

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM PROCEDIMENTO ADAPTATIVO PARA
ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES BASEADO EM ESTIMADOR DE ERRO A
POSTERIORI

por

Jonabe Prezzi dos Passos

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Dezembro de 2012



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM PROCEDIMENTO ADAPTATIVO PARA
ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES BASEADO EM ESTIMADOR DE ERRO A
POSTERIORI

por

Jonabe Prezzi dos Passos

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Arnaldo Ruben Gonzalez
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Ignacio Iturrioz

Prof. Jakson Manfredini Vassoler

Prof. Jun Sérgio Ono Fonseca

Porto Alegre, 3 de Dezembro, 2012.

Passos, J.P. Desenvolvimento e implementação de um procedimento adaptativo para elementos finitos triangulares baseado em estimador de erro a posteriori. 2012. 24 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

RESUMO

O método dos elementos finitos, como todo método baseado em discretização do domínio, gera resultados dependentes da qualidade e refino da malha empregada, dentre outros fatores. O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de um procedimento de refinamento adaptativo para refino de malhas de elementos finitos baseado no estimador de erro ZZ. A geração de malha emprega uma versão do método do Avanço de Fronteira para elementos triangulares. Uma vez realizada uma análise inicial, o estimador ZZ é utilizado como base para fornecer parâmetros necessários para geração da próxima malha. Ao final são analisados casos numéricos clássicos, ilustrando a eficiência do procedimento desenvolvido.

PALAVRAS-CHAVE: MEF, adaptabilidade, refino de malha, estimador de erro.

Passos, J.P. **Development and implementation of an adaptive procedure for triangular finite elements based on a posteriori error estimator**. 2012. 24 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ABSTRACT

The finite element method, like any other numerical method based on domain discretization, delivers results which are dependent on the quality and refinement of the mesh used, among other aspects. The present work presents the development of a adaptive mesh refinement procedure for finite elements based on the ZZ estimator. The mesh generation uses a version of the Advancing Front Method for triangular elements. Once finished an initial analysis, the ZZ estimator is used to evaluate parameters needed to generate the new mesh. Numerical results for benchmarks are analyzed, showing the efficiency of the proposed procedure.

KEYWORDS: MEF, adaptability, mesh refining, error estimator.

SUMÁRIO

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
2.1. Estimador de erro.....	1
2.2. O método do Avanço de Fronteira para geração de malhas.....	2
3. FORMULAÇÃO DO ESTMADOR DE ERRO ZZ	2
3.1. Triângulo de deformações constantes (CST)	2
3.2. Estimador de Erro ZZ.....	4
3.3. Tratamento do fator fh.....	7
4. GERAÇÃO DA MALHA	8
4.1. Método do Avanço de Fronteira	8
4.2. Qualidade da malha e do elemento triangular	9
4.3. Suavização da malha	10
5. FUNCIONAMENTO DA ROTINA DE REFINAMENTO	10
6. EXEMPLOS DISCUTIDOS.....	11
6.1. Chapa retangular com erro nulo.....	11
6.2. Placa fina em L	12
7. CONCLUSÕES	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	15
Apêndice A – PLACA COM FURO SUBMETIDA À TRAÇÃO.....	16
Apêndice B – CILINDRO DE PAREDE ESPESSA	17
Apêndice C – CUBO SUBMETIDO À PRESSÃO	18
Apêndice D – PLACA FINA COM TRINCA SUBMETIDA À TRAÇÃO	19

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser descrito de forma simplificada como um método numérico para solução aproximada de equações diferenciais parciais. Sendo a solução aproximada torna-se de suma importância quantificar e minimizar o erro resultante, e são essas duas tarefas, quantificar e minimizar a que este trabalho se propõe para o elemento triangular de deformações constantes (CST), isoparamétrico considerando o estado plano de tensões.

A quantificação do erro é realizada através de um estimador de erro a posteriori¹. O estimador de erro empregado neste trabalho foi o ZZ ou Z^2 que recebe este nome em homenagem a seus dois criadores [Zienkiewicz e Zhu, 1987]. As principais qualidades deste estimador são a sua simplicidade, baixo custo computacional e razoável precisão.

A minimização do erro é baseada no refino da malha através do controle do tamanho dos novos elementos feito através do estimador de erro posteriormente calculado. A técnica utilizada para a geração da malha é o Avanço de Fronteira onde partindo-se das bordas da geometria são inseridos novos triângulos no interior do domínio até que ele esteja completamente preenchido.

Então este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma rotina adaptativa para refino de malhas triangulares, utilizando elemento triangular de deformações constantes de três nós, baseada num estimador de erro a posteriori. Esta rotina será inserida no programa Mc_Mesh para servir como ferramenta gratuita para o ensino do MEF, a mesma será escrita na linguagem de programação C++, dando origem a um arquivo executável, capaz de rodar no sistema operacional Windows. Ao final do trabalho são apresentados e discutidos os resultados obtidos com exemplos de peças simples modeladas, analisadas e processadas com a rotina de refino desenvolvida confirmando a sua eficiência e correto funcionamento.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Estimador de erro

O estimador de erro objeto de estudo neste trabalho foi apresentado em 1987 [Zienkiewicz e Zhu, 1987], sendo então nomeado como Estimador ZZ em homenagem a seus criadores. Este estimador apresenta como qualidades razoável precisão e principalmente sua fácil implementação para a utilização em rotinas de refinamento de malha que usam tanto técnicas adaptativas ou simplesmente a geração de uma nova malha por completo. O Estimador ZZ possui a sua convergência comprovada [Ainsworth, 1989] validando assim sua credibilidade e contribuindo para o aumento do interesse em seu estudo.

Nas respostas obtidas pelo MEF é garantida a continuidade da solução para o campo de deslocamentos nas bordas dos elementos, mas não para o campo de tensões. Esta dificuldade tem sido base de diversos estudos [Cantin, et alli, 1978], e nestes estudos são descritas técnicas como valores nodais médios, valores nos pontos de Gauss, extrapolação e outras. Uma técnica que possui maior importância é um algoritmo iterativo para se construir novos campos de tensões e deformações partindo de uma pré-solução obtida pelo MEF. Este algoritmo utiliza valores médios nodais e acabou sendo parte fundamental para a construção de estimadores de erro que dependem de uma pré-solução, os chamados estimadores a posteriori.

¹ A expressão “a posteriori” se refere à utilização dos resultados obtidos numa análise realizada previamente.

Em outro estudo [Zienkiewicz e Zhu, 1992] foi abordada a recuperação de tensão para uso na computação do estimador de erro onde é descrita uma técnica de recuperação que possui como base uma expansão polinomial da função que descreve as tensões levando em conta para cada nó os elementos que o compartilham realizando assim a expansão ao longo dos pontos superconvergentes de cada elemento.

Outros dois trabalhos [Lins, 2011; Foganholi,1997] trazem grande contribuição para a compreensão das técnicas dos estimadores de erro pois fazem uma revisão sobre o Estimador ZZ e suas diferentes variações. Isso acontece pois diversos autores estudaram os vários trabalhos de Zienkiewicz e Zhu introduzindo modificações em sua formulação e posteriormente lançando seus próprios estudos e na maioria dos casos rebatizando o estimador de erro, desta forma é comum encontrar trabalhos citando diferentes versões como ZZ1, ZZ2 e ZZ3.

2.2 O método do Avanço de Fronteira para geração de malhas

Entre os diversos métodos de geração de malha o que apresenta melhores resultados para geometrias complexas é o de Avanço de Fronteira [George, 1991]. Numa abordagem básica o processamento da fronteira pode ser feito através de dois conceitos [George, 1991]: por propagação linear e por inflação. No primeiro conceito os elementos são inseridos em diversos locais e não ocorre um controle rígido da Fronteira, este método se caracteriza por priorizar os cantos com ângulos menores que 120° para a inserção de novos elementos. No segundo conceito a inserção e atualização da Fronteira são feitas de forma continua com a inserção de novos elementos de maneira sequencial, esta ação pode gerar a subdivisão da Fronteira quando diferentes segmentos se encontrarem.

Uma ferramenta para a geração de malhas pelo método do Avanço de Fronteira é o ARANHA [Fanello, 1990], que utiliza uma integral de linha para posicionar os nós sobre o contorno do domínio resultando em malhas de grande qualidade. A ferramenta ARANHA foi aprimorada [Fanello,1993] mudando-se a forma como os nós eram armazenados em suas listas aumentando assim a velocidade da rotina, devido as qualidades esta ferramenta tem servido de base para diversos estudos.

3. FORMULAÇÃO DO ESTIMADOR DE ERRO ZZ

A rotina de refino é composta por diversas etapas, onde cada uma desempenha uma função, sendo a seguir apresentada a formulação do estimador de erro. Deve-se deixar claro que o objetivo deste trabalho é principalmente discutir a aplicação do Estimador de Erro ZZ, outros conteúdos terão apenas suas partes de expressiva importância para o entendimento do tema principal apresentadas.

3.1. Triângulo de deformações constantes (CST)

O estudo desenvolvido neste trabalho se baseia no elemento triangular de deformações constantes (CST), para maiores detalhes sobre este elemento recomenda-se [Assan, 1999]. O CST é um triângulo delimitado por 3 nós, no qual as suas funções interpoladoras para os deslocamentos são polinômios de primeira ordem.

$$u = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y \quad (3.1)$$

$$v = a_4 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot y \quad (3.2)$$

Podemos obter as deformações através da derivação das funções interpoladoras dos deslocamentos, segundo a relação:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.3)$$

as deformações são funções de ordem zero, ou seja, constantes, onde o formato do vetor deformação é de 3x1:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

o vetor com as componentes do campo de tensões também tem as mesmas dimensões do vetor das deformações tendo a forma mostrada abaixo.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad (3.6)$$

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A matriz [D], chamada matriz constitutiva, possui as propriedades do material que são: ν (Coeficiente de Poisson) e E (Módulo de elasticidade). Esta matriz para o CST é apresentada na equação (3.7). Então pela equação (3.6) é possível determinar o campo de tensões no interior do elemento [Assan, 1999], sendo garantida a continuidade dos deslocamentos nas bordas dos elementos e as tensões, como mencionado anteriormente, resultando em constantes. A Figura 3.1 auxilia na compreensão das afirmações anteriores, pode-se ver em (a) as tensões constantes no interior dos elementos e em (b) os deslocamentos apresentados no formato de rampas respeitando a condição de continuidade nas bordas.

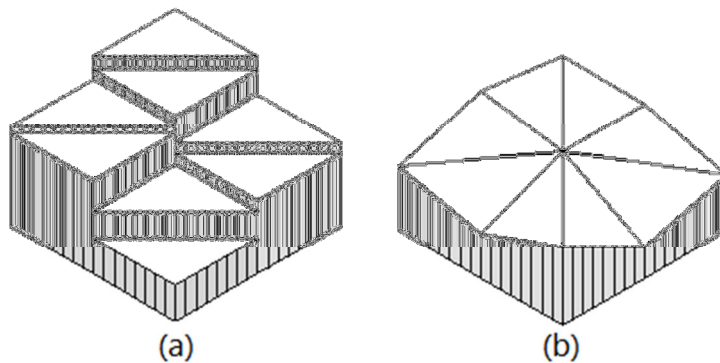


Figura 3.1 - (a) Campo de tensões, (b) campo de deslocamentos.

3.2. Estimador de Erro ZZ

A solução de um problema da mecânica dos sólidos, estático e linear geralmente envolve a solução de um sistema de equação da forma:

$$\{f\} = [K] \cdot \{\hat{u}\} \quad (3.8)$$

onde $\{f\}$ é o vetor de forças globais, $[K]$ a matriz de rigidez e $\{\hat{u}\}$ o vetor de incógnitas.

Os deslocamentos são uma das respostas fornecidas pelo MEF, certamente nesta resposta temos diversos tipos de erros envolvidos como truncamentos e arredondamentos, mas neste momento iremos trabalhar apenas com aqueles decorrentes da utilização das

funções interpoladoras do CST. Supondo que tivéssemos conhecimento da solução exata, os deslocamentos $\{u\}$ e as tensões $\{\sigma\}$, então poderíamos afirmar que o erro da resposta seria:

$$\{e_u\} = \{u\} - \{\hat{u}\} \quad (3.9)$$

$$\{e_\sigma\} = \{\sigma\} - \{\hat{\sigma}\} \quad (3.10)$$

o vetor $\{e_u\}$ é o erro para o campo de deslocamento e $\{e_\sigma\}$ o erro para o campo de tensões. Poderíamos determinar o erro, a partir das equações (3.9) e (3.10), de forma precisa, contudo, geralmente não conhecemos a solução exata sendo impossível proceder desta forma. Então iremos supor que conhecemos uma solução suavizada $\{\sigma^*\}$, ou melhorada, que seja capaz de produzir uma aproximação de $\{\sigma\}$ melhor que $\{\hat{\sigma}\}$, vamos supor que:

$$\{\sigma^*\} \cong \{\sigma\} \quad (3.11)$$

$$\{e_\sigma\} = \{\sigma^*\} - \{\hat{\sigma}\} \quad (3.12)$$

o vetor $\{\sigma^*\}$ é o campo de tensões suavizado. Agora necessitamos definir como obtemos o campo de tensões suavizados $\{\sigma^*\}$, e para isso verificando o nó 1 da malha representada na Figura 3.2 observamos que o mesmo possui 2 valores de tensão, sendo um para o elemento 1 e outro para o elemento 2.

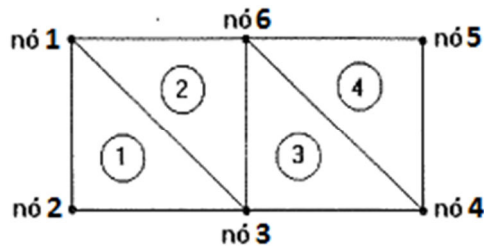


Figura 3.2– Malha de elementos triangulares.
Adaptado: Foganholi, 1997.

Este fato ocorre por que é garantida a condição de continuidade para o campo de deslocamentos nas fronteiras dos elementos, mas a continuidade para o campo de tensões não, sendo que no interior do elemento CST as tensões são constantes. Então é razoável aceitar que se temos apenas um material envolvido no problema a tensão real no nó esteja entre os valores calculados para cada elemento [Zienkiewicz e Zhu, 1987], então podemos definir um valor médio da tensão em cada nó como:

$$\{\bar{\sigma}_{nós}\} = \frac{\sum_{j=1}^n A_j \cdot \{\hat{\sigma}_j\}}{\sum_{j=1}^n A_j} \quad (3.13)$$

onde n é o número de elementos que possuem um mesmo nó em comum, $\{\hat{\sigma}_j\}$ o vetor tensão no nó do elemento j , A_j a área do elemento j e $\{\bar{\sigma}_{nós}\}$ o vetor tensão média no nó. Agora com as tensões médias nos nós dos elementos, equação (3.13), é possível obter as tensões suavizadas no interior dos elementos através da interpolação dos valores nodais utilizando funções de mesma ordem das utilizadas para representar os deslocamentos, ou seja, funções lineares. Na Figura 3.3 em (a) é ilustrado o campo de tensões para CST obtidos pelo MEF, e em (b) o campo de tensões suavizadas.

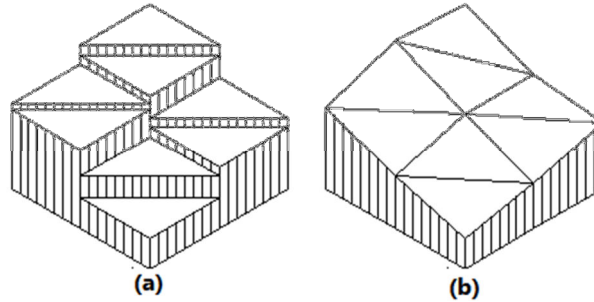


Figura 3.3 - (a) Campo de tensões obtido pelo MEF para CST, (b) campo de tensões suavizado.

Já de posse dos campos de tensão $\{\sigma^*\}$ e $\{\hat{\sigma}\}$ podemos reescrever a equação (3.10):

$$\{e_\sigma\} = \{\sigma^*\} - \{\hat{\sigma}\} \quad (3.14)$$

com ela já é possível quantificar o erro, mas não é usual e também de difícil interpretação trabalhar com esta diferença entre campos de tensão, assim será optado por computar o erro através da utilização de alguma norma, sendo escolhida a norma de energia[Zienkiewicz e Zhu, 1987], esta norma é definida para um determinado elemento da malha como:

$$\|\{e_\sigma^i\}\| = \left[\int_v \{ \{\sigma^*\} - \{\hat{\sigma}\} \}^T \cdot [D]^{-1} \cdot \{ \{\sigma^*\} - \{\hat{\sigma}\} \} dv \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

Sendo i o índice do elemento, $\|\{e_\sigma^i\}\|$ a norma energia, ou norma de erro da diferença dos campos de tensões. Para a obtenção da norma de erro para todo o volume da malha basta fazer a soma da contribuição de cada elemento, tendo:

$$\|\{e_\sigma\}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\{e_\sigma^i\}\|^2 \quad (3.16)$$

nesta equação i é o número do elemento e m o número de elementos da malha. Desenvolvendo a equação (3.14) para que os seus termos simbolizem as respectivas normas de energia e isolando o termo referente ao campo de tensões exatas.

$$\|\{\sigma^*\}\|^2 = \|\{\hat{\sigma}\}\|^2 + \|\{e_\sigma\}\|^2 \quad (3.17)$$

$$\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\{\hat{\sigma}_i\}\|^2 \quad (3.18)$$

A equação (3.18) representa a norma energia para todo volume da malha obtida a partir do campo de tensões obtido pelo MEF, sendo computada através da soma das contribuições de cada elemento, a contribuição de cada elemento é definida como:

$$\|\{\hat{\sigma}_i\}\|^2 = \int_v \{ \{\hat{\sigma}_i\} \}^T \cdot [D]^{-1} \cdot \{ \{\hat{\sigma}_i\} \} dv \quad (3.19)$$

onde i é o índice do elemento. A equação (3.17) fornece a norma de energia do campo de tensões suavizadas, mas seu valor é de difícil interpretação, desta forma é inserido o conceito de erro relativo utilizando os resultados das equações (3.16) e (3.17), compondo, a seguinte equação:

$$\beta_{\sigma} = \frac{\|\{e_{\sigma}\}\|}{\|\{\sigma^*\}\|} \cdot 100\% \quad (3.20)$$

onde β_{σ} é o erro relativo. Substituindo a equação (3.17) em (3.20) obtemos a equação (3.21).

$$\beta_{\sigma} = \frac{\|\{e_{\sigma}\}\|}{(\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 + \|\{e_{\sigma}\}\|^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot 100\% \quad (3.21)$$

A equação (3.21) representa o erro percentual em termos globais com base no campo de tensões sendo chamado de Estimador de Erro. A vantagem em sua utilização é o fato de ser um dado facilmente interpretável sobre o erro da malha. Uma correção empírica para este estimador [Zienkiewicz e Zhu, 1987] sugere a utilização de um fator multiplicador para a obtenção de resultados mais próximos da solução exata, onde:

Tabela 3.1 – Fator empírico de correção.

Elemento	Fator
Quadrilateral linear	1,1
Triangular linear	1,3
Triangular quadrático	1,4

Assim para o CST, de acordo com a Tabela 3.1, chegamos ao estimador de erro corrigido β_{cor} .

$$\beta_{cor} = 1.3 \cdot \beta_{\sigma} \quad (3.22)$$

Quando o objetivo é obter um estimador de erro para aplicá-lo em rotinas de refino de malha é interessante garantir a uniformidade do erro, assim em todos os elementos da malha o erro não deve superar um determinado valor preestabelecido. Definindo β_{adm} como o valor máximo admissível para o erro percentual que buscamos alcançar na malha refinada temos:

$$\beta_{cor} < \beta_{adm} \quad (3.23)$$

então como o objetivo é garantir o erro igualmente distribuído em todos os elementos da malha obtida após o refinamento podemos utilizar β_{adm} como limitador do erro em cada elemento. Reescrevendo a equação (3.21) em função do erro admissível de cada elemento:

$$\beta_{adm} = \frac{(m \cdot \|\{e_{adm}^e\}\|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 + \|\{e_{\sigma}\}\|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.24)$$

a variável m é o número de elementos da malha e $\{e_{adm}^e\}$ o erro admissível para cada elemento. Isolando a norma de erro admissível da equação (3.24) chegamos a seguinte equação.

$$\|\{e_{adm}^e\}\| = \beta_{adm} \cdot \frac{(\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 + \|\{e_{\sigma}\}\|^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m}} \quad (3.25)$$

Agora podemos calcular para cada elemento da malha a razão entre o erro estimado obtido pelo MEF e o erro admissível obtendo:

$$\Delta\epsilon_i = \frac{\|\{e_{\sigma}^e\}\|}{\|\{e_{adm}^e\}\|} \quad (3.26)$$

onde i é o índice do elemento. Através da equação (3.26) é orientada a rotina de refinamento sobre como interferir durante a geração dos novos elementos da malha segundo a Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Condições e ações para o refinamento da malha.

Condição	Ação
$\Delta\varepsilon_i > 1$	Reduzir o tamanho do elemento
$\Delta\varepsilon_i = 1$	Manter tamanho atual
$\Delta\varepsilon_i < 1$	Ampliar ou manter o tamanho atual

Para os elementos com $\Delta\varepsilon_i$ maior que a unidade podemos definir um novo tamanho do elemento [Zienkiewicz e Zhu, 1987], através da relação:

$$h = \frac{h_i}{(\Delta\varepsilon_i)^{\frac{1}{p}}} \quad (3.27)$$

onde h é o tamanho do novo elemento, h_i o tamanho atual do elemento i e p o grau do polinômio interpolador, no caso do CST $p=1$. Assim o tamanho do novo triângulo segundo a equação (3.27) é controlado segundo o fator:

$$f_h = \frac{1}{\Delta\varepsilon_i} \quad (3.28)$$

onde f_h é o fator que controlará o tamanho dos elementos no próximo ciclo de refino. Então cada elemento triangular terá o seu fator f_h que apenas possuirá efeito dentro do seu domínio. Exemplificando, o fator f_{h5} só terá efeito quando a rotina de refinamento for gerar novos elementos dentro do espaço ocupado pelo elemento de índice 5.

3.3. Tratamento do fator f_h

Em locais com grandes variações das respostas do MEF, neste caso tensões, entre elementos vizinhos surgira variações abruptas neste fator. Desta forma, deve-se controlar esta variação para que a nova malha não apresente elementos vizinhos com tamanhos muito diferentes que acabariam por prejudicar a qualidade da malha, o assunto qualidade da malha será abordado adiante. Vamos então definir 3 variáveis adicionais que atuam no controle do f_h onde: f_{hmax} é valor máximo admissível, f_{hmin} o mínimo e Δf_h a máxima diferença entre o f_h de elementos vizinhos.

A rotina desenvolvida para controle do f_h funciona em duas etapas: na primeira etapa varre-se a lista de triângulos em busca de elementos com f_h menor que f_{hmin} , sempre que é encontrado um elemento que atenda a esta condição é modificado o valor deste fator para f_{hmin} . A segunda etapa caracteriza-se por ser iterativa onde é executada a sequência de passos apresentada na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Passos para controle do fator f_h .

Passo	Descrição da ação
1	Varrer a lista de triângulos em busca de 2 elementos vizinhos com a diferença de seus f_h maior que Δf_h , caso não encontre pula para o item 3.
2	Escolher entre os 2 triângulos o que possui maior f_h , aplicar ao fator f_h deste elemento o fator de redução 0.9, voltar para o item 1.
3	Final da rotina.

Com estas etapas garante-se a futura geração de uma malha com elementos de boa qualidade. Foi adotado um fator de redução para os valores de f_h superiores a f_{hmax} devido a proposta principal de trabalho da rotina de refinamento ser iniciar o trabalho com uma malha grosseira e aumentar a densidade de elementos em regiões críticas, consumindo menos

esforço computacional e tempo de trabalho para rapidamente chegar a uma malha refinada dentro do limite de erro esperado.

4. GERAÇÃO DA MALHA

4.1. Método do Avanço de Fronteira

A geração da malha foi realizada utilizando-se como base o gerador de malha do programa Mc_Mesh, desenvolvido pelo autor anteriormente. Este programa usa o método do Avanço de Fronteira, o qual consiste na constante inserção de triângulos, com tamanho pré-definido, e atualização de uma seqüência de linhas fechadas, sem pontas chamada Fronteira, na Figura 4.1 é ilustrado este processo.

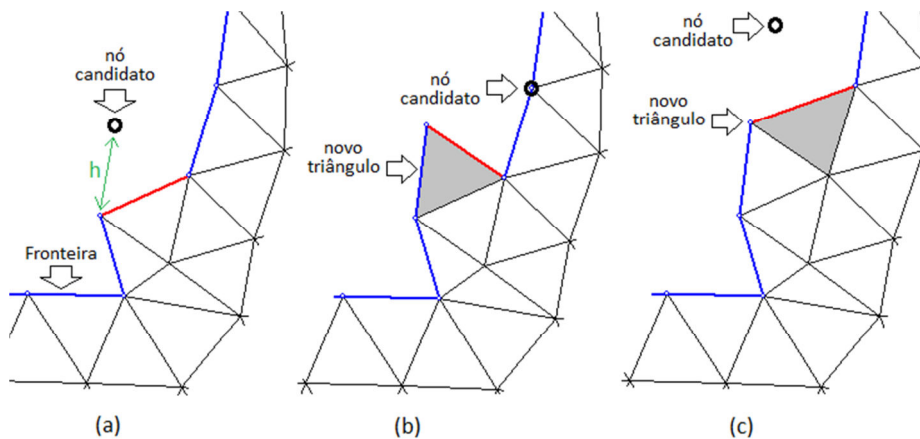


Figura 4.1 - (a) Nó candidato para novo triângulo com lado h , (b) nó candidato sobre nó existente, (c) repete se o processo.

Um caso especial ocorre quando o nó candidato, juntamente com os outros dois nós da fronteira formam um novo triângulo, está sobre outro nó pertencente à fronteira, como pode ser vista na Figura 4.2 (a), neste caso a fronteira deve ser subdividida originando duas novas fronteiras que devem ser processadas separadamente, ou seja, um domínio durante o processo de geração da malha pode apresentar diversas fronteiras.

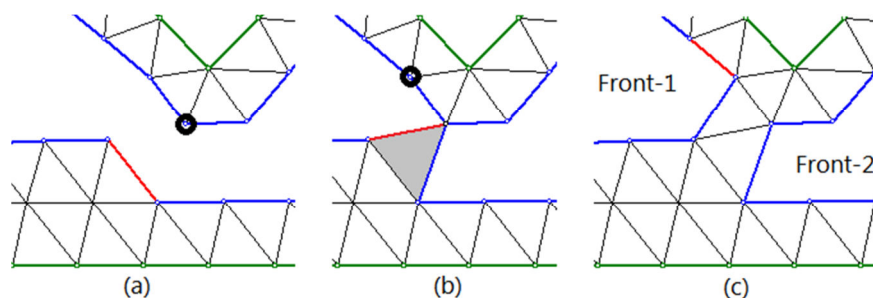


Figura 4.2 - (a) Candidato a novo nó, (b) inserção novo triângulo, (c) divisão em duas fronteiras.

A localização e classificação destes casos são feitas repetidamente por uma rotina que só tem seu término quando não há mais onde inserir triângulos. A Tabela 4.1 apresenta o algoritmo da geração da malha organizando em passos para facilitar a compreensão.

Tabela 4.1 – Passos para geração da malha.

Passo	Descrição da ação
1	Geração da Fronteira inicial a partir da geometria do domínio.
2	Selecionar a primeira Fronteira com número de linhas maior que zero, caso não exista pular para o item 13.
3	Atualizar a Fronteira.
4	Se a Fronteira não possuir mais linhas voltar ao item 2.
5	Se a Fronteira possuir mais de 3 linhas pular para o item 7
6	Inserir novo triângulo com as 3 ultimas linhas e voltar para o item 3
7	Pegar como base a primeira linha da Fronteira
8	Obter o tamanho do novo triângulo utilizando fator f_h e h , Figura 4.1 (a).
9	Com o novo tamanho h calcular a posição do nó candidato.
10	Caso o nó candidato não coincida e não esteja muito próximo dos outros nós inserir um novo triângulo, caso (a) da Figura 4.1, e voltar ao item 3.
11	Caso o nó candidato esteja sobre ou muito próximo de outro nó da Fronteira e este nó esteja 2 nós a frente na Fronteira, caso (b) da Figura 4.1, inserir um novo triângulo, voltar ao item 3.
12	Caso o nó candidato esteja sobre ou muito próximo de outro nó da Fronteira e este nó esta muito longe, a mais de 2 nós de distância contando pelo caminho da Fronteira, então inserir um novo triângulo, Figura 4.2(b), dividir a Fronteira em 2, Figura 4.2 (c), voltar ao item 2.
13	Final, malha completa.

4.2. Qualidade da malha e do elemento triangular

A qualidade de um elemento triangular é medida segundo uma razão entre o seu lado menor e o lado maior, assim como pode ser visto na Figura 4.3 um triângulo equilátero, que possui os três lados com mesma dimensão, possui qualidade de 100% sendo o caso ideal, então sempre se deseja que a maior quantidade possível de elementos possuam este formato, contribuindo para uma boa qualidade da solução obtida.

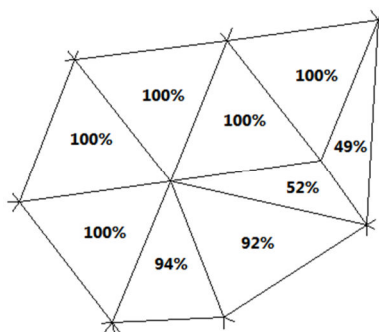


Figura 4.3 - Porção de uma malha com a qualidade dos triângulos.

Podemos então definir a equação para obter a qualidade de um elemento como:

$$Q_i = \frac{h_{\text{menor}}}{h_{\text{maior}}} \cdot 100 \quad (4.1)$$

onde Q_i é a qualidade do triângulo de índice i , h_{menor} o menor lado do triângulo i e h_{maior} o maior lado do triângulo i . A qualidade da malha é obtida através da média aritmética da qualidade de seus elementos, sendo:

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{ne} Q_i}{ne} \quad (4.2)$$

onde Q é a qualidade da malha e ne o número de elementos da malha.

4.3. Suavização da malha

O método para geração da malha descrito anteriormente é relativamente simples e possui grande agilidade de execução, mas acaba por muitas vezes gerando triângulos com formatos indesejados. Por este motivo torna-se necessário a utilização de algum método que interfira no formato dos elementos a fim de melhorar a qualidade da malha. O método aqui utilizado foi a Suavização Laplaciana, que trata de varrer a malha movendo cada nó para o centro médio geométrico formado pelos nós a que está ligado, então:

$$x_p = \frac{\sum_{i=1}^{nn} x_n}{nn} \quad (4.3)$$

$$y_p = \frac{\sum_{i=1}^{nn} y_n}{nn} \quad (4.4)$$

onde p é o índice do nó que está sendo movido, nn o número de nós ao redor de p , e n o índice de cada nó ao redor de p .

A Figura 4.4 mostra o resultado deste método, sendo que no caso (a) temos o nó 1 como nó central estando ligado aos nós 2,3,4,5 e 6, podemos observar que a qualidade da porção da malha exibida é de 83% e temos um triângulo com qualidade de 57%, e após um ciclo de suavização todos os nós se movem no sentido de que os triângulos obtivessem o formato mais próximo possível do triângulo equilátero. O resultado é o aumento na qualidade da malha para 96% e o elemento com menor qualidade após a suavização possui 89%, ou seja, um bom aumento na qualidade desta porção da malha.

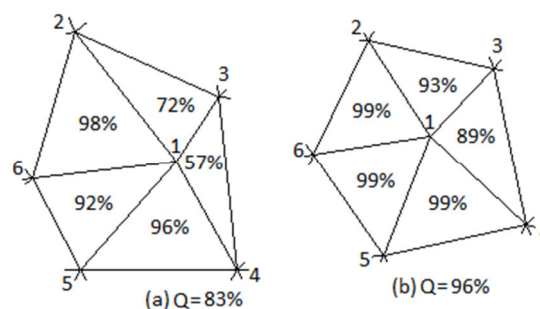


Figura 4.4 – (a) baixa qualidade dos elementos, (b) após refino elevação da qualidade.

5. FUNCIONAMENTO DA ROTINA DE REFINAMENTO

A rotina de refinamento é a união dos assuntos abordados até este momento, as etapas de seu funcionamento estão ilustradas no fluxograma da Figura 5.1. Primeiramente é modelado o problema definindo a geometria, propriedades e condições de contorno, com este pacote de informações e usando inicialmente um fator f_h unitário é iniciado o processo de geração de malha utilizando o método do Avanço de Fronteira.

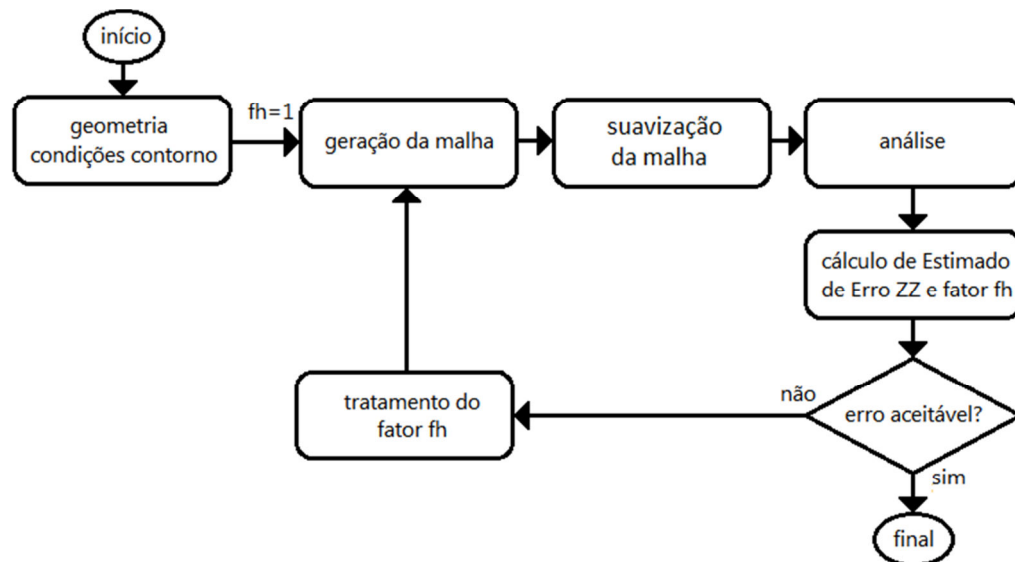


Figura 5.1 - Fluxograma da rotina de refinamento.

A primeira malha gerada possuirá elementos de mesmo tamanho e em menor quantidade, neste momento a malha poderá possuir elementos de baixa qualidade então é realizada a suavização da malha. Então parte-se para a análise que irá calcular os deslocamentos, tensões e então o Estimador de Erro ZZ e do fator f_h . A próxima etapa é um teste condicional onde é verificado se o erro global é menor que o erro admissível, caso resultado seja afirmativo a malha atende aos critérios estipulados e não precisa ser refinada, caso resultado seja negativo a rotina prossegue para a próxima etapa. Como relatado anteriormente é necessário fazer um tratamento dos valores de f_h para que atenda a margens pré-estabelecidas de valores máximos, mínimos e máxima variação entre elementos vizinhos. Então os valores de f_h tratados são repassados para a etapa de geração da malha reiniciando o ciclo, mas agora cada novo elemento gerado irá sofrer em seu tamanho a influência do elemento que no ciclo anterior ocupava a mesma posição.

6. EXEMPLOS DISCUTIDOS

Nos exemplos a seguir serão apresentados os resultados obtidos pela rotina de refino e discutido os resultados sobre o estimador de erro e as malhas refinadas. Este trabalho não tem o objetivo de discutir as respostas a níveis de tensão resultantes do MEF, mas sim os erros produzidos. Nos Apêndices I e II são testados outros casos, sem a discussão dos resultados.

6.1. Chapa retangular com erro nulo

O exemplo ilustrado na Figura 6.1 tem o objetivo de testar a consistência numérica da rotina de refino, pois foi modelado com o proposito de produzir em todos os elementos da malha apenas um componente de tensão, σ_{xx} , e sempre com o mesmo valor, provocando durante o processo do cálculo das tensões médias nos nós, equação (3.13), valores idênticos aos obtidos pelo MEF para os elementos, ou seja, $\{\sigma^*\}$ é idêntico a $\{\hat{\sigma}\}$. A diferença entre estes 2 campos de tensões será nula, resultando em norma energia do erro nula e fator f_h unitário.

O material usado neste exemplo foi aço com E de 200GPa e ν de 0,3, sendo a espessura da placa unitária. Como pode ser observado na Figura 6.1(b) os resultados obtidos pela rotina de refinamento indicam que o fator f_h possui valor unitário em todos os elementos da malha, devido à inexistência de erro, levando então a não necessidade de realizar refinamento. Através deste resultado fica parcialmente provada a consistência da rotina de refino.

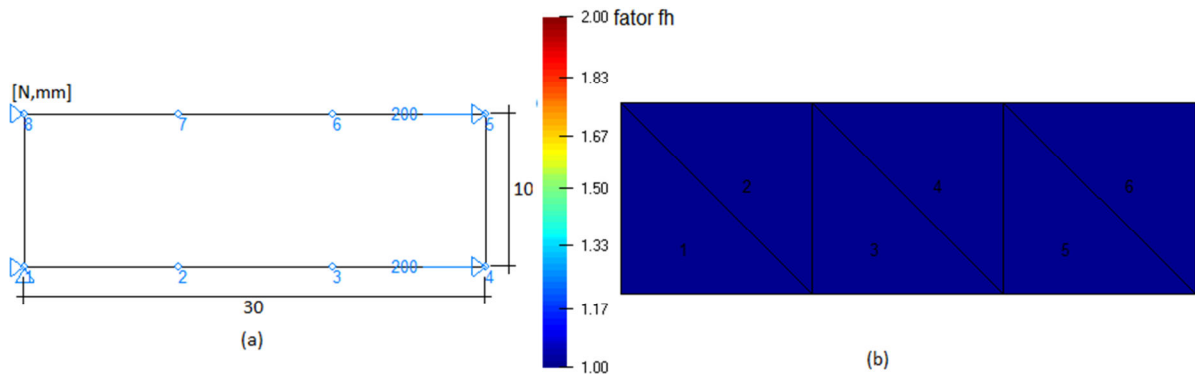


Figura 6.1- (a) Geometria e condições de contorno, (b) fator f_h e malha com 6 elementos.

6.2. Placa fina em L

No exemplo a seguir é apresentada uma placa fina submetida a cargas horizontais e verticais, o material escolhido foi novamente aço, tendo E de 200GPa e ν de 0,3. A Figura 6.2 em (a) ilustra a geometria e condições de contorno, já em (b) vemos a malha usada como base para a rotina de refino com tamanho de elemento (h) de 20 mm.

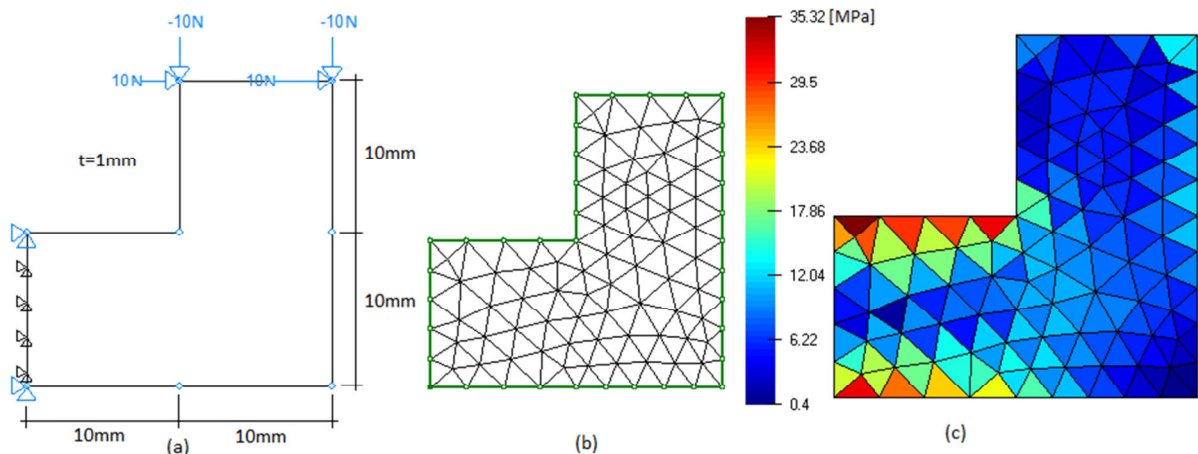


Figura 6.2- (a) Geometria e condições de contorno, (b) malha base com 165 elementos, (c) tensão de Von Mises.

Durante o processo de refinamento foi utilizado: f_{hmax} de 2, f_{hmin} de 0,1 e Δf_h de 0,15. Foram realizados 4 casos usando-se sempre a mesma malha inicial variando apenas o β_{adm} , os valores usados e os resultados obtidos estão expostos na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Configuração para o estimador de erro.

Caso	β_{adm}	β	n° elementos	$\ \{e_\sigma\}\ ^2$
1	20%	17,27%	392	3,246E-3
2	15%	14,21%	634	2,368E-3
3	10%	12,42%	1264	1,722E-3
4	5%	9,6%	4025	1,660E-3

Comparando os resultados vemos que na Figura 6.2 (c) as regiões com maiores valores para tensões, cor vermelha, são as mesmas que sofreram maior diminuição dos elementos, regiões com menor fator f_h , azul escuro, nas Figuras 6.3 até 6.6 (a). Isto ocorre por que nesses pontos ocorrem as maiores variações em termos de tensões entre elementos vizinhos produzindo erros maiores e conseqüentemente sendo sinalizadas como regiões que devem sofrer uma redução no tamanho dos elementos.

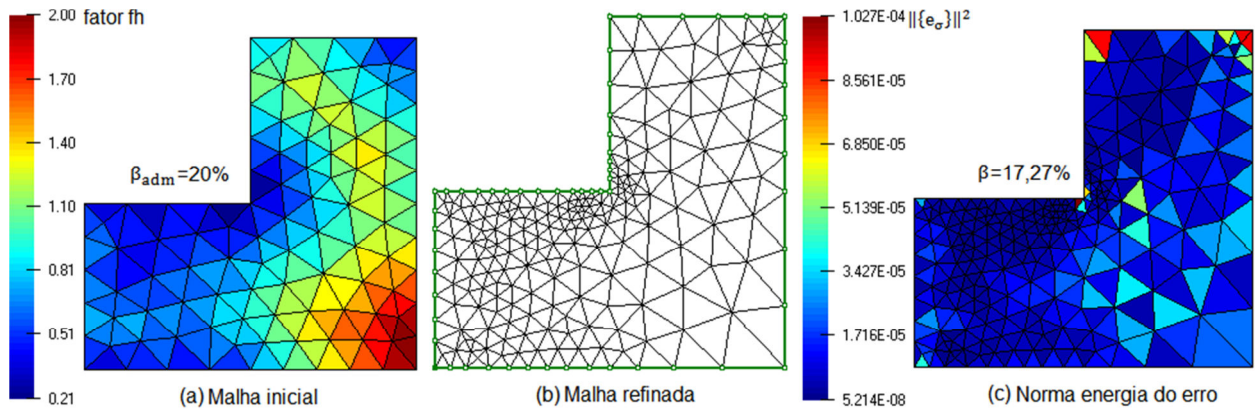


Figura 6.3 – Caso 1 $\beta_{adm}=20\%$.

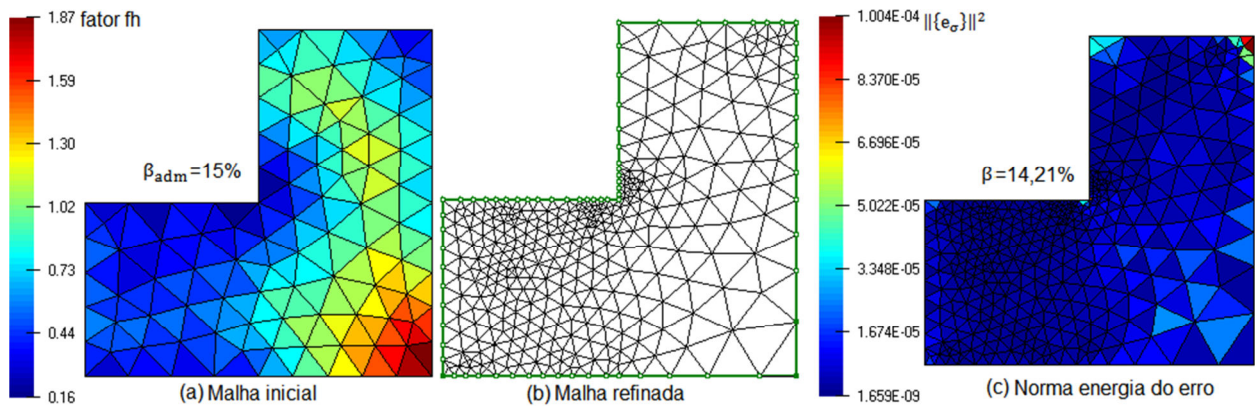


Figura 6.4 – Caso 2 $\beta_{adm}=15\%$

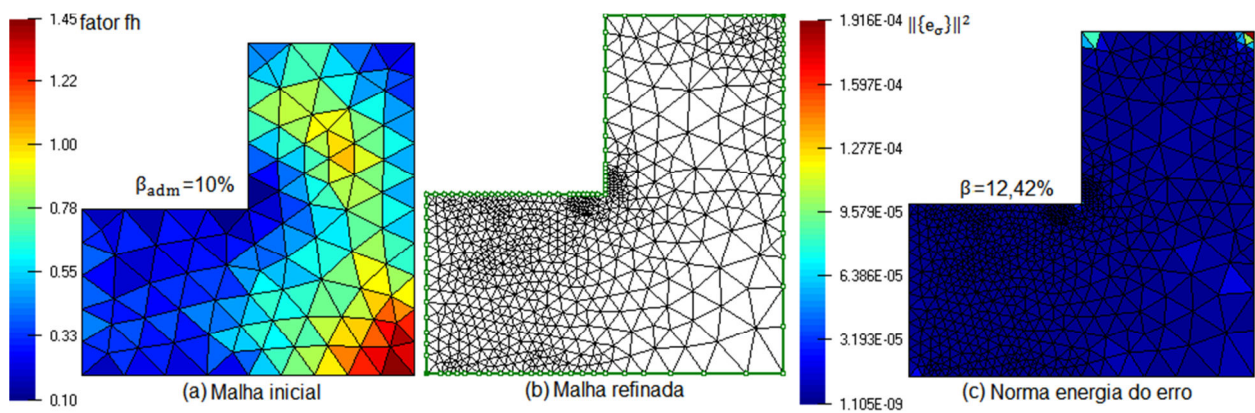


Figura 6.5 – Caso 3 $\beta_{adm}=10\%$.

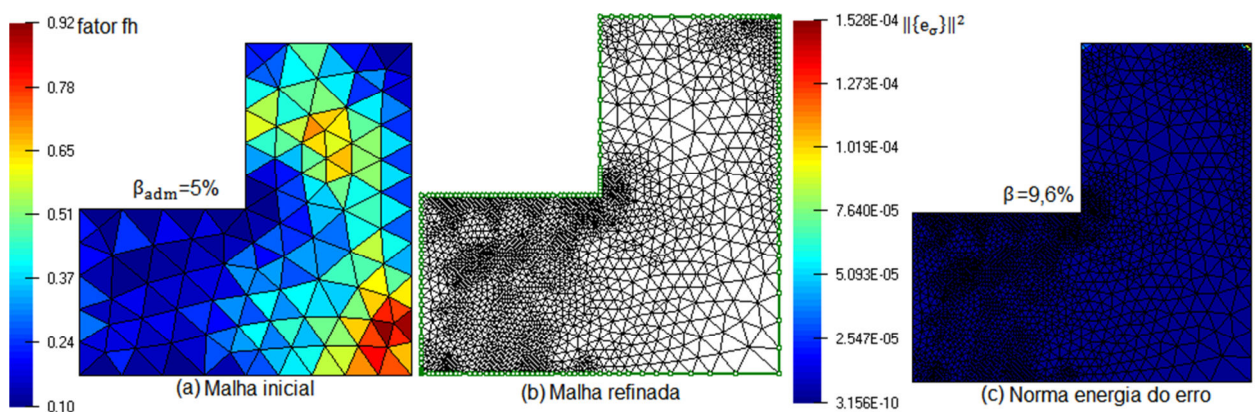


Figura 6.6 – Caso 4 $\beta_{adm}=5\%$.

Observando a coluna $\|\{e_\sigma\}\|^2$ da Tabela 6.2, que é a norma energia do erro, percebe-se a diminuição do seu valor na medida em que vão sendo processadas malhas com maior refino, ou seja, a rotina de refino está cumprindo com sua função reduzindo o erro global através da correta alocação do tamanho dos elementos no domínio da peça. Mas com a diminuição do β_{adm} fica cada vez mais trabalhoso alcançar menores valores de β gerando valores para o fator f_h fora das margens impostas, impossibilitando alcançar o β_{adm} esperado.

Outro efeito da diminuição do erro admissível β_{adm} é a necessidade de um maior número de elementos na malha, para assim conseguir reproduzir de forma mais exata a variação no campo de tensões nos pontos críticos da placa. Esta condição gera um indesejado efeito colateral que é o aumento do esforço computacional.

7. CONCLUSÕES

Neste trabalho um dos principais aspectos observados durante a geração da malha foi a grande influência dos parâmetros utilizados (β_{adm} , f_{hmax} , f_{hmin} e Δf_h). Este fato ocorre porque em vários momentos da rotina de refino diversos cálculos, suavizações e correções são feitas baseadas nestes parâmetros fornecidos manualmente, devendo então o usuário conhecer todas as etapas da rotina de refino e sua formulação para diminuir o empirismo do processo e poder de forma correta experimentar diferentes valores para buscar o resultado esperado.

O principal benefício observado em utilizar-se um estimador de erro para o refino da malha foi à homogeneização do erro entre os elementos, claro que em locais com concentradores de tensões o erro continua com valores elevados, mas no restante da malha tem seu valor reduzido, colaborando assim para respostas de melhor qualidade.

O estimador de erro ZZ teve fácil implementação, pois as sub-rotinas de cálculo que tiveram de ser escritas possuíam baixa complexidade, a sua velocidade também foi satisfatória, é importante esclarecer que não foi realizado estudo sobre o custo computacional deste estimador, mas pela percepção durante a utilização da rotina de refinamento é possível afirmar que os cálculos envolvidos não aumentaram de forma acentuada o tempo de processamento.

A rotina de refino se mostrou eficiente durante a execução dos exemplos, em praticamente todos os casos houve diminuição do erro global da malha, β , este fato foi ilustrado anteriormente no capítulo referente aos exemplos. Em alguns casos o erro global da malha encontrado após o refino não se aproximou do erro admissível, isso ocorreu devido ao conjunto de fatores f_h , de uma determinada malha, possuírem valores que em muito excediam os parâmetros limitadores (f_{hmax} , f_{hmin} e Δf_h), mas essa é uma situação que não pode ser remediada, pois a qualidade da malha e da solução depende diretamente do aspecto dos seus elementos. Então podemos dizer que a rotina de tratamento do fator f_h serve como um fator de relaxação, porque enquanto o estimador ZZ tenta reduzir o erro global ao nível admissível a rotina de tratamento tenta ajustar a malha para garantir a sua qualidade mesmo que isso cause apenas uma pequena redução do erro global.

Como proposta para futuros estudos fica a possibilidade de desenvolver rotinas capazes de identificar a forma como ocorre a distribuição do erro pelos elementos da malha e estimar os melhores valores possíveis para os parâmetros β_{adm} , f_{hmax} , f_{hmin} e Δf_h . Os resultados desta proposta seriam de grande utilidade, pois em apenas um ciclo de refino, partindo-se de uma malha grosseira, seria possível alcançar a melhor configuração de malha economizando tempo e esforço computacional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ainsworth, M.; Zhu, J.Z.; Craig, A.W., Zienkiewicz, O.C.; “**Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A posteriori error in the finite element method**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis, vol. 28, 1989.

Assan, E. A. “**Método dos elementos finitos primeiros passos**”, Unicamp, 1º edição, 1999.

Davies , R.; “**Newmat C++ matrix library**”, http://www.robertnz.net/nm_intro.htm. Acessado em 26/11/2012.

Fancello, E.A.; Guimarães, A. C.; Feijo, R. A.; “**Aranha – Gerador de malhas 2-D para elementos finitos triangulares de 3 e 6 nós**”, Anais de XI Congresso Ibero Latino Americanos em Métodos Numéricos em Engenharia, Vol. 2, 1990.

Fancello, E.A.; Guimarães, A. C.; Feijo, R. A.; “**Geração automática de malhas 2D em programação orientada a objetos**”, XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, São Paulo, 1991.

Foganholi, J. F. “**Estudo de Estimadores de Erros de Elementos Finitos em Elasticidade Linear Bidimensional**”, Tese Mestrado, Universidade Federal de Campinas, 1997.

George, P.L.; “**Automatic mech generation – Application to finite element methods**”, John Wiley & Sons, 1991.

Lins, R.M. “**Estimador de erro a posteriori baseado em recuperação do gradiente para o método dos elementos finitos generalizados**”, Tese Mestrado, Universidade de São Paulo, 2011.

Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z. “**A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis.**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 24, 1987.

Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z. “**The superconvergen path recovery and a posteriori erro estimates. Part 1: The recovery technique.**”, International Journal for Numerical Methds in Enginnering Analysis, v.33, 1992.

APÊNDICE A – PLACA COM FURO SUBMETIDA À TRAÇÃO

Dados: $E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$, $f_{h\max}=2$, $f_{h\min}=0.1$, $\Delta f_h=0.15$, $\beta_{\text{adm}}=15\%$.

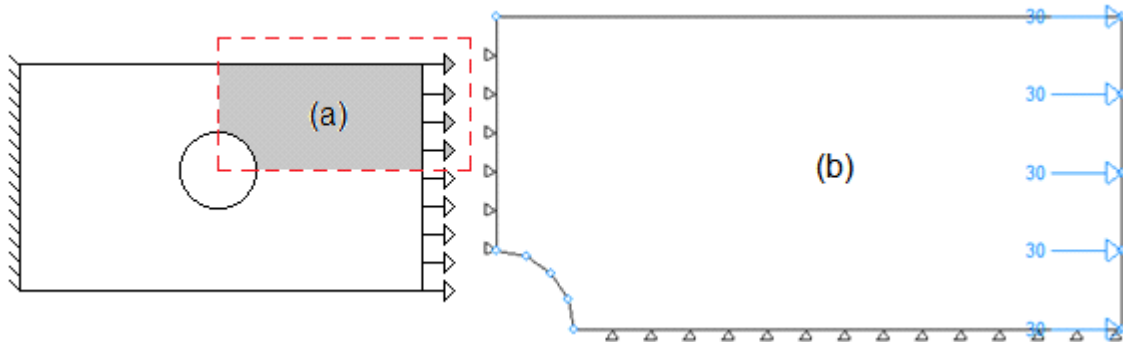


Figura A.1-(a) Região da peça analisada, (b) geometria e condições contorno, por simetria apenas $\frac{1}{4}$ da peça foi analisado.

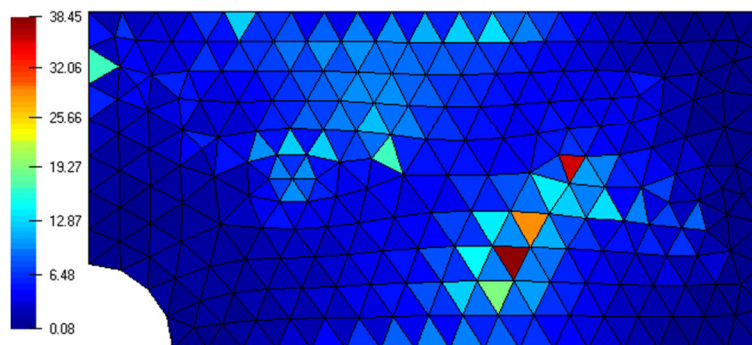


Figura A.2-Fator f_h sem tratamento, $NE=248$, $\beta=23\%$.

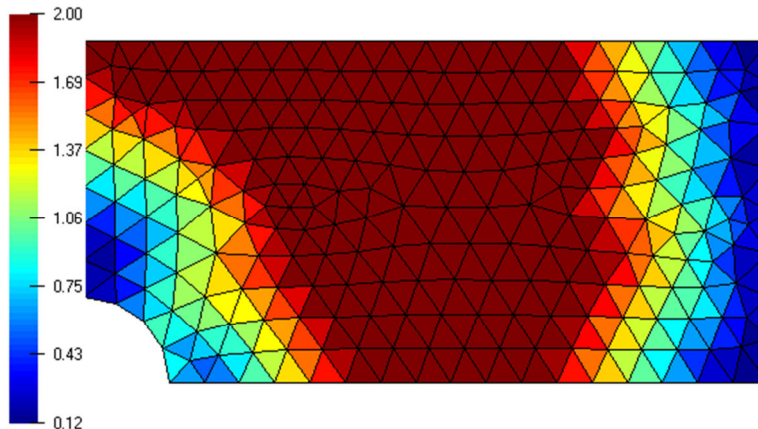


Figura A.3-Fator f_h com tratamento, $f_{h\max}=2$, $f_{h\min}=0.1$, $\Delta f_h=0.15$.

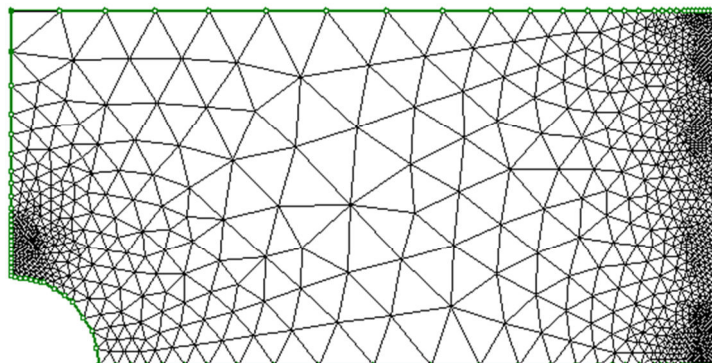


Figura A.4-Malha após refino, $NE=2217$, $\beta=18,92\%$.

APÊNDICE B – CILINDRO DE PAREDE ESPESSA

Dados: $E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$, $f_{h\text{max}}=1.2$, $f_{h\text{min}}=0.1$, $\Delta f_h=0.15$.

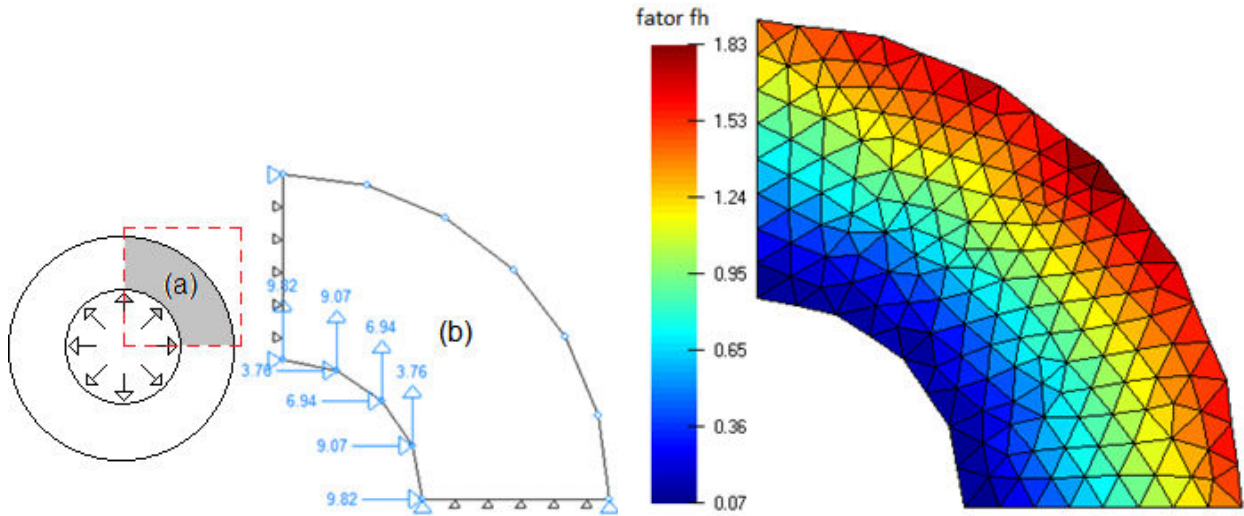


Figura B.1-(a) Região da peça analisada, (b) geometria e condições de contorno.

Figura B.2-Fator f_h , $\beta_{\text{adm}}=15\%$, maiores tensões na parede interna do cilindro.

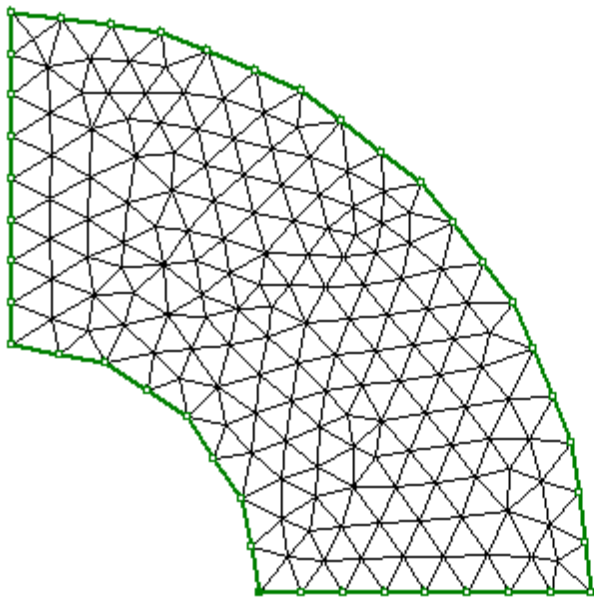


Figura B.3-Malha inicial, NE=318, $\beta=28\%$.

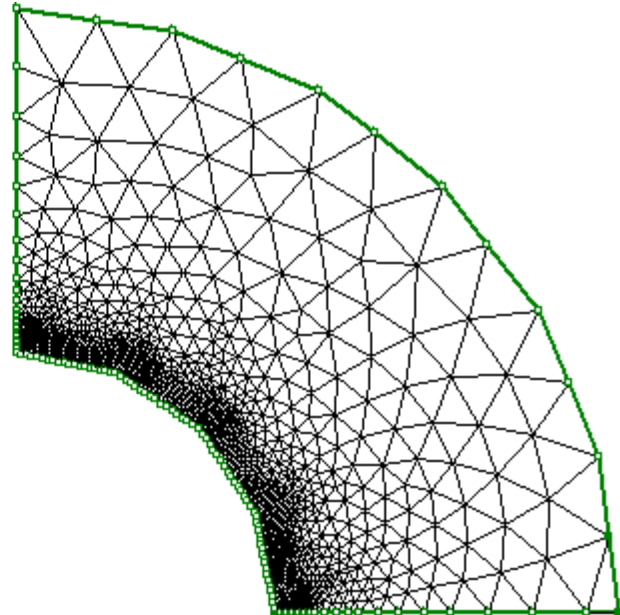


Figura B.4-Malha após refino, NE=2498, $\beta=18,5\%$.

APÊNDICE C – CUBO SUBMETIDO À PRESSÃO

Dados: $E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$, $f_{h\text{max}}=1.2$, $f_{h\text{min}}=0.2$, $\Delta f_h=0.15$, $\beta_{\text{adm}}=5\%$.

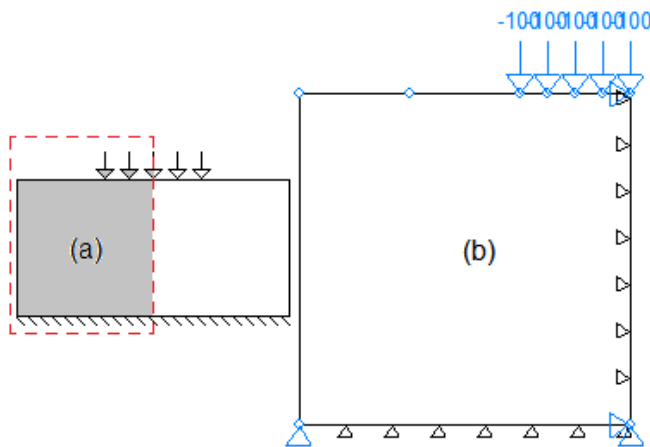


Figura C.1-(a) Região da peça analisada, (b) geometria e condições de contorno.

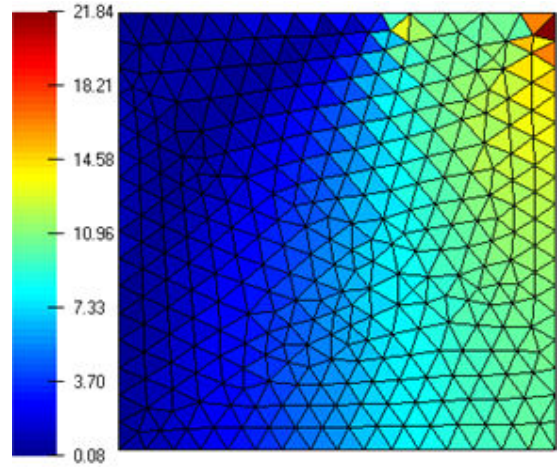


Figura C.2-Tensão de Von Mises, NE=626, maiores valores de tensão próximos aos pontos laterais do trecho com carga aplicada.

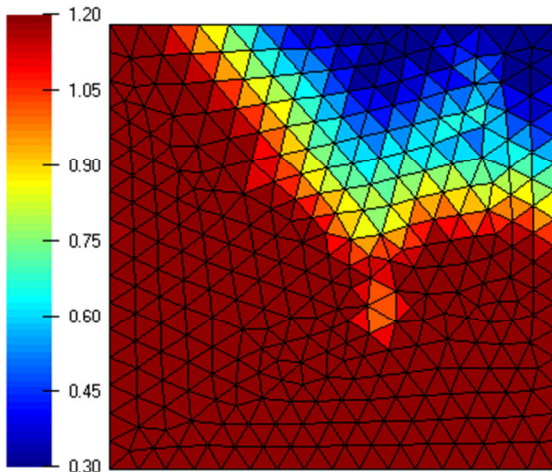


Figura C.3-Fator f_h , locais próximos as laterias do trecho com carga apresentam maior erro.

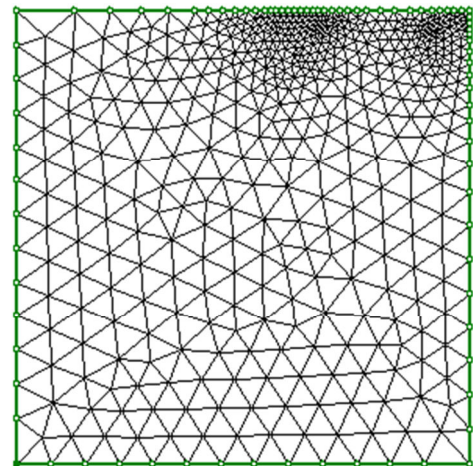


Figura C.4-Malha refinada, NE=998.

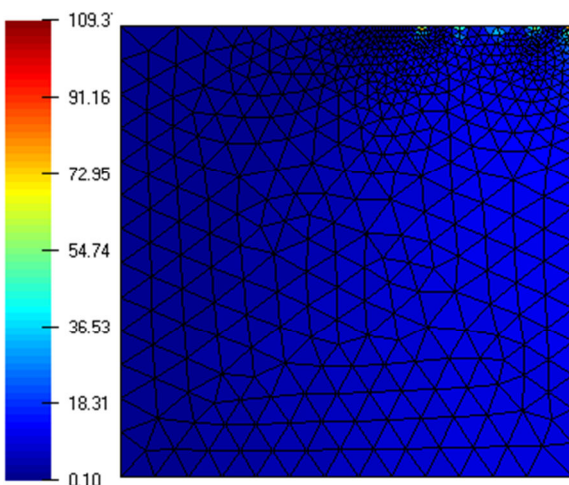


Figura C.5-Tensão de Von Mises, refino colaborou para homogeneização dos resultados.

APÊNDICE D – PLACA FINA COM TRINCA SUBMETIDA À TRAÇÃO

Dados: $E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$, $f_{h\max}=3$, $f_{h\min}=0.15$, $\Delta f_h=0.15$, $\beta_{\text{adm}}=10\%$.

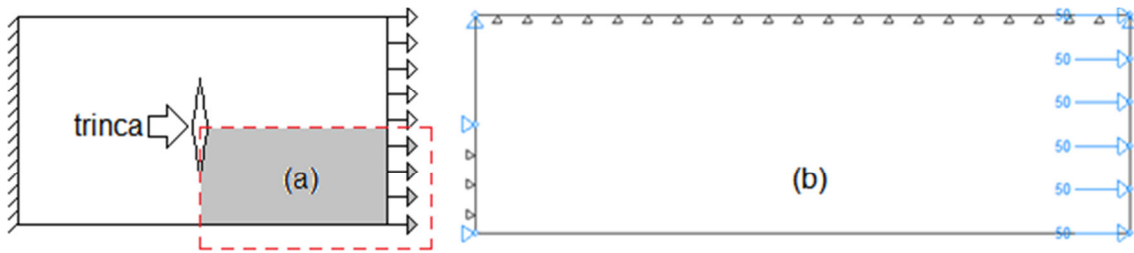


Figura D.1-(a) Região da peça analisada, (b) geometria e condições de contorno.

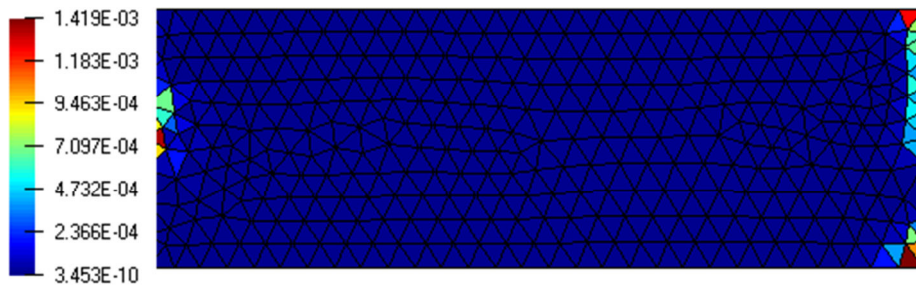


Figura D.2-Norma de energia do erro, NE=649.

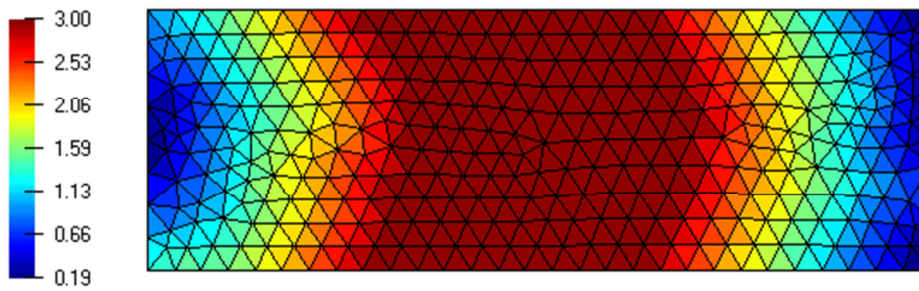


Figura D.3-Fator f_h , $\beta=16,94\%$.

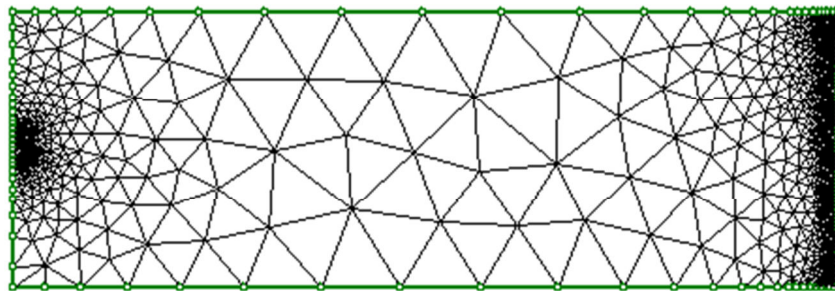


Figura D.4-Malha após refinamento, NE=2011.

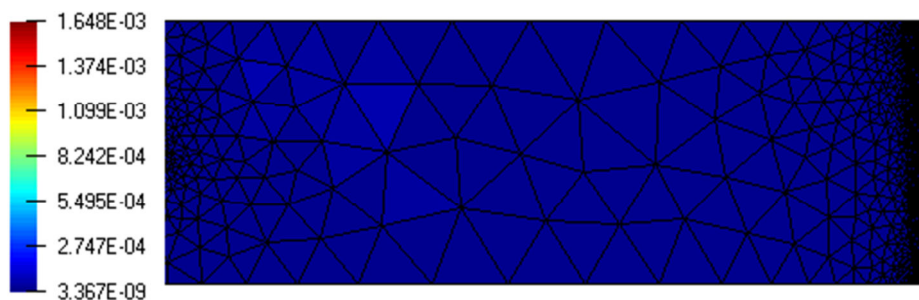


Figura D.5-Norma de energia do erro, $\beta=14,28\%$.