XXIV SIC SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA 2012

A simplicidade dos grupos $A_n, n \geq 5$, e a não solubilidade dos grupos $S_n, n \geq 5$

Denise Amengual Gaitsch
Licenciatura em Matemtica Noturno UFRGS - dgaitsch@gmail.com
Orientador(a): Profa. Bárbara Seelig Pogorelsky

Grupo

Seja G conjunto não vazio com uma operação:

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to \text{G} \\ (\text{x,y}) &\longmapsto x* \text{ y} \end{aligned}$$

$G, *$ é um grupo se são válidas as propriedades:

1. a $* (b * c) = (a * b) * c$, $\forall$ a, b, c $\in G$
2. $\exists$ e $\in$ G tal que a $*$ e $=$ e $*$ a, $\forall$ a $\in$ G
3. $\forall$ a $\in$ G, $\exists$ b $\in$ G tal que a $*$ b $=$ b $*$ a $=$ e
4. G é grupo abeliano se a $*$ b $=$ b $*$ a, $\forall$ a, b $\in$ G

Subgrupo

Proposição: Seja G um grupo e H um subconjunto de G. As seguintes condições são equivalentes:

- H é um subgrupo de G.
- 1. e $\in$ H
  2. $\forall$ a, b $\in$ H tem-se ab $\in$ H
  3. $\forall$ a $\in$ H $a^{-1} \in$ H
- H $\neq \emptyset$ e $\forall$ a, b $\in$ H tem-se $ab^{-1} \in$ H

Subgrupo Normal

Dizemos que um subgrupo H $\leq$ G é normal em G se g^{-1}Hg $\subseteq$ H, $\forall g \in G$. Notação $H \trianglelefteq G$.

Grupo Simples

Dizemos que um grupo $G \neq \{e\}$ é simples seus únicos subgrupos normais são $\{e\}$ e G.

Grupo Solúvel

Um grupo G diz-se solúvel se existem subgrupos $\{e\} = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \ldots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$ tais que

1. $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$ $\forall$ $i \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$
2. $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ é abeliano $\forall$ $i \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$

S_n

Seja S um conjunto não vazio e G $= \{f : S \to$ S | f bijetiva$\}$. Se $\circ$ é a operação composição de funções, isto é

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\to G \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

então (G,$\circ$) é um grupo tendo I_S como elemento neutro. Este grupo (G,$\circ$) é chamado grupo das permutações do conjunto S. Se S $= \{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos esse grupo por S_n.

r-ciclo

Uma permutacao $\sigma \in S_n$ é um r-ciclo de S_n, $r \geq 2$, se $\exists$ i_1, i_2, …, i_r elementos distintos de $\{1, 2, \ldots,$ n$\}$ tais que: $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, …, $\sigma(i_{r-1}) = i_r$, $\sigma(i_r) = i_1$ e $\sigma(i_j) =$ j, $\forall$ j $\in \{1, 2, 3, \ldots,$ n$\}\backslash\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$. Usaremos a notacao $\sigma = (i_1\, i_2 \ldots i_r) \in S_n$.

Transposição

Chamamos de transposição em S_n qualquer 2-ciclo (ij) do grupo S_n.

Proposição:

Todo elemento de S_n pode ser escrito como um produto de transposições.

A_n

Grupo das permutações pares de S_n, isto é, permutações que são escritas como um produto de um número par de transposições.

Proposição:

Sejam a, b $\in \{1, 2, \ldots, n\}$, a $\neq$ b fixos. Então o grupo A_n, $n \geq 3$, é gerado pelo conjunto de todos os 3-ciclos de S_n do tipo (abk), onde 1$\leq$ k $\leq$ n, k $\neq$ a, k $\neq$ b.

Teorema:

O grupo $A_n, n \geq 5$, é simples.

Corolário:

O grupo $S_n, n \geq 5$, não é solúvel.