

Uma das contribuições de Stephen Smale, um dos grandes matemáticos que ajudou no desenvolvimento da teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos, criada basicamente pelo matemático Henri Poincaré no século XX, foi à criação do que hoje se chama a Ferradura de Smale ou simplesmente Ferradura. Este “objeto” é uma transformação geométrica que fornece uma base para o entendimento das propriedades caóticas de uma classe de sistemas dinâmicos, além de tornar-se uma das primeiras formas geométricas capazes de descrever um sistema dinâmico, mostrando a presença da imprevisibilidade da dinâmica a longo prazo, mesmo quando a lei de evolução do sistema seja totalmente determinista.

Nosso objetivo nesse trabalho é fazer um estudo detalhado desse sistema dinâmico relacionando-o com uma dinâmica simbólica. Para tanto vamos começar estudando o sistema dinâmico definido no espaço de sequências de símbolos – zeros e uns – e tal que a evolução desse sistema é dada pelo operador shift. Em segundo lugar vamos estabelecer um homeomorfismo entre a ferradura e o espaço shift mostrando que são topologicamente conjugados. Neste ponto, através da dinâmica simbólica, extraímos propriedades importantes sobre a Ferradura de Smale como existência de pontos periódicos (o que nos permite determinar a entropia topológica), órbitas densas e sensibilidade às condições iniciais.

Foi observado que em contextos mais complicados do que expansões do círculo a construção da dinâmica simbólica é útil e em muitos casos imprescindível para podermos analisar as dinâmicas em questão, como é o caso da própria Ferradura de Smale, especialmente se tratando de propriedades básicas como transitividade e existência (ou número) de pontos periódicos, pois uma vez tendo estabelecido uma conjugação topológica entre dois espaços, sendo um deles um espaço shift, todas as propriedades e resultados obtidos na dinâmica simbólica podem ser transportados para o outro sistema dinâmico em questão via conjugação, neste caso para a Ferradura, o que torna a dinâmica simbólica uma ótima ferramenta para o entendimento de certos sistemas dinâmicos.