (3.27)$$

onde  $\lambda_n = n\pi/z_i$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) são as raízes positivas da expressão  $\sin(\lambda_n z_i) = 0$ .  $\zeta_n(z)$  são as autofunções e  $\lambda_n$  os respectivos autovalores do problema auxiliar de Sturm-Liouville.

A base de autofunções do problema de Sturm-Liouville é usada para expandir a variável  $c_3(z, t)$  na forma:

$$c_3(z, t) = \sum_{n=0}^N c_n(t) \zeta_n(z), \quad (3.28)$$

cujos coeficientes  $c_n(t)$  ainda devem ser encontrados.

Substituindo a expansão em série (3.28) na equação (3.25), temos:

$$\sum_{n=0}^N c_n'(t) \zeta_n(z) = \sum_{n=0}^N c_n(t) K_z' \zeta_n'(z) + \sum_{n=0}^N c_n(t) K_z \zeta_n''(z) + Q\delta(t - t_0)\delta(z - H_s). \quad (3.29)$$

Tomando momentos, ou seja, aplicando o operador integral

$$\int_0^{z_i} (\cdot) \zeta_m(z) dz$$

e lembrando que  $\zeta_n''(z) = -\lambda_n^2 \zeta_n(z)$ , podemos reescrever a equação (3.29) como:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N c_n'(t) \int_0^{z_i} \zeta_n(z) \zeta_m(z) dz &= \sum_{n=0}^N c_n(t) \int_0^{z_i} K_z' \zeta_n'(z) \zeta_m(z) dz + \\ &- \sum_{n=0}^N c_n(t) \lambda_n^2 \int_0^{z_i} K_z \zeta_n(z) \zeta_m(z) dz + Q\delta(t - t_0) \int_0^{z_i} \delta(z - H_s) \zeta_m(z) dz. \end{aligned} \quad (3.30)$$

ou ainda temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N c_n'(t) \int_0^{z_i} \zeta_n(z) \zeta_m(z) dz + \sum_{n=0}^N c_n(t) [\lambda_n^2 \int_0^{z_i} K_z \zeta_n(z) \zeta_m(z) dz + \\ - \int_0^{z_i} K_z' \zeta_n'(z) \zeta_m(z) dz] &= Q\delta(t - t_0) \int_0^{z_i} \delta(z - H_s) \zeta_m(z) dz. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A equação (3.31) pode ser escrita na forma matricial:

$$A.Y'(t) + B.Y(t) = Q\delta(t - t_0)\zeta_m(H_s) \quad (3.32)$$

onde:

$$A = (a)_{n,m} = \int_0^{z_i} \zeta_n(z) \zeta_m(z) dz \quad (3.32a)$$

$$B = (b)_{n,m} = \lambda_n^2 \int_0^{z_i} K_z \zeta_n(z) \zeta_m(z) dz - \int_0^{z_i} K'_z \zeta'_n(z) \zeta_m(z) dz \quad (3.32b)$$

Reescrevendo a equação (3.32), obtemos:

$$Y'(t) + F.Y(t) = \eta\delta(t - t_0) \quad (3.33)$$

onde F é definida por  $F = A^{-1}B$  e  $\eta = A^{-1}Q\zeta_m(H_s)$ . Este sistema de EDO está sujeito a condição inicial:

$$Y(0) = c_3(z, 0) = 0 \quad (3.33a)$$

O problema transformado (equação 3.33) será resolvido por transformada de Laplace e diagonalização [Wortmann et al., 2005], [Moreira et al., 2005c], [Moreira et al., 2009b]. Aplicando a transformada de Laplace na variável  $t$ ,

$$\overline{Y(s)} = \mathcal{L}\{Y(t); t \rightarrow s\}$$

a equação (3.33) fica:

$$s\overline{Y(s)} - Y(0) + F\overline{Y(s)} = \eta e^{-t_0 s} \quad (3.34)$$

Assumindo que a matriz F é não-defectiva podemos decompô-la, tal que:

$$F = X.D.X^{-1} \quad (3.35)$$

onde D é a matriz diagonal dos autovalores, X é a matriz dos respectivos autovetores e  $X^{-1}$

a matriz inversa de  $X$ . Assim, a equação (3.34) pode ser reescrita como:

$$s\overline{Y(s)} + X.D.X^{-1}\overline{Y(s)} = \eta e^{-t_0s} \quad (3.36)$$

ou de outra forma:

$$(sI + X.D.X^{-1})\overline{Y(s)} = \eta e^{-t_0s} \quad (3.37)$$

em que  $I$  é a matriz identidade. Como  $X.X^{-1} = X^{-1}.X = I$ , podemos reescrever a equação (3.37) como:

$$X.(sI + D).X^{-1}\overline{Y(s)} = \eta e^{-t_0s} \quad (3.38)$$

após algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$\overline{Y(s)} = X.(sI + D)^{-1}.X^{-1}.\eta e^{-t_0s} \quad (3.39)$$

ou ainda

$$\overline{Y(s)} = X.e^{-t_0s}(sI + D)^{-1}.X^{-1}.\eta \quad (3.40)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$Y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{\overline{Y(s)}; s \rightarrow t\}$$

obtemos

$$Y(t) = X.G(t).X^{-1}.\eta \quad (3.41)$$

em que

$$G(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{e^{-t_0s}(sI + D)^{-1}\} \quad (3.42)$$

A transformada inversa  $G(t)$  é resolvida analiticamente. Para tanto observamos que a matriz



$(sI + D)$  é escrita como:

$$(sI + D) = \begin{bmatrix} s + d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s + d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s + d_N \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

em que  $d_n$  são os autovalores da matriz  $F$  (equação (3.35)) ou ainda, os elementos da matriz diagonal  $D$ . Da álgebra matricial, a inversa de uma matriz diagonal é a inversa dos seus elementos, então

$$(sI + D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s+d_N} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

e

$$e^{-t_0 s}(sI + D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t_0 s}}{s+d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{e^{-t_0 s}}{s+d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{e^{-t_0 s}}{s+d_N} \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na matriz (3.45), usando a propriedade da convolução, obtemos:

$$G(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{e^{-t_0 s}(sI + D)^{-1}\} = \begin{bmatrix} e^{-d_1(t-t_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-d_2(t-t_0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-d_N(t-t_0)} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Assim temos que a solução da EDO (3.33) é escrita como:

$$Y(t) = X.G(t).X^{-1}.\eta \quad (3.47)$$

De forma a evitar a inversão da matriz  $X$ , chamamos  $\xi = X^{-1}.\eta$ . Ao resolvermos o sistema

linear  $X.\xi = \eta$ , obtemos o valor de  $\xi$ , dessa forma, a solução (3.47) pode ser escrita da seguinte forma:

$$Y(t) = X.G(t).\xi \quad (3.48)$$

Finalmente, os coeficientes da equação (3.28) foram encontrados, e a solução final do problema é:

$$c_3(z, t) = \sum_{n=0}^N c_n(t) \zeta_n(z),$$

## 4 VALIDAÇÃO DO MODELO E RESULTADOS NUMÉRICOS

### 4.1 Dados para validação do modelo

Uma utilização correta dos modelos de transporte e difusão na atmosfera não pode prescindir de um estudo sobre suas capacidades de representarem corretamente situações reais. Quando possível, deve-se verificar a confiabilidade do modelo utilizado com os dados, com os cenários topográficos e meteorológicos próprios da área de seu emprego [Tirabassi, 2005].

Assim, neste capítulo, apresentaremos os dados experimentais, as parametrizações do coeficiente de difusão, o perfil de vento e os índices estatísticos utilizados neste trabalho. Além dos dados, também mostraremos os resultados numéricos.

#### 4.1.1 *Dados Experimentais: O Experimento de Copenhagen*

Qualquer estudo de modelagem é incompleto, se não é apropriadamente e adequadamente validado com observações relevantes. A seguir, é apresentado o experimento difusivo utilizado, neste trabalho, para validar o presente modelo.

Os experimentos de dispersão em Copenhagen, descritos nos artigos [Gryning e Lyck, 1984] e [Gryning et al., 1987], consistiram na liberação do traçador  $SF_6$  (hexafluoreto de enxofre) ao norte de Copenhagen. É um experimento de fonte alta e fortemente convectivo.

O traçador foi abandonado, sem empuxo, a partir de uma torre com altura de 115 m, sendo coletado ao nível do solo,  $z = 0$ , em unidades de amostragem, localizadas em três arcos perpendiculares ao vento médio. As unidades de amostragem foram posicionadas a uma distância entre 2 a 6 km, a partir do ponto onde ocorreu a liberação do poluente, como mostra a Figura (4.1).

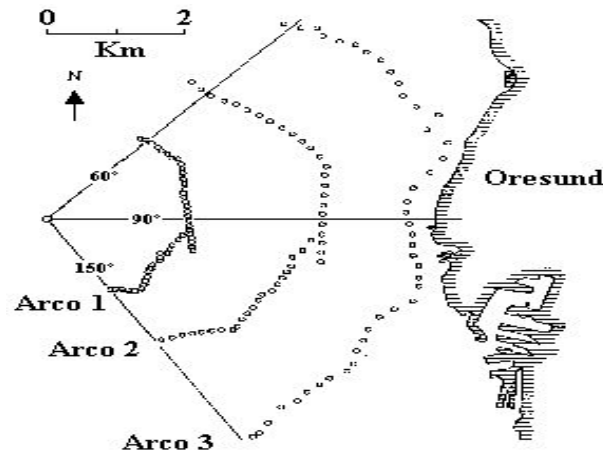


Figura 4.1 – Experimento de Copenhagen.

As liberações de  $SF_6$  começaram uma hora antes do início da amostragem. O tempo médio das medidas foi de 1 h e suas imprecisões são de 10 %. O local era principalmente residencial, com um comprimento de rugosidade de  $z_0 = 0,6 m$ . A concentração foi obtida, fazendo-se médias na segunda hora, ou seja, depois de uma hora de emissão é que as concentrações começaram a serem medidas a cada 20 minutos. Com este procedimento, na segunda hora, obtêm-se três medidas da concentração de poluentes. Para o caso bidimensional, os dados micrometeorológicos para a velocidade de fricção e o comprimento de Monin-Obukhov são medidos a cada 10 minutos. Generosamente, Sven-Erik Gryning [Gryning, 1997] disponibilizou estes dados. Neste trabalho, foram feitas médias desses dados desde o momento inicial da emissão, até o momento de cada medida de concentração. Isto foi possível devido ao fato que os coeficientes de difusão, aqui considerados, não serem dependentes do tempo.

A Tabela (4.1) expõe os dados micrometeorológicos medidos experimentalmente, e as Tabelas (4.2) e (4.3) mostram a velocidade de fricção e o comprimento de Monin-Obukhov, respectivamente, medidos a cada 10 minutos. Salientamos que os dados do experimento 6 são omitidos uma vez que não existem medidas de 10 em 10 minutos dos dados micrometeorológicos para este caso.

Tabela 4.1 – Parâmetros meteorológicos do experimento de Copenhagen [Gryning et al., 1987].

Expt	$\bar{u}$ (115 m) ( $ms^{-1}$ )	$\bar{u}$ (10 m) ( $ms^{-1}$ )	$w_*$ ( $ms^{-1}$ )	$z_i$ (m)
1	3,4	2,1	1,8	1980
2	10,6	4,9	1,8	1920
3	5,0	2,4	1,3	1120
4	4,6	2,5	0,7	390
5	6,7	3,1	0,7	820
7	7,6	4,1	2,2	1850
8	9,4	4,2	2,2	810
9	10,5	5,1	1,9	2090

Tabela 4.2 – Velocidade de fricção  $u_*$  em ( $m/s$ ) para diferentes passos de tempo nos experimentos de Copenhagen. Todos os passos correspondem a 10 *min*.

Passo de tempo	1	2	3	4	5	7	8	9
1	0,36	0,68	0,46	0,56	0,58	0,48	0,65	0,72
2	0,37	0,67	0,45	0,51	0,52	0,48	0,79	0,73
3	0,40	0,81	0,47	0,37	0,51	0,57	0,67	0,60
4	0,43	0,68	0,39	0,44	0,58	0,62	0,67	0,59
5	0,35	0,75	0,39	0,48	0,59	0,53	0,68	0,65
6	0,34	0,74	0,40	0,48	0,52	0,65	0,65	0,71
7	0,42	0,76	0,40	0,39	0,52	0,63	0,68	0,73
8	0,43	0,82	0,41	0,40	0,45	0,65	0,67	0,73
9	0,40	0,76	0,31	0,39	0,44	0,66	0,73	0,73
10	0,37	0,73	0,34	0,39	0,44	0,62	0,73	0,66
11	0,35	0,69	0,39	0,39	0,44	0,52	0,75	0,67
12	0,36	0,66	0,40	0,39	0,43	0,62	0,69	0,74

Tabela 4.3 – Comprimento de Monin-Obukhov  $L$  em ( $m$ ) para diferentes passos de tempo nos experimentos de Copenhagen. Todos os passos correspondem a 10 *min*.

Passo de tempo	1	2	3	4	5	7	8	9
1	-26	-178	-152	-75	-492	-71	-71	-793
2	-23	-227	-194	-42	-215	-80	-85	-471
3	-83	-311	-106	-23	-368	-64	-47	-202
4	-42	-160	-101	-32	-735	-111	-49	-366
5	-36	-203	-129	-71	-366	-177	-45	-633
6	-42	-286	-70	-80	-273	-67	-63	-13588
7	-47	-155	-83	-83	-273	-87	-41	-593
8	-38	-228	-60	-101	-262	-71	-47	-471
9	-83	-184	-106	-129	-395	-56	-70	-389
10	-21	-389	-42	-129	-395	-111	-64	-375
11	-32	-133	-101	-129	-395	-215	-52	-262
12	-29	-375	-70	-129	-759	-123	-39	-252

#### 4.1.2 *Parametrização Turbulenta*

Em problemas de difusão, a escolha de uma parametrização turbulenta representa uma decisão fundamental para modelar a dispersão de poluentes. A partir de um ponto de vista físico, uma parametrização da turbulência é uma aproximação da natureza no sentido que os modelos matemáticos recebem uma relação aproximada, a qual substitui um termo desconhecido. A confiabilidade de cada modelo depende fortemente da maneira como os parâmetros são calculados e relacionados ao entendimento da CLP [Mangia et al., 2002].

Pelos bons resultados encontrados na literatura, pelas características do experimento [Gryning e Lyck, 1984] (principalmente por ser convectivo) e para manter os mesmos parâmetros utilizados no trabalho de [Pereira, 2007] utilizamos os seguintes coeficientes de difusão convectivos:

- Coeficiente de difusão vertical [Pleim e Chang, 1992]:

$$K_z = \kappa w_* z \left( 1 - \frac{z}{z_i} \right) \quad (4.1)$$

onde  $\kappa$  é a constante de Von-Kármán,  $w_*$  é a velocidade convectiva,  $z$  é a distância na vertical

e  $z_i$  é a altura da camada limite.

- Coeficiente de difusão longitudinal e lateral [Seinfeld e Pandis, 1997]:

$$K_\alpha = 0.1w_*z_i \quad (4.2)$$

onde  $\alpha$  representa a direção  $x$  ou  $y$ .

### 4.1.3 Perfil de Vento

As equações usadas, pelo modelo, para calcular o vento médio, são as de similaridade [Panofsky e Dutton, 1984]:

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \left[ \ln \frac{z-d}{z_0} - \psi_m \left( \frac{z-d}{L} \right) \right] \quad \text{se } z \leq z_b \quad (4.3)$$

$$\bar{u} = \bar{u}(z_b) \quad \text{se } z > z_b \quad (4.4)$$

em que  $z_b = \min[|L|, 0, 1z_i]$ ,  $k$  é a constante de von-Kármán ( $k \cong 0,4$ ),  $z_0$  é a rugosidade do terreno. O deslocamento do plano zero ( $d$ ) ( $m$ ) é uma altura acima da superfície, em que a velocidade do vento é nula; e é consequência do escoamento sobre obstáculos, tais como árvores ou construções, sendo desconsiderado, neste trabalho, ( $d = 0$ ). A função estabilidade  $\psi_m$  é expressa em termos das relações de Businger:

$$\psi_m \left( \frac{z}{L} \right) = -4,7 \frac{z}{L} \quad \text{para } 1/L \geq 0,$$

$$\psi_m \left( \frac{z}{L} \right) = \ln \left( \frac{1+\gamma^2}{2} \right) + \ln \left( \frac{1+\gamma}{2} \right)^2 - 2\arctan\gamma + \frac{\pi}{2} \quad \text{para } 1/L < 0,$$

com  $\gamma = \left(1 - 15 \frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{4}}$ .

### 4.1.4 Dados Estatísticos

Através de índices estatísticos, que mostram a capacidade do modelo de representar dados experimentais, será avaliado o desempenho obtido no presente trabalho. Para tanto, neste trabalho, foi utilizado um programa desenvolvido por [Hanna, 1989]. Na nomenclatura usada, os subíndices  $o$  e  $p$  representam, respectivamente, as concentrações observadas e as

preditas;  $C$  é a concentração do poluente e  $\sigma$  é o desvio padrão.

- Erro quadrático médio normalizado:  $NMSE = \frac{\overline{(C_o - C_p)^2}}{\overline{C_o C_p}}$

Informa sobre todos os desvios entre as concentrações dos modelos e as concentrações observadas. É uma estatística adimensional e seu valor ótimo é zero.

- Coeficiente de correlação:  $COR = \frac{\overline{(C_o - \overline{C_o})(C_p - \overline{C_p})}}{\sigma_o \sigma_p}$

Descreve o grau de associação ou concordância entre as variáveis. O Valor 1 indica bom desempenho.

- Fator de dois:  $FA2$

Fração de dados (%) que estão entre  $0.5 \leq (\frac{C_p}{C_o}) \leq 2$ . O valor ideal é 1.

- Fração de inclinação:  $FB = \frac{\overline{C_o - C_p}}{0.5(\overline{C_o} + \overline{C_p})}$

Informa a tendência do modelo de superestimar ou subestimar as concentrações observadas. Fornece uma medida de quanto, na média, o modelo consegue aproximar-se da melhor estimativa das concentrações observadas. O valor ótimo é zero.

- Desvio fracional padrão:  $FS = \frac{\sigma_o - \sigma_p}{0.5(\sigma_o + \sigma_p)}$

O valor padrão é zero

## 4.2 Resultados

### 4.2.1 Caso bidimensional

Os primeiros resultados apresentados serão os obtidos para o caso bidimensional. Este problema é resolvido de forma análoga ao problema tridimensional apresentado no capítulo 3. A justificativa, para apresentarmos estes resultados, se dá pelo fato de que possuímos disponíveis dados de concentração integrada em  $y$  (ou seja, bidimensionais), variando de 20 em 20 minutos, para o experimento de Copenhagen. Os resultados alcançados serão confrontados com os encontrados na literatura [Pereira, 2007]. No entanto, no caso tridimensional, somente temos disponíveis dados médios da concentração de poluentes na



segunda hora do experimento.

O gráfico 4.2 mostra uma comparação entre as concentrações encontradas no trabalho de [Pereira, 2007] e as concentrações apresentadas por nossa nova solução. Nele podemos notar, com as concentrações próximas a linha central do gráfico, que os resultados seguem a mesma sistemática. Porém, com a Tabela 4.6 e com os índices estatísticos apresentados a seguir, é possível verificar uma evolução em relação aos resultados anteriores.

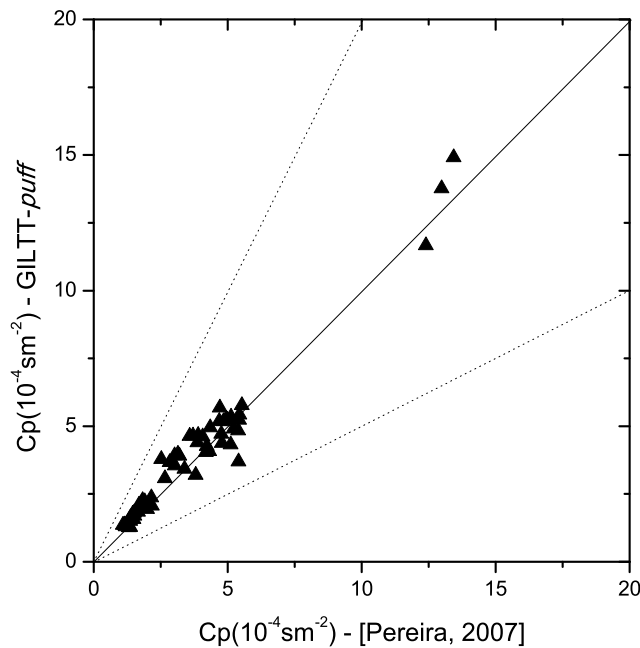


Figura 4.2 – Gráfico de espalhamento para comparação das concentrações preditas ( $C_p$ ) pelo modelo GILTT-*puff* e pelo modelo de [Pereira, 2007] para  $\Delta t_1 = 600s$  e  $\Delta t_1 = 60s$ .

Na Tabela (4.4), encontramos os resultados estatísticos do modelo GILTT-*Puff* bidimensional transiente obtidos, neste trabalho, com intervalo de liberação de cada *Puff* dado por  $\Delta t_1(s)$  e o intervalo de tempo para o cálculo da concentração de cada *Puff* dado por  $\Delta t_2(s)$ . De acordo com esta Tabela, é possível observar uma diminuição do *erro quadrático médio normalizado* (NMSE) com a diminuição do intervalo de tempo  $\Delta t_2(s)$ , ou seja, quando o intervalo de cálculo de cada *puff* foi reduzido, por exemplo, de  $\Delta t_2(s) = 600s$  (10 minutos) para  $\Delta t_2(s) = 300s$  (5 minutos) o NMSE teve uma queda de 0,53 para 0,41 no intervalo

de liberação de cada *puff* igual a  $\Delta t_1(s) = 600$ , o que segue o mesmo comportamento dos resultados obtidos em [Pereira, 2007]. Já a dependência temporal do problema pode ser vista com maior facilidade na Tabela 4.6.

Em seguida, analisando as Tabelas (4.4) e (4.5), podemos inferir que, com a proposta dessa nova solução para o modelo a *Puff*, os objetivos do presente trabalho foram alcançados; pois, através dos índices estatísticos, pode-se avaliar uma melhora nos resultados do modelo GILTT-*Puff* em relação aos apresentados em [Pereira, 2007] como era esperado, isso deve-se ao fato de que lá a turbulência é considerada homogênea para a difusão longitudinal. Já no modelo proposto nesta dissertação, considera-se uma difusão mais realista nesta direção, tornando o modelo capaz de descrever com mais detalhes o fenômeno ocorrido. Sendo assim é possível notar com a comparação dos dois modelos que:

- NMSE - obteve-se uma redução de aproximadamente 15% no erro quadrático médio normalizado;
- COR - o coeficiente de correlação teve leve aumento, chegando mais perto do valor ótimo (1);
- FA2 - o fator de dois continuou muito próximo do valor ótimo (1), confirmando que os resultados foram satisfatórios;
- FB - os resultados dos índices da fração de inclinação foram melhorados aproximando-se mais do valor ótimo (zero);
- FS - no desvio fracional padrão não houve muita diferença nos resultados, mesmo assim encontra-se próximo ao valor ótimo (zero).

Tabela 4.4 – Avaliação estatística do modelo GILTT-Puff utilizando o experimento de Copenhagen.

$\Delta t_1(s)$	$\Delta t_2(s)$	NMSE	COR	FA2	FB	FS
600	600	0,53	0,53	0,63	-0,08	-0,31
600	300	0,41	0,56	0,68	0,04	-0,11
600	60	0,41	0,58	0,72	0,19	0,11
300	300	0,41	0,56	0,68	0,01	-0,13
300	60	0,41	0,58	0,72	0,18	0,10
120	120	0,40	0,57	0,70	0,13	0,03
120	60	0,41	0,58	0,73	0,18	0,09

Tabela 4.5 – Avaliação estatística do modelo de [Pereira, 2007] utilizando o experimento de Copenhagen.

$\Delta t_1(s)$	$\Delta t_2(s)$	NMSE	COR	FA2	FB	FS
600	600	0,65	0,49	0,60	0,11	-0,26
600	300	0,50	0,53	0,68	0,11	-0,14
600	60	0,46	0,57	0,72	0,25	0,13
300	300	0,47	0,54	0,70	0,08	-0,13
300	60	0,46	0,57	0,68	0,25	0,13
120	120	0,44	0,57	0,72	0,19	0,06
120	60	0,46	0,57	0,68	0,25	0,13

Na Figura (4.3), são apresentados os gráficos de espalhamento da concentração observada experimentalmente ao nível do solo e as obtidas pelo presente trabalho e por [Pereira, 2007] para os intervalos  $\Delta t_1 = 600s$  e  $\Delta t_2 = 60s$ . Na análise de gráficos de espalhamento, quanto mais próximos estiverem os resultados da reta central, melhores os resultados. As retas laterais pontilhadas indicam o fator de dois (FA2), ou seja, se todos os dados obtidos estão entre estas retas tem-se um FA2 igual a 1 (valor máximo). Os resultados apresentados, abaixo ou acima da reta central, nos mostram se o modelo está subestimando ou superestimando em relação as concentrações observadas experimentalmente. Nesta figura, ainda, é possível verificar o comportamento das concentrações preditas em relação as concentrações observadas. Na Figura 4.2 foi visto que os modelos conferem, porém, ao analisar a figura 4.3, notamos a dispersão de pontos ao redor da linha mediana, dado pelo fato que os modelos são determinísticos e apresentam apenas valores médios, enquanto as concentrações observadas são valores estocásticos, tanto nas medições, quanto no processo.

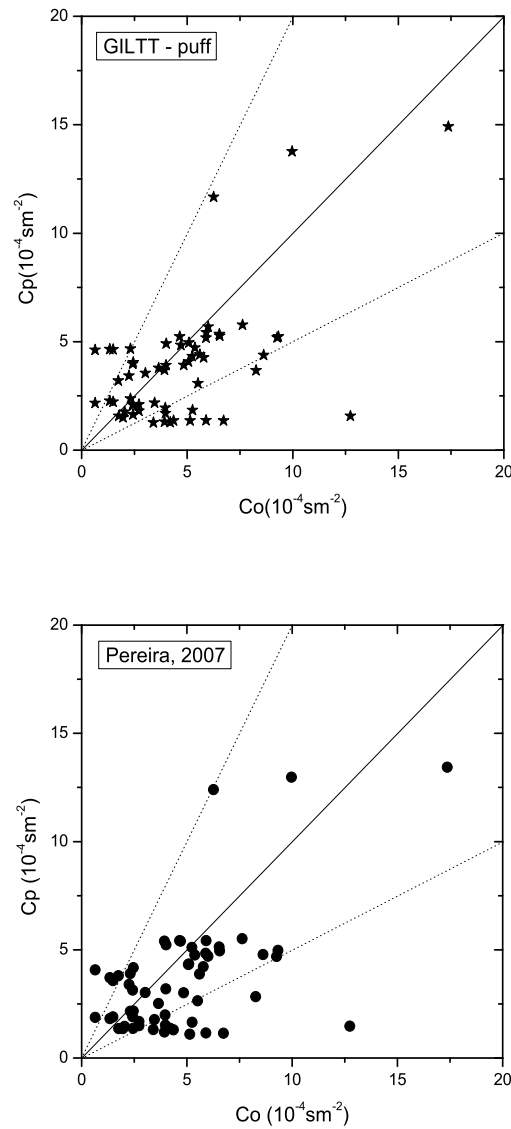


Figura 4.3 – Gráficos de espalhamento dos dados observados experimentalmente de concentração ( $C_o$ ) em comparação com os resultados de concentração do modelo ( $C_p$ ), para o modelo GILTT-*puff* e para o modelo de [Pereira, 2007].

Podemos observar, na Figura (4.4), que os resultados obtidos, neste trabalho, se aproximam mais dos resultados experimentais do que os encontrados em [Pereira, 2007], confirmando os resultados encontrados anteriormente na avaliação estatística. O mesmo resultado também pode ser observado na Tabela (4.6).

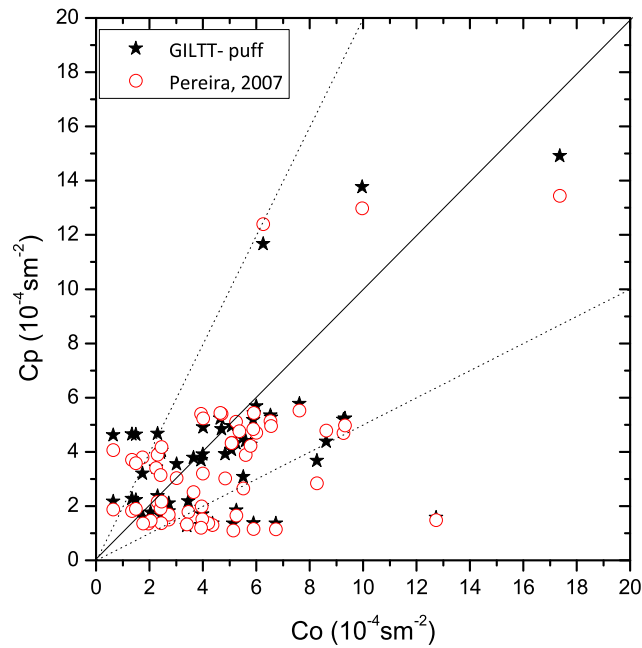


Figura 4.4 – Gráficos de espalhamento dos dados observados experimentalmente de concentração ( $C_o$ ) em comparação com os resultados de concentração do modelo ( $C_p$ ), para o modelo *GILTT-puff* e para o modelo de [Pereira, 2007].

Em Copenhague, foram feitos nove experimentos com diferentes distâncias, como mostra a Tabela (4.6). Lembrando que, como na literatura não constam os dados medidos de 10 em 10 minutos do experimento seis, este não foi considerado. Na Tabela (4.6), as concentrações observadas ( $C_o$ ) e as previstas ( $C_{p1}$  e  $C_{p2}$ ) de [Pereira, 2007] e as do modelo *GILTT-puff* são apresentadas, respectivamente, em três períodos, os quais são as médias de cada 20 min da segunda hora.

Tabela 4.6 – Concentrações observadas ( $Co$ ) e previstas ( $Cp1$  - [Pereira, 2007] e  $Cp2$  - GILTT-*puff*), com  $\Delta t_1(s) = 600$  e  $\Delta t_2(s) = 60$ .

Exp	Dist. (m)	Período I			Período II			Período III		
		Co	Cp1	Cp2	Co	Cp1	Cp2	Co	Cp1	Cp2
1	1900	5,60	3,88	4,40	8,27	2,84	3,67	5,51	2,65	3,07
	3700	1,74	3,80	3,20	2,25	3,40	3,42	3,02	3,03	3,54
2	2100	4,36	1,30	1,35	5,14	1,10	1,35	6,73	1,15	1,35
	4200	2,72	1,50	1,81	1,96	1,36	1,50	4,20	1,37	1,27
3	1900	6,00	4,71	5,68	9,26	4,69	5,18	9,32	4,97	5,23
	3700	4,70	5,40	4,84	6,53	5,13	5,34	7,62	5,52	5,77
	5400	3,93	5,40	3,69	5,24	5,11	4,32	4,01	5,23	4,90
4	4000	6,26	12,40	11,66	9,97	12,98	13,76	17,37	13,44	14,91
5	2100	5,78	4,22	4,27	8,62	4,78	4,38	5,89	4,84	5,17
	4200	5,09	4,34	4,95	6,55	4,95	5,27	5,91	5,43	5,41
	6100	5,07	4,32	4,07	5,37	4,76	4,71	4,65	5,43	5,23
7	2000	2,72	1,69	2,09	12,74	1,48	1,57	5,25	1,65	1,84
	4100	2,31	2,16	2,36	1,34	1,82	2,26	2,42	1,91	2,11
	5300	2,45	2,17	2,06	0,64	1,88	2,16	1,49	1,90	2,22
8	1900	4,00	3,20	3,90	4,84	3,02	3,91	3,65	2,52	3,79
	3600	2,31	3,90	4,66	1,34	3,71	4,64	2,42	3,14	3,97
	5300	2,45	4,18	4,03	0,64	4,07	4,61	1,49	3,58	4,63
9	2100	3,98	1,52	1,69	3,93	1,20	1,30	5,90	1,16	1,37
	4200	3,46	1,78	2,17	2,44	1,37	1,63	3,40	1,32	1,27
	6000	3,96	1,99	1,93	2,04	1,46	1,76	1,76	1,36	1,56

#### 4.2.2 Caso tridimensional

Na Tabela (4.7), são apresentados os dados estatísticos para um intervalo de liberação de cada *puff* ( $\Delta t_1 = 600s$ ) e para três intervalos de cálculo da concentração:  $\Delta t_2 = 600s$ ,  $\Delta t_2 = 300s$  e  $\Delta t_2 = 60s$ .

Tabela 4.7 – Índices estatísticos - problema tridimensional

$\Delta t_1(s)$	$\Delta t_2(s)$	NMSE	COR	FA2	FB	FS
600	600	0,67	0,71	0,73	-0,26	-0,55
600	300	0,39	0,74	0,73	-0,05	-0,30
600	60	0,36	0,75	0,67	0,21	-0,03

Podemos concluir que os resultados alcançados são satisfatórios, pois analisando a Tabela (4.7) é possível perceber que obtivemos as correlações e os fatores de dois próximos ao valor ótimo (um) e erros quadráticos médios baixos. Também, temos nos índices FB e FS bons resultados. Cabe lembrar que os resultados obtidos nos três períodos foram comparados com os dados médios da concentração de poluentes na segunda hora do experimento, pois são os únicos dados disponíveis para o caso tridimensional transiente. Sendo assim, os resultados apresentados, para este caso, são aproximações.

A Figura (4.5) mostra o gráfico de espalhamento das concentrações obtidas para o caso tridimensional para intervalos  $\Delta t_1 = 600s$  e  $\Delta t_2 = 60s$ . Estas concentrações são apresentadas na Tabela (4.8).

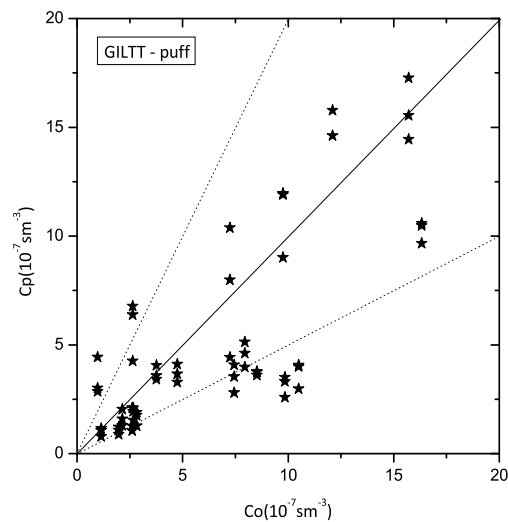


Figura 4.5 – Gráficos de espalhamento dos dados observados experimentalmente da concentração ( $C_o$ ) em comparação com os resultados de concentração do modelo *GILTT-puff* para o caso tridimensional.

Tabela 4.8 – Concentrações observadas ( $C_o$ ) e as Preditas ( $C_p$ ), com  $\Delta t_1(s) = 600$  e  $\Delta t_2(s) = 60$ .

	Dist.	Média	Período I	Período II	Período III
Exp	(m)	$C_o$	$C_p$	$C_p$	$C_p$
1	1900	10,50	2,98	4,06	4,00
	3700	2,1	2,04	1,59	1,29
2	2100	9,85	2,59	3,31	3,50
	4200	2,83	1,28	1,89	1,76
3	1900	16,33	9,66	10,58	10,48
	3700	7,95	4,61	3,98	5,13
	5400	3,76	4,05	3,58	3,42
4	4000	15,71	14,45	15,54	17,27
5	2100	12,11	15,78	14,61	21,79
	4200	7,24	4,42	7,98	10,38
	6100	4,75	3,28	3,66	4,11
7	2000	7,44	3,54	2,80	4,08
	4100	2,62	1,05	1,26	2,11
	5300	1,15	1,06	0,78	1,15
8	1900	9,76	9,01	11,90	11,96
	3600	2,62	4,26	6,38	6,77
	5300	0,98	3,01	2,85	4,43
9	2100	8,52	3,61	3,77	3,74
	4200	2,66	1,53	2,09	1,94
	6000	1,98	1,08	0,88	1,22



## 5 CONCLUSÃO

O objetivo de alcançar um melhor desempenho em relação aos resultados apresentados na literatura, com a proposta da utilização de uma nova solução analítica para o modelo a *Puff*, considerando mais informações no problema de dispersão de poluentes na atmosfera, foi atingido. O método da solução produto, junto com a técnica da GILTT, expressa, de forma mais realista, este fenômeno, considerando a não homogeneidade da turbulência em todas as direções do problema, o que não era considerado no modelo Gaussiano, o qual considera a turbulência homogênea. Dessa forma, com a nova solução proposta, obteve-se uma evolução em relação ao modelo apresentado por [Pereira, 2007], conforme a intenção inicial deste trabalho.

A utilização do modelo a *Puff* justifica-se pelo fato do modelo ser usado para abordagens práticas para descrever, não somente, a dispersão de uma emissão de poluentes por uma fonte dependente do tempo, mas também, uma camada limite planetária (CLP) não homogênea e não estacionária. No entanto, a solução produto é possível pela linearidade do problema. Além disso a concentração tridimensional pode ser expressa como produto de três soluções unidimensionais para o campo longe da fonte (*farfield*), pois nessa região a fonte descrita como a função generalizada delta de Dirac é nula, ou seja, esta solução é válida na região onde as condições meteorológicas dominam a dispersão do poluente.

Contudo, é importante considerar o caráter aproximado do modelo a *Puff*. Com isso, propõe-se novas análises, tais como a utilização de diferentes parametrizações e/ou inclusões de novos parâmetros que considerem os efeitos físico-químicos do problema. Além disso, como trabalho futuro, sugere-se também a generalização da solução 3D-GILTT para problemas tendo o campo de vento e o coeficiente de difusão dependentes do tempo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves, L. S., Cotta, R. M., and Pontes, J., 2002. "Stability analysis of natural convection in porous cavities through integral transforms", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 45, pp. 1185–1195.

Arya, P., 1995. "Modeling and parameterization of near-source diffusion in weak winds", **Journal of Applied Meteorology**, vol. 34, pp. 1112–1122.

Arya, S. P., 1999. "**Air pollution meteorology and dispersion**". Oxford University Press, New York.

Berlyand, M., 1975. "**Contemporary problems of atmospheric diffusion and pollution of the atmosphere**". Translated version by NERC, USEPA, Raleigh, NC, USA.

Blackadar, A. K., 1997. "**Turbulence and diffusion in the atmosphere: lectures in Environmental Sciences**". Springer-Verlag.

Buligon, L., Moreira, D. M., and Vilhena, M. T., 2006. "Uma solução semi-analítica da dispersão de poluentes com a equação do telégrafo e fluxo contra-gradiente", **Revista Brasileira de Meteorologia**, vol. 21, pp. 77–85.

Buske, D., Quadros, R., Vilhena, M., and Moreira, D., 2009a. "Simulação analítica da dispersão analítica de poluentes atmosféricos tridimensional", **Revista Ciência e Natura**, pages 29–32.

Buske, D., Vilhena, M., and Moreira, D., 2009b. "A 3D analytical solution of the advection-diffusion equation applied to pollutant dispersion in atmosphere", **Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**.

Buske, D., Vilhena, M. T., Bodmann, B., and Tirabassi, T., 2012a, "**Analytical Model for Air Pollution in the Atmospheric Boundary Layer**", volume 1, pages 39–58. Air Pollution - Book 1, Organized by: M. Khare.

Buske, D., Vilhena, M. T., Moreira, D. M., and Bodmann, B., 2007a, "**An analytical solution for the steady-state two-dimensional diffusion-advection-deposition model by the GILTT approach**", pages 27–36. Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications, Organized by: C. Constanda; S. Potapenko, Birkhauser, Boston.

Buske, D., Vilhena, M. T., Moreira, D. M., and Tirabassi, T., 2007b. "An analytical solution of the advection-diffusion equation considering non-local turbulence closure", **Environmental Fluid Mechanics**, vol. 7, pp. 43–54.

Buske, D., Vilhena, M. T., Moreira, D. M., and Tirabassi, T., 2007c. "Simulation of pollutant dispersion for low wind conditions in stable and convective planetary boundary layer", **Atmospheric Environment**, vol. 41, pp. 5496–5501.

Buske, D., Vilhena, M. T., Moreira, D. M., and Tirabassi, T., 2010, "**An Analytical Solution for the Transient Two-dimensional Advective-Diffusion Equation with Non-Fickian Closure in Cartesian Geometry by the General Integral Transform Technique**", volume 2, pages 33–40. Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications, Organized by: C. Constanda; M. E. Pèrez, Birkhauser, Boston.

Buske, D., Vilhena, M. T., Segatto, C. F., and Quadros, R. S., 2011a, "**A General Analytical Solution of the Advection-Diffusion Equation for Fickian Closure**", volume 1, pages 25–34. Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications, Organized by: C. Constanda; P. Harris, Birkhauser, Boston.

Buske, D., Vilhena, M. T., Tirabassi, T., and Bodmann, B., 2012b. "Air pollution steady-state advection-diffusion equation: the general three-dimensional solution", **Journal of Environmental Protection**, vol. 4, pp. 1–10.

Buske, D., Vilhena, M. T., Tirabassi, T., Quadros, R., and Segatto, C. F., 2011b. "Modelo analítico tridimensional de dispersão de poluentes na camada limite atmosférica", **Revista Ciência e Natura**, vol. 1, pp. 115–118.

Cataldi, M., Margalho, M., Velloso, M., and Pimentel, L., 2000. "Estudo do transporte de poluentes na região da camada de superfície sob diversas condições de estabilidade atmosférica", **Proceedings do XI Congresso Brasileiro de Meteorologia**, vol. 1, pp. 2890–2899.

Cheroto, S., Mikhailov, M. D., Kakaç, S., and Cotta, R. M., 1999. "Periodic laminar forced convection: solution via symbolic computation and integral transforms", **International Journal of Thermal Sciences**, vol. 38, pp. 613–621.

Chrysikopoulos, C., Hildemann, L. M., and Roberts, P. V., 1992. "A three-dimensional atmospheric dispersion-deposition model for emissions from a ground level area source", **Atmospheric Environment**, vol. 26A, pp. 747–757.

Cirillo, M. C. and Poli, A. A., 1992. "An inter comparison of semi empirical diffusion models under low wind speed, stable conditions", **Atmospheric Environment**, vol. 26A, pp. 765–774.

Costa, C., Vilhena, M. T., Moreira, D. M., and Tirabassi, T., 2006. "Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer", **Atmospheric Environment**, vol. 40(29), pp. 5659–5669.

Costa, C. P., Moreira, D. M., and Vilhena, M. T., 2004. "Influência de efeitos não-locais na dispersão de poluentes na camada limite convectiva", **Proceedings do XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia**.

Costa, C. P., Tirabassi, T., and Vilhena, M. T., 2010, "**A Closed-Form Formulation for Pollutant Dispersion in the Atmosphere**", volume 2, pages 141–150. *Integral Methods in Science and Engineering: Computational Methods*, Organized by: C. Constanda; M. E. Pèrez, Birkhauser, Boston.

Costa, C. P., Tirabassi, T., Vilhena, M. T., and Moreira, D. M., 2012. "A general formulation for pollutant dispersion in the atmosphere", **Journal of Engineering Mathematics**, vol. 74, pp. 159–173.

Cotta, R. and Mikhaylov, M., 1997. "**Heat Conduction Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation**". John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chichester, England.

Cotta, R. M., 1993. "**Integral transforms in computational heat and fluid flow**". CRC Press, Boca Raton, Florida.

Cotta, R. M. and Barros, F. P. J., 2007. "Integral transforms for three-dimensional steady turbulent dispersion in rivers and channels", **Applied Mathematical Modelling**, vol. 31, pp. 2719–2732.

Courant, R. and Hilbert, D., 1989. "**Methods of Mathematical Physics**". John Wiley & Sons.

Demuth, C. A., 1978. "Contribution to the analytical steady solution of the diffusion equation for line sources", **Atmospheric Environment**, vol. 12, pp. 1255–1258.

Ferreira Neto, P. V., 2003. "**Desenvolvimento de um modelo de dispersão de poluentes para o estudo de impacto ambiental em fontes isoladas**", Dissertação de mestrado, Programa de pós-graduação em Engenharia Ambiental, ULBRA.

Gryning, S., 1997, Time dependent crosswind concentration for the Copenhagen dataset. Private Communication.

Gryning, S., Holtslag, A., Irwing, J., and Silversten, B., 1987. "Applied dispersion modelling based on meteorological scaling parameters", **Atmospheric Environment**, vol. 21(1), pp. 79–89.

Gryning, S. E. and Lyck, E., 1984. "Atmospheric dispersion from elevated sources in an urban area: Comparison between tracer experiments and model calculations", **Journal of Climate and Applied Meteorology**, vol. 23(4), pp. 651–660.

Hanna, S. R., 1989. "Confidence limit for air quality models as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods", **Atmospheric Environment**, vol. 23, pp. 1385–1395.

Koch, W., 1989. "A solution of the two-dimensional atmospheric diffusion equation with height-dependent diffusion coefficient including ground level absorption", **Atmospheric Environment**, vol. 23, pp. 1729–1732.

Liu, C., Szecsody, J., Zachara, J., and Ball, W., 2000. "Use of the generalized integral transform method for solving equations of solute transport in porous media", **Advances in Water Resources**, vol. 23, pp. 483–492.

Magno, R. N., Macêdo, E. N., and Quaresma, J. N., 2002. "Solutions for the internal boundary layer equations in simultaneously developing flow of power-law fluids within parallel plates channels", **Chemical Engineering Journal**, vol. 87, pp. 339–350.

Mangia, C., Moreira, D. M., Schipa, I., Degrazia, G. A., Tirabassi, T., and Rizza, U., 2002. "Evaluation of a new eddy diffusivity parametrisation from turbulent eulerian spectra in different stability conditions", **Atmospheric Environment**, vol. 36, pp. 67–76.

Mikhailov, M. and Özisik, 1984. "**Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion**". John Wiley & Sons, New York.

Moreira, D. M., Carvalho, J. C., and Tirabassi, T., 2005a. "Plume dispersion simulation in low wind conditions in stable and convective boundary layers", **Atmospheric Environment**, vol. 39(20), pp. 3643–3650.

Moreira, D. M., Ferreira Neto, P. V., and Carvalho, J. C., 2005b. "Analytical solution of the Eulerian dispersion equation for nonstationary conditions: development and evaluation", **Environmental Modelling and Software**, vol. 20, pp. 1159–1165.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., and Buske, D., 2009a, "**On the GILTT Formulation for Pollutant Dispersion Simulation in the Atmospheric Boundary Layer**", volume 1, pages 179–202. *Air Pollution and Turbulence: Modeling and Applications*, Organized by: D. Moreira; M. Vilhena, CRC Press, Boca Raton - Flórida.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Buske, D., and Tirabassi, T., 2006a. "The GILTT solution of the advection-diffusion equation for an inhomogeneous and nonstationary PBL", **Atmospheric Environment**, vol. 40, pp. 3186–3194.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Buske, D., and Tirabassi, T., 2009b. "The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere", **Atmospheric Research**, vol. 92, pp. 1–17.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Carvalho, C., and Degrazia, G. A., 2004. "Analytical solution of the advection-diffusion equation with nonlocal closure of the turbulent diffusion", **Environmental Modelling and Software**, vol. 20(10), pp. 1347–1351.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Tirabassi, T., Buske, D., and Costa, C. P., 2010. "Comparison between analytical models to simulate pollutant dispersion in the atmosphere", **International Journal of Environment and Waste Management**, vol. 6, pp. 327–344.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Tirabassi, T., Buske, D., and Cotta, R. M., 2005c. "Near source atmospheric pollutant dispersion using the new GILTT method", **Atmospheric Environment**, vol. 39, pp. 6289–6294.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Tirabassi, T., and Carvalho, C., 2005d. "A semi-analytical model for the Tritium dispersion simulation in the PBL from the ANGRA I nuclear power plant", **Ecological Modelling**, vol. 189(3-4), pp. 413–424.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Tirabassi, T., Costa, C., and Bodmann, B., 2006b. "Simulation of pollutant dispersion in atmosphere by the Laplace transform: the ADMM approach", **Water, Air and Soil Pollution**, vol. 177, pp. 411–439.

Moreira D.M., Tirabassi T., M. M., 2008. "Meteorologia e poluição atmosférica", **Ambiente e Sociedade**, vol. 11(1).

Moura, A., 1999. "**Modelos Multidimensionais Analíticos de Dispersão de Contaminantes na Atmosfera: Coeficientes de Difusão Dependentes da Distância da Fonte**", Tese de doutorado, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

Moura, A., Vilhena, M., and Degrazia, G., 1995. "Solução analítica para a dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável", **Proceedings do Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**.

Nieuwstadt, F. T. M., 1980. "An analytical solution of the time-dependent, one-dimensional diffusion equation in the atmospheric boundary layer", **Atmospheric Environment**, vol. 14, pp. 1361–1364.

Nieuwstadt, F. T. M. and Haan, B. J., 1981. "An analytical solution of the one-dimensional diffusion equation in a non-stationary boundary layer with an application to inversion rise fumigation", **Atmospheric Environment**, vol. 15, pp. 845–851.

Özisik, M., 1974. "**Heat Conduction**". John Wiley & Sons, New York, 2 edition.

Panofsky, H. A. and Dutton, J. A., 1984. "**Atmospheric Turbulence**". John Wiley & Sons, New York.

Pereira, L., Costa, C., Vilhena, T., and Tirabassi, T., 2011. "Puff Models for Simulation of Fugitive Hazardous Emissions in Atmosphere", **Journal of Environment Protection**, vol. 1, pp. 154–161.

Pereira, L. L., 2007. "**Simulação da dispersão de poluentes na atmosfera, resolvendo um problema advectivo - difusivo dependente do tempo com fonte arbitrária**", Tese de doutorado, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

Pereira, L. M., Guerrero, J. S., Brazão, N., and Cotta, R. M., 2002. "Compressible flow and heat transfer in ultracentrifuges hybrid analysis via integral transforms", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 45, pp. 99–112.

Pleim, J. E. and Chang, J. S., 1992. "A non-local closure model for vertical mixing in the convective boundary layer", **Atmospheric Environment**, vol. 26A, pp. 965–981.

Pérez Guerrero, J., Pimentel, L., Oliveira-Júnior, J., Heilbron Filho, P., and Ulke, A., 2012. "A unified analytical solution of the steady-state atmospheric diffusion equation", **Atmospheric Environment**.

Ribeiro, M., Cataldi, M., Guerrero, J., and Pimentel, L., 2000. "Estudo da dispersão de poluentes na atmosfera via transformação integral", **Proceedings do XI Congresso Brasileiro de Meteorologia**, vol. 1, pp. 2969–2975.



Ribeiro, M., Ferreira, M., Guerrero, J., and Pimentel, L., 2002. "Efeito do mecanismo de reação química sobre o transporte de contaminantes na região da camada limite atmosférica", **Proceedings do XII Congresso Brasileiro de Meteorologia**.

Roberts, O. F. T., 1923. "The teorical scattering of smoke in a turbulent atmosphere", **Proceedings of the Royal Society of London**, vol. 104, pp. 640–648.

Rounds, W., 1955. "Solutions of the two-dimensional diffusion equation", **American Geophysical Union**, vol. 36, pp. 395–405.

Schuch, D., Weymar, G. J., Furtado, I., Quadros, R. S., and Buske, D., 2011. "Simulação da dispersão de poluentes na camada limite atmosférica incluindo o efeito da deposição seca no solo", **Revista Ciência e Natura**, vol. 1, pp. 127–130.

Scire, J., D.G., S., and Yamartino, R., 2000. "A user's guide for the CALPUFF dispersion Model (Version 5)", **Earth Tech. Inc. 196**.

Scriven, R. A. and Fisher, B. A., 1975. "The long range transport of airborne material and its removal by deposition and washout - II - The efect of turbulent diffusion", **Atmospheric Environment**, vol. 9, pp. 59–69.

Seinfeld, J. H. and Pandis, S. N., 1997. "**Atmospheric chemistry and physics of air pollution**". John Wiley & Sons, New York.

Sertori, M., 2001. "**Un modello matematico a Puff non-gaussiani per lo studio della dispersione in atmosfera**", Tesi di laurea, Universita' Degli Studi di Urbino, Urbino.

Sharan, M., Singh, M. P., and Yadav, A. K., 1996a. "A mathematical model for the dispersion in low winds with eddy diffusivities as linear functions of downwind distance", **Atmospheric Environment**, vol. 30, pp. 1137–1145.

Sharan, M., Singh, M. P., Yadav, A. K., Agarwal, P., and Nigam, S., 1996b. "A mathematical model for dispersion of air pollutants in low winds conditions", **Atmospheric Environment**, vol. 30, pp. 1209–1220.

Sharan, M. and Yadav, A. K., 1998. "Simulation of experiments under light wind, stable conditions by a variable K-theory model", **Atmospheric Environment**, vol. 32, pp. 3481–3492.

Smith, F. B., 1957a, Convection-diffusion processes below a stable layer. Technical Report 1048, Meteorological Research Committee, London.

Smith, F. B., 1957b. "The diffusion of smoke from a continuous elevated point source into a turbulent atmosphere", **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 2, pp. 49–76.

Spiegel, M. R., 1965. "**Theory and Problems of Laplace Transforms**".

Storch, R. and Pimentel, L., 2003. "Desenvolvimento de um modelo euleriano de dispersão de poluentes atmosféricos via GITT e modelos algébricos para os fluxos turbulentos", **Revista Ciência e Natura**, pages 103–106.

Storch, R. and Pimentel, L., 2005. "Atmospheric dispersion simulation via generalized integral transform technique and sign-count method", **Revista Ciência e Natura**, pages 277–280.

Stull, R. B., 1988. "**An Introduction to Boundary Layer Meteorology**". Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda.

Tirabassi, T., 2005, "**Dispersão euleriana na camada limite planetária**". Tópicos em turbulência e modelagem da dispersão de poluentes na camada limite planetária, Organizadores: D.M. Moreira, J.C. Carvalho e M.T. Vilhena, Editora da UFRGS, Porto Alegre.

Tirabassi, T., Buske, D., Moreira, D. M., and Vilhena, M. T., 2008. "A two-dimensional solution of the advection-diffusion equation with dry deposition to the ground", **Journal of Applied Meteorology and Climatology**, vol. 47, pp. 2096–2104.

Tirabassi, T., Moreira, D., Vilhena, T., and Costa, C., 2010. "Comparison between Non-Gaussian Puff Model and a Model Based on a Time-Dependent Solution of Advection-Diffusion Equation", **Journal of Environment Protection**, vol. 1, pp. 172–178.

Tirabassi, T. and Rizza, U., 1992. "An analytical model for a screen evaluation of the environmental impact from a single point source", **II Nuovo Cimento**, vol. 15c, pp. 181–190.

Tirabassi, T. and Rizza, U., 1993. "An air pollution model for complex terrain", **Proceeding of Air Pollution conference, Monterrey, México**, pages 149–156.

Tirabassi, T. and Rizza, U., 1995. "A practical model for the dispersion of skewed puffs", **Journal of Applied Meteorology**, vol. 34, pp. 989–993.

Tirabassi, T. and Rizza, U., 1997. "Boundary layer parameterization for a non-Gaussian puff model", **Journal of Applied Meteorology**, vol. 36, pp. 1031–1037.

Tirabassi, T., Tagliazuca, M., and Paggi, P., 1989. "A climatological model of dispersion in an inhomogeneous boundary layer", **Atmospheric Environment**, vol. 23, pp. 857–862.

Tirabassi, T., Tagliazuca, M., and Zannetti, P., 1986. "A non-Gaussian plume dispersion model: description and evaluation against tracer measurements", **JAPCA**, vol. 36, pp. 592–596.

Tirabassi, T., Tiesi, A., Buske, D., Vilhena, M. T., and Moreira, D. M., 2009. "Some characteristics of a plume from a point source based on analytical solution of the two-dimensional advection-diffusion equation", **Atmospheric Environment**, vol. 43, pp. 2221–2227.

Van Ulden, A. P., 1978. "Simple estimates for vertical diffusion from sources near ground", **Atmospheric Environment**, vol. 12, pp. 2125–2129.

Van Ulden, A. P., 1992. "A surface layer similarity model for the dispersion of a skewed passive puff near the ground", **Atmospheric Environment**, vol. 26A, pp. 681–692.

Velloso, M., Barbarioli, A., Guerrero, J., and Pimentel, L., 2003. "Desenvolvimento de um modelo computacional para estudo do efeito do mecanismo de deposição sobre a dispersão de poluentes atmosféricos", **Revista Ciência e Natura**, pages 25–28.

Velloso, M. F., Storch, R. B., Perez Guerrero, J. S., and Pimentel, L. C., 2004. "Estudo do transporte de poluentes na camada limite atmosférica a partir de dois modelos algébricos para o coeficiente de difusão turbulenta e transformação integral", **Proceedings do XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia**.

Vilhena, M., Rizza, U., Degrazia, G., Mangia, C., Moreira, D., and Tirabassi, T., 1998. "An analytical air pollution model: Development and evaluation", **Contributions to Atmospheric Physics**, vol. 71, pp. 315–320.

Vilhena, M. T., Buske, D., Degrazia, G. A., and Quadros, R. S., 2012. "An analytical model with temporal variable eddy diffusivity applied to contaminant dispersion in the atmospheric boundary layer", **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, vol. 391, pp. 2576–2584.

Vilhena, M. T., Costa, C. P., Moreira, D. M., and Tirabassi, T., 2008. "A semi-analytical solution for the three-dimensional advection-diffusion equation considering non-local turbulence closure", **Atmospheric Research**, vol. 1, pp. 63–69.

Wortmann, S., Vilhena, M. T., Moreira, D., and Buske, D., 2005. "A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the PBL", **Atmospheric Environment**, vol. 39, pp. 2171–2178.

Yeh, G. and Huang, C., 1975. "Three-dimensional air pollutant modelling in the lower atmosphere", **Boundary-Layer Meteorology**, vol. 9, pp. 381–390.