

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Alguns Aspectos Numéricos e Teóricos das
Equações de Navier-Stokes na Modelagem
do Escoamento em torno de um Vórtice**

por

Patrícia Leal da Cunha

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli
Orientador

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zíngano
Co-Orientador

Porto Alegre, março de 2006.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Cunha, Patrícia Leal da

Alguns Aspectos Numéricos e Teóricos das Equações de Navier-Stokes na Modelagem do Escoamento em torno de um Vórtice / Patrícia Leal da Cunha.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2006.

77 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2006.

Orientador: De Bortoli, Álvaro Luiz; Co-Orientador: Zíngano, Paulo Ricardo de Ávila

Dissertação: Matemática Aplicada
Equações de Navier-Stokes, Tornado, Vórtice, Runge-Kutta, Decaimento de soluções, norma L^2 .

Alguns Aspectos Numéricos e Teóricos das Equações de Navier-Stokes na Modelagem do Escoamento em torno de um Vórtice

por

Patrícia Leal da Cunha

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli

Co-Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zíngano

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Túlio M. B. Vilhena
PPGMAp-UFRGS

Prof. Dr. Jorge A. Villar Alé
DEMM-PUCRS

Prof. Dr. Leonardo P. Bonorino
PPGMAT-UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
março de 2006.

Prof^a. Maria Cristina Varriale, Dr^a.
Coordenadora

Ao meu amor,
Pito

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pois sem a ajuda deles eu, decididamente, não teria chegado até aqui. Eles que me ensinaram a ser tão teimosa!

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp) por ter me acolhido, principalmente à coordenadora Maria Cristina, pelo seu profissionalismo e por sempre se mostrar disposta a ajudar.

Ao Álvaro de Bortoli, orientador, por oferecer o apoio necessário para a realização deste trabalho.

Ao co-orientador Paulo Zíngano, ao prof^o Leonardo Bonorino e ao prof^o Mark Thompson por me mostrarem essa fascinante área da matemática que é a EDP.

A todos os professores do PPGMAp e PPGMAT agradeço à contribuição valiosa, servindo como o modelo mais próximo de profissionais da nossa área, inclusive àqueles que são o exemplo de um mau profissional, pois graças a eles sei o que não devo fazer.

Aos meus amigos e amigas do curso de matemática, em especial ao Régis, ao João e à Linéia, pela inestimável colaboração durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu noivo Rodrigo que, mesmo distante, me apoiou, incentivou e me agüentou nos momentos mais difíceis! Obrigada de coração!

À todos aqueles que não foram mencionados aqui, mas que tiveram a sua cota, importantíssima, de ajuda.

Conteúdo

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	ix
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos do presente trabalho	4
1.3 Delineamento da Dissertação	5
2 EQUAÇÕES GOVERNANTES	6
2.1 Equações de Navier-Stokes	6
2.2 Equação da Pressão	9
3 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO NUMÉRICA	11
3.1 Malha Computacional	11
3.2 Equações de Navier-Stokes em Diferenças Finitas	12
3.3 Aproximação para a Pressão	16
3.4 Análise da Estabilidade Linear	17
3.5 Condições Iniciais e de Contorno	19
3.6 Método de Integração Temporal	21
3.7 Fluxograma	24
4 ANÁLISE DO DECAIMENTO DAS SOLUÇÕES	26
4.1 Introdução	26
4.2 Decaimento de $H_1(t)$	28

4.2.1	O caso 2D	30
4.2.2	O Caso 3D	33
4.3	Decaimento de $H_0(t)$	37
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	51
5.1	Escoamento em torno de um Cilindro Circular	52
5.2	Escoamento em torno de um Vórtice	53
6	CONCLUSÕES	64
	APÊNDICE A	66
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72

Lista de Figuras

Figura 3.1	Discretização em diferenças finitas	12
Figura 3.2	Domínio para a simulação do escoamento em torno do vórtice. .	21
Figura 3.3	Fluxograma	25
Figura 5.1	Linhas de vorticidade para $Re = 4375$ (superior) e resultado a- apresentado por Jiang Chun Bo [7].	53
Figura 5.2	Raios do Tornado e Velocidade Angular	54
Figura 5.3	Representação de um tornado axissimétrico [8]. $a = 0.2$, $b = 0.6$, $c = 0.2$ e $d = 10$	55
Figura 5.4	Esquema do processo de geração e desprendimento de vórtices. .	55
Figura 5.5	Perfil de vorticidade na esteira do vórtice para $Re=1000$ após 2,4 seg.	57
Figura 5.6	Perfil de vorticidade na esteira do vórtice para $Re=5000$ após 2,4 seg.	57
Figura 5.7	Perfil de vorticidade na esteira do vórtice para $Re=10000$ após 2,4 seg.	58
Figura 5.8	Delimitação da região a ser ampliada. $Re = 10000$. Raio=0.06 .	59
Figura 5.9	Ampliação da região delimitada na figura 5.8. $Re = 10000$. Raio=0.06	59
Figura 5.10	Campo de vorticidade sobre o perfil (a); Instabilidade nas ad- jacências do vórtice principal (b). ($Re = 10000$. Raio=0.02.) . .	60
Figura 5.11	Campo de vorticidade sobre o perfil (a); Instabilidade nas ad- jacências do vórtice principal (b). ($Re = 10000$. Raio=0.04.) . .	61
Figura 5.12	Campo de vorticidade sobre o perfil para $Re = 10000$. Raio=0.06.	62
Figura 5.13	Campo de vorticidade sobre o perfil para $Re = 10000$. Raio=0.08.	63
Figura 5.14	Campo de vorticidade sobre o perfil para $Re = 10000$. Raio=0.1.	63

LISTA DE SÍMBOLOS

f	força
L	escala de comprimento
p	pressão
p_∞	pressão da corrente livre
QM_x	quantidade de movimento na direção x
QM_y	quantidade de movimento na direção y
Re	número de Reynolds
R	resíduo
t	tempo
u	componente longitudinal da velocidade
u_0	velocidade inicial
U_∞	escala de velocidade longitudinal da corrente livre
v	componente transversal da velocidade
V_∞	escala de velocidade transversal da corrente livre
x, y	direções horizontal e vertical, respectivamente, no plano cartesiano
W	vetor das variáveis convectivas

Sobrescritos

- (n) indica nível iterativo atual
($n + 1$) indica iteração posterior

Subscritos

- i, j indicadores de referência de um ponto da malha

Símbolos Especiais

$\operatorname{div}(f)$	divergente de f
$\operatorname{grad}(f)$	gradiente de f
Δf	laplaciano de f
i	número imaginário
$e^{\Delta t}$	operador solução da equação do calor
\hat{f}	transformada de Fourier da função f
ϕ	função qualquer
μ	viscosidade dinâmica do ar
μ_L, μ_T	viscosidades laminar e turbulenta, respectivamente
ν	viscosidade cinemática do ar
ρ	massa específica do ar
Δt	passo de tempo
Ω	domínio
$\partial\Omega$	fronteira
ω_n	volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N = \frac{2(\pi)^{\frac{N}{2}}}{N\Gamma(\frac{N}{2})}$
\cong	aproximação
$=:$	vale a igualdade por definição
$\Delta x, \Delta y$	espaçamentos nas direções x e y , respectivamente
C^k	conjunto das funções k -vezes diferenciáveis
C^∞	conjunto das funções infinitamente diferenciáveis
$\ \cdot\ _{L^p}$	norma L^p
$\ \cdot\ _\infty$	norma L^∞

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos uma metodologia numérica para a solução do escoamento em torno de um vórtice. Como a análise completa deste tipo de fluxo não é uma tarefa fácil, simplificações quanto ao escoamento e ao método numérico são necessárias. Também investigamos o comportamento das soluções das equações governantes (Navier-Stokes) quando o tempo tende ao infinito. Nesse sentido, dividimos este trabalho em duas partes: uma numérica e outra analítica.

Com o intuito de resolver numericamente o problema, adotamos o método de diferenças finitas baseado na formulação incompressível das equações governantes. O método numérico para integrar essas equações é baseado no esquema de Runge-Kutta com três estágios. Os resultados numéricos são obtidos para cinco planos bidimensionais de um vórtice com números de Reynolds variando entre 1000 e 10000.

Na parte analítica estudamos taxas de decaimento das soluções das equações de Navier-Stokes quando os dados iniciais são conhecidos. Também estimamos as taxas de decaimento para algumas derivadas das soluções na norma L^2 e comparamos com as taxas correspondentes da solução da equação do calor.

ABSTRACT

The present work develops a numerical method for the flow simulation around a vortex. As this complete numerical flow analysis is not easy and obvious, simplifications related to the flow and the numerical method are necessary. We also investigate the behavior of the governing equations (incompressible Navier-Stokes) when the time tends to infinity. In this way, we divide this work into two parts: one, numerical, and the other analytical.

In order to solve this flow problem, the finite difference method based on the incompressible formulation is employed. The numerical technique is based on the three stages Runge-Kutta time stepping scheme for a second order spatial discretization. Numerical results are obtained for five bidimensional levels of the vortex for Reynolds number ranging from 1000 to 10000.

In the analytical part we study the time decay of solutions of the incompressible Navier-Stokes equations for given initial data. We also estimate the rate of decay of some solution derivatives in the L^2 -norm and compare these with corresponding rates for the solution of the heat equation.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Definitivamente, como um dos mais severos fenômenos meteorológicos do mundo, "O tornado ¹ é uma tempestade violenta que a natureza produz". Tornado é uma designação genérica para um fenômeno no qual ventos assumem uma forma rotatória a velocidades intensas. Para um tornado ser formado basta haver o encontro de uma massa de ar quente com uma de ar frio vindas de regiões diferentes. Esse choque resulta em enormes nuvens que começam a se formar onde esses fluxos de ar se encontram. O ar é violentamente levado para cima e para dentro da nuvem. Essas correntezas sobem, descem, colidem, giram uma em torno da outra e formam uma imensa massa de ar de aproximadamente 16Km de altura e 32Km de extensão. Seu diâmetro oscila entre alguns metros e um quilômetro e sua altura pode chegar a 1,5Km [23].

Esse fenômeno pode acontecer em qualquer parte do mundo, desde que existam as condições apropriadas, mas é mais freqüente nos Estados Unidos numa área confinada entre as Montanhas Rochosas (a oeste) e os Montes Apalaches (a leste). Os tornados causam inúmeras destruições e um número significativo de fatalidades a cada ano, fazendo deste fenômeno um importante tópico de pesquisa. O ramo da ciência que investiga esse tipo de tempestade é a Dinâmica de Fluidos.

Através de processos como medições de fluxos, por muitos séculos a Dinâmica de Fluidos vem sendo desenvolvida. Seus principais focos são a modelagem física, a solução das equações governantes e o estudo de diversas aproximações destas.

¹do Latin *tornare* ('to turn').

As pesquisas em Dinâmica de Fluidos podem ser classificadas em experimentais, analíticas e computacionais. O ramo experimental tem dado contribuições essenciais na validação e delimitação dos limites das várias aproximações das equações governantes. Uma das mais importantes atividades experimentais realizadas por cientistas e entusiastas meteorológicos é o "tornado-chasing", que consiste em observar a dinâmica do tornado e coletar dados reais. Os vídeos de tornado gravados por esses experimentalistas nos fornecem informações a respeito da aparência de formação de um tornado. No entanto, devido às dificuldades em colocar os equipamentos para gravação dentro do tornado, a coleta desses dados para o estudo de sua dinâmica interna não tem tido muito sucesso [21].

Outra maneira de captar estes dados é através de imagens de satélites e radares. Mas o número de satélites e radares necessários para monitorar um tornado em uma costa é grande, devido à enorme extensão da costa oceânica.

Assim, muitos cientistas criaram seus próprios "twisters" em laboratórios para o estudo dos tornados. Essa tática ajudou-os a entender sua natureza, sua força destrutiva e seu processo de formação. Porém, como o projeto desses equipamentos experimentais depende criticamente do comportamento do escoamento, e as condições de medição são difíceis, esses projetos podem se tornar financeiramente inviáveis.

Nesse sentido, as simulações computacionais possuem muitas vantagens. Um pesquisador nessa área necessita apenas criar e testar um programa no computador e resolver equações matemáticas, ao invés de coletar dados em um tornado real como fazem os "tornado chasers". Além disso, as simulações numéricas são muito mais acessíveis economicamente.

Podemos dizer que a simulação computacional (numérica) quase não apresenta restrições, pois problemas com condições de contorno complicadas podem ser resolvidos. Mas cabe salientar que uma metodologia numérica que não foi criteriosamente

testada, com soluções analíticas já existentes ou via experimentação em laboratório, não possui validade.

A obtenção de qualquer solução numérica para um problema físico em Dinâmica de Fluidos requer a habilidade da criação do modelo matemático correspondente. O modelo mais utilizado se baseia em um conjunto de equações altamente não-lineares chamadas de equações de Navier-Stokes (N-S)². Recentemente, essas equações têm sido fortemente usadas em computação gráfica para a simulação de fenômenos físicos como água, fumaça, fogo, etc [21].

Os escoamentos são classificados, em geral, como laminares, transientes ou turbulentos. Em 1883, *Osborne Reynolds* realizou experimentos nos quais três tubos com diâmetros de '1', ' $\frac{1}{2}$ ' e ' $\frac{1}{4}$ ' foram usados. Em suas entradas os tubos foram conformados como um bocal de trompete, a fim de que o fluxo de água entrasse sem perturbações. Reynolds provou que quando as velocidades eram suficientemente baixas, a tinta que escoava juntamente com a água formava uma linha reta. Mas este regime alterava-se quando a relação Vd/ν (onde V era a velocidade média do escoamento, d o diâmetro interno do tubo e ν a viscosidade cinemática da água) excedia um determinado valor crítico. Esse valor adimensional passou, então, a se chamar de número de Reynolds (Re) [22], [52].

Com muito cuidado para manter o escoamento isento de perturbações, e com superfícies lisas, experiências até hoje realizadas têm sido capazes de manter o escoamento laminar dentro de um tubo para Re até 100.000 [22], [29]. Contudo, na maioria das situações de escoamento, a transição para a turbulência ocorre em torno de $Re = 10^4$ [10].

Em resumo, o estudo de vários aspectos do tornado vem sendo desenvolvido nas diversas áreas da ciência, tais como, observações em campo e laboratório [6],

²As equações de Navier Stokes foram primeiro desenvolvidas por M. Navier em 1827 e por S.D. Poisson em 1831, como base de um argumento que envolvia forças intermoleculares. Depois, as mesmas equações foram derivadas por B. Saint Venant em 1843 e G.G. Stokes em 1845 [51].

[9], [32], modelagem matemática [36], [25] e simulações numéricas [26], [38], [41], [50]. Originalmente aplicados nas simulações de fenômenos como turbulência [42] e escoamentos de fluidos [27], vários modelos são pesquisados com o intuito de analisar as propriedades físicas do tornado. Alguns modelos estão em coordenadas cilíndricas (2D) e assumem que a estrutura interna do tornado é assimétrica, enquanto que outros estão no domínio de um cubo (3D), também enfatizando o estudo de fluxos assimétricos [25].

Atualmente, diferentes métodos numéricos, como Diferenças Finitas e Volumes Finitos, vêm sendo aplicados na resolução das equações que modelam o tornado. Assim, essas pesquisas nos conduzem a um melhor entendimento da estrutura do tornado.

Tendo em vista a forte complexidade das equações tridimensionais que melhor modelariam um tornado, iniciamos este estudo com a análise bidimensional do escoamento em torno de um vórtice.

1.2 Objetivos do presente trabalho

Dentre os principais objetivos do presente trabalho destacamos a resolução numérica das equações de Navier-Stokes para um fluxo em torno de um vórtice e a análise do comportamento das soluções desse mesmo conjunto de equações quando $t \rightarrow \infty$.

As simulações computacionais do vórtice neste trabalho consideram planos bidimensionais de uma situação tridimensional. Nesse sentido, para números de Re suficientemente elevados, devido aos mecanismos de instabilidade na esteira, ocorre o fenômeno do desprendimento de vórtices, conhecido como *vortex shedding*.³

³Desprendimento de vórtices caracterizado por uma situação periódica instável no escoamento, em que os vórtices se desprendem alternadamente das partes superior e inferior do corpo.

Esse estudo pressupõe também uma análise mais detalhada das diversas características das equações de N-S. Assim, o objetivo é estimar a taxa de decaimento da solução $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$ na norma L^2 (no espaço). Para isso, essas taxas de decaimento serão comparadas com as taxas correspondentes para a solução da Equação do Calor com os mesmos dados iniciais. Dessa forma, pretendemos reproduzir os resultados obtidos por Wiegner [56], seguindo o trabalho mais recente de Zingano et al. [34].

1.3 Delineamento da Dissertação

Nos capítulos seguintes, as ferramentas necessárias para as simulações computacionais do vórtice serão discutidas em detalhe, bem como a análise do decaimento das soluções das equações de N-S.

No capítulo 2 são apresentadas as equações governantes do escoamento: Navier-Stokes e continuidade. Em seguida é feita uma análise da estabilidade para as equações de N-S.

O capítulo 3 fornece uma descrição detalhada da metodologia numérica empregada. Inicialmente, as equações de N-S e a equação da pressão são discretizadas em diferenças finitas. Logo após apresentamos a malha na qual serão resolvidas essas equações e, por fim, o método escolhido para a resolução dessas equações.

No capítulo 4 serão discutidas provas simples para o decaimento das soluções $u(x, t)$ quando $t \rightarrow 0$ na norma L^2 das equações de N-S incompressíveis quando os dados iniciais são tomados em todo o espaço.

Finalmente, no capítulo 5 são apresentados os resultados numéricos em domínios retangulares. Inicialmente são analisados escoamentos ao redor de um cilindro, visando a comparação com a literatura. Apresentamos, então, resultados para $Re = 1000$, $Re = 5000$ e $Re = 10000$, considerando 5 seções 2D do vórtice.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

O escoamento de um fluido incompressível, definido numa região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é descrito pelos princípios da conservação do momento linear e da massa. Além disso, também devem ser fornecidas condições iniciais e de contorno adequadas.

Como o fluxo em questão é incompressível ($V \sim 100m/s$), isto é, cuja massa específica não varia significativamente, utiliza-se a resolução sugerida por [45]. Este procedimento consiste basicamente em utilizar a equação da Quantidade de Movimento em x (QM x) e em y (QM y) para o cálculo das velocidades u e v , e uma equação para a pressão independente. Resolve-se o sistema segregadamente; assim, é necessário representar adequadamente o acoplamento pressão-velocidades [49]. Existem diversos métodos para lidar com esse acoplamento, de forma que o objetivo comum é criar uma equação para a pressão que permita o avanço do processo iterativo.

2.1 Equações de Navier-Stokes

Neste trabalho assumiremos que o escoamento é bidimensional, a região Ω é um retângulo e as condições de contorno são do tipo Dirichlet.

O objetivo numérico deste trabalho é simular o fluxo ao redor de um vórtice para elevados números de Reynolds. Para isso, é necessário adaptar as equações de Navier-Stokes a um modelo de turbulência. O método consiste em decompor as variáveis turbulentas em 'valores médios' e 'valores flutuantes' [54]. A fim de obter os valores médios aplicamos o modelo "time average approach" que, aplicado à variável ϕ , fornece

$$\bar{\phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi(x, y, z, t) dt \quad (2.1)$$

onde T deve ser muito maior do que todas as escalas turbulentas do fluxo. Assim, fazendo $\tilde{\phi} = \frac{\rho\phi}{\bar{\rho}}$, a quantidade dependente do tempo ϕ é decomposta em [28]:

$$\phi(t) = \bar{\phi} + \phi'(t)$$

Aplicando o método acima exposto, também chamado de "Favre averaging" [53], as equações governantes podem ser escritas na forma (2.2), (2.3) e (2.4) para o fluxo de um fluido viscoso, newtoniano, incompressível e sem forças de corpo [5]:

QMx (Quantidade de Movimento em x)

$$\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{u}_y + \frac{\bar{p}_x}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla(\mu\nabla\tilde{u}) \cong \frac{\mu}{\bar{\rho}}\Delta\tilde{u} \quad (2.2)$$

QMy (Quantidade de Movimento em y)

$$\tilde{v}_t + \tilde{u}\tilde{v}_x + \tilde{v}\tilde{v}_y + \frac{\bar{p}_y}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla(\mu\nabla\tilde{v}) \cong \frac{\mu}{\bar{\rho}}\Delta\tilde{v} \quad (2.3)$$

Continuidade

$$\tilde{u}_x + \tilde{v}_y = 0 \quad (2.4)$$

e cujas condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, 0) &= \tilde{u}_0(x, y) \\ \tilde{v}(x, y, 0) &= \tilde{v}_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, t) &= \tilde{u}(x, y, t) \Big|_{\partial\Omega} \\ \tilde{v}(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t) \Big|_{\partial\Omega} \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde \tilde{u} e \tilde{v} são as componentes do vetor velocidade relativas a um sistema inercial de coordenadas (x, y) , \bar{p} é a pressão, $\bar{\rho}$ a massa específica e $\mu = \mu_L + \mu_T$ a viscosidade. A aproximação $\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla(\mu\nabla\tilde{u}) \cong \frac{\mu}{\bar{\rho}}\Delta$ permite relacionar as fórmulas usadas nos problemas numérico e analítico, e obter desprendimento de vórtices com menor esforço computacional, sendo μ variável a cada iteração (aproximação para Δt pequeno).

O modelo de viscosidade turbulenta adotado foi o de Smagorinsky (1963) [54]. Essa técnica é caracterizada pela simplicidade de formulação e pelo bom desempenho numérico. Esse modelo é descrito pela seguinte equação

$$\mu_T = C\bar{\rho}\Delta^2(2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij})^{1/2} \quad (2.7)$$

onde $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)$, C é uma constante depende do tipo de escoamento e da resolução da malha. Seu valor varia entre um mínimo de 0.065 (escoamentos em canais) e um máximo de 0.25. O valor mais freqüente é 0.1, e Δ é uma função dependente da malha $\Delta = (\Delta x\Delta y)^{1/2}$ [35].

A adimensionalização das equações é uma poderosa ferramenta matemática para o estudo de fenômenos físicos [3]. Essa técnica oferece duas importantes vantagens [48]:

1. O número de variáveis que descrevem o problema pode ser reduzido;
2. Fenômenos físicos similares de diferentes escalas de tempo e comprimento podem ser diretamente comparados.

Indicamos, a seguir, as escalas [5], [10], [51] que foram adotadas para escrever as equações (2.2) e (2.3) na forma adimensional:

$$\tilde{u}^* = \frac{\tilde{u}}{U_\infty} \quad \tilde{v}^* = \frac{\tilde{v}}{V_\infty} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad \bar{p}^* = \frac{\bar{p}}{\rho_\infty U_\infty^2} \quad t^* = \frac{tU_\infty}{L} \quad \bar{\rho}^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho_\infty} \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty}$$

onde L é a escala de comprimento, U_∞ e V_∞ são as escalas de velocidade da corrente livre nas direções x e y , respectivamente, p_∞ é a escala de pressão da corrente livre e μ_∞ a viscosidade da corrente livre. Após a substituição desses parâmetros nas equações de Navier-Stokes, obtemos o novo sistema (sem o " "):

QMx

$$\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{u}_y = -\bar{p}_x + \frac{\mu}{Re}\Delta\tilde{u} \quad (2.8)$$

QM_y

$$\tilde{v}_t + \tilde{u}\tilde{v}_x + \tilde{v}\tilde{v}_y = -\tilde{p}_y + \frac{\mu}{Re}\Delta\tilde{v} \quad (2.9)$$

onde Re representa o número de Reynolds. Quando $\mu = 0$, essas equações são chamadas de Equações de Euler [17].

Por simplicidade, abandonaremos também as notações ($\tilde{}$) e ($\dot{}$) no restante deste trabalho.

2.2 Equação da Pressão

Para obtermos uma equação para a pressão, considere as equações da Quantidade de Movimento em x e em y escritas na forma não-conservativa e adimensional

QM_x

$$u_t + uu_x + vv_y = -p_x + \frac{\mu}{Re}(u_{xx} + u_{yy}) \quad (2.10)$$

QM_y

$$v_t + uv_x + vv_y = -p_y + \frac{\mu}{Re}(v_{xx} + v_{yy}) \quad (2.11)$$

Diferenciando (2.10) em relação à x e (2.11) em relação à y , obtemos

$$u_{tx} + (uu_x)_x + (vv_y)_x = -p_{xx} + \frac{\mu}{Re}(u_{xx} + u_{yy})_x \quad (2.12)$$

$$v_{ty} + (uv_x)_y + (vv_y)_y = -p_{yy} + \frac{\mu}{Re}(v_{xx} + v_{yy})_y \quad (2.13)$$

Somando (2.12) e (2.13) e isolando os termos da pressão, temos

$$\begin{aligned}
p_{xx} + p_{yy} &= - (u_x + v_y)_t - \left(uu_x + vv_y - \frac{\mu}{Re} u_{xx} - \frac{\mu}{Re} u_{yy} \right)_x \\
&\quad - \left(uv_x + vv_y - \frac{\mu}{Re} v_{xx} - \frac{\mu}{Re} v_{yy} \right)_y \\
&= - (u_x + v_y)_t - (uu_x + vv_y)_x - (uv_x + vv_y)_y \\
&\quad + \frac{\mu}{Re} (u_{xx} + u_{yy})_x + \frac{\mu}{Re} (v_{xx} + v_{yy})_y \\
&= - (u_x + v_y)_t - (uu_x + vv_y)_x - (uv_x + vv_y)_y \\
&\quad + \frac{\mu}{Re} (u_x + v_y)_{xx} + \frac{\mu}{Re} (u_x + v_y)_{yy} \\
&= - D_t - (uu_x + vv_y)_x - (uv_x + vv_y)_y + \frac{\mu}{Re} (D_{xx} + D_{yy})
\end{aligned}$$

Assim,

$$p_{xx} + p_{yy} = -D_t - (uu_x + vv_y)_x - (uv_x + vv_y)_y + \frac{\mu}{Re} (D_{xx} + D_{yy}) \quad (2.14)$$

onde $D = u_x + v_y$; (2.14) é a *equação de Poisson para a pressão*. Observe que D não é feito igual a zero visando facilitar a convergência do processo iterativo.

3 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO NUMÉRICA

Após estabelecidas as equações do modelo matemático, que serão utilizadas na modelagem do vórtice, descrevemos um procedimento para resolvê-las. Temos, basicamente, duas alternativas: solução via métodos analíticos ou métodos numéricos. A tentativa de resolução através dos métodos analíticos geralmente falha, pois as equações de Navier-Stokes contêm fortes não-linearidades. Um método analítico que tivesse a habilidade de resolver tais equações forneceria um solução fechada para as variáveis independentes em todos os pontos do domínio, enquanto nas soluções numéricas as respostas seriam conhecidas apenas em pontos discretos, chamados pontos da malha.

O sistema de equações em diferenças finitas deve ter como referência a localização geométrica para todo o domínio em estudo. Para isso, então, deve ser construída uma malha geométrica onde cada ponto servirá de referência para o valor da função.

3.1 Malha Computacional

Quando se resolve numericamente um problema que envolve equações diferenciais utilizando o computador, precisamos ter um domínio discreto e finito de pontos; é justamente nesses pontos que são resolvidas as equações governantes. Para isso são geradas malhas que variam conforme o domínio e o fenômeno em questão. Para efetuar as aproximações numéricas das equações governantes descritas no capítulo anterior, considere uma malha com espaçamentos uniformes no plano- xy , onde cada célula retangular tem comprimento Δx na direção x e Δy na direção y , conforme

figura 3.1. Os pontos da malha são identificados pelos índices i, j , de modo que i representa a direção x e j a direção y .

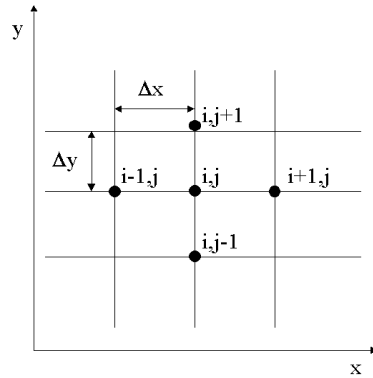


Figura 3.1: Discretização em diferenças finitas

As equações de Navier-Stokes são agora resolvidas numericamente considerando o conjunto de pontos na malha definidos por

$$\begin{aligned} x = x_i &= (i - 1)\Delta x, & i &= 1, 2, \dots, m \\ y = y_j &= (j - 1)\Delta y, & j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\Delta x, \Delta y$ são os incrementos da malha (veja figura 3.1); já a seqüência de instantes de tempo é definida por

$$t = t_p = p\Delta t, \quad p = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

No próximo item será apresentado como se procede na obtenção das equações do problema em diferenças e algumas propriedades específicas destas aproximações, as quais influem diretamente na solução.

3.2 Equações de Navier-Stokes em Diferenças Finitas

Um dos requisitos fundamentais de uma discretização numérica é que ela reproduza a equação diferencial quando o tamanho da malha tende a zero. Em outras

palavras, os erros de truncamento devem tender a zero quando o número de pontos da malha tender ao infinito. Uma aproximação numérica que possua essa característica é dita consistente. Outra característica desejada é que quaisquer erros ou perturbações na solução não sejam amplificados sem limite. Os métodos numéricos que possuem esta propriedade são chamados de estáveis. Consistência e estabilidade são condições necessárias e suficientes para a convergência. A solução numérica é convergente quando é estável e tende para a solução das equações diferenciais quando a malha é refinada [45].

Discretizar uma equação diferencial consiste em transformá-la em uma equação numérica análoga. O processo de discretização das Equações Governantes deste trabalho é realizado através do método de *Diferenças Finitas* [12]. Esse método é muito usado em Dinâmica de Fluidos com o intuito de dominar as não-linearidades de modelos matemáticos. Essa técnica tem se mostrado muito eficiente nos últimos anos.

A idéia básica desse modelo é substituir as derivadas por expansões em Séries de Taylor. Por exemplo, se $u_{i,j}$ representa a componente da velocidade no ponto (i, j) , então no ponto $(i + 1, j)$, a velocidade na direção x , $u_{i+1,j}$, pode ser expressa por

$$u_{i+1,j} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (3.3)$$

De acordo com [55], a equação anterior é uma expressão exata para $u_{i+1,j}$ se

- (i) a série converge ao $N \rightarrow \infty$ e/ou
- (ii) $\Delta x \rightarrow \infty$

Observe que a soma (3.3) é impraticável computacionalmente para N muito grande. Sendo assim, a série deve ser truncada. Se omitirmos, por exemplo, os

termos de ordem maior ou a igual a $(\Delta x)^3$, obtemos [37]

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + O(\Delta x)^3 \quad (3.4)$$

Considere as seguintes aproximações

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + O(\Delta x)^2 \quad (3.5)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + O(\Delta x)^2 \quad (3.6)$$

Subtraindo (3.6) de (3.5) e isolando o termo $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$, obtemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.7)$$

A equação (3.7) é a aproximação em *diferenças centrais de segunda ordem para a primeira derivada parcial*. A fim de obtermos uma aproximação para a derivada parcial de segunda ordem $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}$, considere

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + O(\Delta x)^4$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + O(\Delta x)^4$$

Somando as duas últimas equações, temos

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} (\Delta x)^2 + O(\Delta x)^4 \quad (3.8)$$

Dividindo ambos os lados da equação anterior por $(\Delta x)^2$ e isolando o termo de segunda derivada, resulta

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3.9)$$

Assim, a equação (3.9) é uma aproximação em *diferenças centrais de segunda ordem para a segunda derivada parcial*.

Podemos ainda gerar uma aproximação em *diferenças centrais para as derivadas mistas de segunda ordem* $(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})_{i,j}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cong \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} \right) - \left(\frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Retomando a equação da Quantidade de Movimento em x (Eq. 2.8),

$$u_t + uu_x + vv_y = -p_x + \frac{\mu}{Re} (u_{xx} + u_{yy}) \quad (3.11)$$

e efetuando a aproximação dos seus termos para o método de Runge-Kutta, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + u_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + v_{i,j} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) &\cong - \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \\ + \frac{\mu}{Re} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) &\end{aligned} \quad (3.12)$$

Dessa forma, a equação da QMx possui a forma final discretizada

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} &\cong - \left[u_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + v_{i,j} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) + \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{Re} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde o sobrescrito "n" indica o nível iterativo anterior.

Analogamente, a QMy (Eq. 2.9),

$$v_t + uv_x + vv_y = -p_y + \frac{\mu}{Re} (v_{xx} + v_{yy}) \quad (3.14)$$

resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} &\cong - \left[u_{i,j} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + v_{i,j} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) + \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{Re} \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

A equações (3.13) e (3.15) serão utilizadas no algoritmo computacional descrito na seção 3.7.

3.3 Aproximação para a Pressão

Aproximaremos, agora, a equação de Poisson para a pressão obtida na Seção 2.2,

$$p_{xx} + p_{yy} = -D_t - (uu_x + vv_y)_x - (uv_x + vv_y)_y + \frac{\mu}{Re}(D_{xx} + D_{yy}) \quad (3.16)$$

Expandindo a equação (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} p_{xx} + p_{yy} = & - D_t - u_x^2 - uu_{xx} - v_x u_y - v u_{yx} - u_y v_x \\ & - uv_{xy} - v_y^2 - vv_{yy} + \frac{\mu}{Re}(D_{xx} + D_{yy}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

A aproximação em Diferenças Finitas fornece,

$$\begin{aligned} \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} \cong & -\frac{\partial D}{\partial t} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\ -u_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - v_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u_{i,j} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - v_{i,j} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ + \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} & \cong \frac{D_{i,j}^{n+1} - D_{i,j}^n}{\Delta t} = -\frac{D_{i,j}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \cong \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \cong \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \cong \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \cong \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \cong \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} & \cong \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \cong \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \cong \frac{v_{i+1,j+1}^n - v_{i-1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n + v_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.18) por $\Delta x^2 \Delta y^2$, temos

$$\begin{aligned} & \Delta y^2 (p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}) + \Delta x^2 (p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}) \cong \\ & \cong \Delta x^2 \Delta y^2 \left[-\frac{\partial D}{\partial t} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - v_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - u_{i,j} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - v_{i,j} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, ao isolarmos a pressão $p_{i,j}$, obtemos

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{n+1} & \cong C \left(\frac{p_{i+1,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + C \left(\frac{p_{i,j+1} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \\ & - C \left[-\frac{\partial D}{\partial t} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ & - v_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u_{i,j} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ & \left. - v_{i,j} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) \right]^n \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde $C = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$.

Observe que os termos do lado direito da equação (3.20) são todos conhecidos na iteração n (forma explícita). As velocidades u e v , por exemplo, foram calculadas anteriormente através das equações de Navier-Stokes.

3.4 Análise da Estabilidade Linear

A fim de desenvolvermos uma condição de estabilidade linear e local para as equações de N-S na forma discretizada (veja seção 3.2 do capítulo 3), considere o seguinte argumento heurístico [15]. Assumindo que a pressão p e todos os coeficientes das derivadas parciais de (2.2), (2.3) e (2.4) são conhecidos, escrevemos

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.21)$$

onde $w \in \mathbb{R}^2$, $w = (u, v)$; (3.21) representa a forma vetorial das equações de N-S.

Discretizando (3.21), para (i, j) representando os pontos do domínio, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} &= -u_{i,j} \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - v_{i,j} \frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \\ &+ \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Isolando o termo $w_{i,j}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} w_{i,j}^{n+1} &= w_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j} \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j} \frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

e definindo o operador F como

$$\begin{aligned} Fw_{i,j}^n &:= w_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j} \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j} \frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

resulta na seguinte forma simplificada

$$w_{i,j}^{n+1} = Fw_{i,j}^n. \quad (3.25)$$

Considere

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad \beta = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{\Delta t}{2\Delta y}. \quad (3.26)$$

Utilizando estes coeficientes, podemos reescrever a equação (3.24) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} Fw_{i,j}^n &= [1 - 2\nu(\alpha + \beta)]w_{i,j}^n + (\beta\nu + \delta v_{i,j}^n)w_{i,j-1}^n + \\ &+ (\alpha\nu + \gamma u_{i,j}^n)w_{i-1,j}^n + (\alpha\nu - \gamma u_{i,j}^n)w_{i+1,j}^n + (\beta\nu - \delta v_{i,j}^n)w_{i,j+1}^n. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Observando que a soma de todos os coeficientes em (3.27) é igual a 1 e considerando esses coeficientes positivos, deduzimos que

$$\begin{aligned} Fw_{i,j}^n &\leq \left[[1 - 2\nu(\alpha + \beta)] + (\beta\nu + \delta v_{i,j}^n) + (\alpha\nu + \gamma u_{i,j}^n) + (\alpha\nu - \gamma u_{i,j}^n) + (\beta\nu - \delta v_{i,j}^n) \right] \times \\ &\quad \times \max\{w_{i,j}^n, w_{i,j-1}^n, w_{i-1,j}^n, w_{i+1,j}^n, w_{i,j+1}^n\} = \\ &= \max\{w_{i,j}^n, w_{i,j-1}^n, w_{i-1,j}^n, w_{i+1,j}^n, w_{i,j+1}^n\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
Fw_{i,j}^n &\geq \left[[1 - 2\nu(\alpha + \beta)] + (\beta\nu + \delta v_{i,j}^n) + (\alpha\nu + \gamma u_{i,j}^n) + (\alpha\nu - \gamma u_{i,j}^n) + (\beta\nu - \delta v_{i,j}^n) \right] \times \\
&\quad \times \min\{w_{i,j}^n, w_{i,j-1}^n, w_{i-1,j}^n, w_{i+1,j}^n, w_{i,j+1}^n\} = \\
&= \min\{w_{i,j}^n, w_{i,j-1}^n, w_{i-1,j}^n, w_{i+1,j}^n, w_{i,j+1}^n\} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Dessa forma, as equações (3.28) e (3.29) implicam que

$$\min\{w_{i,j}^n, w_{i,j-1}^n, w_{i-1,j}^n, w_{i+1,j}^n, w_{i,j+1}^n\} \leq Fw_{i,j}^n \leq \max\{w_{i,j}^n, w_{i,j-1}^n, w_{i-1,j}^n, w_{i+1,j}^n, w_{i,j+1}^n\}.$$

Será mostrado no final deste trabalho que $\|u\|_\infty$ é limitada, assim podemos escrever

$$|u_{i,j}^n| (\Delta x) \leq 2\nu,$$

$$|v_{i,j}^n| (\Delta y) \leq 2\nu$$

e

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{2\nu [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]},$$

o que garante a positividade dos coeficientes em (3.27) e, portanto, qualquer solução da equação (3.25) é limitada. Observe que a condição de positividade é suficiente, mas não necessária.

Discutiremos a seguir como foram implementadas as condições iniciais e de contorno.

3.5 Condições Iniciais e de Contorno

A fim de resolvermos o sistema de equações diferenciais obtido, necessitamos de condições iniciais e de contorno. São justamente essas condições que identificam

qual o problema que está sendo resolvido. Para a condição inicial geralmente são utilizados os valores da corrente livre, mas pode-se utilizar também uma solução potencial como aproximação inicial do escoamento.

Em geral, existem as seguintes definições para as condições de contorno [20]:

- a variável é conhecida na fronteira (condição do tipo Dirichlet);
- o fluxo da variável é conhecido (Neumann);
- as condições de contorno são cíclicas ou periódicas.

Para o caso de escoamentos podemos definir ainda:

Condição de Contorno na Parede . Para uma parede impermeável, o fluxo deve ser nulo na fronteira;

Condição de Contorno de Simetria . É aplicada quando um escoamento é simétrico em relação a um eixo, permitindo uma redução do número de células no domínio;

Condição de Contorno "Far Field" . São importantes para escoamentos externos a baixa velocidade e se baseiam nas características do fluxo normais à fronteira;

Extrapolação . É utilizada quando se necessita um ajuste da variável na fronteira com relação às duas células adjacentes. Também é empregada quando não se conhece a condição de contorno apropriada na fronteira.

Neste trabalho limitamos a região de influência de cada seção do vórtice em um domínio retangular de dimensões 3×2 , conforme figura 3.2.

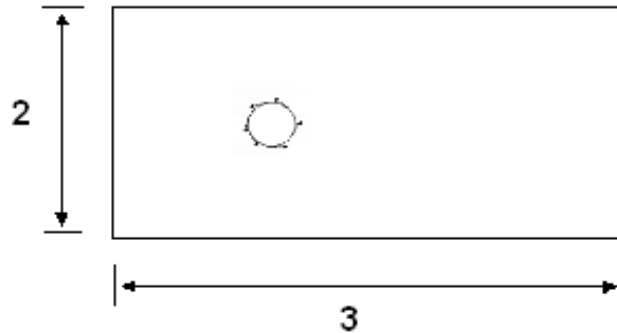


Figura 3.2: Domínio para a simulação do escoamento em torno do vórtice.

Como condições de contorno consideramos:

- (i) Na entrada: velocidades u e v iniciais ($u = 1, v = 0$) e pressão extrapolada
- (ii) Na saída: extrapolação das velocidades u e v , e pressão fixa $p = 1$
- (iii) Nas laterais: extrapolação das velocidades u e v , e da pressão

As extrapolações mencionadas seguem o seguinte modelo

$$\phi(n) = \frac{3}{4}\phi(n \pm 1) + \frac{1}{4}\phi(n \pm 2) \quad (3.30)$$

onde n indica a direção i ou j que será extrapolada. Como condições iniciais são utilizados os valores da corrente livre ($u = 1, v = 0, p = 1$).

Obtida a malha e as condições iniciais e de contorno do domínio, o próximo passo é aplicar um método que resolva as equações propostas.

3.6 Método de Integração Temporal

O procedimento usado é baseado na integração temporal de Runge-Kutta (RK). O método de RK tornou-se muito popular, tanto como técnica computacional quanto como matéria de pesquisa [13]. Ele foi derivado por Runge em 1894 e

extendido por Kutta poucos anos depois. Runge e Kutta desenvolveram o algoritmo para resolver equações diferenciais tomando "n" termos da Série de Taylor.

Esse método é iterativo e consiste na aplicação repetitiva de um algoritmo mais simples (Jacobi). Suas principais vantagens são [20]:

- não é necessário o cálculo de derivadas de ordem elevada;
- permite a troca fácil do tamanho do intervalo;
- facilidade em analisar o erro de truncamento;
- facilidade na vetorização e na paralelização.

Além disso, seus coeficientes podem ser selecionados de forma a obter soluções de alta precisão temporal (a precisão espacial é obtida através da discretização das equações - Diferenças Finitas [2]), otimizando as características de amortecimento do erro da solução. Mais de dois estágios são usados com a finalidade de estender a região de estabilidade. Um esquema que requer menos memória computacional é o método de RK simplificado [40], [19], segundo [14] que, para as equações (2.8) e (2.9) na forma $\frac{\partial \vec{W}_{i,j}}{\partial t} = \vec{R}_{i,j}$, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \vec{W}_{i,j}^{(0)} &= \vec{W}_{i,j}^{(n)} \\ \vec{W}_{i,j}^{(k)} &= \vec{W}_{i,j}^{(0)} - \alpha_k \Delta t \vec{R}_{i,j}^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \\ \vec{W}_{i,j}^{(n+1)} &= \vec{W}_{i,j}^{(k)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $\vec{W}_{i,j} = (u_{i,j}, v_{i,j})^T$, Δt o passo de tempo, $\vec{R}_{i,j}^k = \vec{Q}_{i,j}^k - \vec{D}_{i,j}^k$ é o resíduo e

\vec{W}	→	vetor das variáveis convectivas
\vec{Q}	→	vetor fluxo convectivo
\vec{R}	→	vetor resíduo
\vec{D}	→	dissipação artificial
n	→	iteração atual
α_k	→	coeficiente dos estágios de RK
k	→	estágios de RK

Observação 3.1. *Esquemas com mais de 5 estágios ($k > 5$) não são eficientes pois o trabalho computacional envolvido é muito alto [13].*

Assim, neste trabalho foi adotado um esquema de três estágios, pois é o mais adequado para escoamentos incompressíveis. Os coeficientes para $k = 3$ podem ser calculados, resultando

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \quad \alpha_3 = 1 \quad (3.32)$$

Para exemplificar, tomando a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \frac{\mu}{Re} \Delta u \quad (3.33)$$

e aplicando o método de Runge-Kutta na forma discretizada (Eq. (3.13)) resulta

$$\begin{aligned} \vec{W}_{i,j} &= u_{i,j}, \\ \vec{W}_{i,j}^{(0)} &= u_{i,j}^{(0)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{R}_{i,j}^{(k-1)} &\cong u_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + v_{i,j} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) + \\ &\frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{\mu}{Re} \left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] \end{aligned}$$

De forma análoga, estendemos o uso de Runge-Kutta para a equação da quantidade de movimento em y .

Para a equação de Poisson da pressão utilizamos o SUR (sub-relaxações sucessivas), por não possuir o termo temporal. O SUR consiste na aplicação de uma correção para os valores calculados a cada passo através da constante ψ que representa a relaxação. Como a pressão tem caráter elíptico, escolhemos $\psi = 0.7$. Tomando uma variável genérica f , a aplicação do método SUR resulta

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k + \psi(f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k) \quad (3.34)$$

A seguir será apresentado o fluxograma que define a seqüência de instruções para a realização dos cálculos computacionais do escoamento.

3.7 Fluxograma

Existe uma etapa importante entre a escolha do método que será utilizado na solução do problema e a forma da escrita das instruções no computador. Esta etapa é a representação gráfica do processo que descreve a seqüência de operações lógicas do algoritmo. Isto é chamado de "fluxograma" ou "diagrama em blocos".

O fluxograma é um método formal de representar um programa, de tal forma que seja lógico e especifique os testes necessários. As vantagens do fluxograma são, basicamente:

1. facilitar uma visão global do problema,
2. facilitar a descoberta de erros de lógica e
3. facilitar a comunicação entre programadores.

Desse modo, o algoritmo utilizado nas simulações pode ser resumido no fluxograma que segue:

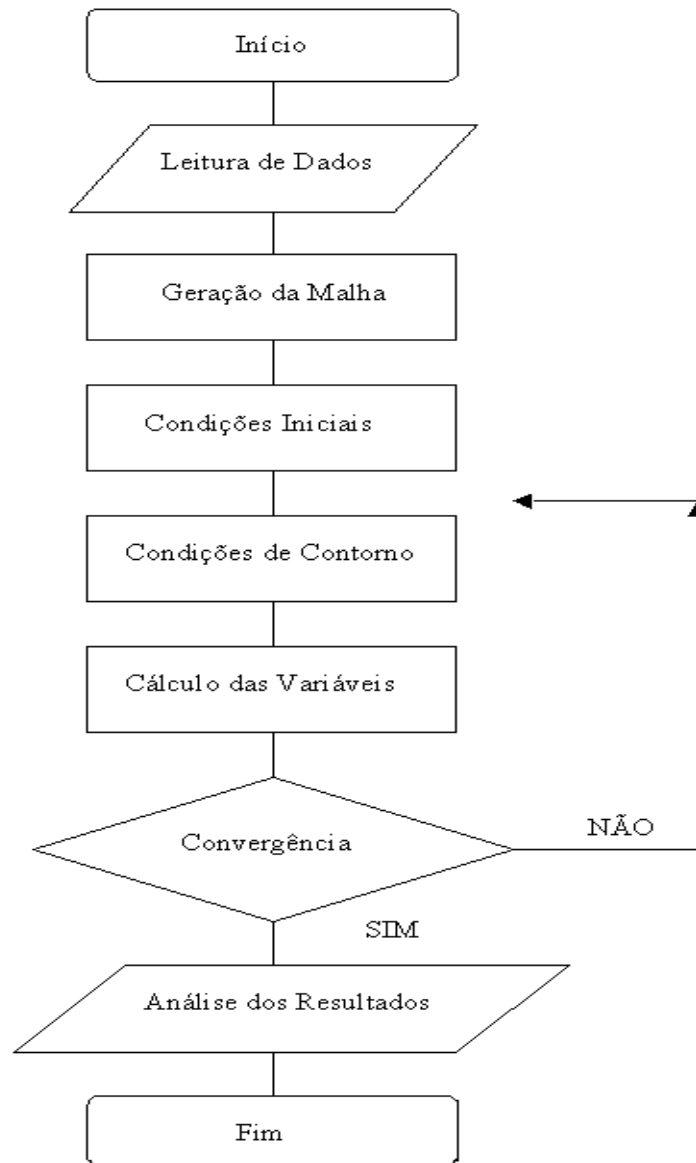


Figura 3.3: Fluxograma

O próximo capítulo discute o comportamento das soluções das Equações de Navier-Stokes quando $t \rightarrow \infty$.

4 ANÁLISE DO DECAIMENTO DAS SOLUÇÕES

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é estimar a taxa de decaimento da solução $u(\cdot, t)$ quando $t \rightarrow \infty$ na norma L^2 (Definição A.2) (no espaço). Para isso, essas taxas de decaimento serão comparadas com as taxas correspondentes para a solução da Equação do Calor com os mesmos dados iniciais [34]. Mais precisamente, seja $u(x, t)$ solução das equações de Navier-Stokes (N-S), i.e.,

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \text{grad}(u) + \text{grad}(p) = \Delta u, \\ \text{div}(u) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

com a condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad (4.2)$$

onde a dimensão do espaço é $N = 2$ ou $N = 3$. Observe que (4.1) é análoga ao conjunto de equações (2.2) e (2.3) com $\mu = \rho = 1$. Assume-se que o problema tem solução clássica (que é única) para todo tempo t positivo. Além disso, vamos também supor [39]

$$u_0 \in \mathcal{C}^\infty, \quad \text{div}(u_0) = 0, \quad D^\alpha u_0 \in L^2, \quad \forall \alpha \quad (4.3)$$

Na verdade, precisamos apenas supor que $D^2 u_0 \in L^2$; mas como a solução é clássica e as primeiras derivadas estão em L^2 , segue que todas as outras derivadas também estarão em L^2 .

Teorema 4.1. *Considere o sistema (4.1)-(4.2) para $N = 2$ ou $N = 3$. Supondo que a solução do problema*

$$u_t = \Delta u, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (4.4)$$

decai na taxa

$$\|e^{\Delta t} u_0\| \leq C(1+t)^{-\kappa}, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

para algum $\kappa > 0$, então a solução $u(\cdot, t)$ das equações de N-S satisfaz

$$\|u(\cdot, t)\| \leq M(1+t)^{-\gamma}, \quad t \geq 0,$$

com

$$\gamma = \min\left\{\kappa, \frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right\}.$$

Não é difícil estender o resultado anterior para o caso em que o termo não-homogêneo $f(x, t)$ é adicionado em (4.1), mas consideramos o caso $f=0$ para simplificar a representação e coincidir com a equação do modelo numérico do Capítulo 2.

De fato, o Teorema (4.1) foi provado originalmente por Wiegner [56] para o caso não-homogêneo e para certas soluções fracas usando o método de Fourier. Na Seção 4.3 será demonstrada uma nova prova do Teorema 4.1, segundo [34]. A idéia é primeiro estabelecer o decaimento de $H_1(t)$ pelo método da energia e então usar propriedades do núcleo da equação do calor (Eq. (4.4)) e Transformadas de Fourier. A principal diferença em relação às demonstrações anteriores [56], que utilizaram o método de "Fourier splitting", é o uso de estimativas de decaimento das primeiras derivadas de $u(x, t)$ em L^2 , apresentando uma demonstração alternativa mais acessível para a compreensão do resultado. Mais precisamente, mostraremos que (Definição A.4)

$$H_1(t) := \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

para $N = 3$ e uma estimativa um pouco mais forte para $N = 2$, conforme será mostrado na seção 4.2. Uma vez estabelecidos estes fatos, o decaimento de $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$ segue do Princípio de Duhamel [39], de estimativas básicas da Equação do Calor e de resultados análogos ao Lema de Gronwall em equações ordinárias.

4.2 Decaimento de $H_1(t)$

Desejamos mostrar que $tH_1^2 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. No caso bidimensional (2D) o argumento é particularmente simples, já que $H_1(t)$ é monótona decrescente para $t \geq 0$. Em 3D a função $H_1(t)$ decai monotonicamente para $t \geq t_0$, se t_0 é grande o suficiente.

Lema 4.1. *Seja $u(x, t)$ solução do problema (4.1)-(4.2). Então,*

$$\frac{d}{dt}H_0^2(t) + 2H_1^2(t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.6)$$

onde $H_0(t) = \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Conseqüentemente,

$$H_0(t) \leq H_0(s), \quad \forall t \geq s \quad (4.7)$$

e

$$\int_0^\infty H_1^2(t) dt \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2 \quad (4.8)$$

Demonstração. Consideramos inicialmente o caso $N = 2$, e escrevemos $u = (u_1, u_2)$. A fim de demonstrar (4.6), basta usar a Regra de Leibniz (Teorema A.6) e notar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_0^2(t) &= \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |u(x, t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t} (u_1^2 + u_2^2) dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \left[u_1 \left(-u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \right] dx + \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^2} \left[u_2 \left(-u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \right] dx \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de que u é solução de (4.1). Reagrupando os termos da equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_0^2(t) = & - \underbrace{2 \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i,j=1}^2 u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx}_{I_1} - \underbrace{2 \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dx}_{I_2} + \\ & + \underbrace{2 \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i,j=1}^2 u_i \Delta u_i dx}_{I_3} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i,j=1}^2 2 \int_{\mathbb{R}^2} u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} u_j \frac{\partial (u_i^2)}{\partial x_j} dx \stackrel{(\text{Eq.Continuid})}{=} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial (u_j u_i^2)}{\partial x_j} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \text{div}(|u|^2 u) dx = 0. \end{aligned}$$

$$I_2 = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dx \stackrel{(\text{Eq.Continuid})}{=} 2 \int_{\mathbb{R}^2} \text{div}(up) dx = 0.$$

Como $Du \in L^2(\mathbb{R}^N)$, podemos aplicar o Teorema da divergência, obtendo

$$I_3 = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^2 u_i \Delta u_i dx = \sum_{i,j=1}^2 2 \int_{\mathbb{R}^2} u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} dx \stackrel{(\text{Teo.Div.})}{=} -2 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = -2H_1^2(t).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}H_0^2 = -2H_1^2. \quad (4.9)$$

O procedimento é análogo para $N = 3$. Assim, a função $H_0(t)$ é decrescente, ou seja,

$$H_0(t) \leq H_0(s), \quad \forall t \geq s, \quad (4.10)$$

o que prova (4.7).

Integrando (4.9) em $[0, t]$, facilmente obtemos

$$H_0^2(t) + 2 \int_0^t H_1^2(s) ds = \|u_0\|^2. \quad (4.11)$$

4.2.1 O caso 2D

Observação 4.1. *Seja*

$$\omega_t + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j^2}, \quad (4.12)$$

a equação da vorticidade em \mathbb{R}^2 , obtida tomando-se o rotacional da equação (4.1).

Multiplicando (4.12) por 2ω e integrando $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}$, obtemos,

$$\underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} 2\omega \omega_t dx dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^2 2\omega u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx dt}_{I_2} = \underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} 2\omega \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j^2} dx dt}_{I_3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} 2\omega \omega_t dx dt = \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\omega^2(x, t)) dt dx = \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2(x, t) \Big|_0^T dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\omega(x, T)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} |\omega(x, 0)|^2 dx \\ &= \|\omega(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \|\omega(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^2 2\omega u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx dt = \int_0^T \sum_{j=1}^2 2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \omega u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx}_{I'_2} dt = 0,$$

pois,

$$I'_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \omega \left(u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) dx \stackrel{(\text{Eq. Continuidade})}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \omega \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \omega) dx = - \int_{\mathbb{R}^2} u_j \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx.$$

$$I_3 = 2 \int_0^T \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j^2} dx dt = -2 \int_0^T \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|^2 dx dt = -2 \int_0^T \|D\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 dt.$$

Portanto,

$$\|\omega(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = -2 \int_0^T \|D\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 dt + \|\omega(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (4.13)$$

Derivando a equação (4.13) em relação a T , temos

$$\frac{d}{dt} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = -2 \|D\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{d}{dt} \|\omega(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = -2 \|D\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (4.14)$$

Observe agora que $\|\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$, pois através de integração por partes e notando que $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, resulta

$$\begin{aligned} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\omega(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] dx \\ &\stackrel{(\text{Int. Partes})}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \|D_i u_j(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Na verdade, a relação $\|\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$ vale para um caso mais geral, a saber (Teoremas A.7 e A.8)

$$\|D^\ell \omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|D^{\ell+1} u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2,$$

para $N = 2, 3$ e todo $\ell \geq 0$ inteiro.

E, por fim, aplicando (4.15) em (4.14) (ou a identidade acima para $\ell = 1$), resulta, para $N = 2$,

$$\frac{d}{dt} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = -2 \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} H_1^2(t) = -2 H_2^2(t). \quad (4.16)$$

Usando a monotonicidade de $H_1^2(t)$ (4.16) e a equação (4.11), obtemos

$$tH_1^2(t) \leq \int_0^t H_1^2(s)ds \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall t > 0. \quad (4.17)$$

E, portanto,

$$H_1^2(t) \leq \frac{1}{2t}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (4.18)$$

□

Lema 4.2. *Sendo $N = 2$, temos,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tH_1^2(t) = 0. \quad (4.19)$$

Demonstração. Por absurdo, supõe que o limite não acontece. Assim, $\exists \delta > 0$ e uma seqüência (t_j) com $t_j \rightarrow \infty$ e $t_{j+1} \geq 2t_j$ tal que

$$t_j H_1^2(t_j) \geq \delta, \quad \forall j. \quad (4.20)$$

Como $H_1^2(t)$ é decrescente, resulta

$$(t_{j+1} - t_j)H_1^2(t_{j+1}) \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} H_1^2(t)dt,$$

ou seja,

$$t_{j+1} \left(1 - \frac{t_j}{t_{j+1}}\right) H_1^2(t_{j+1}) \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} H_1^2(t)dt.$$

Mas como

$$t_{j+1} \geq 2t_j \Rightarrow 1 - \frac{t_j}{t_{j+1}} \geq \frac{1}{2},$$

obtemos

$$0 < \frac{\delta}{2} \leq t_{j+1} H_1^2(t_{j+1}) \left(1 - \frac{t_j}{t_{j+1}}\right) \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} H_1^2(t)dt, \quad \forall j. \quad (4.21)$$

Concluimos, assim, que

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} H_1^2(t)dt \geq \frac{\delta}{2}, \quad \forall j, \quad (4.22)$$

mas isto é um absurdo, pois, por (4.8),

$$\int_{t_j}^{+\infty} H_1^2(t)dt \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Portanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} tH_1^2(t) = 0$.

□

Finalmente, observe que através de (4.19) temos,

$$tH_1^2(t) = \psi(t), \quad \text{onde } \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$$

Como $H_1(t)$ é limitada quando $t \rightarrow 0$, por (4.3), podemos então escrever

$$H_1(t) = (1+t)^{-\frac{1}{2}}\phi(t), \quad (4.23)$$

com ϕ contínua em $[0, \infty)$ e $\phi(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

4.2.2 O Caso 3D

Através das desigualdades de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (Teorema A.3), obtemos, no caso $N = 3$,

$$|u|_\infty \leq K_1 H_0^{\frac{1}{4}} H_2^{\frac{3}{4}}, \quad (4.24)$$

$$H_1^2 \leq K_2 H_0 H_2, \quad (4.25)$$

onde $H_j(t) = \|D^j u(\cdot, t)\|$ e K_1, K_2 são constantes.

Além disso, segue diretamente de (4.25) que

$$H_2^{-\frac{1}{4}} \leq \sqrt[4]{K_2} H_0^{\frac{1}{4}} H_1^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.26)$$

Primeiro provaremos que $H_1(t)$ é monótona decrescente, se o produto $H_0(t)H_1(t)$ é suficientemente pequeno.

Lema 4.3. *Se $H_0(t_0)H_1(t_0) \leq \frac{1}{K_1^2 \sqrt{K_2}}$, onde K_1, K_2 são as constantes dadas em (4.24), (4.25) acima, então, $H_1(t)$ é monótona decrescente em $[t_0, +\infty)$ e assim*

$$H_1^2(t) \leq \frac{1}{2} \frac{\|u_0\|^2}{t - t_0}, \quad \forall t > t_0 \quad (4.27)$$

Demonstração. Seja

$$H_2^2(t) = \sum_{i,j=1}^3 \|D_i D_j u(\cdot, t)\|^2, \quad \forall t > 0 \quad (4.28)$$

a medida da segunda derivada de u na norma L^2 (Definição A.2).

Afirmção 4.1. $\frac{d}{dt}H_1^2(t) \leq 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}H_1H_2 - 2H_2^2, \quad \forall t > 0.$

Demonstração. Considere a equação (4.1) na forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \Delta u_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.29)$$

Derivando (4.29) em relação a x_ℓ , multiplicando por $2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}$, somando em $i, \ell = 1, 2, 3$ e integrando em \mathbb{R}^3 , obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,\ell=1}^3 2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial t} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,\ell=1}^3 2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,\ell=1}^3 2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 p}{\partial x_\ell \partial x_i} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,\ell=1}^3 2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j^2} dx \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aplicando a Regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} 2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial t} dx}_{I_1} + 2 \underbrace{\sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx}_{I_2} + 2 \underbrace{\sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 p}{\partial x_\ell \partial x_i} dx}_{I_3} \\ &= 2 \underbrace{\sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j^2} dx}_{I_4} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} 2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial t} dx = \sum_{i,\ell=1}^3 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \right)^2 dx = \frac{d}{dt} H_1(t)^2 \\ I_2 &= \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx \stackrel{(\text{Eq. Cont.})}{=} \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) dx \\ &= - \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (u_i u_j) dx \\ &= - \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} u_j dx - \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} dx \\ &= - \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} dx \end{aligned}$$

visto que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} u_j dx &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \right)^2 \right) u_j dx \\ &\stackrel{(\text{Eq. Cont.})}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \right)^2 \right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$I_3 = \sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_\ell} dx = \sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial^2 p}{\partial x_\ell^2} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \text{div}(u) \cdot \Delta p dx \stackrel{(\text{Eq. Cont.})}{=} 0$$

$$I_4 = \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j^2} dx = - \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_\ell} \right)^2 dx = -H_2^2(t)$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_1^2(t) + 2H_2^2(t) &= 2 \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} dx \\ &\stackrel{(\text{Cauchy})}{\leq} 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i,j,\ell=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j,\ell=1}^3 u_i^2 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} \right)^2 \right)^{1/2} dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,\ell=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \sum_{j,\ell=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &= 2H_2(t) \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \sum_{j,\ell=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} H_1(t) H_2(t) \end{aligned}$$

□

Portanto, através da Afirmação 4.1 e das equações (4.24) e (4.26), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_1^2(t) &\leq 2\|u\|_\infty H_1 H_2 - 2H_2^2 \\ &\stackrel{(4.24)}{\leq} 2K_1 H_0^{\frac{1}{4}} H_1 H_2^{\frac{7}{4}} - 2H_2^2 \\ &= 2H_2^2 \left(K_1 H_0^{\frac{1}{4}} H_1 H_2^{-\frac{1}{4}} - 1 \right) \\ &\stackrel{(4.26)}{\leq} 2H_2^2 \left(K_1 \sqrt[4]{K_2} H_0^{\frac{1}{2}} H_1^{\frac{1}{2}} - 1 \right). \end{aligned} \tag{4.32}$$

E supondo

$$H_0^{\frac{1}{2}} H_1^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{K_1 \sqrt[4]{K_2}}, \quad \text{em } t = t_0, \quad (4.33)$$

logo,

$$\frac{d}{dt} H_1^2(t) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.34)$$

E, assim, $\forall t \geq t_0$, por (4.8),

$$(t - t_0) H_1^2(t) \leq \int_{t_0}^t H_1^2(s) ds \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2, \quad (4.35)$$

o que prova (4.27). \square

Agora mostraremos que a condição $H_0 H_1 < \delta$, $\delta = K_1^{-2} K_2^{-\frac{1}{2}}$ do Lema 4.3 é sempre satisfeita para algum t_0 .

Seja

$$T = \frac{\|u_0\|^4}{\delta^2}. \quad (4.36)$$

Como, por (4.8),

$$2 \int_0^T H_1^2(t) dt \leq \|u_0\|^2, \quad (4.37)$$

existe $0 \leq t_0 \leq T$ tal que

$$2T H_1^2(t_0) \leq \|u_0\|^2, \quad (4.38)$$

pelo Teorema do Valor Médio para Integrais (Teorema A2).

Logo,

$$H_0^2(t_0) H_1^2(t_0) \leq \frac{\|u_0\|^4}{2T} \stackrel{(4.36)}{=} \frac{\delta^2}{2} \leq \delta^2. \quad (4.39)$$

como queríamos mostrar.

Assim, pelo Lema 4.3, a função $H_1(t)$ é monotonicamente decrescente para $t \geq T$, T dado em (4.36) acima. Em particular, para $t > T$, obtemos

$$(t - T)H_1^2(t) \leq \int_T^t H_1^2(s)ds \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 < \infty. \quad (4.40)$$

Portanto,

$$H_1^2(t) \leq \frac{\|u_0\|^2}{2(t - T)}, \quad \forall t > T. \quad (4.41)$$

Além disso, como $H_1(t)$ não tem singularidades em $t = 0$, podemos reescrever (4.41) como

$$H_1(t) \leq c(1 + t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \geq 0. \quad (4.42)$$

para $c > 0$ constante apropriada (dependendo de u_0).

4.3 Decaimento de $H_0(t)$

Seja $e^{\Delta t}$ o operador solução da Equação (vetorial) do Calor dada em (4.4). Então, a solução $u(\cdot, t)$ do problema (4.1), (4.2) pode ser escrito como

$$u(t) = e^{\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)}Q(s)ds, \quad (4.43)$$

onde $Q = -\text{grad}(p) - u.\text{grad}(u)$.

A demonstração do Teorema 4.1 é baseada em estimativas simples do operador solução da Equação do Calor, da transformada de Fourier $\widehat{Q}(\kappa, t)$ de $Q(x, t)$ e de estimativas de decaimento de $H_1(t)$ estudadas na seção 4.2.

Definimos

$$\widehat{v}(\kappa, t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\kappa \cdot x} v(x, t) dx, \quad \kappa \in \mathbb{R}^N \quad (4.44)$$

como a transformada de Fourier no espaço da função $v(x, t)$, onde $\kappa \cdot x = \kappa_1 x_1 + \dots + \kappa_N x_N$ e $x = (x_1, \dots, x_N)$, $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_N)$.

Lema 4.4. A transformada de Fourier \widehat{Q} do termo $Q = -\text{grad}(p) - u \cdot \text{grad}(u)$ satisfaz

$$|\widehat{Q}(\kappa, t)| \leq \frac{2\sqrt{N}}{(2\pi)^{N/2}} H_0(t) H_1(t) \quad (4.45)$$

$$|\widehat{Q}(\kappa, t)| \leq \frac{2N|\kappa|}{(2\pi)^{N/2}} H_0^2(t), \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}^N. \quad (4.46)$$

Demonstração. Tomando o divergente de (4.1), Δp satisfaz (3.16), i.e.,

$$-\Delta p = \sum_{i,j=1}^N D_i(u_j D_j u_i) \stackrel{(\text{Eq. Continuid})}{=} \sum_{i,j=1}^N D_i D_j (u_i u_j). \quad (4.47)$$

Observe que

$$\widehat{\Delta p} = \sum_{j=1}^N \widehat{(D_j^2 p)} = -|\kappa|^2 \widehat{p}(\kappa, t) \quad (4.48)$$

e

$$\widehat{\Delta p} = - \sum_{i,j=1}^N \widehat{(D_i D_j (u_i u_j))} = \sum_{i,j=1}^N \kappa_i \kappa_j \widehat{(u_i u_j)} \quad (4.49)$$

Logo,

$$\widehat{p}(\kappa, t) = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\kappa_i \kappa_j}{|\kappa| |\kappa|} \widehat{(u_i u_j)} \quad (4.50)$$

Além disso, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema A.5, $p = q = 2$), resulta

$$\begin{aligned} |\widehat{p}(\kappa, t)| &\leq \sum_{i,j=1}^N |\widehat{u_i u_j}| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \sum_{i,j=1}^N \|u_i u_j\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \sum_{i,j=1}^N \|u_i\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \sum_{j=1}^N \|u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left(\sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right)^2 \leq \frac{N}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Assim, obtemos a seguinte estimativa

$$|\widehat{p}(\kappa, t)| \leq \frac{N}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} H_0^2(t), \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}^N, t > 0. \quad (4.52)$$

Considerando a equação (4.48) e também

$$\widehat{\Delta p} = - \sum_{i,j=1}^N \widehat{\left(D_i(u_j D_j u_i) \right)} = - \sum_{i,j=1}^N \mathbf{i} \kappa_i \widehat{(u_j D_j u_i)} \quad (4.53)$$

obtemos

$$\widehat{p}(\kappa, t) = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{i} \frac{\kappa_i}{|\kappa|^2} \widehat{(u_j D_j u_i)}. \quad (4.54)$$

Mas como $\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} = \mathbf{i} \kappa_i \widehat{p}$, obtemos

$$\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} = \mathbf{i} \kappa_i \sum_{\ell,j=1}^N \mathbf{i} \frac{\kappa_\ell}{|\kappa|^2} \widehat{(u_j D_j u_\ell)} = - \sum_{\ell,j=1}^N \frac{\kappa_i}{|\kappa|} \frac{\kappa_\ell}{|\kappa|} \widehat{(u_j D_j u_\ell)}. \quad (4.55)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} \right| &\leq \sum_{\ell,j=1}^N |\widehat{u_j D_j u_\ell}| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \sum_{\ell,j=1}^N \|u_j D_j u_\ell\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \sum_{\ell,j=1}^N \|u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|D_j u_\ell\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left(\sum_{\ell,j=1}^N \|u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\ell,j=1}^N \|D_j u_\ell\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{N}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} H_0 H_1. \end{aligned} \quad (4.56)$$

E, assim,

$$|\widehat{\nabla p}| \leq \frac{\sqrt{N}}{(2\pi)^{N/2}} H_0 H_1. \quad (4.57)$$

Portanto, usando (4.57), resulta

$$\begin{aligned} |\widehat{Q}| &\leq |\widehat{\text{grad}(p)}| + |u \cdot \widehat{\text{grad}(u)}| = |\widehat{\text{grad}(p)}| + \sum_{\ell,j=1}^N |\widehat{u_j D_j u_\ell}| \\ &\leq 2 \sum_{\ell,j=1}^N |\widehat{u_j D_j u_\ell}| \leq \frac{2\sqrt{N}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} H_0 H_1. \end{aligned} \quad (4.58)$$

o que prova (4.45).

Além disso,

$$\begin{aligned}
|\widehat{Q}| &\leq |\widehat{\text{grad}(p)}| + |u \widehat{\text{grad}(u)}| = |\kappa| |\widehat{p}| + \sum_{\ell,j=1}^N |\widehat{u_j D_j u_\ell}| \\
&= |\kappa| |\widehat{p}| + \sum_{\ell,j=1}^N |\widehat{D_j u_j u_\ell}| = |\kappa| \left(|\widehat{p}| + \sum_{\ell,j=1}^N |\widehat{u_j u_\ell}| \right) \\
&\leq 2|\kappa| \sum_{\ell,j=1}^N |\widehat{u_j u_\ell}| = \frac{2N|\kappa|}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} H_0^2
\end{aligned} \tag{4.59}$$

provando (4.46). \square

No próximo Lema, obteremos uma estimativa para a solução da Equação do Calor usando a relação de Parseval.

Lema 4.5. *Sejam $\widehat{u}_0, |\kappa|^{-1}\widehat{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então, a solução $e^{\Delta t}u_0$ da Equação do Calor satisfaz*

$$\|e^{\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq c_1 t^{-\frac{N}{4}} \|\widehat{u}_0\|_\infty \tag{4.60}$$

e

$$\|e^{\Delta t}u_0\| \leq c_2 t^{-\frac{N}{4}-\frac{1}{2}} \|\widehat{w}_0\|_\infty, \quad \text{se } \widehat{w}_0(\kappa) = |\kappa|^{-1}\widehat{u}_0(\kappa). \tag{4.61}$$

onde c_1 e c_2 são constantes adequadas (que não dependem de u).

Demonstração. A Relação de Parseval estabelece que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. Assim, utilizando esta relação, podemos escrever para $u(t) = e^{\Delta t}u_0$,

$$\begin{aligned}
\|e^{\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &= \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\kappa, t)|^2 d\kappa = \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}_0(\kappa, t)|^2 e^{-2|\kappa|^2 t} d\kappa \\
&\leq \|\widehat{u}_0\|_\infty^2 \int_{|w|=1} \int_0^\infty e^{-2r^2 t} r^{N-1} dr d\sigma(w) = \omega_N \|\widehat{u}_0\|_\infty^2 \int_0^\infty e^{-2r^2 t} r^{N-1} dr \\
&= \omega_N \|\widehat{u}_0\|_\infty^2 t^{-\frac{N}{2}} \int_0^\infty \rho^{N-1} e^{-2\rho^2} d\rho = c_3 t^{-\frac{N}{2}} \|\widehat{u}_0\|_\infty^2
\end{aligned} \tag{4.62}$$

onde $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$ e $r = t^{-1/2}\rho$. Assim, $\|e^{\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{c_3} t^{-\frac{N}{4}} \|\widehat{u}_0\|_\infty$. Mais precisamente,

$$\|e^{\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \begin{cases} 0.5\sqrt{2\pi} t^{-\frac{1}{2}} \|\widehat{u}_0\|_\infty, & N = 2 \\ \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} t^{-\frac{3}{4}} \|\widehat{u}_0\|_\infty, & N = 3 \end{cases} \tag{4.63}$$

A estimativa (4.61) segue de forma análoga. \square

Observação 4.2. Para o integrando da equação (4.43), os Lemas 4.4 e 4.5 implicam em

$$\begin{aligned} \|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq c_1(t-s)^{-\frac{N}{4}}\|\widehat{Q}(s)\|_\infty \\ &\leq \frac{2c_1\sqrt{N}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}(t-s)^{-\frac{N}{4}}H_0(s)H_1(s) \end{aligned} \quad (4.64)$$

e, de (4.59),

$$\begin{aligned} \|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq c_2(t-s)^{-\frac{N}{4}-\frac{1}{2}}\|\kappa|^{-1}\widehat{Q}(s)\|_\infty \\ &\leq \frac{2c_2N}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}(t-s)^{-\frac{N}{4}-\frac{1}{2}}H_0^2(s). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Observação 4.3. Observe que através das equações (4.5) e (4.43), temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \left\| e^{\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)}Q(s)ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|e^{\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left\| \int_0^t e^{\Delta(t-s)}Q(s)ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|e^{\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}ds \\ &\leq C(1+t)^{-\kappa} + \int_0^t \|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}ds \end{aligned} \quad (4.66)$$

A fim de demonstrarmos o Teorema (4.1), precisaremos de uma versão do Lema de Gronwall, a saber,

Lema 4.6. (Lema tipo Gronwall) Seja $y(t)$, $t \geq 0$, função real, não-negativa e contínua satisfazendo

$$y(t) \leq A(1+t)^{-\kappa_1} + B \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}y(s)ds. \quad (4.67)$$

onde A e B são constantes positivas.

Então, $y(t)(1+t)^{\kappa_1}$ é limitado se $0 < \kappa_1 \leq \alpha < 1 < \alpha + \beta$.

Demonstração. Seja

$$E(t) = y(t)(1+t)^{\kappa_1}, \quad E_{max}(t) = \max_{0 \leq s \leq t} E(s), \quad (4.68)$$

e, multiplicando (4.67) por $(1+t)^{\kappa_1}$, obtemos

$$\begin{aligned} y(t)(1+t)^{\kappa_1} &\leq A + B(1+t)^{\kappa_1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta} \frac{E(s)}{(1+s)^{\kappa_1}} ds \\ &\leq A + B(1+t)^{\kappa_1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta} \left(\max_{0 \leq s \leq t} E(s) \right) (1+s)^{-\kappa_1} ds \\ &= A + BE_{max}(t)(1+t)^{\kappa_1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta-\kappa_1} ds. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Assim,

$$E(t) \leq A + BE_{max}(t)(1+t)^{\kappa_1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta-\kappa_1} ds. \quad (4.70)$$

A fim de demonstrarmos o Lema 4.6 (Gronwall), analisaremos separadamente os casos $\kappa_1 < \alpha$ e $\kappa_1 = \alpha$.

Caso A

Seja $\kappa_1 < \alpha$. Desejamos mostrar que o fator multiplicando $E_{max}(t)$ na equação (4.70) tende a 0 quando $t \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[(1+t)^{\kappa_1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta-\kappa_1} ds \right] = 0.$$

Considere

$$(1+t)^{\kappa_1} \left[\underbrace{\int_0^{t/2} (t-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta-\kappa_1} ds}_{I_1} + \underbrace{\int_{t/2}^t (t-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta-\kappa_1} ds}_{I_2} \right]. \quad (4.71)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{t/2} (t-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta-\kappa_1} ds \\
&\leq 2^\alpha t^{-\alpha} \int_0^t (1+s)^{-\beta-\kappa_1} ds \\
&\leq c 2^\alpha t^{-\alpha} \cdot \begin{cases} 1, & \beta + \kappa_1 > 1 \\ \ln(1+t), & \beta + \kappa_1 = 1 \\ (1+t)^{1-\beta-\kappa_1}, & \beta + \kappa_1 < 1 \end{cases} \quad (4.72)
\end{aligned}$$

Logo, $(1+t)^{\kappa_1} I_1 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, pois

$$\kappa_1 - \alpha < 0 \quad \text{e} \quad 1 - \alpha - \beta < 0.$$

E também,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{t/2}^t (t-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta-\kappa_1} ds \\
&\leq 2^{\beta+\kappa_1} (1+t)^{-\beta-\kappa_1} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\alpha} ds \\
&= \frac{2^{\alpha+\beta+\kappa_1-1}}{1-\alpha} (1+t)^{-\beta-\kappa_1} t^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $(1+t)^{\kappa_1} I_2 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, pois $1 - \alpha - \beta < 0$.

Desse modo, de (4.70), existe $t_1 > 0$ tal que

$$E(t) \leq A + \frac{1}{2} E_{max}(t), \quad \forall t \geq t_1. \quad (4.73)$$

Como $E(t)$ é limitado para $0 \leq t \leq t_1$, pois $E(t)$ é contínua e $[0, t_1]$ é compacto, existe $m_1 > 0$ tal que $E(t) \leq m_1, \forall t \in [0, t_1]$.

Seja $m_2 = \max\{A, m_1\}$. Então,

$$E(t) \leq m_1 \leq m_2 \leq m_2 + \frac{1}{2} E_{max}(t), \quad \forall 0 \leq t \leq t_1, \quad (4.74)$$

e, portanto,

$$E(t) \leq m_2 + \frac{1}{2}E_{max}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.75)$$

de modo que

$$E(s) \leq m_2 + \frac{1}{2}E_{max}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (4.76)$$

Pela definição de $E_{max}(t)$, resulta

$$E_{max}(t) \leq m_2 + \frac{1}{2}E_{max}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.77)$$

Assim,

$$E(t) \leq E_{max}(t) \leq 2m_2, \quad (4.78)$$

ou seja, $E(t)$ é limitado.

Caso B

Seja $\kappa_1 = \alpha$. Escolha $\delta > 0$ de tal forma que $\delta - \alpha - \beta < -1$. Podemos substituir κ_1 em (4.67) por $\alpha - \delta$ e concluir do caso A da demonstração que

$$y(t) \leq C_\delta(1+t)^{-\alpha+\delta}.$$

Usando esta limitação na integral em (4.67), temos

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}y(s)ds &\leq C_\delta \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{\delta-\alpha-\beta}ds \\ &= C_\delta \int_0^{t/2} (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{\delta-\alpha-\beta}ds + C_\delta \int_{t/2}^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{\delta-\alpha-\beta}ds. \end{aligned}$$

Como $\delta - \alpha - \beta < -1$, obtemos

$$\int_0^{t/2} (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{\delta-\alpha-\beta}ds \leq c_\delta 2^\alpha t^{-\alpha}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{\delta-\alpha-\beta} ds &\leq 2^{-\delta+\alpha+\beta}(1+t)^{\delta-\alpha-\beta} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\alpha} ds \\ &= \frac{2^{2\alpha+\beta-\delta-1}}{1-\alpha} t^{1-\alpha}(1+t)^{\delta-\alpha-\beta} \leq c_\delta t^{-\alpha} \end{aligned}$$

pois $\delta - \alpha - \beta < -1$.

Dessa forma, (4.67) garante $y(t) \leq C_\delta(1+t)^{-\alpha}$, completando a prova do lema. \square

Prova do Teorema 4.1, $N=3$

Precisamos mostrar que $H_0(t) \leq M(1+t)^{-\kappa}$ para $0 < \kappa \leq \frac{5}{4}$, se $\|e^{\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\kappa}$. Usando (4.42), (4.64) e (4.66), temos

$$\begin{aligned} H_0(t) &\stackrel{(4.66)}{\leq} C(1+t)^{-\kappa} + \int_0^t \|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\stackrel{(4.64)}{\leq} C(1+t)^{-\kappa} + \frac{2\sqrt{3}c_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} H_0(s)H_1(s) ds \\ &\stackrel{(4.42)}{\leq} C(1+t)^{-\kappa} + K \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{1}{2}} H_0(s) ds \end{aligned}$$

onde $K = \frac{2\sqrt{3}cc_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$, $c > 0$ constante dada em (4.42). Considere os seguintes casos:

Caso A

Seja $0 < \kappa \leq \frac{3}{4}$. Fazendo $\alpha = \frac{3}{4}$ e $\beta = \frac{1}{2}$, podemos aplicar o Lema 4.6, pois $0 < \kappa \leq \frac{3}{4} < 1 < \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

Logo, $H_0(t)(1+t)^\kappa$ é limitada, ou seja,

$$H_0(t) \leq K_1(1+t)^{-\kappa},$$

para $K_1 > 0$ constante adequada.

Caso B

Seja $\frac{3}{4} < \kappa \leq \frac{5}{4}$. Usando as equações (4.42), (4.64), (4.65) e (4.66), resulta

$$\begin{aligned}
H_0(t) &\stackrel{(4.66)}{\leq} C(1+t)^{-\kappa} + \int_0^t \|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&= C(1+t)^{-\kappa} + \int_0^{t/2} \|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds + \int_{t/2}^t \|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\stackrel{(4.65)}{\leq} C(1+t)^{-\kappa} + \frac{6c_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{5}{4}} H_0^2(s) ds + \int_{t/2}^t \|e^{\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\stackrel{(4.64)}{\leq} C(1+t)^{-\kappa} + \frac{6c_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{5}{4}} H_0^2(s) ds + \frac{2\sqrt{3}c_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} H_0(s) H_1(s) ds \\
&\stackrel{(4.42)}{\leq} C(1+t)^{-\kappa} + \frac{6c_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{5}{4}} H_0^2(s) ds + \frac{2\sqrt{3}cc_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} (1+s)^{-1/2} H_0(s) ds
\end{aligned}$$

Observando que $H_0(t) \leq k_1(1+t)^{-\frac{3}{4}}$ do caso A, a integral $\int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{5}{4}} H_0^2(s) ds$ pode ser limitada como segue

$$\begin{aligned}
\int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{5}{4}} H_0^2(s) ds &\leq K_1^2 \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{5}{4}} (1+s)^{-\frac{3}{2}} ds \\
&\leq 2^{\frac{5}{4}} K_1^2 t^{-\frac{5}{4}} \int_0^t (1+s)^{-\frac{3}{2}} ds \\
&\leq 2^{\frac{5}{4}} K_1^2 t^{-\frac{5}{4}}.
\end{aligned}$$

Assim, com $\kappa \leq \frac{5}{4}$ obtemos, para $C > 0$ apropriado,

$$H_0(t) \leq C(1+t)^{-\kappa} + K \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} (1+s)^{-\frac{1}{2}} H_0(s) ds,$$

onde $K = \frac{2\sqrt{3}cc_1}{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}$.

Definindo $E(t)$ e $E_{max}(t)$ como em (4.68) com $y(t) = H_0(t)$ e procedendo de forma análoga ao desenvolvimento feito em (4.69), obtemos

$$\begin{aligned} H_0(t)(1+t)^\kappa &\leq C + K(1+t)^\kappa \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{1}{2}} \frac{E(s)}{(1+s)^\kappa} ds \\ &\leq C + K(1+t)^\kappa \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \max_{\frac{t}{2} \leq s \leq t} E(s) ds \\ &\leq C + KE_{max}(t)(1+t)^\kappa \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} ds. \end{aligned}$$

A integral $\int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} ds$ é limitada por $2^{\kappa+\frac{5}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\kappa} t^{\frac{1}{4}}$ e, portanto, o fator multiplicando $E_{max}(t)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Como na prova do Lema 4.6 (Gronwall), fica estabelecida a limitação para $E(t)$. Assim, provamos o Teorema 4.1 para $N = 3$.

Prova do Teorema 4.1, N=2

Precisamos mostrar que $H_0(t) \leq M(1+t)^{-\kappa}$ para $0 < \kappa \leq 1$, supondo $\|e^{\Delta t} u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(1+t)^{-\kappa}$. Considere os seguintes casos:

Caso A

Seja $0 < \kappa < \frac{1}{2}$. Por (4.23), (4.64) e (4.66), temos,

$$\begin{aligned} H_0(t) &\stackrel{(4.66)}{\leq} C(1+t)^{-\kappa} + \int_0^t \|e^{\Delta(t-s)} Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \\ &\stackrel{(4.64)}{\leq} C(1+t)^{-\kappa} + \frac{\sqrt{2}c_1}{\pi} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} H_0(s) H_1(s) ds \\ &\stackrel{(4.23)}{=} C(1+t)^{-\kappa} + \frac{\sqrt{2}c_1}{\pi} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}} \phi(s) H_0(s) ds. \quad (4.79) \end{aligned}$$

onde $\phi(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$.

Observação 4.4. Note que o Lema 4.6 não se aplica neste caso, pois em (4.79) teríamos $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ e $\alpha + \beta > 1$ é hipótese do Lema. Para superar essa dificuldade, vamos usar $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$.

Sejam, como antes,

$$E(t) = H_0(t)(1+t)^\kappa, \quad E_{max}(t) = \max_{0 \leq s \leq t} E(s), \quad (4.80)$$

daí, obtemos, de (4.79)

$$E(t) \leq C + \frac{\sqrt{2}c_1}{\pi} E_{max}(t)(1+t)^\kappa J(t),$$

onde $J(t) = \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \phi(s) ds$

Uma vez mostrado que $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = 0$, a limitação de $E(t)$ segue como na demonstração do Lema 4.6. Para provar que $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = 0$, considere

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \phi(s) ds = \int_0^{T_0} (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \phi(s) ds + \\ &\quad + \int_{T_0}^{t/2} (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \phi(s) ds + \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \phi(s) ds \\ &:= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \end{aligned}$$

Para qualquer T_0 fixo e t suficientemente grande, $I_1(t) \leq K(T_0)(t-T_0)^{-\frac{1}{2}}$, e então

$$(1+t)^\kappa I_1(t) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \longrightarrow \infty$$

desde que $\kappa < \frac{1}{2}$. E também,

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int_{T_0}^{t/2} (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \phi(s) ds \\ &\leq K \left(\max_{s \geq T_0} \phi(s) \right) t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{2}-\kappa}. \end{aligned}$$

E então,

$$\sup_{t \geq T_0} (1+t)^\kappa I_2(t) \leq K \max_{s \geq T_0} \phi(s) \leq \varepsilon \quad (4.81)$$

se T_0 é suficientemente grande. Além disso,

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \phi(s) ds \\ &\leq K \left(\max_{s \geq T_0} \phi(s) \right) t^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{-\frac{1}{2}-\kappa}. \end{aligned}$$

e uma estimativa como (4.81) pode ser obtida trocando-se I_2 por I_3 .

Resumindo, mostramos que $J(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, que implica $H_0(t) \leq C(1+t)^{-\kappa}$ para $0 < \kappa < \frac{1}{2}$.

Caso B

Seja $\frac{1}{2} \leq \kappa < 1$. Fixe $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ com $\gamma + \kappa < 1$ e note que, pelo Caso A dessa demonstração, $H_0(t) \leq C(1+t)^{-\gamma}$. Por (4.66) e (4.65), temos

$$\begin{aligned} H_0(t) \leq & C(1+t)^{-\kappa} + K \int_0^{t/2} (t-s)^{-1} H_0^2(s) ds + \\ & + K \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}} \phi(s) H_0(s) ds. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Use a estimativa $H_0(s) \leq C(1+t)^{-\gamma}$ para um dos fatores H_0 da primeira integral da equação (4.82). Se $E(t)$ e $E_{max}(t)$ são definidos como em (4.80), então

$$\begin{aligned} E(t) \leq C & + KE_{max}(t)(1+t)^\kappa \int_0^{t/2} (t-s)^{-1} (1+s)^{-\gamma-\kappa} ds \\ & + KE_{max}(t)(1+t)^\kappa \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \phi(s) ds. \end{aligned}$$

Esperamos que os dois fatores multiplicando $E_{max}(t)$ tendam a zero quando $t \rightarrow \infty$. De fato,

$$\begin{aligned} I_4(t) & := \int_0^{t/2} (t-s)^{-1} (1+s)^{-\gamma-\kappa} ds \\ & \leq Kt^{-1} \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{1-\gamma-\kappa}, \end{aligned}$$

e, assim, $(1+t)^\kappa I_4(t) \rightarrow 0$, pois $\gamma > 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned} I_5(t) & := \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} \phi(s) ds \\ & \leq \max_{s \geq t/2} \phi(s) \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}-\kappa} ds \\ & \leq K \max_{s \geq t/2} \phi(s) \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\kappa} t^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

então,

$$(1+t)^\kappa I_5(t) \leq C \max_{s \geq t/2} \phi(s) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \longrightarrow 0.$$

Se t é suficientemente grande, então $E(t) \leq C + \frac{1}{2}E_{max}(t)$, e a estimativa $H_0(t) \leq C(1+t)^{-\kappa}$ é obtida.

Caso C

Seja $\kappa = 1$. Fixe $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ e note que $H_0(t) \leq C(1+t)^{-\gamma}$ pelo Caso B da prova. Portanto, por (4.82)

$$H_0(t) \leq C(1+t)^{-1} + K \int_0^{t/2} (t-s)^{-1}(1+s)^{-2\gamma} ds + \quad (4.83)$$

$$+ K \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}}\phi(s)H_0(s)ds. \quad (4.84)$$

A primeira integral é limitada por $Kt^{-1} \int_0^t (1+s)^{-2\gamma} ds \leq K(1+t)^{-1}$, isto é, decai como o primeiro termo do lado direito de (4.83). Os argumentos restantes são os mesmos da parte B da demonstração pois a relação $(1+t)^\kappa I_5(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ se mantém para $\kappa = 1$. Isso completa a prova do Teorema 4.1 para o caso $N = 2$.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

No que segue apresentamos os resultados numéricos obtidos através da implementação computacional das equações (3.13), (3.15) e (3.20) para escoamento em regime incompressível, bidimensional e viscoso, em uma região retangular onde há a formação de um vórtice.

A fim de analisarmos um escoamento é indispensável um bom conhecimento fenômeno físico relacionado. Assim, primeiro devemos identificar as variáveis do problema que o melhor representam. No caso de um vórtice, os resultados podem ser visualizados através do campo de vorticidade. Podemos ainda representar (graficamente) o escoamento pelas linhas de corrente. Essas linhas são tangentes ao vetor velocidade em cada ponto do campo de escoamento num dado instante [29].

A implementação computacional foi desenvolvida na linguagem FORTRAN 90. Inicialmente, a compilação foi realizada utilizando os computadores do Laboratório Integrado de Computação Científica (LICC-IM/UFRGS). Logo após, tornou-se necessário o uso do computador CRAY T94, localizado no CESUP-UFRGS. Já a visualização dos resultados foi feita através dos Softwares Visual 2D [18].

Com o intuito de comparar resultados, são realizadas simulações para um escoamento ao redor de um cilindro circular em regime de transição. Essa calibração do código é feita comparando os resultados obtidos com os de Jiang Chun Bo [7] para número de Reynolds igual a 4375. Em seguida, trocamos o cilindro circular por um vórtice e analisamos o fluxo para Reynolds de 1000, 5000 e 10000. Assim, esse vórtice, aparentemente simples, é muito rico no entendimento de fenômenos como um tornado.

5.1 Escoamento em torno de um Cilindro Circular

Os resultados numéricos desta seção têm o objetivo de comparar qualitativamente os resultados do código utilizado para as simulações do vórtice. A malha utilizada nas simulações tem 420×280 nós numa região retangular de comprimento 3 e altura 2. Como a geometria é simples, não se utilizou concentração de células em uma região específica. Essa malha será utilizada em todos os resultados computacionais deste capítulo.

Existem diversos fatores que podem modificar as características na esteira para cada diâmetro do vórtice. Entre eles destacamos o número de Reynolds [46], [58]. O escoamento ao redor do cilindro circular é bem simples para baixos números de Reynolds. No entanto, à medida que aumenta o número de Reynolds, o escoamento passa por sucessivas mudanças de comportamento (regimes laminar, transiente e turbulento) [57].

A transição do escoamento laminar para o turbulento manifesta-se, inicialmente, pela desorganização da esteira do cilindro. Com o aumento do número de Reynolds, as instabilidades que dão origem a este processo aproximam-se cada vez mais do cilindro, fazendo oscilar até mesmo os vórtices que se desprendem próximos à sua base, conforme pode ser visto na figura 5.1 para $Re = 4375$. Observe que esse número de Reynolds caracteriza um regime, onde ocorrem instabilidades (turbulentas) na esteira [57]. Essa mudança afeta diretamente a frequência de emissão de vórtices.

Na figura 5.1 comparamos o resultado aqui obtido com o resultado experimental realizado por Jiang Chun Bo [7].

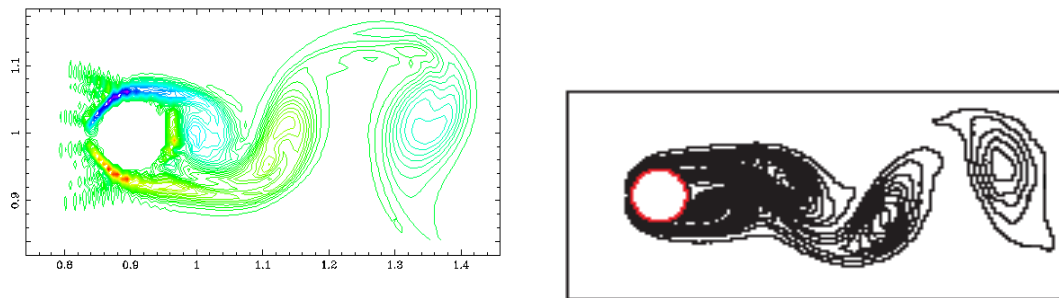


Figura 5.1: Linhas de vorticidade para $Re = 4375$ (superior) e resultado apresentado por Jiang Chun Bo [7].

5.2 Escoamento em torno de um Vórtice

Nesta seção pretendemos analisar o fluxo (de ventos) próximo a um vórtice (uma idealização de um tornado). Observe que a simulação bidimensional não reproduz o estiramento do vórtice que ocorre no problema tridimensional. Este mecanismo é responsável pelo aumento da circulação e da vorticidade em tornados.

Cada seção bidimensional tem um raio específico. Fisicamente, o raio de um tornado varia desde alguns metros até quilômetros de extensão. Neste problema consideramos um vórtice de raio mínimo $400m$ e raio máximo $2km$. Dividimos a altura do tornado, que pode chegar a $1,5km$, em 5 planos bidimensionais. Assim, cada seção possui um determinado raio. Para fins de simulação numérica, consideramos os raios e a velocidade angular conforme a figura 5.2.

De forma a elucidar a variação do raio do vórtice em estudo, obteve-se a figura 5.3. Sua modelagem é baseada na solução do seguinte sistema autônomo de equações

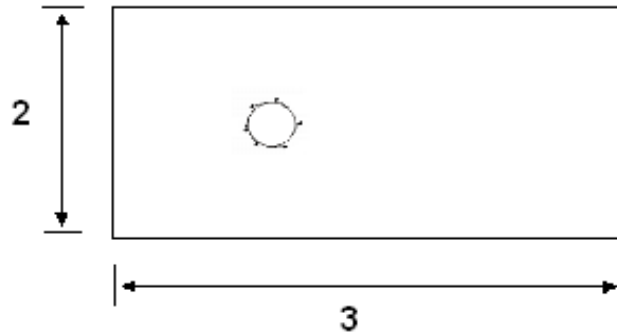


Figura 5.2: Raios do Tornado e Velocidade Angular

diferenciais ordinárias,

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= -x(a - by) + sz & x(0) &= 0.1 \\
 \frac{dy}{dt} &= -y(c + x^2) & y(0) &= 0.01 \\
 \frac{dz}{dt} &= -dx & z(0) &= 0.01
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde a , b , c e d são parâmetros positivos e XZ é o plano horizontal. Esse sistema de três EDOs de 1ª ordem acopladas estimam a velocidade do fluxo e são derivadas do modelo de Gause [8].

Uma região de recirculação na esteira do vórtice principal cresce ganhando circulação atraindo, a partir de dado instante, partículas de fluido da camada cisalhante [31]. Ao caminharem na direção do vórtice maior, as partículas podem seguir três direções distintas, como mostra a figura 5.4.

- elas podem unir-se ao vórtice em formação, na direção da esteira (a);
- elas podem mover-se na direção da camada cisalhante, que possui vorticidade de sinal inverso (b) e;

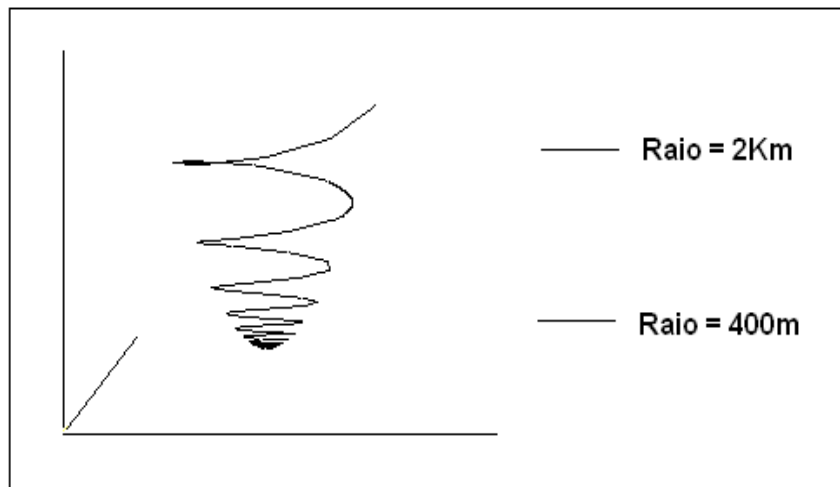


Figura 5.3: Representação de um tornado axissimétrico [8]. $a = 0.2$, $b = 0.6$, $c = 0.2$ e $d = 10$

- elas podem caminhar em direção ao cilindro, na direção da região da esteira próxima ao vórtice (c).

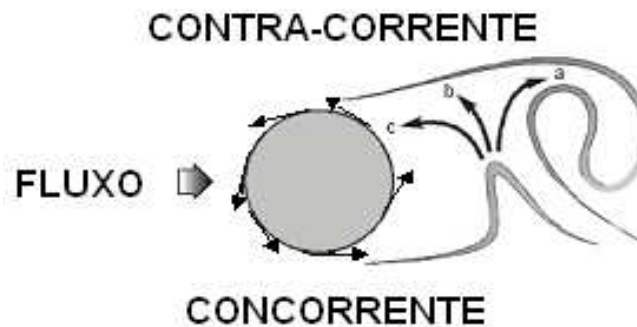


Figura 5.4: Esquema do processo de geração e desprendimento de vórtices.

A parcela do escoamento que segue o caminho (a) mistura-se com o fluido que está formando um vórtice na região superior da esteira. Uma vez que essa parcela possui vorticidade contrária àquela do fluido que está constituindo o vórtice, ela colabora para a diminuição da circulação total desse último. A parcela que

segue em direção à camada cisalhante (b) tem um papel muito importante no que se refere à estabilidade do escoamento. Havendo uma diminuição da pressão, a camada cisalhante que está se separando do corpo torna-se mais intensa, logo o vórtice gerado também se torna mais intenso. Com isto, uma parcela maior ainda da camada cisalhante atravessará a linha de centro da esteira e uma porção maior de fluido com vorticidade de sinal contrário se chocará com esta camada fazendo com que haja uma diminuição da intensidade do vórtice que está crescendo. Isso causa a interrupção da alimentação de circulação para este vórtice. Após esta interrupção, o vórtice adquire sua circulação final e desprende-se da camada cisalhante que lhe deu origem. Finalmente, a parcela de fluido que segue o caminho indicado pela seta (c), colabora para a formação de um novo vórtice, mas agora na parte inferior da esteira, fechando o ciclo de geração e desprendimento de vórtices.

A seguir são apresentados os perfis de velocidade, analisando a influência do número de Reynolds em relação ao raio de cada seção do vórtice. Na visualização dos resultados, a escala de cores do violeta ao vermelho indica o aumento da intensidade do campo.

Para baixos números de Reynolds, as linhas de corrente contornam suavemente o vórtice. Em regimes mais severos, entretanto, grandes estruturas turbilhonares podem se desprender desordenadamente. É justamente essa característica que desejamos analisar nesta seção. Para isso serão mostrados escoamentos para $Re = 1000$, $Re = 5000$ e $Re = 10000$. Para uma melhor visualização, consideraremos a seção cujo raio é 0.06. A figura 5.5 mostra o perfil de velocidades para $Re = 1000$, onde não observamos desprendimento de vórtices até 2.4s, mas já se observa a assimetria. No entanto, para $Re = 5000$ esse desprendimento já pode ser captado, conforme mostra a figura 5.6.

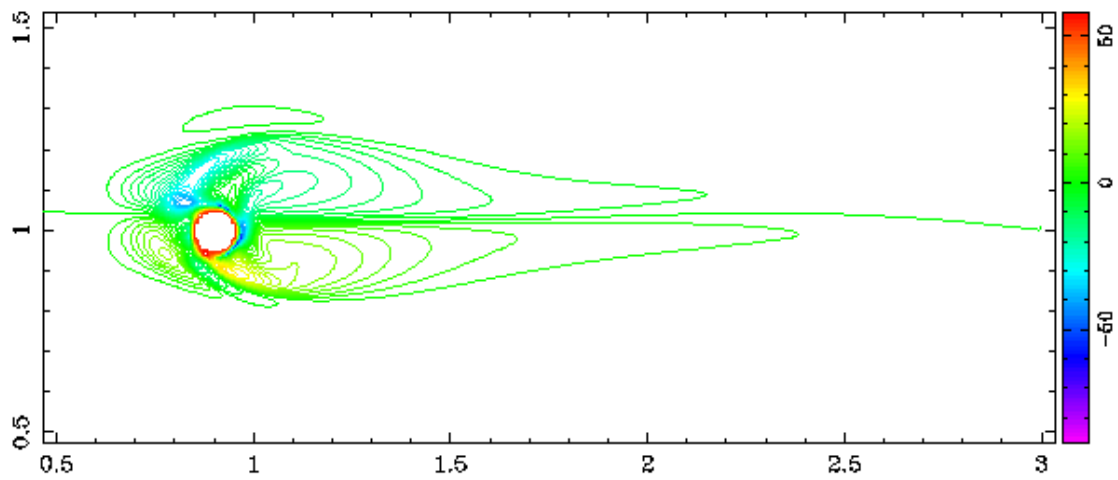


Figura 5.5: Perfil de vorticidade na esteira do vórtice para $Re=1000$ após 2,4 seg.

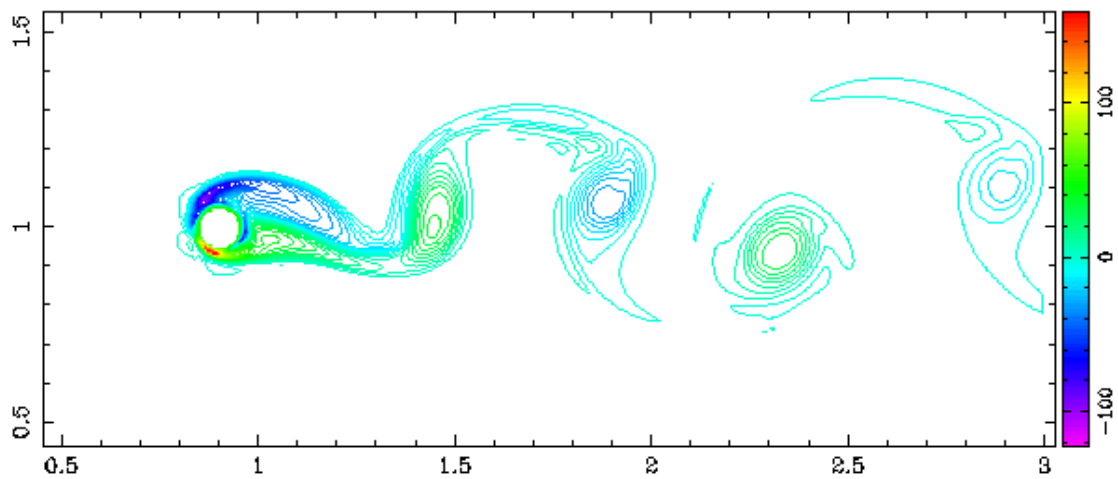


Figura 5.6: Perfil de vorticidade na esteira do vórtice para $Re=5000$ após 2,4 seg.

Quando $Re = 10000$, percebemos uma instabilidade maior nas adjacências do vórtice principal, o que também induz ao crescimento no nível das oscilações [16]. Além disso, observamos que após 2,4 seg., os contornos do domínio relativamente pequenos começam a influenciar o fluxo, devido ao desprendimento de vórtices cada vez maiores (Fig. 5.7).

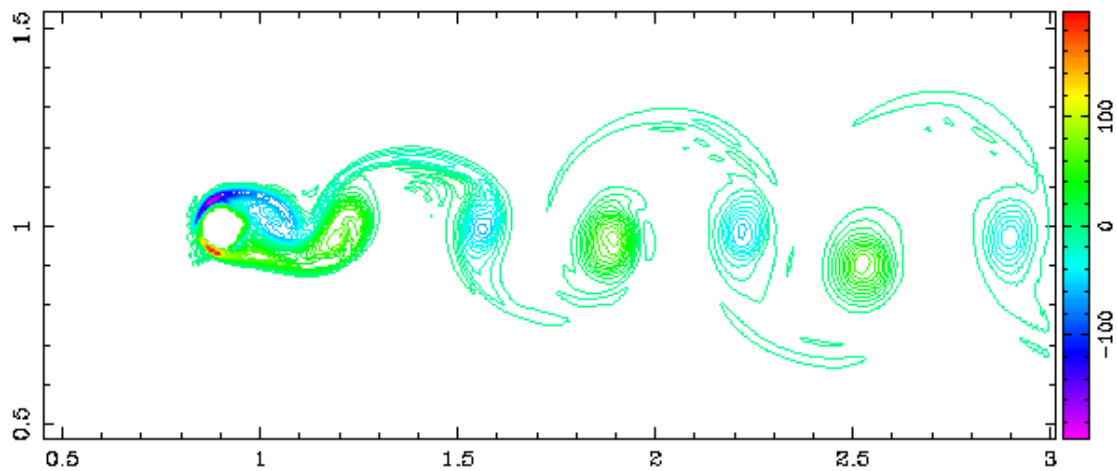


Figura 5.7: Perfil de vorticidade na esteira do vórtice para $Re=10000$ após 2,4 seg.

Na esteira do vórtice principal foi constatada a formação de recirculações, que se movem alternadamente no sentido horário e anti-horário. A região destacada da figura 5.8 foi ampliada (Fig. 5.9) a fim de visualizarmos essa característica.

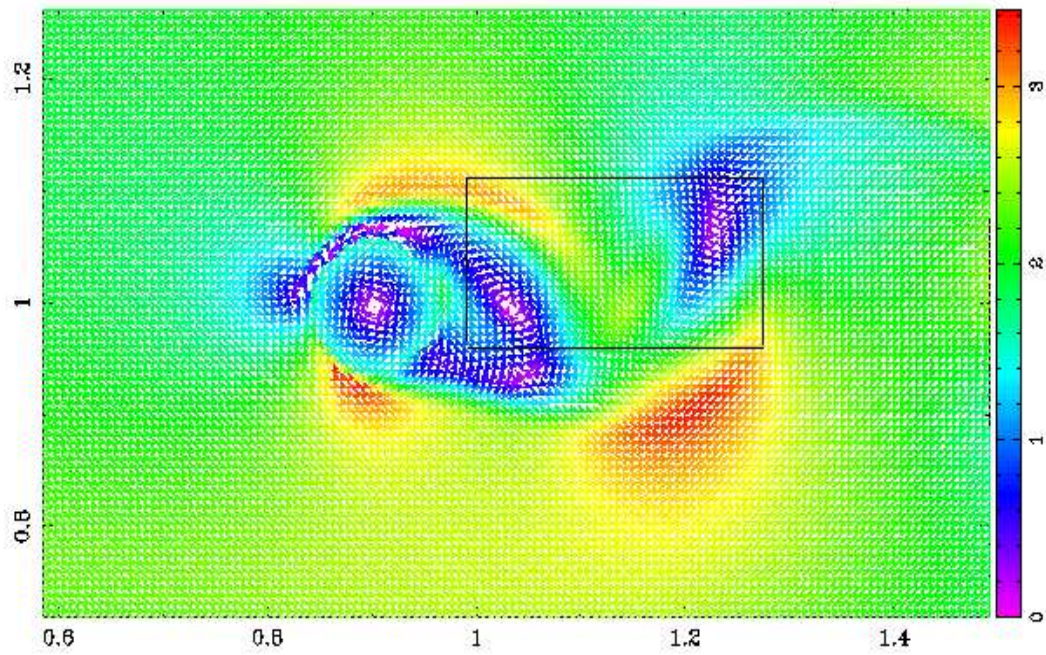


Figura 5.8: Delimitação da região a ser ampliada. $Re = 10000$. Raio=0.06

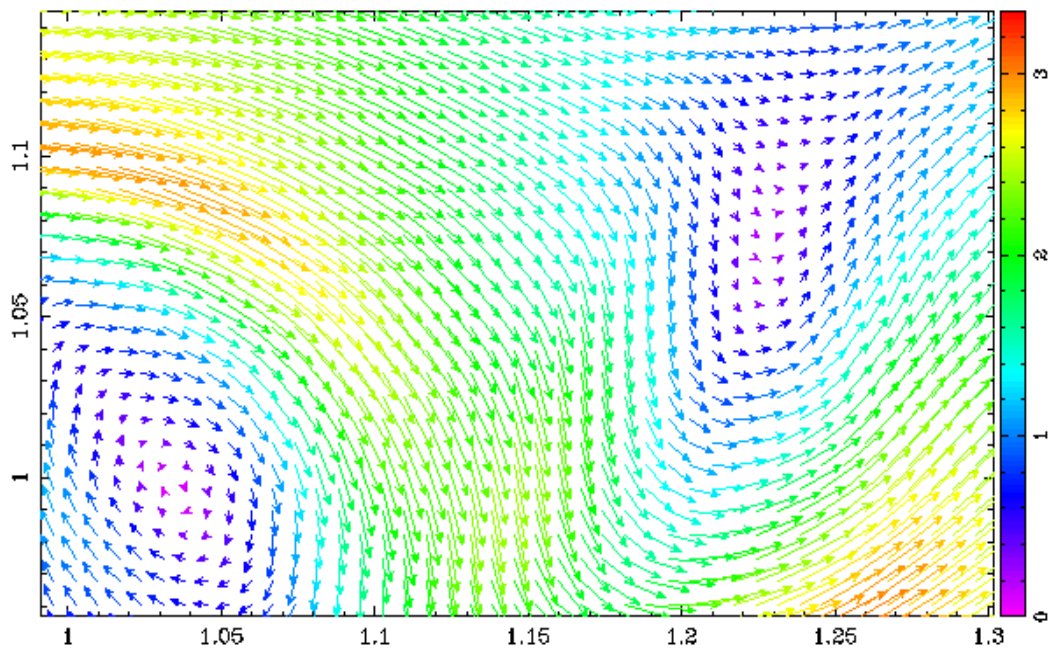
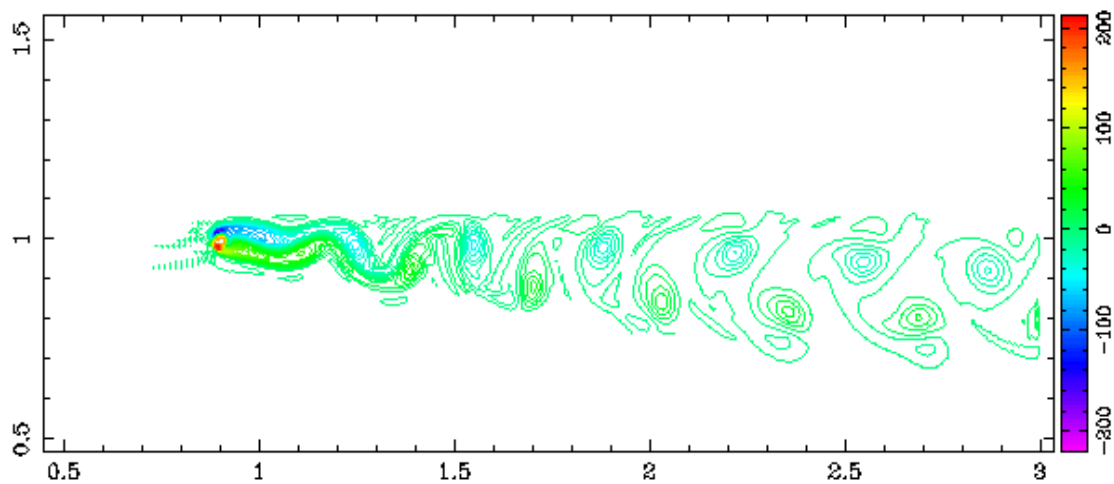
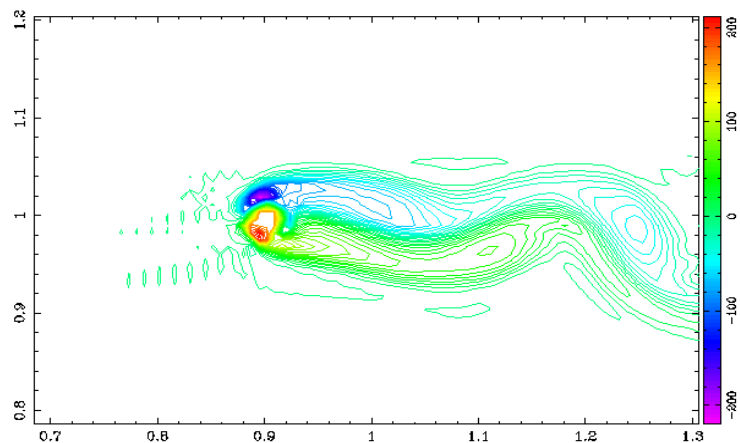


Figura 5.9: Ampliação da região delimitada na figura 5.8. $Re = 10000$. Raio=0.06

Nas figuras de 5.10 a 5.14 consideramos $Re = 10000$, com o objetivo de verificar a influência do raio do vórtice com a frequência de emissão de vórtices e as zonas de maior e menor intensidade das velocidades do mesmo. Quando consideramos a seção do vórtice cujo raio é 0.02 (Fig. 5.10), percebemos um estreitamento da esteira, o que não ocorre para raios maiores (Figuras 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14). Observe ainda que, nesse caso, as instabilidades na adjacência do vórtice principal não foram suficientes para gerar o desprendimento dos vórtices junto ao mesmo (Fig. 5.10).



(a)

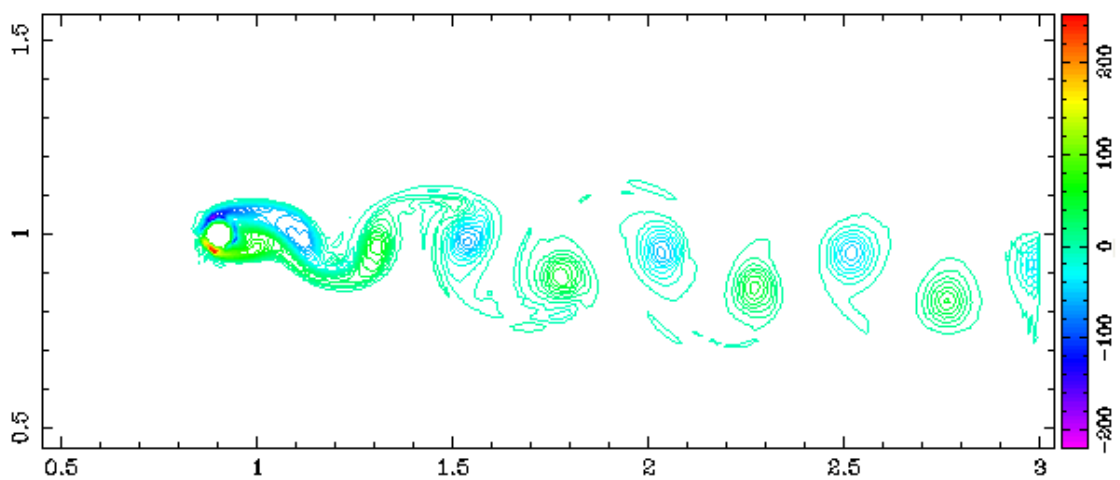


(b)

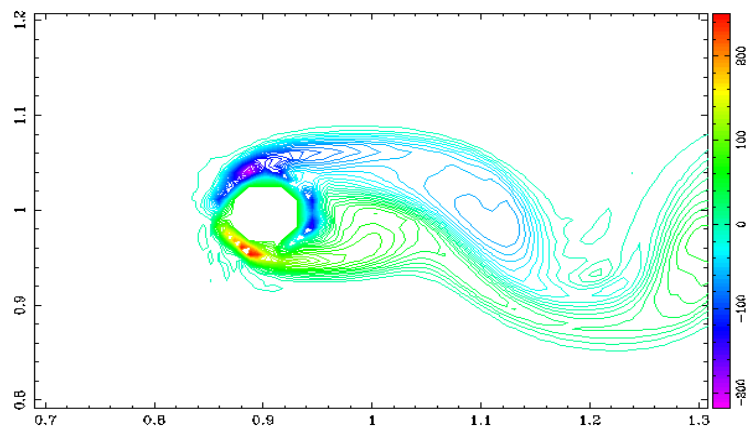
Figura 5.10: Campo de vorticidade sobre o perfil (a); Instabilidade nas adjacências do vórtice principal (b). ($Re = 10000$. Raio=0.02.)

Para estas simulações consideramos 2.4 segundos do fenômeno real; assim, acreditamos que as instabilidades sobre o perfil, com raio = 0.02 e $Re = 10000$, forcem esses desprendimentos apenas para tempos maiores do que o considerado.

Observando a figura 5.11, percebemos que começa a ocorrer o desprendimento dos vórtices antes presos ao vórtice principal. Essa característica também pode ser observada para os outros raios maiores do que 0.04.



(a)



(b)

Figura 5.11: Campo de vorticidade sobre o perfil (a); Instabilidade nas adjacências do vórtice principal (b). ($Re = 10000$. Raio=0.04.)

A estrutura dos vórtices gerados na seção do tornado com raio 0.06 (Fig. 5.12) é visivelmente maior, mais energética. E isso ocorre sempre que aumentamos a dimensão do raio, fato que já era esperado. Na figura 5.12 visualiza-se melhor as regiões próximas ao vórtice gerador onde a intensidade do vento é maior.

Conforme visto na figura 5.4, notamos que na parte inferior do vórtice principal (região concorrente) a direção do escoamento (vento) é a mesma direção do vórtice. Assim, é natural que nessa região os ventos adquiram maior velocidade. A faixa em vermelho (inferior) da figura 5.12, que indica maior intensidade dos vetores velocidade, está justamente na região concorrente do vórtice, evidenciando o fato. Por outro lado, observamos que na região contra-corrente há interferência entre o fluxo principal e o fluxo devido ao vórtice, o que gera uma redução da velocidade nessa área.

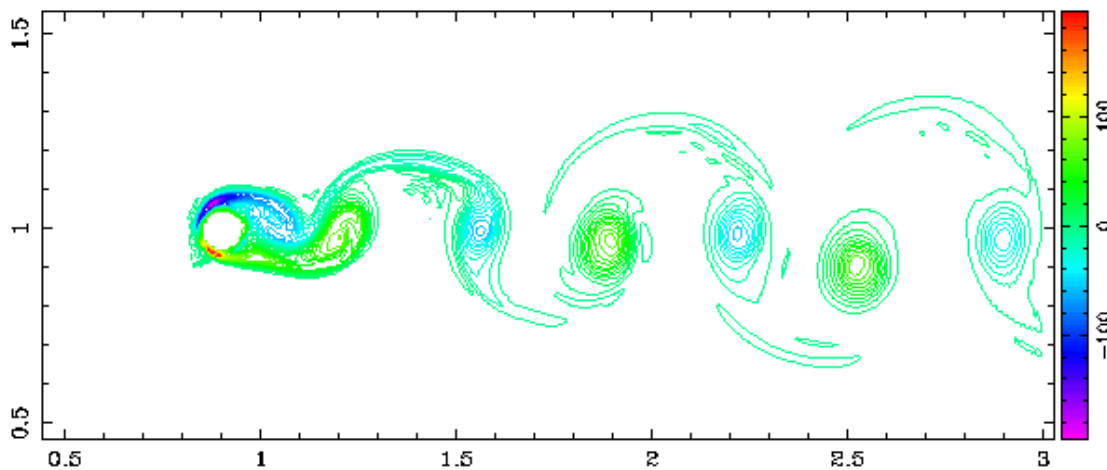


Figura 5.12: Campo de vorticidade sobre o perfil para $Re = 10000$. Raio=0.06.

Nas figuras 5.13 e 5.14, percebemos, nitidamente, o contraste em relação aos casos anteriores, se comparamos o tamanho dos vórtices. No caso do escoamento de maior raio (raio=0.1) os contornos do domínio começam a receber influência do fluxo.

Em última análise, percebemos que ocorre um gradativo aumento do afastamento dos vórtices na esteira conforme o raio é aumentado.

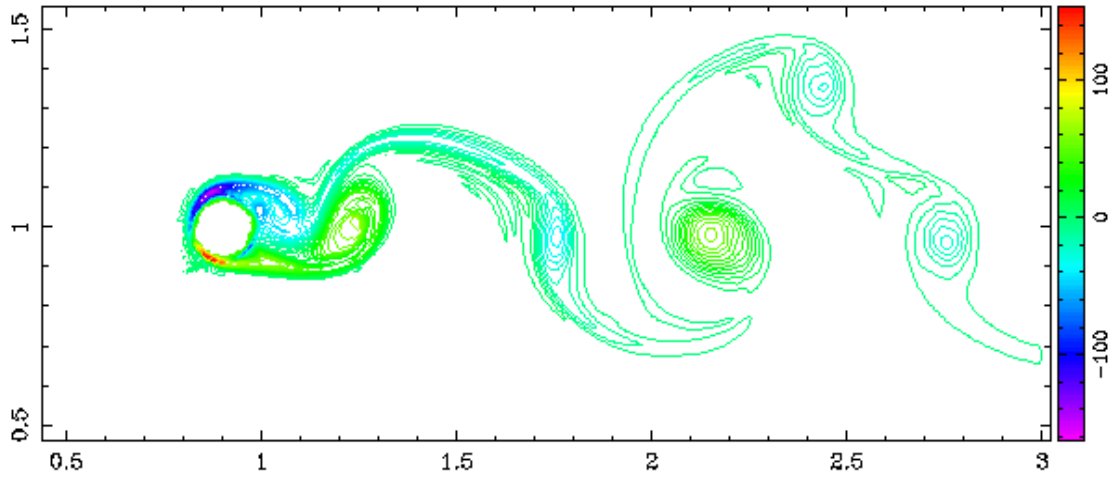


Figura 5.13: Campo de vorticidade sobre o perfil para $Re = 10000$. Raio=0.08.

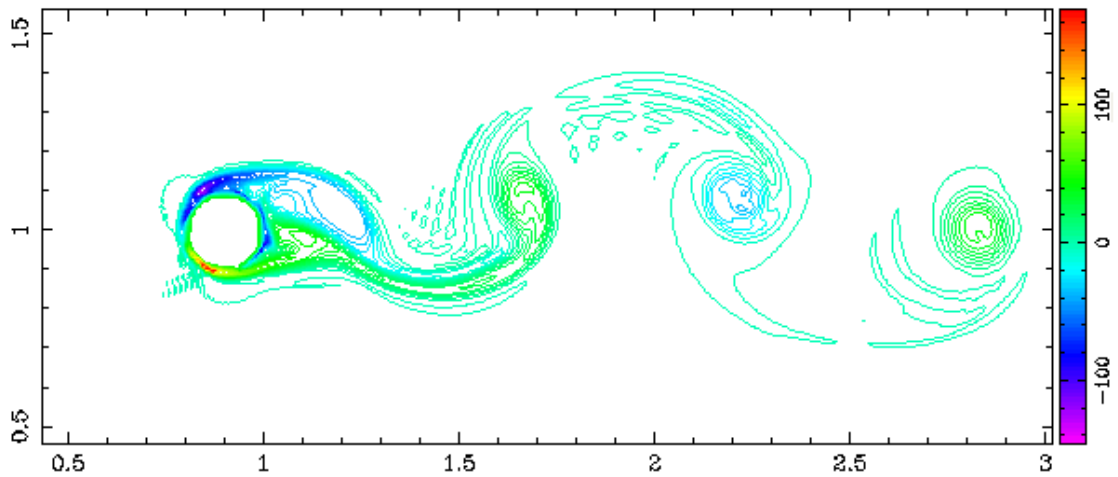


Figura 5.14: Campo de vorticidade sobre o perfil para $Re = 10000$. Raio=0.1.

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por objetivo a análise do comportamento e das características de fluxos em torno de um vórtice, considerando o escoamento bidimensional, incompressível, viscoso, Newtoniano e em regime turbulento. Além disso, objetivou-se estudar o comportamento das soluções das equações de Navier-Stokes na norma L^2 quando $t \rightarrow \infty$.

Inicialmente, simulamos um escoamento ao redor de um cilindro circular para $Re = 4375$ com o intuito de verificar a capacidade de reproduzir resultados pelo código computacional que foi usado nas simulações posteriores. Através das simulações numéricas em cada plano bidimensional de um vórtice, observamos o surgimento da esteira, ou seja, regiões de recirculação, que já eram esperadas devido ao fenômeno da separação da camada limite. As simulações foram realizadas para Re 1000, 5000 e 10000. Também verificamos que à medida que o raio de cada seção vai aumentando, os vórtices começam a se tornar cada vez mais energéticos.

As simulações realizadas neste trabalho possuem algumas limitações, que são listadas abaixo. Ao mesmo tempo, essas limitações indicam sugestões para futuros trabalhos:

- o modelo físico utilizado reproduz de forma muito simplificada um tornado real. O objetivo era combinar a modelagem física com a visualização gráfica de modo a analisar características como o desprendimento de vórtices. No entanto, nem todos os fatores físicos foram considerados, devido à limitação de tempo e fontes de pesquisa. Assim, no futuro, mais propriedades físicas, como a temperatura, por exemplo, necessitam ser integradas ao modelo.

- no modelo matemático foram consideradas as equações de Navier-Stokes bidimensionais. Assim, espera-se que uma abordagem 3D em trabalhos futuros capte melhor as características do vórtice aqui estudadas.

Conforme estudo analítico feito no capítulo 4, concluímos que a solução das equações de Navier-Stokes decai na norma L^2 com a taxa $(1+t)^{-\kappa}$, se o mesmo ocorrer para $e^{\Delta t}u_0$, sendo $0 < \kappa < \frac{N}{4} + \frac{1}{2}$. Em [34] é também mostrado, por um argumento análogo ao usado no Teorema 4.1, que sob as mesmas hipóteses sobre u_0

$$\begin{aligned}\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= O(1+t)^{-\kappa-\frac{1}{2}} \\ \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= O(1+t)^{-\kappa-1}\end{aligned}$$

para t grande, de modo que, pela Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (Teorema A.3), temos

$$\begin{aligned}\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}\|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \\ &= O(1+t)^{-\kappa-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

no caso $N = 2$, e

$$\begin{aligned}\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq C\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \\ &= O(1+t)^{-\kappa-\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

no caso $N = 3$.

Portanto, os valores pontuais da velocidade do escoamento decrescem a zero em toda parte (uniformemente). Em outras palavras, no modelo utilizado para a discussão das seções do vórtice, concluímos que o campo de velocidades se dissipa passado tempo suficientemente longo. Observe ainda que o decaimento das soluções $u(\cdot, t)$, demonstrada para $Re = 1$, é válida também para números de Reynolds grandes, desde que a hipótese de suavidade das soluções seja mantida.

Apêndice A

Definição A.1. Sendo Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^N , $C^0(\Omega)$ denota o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, e, dado $k \geq 1$ inteiro, $C^k(\Omega)$ denota o conjunto de funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ k -vezes continuamente diferenciáveis em Ω . E denotamos por $C^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis em Ω , i.e.,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

De modo similar, $C^k(\Omega)^m$ é o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, tais que $f_i \in C^k(\Omega)$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

Definição A.2. Seja Ω um conjunto (Lebesgue-) mensurável em \mathbb{R}^N e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Definimos [11]

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

onde $L^1(\Omega)$ é o espaço das funções integráveis em Ω (no sentido de Lebesgue). Este espaço possui a norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ dada por [11]

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Definição A.3. Dado Ω mensurável em \mathbb{R}^N , definimos [11]

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \exists C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ qtp}^1 \text{ em } \Omega\},$$

com a norma natural

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| \leq C, \text{ qtp em } \Omega\} = \text{ess sup}_{\Omega} |f|.$$

Analogamente, $L^p(\Omega)^m$ denota o espaço das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, tais que $f_i \in L^p(\Omega)$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$. $L^p(\Omega)^m$ é um espaço

¹qtp: em quase toda parte (a menos de um conjunto de medida nula).

de Banach na norma natural

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^m \|f_i\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

se $1 \leq p < \infty$, e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \max\{\|f_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \dots, \|f_m\|_{L^\infty(\Omega)}\}.$$

Um caso particular importante corresponde a $p = 2$, a saber,

Definição A.4. Dada $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^N)^N$, $u = (u_1, \dots, u_N)$,

$$H_0(t) = \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{i=1}^N \|u_i(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right)^{1/2},$$

e, sendo $u(\cdot, t) \in C^1(\mathbb{R}^N)^N$,

$$H_1(t) = \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{i,j=1}^N \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right)^{1/2},$$

e, em geral, se $u(\cdot, t) \in C^\ell(\mathbb{R}^N)^N$,

$$H_\ell(t) = \|D^\ell u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{i,j_1, \dots, j_\ell=1}^N \left\| \frac{\partial^\ell u_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right)^{1/2}.$$

Teorema A.1. (Teorema da Divergência). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é C^1 , $\bar{\Omega}$ seu fecho (i.e., $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$), e seja n o vetor normal unitário exterior em cada ponto de $\partial\Omega$. Dado $\omega \in C^1(\bar{\Omega})^N$ qualquer, temos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \omega dx = \int_{\partial\Omega} \omega \cdot n ds, \quad (\text{A.1})$$

onde ds denota o elemento de área na superfície $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [44], pp. 492-494. □

Teorema A.2. (Primeiro Teorema do Valor Médio para Integrais) Sendo f contínua no intervalo $[a, b]$, então existe constante c em $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. Ver [43], pp. 135. □

Teorema A.3. (*Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg*). Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e $j, m \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq j < m$ tal que [1], [47], [33]

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + a \left(\frac{1}{q} - \frac{m}{N} \right) + (1-a) \frac{1}{r},$$

para $a \in [j/m, 1)$. Então, existe constante $C > 0$, $C = C(m, j, n, p, q, r)$ tal que

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|D^m u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^a \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^{1-a}, \quad (\text{A.3})$$

$\forall u \in C_0^m(\mathbb{R}^N)$. Quando $m < j + \frac{N}{q}$, (A.3) vale também no caso $a = 1$.

Demonstração. Ver [30], PDEs, pp. 22-27 (Seção 1.9). □

Teorema A.4. (*Desigualdade de Young*) Sendo $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos [24]

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \quad \forall a, b \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

Demonstração. Se $a = 0$ ou $b = 0$, (A.4) vale trivialmente. Basta então considerar $a, b > 0$. Como $\exp(x)$ é função convexa, temos

$$\begin{aligned} ab &= \exp\left(\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)\right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp(\ln(a^p)) + \frac{1}{q} \exp(\ln(b^q)) \\ &= \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema A.5. (*Desigualdade de Hölder*) Sendo Ω mensurável $\subseteq \mathbb{R}^N$, e sendo $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos [24]

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}, \quad (\text{A.5})$$

$\forall f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$.

Demonstração. Se $p = 1, q = \infty$ ou $p = \infty, q = 1$, a desigualdade é óbvia; se $p, q > 1$ finitos são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, procedemos do seguinte modo: se $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $\|g\|_{L^q(\Omega)} = 0$, (A.5) é óbvia; assim, vamos supor $\|f\|_{L^p(\Omega)} > 0$ e $\|g\|_{L^q(\Omega)} > 0$. Definindo $\tilde{f} \in L^p(\Omega), \tilde{g} \in L^q(\Omega)$, via

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &:= \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \\ \tilde{g}(x) &:= \frac{g(x)}{\|g\|_{L^q(\Omega)}},\end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$, obtemos

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\Omega)} = 1, \quad \|\tilde{g}\|_{L^q(\Omega)} = 1,$$

e, pela Desigualdade de Young (A.4),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\tilde{f}(x)| |\tilde{g}(x)| dx &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} |\tilde{f}(x)|^p + \frac{1}{q} |\tilde{g}(x)|^q \right) dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\tilde{f}(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\tilde{g}(x)|^q dx \\ &= \frac{1}{p} \|\tilde{f}\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{q} \|\tilde{g}\|_{L^q(\Omega)}^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| dx \leq 1,$$

o que prova (A.5). □

Teorema A.6. (*Regra de Leibniz*) Se $f(x, y)$ é uma função contínua no retângulo $[a, b] \times [c, d]$ com $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínua, então

$$\frac{d}{dy} \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \quad (\text{A.6})$$

para cada $c < y < d$.

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema A.7. *Seja $u \in C^{\ell+1}(\mathbb{R}^3)^3$, $\ell \geq 0$ inteiro, com $\operatorname{div}(u) = 0$, então*

$$\|D^\ell \omega\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|D^{\ell+1} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (\text{A.7})$$

onde $\omega = \nabla \wedge u$ é o rotacional de u .

Demonstração. Temos

$$\omega = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} e_k,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 e ε_{ijk} é o tensor permutação

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{se } i, j, k \text{ não são todos distintos} \\ 1, & \text{se } i, j, k \text{ é permutação par de } 1, 2, 3 \\ -1, & \text{se } i, j, k \text{ é permutação ímpar de } 1, 2, 3 \end{cases}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \|D^\ell \omega\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^3 \left\| \frac{\partial^\ell \omega}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^3 \sum_{i,j,p,q=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} \frac{\partial^{\ell+1} u_q}{\partial x_p \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} dx \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^3 \sum_{i,j,p,q=1}^3 (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} \frac{\partial^{\ell+1} u_q}{\partial x_p \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} dx, \end{aligned}$$

visto que

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp},$$

onde δ_{ij} denota o tensor de Kroenecker, i.e.,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}
\|D^\ell \omega\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^3 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} \right)^2 dx + \\
&\quad - \sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^3 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} \frac{\partial^{\ell+1} u_i}{\partial x_j \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} dx \\
&= \|D^{\ell+1} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\
&\quad - \sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^3 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} \frac{\partial^{\ell+1} u_i}{\partial x_j \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\ell}} dx \\
&= \|D^{\ell+1} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.
\end{aligned}$$

□

Teorema A.8. Sendo $u \in C^{\ell+1}(\mathbb{R}^2)^2$, $\ell \geq 0$ inteiro, com $\operatorname{div}(u) = 0$, então

$$\|D^\ell \omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|D^{\ell+1} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad (\text{A.8})$$

onde $\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$ é o rotacional de u .

Demonstração. Análoga à demonstração do Teorema A.7, observando que

$$\omega = \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] ANDERSON, D., TANNEHIL, J., AND PLETCHER, R. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. McGraw-Hill, 1984.
- [3] BARENBLATT, G. *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, 1998.
- [4] BARTLE, R. *The Elements of Real Analysis*. New York: Wiley, 1976.
- [5] BATCHELOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [6] BLUESTEIN, H., AND GOLDEN, J. *A review of tornado observations. In The Tornado: its structure, dynamics, prediction and hazards*. Geophysical Monograph 79, 1993.
- [7] BO, J. C. *Study of Concentration Fields in Turbulent Wake Regions*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 41, 2003.
- [8] BOUALLI, S. *Twisting Rolls: An Heuristic Model and 3D Numerical Simulations of Vortex Patterns*. Geophysical Monograph 79, 2003.
- [9] BRADFORD, S. *A study of tornado and tornado producing synoptic systems*. 1969.
- [10] BRIGHTON, J., AND HUGHES, W. *Dinâmica dos Fluidos*. Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1974.
- [11] BRÉZIS, H. *Análisis funcional - Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1983.

- [12] BURDEM, R., AND FAIRES, J. *Análise Numérica*. Pioneira Thompson learning, 2001.
- [13] BUTCHER, J. *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods*. Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [14] CARVALHO, S. *Uma Simulação Numérica do Escoamento na Artéria Carótida*. Dissertação de mestrado, UFRGS, PPGMAP, 1998.
- [15] CASULLI, V., AND GREENSPAN, D. *Numerical Analysis for Applied Mathematicians, Science and Engineering*. Addison-Werley Publishing Co.Inc., New York, 1988.
- [16] CATTANI, M. *Elementos de Mecânica dos Fluidos*. Editora Edgard Blücher Ltda, 1990.
- [17] CHORIN, A. *Vorticity and Turbulence*. Springer, 1994.
- [18] CUNHA, R., AND JUSTO, D. *Visual - Uma Família de Softwares para Visualização de Fenômenos de Mecânica dos Fluidos*. LICC, Porto Alegre, 1999.
- [19] DE BORTOLI, A. *Solution of Incompressible Flows Using Compressible Flow Solvers*. DLR-IB 129, Institut für Entwurfsaerodynamik, Deutschland, 1994.
- [20] DE BORTOLI, A. *Introdução à Dinâmica de Fluidos Computacional*. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2000.
- [21] DING, X. *Physically-based Simulation of Tornadoes*. PhD Thesis, University of Waterloo, Canadá, 2004.
- [22] DRAZIN, P., AND REID, W. *Hydrodynamic Stability*. Binghamton, New York, 1981.

- [23] ELSON, D. *The Tornado and Storm Research Organisation*. Disponível em: <http://www.torro.org.uk/TORRO/index.php>, Acessado em 25/01/2006.
- [24] EVANS, L. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [25] FARRELL, B., AND NOLAN, D. *The structure and dynamics of tornado-like vortices*. Journal of the Atmospheric Sciences, 1999.
- [26] FIEDLER, B. *Numerical simulation of axisymmetric tornadogenesis in forced convection. In the Tornado: its structure, dynamics, prediction and hazards*. Geophysical Monograph 79, 1993.
- [27] FIEDLER, B., AND TRAPP, R. *Numerical simulation of tornadolike vortices in asymmetric flow. Int The Tornado: its structure, dynamics, prediction, and hazards*. Geophysical Monograph 79, 1993.
- [28] FLETCHER, C., AND SRINIVAS, K. *Computational Techniques for Fluid Dynamics: A Solutions Manual*. Springer-Verlag, 1992.
- [29] FOX, R., AND MCDONALD, A. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Editora Livro Técnico e Científico - LTC, Rio de Janeiro, 1998.
- [30] FRIEDMAN, A. *Partial Differential Equations*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [31] GERRARD, J. *The Mechanics of the Formation Region of Vortices Behind Bluff Bodies*. Journal of Fluid Mechanics, Vol 25, 1996.
- [32] GRAY, W., AND NOVLAN, D. *Hurricane-spawned tornadoes*. Monthly Weather Review 102, 1974.
- [33] GUADAGNIN, M. *Alguns Resultados para a Equação do Calor e Equações de Advecção-Difusão*. Dissertação de mestrado, UFRGS, PPGMAp, 2005.

- [34] HAGSTROM, T., KREISS, H.-O., LORENZ, J., AND ZINGANO, P. *Decay in Time Results of Incompressible Flows*. J. Math. Fluid Mech., 2005.
- [35] HERCKERT, M. *Fluidodinâmica Computacional e suas Aplicações*. Monografia, Universidade Federal de Uberlândia, 2004.
- [36] JISCHKE, M., AND PARANG, M. *On tornado funnels*. Oklahoma Academy of Science, 1978.
- [37] KELLER, S. C. *Desenvolvimento de uma técnica numérica para análise de escoamentos em cavidades para Rayleigh entre 10^2 e 10^5* . Dissertação de mestrado, UFRGS, PPGMAP, 2000.
- [38] KLEMP, J., AND WILHELMSON, R. *The simulation of three-dimensional convective storm dynamics*. Journal of the Atmospheric Sciences 35, 1978.
- [39] KREISS, H., AND LORENZ, J. *Initial-Boundary Value Problems and The Navier-Stokes Equations*. Academic Press, Vol. 1, 1989.
- [40] KROLL, N., AND JAIN, R. *Solution of Two-Dimensional Euler Equations - Experience with a Finite Volume Code*. Forschungsbericht, DFVLR-FB 8741, Braunschweig, 1987.
- [41] LEWELLEN, D., AND LEWELLEN, W. *Large-eddy simulation of a tornado's interaction with the surface*. Journal of the Atmospheric Sciences 54, 1997.
- [42] LEWELLEN, W. *Tornado vortex theory*. In *The Tornado: its structure, dynamics, prediction and hazards*. Geophysical Monograph 79, 1993.
- [43] LIMA, E. *Análise Real, Volume 1*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Coleção Matemática Universitária, 1989.
- [44] LIMA, E. *Curso de Análise, Volume 2*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, 2000.

- [45] MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. Editora Livro Técnico e Científico - LTC, Rio de Janeiro, 1995.
- [46] MOSER, C. *Simulação Numérica de Esteiras em Transição utilizando o Método de Contornos Virtuais*. Dissertação de mestrado, UFRGS, PPGMAp, 2002.
- [47] NIRENBERG, L. *Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes Equations in \mathbb{R}^m , with Applications to Weak Solutions*. Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, XIII, 1959.
- [48] NOLAN, D. *A New Scaling for Tornado-Like Vortices*. J. Atmos. Sci., 2005.
- [49] PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York, 1981.
- [50] ROTURNO, R. *Numerical Simulation of a Laboratory Vortex*. Journal of the Atmospheric Sciences 34, 1977.
- [51] SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [52] TAVARES, A. *Simulação Numérica do escoamento Incompressível através de Canis Retos com Expansão Geometricamente Brusca*. Dissertação de mestrado, UFRGS, PPGMAp, 1999.
- [53] WALLIN, S. *Notes for: Applied Computational Fluid Dynamics*. Dept. of Mechanics, KTH and Aeronautics Dept., FFA, FOI, 2004.
- [54] WANG, P. *Large Eddy Simulation of Turbulent Swirling Flows and Turbulent Premixed Combustion*. PhD Thesis, Mechanics Department of Heat and Power Engineering, Lund Institute of Technology, 2004.
- [55] WENDT, J. H. *Computational Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

- [56] WIEGNER, M. *Decay Results for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations on R^n* . J. London Math. Soc. Vol. 2, 1987.
- [57] WILLIAMSON, C. H. K. *Vortex Dynamics in the Cylinder Wake*. Annu. Rev. Fluid Mech., 1996.
- [58] ZHANG, H. *Vortex Dynamics in the Cylinder Wake*. Annu. Rev. Fluid Mech., 1996.