

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Um Estudo da Otimização da Geometria de um Pára-Quedas Simplificado

por

Vanessa Soares Sandrini

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli
Orientador

Prof. Dr. Argimiro Resende Secchi
Co-Orientador

Porto Alegre, Novembro de 2005.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Sandrini, Vanessa Soares

Um Estudo da Otimização da Geometria de um Pára-Quedas Simplificado / Vanessa Soares Sandrini.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2005.

80 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2005.

Orientador: De Bortoli, Álvaro Luiz; Co-Orientador: Secchi, Argimiro Resende

Dissertação: Matemática Aplicada

Pára-Quedas, Dinâmica de Fluidos Computacional, Otimização de Perfis, Programação não-linear

Um Estudo da Otimização da Geometria de um Pára-Quedas Simplificado

por

Vanessa Soares Sandrini

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli

Co-Orientador: Prof. Dr. Argimiro Resende Secchi

Banca examinadora:

Prof. Dr. Oleg Khatchatourian

Prof. Dr. Nilo Sérgio Medeiros Cardozo

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zíngano

Dissertação apresentada e aprovada em
Novembro de 2005.

Prof. Maria Cristina Varriale, Dr.^a
Coordenadora

*Aos meus pais,
José Alberto e Nádia,
que sempre me apoiaram em minhas decisões.*

AGRADECIMENTOS

A minha família pelo incentivo, carinho e compreensão.

Aos meus orientadores Álvaro Luiz de Bortoli e Argimiro Resende Secchi pela orientação e amizade.

Às amigas Graciela e Bárbara, obrigada pelo carinho, incentivo e companhia; sem vocês seria difícil chegar até aqui.

Aos amigos do LICC, obrigada pelo carinho e paciência.

Ao Sérgio Wortmann pelo auxílio computacional com o FORTRAN.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada pela oportunidade.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	x
LISTA DE ABREVIATURAS	xi
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação: O pára-quedas	1
1.2 A dinâmica de fluidos computacional aplicada ao pára-quedas	4
1.3 Otimização de geometrias aerodinâmicas	9
1.4 Objetivos do presente trabalho	13
1.5 Delineação da dissertação	14
2 EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO	16
2.1 Sistema de Equações	16
2.2 Condições de Contorno e Iniciais	19
3 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO	22
3.1 Solução das Equações do Escoamento	22
3.1.1 Discretização Espacial	22
3.1.2 Método dos contornos virtuais	29
3.1.3 Integração Temporal	33
3.1.4 SUR aplicado ao Método Gauss-Seidel para a pressão	36
3.1.5 Crítério de Convergência	37
3.2 Otimização da Geometria	38
3.2.1 Problema Empírico	39

3.2.1.1	Formulação do problema	39
3.2.1.2	Método de solução	42
3.2.2	Problema de escoamento	44
4	RESULTADOS	49
4.1	Solução Analítica	49
4.2	Resultados Numéricos	52
4.3	Resultados da Otimização	61
4.3.1	Resultados do Problema Empírico	61
4.3.2	Resultados do Problema de Escoamento	64
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	73
	REFERÊNCIAS	75

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Domínio físico	21
Figura 3.1	Domínio discretizado	23
Figura 3.2	Identificação do ponto da geometria e dos 2 nós vizinhos	32
Figura 3.3	Região de estabilidade do esquema de Runge-Kutta de 3 estágios	35
Figura 3.4	Fluxograma do código computacional implementado	38
Figura 3.5	Perfil do aerofólio	40
Figura 3.6	Perfil da elipse (pára-quadras)	41
Figura 3.7	Poliedros de duas variáveis	46
Figura 3.8	Método de poliedros flexíveis	46
Figura 4.1	Resultados analíticos para um salto com pára-quadras convencional: a)Deslocamento, b)Velocidade e c)Aceleração	51
Figura 4.2	Malha computacional de 113×224 células com ampliação	53
Figura 4.3	Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 10$	54
Figura 4.4	Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 50$	54
Figura 4.5	Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 100$	55
Figura 4.6	Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 500$	55
Figura 4.7	Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 1000$	56
Figura 4.8	Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 2000$	56
Figura 4.9	Valores do coeficiente de arraste para os diversos números de Reynolds	57
Figura 4.10	Valores do erro \times número de iterações para $Re=10$	58
Figura 4.11	Valores do erro \times número de iterações para $Re=50$	58
Figura 4.12	Valores do erro \times número de iterações para $Re=100$	59
Figura 4.13	Valores do erro \times número de iterações para $Re=500$	59
Figura 4.14	Valores do erro \times número de iterações para $Re=1000$	60
Figura 4.15	Valores do erro \times número de iterações para $Re=2000$	60

Figura 4.16	Gráfico das restrições no domínio	61
Figura 4.17	Curvas de nível da função objetivo	62
Figura 4.18	Caminho da solução do problema de otimização pelo algoritmo SQP	63
Figura 4.19	Geometria ótima	63
Figura 4.20	Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 10$. .	65
Figura 4.21	Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 10$	65
Figura 4.22	Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 50$. .	66
Figura 4.23	Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 50$	67
Figura 4.24	Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 100$.	67
Figura 4.25	Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 100$	68
Figura 4.26	Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 500$.	68
Figura 4.27	Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 500$	69
Figura 4.28	Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 1000$.	70
Figura 4.29	Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 1000$	70
Figura 4.30	Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 2000$.	71
Figura 4.31	Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 2000$	71
Figura 4.32	Construção dos poliedros do código de otimização $Re = 2000$. .	72

LISTA DE SÍMBOLOS

a	velocidade do som no ar
c_d	coeficiente de arraste
p	pressão
Re	número de Reynolds
M	número de Mach
t	tempo
U_∞	escala de velocidade da corrente livre
L	escala de comprimento
p_∞	escala de pressão da corrente livre
μ	viscosidade dinâmica do ar
ν	viscosidade cinemática do ar
ρ	massa específica do ar
u	velocidade do fluido no eixo x
u_a	velocidade do fluido no eixo x da iteração anterior
v	velocidade do fluido no eixo y
v_a	velocidade do fluido no eixo y da iteração anterior
g	aceleração da gravidade
Δt	passo de tempo
ε	erro

Sobre-escrito: * valores adimensionais da variável

LISTA DE ABREVIATURAS

<i>2D</i>	Bidimensional
<i>BFGS</i>	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
<i>CC</i>	Condições de contorno
<i>CFD</i>	Dinâmica de fluidos computacional
<i>CI</i>	Condições iniciais
<i>CM</i>	Conservação da massa
<i>CQM_x</i>	Conservação da quantidade de movimento em x
<i>CQM_y</i>	Conservação da quantidade de movimento em y
<i>DFP</i>	Davidon-Fletcher-Powell
<i>EP</i>	Equação de Poisson
<i>KKT</i>	Karush-Kuhn-Tucker
<i>PNL</i>	Programação não-linear
<i>RK</i>	Método de Runge-Kutta
<i>SQP</i>	Programação quadrática sequencial

RESUMO

Neste trabalho desenvolve-se um estudo numérico do fluxo de ar em torno da geometria de um pára-quedas tradicional simplificado, para alguns valores de Reynolds. O método baseia-se na solução das equações incompressíveis de Navier-Stokes discretizadas pelo método de diferenças finitas e integradas pelo método de Runge-Kutta. Utiliza-se o método dos contornos virtuais para representar a geometria numa malha cartesiana e o método de otimização não-linear dos poliedros flexíveis para otimização do coeficiente de arraste calculado através do código de dinâmica de fluidos computacional; este é um método de busca multivariável, onde o pior vértice de um poliedro com $n + 1$ vértices é substituído por um novo.

ABSTRACT

In this work we develop a numerical study of the flow around a simplified geometry for a parachute, for some Reynolds values. The method solves the incompressible Navier-Stokes equations and is based on the finite difference explicit Runge-Kutta time-stepping scheme. The virtual boundary method is used to represent the geometry of the parachute in a Cartesian mesh, and the drag coefficient, obtained by the fluid dynamics code, is optimized based on the nonlinear flexible polyhedron method, which is a method of variable search and where the worst vertex of a polyhedron with $n + 1$ vertex is changed by a new one.

1 INTRODUÇÃO

Para um leigo, um pára-quedas nada mais é do que um aparelho que leva um homem com segurança ao solo mas, para um pesquisador em dinâmica de fluidos, é um complexo desacelerador aerodinâmico, com um grande número de graus de liberdade e características que são estudadas teórica e experimentalmente por diversos grupos de pesquisa.

Apresenta-se, a seguir, um histórico sobre o pára-quedas e alguns aspectos físicos do equipamento, seguido de uma breve revisão bibliográfica referente a dinâmica de fluidos computacional (CFD) aplicada ao pára-quedas; a otimização de geometrias aerodinâmicas; os objetivos desta pesquisa e o delineamento da dissertação.

1.1 Motivação: O pára-quedas

O pára-quedas é um equipamento aeronáutico que, depois de aberto, controla a aceleração e a queda de corpos no ar. Existem duas versões sobre o surgimento do pára-quedas. Numa delas Leonardo da Vinci é apresentado como o primeiro a idealizá-lo; noutra versão, alguns historiadores atribuem a sua invenção ao mecânico francês Louis Sébastien Lenormand [17].

Há registros de que o primeiro salto de pára-quedas tenha sido realizado no ano 1797, em Paris, pelo francês André-Jacques Garnerin, o qual saltou de um balão a uma altura de aproximadamente 700 metros com um equipamento de 10 metros de diâmetro. O capitão Albert Berry, dos Estados Unidos, foi o primeiro a saltar de um aeroplano em 1912 [17].

Durante a I Guerra Mundial não se conhecia a eficácia do pára-quedas, somente ao término da guerra é que o equipamento foi adotado para casos de salvamento. Já na II Grande Guerra, com os aperfeiçoamentos tecnológicos, o pára-

quedas foi amplamente utilizado, não só em casos de emergência, mas também para invasões de territórios inimigos. Hoje em dia, a maioria dos exércitos modernos possuem tropas de pára-quedistas altamente especializadas.

Atualmente, o pára-quedas tem outras aplicações além da militar: no envio de pessoal, equipamentos de socorro, remédios, agasalhos e suprimentos em regiões de difícil acesso. No campo científico, é utilizado no auxílio de pesquisas meteorológicas e aeronáuticas, fornecendo dados preciosos sobre a temperatura, composição da atmosfera, radiação atômica, velocidade dos ventos, etc.

Essencialmente, um pára-quedas é composto de quatro partes: o velame, o arnês, o cordoame e a bandeja. O *velame* tem formas variadas, circular com seções triangulares, retangular ou em cruz, possui um pequeno orifício no centro para permitir a passagem do ar, evitando oscilações fortes e é fabricado em seda ou nylon. As tiras de lona, que ficam presas ao corpo do pára-quedista, compõem o *arnês* (ou *guarnição*). O *cordoame* é feito por fios resistentes de seda ou nylon, que partem do anel metálico que está preso ao arnês e passam pelas costuras do velame. E, finalmente, é na *bandeja* (ou *bolsa*) que todo equipamento é colocado, depois de dobrado cuidadosamente.

Ao puxar o punho de comando, o pára-quedista remove o pino que mantém as abas do pára-quedas dentro da bolsa, com isso um pequeno pára-quedas auxiliar é ejetado por uma mola. Este, por sua vez, ao ser atingido pela corrente de ar, puxa o pára-quedas principal para fora da bolsa. O ar, ao entrar pela saia do equipamento, é aprisionado pela coroa e a pressão criada espalha-se pelos gomos inflando-os.

O pára-quedismo, como esporte, tem cada vez mais adeptos em todo o mundo e somam em torno de doze modalidades, dentre elas citam-se:

- **FQL** - formação em queda livre - é a modalidade mais praticada e mais popular no mundo. Consiste em fazer o maior número de formações escolhidas aleatoriamente entre uma relação de figuras, onde cada formação

vale um ponto. Os times são compostos de 2, 4, 8 ou 16 integrantes mais um câmara.

- **Big-ways** - nesta modalidade o objetivo não é o número de pontos realizados e sim o maior número de pessoas no salto. O recorde mundial é de 246 pessoas.
- **Freefly** - é a mais nova modalidade e a que mais vem sendo praticada atualmente. No freefly o pára-quedista pode voar de diferentes maneiras tais como: cabeça para baixo (head down), sentado (sitfly), de pé (standup), de dorso (backtrak) e de barriga para baixo (bellyfly), dentre outras. As velocidades dos saltos podem variar de 150 a quase 400 km/h.
- **Precisão** - é uma das modalidades mais antigas, praticada com o velame aberto, tendo como objetivo atingir o centro de um alvo determinado com 2,5 centímetros de raio; o alvo oficial tem 25 metros de raio. Com o surgimento do pára-quedas retangular as marcas desta modalidade caíram muito, isto devido a maior manobrabilidade deste novo modelo.
- **Salto duplo ou Tandem** - é a maneira mais fácil de conhecer o pára-quedismo. O salto é extremamente seguro, pois o novato salta na carona de um experiente pára-quedista.

Diversas pesquisas tem sido feitas com o objetivo de descrever numérica e experimentalmente os fenômenos que ocorrem em um salto de pára-quedas. Na próxima seção apresentam-se algumas delas.

1.2 A dinâmica de fluidos computacional aplicada ao pára-quedas

Grande parte das pesquisas de dinâmica de fluidos computacional (CFD) aplicada ao pára-quedas detém-se ao estudo da fase de inflação, porém, técnicas de simulação para sistemas de lançamento aéreo não tem sido muito investigadas. A flexibilidade e a porosidade da estrutura que muda de forma e a interação com o ar que cerca o equipamento durante o processo de inflação são as maiores dificuldades de modelagem. Um lançamento acontece da seguinte forma: a carga é lançada do avião e o pára-quedas reserva se abre; este, por sua vez, puxa o pára-quedas principal, que se desprende. As linhas de suspensão do pára-quedas principal são totalmente estendidas e, posteriormente, o velame reage com o fluxo de ar em torno dele. Durante o processo a força de abertura é gerada pelo pára-quedas ao desacelerar a carga e esta força depende do tempo de lançamento.

Um modelo dinâmico simplificado de inflação de um pára-quedas foi descrito por Wolf [52], o qual prevê o aumento do tempo de inflação e de forças de inflação, observadas em grandes altitudes. A proposta do autor foi apresentar a derivação de equações para simplificar o modelo de inflação e comparar as soluções das equações com avaliações de dados de inflação.

Os parâmetros adimensionais que aparecem nas equações do movimento indicam os tipos de problemas que podem ser estudados com o modelo dinâmico. Os efeitos no processo de inflação como variação das razões de massa, coeficientes de força quase-permanentes, coeficientes de inércia do fluido, dentre outros parâmetros, podem ser investigados teoricamente [52]. Entretanto, devido a falta de dados quantitativos disponíveis para alguns desses coeficientes, somente aproxima-se os seus efeitos e as suas tendências. Neste caso, os parâmetros escolhidos por Wolf [52] foram a razão de massa do pára-quedas, a razão de massa do sistema total e o número de Mach.

Dos dados necessários ao modelo de inflação, o coeficiente de arraste é o mais facilmente encontrado na literatura. Ele se baseia na projeção da área real e é, desta forma, quase constante em relação à velocidade. Após as comparações com dados conhecidos, Wolf [52] concluiu que o modelo dinâmico simplificado prevê bem os efeitos da altitude no tempo e na força de inflação de um pára-quedas. Independente do cálculo e/ou medição dos coeficientes de força que aparecem no modelo, é necessário prever os efeitos da porosidade.

Outro trabalho que analisa a inflação do pára-quedas é o de McVey e Wolf [27] que, através de um método numérico, busca prever o desdobramento e a inflação de um pára-quedas, este método é baseado na integração das equações do momento axial e radial. O objetivo dos autores era apresentar o desenvolvimento de métodos analíticos e compará-los com modelos matemáticos como dados de teste de vôo. No desenvolvimento das equações governantes, a seqüência do desdobramento do pára-quedas foi dividida em duas fases: a primeira era composta do desdobramento inicial do velame e continua até que as linhas de suspensão e o velame estavam totalmente estendidos. A segunda começava com o pára-quedas estendido e incluía o processo de inflação. O modelo da dinâmica de inflação previa razoavelmente bem a variação na forma do velame. Percebeu-se, também, que independente do cálculo e/ou medição dos coeficientes de força e de massa aparente, os quais aparecem nas equações do movimento, é necessário melhorar a precisão do modelo de inflação.

Apesar de um grande número de experimentos evidenciarem e ampliarem o modelo analítico existente para predizer a carga axial líquida produzida pela inflação de um velame, nenhuma técnica adequada foi utilizada para avaliar a distribuição de pressão transiente gerada durante a inflação. O conhecimento desta distribuição não pode ser deduzido diretamente da carga axial total, quantidade esta que é geralmente utilizada para medir os componentes estruturais. O artigo de Klimas [22] descreve uma técnica de cálculo para o diferencial de pressão através de um experimento com um velame simétrico inflando em um escoamento incompressível.

O modelo matemático de Klimas [22] utiliza camadas de vórtices transientes e requer a associação de uma força axial com um outro parâmetro previamente conhecido ou assumido para o caso de interesse; neste caso, a pressão. As pressões transientes foram medidas durante a inflação de um pára-quedas com 25% de porosidade e de uma placa circular sólida; em cada uma das geometrias foram instalados semicondutores que traduzem o diferencial de pressão, sendo estes distribuídos uniformemente na direção circunferencial. O tempo no qual a pressão é registrada corresponde ao tempo que a máxima carga axial é medida. Os dados medidos, quando comparados a testes feitos em túneis de vento, apresentaram boa concordância.

Lee [24] fez uma investigação de dois parâmetros escalares envolvidos na abertura do pára-quedas: o pico da força de abertura (F_p) e o tempo de abertura do tecido sólido (t_o). Mostrou de forma gráfica que F_p é importante porque governa as exigências estruturais do velame e o t_o é um importante parâmetro na dinâmica da abertura e trajetória, pois a força de abertura depende dele. Após os estudos experimentais de aberturas verticais e análise de parâmetros, concluiu que o número de Froude e a razão de massa são importantes para F_p e t_o adimensionais, o que é consistente com o resultado obtido para a abertura de um parapente, que é um pára-quedas com velame retangular, considerado de alta precisão.

Peterson et al. [36] descreve em seu trabalho as pesquisas que vem sendo realizadas com o intuito de ampliar os conhecimentos sobre a fase de inflação de um pára-quedas. Salienta que a interação fluido-estrutura e o fluxo de ar intimidam os desenhistas e projetistas do equipamento, e que a relação entre o movimento do ar e o movimento do velame é mais forte em um pára-quedas do que em qualquer outra estrutura aerodinâmica pois a forma do velame depende da atuação das forças sobre ele.

Como o pára-quedas tem por objetivo proporcionar arraste, alguns pesquisadores citados por Peterson et al. [36] associam este escoamento ao fluxo de ar em torno e através de corpos bojudos, tais como discos, copos e esferas. Um desses

trabalhos [26] apresenta a medição da força de arraste e da pressão na superfície do tecido de um pára-quedas e de copos hemisféricos. Outras pesquisas [1], [21], [39] investigam a estrutura da esteira transiente atrás de uma esfera; Berger et al. [6] analisam o comportamento da esteira provocada pelos movimentos oscilatórios de um disco circular, onde percebe-se oscilações anti-simétricas, o que pode representar o movimento do velame no qual a esteira é instável por causa da ventilação inadequada.

O velame de um pára-quedas é equipado com um orifício no ápice, que auxilia no controle da inflação e estabiliza a região próxima à esteira. Com esse mesmo objetivo, os projetistas têm inserido um grande número de fitas, que são caracterizadas por fendas entre os gomos do velame. Sendo assim, Peterson et al. [36] mostram alguns estudos realizados com corpos bojudos aos quais introduziu-se algum orifício. Num destes trabalhos, de Suryanarayana et al. [49] por exemplo, observou-se que fazendo um orifício, mesmo que extremamente pequeno, na linha central da base de uma esfera, há redução no arraste e supressão das oscilações na esteira. Outros pesquisadores [5] estudaram o escoamento em torno de anéis em túneis de vento e observaram que quando o diâmetro interno é aumentado em cerca de 70% do externo, a estrutura da esteira se constitui de vórtices periódicos assimétricos.

A porosidade tem sido explorada pelos projetistas de pára-quedas com o uso de fitas e orifícios no velame, Peterson et al. [36] indicam algumas pesquisas realizadas com corpos porosos. Higuchi e Takahashi [15], por exemplo, estudam o comportamento da esteira atrás de grades planas e curvas, bidimensionais, com escoamento de fumaça em túneis de vento. Observaram que a região próxima à esteira apresenta zonas de recirculação de diferentes tamanhos, ainda que as grades sejam igualmente espaçadas. Essas irregularidades levam a fortes variações na pressão local.

Algumas pesquisas que descrevem o escoamento em torno de um pára-quedas focam a interação fluido-estrutura que ocorre na superfície do velame. Karlo

e Tezduyar [20] apresentaram uma simulação numérica tridimensional dessa interação num sistema de pára-quedas através do método de elementos finitos e programação paralela. A solução do escoamento, aplicável à problemas envolvendo contornos móveis, é governada pelas equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. A solução da dinâmica estrutural é baseada na descrição Lagrangeana do movimento, com elementos de cabos e membranas. O acoplamento fluido-estrutura é forçado pela transferência das velocidades e deslocamentos da estrutura para o fluido e, em contrapartida, as forças de superfície do fluido para a estrutura, das quais a parte viscosa foi desprezada. Este método foi aplicado na configuração de equilíbrio de um parapente preso em um ponto numa corrente de ar.

Outro trabalho publicado por Tezduyar et al. [50] descreve alguns métodos numéricos desenvolvidos para auxiliar a análise computacional de mecânica de fluidos e interação fluido-estrutura de pára-quedas. Essa classe de problemas mecânicos envolve vários desafios computacionais, incluindo o cálculo de esteiras transientes produzidas pela aeronave que transporta os pára-quedistas e o efeito dessa esteira quando o pára-quedas a encontra, bem como a simulação da aerodinâmica do pára-quedas levando em conta suas mudanças de forma. Os métodos numéricos desenvolvidos pelos autores incluem um método multi-domínio para o cálculo das esteiras e escoamentos em torno de objetos colocados em tais esteiras, bem como uma estratégia computacional de solução simultânea da mecânica de fluidos e estrutural. Além disso, apresentam exemplos demonstrando como esses métodos funcionam e novas capacidades que eles oferecem.

A interação fluido-estrutura também é o foco do trabalho publicado por Stein et al. [47], que apresenta simulações numéricas realizadas para propôr uma comparação com experimentos realizados em túneis de vento com pára-quedas cruciformes que, como o próprio nome diz, são pára-quedas com o velame em formato de cruz. O escoamento é governado pelas equações de Navier-Stokes incompressíveis, pois assume fluxo de ar a baixas velocidades. Para lidar com a variação temporal no domínio espacial encontrados em problemas de pára-quedas, emprega-se a técnica

domínio espacial deformado/estabilidade espaço-temporal (DSD/SST) à formulação de elementos finitos. Este método tem sido aplicado a um grande número de problemas com contornos móveis e se adapta bem as mudanças de forma do velame. Os resultados numéricos apresentaram boa concordância com os dados experimentais, mostrando que o modelo é de confiança ou promissor.

Algumas pesquisas de CFD se detém na geometria dos corpos, ou seja, na aerodinâmica. Apresenta-se, a seguir, algumas técnicas de otimização de geometrias aerodinâmicas desenvolvidas por pesquisadores na área de CFD, que em sua grande maioria, foram aplicadas a asas e/ou aerofólios. Pesquisas mais recentes indicam um grande interesse pela otimização da geometria de um pára-quedas, levando em conta a interação fluido-estrutura e às mudanças de forma durante o salto.

1.3 Otimização de geometrias aerodinâmicas

A otimização de geometrias aerodinâmicas tem atraído a atenção da comunidade científica. Geralmente problemas de otimização de geometrias consistem na mudança de alguns contornos do modelo a fim de melhorar a sua aerodinâmica ou o seu comportamento mecânico. Por exemplo: a asa é um instrumento que produz sustentação pelo controle do escoamento e seu projeto pode ser considerado um problema de controle ótimo das características do fluxo pela variação da forma do contorno [10], [11], [12], [37].

O processo de otimização de geometrias é usualmente executado por um código de solução de escoamento combinado com um método de otimização adequado. Existem vários métodos para resolver problemas de otimização de superfícies aerodinâmicas. Os projetistas utilizam, frequentemente, o método de tentativa e erro, ou seja, supõem uma superfície inicial e resolvem o problema do escoamento e, posteriormente, corrigem a geometria baseando-se nos resultados obtidos e repetem o processo até que a geometria tenha o desempenho esperado [3].

Alternativas pouco menos exaustivas utilizam, geralmente, para a realização desse procedimento, os Algoritmos Genéticos, que tem grande versatilidade, são de fácil implementação e são capazes de encontrar a solução ótima ou quase ótima, apesar de demandar uma grande carga computacional devido ao seu caráter aleatório. Ziaei-Rad e Pischevar [53] utilizam algoritmos genéticos juntamente com o método “Adaptive Simulated Annealing” - que é uma técnica de busca direta com relaxação estocástica e baseia-se no processo de recozimento de sólidos - para a resolução de dois problemas: primeiramente o algoritmo foi aplicado para o projeto inverso de um asa simples, com o objetivo de validar o código desenvolvido; posteriormente, a otimização foi realizada numa asa com máxima razão de sustentação e arraste, buscando os valores ótimos dos parâmetros da geometria a fim de obter o mínimo arraste.

Segundo Mohamadi e Pironneau [30], a otimização da forma de uma asa para a redução do arraste é uma das aplicações industriais mais importantes deste tipo de simulação. Estes autores mostram, em seu livro, problemas de otimização de geometrias para fluidos e alguns aspectos de otimização sobre a interação fluido e estrutura, que têm grande importância prática para aeronaves, carros, turbinas e outras aplicações industriais.

Técnicas de otimização, como as de controle sub-ótimo foram implementadas no passado para identificar as configurações ótimas. Através desses métodos foi possível adquirir conhecimento para dominar o escoamento e conduzir para o controle efetivo do mecanismo em praticamente todas as aplicações [29]. Porém, estes algoritmos necessitam de informação sobre o gradiente local da função objetivo.

Técnicas de busca direta, como as de algoritmos genéticos e poliedros flexíveis, evitam algumas das dificuldades citadas anteriormente, utilizando somente o valor da função objetivo em termos de controle de parâmetros. Portanto, elas podem ser facilmente utilizados em estudos computacionais tão bem quanto experimentalmente. Os algoritmos genéticos têm sido aplicados em um número relevante de problemas para a engenharia aerodinâmica, tais como: no projeto de um

aerofólio, no controle ativo de ruídos, no projeto de um refrigerador de alta densidade, na otimização da forma de uma asa, na otimização das lâminas de um difusor e lâminas de uma turbina a vapor [29].

O projeto aerodinâmico pode ser feito de duas formas diferentes: numa delas, a aproximação clássica é baseada na solução do problema inverso; na outra, mais recente, utiliza-se a otimização numérica. O problema inverso é mais usado para determinar incógnitas que são dadas de forma natural, isto é, derivam diretamente do problema. Por exemplo: um problema típico é encontrar a geometria de um aerofólio, onde são dados a velocidade do voo e a distribuição de pressão na superfície [10].

As vantagens da otimização numérica sobre o problema inverso podem ser resumidas ao fato de que a otimização numérica permite maximização e minimização de quantidades globais tais como sustentação e arraste na presença de restrições, enquanto que os problemas inversos estão limitados a seleção da distribuição de pressão no contorno ou de outra variável, o qual é dado com base na experiência do projetista sendo, portanto, um tanto arbitrário. Segundo Iollo et al. [18] a otimização do problema inverso é considerada “otimização do projeto do escoamento” ao contrário da otimização do problema direto que é conhecida como “otimização do projeto da geometria”.

Iollo et al. [18] tentam contornar essas deficiências da otimização do problema inverso estendendo o método de otimização adjunto ao problema inverso. Um método adjunto, de um problema de máximo ou mínimo, é resolvido usando uma técnica variacional e introduzindo o vetor dos multiplicadores de Lagrange dual do vetor das variáveis do escoamento. Eles aplicam esta técnica em dois modelos: no primeiro estudam um difusor onde toda a distribuição de pressão é otimizada com o objetivo de minimizar o desvio axial na saída. O gradiente de pressão máximo conseguido é restringido evitando a separação prematura do escoamento. No segundo, procuram modelar o escoamento sobre as lâminas de uma turbomáquina as quais exercem forças no fluido. Esta aproximação é obtida utilizando as equações

compressíveis de Euler, que são adotadas no modelo do escoamento. Obtiveram boa convergência e consistência na aplicação da aproximação nos modelos citados. Concluíram que existe uma certa vantagem em utilizar esta aproximação comparada a otimização usual de geometrias, avaliando o número de restrições do escoamento contra o número de restrições da geometria.

O trabalho de He et al. [14] objetiva investigar métodos computacionais de controle e otimizar o arraste em um escoamento viscoso sobre um cilindro circular, usando as equações de Navier-Stokes bidimensionais. Utilizam o método de elementos finitos para a discretização espacial e aplicam para a discretização temporal o esquema de diferenças finitas de segunda ordem de 2 passos implícito/explicito. Os cálculos do gradiente da função objetivo são feitos através de uma equação adjunta aproximada e a minimização da função objetivo é realizada pelo método quasi-Newton BFGS, que é um método analítico, também chamado de método de métrica variável. Através dessa pesquisa obtiveram uma redução do coeficiente de arraste de 31% para número de Reynolds igual a 200 e 61% para Reynolds 1000, resultados estes que mostraram consistência qualitativa com os dados de redução de arraste experimental.

Miele [28] apresenta várias técnicas de otimização do coeficiente de arraste para várias geometrias aerodinâmicas em escoamentos supersônicos, hipersônicos, dentre outros. Trata basicamente de geometrias como asas e aerofólios, que para ter um melhor desempenho aerodinâmico devem proporcionar um arraste mínimo, sendo assim, todas as formulações indicadas pelo autor são de minimização do coeficiente de arraste.

Após esta breve revisão sobre os tipos e usos do pára-quedas, de técnicas numéricas e de otimização aplicadas as geometrias aerodinâmicas, na próxima seção apresentam-se os objetivos da presente pesquisa.

1.4 Objetivos do presente trabalho

Tendo como base as pesquisas citadas e outros estudos realizados sobre escoamentos em torno do pára-quedas, pretende-se realizar uma simulação numérica bidimensional de um salto de pára-quedas. Para isso considera-se a fase de inflação totalmente concluída, ou seja, o equipamento completamente inflado. O modelo de pára-quedas adotado será convencional, que é o mais utilizado em pára-quedismo militar. Para fins de simplificação, o tecido do pára-quedas será admitido não-poroso.

Inicialmente, serão identificados os dados técnicos do equipamento e de um salto, assim como seus históricos e aplicações. Posteriormente, apresentam-se alguns cálculos analíticos realizados com o objetivo de encontrar o tempo e a velocidade da queda e a desaceleração quando da abertura do equipamento, considerando um salto efetuado a 3000 metros de altura. Para efeitos de cálculo adota-se a função $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ para identificar a geometria, onde a é o raio do velame e b a sua altura. Como estimativa inicial utilizou-se o valor da relação b/a igual a $0,707 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$. Este valor será modificado na etapa de otimização, buscando encontrar a geometria que proporcione um arraste idealizado.

Após concluídos os estudos iniciais, que são ferramentas importantes para o conhecimento do fenômeno físico, inicia-se a implementação do código computacional. Calcula-se o escoamento sobre o perfil baseado no método de diferenças finitas resolvendo as equações de Navier-Stokes incompressíveis. O esquema de Runge-Kutta simplificado é utilizado como método de integração temporal e a equação de Poisson foi utilizada para estimar o valor do gradiente de pressão gerado. E, por fim, apresentam-se os cálculos das velocidades e da pressão na superfície do pára-quedas.

Partindo da obtenção das soluções do escoamento para vários números de Reynolds, apresentam-se os cálculos do coeficiente de arraste (c_d), baseado na integração da pressão em função da área da geometria. Este coeficiente é calculado

inicialmente para uma geometria com a relação b/a igual a 0,707, pois a análise estrutural indicou ser esta relação favorável para obter uma melhor distribuição de tensões no velame. Numa etapa posterior da pesquisa, aplica-se uma técnica de otimização com o objetivo de maximizar este c_d , obedecendo algumas restrições.

Para a otimização do velame, primeiramente utiliza-se uma fórmula semi-empírica, baseada na geometria de um aerofólio como o objetivo de encontrar os valores do coeficiente de arraste concordantes com os encontrados na bibliografia. Posteriormente, utiliza-se o algoritmo dos “poliedros flexíveis” aliado à solução do escoamento, que é um método de busca multivariável, onde o pior vértice de um poliedro com $n + 1$ vértices é substituído por um novo vértice, colinear com o vértice antigo e o centróide de n vértices.

Os softwares Maple 8.0 e MATLAB 5.2 serão utilizados como ferramentas para obter os resultados analíticos. Para implementação do código de dinâmica de fluidos computacional utiliza-se FORTRAN 90 e os resultados serão obtidos no CRAY T94 do Centro de Super Computação-CESUP da UFRGS. Utiliza-se, ainda, o VISUAL-3D [19] para visualização dos resultados.

Saliente-se que os valores de Reynolds dos escoamentos aqui resolvidos não são os do escoamento real sobre um pára-quedas ($\sim 10^7$), porém muitas das informações, apesar do grande número de aproximações, poderão ser úteis para um problema tão pouco discutido na literatura, especialmente pelas suas aplicações na área esportiva e pelo fascínio que exerce sobre as pessoas e, em especial, sobre esta pesquisadora.

A seguir, indicam-se por capítulos, de maneira objetiva, os assuntos abordados nesta dissertação.

1.5 Delineação da dissertação

Esta dissertação está assim delineada:

No capítulo dois apresentam-se as equações que governam o escoamento em torno do pára-quadras, suas formas adimensionalizadas, que serão utilizadas na implementação numérica e as condições de contorno e iniciais.

No capítulo três descreve-se o procedimento de solução das equações citadas no capítulo dois, indicando o método de discretização espacial, o método de integração temporal e o métodos de relaxações sucessivas para a pressão. Descrevem-se, também, as técnicas de otimização utilizadas para obter os resultados.

No quarto capítulo mostram-se os resultados dos cálculos analíticos, onde se busca compreender melhor o fenômeno físico; os cálculos numéricos mostram as características locais do escoamento e da otimização, indicando qual geometria oferece o maior arraste, levando em conta as restrições estabelecidas.

No último capítulo apresentam-se as considerações finais sobre os resultados obtidos e as perspectivas de trabalhos futuros nesta mesma linha de pesquisa.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Neste capítulo as equações utilizadas para simular o escoamento, tais como a da quantidade de movimento e a de Poisson para a pressão, são apresentadas juntamente com suas respectivas formas adimensionalizadas; seguidas das condições de contorno e iniciais adotadas na resolução do problema.

2.1 Sistema de Equações

Para escoamentos de fluidos utiliza-se as equações de Navier-Stokes bidimensionais para o cálculo das velocidades u e v , ou seja, as equações da conservação da quantidade de movimento em x (CQM_x) e em y (CQM_y). São elas, respectivamente:

$$CQM_x : \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

$$CQM_y : \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

Como o escoamento é considerado incompressível, a massa específica do ar se mantém praticamente constante com o tempo e a continuidade é observada pela equação (2.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = d = 0 \quad (2.3)$$

Embora o interesse seja a solução em regime permanente, optou-se pela permanência do termo temporal pois este representa, numericamente, mais um parâmetro para controlar o processo iterativo, facilitando obtenção dos resultados.

Além das equações para o cálculo das velocidades u e v , deve-se obter uma equação para a pressão, pois necessita-se de um gradiente de pressão para obter um gradiente de velocidade. Para tal tarefa escolheu-se a equação de Poisson, que

é utilizada para escoamentos incompressíveis. Esta equação é obtida a partir da derivação das equações CQM_x (Eq. 2.1) e CQM_y (Eq. 2.2) em relação a x e y , respectivamente, conforme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 uu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 uv}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 uv}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 vv}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.5)$$

Somando-se as equações resultantes (Eq. 2.4) e (Eq. 2.5) e isolando-se os termos de pressão do lado esquerdo da igualdade tem-se a equação de Poisson:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} \right) + \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} \rho \quad (2.6) \end{aligned}$$

A equação da continuidade (Eq. 2.3) não é calculada diretamente neste trabalho, porém, como se pode observar na equação (2.6), seu cálculo surge na obtenção dos gradientes de pressão. Sendo assim, considera-se que a derivada desta em função do tempo tende para zero da seguinte forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Desta forma, o cálculo correto das velocidades contribui para o desenvolvimento do campo de pressão, o qual, finalmente, força a conservação da massa local.

Em mecânica de fluidos as variáveis envolvidas têm, geralmente, grandezas distintas, o que dificulta a obtenção de resultados. Sendo assim, prefere-se utilizar quantidades adimensionais nas equações com o objetivo de torná-las dependentes apenas da natureza da física do fenômeno.

Os parâmetros adimensionais podem ser obtidos diretamente das equações diferenciais. Indica-se, a seguir, as escalas que serão adotadas para escrever as variáveis na forma adimensional:

L a escala de comprimento

U_∞ a escala de velocidade da corrente livre e

p_∞ a escala de pressão da corrente livre ($= \rho_\infty U_\infty^2$)

Com base nessas escalas as variáveis adimensionais são:

$$u^* = \frac{u}{U_\infty}; \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}; \quad x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L};$$

$$p^* = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2}; \quad t^* = \frac{tU_\infty}{L}; \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}$$

Tomando t^* como exemplo, tem-se:

$$t^* = \frac{tU_\infty}{L} \Rightarrow \frac{s.m/s}{m} \Rightarrow \text{adimensional}$$

Dadas as escalas e as variáveis adimensionais, escrevendo cada termo da equação da conservação da quantidade de movimento em x (Eq. 2.1), o procedimento de dimensionalização se dá da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^* U_\infty}{\partial t^* L / U_\infty} = \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial uu}{\partial x} = \frac{\partial u^* U_\infty u^* U_\infty}{\partial x^* L} = \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial u^* u^*}{\partial x^*} \quad (2.9)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u^* U_\infty v^* U_\infty}{\partial y^* L} = \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} \quad (2.10)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^* \rho_\infty} \frac{\partial p^* \rho_\infty U_\infty^2}{\partial x^* L} = -\frac{U_\infty^2}{\rho^* L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \quad (2.11)$$

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 u^* U_\infty}{\partial x^{*2} L^2} + \frac{\partial^2 u^* U_\infty}{\partial y^{*2} L^2} \right) = \nu \frac{U_\infty}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.12)$$

O que resulta na seguinte equação:

$$\frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial u^* u^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} = -\frac{U_\infty^2}{\rho^* L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu \frac{U_\infty}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.13)$$

Multiplicando toda a equação (2.13) por L/U_∞^2 , obtém-se:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.14)$$

onde $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$ é o número de Reynolds. Para o problema proposto, o valor característico L é representado pelo diâmetro do pára-quedas.

Aplica-se o mesmo procedimento nas demais equações governantes do escoamento (Eq. 2.2), (Eq. 2.3) e (Eq. 2.6), o que resulta no seguinte sistema de equações na forma adimensional:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^{*2}} = \rho^* \left\{ -\frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) - \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} \right) - \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial u^* v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* v^*}{\partial y^*} \right) + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \right] \right\} \quad (2.18) \end{aligned}$$

Dando continuidade ao sistema de equações, apresenta-se as condições de contorno e iniciais do problema.

2.2 Condições de Contorno e Iniciais

O conjunto de equações apresentados no capítulo anterior é o mesmo para diversos tipos de escoamentos naturais, o que diferencia no cálculo de cada caso é a aplicação das condições de contorno e iniciais. Este é um dos maiores problemas na resolução dessas equações, pois a aplicação de condições inadequadas podem resultar numa solução incorreta e na instabilidade do método [23]. Descreve-se, a seguir, as condições de contorno externas, as condições iniciais e o método de contornos virtuais, que consiste na aplicação de forças numa região do domínio para representar uma geometria sólida.

As condições de contorno em problemas de escoamento externo podem ser definidas como: condições de contorno de parede, que identificam uma parede sólida onde o fluxo deve ser nulo; de simetria, que identifica quando o escoamento é

simétrico em relação a um eixo, reduzindo, assim, o número de células no domínio; longe do corpo (“far field”), importantes para escoamentos externos a baixa velocidade, baseando-se nas características do escoamento normal à fronteira e, ainda, de extrapolação, que é utilizada para ajustar a variável no contorno com relação às células vizinhas [9].

A condição de contorno utilizada por Schlüter [43], longe do corpo, foi denominada de condição convectiva, de saída do escoamento, e baseia-se no modelo de condições de contorno convectivas utilizadas em problemas de combustão, dentre outros; e é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_c \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2.19)$$

onde

ϕ é algum escalar ou componente de velocidade;

u_c a velocidade convectiva e

n a direção da saída normal ao contorno.

A condição para a pressão baseia-se na equação de Poisson; portanto, negligencia-se os termos dissipativos e mantém-se os termos convectivos na direção normal ao contorno desejado, da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} = \rho \frac{\partial^2 (u_c^2)}{\partial n^2},$$

Na entrada, face sul do domínio ($y = 0$) conforme (Fig. 2.1), faz-se a componente de velocidade em x , u igual a 0; a componente em y , v , igual ao valor inicial (2.21) e a pressão, p , é igual ao seu valor inicial (2.22).

Na face norte, saída ($y = Y$), utilizam-se condições de contorno convectivas do tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

para as componentes de velocidade e

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial y^2},$$

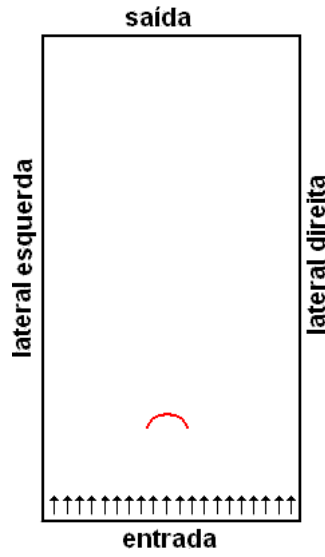


Figura 2.1: Domínio físico

para a pressão.

Nas faces esquerda ($x = 0$) e direita ($x = X$) do domínio utilizam-se, também, as condições convectivas, para a velocidade e para a pressão, da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2},$$

Além das condições de contorno longe do corpo, deve-se definir as condições iniciais do escoamento. Estas correspondem aos valores da corrente livre, adimensionalizados:

$$u_\infty = 0 \quad (2.20)$$

$$v_\infty = 1 \quad (2.21)$$

$$p_\infty = 1 \quad (2.22)$$

$$\rho_\infty = 1 \quad (2.23)$$

3 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Neste capítulo descreve-se as técnicas numéricas utilizadas para resolução das equações governantes do escoamento incompressível. As equações da conservação da quantidade de movimento são usadas para o cálculo das velocidades e a de Poisson para a pressão. Estas equações são discretizadas pelo método de diferenças finitas no espaço e são integrados pelo método de Runge-Kutta no tempo. Discute-se, também, o procedimento de otimização empregado para gerar a geometria de um pára-quedas buscando encontrar um coeficiente de arraste apropriado para ter uma velocidade terminal de aproximadamente $\sqrt{30}m/s$.

3.1 Solução das Equações do Escoamento

Nesta etapa discute-se a resolução numérica das equações governantes (Eqs. 2.1, 2.2) citadas no capítulo anterior, por meio de discretização espacial baseada no esquema de diferenças finitas e de integração temporal por meio do esquema de Runge-Kutta multi-estágios. Resolve-se também a equação de Poisson para o cálculo da pressão, utilizando sub-relaxação.

3.1.1 Discretização Espacial

Para resolver um sistema de equações não lineares é necessário discretizá-las, ou seja, escrevê-las em função dos pontos da malha computacional. Neste trabalho, utiliza-se o método de diferenças finitas para realizar esta tarefa. Neste método as derivadas são aproximadas como resultado de uma representação algébrica e a natureza deste sistema algébrico depende das características do problema [2].

Considera-se $u(x, y)$ a variável dependente num domínio $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ e se estabelece uma malha no domínio substituindo $u(x, y)$ por $u(\Delta x, \Delta y)$. Os

pontos são indicados na malha pelos índices i e j ; assim, as equações são geralmente escritas em termos do ponto $u(i, j)$ e seus vizinhos (Fig. 3.1), da seguinte forma:

$$u_{i+1,j} = u(x_0 + \Delta x, y_0)$$

$$u_{i-1,j} = u(x_0 - \Delta x, y_0)$$

$$u_{i,j+1} = u(x_0, y_0 + \Delta y)$$

$$u_{i,j-1} = u(x_0, y_0 - \Delta y)$$

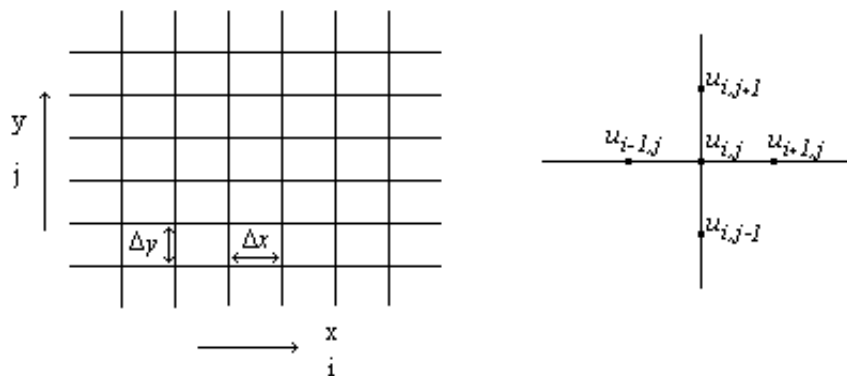


Figura 3.1: Domínio discretizado

A maioria das equações diferenciais parciais que surgem em problemas de mecânica de fluidos envolvem somente primeiras e segundas derivadas parciais, que são geralmente representadas usando dois ou três pontos da malha.

A idéia da representação por diferenças finitas pode ser introduzida através da definição da derivada de uma função $u(x, y)$ em $x = x_0$ e em $y = y_0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Se u é diferenciável e contínua, espera-se que $[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)]/\Delta x$ seja uma aproximação razoável para $\partial u/\partial x$, para Δx finito e suficientemente pequeno. Essa aproximação pode ser expressa formalmente usando expansões em série de Taylor, onde expandindo o termo $u(x_0 + \Delta x, y_0)$ em torno de (x_0, y_0) resulta:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots \quad (3.1)$$

Isolando o termo $\frac{\partial u}{\partial x}$ na (Eq. 3.1) tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2!} - \dots$$

ou ainda,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.2)$$

que é uma aproximação de primeira ordem para a derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$, onde $O(\Delta x)$ representa um erro de truncamento da ordem de Δx .

De forma semelhante obtém-se uma aproximação da diferença central (Eq. 3.3), que é uma aproximação de segunda ordem da derivada primeira de $u(x, y)$ em relação a x .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.3)$$

Obtém-se também uma aproximação para a derivada segunda (Eq. 3.4):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3.4)$$

Para ilustrar o método de diferenças finitas considere a aproximação da equação (2.2), o que resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j}}{\Delta t} + \frac{u_{i,j} \cdot (v_{i+1,j} - v_{i-1,j})}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j} \cdot (v_{i,j+1} - v_{i,j-1})}{2\Delta y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} + \\ \nu \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) & \quad (3.5) \end{aligned}$$

O conhecimento de conceitos de erro de truncamento, consistência, estabilidade e convergência, torna-se útil como critério de seleção do método para a resolução de escoamentos. Uma abordagem da análise de convergência de aproximações por diferenças finitas é feita através de conceitos de consistência e estabilidade [41], descritos a seguir.

Considerando-se, na equação (3.5), a pressão e os coeficientes das derivadas parciais conhecidos, e isolando o termo temporal, tem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} &= \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^{n-1} - 2v_{i,j}^{n-1} + v_{i-1,j}^{n-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n-1} - 2v_{i,j}^{n-1} + v_{i,j-1}^{n-1}}{(\Delta y)^2} \right) - \\ \frac{u_{i,j}^{n-1} \cdot (v_{i+1,j}^{n-1} - v_{i-1,j}^{n-1})}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j}^{n-1} \cdot (v_{i,j+1}^{n-1} - v_{i,j-1}^{n-1})}{2\Delta y} &+ f(x, y, t) \quad (3.6) \end{aligned}$$

Através da expansão da equação diferencial (Eq. 3.6) por série de Taylor teremos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f(x, y, t) = \\
& \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} - \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^{n-1} - 2v_{i,j}^{n-1} + v_{i-1,j}^{n-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{v_{i,j+1}^{n-1} - 2v_{i,j}^{n-1} + v_{i,j-1}^{n-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \\
& \frac{u_{i,j}^{n-1} \cdot (v_{i+1,j}^{n-1} - v_{i-1,j}^{n-1})}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j}^{n-1} \cdot (v_{i,j+1}^{n-1} - v_{i,j-1}^{n-1})}{2\Delta y} + f(x, y, t) + \\
& \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2} - \nu \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} \frac{\Delta y^2}{12} \right) + \dots \right) \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Verifica-se, assim, que o erro de truncamento é $\| \tau^n \| = O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) + O(\Delta t)$.

No caso geral, um esquema de diferenças finitas

$$v^n = Qu^{n-1} + \Delta t G^{n-1} \tag{3.8}$$

é dito ter ordem (p, q) para uma EDP, se

$$\| \tau^{n-1} \| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q)$$

No que se refere à consistência; o esquema (Eq. 3.8) é consistente com a respectiva equação diferencial, na norma $\| \cdot \|$, se a solução u satisfaz

$$u^n = Qu^{n-1} + \Delta t G^{n-1} + \Delta t \tau^{n-1}$$

e

$$\| \tau^{n-1} \| \rightarrow 0$$

quando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

Um método numérico é estável se os erros ou perturbações não crescem para cada passo posterior; deseja-se que pequenos erros na condição inicial gerem pequenos erros nas aproximações calculadas pelo esquema numérico. O esquema de diferenças finitas

$$u^{n+1} = Qu^n, \quad n \geq 0$$

é dito estável com respeito a norma $\| \cdot \|$, se existem as constantes positivas Δx_0 e Δt_0 , e constantes não negativas C e α tais que:

$$\| u^{n+1} \| \leq C e^{\alpha t} \| u^0 \| \quad (3.9)$$

para $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ e $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Quando a solução numérica se aproxima da solução exata da EDP, conforme $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, diz-se que o método numérico é convergente. A consistência é condição necessária para convergência [41]. O teorema de Lax (3.1) faz uma conexão entre consistência e estabilidade com convergência.

Teorema 3.1. *Considere um esquema de diferenças finitas*

$$v^{n+1} = Qv^n + \Delta t G^n$$

de ordem (p, q) na norma $\| \cdot \|$ para um problema de valor inicial linear, bem posto e consistente. Se este esquema é estável com respeito a norma $\| \cdot \|$, então ele é convergente de ordem (p, q) com respeito a norma $\| \cdot \|$.

Demonstração. Suponha $u(x, t)$ a solução exata do problema de valor inicial. Se o esquema de diferenças finitas é de ordem (p, q) , então

$$u^{n+1} = Qu^n + \Delta t G^n + \Delta t \tau^n,$$

com $\| \tau^n \| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q)$. Define-se $w^j = u^j - v^j$, então w^j satisfaz

$$w^{n+1} = Qw^n + \Delta t \tau^n \quad (3.10)$$

A aplicação da equação (Eq. 3.10) de forma recursiva fornece

$$w^{n+1} = \Delta t \sum_{j=0}^n Q^j \tau^{n-j}$$

considerando $w^0 = 0$.

Aplicando a norma $\| \cdot \|$ e utilizando a definição de estabilidade (Eq. 3.9) resulta em

$$\| w^{n+1} \| \leq (n+1)\Delta t C e^{\alpha(n+1)\Delta t} K^*(t) (\Delta x^p + \Delta t^q) \quad (3.11)$$

onde

$$K^*(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} K(s)$$

e $K(s)$ é a constante que aparece na definição de ordem de aproximação, O , de τ^{n-j} .

Fazendo $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ com $(n+1)\Delta t \rightarrow t$ ($n \rightarrow \infty$), obtém-se

$$\|v^{n+1} - u^{n+1}\| \rightarrow 0$$

Para mostrar que o esquema é convergente de ordem (p, q) basta observar que a equação (3.11) pode ser escrita como

$$\|v^{n+1} - u^{n+1}\| \leq \tilde{C}(t)(\Delta x^p + \Delta t^q) = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q)$$

□

A demonstração detalhada deste teorema pode ser vista em [41].

Nas equações de Navier-Stokes a variável tempo pode variar num domínio ilimitado, sendo assim importante estudar as instabilidades do método, porém devido a não-linearidade dessas equações fica difícil determinar uma condição de estabilidade, e acaba-se por analisá-las na forma linearizada. Sendo assim, considera-se a pressão e todos os coeficientes das derivadas parciais conhecidos, o que resulta na seguinte equação parabólica [45]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \phi}{\partial x} - v \frac{\partial \phi}{\partial y} + f(x, y, t) \quad (3.12)$$

Ao discretizar a equação (3.12) nos pontos do interior da malha, utilizando diferenças centrais, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{i,j}^n - \phi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = & \nu \left(\frac{\phi_{i+1,j}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i-1,j}^{n-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i,j-1}^{n-1}}{(\Delta y)^2} \right) - \\ & u_{i,j}^{n-1} \frac{\phi_{i+1,j}^{n-1} - \phi_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta x} - v_{i,j}^{n-1} \frac{\phi_{i,j+1}^{n-1} - \phi_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta y} + f(x_i, y_j, t_n) \end{aligned} \quad (3.13)$$

ou, de forma simplificada,

$$\phi_{i,j}^n = F\phi_{i,j}^{n-1} + (\Delta t)f(x_i, y_j, t_n), \quad (3.14)$$

onde o operador F é dado por:

$$F\phi_{i,j}^{n-1} = \phi_{i,j}^{n-1} - \Delta t \left(u_{i,j}^{n-1} \frac{\phi_{i+1,j}^{n-1} - \phi_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta x} - v_{i,j}^{n-1} \frac{\phi_{i,j+1}^{n-1} - \phi_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta y} \right) + \nu \Delta t \left(\frac{\phi_{i+1,j}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i-1,j}^{n-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i,j-1}^{n-1}}{(\Delta y)^2} \right) \quad (3.15)$$

Determinando assim os seguintes coeficientes [45]:

$$\alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}; \quad \beta = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}; \quad \gamma = \frac{\Delta t}{2\Delta x}; \quad \delta = \frac{\Delta t}{2\Delta y} \quad (3.16)$$

Utilizando os coeficientes α , β , γ e δ pode-se reescrever a equação (3.15) da seguinte forma:

$$F\phi_{i,j}^{n-1} = (\beta\nu + \delta v_{i,j}^{n-1})\phi_{i,j-1}^{n-1} + (\alpha\nu + \gamma u_{i,j}^{n-1})\phi_{i-1,j}^{n-1} + [1 - 2\nu(\alpha + \beta)]\phi_{i,j}^{n-1} + (\alpha\nu - \gamma u_{i,j}^{n-1})\phi_{i+1,j}^{n-1} + (\beta\nu - \delta v_{i,j}^{n-1})\phi_{i,j+1}^{n-1} \quad (3.17)$$

Nota-se que o somatório dos coeficientes do lado direito da equação (3.17) é igual a 1 e tem-se, então:

$$|\gamma u_{i,j}^{n-1}| \leq \alpha\nu; \quad |\delta v_{i,j}^{n-1}| \leq \beta\nu \quad (3.18)$$

e

$$2\nu(\alpha + \beta) \leq 1 \quad (3.19)$$

Sendo assim, pode-se concluir que:

$$\min(\phi_{i,j-1}^{n-1}, \phi_{i-1,j}^{n-1}, \phi_{i,j}^{n-1}, \phi_{i,j+1}^{n-1}, \phi_{i+1,j}^{n-1}) \leq F\phi_{i,j}^{n-1} \leq \max(\phi_{i,j-1}^{n-1}, \phi_{i-1,j}^{n-1}, \phi_{i,j}^{n-1}, \phi_{i,j+1}^{n-1}, \phi_{i+1,j}^{n-1})$$

o que indica que as inequações (3.18, 3.19) são suficientes para assegurar que, quando $f(x, y, t) = 0$, qualquer solução da equação (3.14) é limitada. Portanto, as condições suficientes de estabilidade para o método são dadas por (Eqs. 3.18, 3.19) [45].

Após apresentados os procedimentos de solução das equações, necessita-se de condições para definir a geometria, para que o fluido identifique a presença do pára-quedas.

3.1.2 Método dos contornos virtuais

Ao simular escoamentos sobre geometrias simples utilizando uma malha cartesiana regular deve-se indicar a geometria no domínio para que o fluxo contorne a mesma; isto pode ser feito, de forma simples, apenas zerando as componentes de velocidade nos pontos da mesma quando estes forem coincidentes. Por outro lado, ao simular escoamentos sobre geometrias complexas aplica-se, geralmente, uma transformação de coordenadas, trabalhando assim com uma malha generalizada; em muitos casos trabalha-se com malhas não-estruturadas.

Na maioria das aplicações industriais, por outro lado, trabalha-se com geometrias complexas combinadas com contornos móveis, altos números de Reynolds e turbulência, o que dificulta a simulação numérica. Como resultado, tem-se geralmente alto custo computacional e precisão limitada devido ao elevado número de operações por nó. Considerando a memória limitada e a velocidade dos computadores, essas simulações se tornam muito caras e demoradas [13].

Em vista destas dificuldades tem-se estudado procedimentos numéricos alternativos que possam lidar com a complexidade do escoamento e manter, ao mesmo tempo, a exatidão e a eficiência elevada das simulações executadas em malhas cartesianas, o que representa um avanço significativo no estudo de fluxos industriais.

Peskin [35] desenvolveu um método que representa um corpo em um escoamento através da aplicação de um termo forçante nas equações governantes. Quando aplicado a certos pontos do escoamento, o termo forçante simula o efeito de um corpo, permitindo a modelagem de um contorno geralmente não muito complexo em uma malha cartesiana. Este método, de contornos virtuais (imersos), já foi implementado com sucesso para modelos de contornos móveis em simulações de válvulas cardíacas.

O termo forçante $f(x_s, t)$, atribuído a Goldstein, é introduzido na equação da quantidade de movimento e pode ser escrito da seguinte forma [13]:

$$f(x_s, t) = \alpha_f \int_0^t [u(x_s, t') - V(x_s, t')] dt' + \beta_f [u(x_s, t) - V(x_s, t)] \quad (3.20)$$

onde α_f e β_f são constantes negativas com dimensões $\frac{1}{T^2}$ e $\frac{1}{T}$, respectivamente; $V(x_s, t)$ é a velocidade no contorno; $f(x_s, t)$ representa o resultado da diferença $u(x_s, t) - V(x_s, t)$ e comporta-se de maneira a reforçar que $u = V$ no contorno imerso.

Para melhor entender a ação do termo forçante f , considere a equação da quantidade de movimento escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(uu) = -\nabla p + \nu \nabla^2 u + f \quad (3.21)$$

conservando-se apenas o primeiro termo do lado esquerdo da equação (3.21) e o último termo do lado direito da mesma equação, resulta em

$$\frac{\partial q}{\partial t} \approx f = \alpha_f \int_0^t q dt' + \beta_f q, \quad (3.22)$$

onde $q = u - V$. A equação (3.22) representa um oscilador harmônico simples; intuitivamente isso implica que à medida que os valores de u e V se afastam do contorno, o termo forçante f os aproxima novamente.

Em um escoamento transiente o valor de α_f deve ser grande o bastante de modo que a frequência resultante seja maior que a frequência mais elevada do escoamento, fazendo com que o campo de força suporte mudanças no escoamento na região próxima ao corpo [32]. Mas, o valor das constantes depende do escoamento e se os valores de α_f e β_f forem grandes, o escoamento se torna independente de seus valores; portanto, não existe uma regra geral para sua determinação. A principal desvantagem deste termo forçante é que valores de α e β grandes fazem com que a integração da equação (3.21) no tempo exija passos de tempo muito pequenos [13] e métodos de integração temporal explícitos para resolução de escoamentos.

Para um esquema Adams-Bashforth a expressão do passo de tempo torna-se

$$\Delta t < \frac{-\beta_f - \sqrt{(\beta_f^2 - 2\alpha_f k)}}{\alpha_f}, \quad (3.23)$$

onde k é uma constante de ordem um e dependente do problema. Uma restrição similar foi observada quando o método de Runge-Kutta foi usado por Saiki e Biringen [38].

O pontos do contorno imerso são representados por N_b , de modo que cada ponto do contorno troca informações com quatro nós adjacentes da malha, denotados pelos índices inteiros (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i, j + 1)$ e $(i + 1, j + 1)$ sendo que os pontos do contorno, $x_s(i_s, j_s)$, tem índices reais, onde $\{i \leq i_s \leq i + 1\}$, $\{j \leq j_s \leq j + 1\}$ e $s = 1, 2, \dots, N_b$. As componentes do vetor velocidade do fluido são calculadas usando uma interpolação bilinear, através da fórmula

$$u(x_s) = \sum_{i,j}^{i+1,j+1} D_{i,j}(x_s) u_{i,j} \quad (3.24)$$

onde $D_{i,j}(x_s)$ é o coeficiente de interpolação bilinear, que quantifica a transferência de informações entre um ponto da geometria e os nós adjacentes da malha e é obtido pelo produto dos coeficientes de interpolação linear nas direções longitudinal e transversal, da seguinte forma [38]:

$$D_{i,j}(x_s) = d(x_s - x_i) d(y_s - y_j) \quad (3.25)$$

onde os termos $d(x_s - x_i)$ são dados por:

$$d(x_s - x_i) = \frac{(x_s - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} \text{ se } x_i < x_s \quad (3.26)$$

$$= \frac{(x_s - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \text{ se } x_i > x_s \quad \text{e} \quad (3.27)$$

$$= 1 \quad \text{se } x_i = x_s \quad (3.28)$$

A força transferida dos pontos da geometria para os pontos da malha é dada pela média ponderada das parcelas de força, conforme:

$$f_{i,j} = \frac{1}{N_b} \sum_{n=1}^{N_b} D_{i,j}(x_s) f_n(x_s) \quad (3.29)$$

Neste trabalho, aplicou-se uma técnica de interpolação diferente da de contornos imersos anteriormente citada. Primeiramente, localiza-se os pontos da geometria e a seguir interpolam-se estes com os nós da malha imediatamente acima e abaixo deles, conforme a figura (3.2).

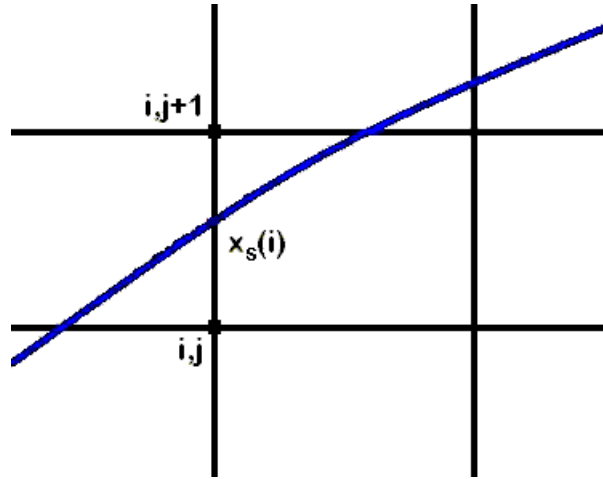


Figura 3.2: Identificação do ponto da geometria e dos 2 nós vizinhos

Como não se pode zerar as componentes da velocidade nos pontos do corpo (pára-quedas), pois a maioria deles não coincide com os nós da malha, zera-se indiretamente apenas a componente de velocidade normal à superfície nos nós da malha vizinhos à curva, utilizando a seguinte formulação para o cálculo das componentes tangenciais ao corpo:

$$u = \frac{(u_a dx + v_a dy) dx}{dx^2 + dy^2} \quad (3.30)$$

$$v = \frac{(u_a dx + v_a dy) dy}{dx^2 + dy^2} \quad (3.31)$$

De forma discretizada tem-se:

$$u_{i,j}^n = \frac{(u_{i,j}^{n-1} dx_s + v_{i,j}^{n-1} dy_s) dx_s}{dx_s^2 + dy_s^2} \quad (3.32)$$

$$v_{i,j}^n = \frac{(u_{i,j}^{n-1} dx_s + v_{i,j}^{n-1} dy_s) dy_s}{dx_s^2 + dy_s^2} \quad (3.33)$$

onde $dx_s = (x_s(i+1) - x_s(i-1))/2$, $dy_s = (y_s(i+1) - y_s(i-1))/2$ e x_s e y_s são as coordenadas da geometria. De forma semelhante, obtém-se os valores para os pontos da malha imediatamente acima da curva.

Isto garante que o escoamento contorne a geometria sem a necessidade de utilização de coordenadas generalizadas ou da aplicação de outros termos forçantes nas equações. Com o intuito de obter melhores resultados implementou-se o termo de interpolação bilinear conforme a equação (3.24) para esta geometria, buscando assim um melhor resultado, já que este processo utiliza 4 pontos vizinhos e não apenas 2 como na formulação anterior. Porém, esta tentativa gerou dificuldades desde a implementação até a não convergência do código, obtendo-se resultados não condizentes com o problema.

Segundo Moin [31], este método funciona melhor quando as superfícies são quase planas e perpendiculares à malha ou se o objeto for delgado. Salienta ainda que para números de Reynolds médios e elevados e geometrias complexas, é frequentemente vantajoso combinar a técnica de contornos virtuais com uma malha curvilínea estruturada. Pela complexidade envolvida, esta alternativa é deixada para estudos futuros.

Após apresentada a discretização espacial das equações governantes, necessita-se definir um método de integração temporal adequado para o problema.

3.1.3 Integração Temporal

Vários métodos de integração podem ser empregados na resolução das equações governantes de escoamentos na forma aproximada (discretizada). A literatura indica que métodos como o Runge-Kutta multi-estágios são de aplicação fácil e eficiente.

Optou-se por um método explícito, considerando que o fenômeno físico exige um passo de tempo numérico pequeno ($\sim 10^{-5}$), isto levando em conta que a velocidade dos menores vórtices são da ordem de 1 a 10 m/s e seus diâmetros da ordem de $10^{-3} m$, desta forma chega-se a um Δt da ordem de 10^{-3} a 10^{-4} .

Dentre os métodos escolheu-se o de Runge-Kutta de segunda ordem, que requer menos memória computacional e é de fácil implementação e, ainda, por

que seus coeficientes podem ser escolhidos de modo a obter a precisão desejada. Este método é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{W}_{i,j}^{\rightarrow(0)} &= \vec{W}_{i,j}^{\rightarrow n} \\ \vec{W}_{i,j}^{\rightarrow(k)} &= \vec{W}_{i,j}^{\rightarrow 0} - \alpha_k \Delta t \vec{R}_{i,j}^{\rightarrow(k-1)} \\ \vec{W}_{i,j}^{\rightarrow n+1} &= \vec{W}_{i,j}^{\rightarrow(k)}\end{aligned}$$

onde

$\vec{W} = \{u, v\}^T$ é o vetor velocidade,

$\vec{W}_{i,j}^{\rightarrow n}$ o valor de \vec{W} na n ésima iteração no ponto i, j ,

$\vec{W}_{i,j}^{\rightarrow 0}$ o valor inicial de \vec{W} no ponto i, j e

k é o número de estágios.

Como o problema abordado é incompressível, isto é, trata-se de um escoamento no ar a baixas velocidades, utiliza-se o método de Runge-Kutta de 3 estágios, que é mais apropriado nos casos em que o passo de tempo é pequeno e as aproximações das derivadas são de segunda ordem, onde os autovalores da matriz Jacobiana estão muito próximos. Sendo assim, tem-se que os coeficientes α_k são dados por: $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1$, que podem ser obtidos analiticamente [8].

Ao empregar este método pode-se escrever o sistema de equações (Eqs. 2.1, 2.2) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \vec{W}_{i,j}^{\rightarrow}}{\partial t} = -\vec{R}_{i,j}$$

Como exemplo, toma-se a equação da CQM_y (Eq. 2.2), o que resulta em:

$$\vec{W}_{i,j}^{\rightarrow} = v_{i,j} \quad (3.34)$$

$$\vec{W}_{i,j}^{\rightarrow(0)} = v_{i,j}^0 \quad (3.35)$$

e

$$\begin{aligned}\vec{R}_{i,j}^{\rightarrow k-1} &= \left(\frac{u_{i,j} \cdot (v_{i+1,j} - v_{i-1,j})}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{v_{i,j} \cdot (v_{i,j+1} - v_{i,j-1})}{2\Delta y} \right) + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} - \\ &\frac{1}{Re} \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right)\end{aligned} \quad (3.36)$$

e de forma semelhante para a equação da CQM_x (Eq. 2.1).

Após apresentado o método de Runge-Kutta de 3 estágios, para integração temporal, mostra-se agora a análise de estabilidade do mesmo, que indica o comportamento da convergência no procedimento de solução [9]. Sendo assim, para um único passo de um esquema multi-estágios tem-se que:

$$u^{n+1} = g(z)u^n \quad (3.37)$$

onde $g(z)$ é o fator de amplificação, que possui fórmulas específicas para cada esquema de integração temporal e depende do número de estágios. Para o método de Runge-Kutta de m estágios tem-se [23]:

$$g(z) = \sum_{r=0}^m \frac{z^r}{r!} \quad (3.38)$$

A região de estabilidade do método de Runge-Kutta é definida por:

$$H = \{z \in C : |g(z)| \leq 1\} \quad (3.39)$$

onde C é o plano complexo. Observa-se que esta região é contornada por pontos que satisfazem $|g(z)| = 1$ e, portanto, para algum z na fronteira da região de estabilidade deve existir um ângulo ξ tal que $g(z) = e^{i\xi}$, para $0 \leq \xi \leq 2\pi m$ e $z = x + iy$.

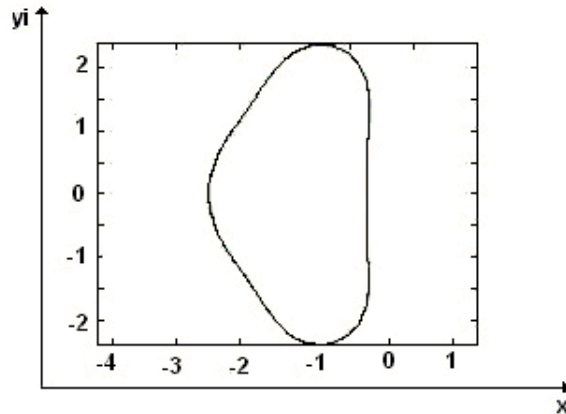


Figura 3.3: Região de estabilidade do esquema de Runge-Kutta de 3 estágios

Desta forma, o contorno da região de estabilidade do esquema Runge-Kutta de 3 estágios, mostrado na figura (3.3), pode ser traçado resolvendo

$$e^{i\xi} = \sum_{r=0}^3 \frac{z^r}{r!} \quad (3.40)$$

Após vistos os procedimentos de discretização e integração temporal para resolução das equações para o cálculo dos gradientes de velocidade, apresenta-se, a seguir, o procedimento de solução utilizado para resolver a equação de Poisson.

3.1.4 SUR aplicado ao Método Gauss-Seidel para a pressão

Para resolver a equação de Poisson (Eq. 2.6) da pressão utilizou-se o método de Gauss-Seidel, pois a mesma não possui termo temporal. A equação aproximada fica da seguinte forma:

$$p_{i,j} = \left\{ \frac{p_{i+1,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \rho \left[\frac{\partial^2 uu}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 uv}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 vv}{\partial y^2} + \frac{\partial d}{\partial t} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} \right) \right]_{i,j} \right\} \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (3.41)$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} &\approx \frac{d_{i+1,j} - 2d_{i,j} + d_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} &\approx \frac{d_{i,j+1} - 2d_{i,j} + d_{i,j-1}}{\Delta y^2} \\ \frac{\partial^2 uu}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{i+1,j}^2 - 2u_{i,j}^2 + u_{i-1,j}^2}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 vv}{\partial y^2} &\approx \frac{v_{i,j+1}^2 - 2v_{i,j}^2 + v_{i,j-1}^2}{\Delta y^2} \\ \frac{\partial^2 uv}{\partial x \partial y} &\approx \frac{u_{i+1,j+1}v_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1}v_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1}v_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}v_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &\approx \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &\approx \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} \\ \frac{\partial d}{\partial t} &\approx \frac{d_{i,j}}{dt} \end{aligned}$$

Ao método de Gauss-Seidel aplica-se a sub-relaxação SUR (successive under relaxation); a idéia dessas relaxações é calcular a cada iteração um novo valor da variável, neste caso a pressão p , usando o novo valor juntamente com o da iteração anterior, da seguinte forma:

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^k + \omega(p_{i,j}^{GS} - p_{i,j}^k)$$

onde $p_{i,j}^{GS}$ é a estimativa de p calculada pelo método Gauss-Seidel

$p_{i,j}^k$ é o valor de p da última iteração

$p_{i,j}^{k+1}$ é o novo valor de p

Aplica-se o parâmetro de sub-relaxação ω aos valores calculados a cada passo; isto permite obter convergência mais rápida. Neste trabalho, escolheu-se $\omega = 0,7$ pois a equação que rege a pressão tem caráter elíptico.

Para efetuar o cálculo da pressão na superfície do pára-quedas extrapolou-se os valores obtidos nos pontos vizinhos. Nos pontos localizados abaixo da superfície utilizou-se os dois pontos anteriores e nos pontos acima, os posteriores; dando um peso maior para o vizinho mais próximo do ponto em questão, conforme:

$$p_{i,j+1} = 75\%p_{i,j+2} + 25\%p_{i,j+3}$$

$$p_{i,j} = 75\%p_{i,j-1} + 25\%p_{i,j-2}$$

Aborda-se, a seguir, o critério de convergência adotado no presente trabalho, que é utilizado como critério de parada do processo iterativo.

3.1.5 Critério de Convergência

As soluções computacionais de escoamentos contém imprecisões as quais são limitadas pelo critério de convergência, que deve ser um valor pequeno o suficiente de modo a desprezar essas imprecisões. Neste trabalho, calcula-se o erro relativo da pressão da seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{\|p^{k+1} - p^k\|_{\infty}}{\|p^k\|_{\infty}} \leq 10^{-4} \quad (3.42)$$

Na figura (3.4) indica-se o fluxograma do código desenvolvido; observa-se que o mesmo é simples o suficiente, facilitando o emprego de técnicas de aceleração da convergência como multigrid, vetorização e paralelização quando necessárias.

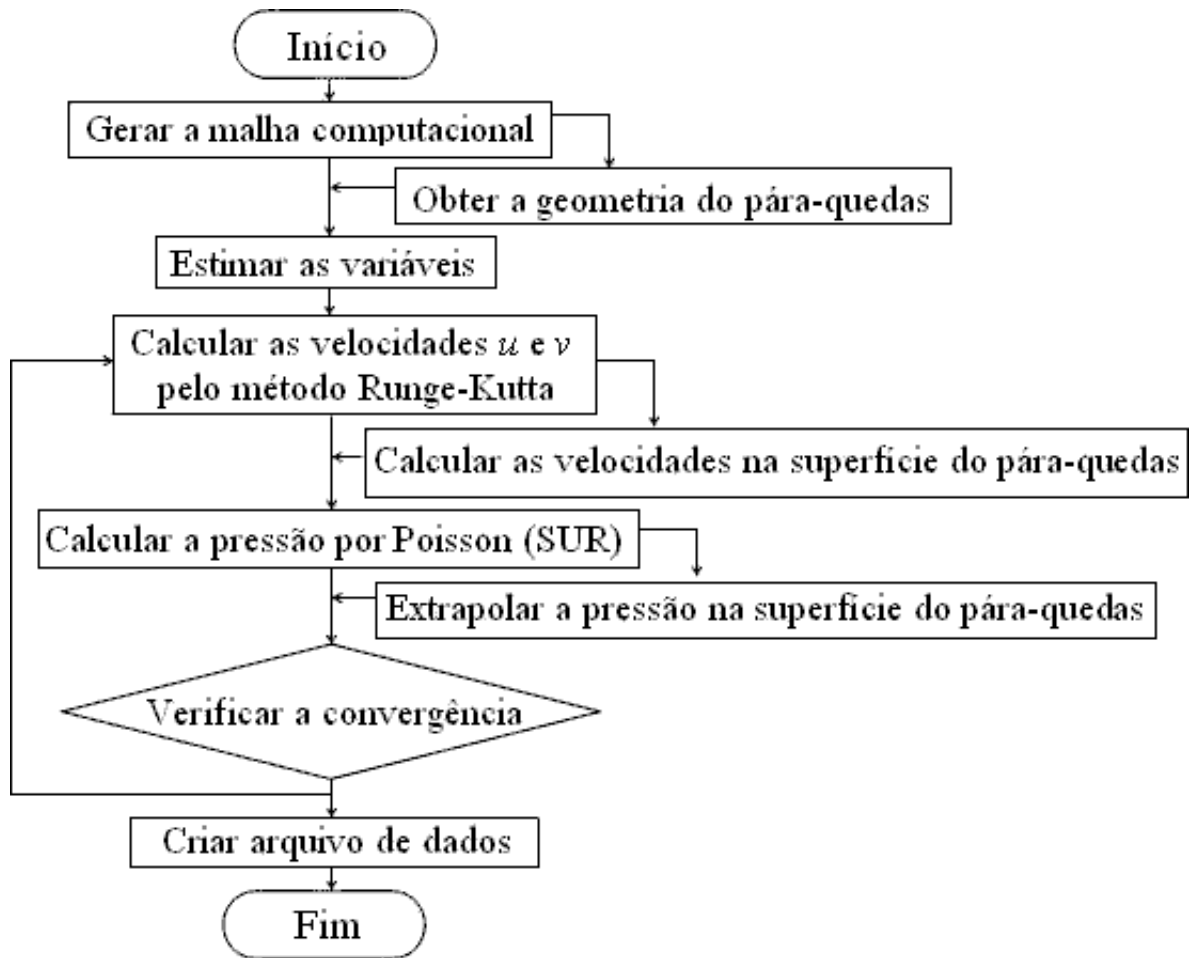


Figura 3.4: Fluxograma do código computacional implementado

Após a descrição dos procedimentos de solução das equações do escoamento, faz-se agora uma explanação sobre as técnicas de otimização utilizadas no processo de modificação da geometria com o objetivo de maximizar o coeficiente de arraste.

3.2 Otimização da Geometria

Após obtida a solução do escoamento governado pelas equações mostradas no segundo capítulo, calcula-se o coeficiente de arraste (c_d) para determinados números de Reynolds através da seguinte fórmula:

$$c_d = \frac{2F_d}{\rho v_\infty^2 A} \quad (3.43)$$

onde F_d representa a força de arraste, que é dada por

$$F_d = - \int_S (p - p_\infty) dx dy \quad (3.44)$$

[48]. Como o fluxo abordado neste trabalho é incompressível, é preferível calcular a força de arraste utilizando o coeficiente de pressão obtido através da velocidade [42]:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{1/2 \rho v_\infty^2} \sim 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \quad (3.45)$$

Através da equação (3.44) obtém-se:

$$F_d = -1/2 \rho v_\infty^2 \int_S c_p dx dy \quad (3.46)$$

Como a velocidade inicial e o valor da densidade tem valores iguais a 1 (adimensional), tem-se que:

$$F_d = -1/2 \int_S c_p dx dy \quad (3.47)$$

Deseja-se verificar se o valor do c_d encontrado é adequado, ou seja, se a carga ou o pára-quedista chegarão em segurança ao solo; para tanto, utiliza-se uma técnica de otimização para maximizar este coeficiente em função da forma do equipamento.

3.2.1 Problema Empírico

Primeiramente, adaptou-se uma equação para o cálculo do coeficiente de arraste de aerofólios para geometrias semi-elípticas, a qual aplicou-se uma técnica de otimização não-linear com restrições: a Programação Quadrática Sequencial (SQP) que faz sucessivas aproximações quadráticas da função objetivo e linearizações das restrições e resolve o problema de programação quadrática resultante.

3.2.1.1 Formulação do problema

Para otimizar o coeficiente de arraste (c_d) em função de parâmetros da geometria, é necessário encontrar uma formulação para este em função dos eixos de

uma semi-elipse, na qual as técnicas de otimização serão aplicadas e, assim, obter uma geometria ideal de um pára-quedas. A fórmula empírica (3.48) é utilizada para calcular o coeficiente de arraste de aerofólios [40], ilustrado na figura (3.5), para número de Reynolds de aproximadamente 10^7 :

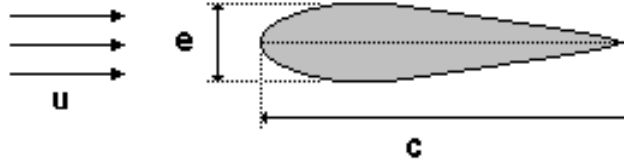


Figura 3.5: Perfil do aerofólio

$$c_d = 2c_f \left[1 + k \left| \frac{e}{c} \right| + 60 \left(\frac{e}{c} \right)^4 \right] \quad (3.48)$$

onde e e c são as dimensões do aerofólio da figura (3.5); c_f é o coeficiente de resistência para uma placa plana, que para $Re \sim 10^7$ é dado por:

$$c_f = \frac{0,072}{Re^{1/5}} \quad (3.49)$$

onde $Re = \frac{ue}{\nu}$ e k é uma função linear da relação e/c , apresentando a seguinte expressão:

$$k = 3,2 - 4 \left| \frac{e}{c} \right| \quad (3.50)$$

Substituindo esses dados na equação (3.48) tem-se:

$$c_d = \frac{0,144\nu^{1/5}}{(ue)^{1/5}} \left[1 + 3,2 \left| \frac{e}{c} \right| - 4 \left(\frac{e}{c} \right)^2 + 60 \left(\frac{e}{c} \right)^4 \right] \quad (3.51)$$

Porém, neste trabalho, busca-se a solução para uma geometria com a forma ilustrada na figura (3.6). Para isso, adaptou-se a fórmula (Eq. 3.48) de modo a obter uma nova expressão que calcule o c_d para geometrias de semi-elípticas, como a de um pára-quedas. Obtém-se, então, a seguinte expressão a partir da equação (3.51):

$$c_d = \frac{0,144\nu^{1/5}}{(ua)^{1/5}} \left[1 + 3,2 \left(\frac{a}{b} \right) - 4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 60 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right] \quad (3.52)$$

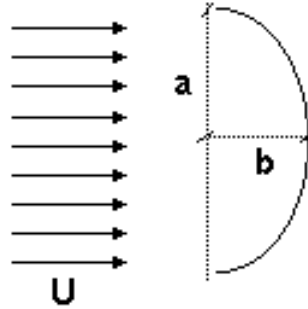


Figura 3.6: Perfil da elipse (pára-quedas)

Verifica-se que quanto maior a dimensão “ a ” menor será a velocidade, pois o arraste será maior. Como

$$F_d = c_d \rho \frac{u^2 A}{2}, \quad (3.53)$$

e A é a área de oposição ao movimento, dada por $A = \pi a^2$, obtém-se:

$$u^2 = \frac{2F_d}{c_d \rho \pi a^2} \quad (3.54)$$

Assume-se, por hipótese, que a força de arraste ideal seja $F_d = 900N$ para suportar um pára-quedista de 70kg e cujo pára-quedas pesa 20kg, considerando que em algum momento da queda esta força é igualada ao peso do sistema. Com isso tem-se a partir da equação (3.52) isolando o c_d :

$$c_d = \left\{ \frac{\nu^2 \rho \pi}{1800} [(1 + 3,2(r) - 4(r)^2 + 60(r)^4)0,144]^{10} \right\}^{1/9} \quad (3.55)$$

onde $r = \frac{a}{b}$.

Deseja-se, então, um coeficiente de arraste de modo a reduzir a velocidade de queda, diminuindo assim o impacto da aterrissagem. Os valores do c_d para pára-quedas variam muito na literatura, geralmente de 0,8 a 2,0. Isto depende de fatores como a área do velame, características de planagem, fluxo de ar em torno do velame, forma do velame, permeabilidade, velocidade de descida, comprimento dos cordoames, etc. Neste trabalho vários destes fatores são desconsiderados; por isso os valores de c_d serão menores (entre 0,8 e 1,0). A geometria tem a forma semi-elipsóide, o que implica em:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou melhor,

$$y = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (3.56)$$

Portanto, tem-se que resolver um problema de maximização para encontrar a forma que produz o máximo arraste. Para isso impõe-se alguns limites à razão r :

- inferior: $r \geq 0,5$;
- superior: $r \leq 1,15$.

Unindo os dados anteriormente informados, pode-se escrever o problema de otimização na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \max_{a,r} c_d \\ & \text{sujeito a: } \begin{cases} h(a, c_d) = 0 \\ 0,5 \leq r \leq 1,15 \\ 3 \leq a \leq 7 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde c_d é a função objetivo dada pela equação (3.55).

Sendo assim, o problema proposto irá maximizar a função objetivo c_d , em relação as variáveis a e r , sujeito às restrições de limites para cada uma das variáveis e a uma restrição de igualdade (h) que garante que a velocidade terminal seja de $\sqrt{30}m/s$, levando em conta a equação (3.54), fazendo $F_d = 900N$ e isolando o coeficiente de arraste tem-se:

$$h(a, c_d) = c_d - \frac{60}{\rho \pi a^2} \quad (3.58)$$

3.2.1.2 Método de solução

Um problema de programação não-linear (PNL) com restrição que procura o máximo de uma função $f(x)$ não-linear de n variáveis reais $x \in X \subseteq \mathfrak{R}^n$ sujeito

a restrições de igualdade ($h(x)$) e desigualdade ($g(x)$) é descrito por:

$$\begin{array}{l} \max f(x) \\ \text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \\ x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{array} \right. \end{array}$$

Existem vários algoritmos para resolução de problemas não-lineares; neste trabalho utilizou-se programação quadrática seqüencial que transforma a função objetivo em sucessivas funções quadráticas e as restrições em sucessivas funções lineares.

A programação quadrática seqüencial - SQP [4], [34], [51] é uma técnica de otimização que resolve as equações de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) ou condições necessárias de primeira ordem. A idéia desta técnica é aproximar-se do método de Newton empregado em problemas sem restrição, com convergência quadrática.

As condições necessárias de primeira ordem de KKT devem ser satisfeitas para que x^* seja um ótimo local de um problema com restrições. Para um PNL com função objetivo e restrições diferenciáveis, estas condições são satisfeitas desde que os gradientes das restrições sejam linearmente independentes, o gradiente da função Lagrangeana seja nulo e a condição de complementaridade seja satisfeita [34]. Em outras palavras tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= \nabla f(x^*) + (\lambda^*)^T \nabla h(x^*) + (\mu^*)^T \nabla g(x^*) = 0 \\ h(x^*) &= 0 \\ g(x^*) &\leq 0 \\ \mu^* g(x^*) &= 0 \\ \mu^* &\geq 0 \end{aligned}$$

onde L é a função Lagrangeana e λ e μ os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. A condição de complementaridade garante que os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade inativas, isto é, $g(\bar{x}) < 0$ quando \bar{x} for um ponto viável, sejam nulos.

O método SQP, a cada iteração, resolve o seguinte problema de programação quadrática:

$$\begin{aligned} & \min_{d \in \mathbb{R}^n} \nabla^T f(x^k)d + \frac{1}{2}d^T H(x^k, \lambda^k, \mu^k)d \\ & \text{sujeito a : } \begin{cases} h(x^k) + \nabla^T h(x^k)d = 0 \\ g(x^k) + \nabla^T g(x^k)d \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

para determinar a melhor direção de busca a partir do ponto (x^k) e então proceder a atualização para o próximo ponto $x^{k+1} = x^k + a_k d^k$. Assim como no método de Newton, apesar do valor ótimo do passo ser $a_k = 1$, valores de $a_k \in (0, 1]$ são determinados para garantir as propriedades de convergência global do método. Este procedimento geralmente é feito com o uso de técnicas de *linesearch* (minimização unidirecional de uma função de mérito) ou pela limitação do problema quadrático indicado na região de confiança (*trust region*). A matriz $H(x^k, \lambda^k, \mu^k)$ é uma aproximação positiva definida da matriz Hessiana da função de Lagrange, que pode ser atualizada por qualquer método da métrica variável (DFP - Davidon-Fletcher-Powell, BFGS - Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, etc.) [34].

Para resolver o problema em questão foi utilizada a função *fmincon* do pacote *optim* do software MATLAB. Para a atualização da matriz Hessiana foi utilizado o método BFGS. O tamanho do passo na direção de busca foi determinado por interpolação cúbica.

Os resultados deste problema empírico serão mostrados no capítulo seguinte. A seguir apresenta-se o método de otimização utilizado para obter a geometria levando e conta os dados do problema de escoamento.

3.2.2 Problema de escoamento

Os vários métodos de otimização podem ser agrupados entre os que não utilizam as derivadas da função objetivo (métodos de busca ou métodos diretos); e os que utilizam (métodos analíticos, métodos de métrica variável ou métodos indiretos) [44]. Para o cálculo de problemas sem restrição, os métodos que utilizam o gradiente

e/ou a hessiana convergem mais rapidamente que os métodos de busca; estes por sua vez não requerem a regularidade e a continuidade da função objetivo.

Como observou-se no primeiro capítulo, grande parte dos pesquisadores que trabalham com otimização de geometrias aerodinâmicas utiliza como método de obtenção de resultados o algoritmo genético [29], [30], [53], que é um método de busca aleatória, menos eficiente que os métodos de busca determinísticos, mas que são preferidos nos casos de problemas multimodais. Este método se baseia no processo evolutivo dos organismos biológicos da natureza [44].

Neste trabalho optou-se por não utilizar o algoritmo genético, pois este efetua muitos cálculos da função objetivo, já que é um método de busca aleatória, o que é inviável para o problema que está sendo resolvido pois isto representa um aumento considerável no tempo computacional. Sendo assim, escolheu-se o método dos “poliedros flexíveis” [33] que é do tipo busca determinística e direta multivariável.

Para falar sobre este método, necessita-se primeiramente comentar sobre o método de busca “simplex” de Spendley, Hext e Himsworth [46], que fornecerá o suporte necessário para a compreensão sobre os poliedros flexíveis. Primeiramente deve-se lembrar que os poliedros regulares em E^n são simples, por exemplo, para duas variáveis um poliedro regular é um triângulo equilátero (Fig. 3.7) [16].

Na busca pelo mínimo de uma função objetivo, x vetores podem ser escolhidos sobre pontos de E^n de forma a localizar os vértices do poliedro. Através da geometria analítica pode-se mostrar que as coordenadas dos vértices de um poliedro regular são designados por uma matriz, na qual as colunas representam as coordenadas dos vértices numeradas de 1 a $n + 1$ e as linhas apresentam coordenadas $i = 1, n$.

A função objetivo é avaliada em cada um dos vértices do poliedro e o pior vértice é determinado (ponto A - Fig. 3.7), que é aquele que possui o maior valor da função objetivo: no caso da minimização. Posteriormente, o pior vértice é descartado e um novo poliedro será formado, através da reflexão (Eq. 3.59),

composto pelos vértices antigos e um novo (ponto B - Fig. 3.7), que é colinear em relação ao centróide do poliedro antigo e vértice descartado.

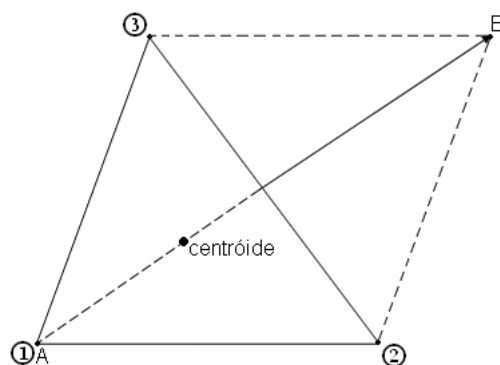


Figura 3.7: Poliedros de duas variáveis

O método “simplex” tornou-se limitado pois, por seus poliedros serem rígidos, permitindo apenas a reflexão dos poliedros anteriores, muitas vezes se tornava inviável chegar ao ótimo da função objetivo. Sendo assim, Nelder e Mead [33] permitiram contornar esse problema com o chamado método dos “poliedros flexíveis”, ilustrado na figura (3.8). Neste método não só a reflexão (Eq. 3.59) poderia ser feita, mas também a expansão (Eq. 3.60), a contração (Eq. 3.61) e a redução (Eq. 3.62) dos poliedros, tornando assim o método mais robusto e eficaz [44].

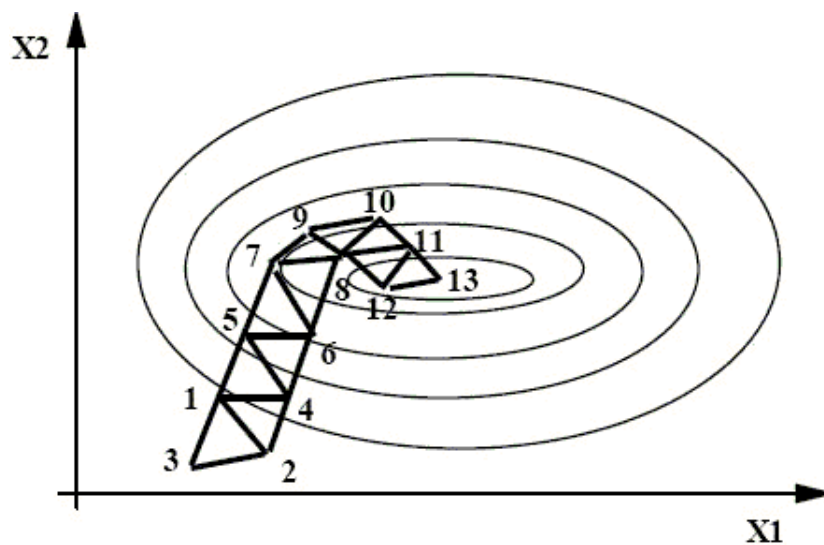


Figura 3.8: Método de poliedros flexíveis

Tem-se na expansão, reflexão, contração e redução que:

Reflexão:

$$\begin{cases} x_R^k = x_0^k + \alpha(x_0^k - x_h^k), & \alpha > 0 \\ \text{onde } S(x_h^k) = \max\{S(x_1^k), \dots, S(x_{n+1}^k)\} \end{cases} \quad (3.59)$$

Expansão:

$$\begin{cases} \text{Se } S(x_R^k) \leq S(x_\ell^k) = \min\{S(x_1^k), \dots, S(x_{n+1}^k)\}, \\ \text{então } x_E^k = x_0^k + \gamma(x_R^k - x_0^k), & \gamma > 1 \\ \text{Se } S(x_E^k) < S(x_R^k), \\ \text{então } x_h^{k+1} = x_E^k \\ \text{senão } x_h^{k+1} = x_R^k \\ k = k + 1 \end{cases} \quad (3.60)$$

Contração:

$$\begin{cases} \text{Se } S(x_R^k) > S(x_i^k) \quad \forall i \neq h, \\ \text{então } x_C^k = x_0^k + \beta(x_h^k - x_0^k) \\ x_h^{k+1} = x_C^k, & 0 < \beta < 1 \\ k = k + 1 \end{cases} \quad (3.61)$$

Redução:

$$\begin{cases} \text{Se } S(x_R^k) > S(x_h^k) \\ \text{então } x_i^{k+1} = x_\ell^k + \frac{1}{2}(x_i^k - x_\ell^k) \\ i = 1, 2, \dots, n + 1 \\ k = k + 1 \end{cases} \quad (3.62)$$

Para o método de Nelder e Mead [33], as coordenadas do centróide são dadas por:

$$x_{0,j} = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_{i,j} \right) - x_{h,j} \right] \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.63)$$

onde $x_{h,j}$ é o pior vértice.

O critério para terminar a busca é dado por [16]:

$$\max_{i \in \{1, n+1\}} \|x_i^k - x_0^k\| \leq \varepsilon_{x,rel} \|x_0^k\| + \varepsilon_{x,abs}$$

e

$$\max_{i \in \{1, n+1\}} |S(x_i^k) - S(x_0^k)| \leq \varepsilon_{S,rel} |S(x_0^k)| + \varepsilon_{S,abs}$$

onde $\varepsilon_{x,rel}$, $\varepsilon_{x,abs}$, $\varepsilon_{S,rel}$ e $\varepsilon_{S,abs}$ são as tolerâncias relativas e absolutas para as variáveis e para a função objetivo.

Uma vez apresentado o procedimento de solução das equações governantes, segue-se para a obtenção e apresentação dos resultados obtidos através do código computacional.

4 RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se os resultados analíticos obtidos da modelagem de um salto de um pára-quedas, que fornece informações sobre o fenômeno físico, tais como as velocidades, a desaceleração, tempo de queda, etc. Apresenta-se também os resultados do processo de otimização que maximiza o coeficiente de arraste através de uma fórmula semi-empírica e os resultados da simulação numérica, que fornecem uma comparação do coeficiente de arraste calculado com os encontrados na literatura.

4.1 Solução Analítica

Esta etapa do trabalho busca modelar o problema, que é simular a queda de um pára-quedista de uma altura de 3000m, assumindo-se que a resistência do ar em queda livre é de aproximadamente $\frac{Pv^2}{2400}$ e que após a abertura do pára-quedas essa resistência sobe para $\frac{Pv^2}{30}$ [7], onde P é o peso total do sistema.

No primeiro segundo, o pára-quedista cai praticamente em queda livre, sem resistência do ar, o que implica em

$$v = v_0 + gt$$

Após, a força corresponde ao peso do conjunto subtraído da resistência do ar. Desta forma, da aplicação da segunda Lei de Newton, resulta

$$m \frac{dv}{dt} = P - \frac{Pv^2}{2400}$$

mas como $P = mg$, tem-se

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{gv^2}{2400}$$

Para $g = 10m/s^2$ obtém-se

$$\frac{dv}{v^2 - 2400} = -\frac{dt}{240}$$

e integrando de $t = 0$ a t e de $v = 0$ a v resulta:

$$v = \frac{\sqrt{2400}(1 - e^{-0,408t})}{(1 + e^{-0,408t})}$$

o que implica que quando $t \rightarrow \infty$ tem-se $v = \sqrt{2400} \simeq 50m/s \simeq 180km/h$.

Após a abertura do pára-quedas a força corresponde a:

$$m \frac{dv}{dt} = P - \frac{Pv^2}{30}$$

Para $P = mg$ e $g = 10m/s^2$, e integrando de $t = 0$ a t e de $v = 50$ a v , tem-se

$$v = \frac{\sqrt{30}(1 + 0,8e^{-3,7t})}{(1 - 0,8e^{-3,7t})}$$

quando $t \rightarrow \infty$ tem-se $v = \sqrt{30} \simeq 5,5m/s \simeq 20 km/h$.

Para encontrar as equações da aceleração e deslocamento basta derivar e integrar v em relação a t , respectivamente. Dessas informações resultam os gráficos ilustrados na figura (4.1), levando em conta que o pára-quedas será aberto após 36 segundos de queda, a uma altura de aproximadamente 1800m.

Verifica-se, através do gráfico (4.1b), que a velocidade vai de 0m/s a 50m/s em aproximadamente 15 segundos, e após a abertura do pára-quedas a velocidade cai para $\sqrt{30}m/s$ em apenas 1,5s. No caso da aceleração (Fig. 4.1c), que nos primeiros 1,5s é constante, cai para 0m/s² em aproximadamente 16s. Após a abertura do pára-quedas tem-se uma desaceleração de 30m/s² e em 2,5s atinge-se 0m/s². Verifica-se também, no primeiro gráfico, que o tempo total de queda é de aproximadamente 262s (4,4 minutos).

Para avaliar a força de arraste escreve-se

$$F_d = c_d \rho \frac{v^2}{2} A = P \frac{v^2}{30}$$

para $c_d = 0,9$, $\rho_{ar} = 1,23kg/m^3$ e $A = \pi a^2$. Como a resistência do ar é $\frac{Pv^2}{30}$ tem-se que para $v = \sqrt{30}m/s$ a resistência é proporcional ao peso do sistema. Supondo que o peso do pára-quedas seja de 20kg e do pára-quedista de 70kg, tem-se:

$$P = mg \Rightarrow P = 900N$$

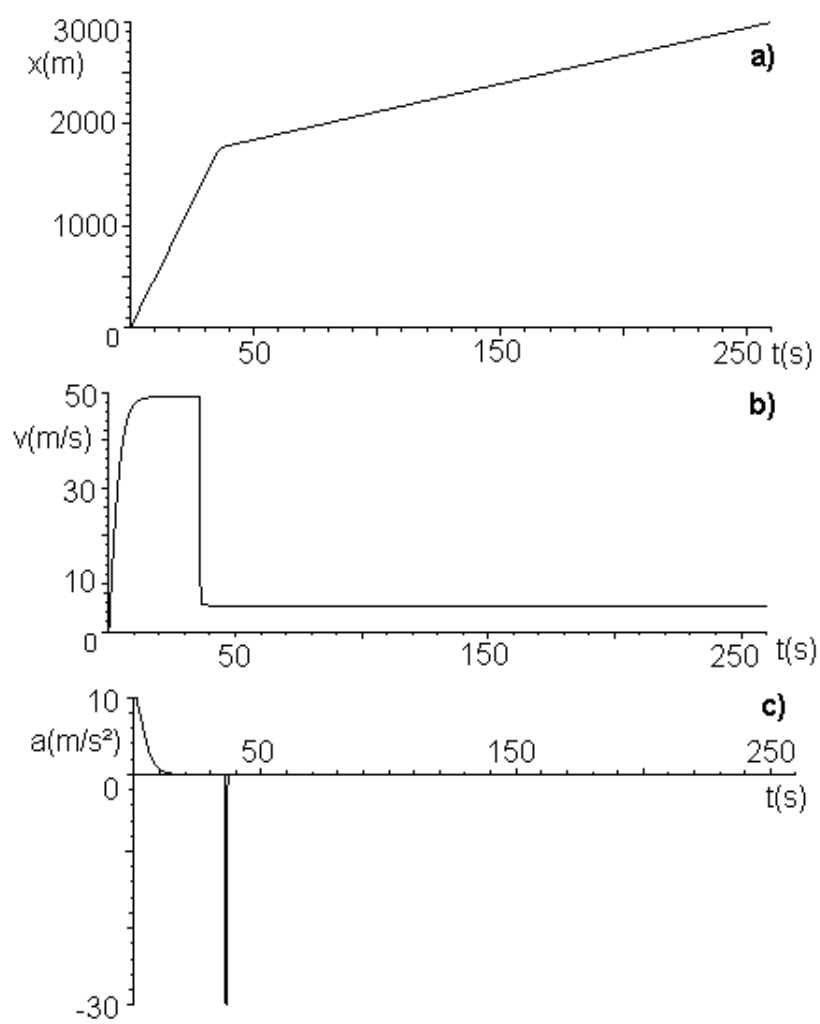


Figura 4.1: Resultados analíticos para um salto com pára-quadras convencional:
a) Deslocamento, b) Velocidade e c) Aceleração

Então,

$$P \frac{v^2}{30} = 900 = (0, 9) \cdot (1, 23) \frac{(\sqrt{30})^2}{2} A$$

Assim, para a área resulta

$$A = 54, 2m^2$$

e $a = 4, 15$.

A seguir apresentam-se os resultados numéricos do código de dinâmica de fluidos e os resultados da otimização da geometria do pára-quedas.

4.2 Resultados Numéricos

Esta seção mostra os resultados obtidos através da simulação numérica do escoamento bidimensional sobre a geometria do pára-quedas, para diversos números de Reynolds, conforme procedimentos citados no capítulo anterior. As visualizações dos perfis de velocidade são feitas através do software Visual 3D [19].

Embora a turbulência seja um fenômeno intrinsecamente tridimensional, estruturas bidimensionais ainda são objetos de estudo de muitas pesquisas científicas. Quando se assume escoamentos bidimensionais perde-se informações a respeito do alongamento (stretching) dos vórtices, mas conserva-se a característica de imprevisibilidade da turbulência [25].

Devido à complexidade do fluxo para Reynolds elevados, as simulações aqui apresentadas restringem-se a faixa de Reynolds 10 – 2000, o que já permite começar a entender a dificuldade deste problema físico.

Todos os resultados foram obtidos para uma malha cartesiana, contendo 113×224 células, utilizando um refino horizontal e vertical, conforme mostra a Fig. (4.2). Um estudo do refino da malha, usando malhas mais grossas, foi realizado procurando aliar favoravelmente a qualidade do resultado e o esforço computacional necessário.

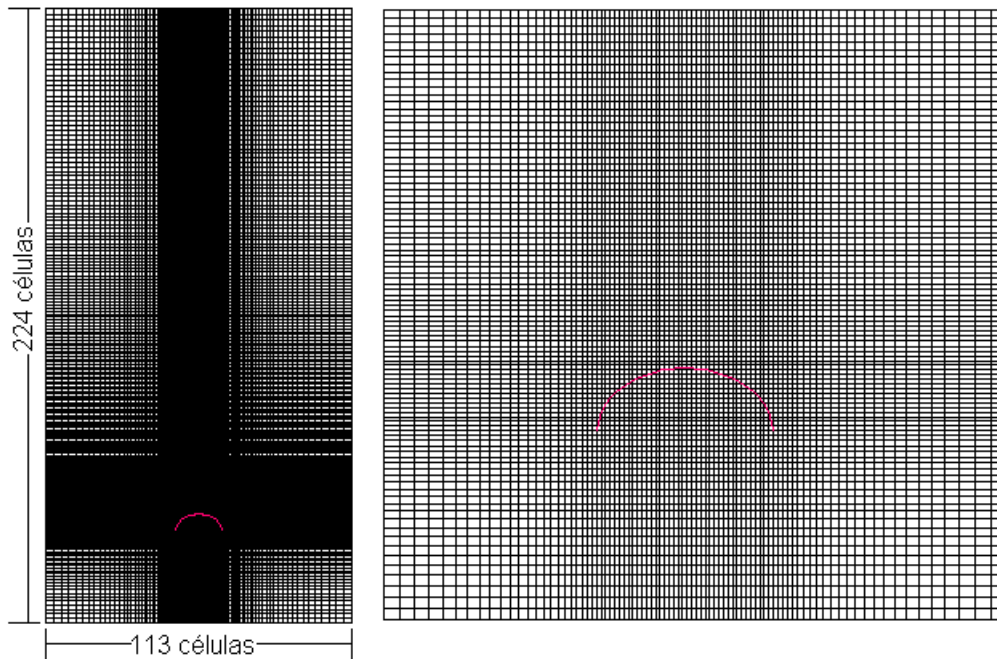


Figura 4.2: Malha computacional de 113×224 células com ampliação

A figura (4.3) mostra o perfil de velocidade para número de Reynolds igual a 10 onde observa-se a formação de vórtices simétricos sob a geometria do pára-quedas e a formação de uma pequena esteira. Em todas as figuras que seguem mostra-se o campo global e uma ampliação junto ao perfil representando o pára-quedas. Para $Re = 50$ (Fig. 4.4), observa-se um estreitamento dos vórtices e uma contração da esteira à jusante do pára-quedas. Observa-se que para $Re = 100$ (Fig. 4.5) os vórtices antes da geometria tornam-se menores; em contrapartida, o estreitamento da esteira posterior a geometria torna-se mais acentuado.

Para número de Reynolds igual a 500 (Fig. 4.6) percebe-se um “achatamento” dos vórtices sob o pára-quedas. Este perfil se mantém quando se eleva o Reynolds para 1000 (Fig. 4.7), sendo que neste último observa-se uma nova formação de vórtices posterior à geometria. Estes vórtices são melhor visualizados para $Re = 2000$ (Fig. 4.8) onde se observa seu desenvolvimento, juntamente com o estreitamento da esteira.

Os valores do coeficiente de arraste encontrados para os valores de Reynolds utilizados são mostrados na figura (4.9). Obteve-se, com o modelo pro-

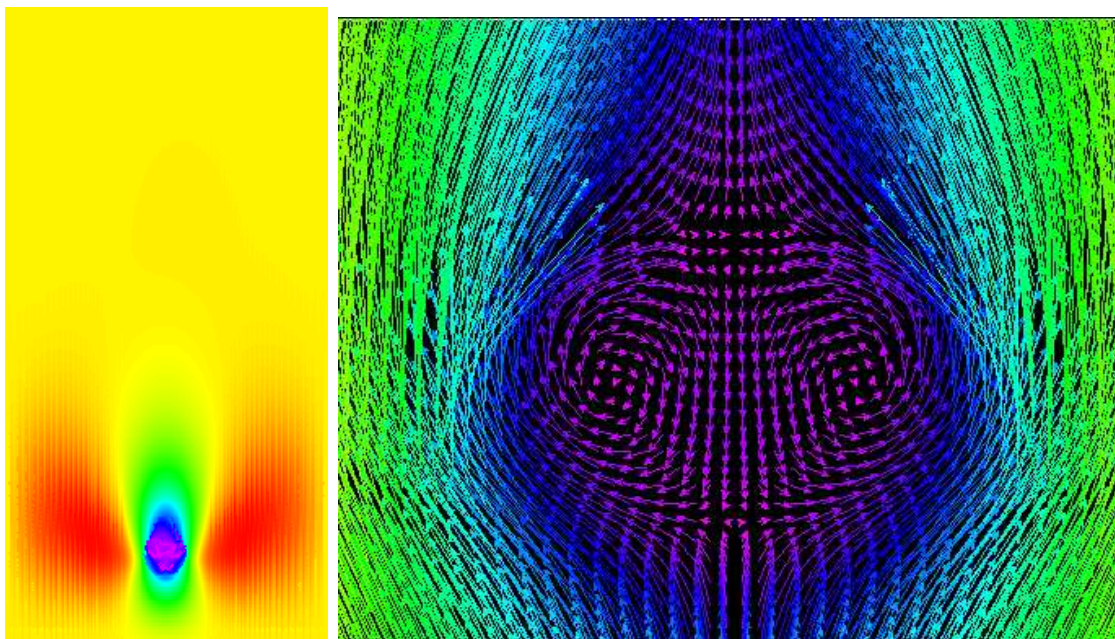


Figura 4.3: Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 10$

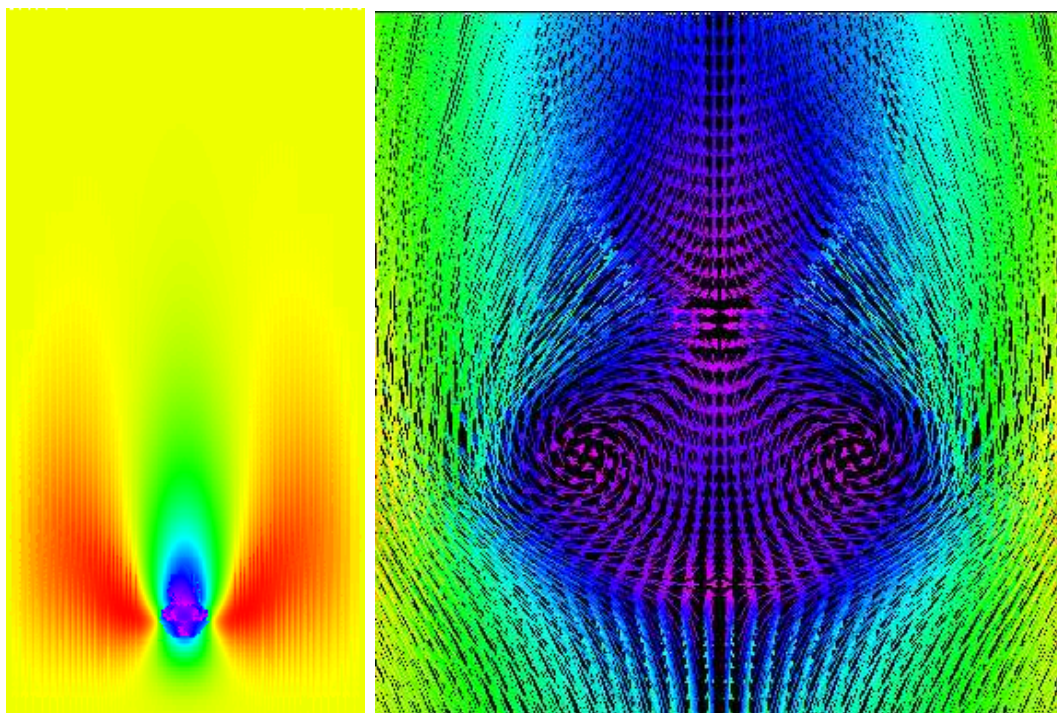


Figura 4.4: Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 50$

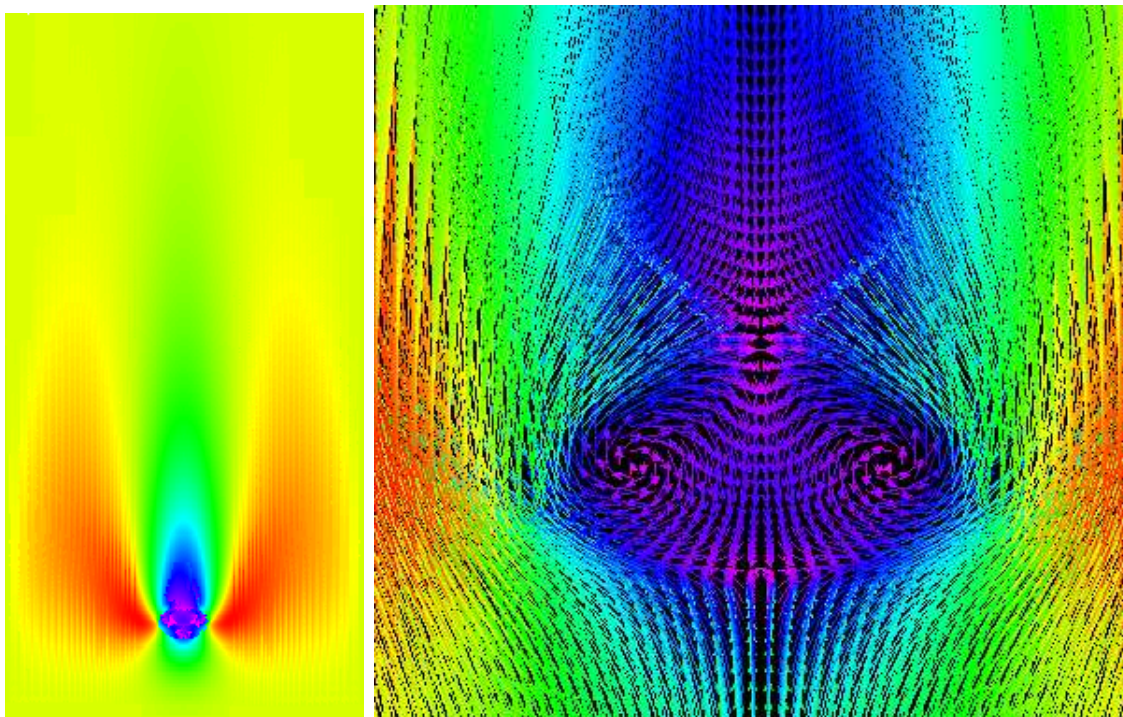


Figura 4.5: Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 100$

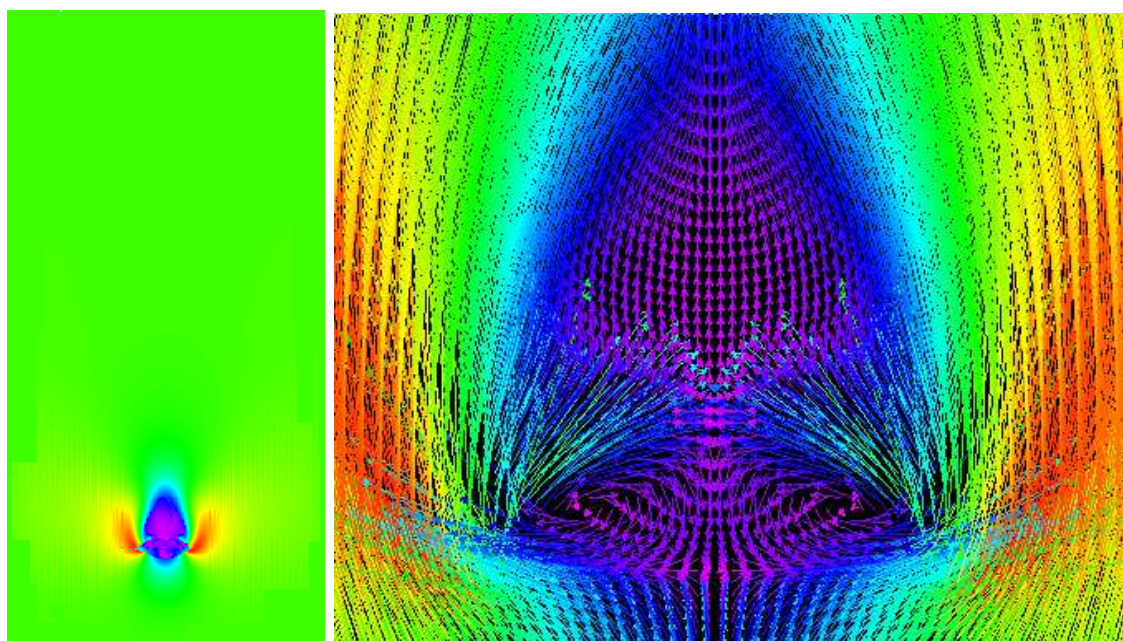


Figura 4.6: Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 500$

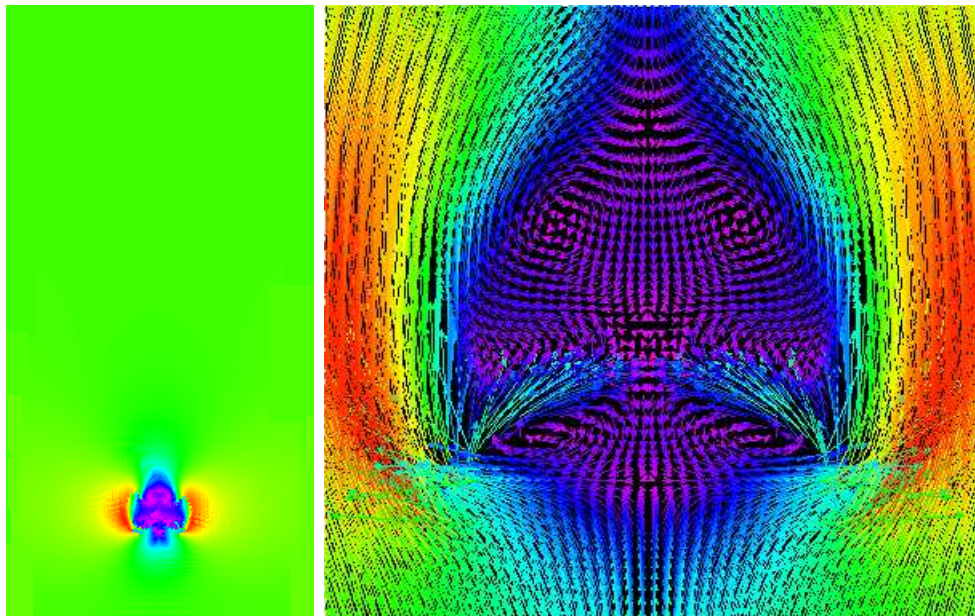


Figura 4.7: Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 1000$

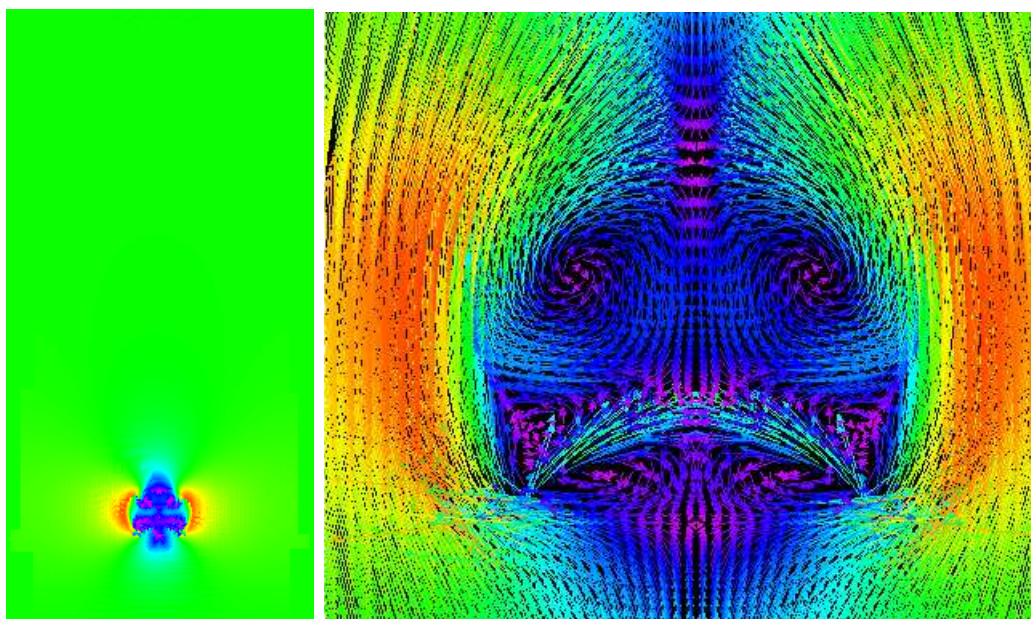


Figura 4.8: Campo de velocidade sobre o perfil para $Re = 2000$

posto, valores um pouco abaixo dos encontrados na bibliografia; este problema deverá ser contornado com o processo de otimização, que buscará maximizá-los.

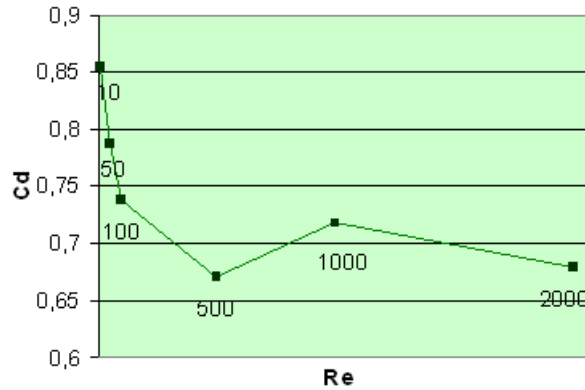


Figura 4.9: Valores do coeficiente de arraste para os diversos números de Reynolds

Nota-se uma queda no valor do c_d de Reynolds 100 para Reynolds 500, este valor volta a crescer para Reynolds igual a 1000. Isto se dá pela mudança do comportamento da esteira entre $Re = 500$ e 1000, o que causa uma mudança nos valores dos coeficientes de arraste e de pressão.

Como indicação do critério de convergência adotado neste trabalho, mostra-se a seguir os gráficos (Figs. 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15) contendo o comportamento dos erros para os valores de Reynolds analisados. Observa-se o amortecimento da oscilação do erro com o aumento das iterações, o que indica uma boa convergência do código computacional.

Verifica-se que com o aumento do Reynolds a convergência é dificultada mesmo porque o fluxo sobre a geometria analisada torna-se mais complexo.

Com base nos resultados numéricos do escoamento aqui obtidos apresenta-se, a seguir, os resultados da otimização do pára-quadras usando a técnica de poliedros flexíveis citada no capítulo anterior.

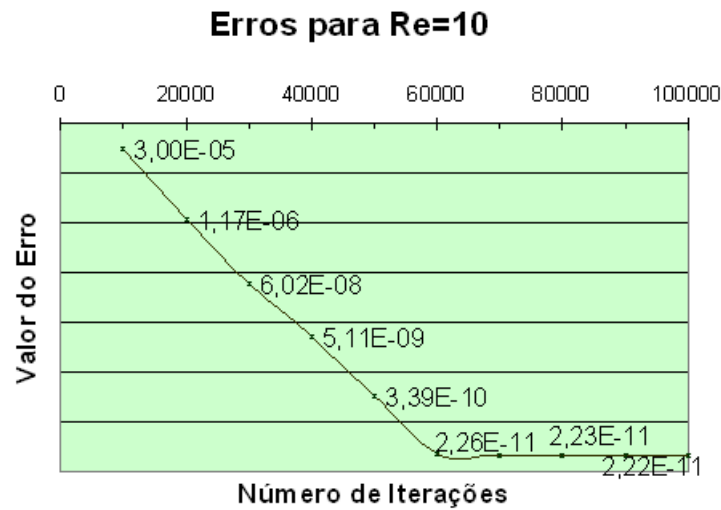


Figura 4.10: Valores do erro \times número de iterações para $Re=10$

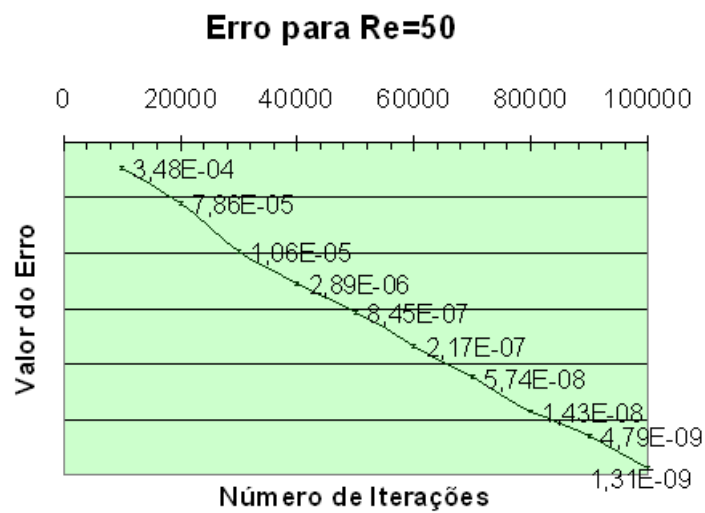


Figura 4.11: Valores do erro \times número de iterações para $Re=50$

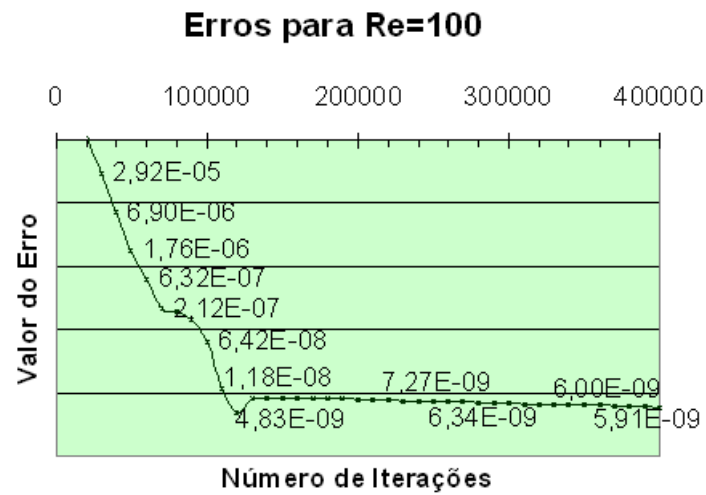


Figura 4.12: Valores do erro \times número de iterações para Re=100

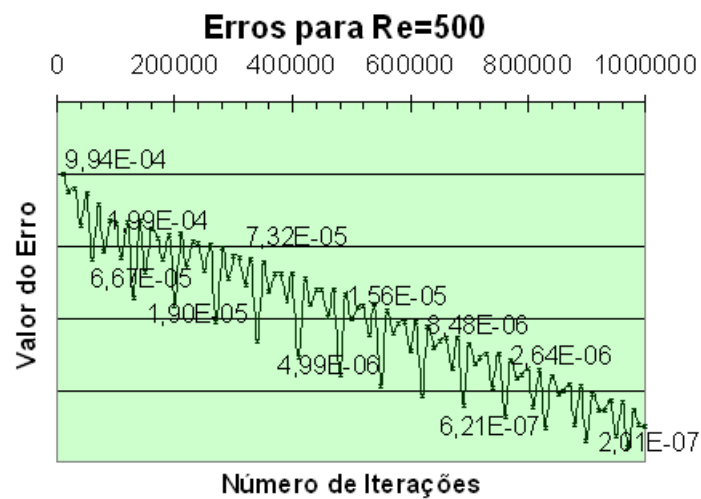


Figura 4.13: Valores do erro \times número de iterações para Re=500

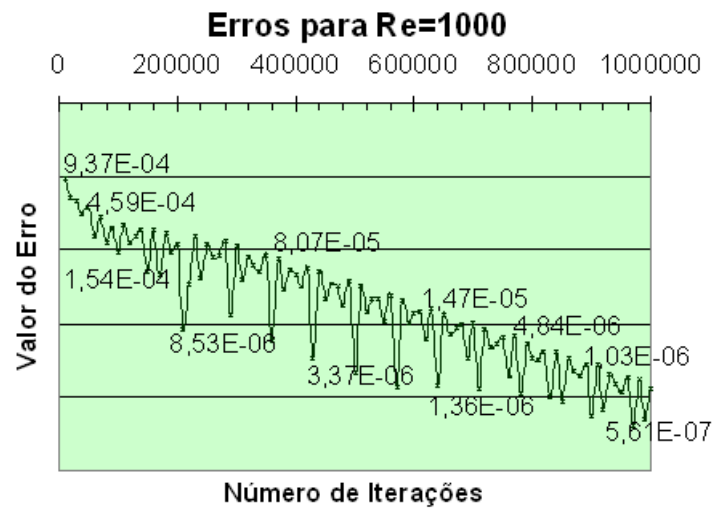


Figura 4.14: Valores do erro \times número de iterações para Re=1000



Figura 4.15: Valores do erro \times número de iterações para Re=2000

4.3 Resultados da Otimização

Nesta seção apresentam-se os resultados da otimização do problema proposto. Primeiramente descreve-se os resultados do problema empírico e posteriormente os resultados da otimização do pára-quedas a partir dos resultados do escoamento.

4.3.1 Resultados do Problema Empírico

A figura (4.16) mostra as superfícies da função objetivo (Eq. 3.55) e da restrição de igualdade (Eq. 3.58) calculadas para uma malha uniforme. A intersecção entre essas duas curvas permite visualizar as soluções viáveis do problema de otimização. Na figura (4.17) ilustram-se as curvas de nível da função objetivo e a curva da restrição de igualdade. Observa-se, mais uma vez, a intersecção entre a função objetivo e a restrição h ; como o problema tem por objetivo maximizar o c_d , e os valores deste aumentam de baixo para cima, pode-se observar de forma direta qual será a solução ótima.

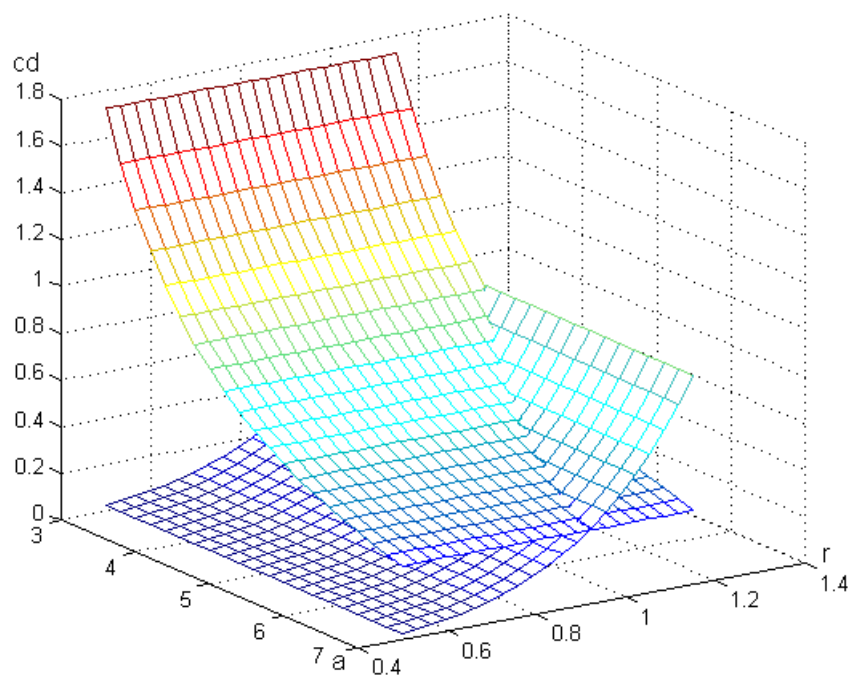


Figura 4.16: Gráfico das restrições no domínio

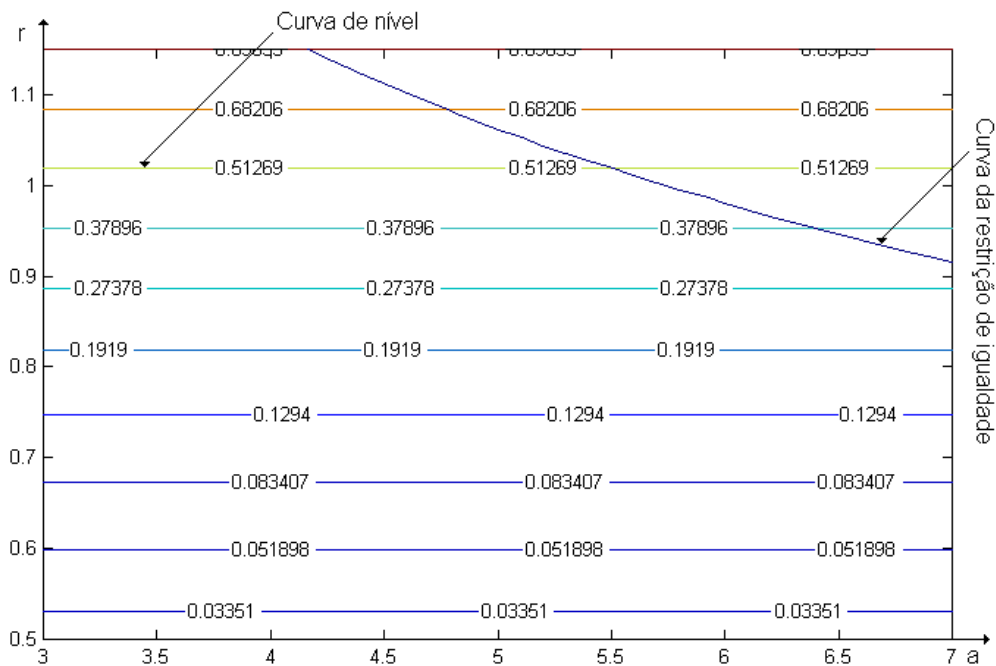


Figura 4.17: Curvas de nível da função objetivo

Considerando o problema de otimização dado pela equação (3.57), os valores encontrados pelo método SQP foram:

$$a^* = 4,1616$$

$$r^* = 1,15$$

$$c_d^* = 0,8965$$

Tomando como ponto de partida $a = 5$ e $r = 0,9$, o caminho da solução obtido é ilustrado na figura (4.18), observa-se que o ponto ótimo coincide com a intersecção entre a restrição de igualdade e a curva de nível de maior valor da função objetivo. De acordo com a formulação do problema, este valor de c_d corresponde a velocidade terminal de $\sqrt{30}m/s$, o que representa, pela fórmula (Eq. 4.1), um impacto comparado a saltar de um muro de 1,5 metros.

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad (4.1)$$

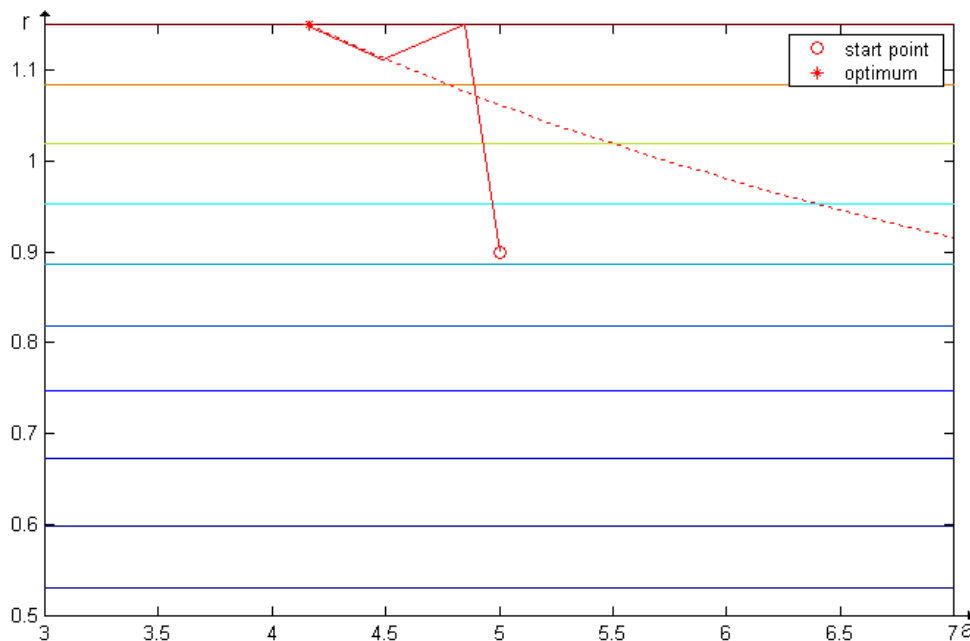


Figura 4.18: Caminho da solução do problema de otimização pelo algoritmo SQP

A forma semi-elíptica encontrada com este coeficiente de arraste tem a razão $r = a/b = 1,15$, e pode ser observada na figura (4.19).

O resultado obtido para o coeficiente de arraste está dentro da faixa desejada, pois na literatura o valor do c_d de um pára-quedas varia entre 0,8 e 1,0 [52]. Na prática, devido as características da planagem, as oscilações provocadas pelo fluxo em torno do velame, a sua permeabilidade (porosidade), o comprimento cordoame, etc, podem tornar o coeficiente de arraste real ($\sim 1,7$) bem maior que o obtido em túnel de vento (da ordem de 1,0). Observe que estes fatores não foram levados em conta na simulação.

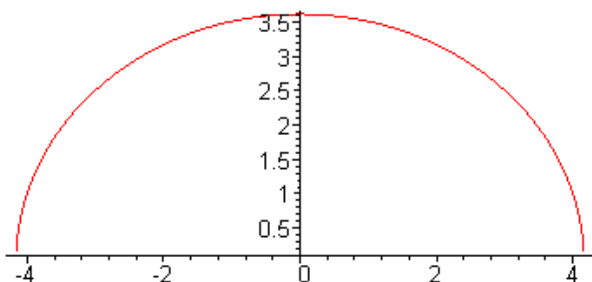


Figura 4.19: Geometria ótima

Como a relação entre c_d e r é diretamente proporcional, quanto maior a relação entre os eixos, maior será a função objetivo; sendo assim, considerando um problema de maximização, os métodos tendem à restrição $r = 1,15$.

Os resultados concordam com os valores encontrados na bibliografia, e serão utilizados para fins de comparação com aqueles a serem obtidos através da otimização da geometria do pára-quedas do problema numérico, do qual se trata a seguir.

4.3.2 Resultados do Problema de Escoamento

Após visualizados e analisados os perfis de velocidade para os diversos números de Reynolds e encontrados os valores dos coeficientes de arraste para cada um deles, resultantes do código computacional de dinâmica de fluidos, resolve-se o problema de otimização com o objetivo de maximizar o c_d , modificando assim os parâmetros da geometria do pára-quedas. Para isso adota-se como estimativas iniciais $a = 4$ e $r = b/a = 0,707$.

Observa-se, na figura (4.20), os resultados da otimização para $Re = 10$; no campo de velocidade não se observa mudança em relação ao encontrado no código de dinâmica de fluidos. O gráfico (Fig. 4.21) mostra os valores do coeficiente de arraste a cada estágio da otimização; observou-se um pequeno aumento em relação ao calculado anteriormente.

Para Reynolds igual a 10 os valores finais dos parâmetros da geometria apresentaram pouca alteração, ficando da seguinte forma: $a = 4,45$ e $r = 0,708$, representando um acréscimo em ambos parâmetros, o que não modifica significativamente a geometria.

O número de estágios de uma otimização de busca pode variar bastante, dependendo da estimativa inicial e do problema. No caso do algoritmo utilizado neste trabalho, dos poliedros flexíveis, varia ainda com o tamanho do passo e dos processos de reflexão, contração, expansão e redução, citados anteriormente. Cada

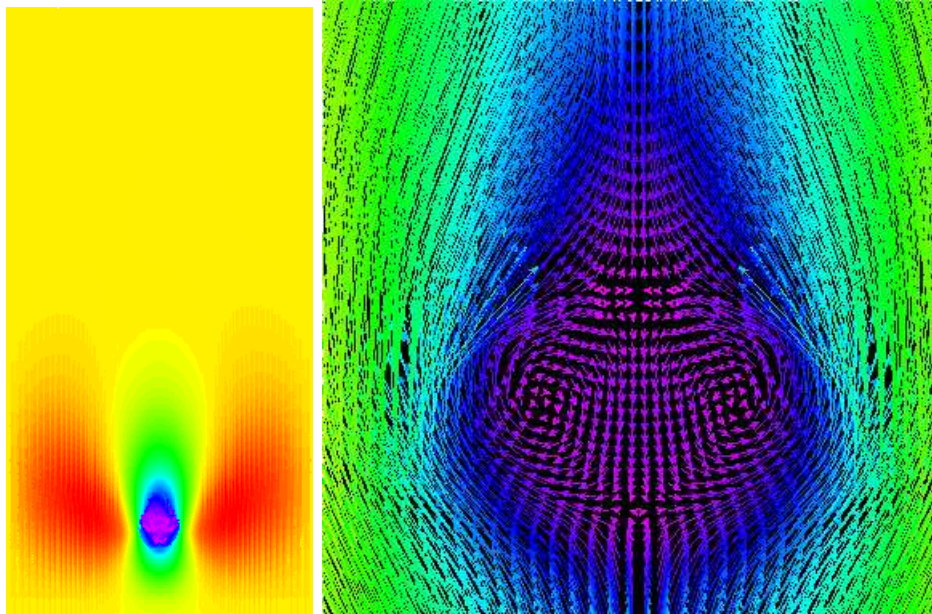


Figura 4.20: Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 10$

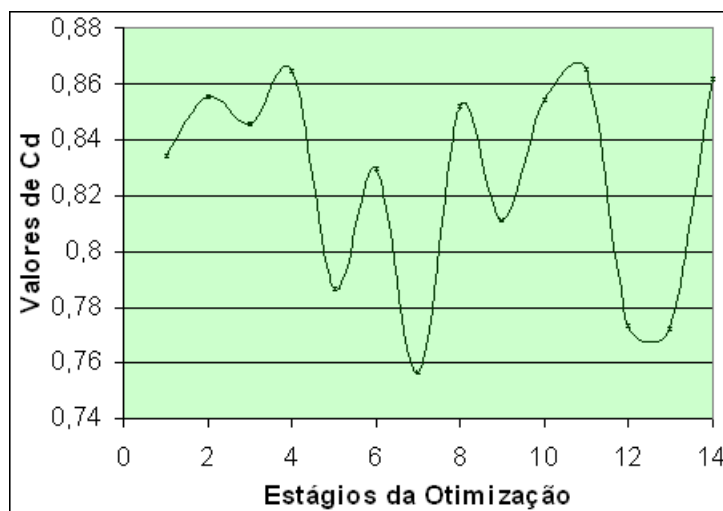


Figura 4.21: Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 10$

estágio corresponde a um novo vértice calculado, e as três primeiras avaliações da função objetivo correspondem aos vértices para formar o poliedro inicial.

Para $Re = 50$ obteve-se como resultado da otimização $a = 4,28$ e $r = 0,706$. Isto corresponde a um pequeno acréscimo no tamanho do raio e uma redução não muito significativa na razão entre o raio e a altura do pára-quadras. Observa-se essas alterações no campo de velocidade (Fig. 4.22), onde há um pequeno “alargamento” dos vórtices indicando o aumento da geometria.

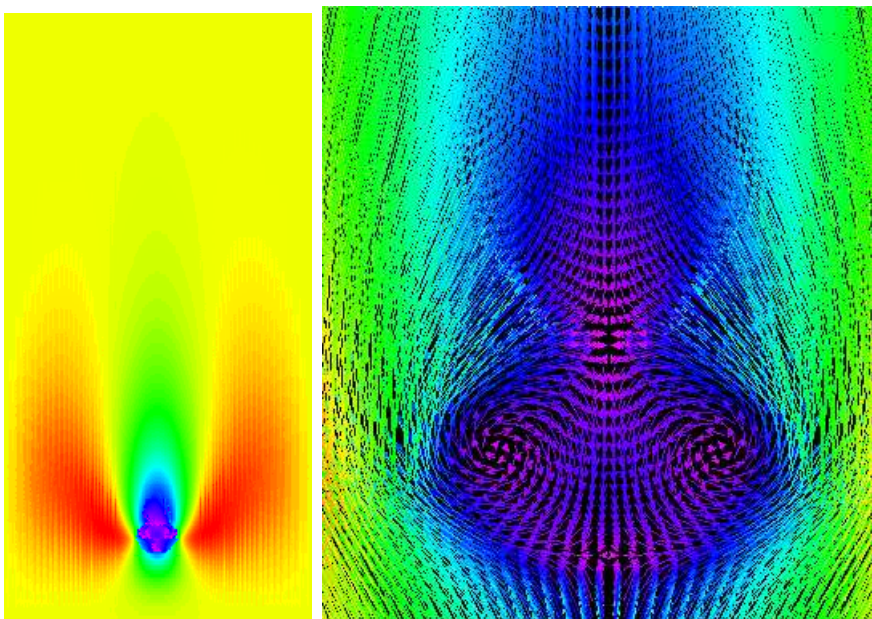


Figura 4.22: Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 50$

Através do gráfico da figura (4.23) verifica-se os valores do c_d para as etapas do método de otimização adotado. Nota-se que o valor anteriormente calculado como 0,78 teve um pequeno acréscimo após a otimização do código do escoamento, passando a ser 0,81. Pode-se observar no gráfico que no segundo estágio da otimização um valor entre 0,81 e 0,82 foi encontrado, sendo assim, maior que o ótimo final; isto certamente indica uma solução inviável, ou seja, uma das restrições foi violada, inutilizando a solução.

Observa-se, também, uma grande semelhança no campo de velocidade do resultado do CFD e da otimização para $Re = 100$, como se pode visualizar na figura (4.24). Para este número de Reynolds obteve-se os seguintes resultados para

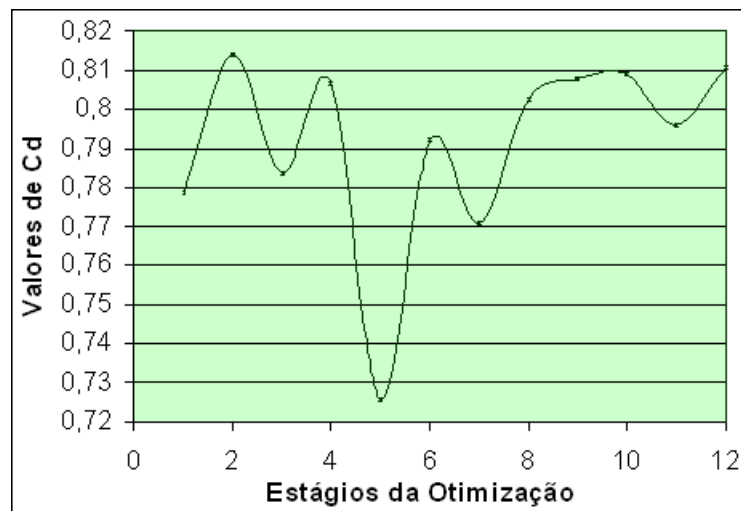


Figura 4.23: Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 50$

os parâmetros da geometria $a = 4,28$ e $r = 0,706$, resultados estes que coincidem com os anteriores encontrados para $Re = 50$. No gráfico (Fig. 4.25) nota-se um pequeno acréscimo do coeficiente de arraste de 0,72 para 0,76.

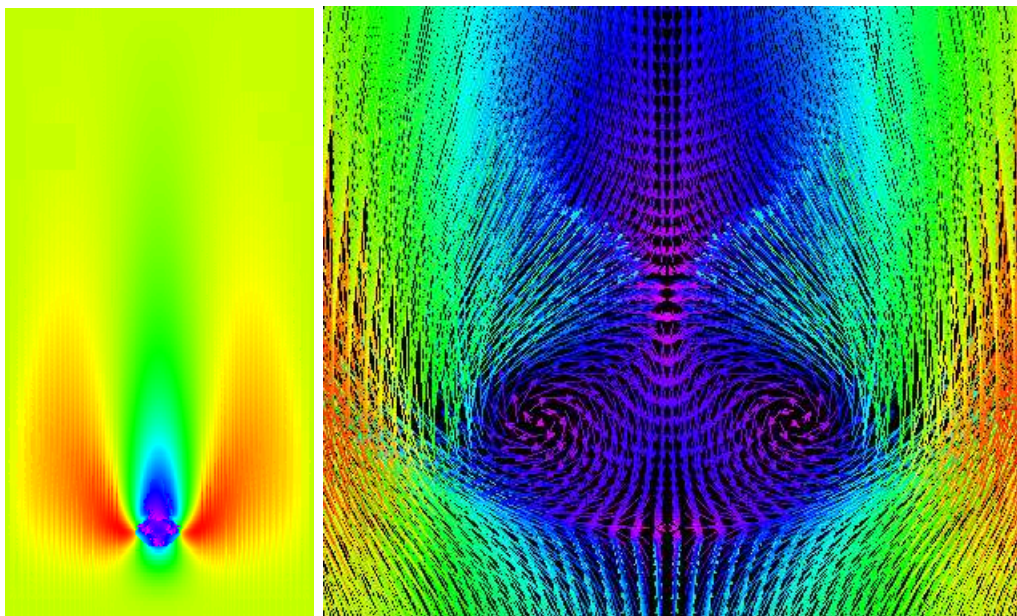


Figura 4.24: Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 100$

Através da figura (4.26) verifica-se o perfil de velocidade conseguido através do processo de otimização para $Re = 500$. Os valores do raio do pára-

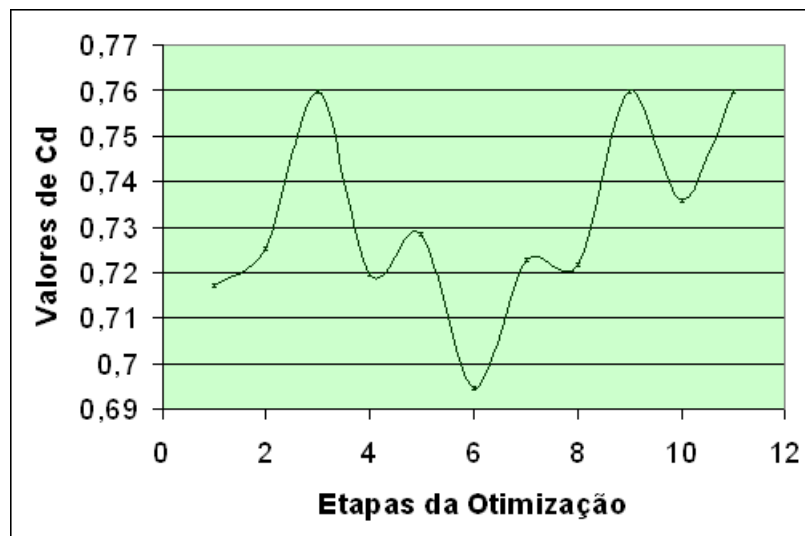


Figura 4.25: Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 100$

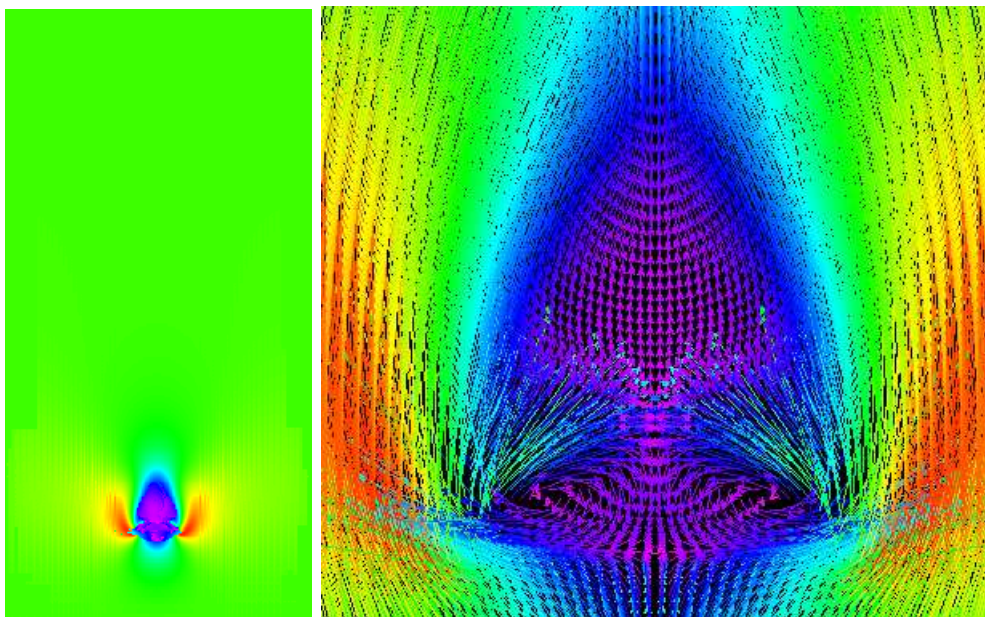


Figura 4.26: Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 500$

quedas e da razão encontrados foram os mesmos resultados obtidos para os números de Reynolds iguais a 50 e 100; com isso observa-se uma certa tendência à uma geometria ótima para os vários valores de Reynolds. O gráfico (Fig. 4.27) mostra um acréscimo considerável no valor do coeficiente de arraste de 0,67 para 0,76.

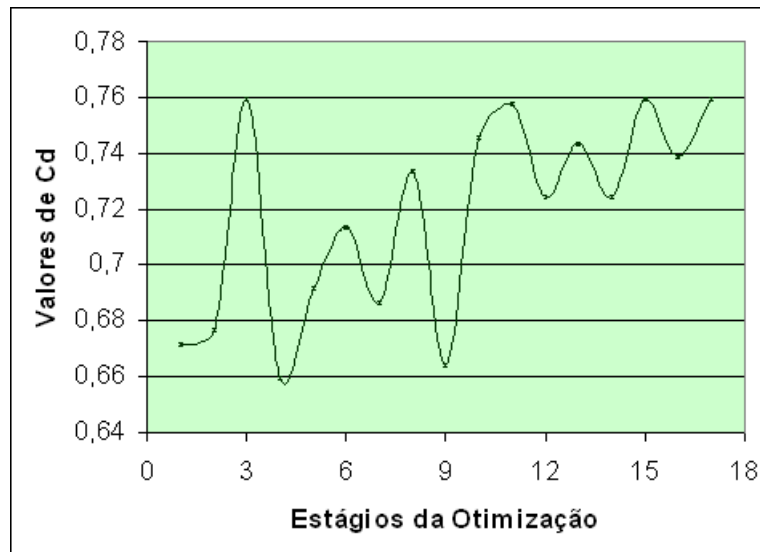


Figura 4.27: Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 500$

Observa-se, na figura (4.28), os resultados da otimização para $Re = 1000$ e, posteriormente, o gráfico com os valores do coeficiente de arraste para cada estágio da otimização (4.29). O perfil de velocidade manteve-se muito próximo do encontrado no código de dinâmica de fluidos, como observou-se para os outros números de Reynolds. Os valores dos parâmetros do pára-quadras obtidos mantiveram-se iguais aos encontrados anteriormente $a = 4,28$ e $r = 0,706$; e o valor do coeficiente de arraste teve um aumento de $0,72$ para $0,83$.

Para $Re = 2000$, obteve-se como resultado da otimização $a = 4,6$ e $r = 0,702$; observa-se que o valor do raio aumentou bastante em relação a estimativa inicial e, conseqüentemente, houve uma redução no valor da razão. Sendo assim, observa-se no perfil de velocidade (Fig. 4.30) uma suavização dos vetores próximos à geometria, indicando um leve aumento no tamanho do raio do pára-quadras. O valor do coeficiente de arraste teve um acréscimo considerável, subindo de $0,67$ para aproximadamente $0,85$, como se observa no gráfico (Fig. 4.31).

A título de ilustração do método de otimização dos poliedros flexíveis, no gráfico da figura (4.32) observa-se os poliedros (triângulos) formados nos estágios do processo de otimização, para número de Reynolds igual a 2000 , desde o ponto

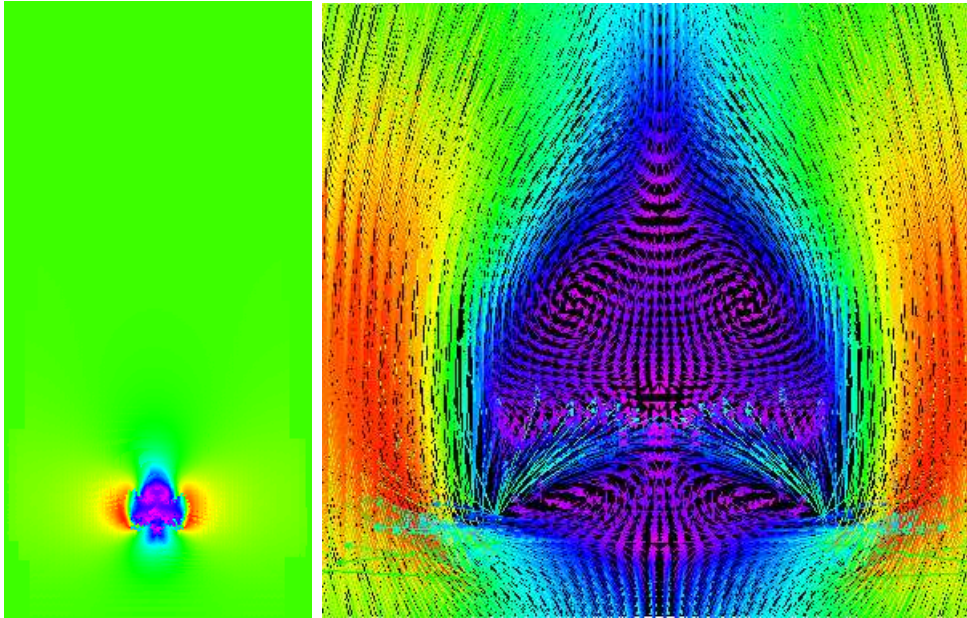


Figura 4.28: Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 1000$

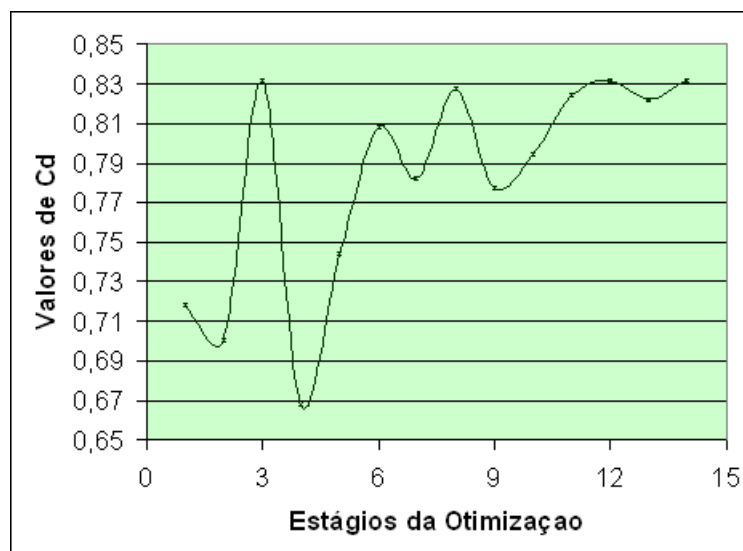


Figura 4.29: Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 1000$

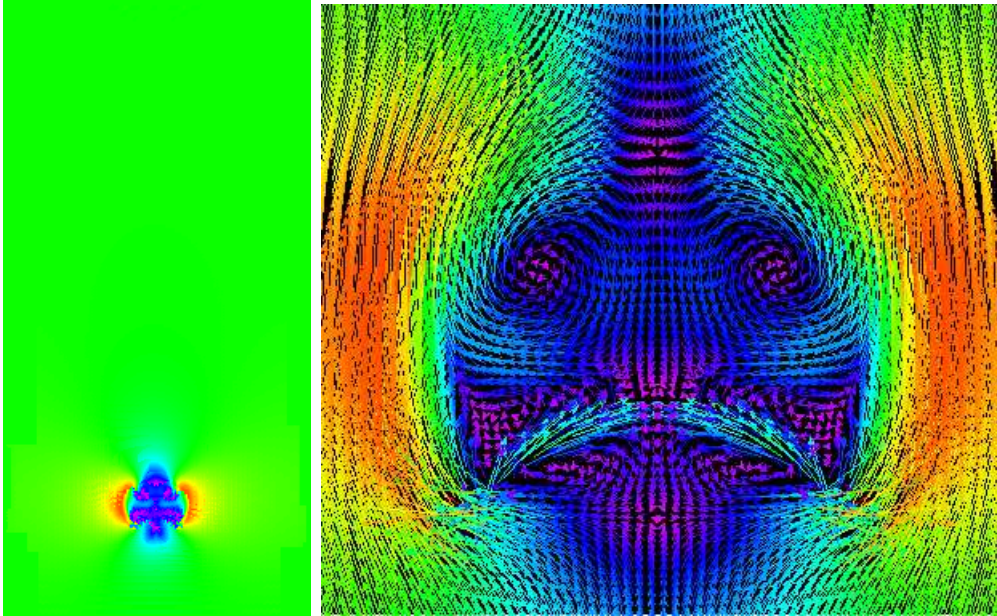


Figura 4.30: Campo de velocidade resultante da otimização para $Re = 2000$

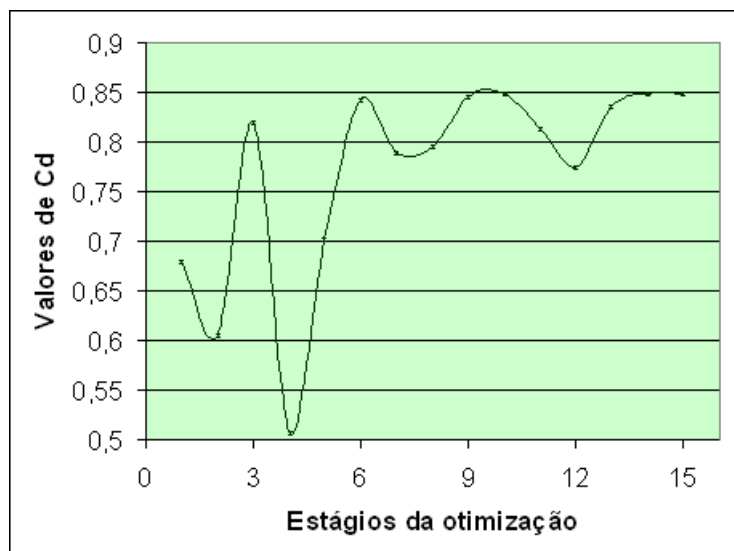


Figura 4.31: Valores do coeficiente de arraste calculados pelo método de otimização para $Re = 2000$

inicial até o ponto ótimo encontrado. No eixo horizontal tem-se o valor do raio do pára-quedas e no eixo vertical o valor da razão entre a altura e o raio do equipamento.

O ponto de partida se dá em $a = 4$ e $r = 0,707$, que resulta num c_d de $0,680$, este ponto é o centróide do primeiro poliedro formado; e a partir deste são formados os demais poliedros, sempre descartando o vértice que possui o menor valor da função objetivo - o coeficiente de arraste. O primeiro triângulo formado tem os seguintes vértices: $0,507$, $0,606$ e $0,820$, como o primeiro vértice citado é o menor, ele é descartado, e um novo triângulo é formado pelos dois últimos vértices e um novo ($0,701$) e assim sucessivamente. É fácil de identificar no gráfico as propriedades de reflexão (Eq. 3.59), expansão (Eq. 3.60), contração (Eq. 3.61) e redução (Eq. 3.62).

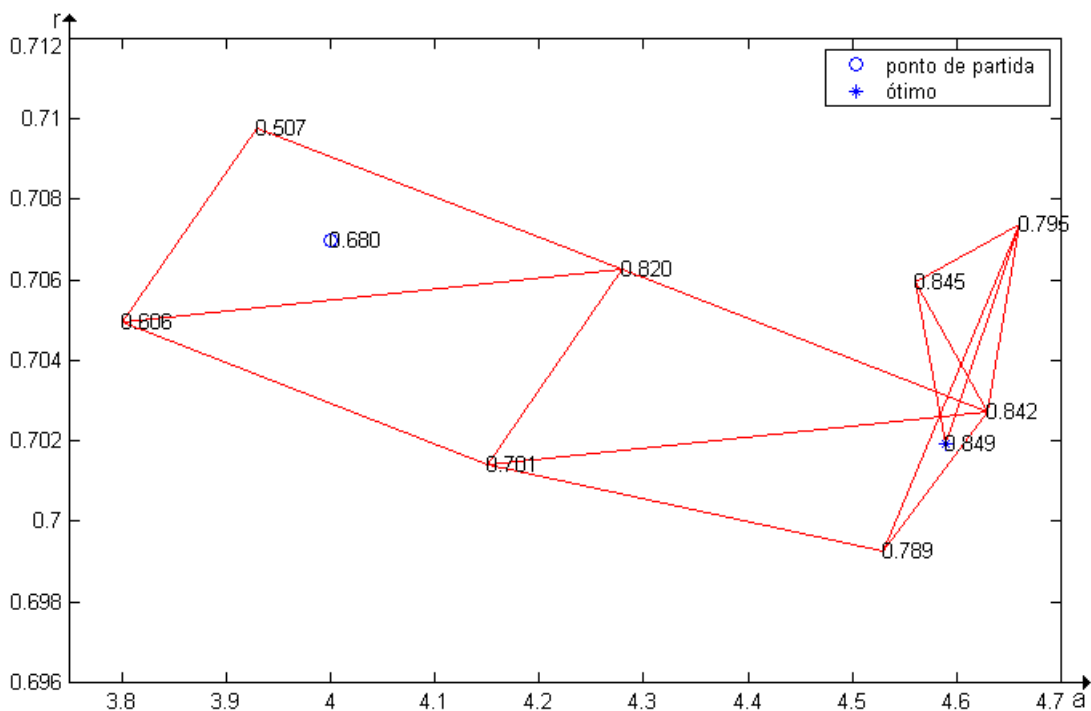


Figura 4.32: Construção dos poliedros do código de otimização $Re = 2000$

Após a apresentação e comentários sobre os resultados, apresenta-se no próximo capítulo as considerações finais e as recomendações para futuros trabalhos na área.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Realizar uma simulação numérica em torno de um pára-quadras utilizando uma malha cartesiana foi um grande desafio, visto que não existe muita bibliografia específica. Na implementação do código computacional deparou-se com vários problemas, alguns já citados no corpo do trabalho, tais como encontrar as condições de contorno adequadas para as componentes de velocidade e para a pressão. Mas, a maior dificuldade, foi encontrar e implementar uma formulação adequada para o cálculo das velocidades no contorno da geometria. Sabe-se que a formulação utilizada não foi a melhor, já que é de primeira ordem, e não se conseguiu progredir no sentido de aumentar a ordem da mesma.

Ainda relativo à implementação, devido a falta de tempo e a inexperiência computacional, não se conseguiu avançar o código computacional no sentido de elevar o número de Reynolds para valores considerados ideais para esse problema (superiores a 10000). Muito embora, considere-se os resultados aqui obtidos de grande valia, já que se conseguiu concordância razoável com o problema físico real e com os dados pesquisados na bibliografia.

Os resultados do escoamento inicial apontaram boa concordância com os resultados da otimização, tendo pouca alteração na geometria, o que indica que a geometria tida como inicial era uma boa aproximação do ótimo de um pára-quadras tradicional.

Conseguiu-se avaliar de forma positiva os dados obtidos nos cálculos analíticos através de um problema empírico de otimização. Para isso adaptou-se uma formulação para o cálculo do coeficiente de arraste, utilizada para aerofólios, para a geometria desejada. Entende-se que isso pode ser justificável, pois ao observar os resultados numéricos obtidos, nota-se que para números de Reynolds baixos o

contorno formado pelo fluido se assemelha a um aerofólio, e que com o aumento desse parâmetro a geometria tende a se aproximar da semi-elipse desejada.

Quanto aos resultados, observou-se que, em geral, os valores do coeficiente de arraste se mantiveram dentro de um intervalo, conforme encontrado na bibliografia. Na literatura a faixa de variação do c_d é relativamente grande e obter valores da ordem de 1 significa que foram desconsiderados fatores que tornariam a análise muito complexa para este primeiro estágio. Observou-se também que, para os números de Reynolds adotados neste trabalho, o método de otimização foi adequado, pois conseguiu-se aumentar o coeficiente de arraste modificando a geometria.

Sugere-se, para trabalhos futuros, num primeiro momento, a tridimensionalização do código computacional, pois permitirá uma visualização completa da formação dos vórtices e, ainda, um refino no código de forma a convergir para números de Reynolds elevados. E, num segundo momento, a inserção da abertura superior do pára-quedas, tornando a geometria porosa, contribuindo para uma maior concordância com a situação real.

REFERÊNCIAS

- [1] ACHENBACH, E. Vortex shedding from spheres. *Journal of Fluid Mechanics* 62, 2 (1974), 209–221.
- [2] ANDERSON, D., TANNEHIL, J., AND PLETCHER, R. *Computational fluid mechanic and heat transfer*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
- [3] ASHRAFIZADEH, A., RAITHBY, G., AND STUBLEY, G. Direct design of ducts. *Journal of Fluids Engineering* 125, 1 (2003), 158–165.
- [4] BEALE, E. M. *Nonlinear Programming*. Interscience Publishers, New York, 1967.
- [5] BEARMAN, P., AND TAKAMOTO, M. Vortex shedding behind rings and disks. *Fluid Dyn. Res.* 3, 1 (1988), 214–218.
- [6] BERGER, E., SCHOLTZ, D., AND SCHUMM, M. Coherent vortex structures in the wake of a sphere and a circular disk at rest and under forced vibrations. *Journal of Fluids Structures* 4, 1 (1990), 231–257.
- [7] BOYCE, W., AND DIPRIMA, R. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 7 ed. LTC, Rio de Janeiro, 2001.
- [8] BUTCHER, J. *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods*. Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [9] DE BORTOLI, A. *Introdução à dinâmica de fluidos computacional*. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2000.
- [10] DE BORTOLI, A., AND QUADROS, R. Euler solutions for aerodynamics inverse shape design. *Int. Journal Num. Meth. in Fluids* 44 (2004), 197–208.

- [11] DULIKRAVICH, G. S. Shape inverse design and optimization for three-dimensional aerodynamics. *AIAA Paper 95*, 695 (1995). Reno - Nevada.
- [12] DULIKRAVICH, G. S., AND BAKER, D. Aerodynamic shape inverse design using fourier series method. *AIAA Paper 99*, 185 (1999).
- [13] FADLUN, E., VERZICCO, R., ORLANDI, P., AND MOHD-YUSOF, J. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics* 161 (2000), 35–60.
- [14] HE, J., GLOWINSKI, R., METCALFE, R., NORDLANDER, A., AND PERIAUX, J. Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder. *Journal of Computational Physics* 163 (2000), 83–117.
- [15] HIGUCHI, H., AND TAKAHASHI, F. Flow past two-dimensional ribbon parachute models. *Journal of Aircraft* 26, 7 (1989), 641–649.
- [16] HIMMELBLAU, D. M. *Applied Nonlinear Programming*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
- [17] HOUAISS, A., AND BARBOSA, F. Barsa. Britannica do Brasil, 1985. vol. 12.
- [18] IOLLO, A., FERLAUTO, M., AND ZANNETTI, L. An aerodynamic optimization method based on the inverse problem adjoint equations. *Journal of Computational Physics*, 173 (2001), 87–115.
- [19] JUSTO, D. *Geração de malhas, condições de contorno e discretização de operadores para dinâmica de fluidos computacional*. UFRGS-PPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [20] KALRO, V., AND TEZDUYAR, T. A parallel 3D computational method for fluid-structure interactions in parachute systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2000), 321–332.

- [21] KIM, H., AND DURBIN, P. Observations of the frequencies in a sphere wake and of drag increase by acoustic excitation. *Physics Fluids* 31, 11 (1988), 3260–3265.
- [22] KLIMAS, P. Inflating parachute canopy differential pressures. *Journal of Aircraft* 16, 12 (1979), 861–862.
- [23] KROLL, N., AND JAIN, R. K. Solution of two-dimensional euler equations - experience with a finite volume code. Tech. Rep. DFVLR-FB 87-41, Deutsche Forschungs-und Versuchsanstalt für Luft-und Raumfahrt - DFVLR, Braunschweig, 1987.
- [24] LEE, C. Modeling of parachute opening: an experimental investigation. *Journal of Aircraft* 26, 5 (1989), 444–451.
- [25] LIU, Y., LAU, K., CHAN, C., GUO, Y., AND LIN, W. Structures of scalar transport in 2d transitional jet diffusion flames by LES. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46 (2003), 3841–3851.
- [26] MAYDEW, R., AND PETERSON, C. Design and testing of high-performance to parachutes. *AGARD AG*, 319 (1991).
- [27] MCVHEY, D., AND WOLF, D. Analysis of deployment and inflation of large ribbon parachutes. *Journal of Aircraft* 11, 2 (1974), 96–103.
- [28] MIELE, A. *Theory of optimum aerodynamic shapes: extremal problems in the aerodynamics of supersonic, hypersonic, and free-molecular flows*. Academic Press, New York, 1965.
- [29] MILANO, M., AND KOUMOUTSAKOS, P. A clustering genetic algorithm for cylinder drag optimization. *Journal of Computational Physics*, 175 (2002), 79–107.
- [30] MOHAMADI, B., AND PIRONNEAU, O. *Applied shape optimization for fluids*. Oxford University Press Fall, 2002.

- [31] MOIN, P. Advances in large eddy simulation methodology for complex flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 23 (2002), 710–720.
- [32] MOSER, C. A. S. *Simulação numérica de esteiras em transição utilizando o método dos contornos virtuais*. UFRGS-PPGMAp, Porto Alegre, 2002.
- [33] NELDER, A., AND MEAD, R. A simplex method of function minimization. *Computer Journal* 4, 7 (1965), 308–313.
- [34] NOCEDAL, J., AND WRIGHT, S. *Numerical Optimization*. Springer, 1999.
- [35] PESKIN, C. S. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics* 25, 3 (1977), 220–252.
- [36] PETERSON, C., STRICKLAND, J., AND HIGUCHI, H. The fluid dynamics of parachute inflation. *Annual Reviews Fluid Mechanics* 28 (1996), 361–387.
- [37] QUADROS, R. S. *Otimização de geometrias aerodinâmicas utilizando métodos inversos*. UFRGS-PPGMAp, Porto Alegre, 2003.
- [38] SAIKI, E., AND BIRINGEN, S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics* 123, 2 (1996), 450–465.
- [39] SAKAMOTO, H., AND HANIU, H. A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow. *Journal of Fluids Engineering* 112, 1 (1990), 386–392.
- [40] SCHIOZER, D. *Mecânica dos Fluidos*. LTC, Rio de Janeiro, 1996.
- [41] SCHLEICHER, M., AND CUNHA, M. *Métodos numéricos para equações diferenciais parciais*, vol. 4. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos, 2003.
- [42] SCHLICHTING, H. *Boundary-Layer Theory*, 6th ed. McGraw-Hill, New York, 1968.

- [43] SCHLÜTER, J., PITSCH, H., AND MOIN, P. Outflow conditions for integrated large eddy simulation/Reynolds-averaged Navier-Stokes simulations. *Journal AIAA* 43, 1 (2005), 156–164.
- [44] SECCHI, A. R. *Otimização de Processos*. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Química - UFRGS, 2002.
- [45] SOARES, A. *Simulação numérica do escoamento incompressível através de canais retos com expansão geometricamente brusca*. UFRGS-PPGMAp, Porto Alegre, 1999.
- [46] SPENDLEY, W., HEXT, G., AND HIMSWORTH, F. Sequential application of simplex design of optimization and evolutionary operations. *Technometrics* 4 (1962), 441–461.
- [47] STEIN, K., BENNEY, R., TEZDUYAR, T., AND POTVIN, J. Fluid-structure interactions of a cross parachute: numerical simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2001), 673–687.
- [48] STREETER, V. *Mecânica de fluidos*, 7 ed. McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1980.
- [49] SURYANARAYANA, G., PAUER, H., AND MEIER, G. Bluff-body drag reduction by passive ventilation. *Exp. Fluids* 16, 1 (1993), 28–33.
- [50] TEZDUYAR, T., OSAWA, Y., STEIN, K., BENNEY, R., KUMAR, V., AND MCCUNE, J. Proceedings of 8th international conference on numerical methods in continuum mechanics. *Numerical Methods for Computer Assisted Analysis of Parachute Mechanics* (2000). cd-rom.
- [51] WILSON, R. B. *A simplicial algorithm for concave programming*. PhD thesis, Harvard University, 1963.
- [52] WOLF, D. A simplified dynamic model of parachute inflation. *Journal of Aircraft* 11, 1 (1974), 28–33.

- [53] ZIAEI-RAD, S., AND PISHEVAR, A. Proceedings of CFD2003. *Wing planform design using stochastic optimization techniques* (2003), 7.