

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**UMA FORMULAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÃO DE  
TENSÃO SUAVIZADA**

por

Everton da Silva

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, julho de 2012

# UMA FORMULAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO SUAVIZADA

por

Everton da Silva  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Ph.D. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof. Dr. Carlos Eduardo Marcos Guilherme (FURG - Rio Grande - Brasil)

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler (PROMEC/UFRGS - Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Rogério José Marczak (PROMEC/UFRGS - Porto Alegre - Brasil)

Prof. Ph.D. Francis Henrique Ramos França  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, dia 31 de julho de 2012

*A Rosaura,  
pela motivação, compreensão e amor.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Rosaura, minha esposa, pelo estímulo, compreensão, carinho e amor. Por estar sempre comigo, compartilhando minhas dúvidas e tristezas e, o mais importante de tudo, os momentos de alegrias que vivemos juntos. Obrigado.

Aos meus pais, José (em memória) e, em especial, a minha mãe Fatima, pelo incentivo e apoio ao longo de toda minha vida.

A minha irmã Raquel e sua família, principalmente aos meus afilhados, Anninha e Nicolas que sempre me trazem momentos de alegria com suas presenças.

Ao meu irmão Anderson, por sua simplicidade e carisma.

Agradeço a minha segunda família, Joselina, Cassiana, Bibiana e Rodrigo que estão sempre me apoiando e me incentivando a seguir em frente.

Ao Luiz Volnei e Família, pelo apoio mesmo não estando tão próximos fisicamente.

Ao professor Jun Fonseca, pela orientação e apoio na realização desse trabalho.

Aos colegas do Gmap, em um primeiro momento, na fase de conclusão das disciplinas, agradeço ao grupo de estudo: Luis Drehmer, Ederval, Joel, Castelani e Toso. Em um segundo momento, na parte de programação do trabalho, agradeço ao Daniel De Leon e ao Otávio Augusto pela grande força na conclusão do algoritmo.

Aos professores membros da banca avaliadora pelas contribuições fornecidas ao trabalho.

Ao apoio financeiro concedido pela CAPES.

Ao PROMEC/UFRGS representado pelo seu corpo de funcionários e docentes.

## RESUMO

No presente trabalho, foi implementada uma formulação de otimização topológica com o objetivo de encontrar o mínimo volume de estruturas contínuas bidimensionais, em estado plano de tensão, sujeitas à restrição de tensão de von Mises. Foi utilizado o Método dos Elementos Finitos para discretizar o domínio, com o elemento não conforme de Taylor. A tensão foi suavizada, calculando-se um valor de tensão para cada nó do elemento. O fenômeno da singularidade foi contornado através do método de relaxação da tensão, penalizando-se o tensor constitutivo. Foi usada uma única medida de tensão global, a norma- $p$ , resultando na redução do custo computacional do cálculo das sensibilidades. As sensibilidades da função objetivo e da restrição de tensão foram calculadas analiticamente. O problema de otimização topológica foi resolvido por um algoritmo de Programação Linear Sequencial. Os fenômenos da instabilidade de tabuleiro e da dependência da malha foram contornados pela utilização de um filtro de densidade linear. A formulação desenvolvida foi testada em 3 casos clássicos. No primeiro deles, foi testada uma viga curta em balanço, submetida a 3 diferentes tipos de penalização da função objetivo, obtendo-se uma estrutura com 27% do volume inicial, com reduzido número de elementos com densidades intermediárias. No segundo caso, foi testada a mesma estrutura submetida à flexão, chegando-se a uma topologia bem definida no formato de duas barras, com 16,25% do volume inicial. No terceiro caso, em que foi utilizado um componente estrutural em formato de “L”, justamente por favorecer o surgimento de concentração de tensão em sua quina interna, o otimizador gerou uma estrutura bem definida, permanecendo, contudo, uma pequena região de concentração de tensão na topologia final.

Palavras-chave: Otimização topológica, restrição de tensão, tensão suavizada, tensão normalizada.

## ABSTRACT

A topology optimization formulation to search for the minimum volume of two-dimensional linear elastic continuous structures in plane stress, subject to a von Mises stress constraint, was implemented in this study. The extended domain was discretized using Taylor nonconforming finite element. Nodal values of the stress tensor field were computed by global smoothing. A penalized constitutive tensor stress relaxation method bypassed the stress singularity problem. A single p-norm global stress measure was used to speed up the sensitivity analysis. The sensitivities of the objective function and stress constraints were derived analytically. The topology optimization problem was solved by a Sequential Linear Programming algorithm. A linear density filter avoided the checkerboard and the mesh dependence phenomena. The formulation was tested with three benchmark cases. In the first case, a tip loaded short cantilever beam was optimized using a sequence of three different objective function penalizations. The converged design had approximately 27% of the initial volume, with a small proportion of intermediate densities areas. In the second case, the same domain was subjected to shear, resulting a well defined two-bar design, with 16.25% of the initial volume. In the third case, an L-shape structure was studied, because it has a stress concentration at the reentrant corner. In this last case, the final topology was well-defined, but the stress concentration was not completely removed.

Keywords: Topology optimization, stress constraints, smoothed stress, normalized stress.

# ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	Objetivos .....	2
1.2	Organização do Trabalho .....	3
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	4
2.1	Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica .....	4
2.1.1	Deslocamento .....	4
2.1.2	Deformação Infinitesimal .....	5
2.1.3	Tensão .....	5
2.1.4	Relação Constitutiva .....	6
2.1.5	Equilíbrio .....	8
2.2	Método dos Elementos Finitos (MEF) .....	9
2.2.1	Elemento Bilinear Isoparamétrico Não Conforme de Taylor .....	15
2.2.2	Suavização Global das Tensões .....	19
2.3	Otimização Estrutural .....	22
2.3.1	Definições .....	23
2.3.1.1	Variáveis de Projeto .....	23
2.3.1.2	Função Objetivo (ou Função Custo) .....	24
2.3.1.3	Restrições do Projeto .....	25
2.3.2	Formulação Geral de um Problema de Otimização .....	26
2.3.3	Programação Matemática .....	29
2.3.3.1	Programação Linear (PL) .....	29
2.3.3.2	Programação Linear Sequencial (PLS) .....	30
2.4	Otimização Topológica .....	32
2.4.1	Penalização das Densidades Intermediárias .....	35
2.4.2	Instabilidade de Tabuleiro .....	38
2.4.3	Dependência da Malha .....	39
2.4.4	Filtros .....	41
3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	44
3.1	Relaxação da Tensão .....	46
3.2	Medida de Tensão Global .....	49

3.3	Medida de Tensão Global Normalizada.....	50
3.4	Cálculo das Sensibilidades.....	52
3.5	Linearização das Restrições.....	58
3.6	Filtro de Densidade.....	58
4	IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS.....	61
4.1	Descrição do Algoritmo Desenvolvido.....	61
4.2	Resultados Obtidos.....	63
4.2.1	Primeiro Caso.....	63
4.2.2	Segundo Caso.....	70
4.2.3	Terceiro Caso.....	75
5	CONCLUSÃO.....	82
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	83
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	84

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Deformação de um corpo.....	5
Figura 2.2 - Estado de tensão em um corpo tridimensional em torno do ponto P.....	6
Figura 2.3 - Tensão suavizada e não suavizada.....	19
Figura 2.4 - Elemento isoparamétrico bidimensional parabólico.....	20
Figura 2.5 - Região admissível para um problema de otimização envolvendo duas variáveis independentes. ....	27
Figura 2.6 - Casos possíveis de função. ....	28
Figura 2.7 - Definição do domínio e das condições de contorno. ....	33
Figura 2.8 - Modelo de material baseado em homogeneização. ....	34
Figura 2.9 - Penalizações da função objetivo conforme Equações 2.62 e 2.63.....	37
Figura 2.10 - Instabilidade de tabuleiro (malha do MEF com elemento de baixa ordem).....	38
Figura 2.11 - Dependência da malha para: 1) 2700, 2) 4800 e 3) 17200 elementos. ....	39
Figura 2.12 - Diferentes soluções de otimização para um mesmo problema. ....	40
Figura 4.1 - Fluxograma do algoritmo de otimização. ....	62
Figura 4.2 - Caso 1: geometria e condições de contorno da viga curta em balanço. ....	64
Figura 4.3 - Instabilidade de tabuleiro no caso 1.....	65
Figura 4.4 - Topologia do caso 1 sem penalização da função objetivo.....	66
Figura 4.5 - Convergência da função objetivo sem penalização no caso 1.....	66
Figura 4.6 - Topologia do caso 1 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$ e $\alpha=0$ ). ....	67
Figura 4.7 - Topologia final do caso 1 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$ e $\alpha=0,3$ ). ....	67
Figura 4.8 - Distribuição da tensão de von Mises nodalizada da topologia final do caso 1.....	68
Figura 4.9 - Comportamento das tensões da topologia final ao longo das iterações no caso 1. ....	68
Figura 4.10 - Comportamento da restrição da topologia final ao longo das iterações no caso 1. ....	69
Figura 4.11 - Análise de tensões na estrutura interpretada.....	69
Figura 4.12 - Caso 2: geometria e condições de contorno da estrutura submetida à flexão. ...	70
Figura 4.13 - Topologia do caso 2 sem penalização da função objetivo.....	71
Figura 4.14 - Convergência da função objetivo sem penalização no caso 2. ....	71
Figura 4.15 - Topologia do caso 2 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$ e $\alpha=0$ ). ....	72

Figura 4.16 - Topologia final do caso 2 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$ e $\alpha=0,3$ ). .....	72
Figura 4.17 - Distribuição da tensão de von Mises nodalizada da topologia final no caso 2...	73
Figura 4.18 - Comportamento das tensões da topologia final ao longo das iterações no caso 2. .....	74
Figura 4.19 - Comportamento da restrição da topologia final ao longo das iterações no caso 2. .....	74
Figura 4.20 - Caso 3: geometria e condições de contorno da estrutura em “L”.....	75
Figura 4.21 - Topologia do caso 3 sem penalização da função objetivo.....	76
Figura 4.22 - Convergência da função objetivo sem penalização no caso 3. ....	76
Figura 4.23 - Topologia do caso 3 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$ e $\alpha=0$ ). ....	77
Figura 4.24 - Convergência da função objetivo com penalização no caso 3 ( $p=1/8$ e $\alpha=0$ ). ...	78
Figura 4.25 - Topologia do caso 3 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$ e $\alpha=0,3$ ). ....	78
Figura 4.26 - Distribuição da tensão de von Mises nodalizada da topologia final no caso 3... 79	
Figura 4.27 - Comportamento das tensões ao longo das iterações no caso 3.....	80
Figura 4.28 - Comportamento da restrição ao longo das iterações no caso 3. ....	80
Figura 4.29 - Topologia do caso 3 ao longo do processo de iteração do algoritmo.....	81
Figura 4.30 - Resultados da otimização da estrutura em “L” apresentados por alguns autores. .....	81

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Dados do caso 1.....	64
Tabela 4.2 - Dados do caso 2.....	70
Tabela 4.3 - Dados do caso 3.....	75

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CST	Triângulo de Deformação Constante
EPD	Estado Plano de Deformações
EPT	Estado Plano de Tensões
GID	Pré e pós processador para simulação numérica
KS	Kresselmeier-Steinhauser
MEF	Método dos Elementos Finitos
MAM	Método das Assíntotas Móveis
MATLAB	Ambiente de programação para desenvolvimento de algoritmos, análise de dados, visualização e cálculo numérico.
PL	Programação Linear
PLS	Programação Linear Sequencial
PMEP	Princípio da Mínima Energia Potencial Total
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
SEF's	Smooth Envelope Functions
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Caracteres Latinos

$1, 2, 3$	Sistema de coordenadas global	
$a$	Alteração do valor das variáveis de projeto a cada iteração	
$a^{\text{inf}}, a^{\text{sup}}$	Limites laterais para a programação linear	
$\mathbf{A}_{i=1}^{n_e}$	Operador de superposição “assembly”	
$\mathbf{b}$	Vetor das forças de corpo	$[\text{N}/\text{m}^3]$
$b(\cdot)$	Forma linear do trabalho externo	
$\mathbf{B}$	Matriz das derivadas das funções de interpolação	
$\mathbf{B}^e$	Matriz das derivadas das funções de interpolação do elemento $e$	
$C$	Parâmetro de normalização	
$e(\xi_1, \xi_2)$	Erro entre a tensão suavizada e a não suavizada	
$E$	Módulo de elasticidade	$[\text{N}/\text{m}^2]$
$\mathbf{E}$	Tensor constitutivo de quarta ordem	$[\text{N}/\text{m}^2]$
$E_{ijkl}$	Tensor constitutivo homogeneizado	$[\text{N}/\text{m}^2]$
$E_{ijkl}^0$	Tensor constitutivo do material de base	$[\text{N}/\text{m}^2]$
$\mathbf{f}$	Vetor de forças global	$[\text{N}]$
$f(x)$	Função objetivo	
$F(x)$	Função multi-objetivo	
$g_j(x)$	Conjunto das restrições de desigualdade	
$g(\xi_1, \xi_2)$	Função de suavização	
$G$	Módulo de elasticidade transversal	$[\text{N}/\text{m}^2]$
$h_k(x)$	Conjunto das restrições de igualdade	
$H^1$	Espaço de Hilbert	
$\mathbf{I}$	Matriz identidade	

<b>J</b>	Matriz Jacobiana de um elemento	
<b>K</b>	Matriz de Rigidez	
<b>K<sup>e</sup></b>	Matriz de Rigidez do elemento <i>e</i>	
<i>l<sub>i</sub></i>	Tamanho do limite móvel da <i>i</i> -ésima variável de projeto	
<i>L<sup>∞</sup></i>	Espaço de norma $\ \cdot\ _{L^\infty(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} (\cdot) < \infty$	
<i>L(·)</i>	Operador diferencial deslocamento-deformação	
<b>L<sub>e</sub></b>	Matriz de localização do elemento <i>e</i>	
<i>m</i>	Penalização do volume	
<i>n</i>	Penalização da tensão	
<b>n</b>	Vetor unitário normal à superfície	
<i>n<sub>e</sub></i>	Número de elementos finitos	
<i>n<sub>p</sub></i>	Expoente da norma- <i>p</i>	
<i>n<sub>telem</sub></i>	Número total de elementos da malha	
<i>n<sub>mos</sub></i>	Número total de nós da malha	
<b>N<sup>e</sup></b>	Matriz das funções de interpolação do elemento <i>e</i>	
<i>N<sub>i</sub></i>	Função de interpolação	
<i>p</i>	Penalização da rigidez	
<i>P</i>	Ponto qualquer no espaço	
<b>q</b>	Vetor de deslocamento global	[m]
<b>q<sup>e</sup></b>	Vetor de deslocamentos nodais do elemento <i>e</i>	[m]
<i>r<sub>0</sub></i>	Raio do elemento <i>i</i>	[m]
<i>r<sub>j</sub></i>	Distância entre os centroides dos elementos <i>i</i> e <i>j</i>	[m]
<i>R<sup>3</sup></i>	Espaço tridimensional	
<b>S<sup>e</sup></b>	Matriz de suavização	
<b>t</b>	Vetor das trações superficiais	[N/m <sup>2</sup> ]
tr	Operador traço	
<b>u</b>	Vetor de deslocamentos	[m]
<i>u<sup>0</sup></i>	Funções deslocamentos prescrito	[m]
<b>u<sub>e<sub>a</sub></sub></b>	Deslocamentos nodais do elemento de Taylor	[m]

$\mathbf{u}_{e_b}$	Deslocamentos das funções bolha do elemento de Taylor	[m]
$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2)$	Vetor de deslocamentos do elemento de Taylor	[m]
$V$	Volume	[m <sup>3</sup> ]
$\mathbf{w}$	função arbitrária	
$\mathbf{x}$	Vetor das variáveis de projeto	
$x^*$	Mínimo global absoluto	

### Caracteres Gregos

$\alpha$	Parâmetro de penalização da função objetivo	
$\Gamma$	Superfície de um corpo	
$\Gamma_u$	Região da superfície de um corpo com deslocamentos prescritos	
$\Gamma_t$	Região da superfície de um corpo com carga aplicada	
$\delta$	Fator de variação dos limites móveis	
$\Delta_1, \Delta_2$	Magnitude da atualização das variáveis de projeto de 1 passo anterior e a 2 passos anteriores, respectivamente	
$\varepsilon$	Deformação infinitesimal	
$\varepsilon_{ij}$	Deformação infinitesimal na direção $j$ perpendicular ao eixo $i$	
$\lambda$	Coefficiente de Lamé	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mu$	Coefficiente de Lamé	[N/m <sup>2</sup> ]
$\nu$	Coefficiente de Poisson	
$\xi_1, \xi_2$	Sistema de coordenadas local	
$\Pi$	Funcional de energia	
$\rho$	Densidade do material	
$\boldsymbol{\rho}$	Vetor de densidade do material	
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de segunda ordem das tensões de Cauchy	
$\sigma_r$	Tensão relaxada	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_y$	Tensão limite (restrição)	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_{y_{PN}}$	Norma da tensão limite (restrição)	[N/m <sup>2</sup> ]

$\sigma_{eq}$	Tensão equivalente de von Mises	$[N/m^2]$
$\sigma_{ij}$	Tensão na direção do eixo $j$ perpendicular ao eixo $i$	$[N/m^2]$
$\sigma_{PN}$	Norma de tensão	$[N/m^2]$
$\sigma_{vm}$	Tensão de von Mises	$[N/m^2]$
$\sigma_{vm_{eg}}$	Tensão de von Mises nos pontos de Gauss	$[N/m^2]$
$\sigma_{vm_{nó}}$	Tensão de von Mises nos nós	$[N/m^2]$
$\sigma_{max}$	Tensão de von Mises máxima	$[N/m^2]$
$\sigma(\xi_1, \xi_2)$	Tensão não suavizada	$[N/m^2]$
$\Phi$	Conjunto das funções-teste	
$\chi$	Funcional de suavização	
$\Omega$	Domínio de um corpo	$[m^3]$
$\Omega^m$	Domínio preenchido com material	$[m^3]$
$\nabla$	Operador diferencial nabra	
$\nabla \rho$	Gradiente espacial da densidade	

# 1 INTRODUÇÃO

A importância dos métodos de otimização estrutural, cuja aplicação expandiu-se com o desenvolvimento da tecnologia computacional, está relacionada à obtenção de projetos com melhor desempenho, em que se busca o menor consumo de material, refletindo diretamente sobre os custos de produção e a conservação de recursos naturais. Por meio desses métodos, o projeto é avaliado através de uma função objetivo, que é definida a partir de um conjunto de variáveis de projeto que descreve o sistema estrutural. O objetivo é buscar os extremos dessa função, maximizando ou minimizando o seu valor dentro de uma região admissível do projeto, desde que satisfeitas as restrições impostas, até ser atingida a geometria ótima do domínio definido para o problema de otimização.

Dentre os métodos de otimização estrutural, a otimização topológica constitui um método computacional que permite controlar o domínio geométrico por meio de modificações na topologia. Isto é, permite projetar a topologia ótima de uma estrutura dentro de um domínio de projeto fixo, definido a partir de critérios de custo, tais como a máxima rigidez e o menor volume. No caso de estruturas contínuas, a distribuição ótima de material implica identificar os pontos do domínio que conterão material e os pontos que ficarão vazios (sem material), sendo possível a criação de novos contornos para a estrutura, partindo-se de uma topologia inicial bastante diferente da topologia final ou ótima.

Neste trabalho, foi implementado um método de otimização topológica com o objetivo de encontrar o mínimo volume de estruturas contínuas bidimensionais sujeitas à restrição de tensão de von Mises, utilizando-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) para discretizar o domínio e resolver as equações de equilíbrio. Foi utilizado o elemento isoparamétrico bilinear de 4 nós, conhecido como o elemento não conforme de Taylor [Taylor *et al.*, 1976<sup>1</sup> *apud* Hughes, 1987], em que a tensão é obtida nos pontos de Gauss e, após, suavizada para os nós.

Seguindo-se o modelo proposto por Le *et al.* [Le *et al.*, 2010], a tensão foi relaxada, penalizando-se o tensor constitutivo para evitar o fenômeno da singularidade. Em seguida, para enfrentar a natureza local da tensão, foi utilizada uma medida de tensão global, suavizada

---

<sup>1</sup> Taylor, R. L., Beresford, P. J. e Wilson, E. L., A Nonconforming Element for Stress Analysis. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 10, No. 6, pp. 1211-1219, 1976.

pela norma- $p$  e, após, normalizada, com base, também, na formulação de Le *et al.* [Le *et al.*, 2010].

As sensibilidades (derivadas) foram calculadas pelo método analítico, o qual viabiliza valores mais exatos e o menor custo computacional, obtendo-se as derivadas da função objetivo e da restrição de tensão. As restrições foram, então, linearizadas pela técnica da expansão por séries de Taylor e, por fim, o problema de otimização topológica foi resolvido por um algoritmo de Programação Linear Sequencial (PLS).

A formulação foi testada em 3 casos clássicos apresentados em artigos de otimização topológica, todos eles submetidos à minimização do volume com restrição de tensão. Nos dois primeiros casos, foi utilizada uma estrutura de proporção 8x5, submetida a condições de contorno e carregamento diferentes. No terceiro caso, foi utilizado um componente estrutural em formato de “L”, justamente por favorecer o surgimento de concentração de tensão no ângulo reto formado na quina interna da estrutura.

## 1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho foi implementar um método de otimização topológica para problemas com restrição de tensão. Como a utilização da tensão como restrição requer que se enfrente o fenômeno da singularidade, para contornar esse problema, seguiu-se o modelo apresentado por Le *et al.* [Le *et al.*, 2010], no qual o SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) é utilizado como método de relaxação da tensão, penalizando-se o tensor constitutivo. Esse método, em até certo ponto, é equivalente ao método de relaxação- $\epsilon$ , usado por Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998].

Como objetivos secundários destacaram-se:

- 1) utilizar o elemento isoparamétrico bilinear de 4 nós de Taylor com a suavização da tensão, proposta por Hinton e Campbell [Hinton e Campbell, 1974], o que serviu para contornar as descontinuidades que as tensões apresentaram entre os elementos;
- 2) usar a norma- $p$ , no processo de suavização das tensões, como única medida de tensão global ao invés das várias medidas de tensão local, ou melhor, ao invés das restrições de tensão para cada elemento da malha discretizada pelo MEF, a fim de

reduzir o elevado custo computacional do cálculo das sensibilidades, seguindo-se, também, a formulação de Le *et al.* [Le *et al.*, 2010];

3) considerar, para a única medida de tensão global, os valores das tensões em todos os nós da malha, e não somente os valores das tensões que ultrapassaram os limites das restrições ativas (tensões regionais não suavizadas); e

4) definir a evolução da restrição de tensão global normalizada a cada iteração nos moldes propostos por Le *et al.* [Le *et al.*, 2010], isto é, utilizar os valores da tensão máxima e da norma da tensão, obtidos na iteração anterior no processo de otimização, para normalizar a tensão global a partir da norma- $p$ , que é uma melhor aproximação da tensão máxima.

## 1.2 Organização do Trabalho

No capítulo 2, são apresentados os fundamentos teóricos utilizados neste trabalho. É feita uma revisão sobre elasticidade plana e sobre o método dos elementos finitos, assim como são definidos os aspectos gerais empregados em grande parte dos projetos que envolvem otimização estrutural, tais como variáveis de projeto, função objetivo e restrições de projeto. Também são abordados os temas sobre programação matemática e os conceitos sobre otimização topológica, os problemas associados a esse método e as soluções propostas para os mesmos.

O capítulo 3 mostra a formulação do problema de otimização topológica e os principais conceitos testados neste trabalho. No capítulo 4, é descrito o algoritmo desenvolvido e apresentados os resultados obtidos. No capítulo 5, são apresentadas as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

No presente trabalho, as análises da tensão e da deformação foram feitas dentro do regime elástico, desconsiderando-se os fenômenos relacionados à não linearidade física e geométrica, como plastificação e fratura, que podem ocorrer, principalmente, na região de aplicação das cargas e deslocamentos prescritos.

Como os problemas de otimização estrutural envolvem variáveis de projeto, função objetivo e restrições, que dependem, direta ou indiretamente, da solução analítica ou numérica das equações de equilíbrio, optou-se pela Teoria da Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica. Essa teoria é estudada pela Mecânica dos Meios Contínuos, a qual permite reduzir a teoria da deformação finita de um sólido elástico isotrópico a uma teoria linear quando a deformação é suficientemente pequena [Atkin e Fox, 1980]. Para resolver as equações diferenciais, surgidas das equações de equilíbrio propostas pela teoria da elasticidade linear infinitesimal isotrópica, utilizou-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), que permite soluções aproximadas dessas equações.

### 2.1 Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica

A elasticidade linear infinitesimal estuda as deformações e a distribuição dos esforços internos de um sólido sujeito a cargas externas. As limitações dessa teoria restringem a sua aplicação apenas a pequenas deformações.

#### 2.1.1 Deslocamento

Conforme mostrado na Figura 2.1, assumindo o corpo deformável  $C_0$ , que se deforma sob a ação de um sistema de forças, atingindo a configuração deformada  $C_1$ , o vetor  $\mathbf{u}$  denota o deslocamento de um ponto genérico de sua posição na configuração inicial para a nova posição na configuração deformada. O vetor deslocamento é tratado como uma função

contínua da posição inicial, de modo que existe um vetor  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  para cada ponto  $\mathbf{x}$  do corpo. Essa descrição é possível na hipótese de um meio contínuo, que desconsidera a microestrutura do material.

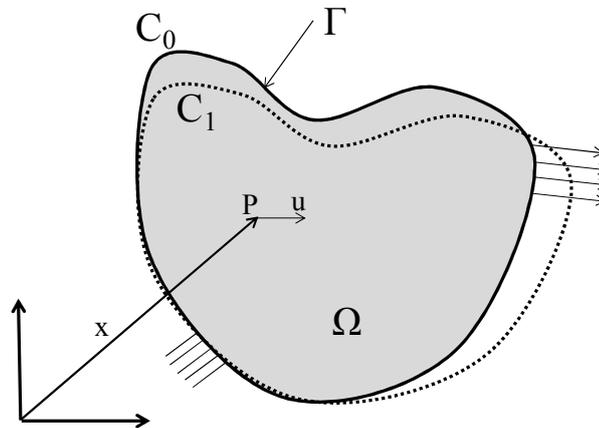


Figura 2.1 - Deformação de um corpo.

### 2.1.2 Deformação Infinitesimal

A partir dos deslocamentos, podem ser calculados os componentes da deformação infinitesimal ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) em qualquer ponto da estrutura pela relação cinemática:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.1)$$

### 2.1.3 Tensão

Utiliza-se a Tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , como um tensor de segunda ordem, definida através da fórmula de Cauchy:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.2)$$

em que  $\mathbf{t}$  é o vetor das forças superficiais (forças prescritas por unidade de área), e  $\mathbf{n}$  é o vetor adimensional normal à superfície, expresso na configuração atual, que, em uma formulação infinitesimal, se confunde com a inicial.

A Figura 2.2 ilustra o estado de tensões em um ponto qualquer de um corpo deformado.

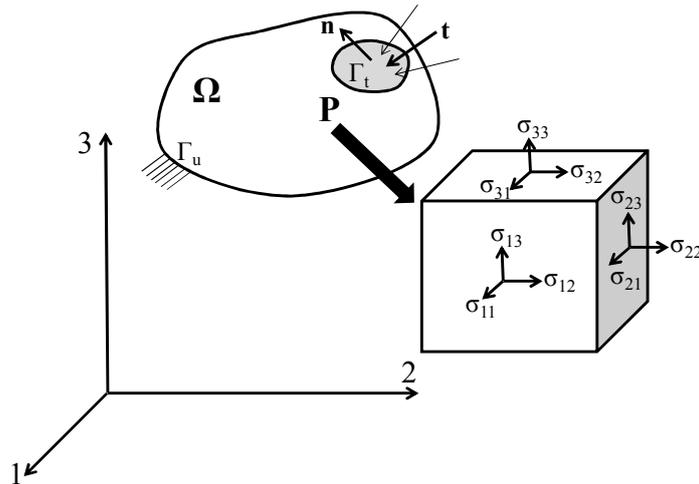


Figura 2.2 - Estado de tensão em um corpo tridimensional em torno do ponto P.

#### 2.1.4 Relação Constitutiva

A equação que relaciona as tensões com as deformações infinitesimais, em sua forma tensorial para materiais isotrópicos, é a seguinte:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.3)$$

Em domínios tridimensionais, a Equação 2.3 pode ser escrita na notação compacta da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Logo, em domínios bidimensionais, utilizando-se as hipóteses da elasticidade plana do Estado Plano de Deformações (EPD), em que  $\varepsilon_{33} = 0$ , ou Estado Plano de Tensões (EPT), em que  $\sigma_{33} = 0$ , a Equação 2.4 pode ser reescrita de forma geral como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* + 2\mu & \lambda^* & 0 \\ \lambda^* & \lambda^* + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

em que  $\lambda$  e  $\mu$  são os coeficientes de Lamé [Atkin e Fox, 1980].

Os coeficientes de Lamé estão relacionados ao Módulo de Young e ao Coeficiente de Poisson pelas seguintes expressões:

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \rightarrow \text{EPT} \quad (2.6)$$

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \rightarrow \text{EPD}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.7)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade (Módulo de Young),  $\nu$  é o coeficiente de Poisson, e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal. Conforme mostram as Equações 2.6 e 2.7, um material isotrópico, que é o caso da maioria dos metais utilizados em construções mecânicas, possui apenas duas propriedades elásticas independentes ( $E$  e  $\nu$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  ou, ainda,  $K$  e  $G$ ).

Neste trabalho, foi utilizada a hipótese do estado plano de tensões, pois foram resolvidos problemas de otimização topológica de estruturas simples, usadas como exemplos acadêmicos, sendo basicamente chapas de espessura unitária.

### 2.1.5 Equilíbrio

A solução de um problema de elasticidade linear infinitesimal isotrópica para um corpo no espaço  $R^3$  envolve 15 funções matemáticas: 6 funções que descrevem os componentes do tensor de tensões, 6 funções que descrevem os componentes do tensor de deformações e 3 funções que descrevem os componentes do vetor de deslocamentos. Essas 15 funções devem satisfazer a 3 equações de equilíbrio (derivadas das Leis de Newton), 6 equações que relacionam deformação com deslocamento (relações cinemáticas) e 6 equações que relacionam tensão com deformação (equações constitutivas, que dependem das características dos materiais).

Chega-se, portanto, a um sistema de 15 equações com 15 incógnitas, sendo que a formulação mais simples para a solução do problema de elasticidade são as equações de Navier. Essas equações são obtidas a partir da redução a um sistema de 3 equações diferenciais para os deslocamentos, inserindo-se, nas equações de equilíbrio, as equações próprias do material, as equações dos deslocamentos e as equações das deformações.

Em notação vetorial, as equações de equilíbrio são escritas da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.8)$$

Cada componente do tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  é denotada por  $\sigma_{ij}$ , na qual os índices referem-se à tensão na direção do eixo  $j$  atuando no plano normal ao eixo  $i$  (Figura 2.2).  $\mathbf{b}$  são as forças de corpo por unidade de volume. Como o sistema deve respeitar o princípio da conservação da quantidade de momento angular [Atkin e Fox, 1980], na ausência de um torque externo distribuído, a seguinte relação deve ser satisfeita (Figura 2.2):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.9)$$

Tomando-se  $\Gamma_t$  como uma região da superfície do corpo, na qual estão aplicadas as forças, e  $\Gamma_u$  como outra região do corpo, em que há deslocamentos prescritos (Figura 2.2). Logo, as condições de contorno em  $\Gamma_u$  são:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(x_1, x_2, x_3) \quad (2.10)$$

em que  $\mathbf{u}^0$  são as funções deslocamento prescritas em  $\Gamma_u$ .

No processo de otimização, as equações de equilíbrio funcionam como restrições de igualdade, as quais devem ser satisfeitas a cada iteração sob pena de a estrutura otimizada não se encontrar em equilíbrio estático. Muito embora a notação mais geral das equações de equilíbrio seja dada em função das tensões, como mostrado na Equação 2.8. As equações permitem formular o problema da elasticidade em termos das funções de deslocamentos, que são as incógnitas primárias (Equação de Navier), sendo que as deformações resultantes a partir desses deslocamentos devem satisfazer às equações de compatibilidade de deformação infinitesimal [Atkin e Fox, 1980].

## 2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)

Na Mecânica do Contínuo, em que a matéria é vista como um meio contínuo, sem vazios interiores, é possível definir o ponto geométrico, de volume igual a zero, por um limite matemático tal como na definição das derivadas no cálculo infinitesimal. Desse modo, os princípios da física são escritos sob a forma de equações diferenciais, e os efeitos da constituição molecular dos materiais são considerados em nível macroscópico por meio das suas equações constitutivas.

No processo de modelagem computacional de um fenômeno físico, o primeiro passo é escolher adequadamente os princípios físicos e as variáveis dependentes e independentes que descrevem o problema, que resulta em um conjunto de equações diferenciais. O segundo passo é obter a solução para o modelo matemático, o que é atribuído ao MEF, que teve suas origens no campo da análise estrutural, sendo o método de análise estrutural mais utilizado na atualidade.

A forma clássica ou forte (Equação 2.8) de um problema de valor de contorno consiste em determinar uma função que satisfaz a uma determinada equação diferencial em um dado domínio. Para isso, é necessário que se conheçam os valores que a função e/ou suas derivadas (que são equações diferenciais parciais de 2ª ordem sobre a função deslocamento  $\mathbf{u}$ ) assumem no contorno do domínio [Hughes, 1987].

Multiplicando-se a Equação 2.8 por uma função arbitrária, função teste  $\mathbf{w}$ , a qual deve, obrigatoriamente, respeitar as condições de contorno essenciais do problema dada por [Hughes, 1987]:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} = 0 \cdot \mathbf{w} \quad \text{em } \Omega \quad \forall \mathbf{w} \quad (2.11)$$

Integrando-se no domínio tem-se:

$$\int_{\Omega} [(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}] d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w} \quad (2.12)$$

e integrando-se por partes o primeiro termo, resulta em:

$$-\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w} \quad (2.13)$$

A Equação 2.13 é chamada de formulação fraca, a qual a solução não é a única possível, mas é a mais natural para os problemas de valor de contorno [Hughes, 1987].

O método mais conveniente para resolverem-se problemas de mecânica dos sólidos não é o das equações de equilíbrio, mas, sim, os métodos variacionais, os quais apresentam, dentre outras, a vantagens de apontar, de um modo mais natural, as condições de contorno, e de reduzir os requisitos de continuidade das funções em relação às equações diferenciais, o que é mais interessante no caso de soluções aproximadas.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é bastante utilizado na definição das equações de equilíbrio no formato diferencial, que governam estruturas mais complexas, que não permitem simplificação geométrica e a definição direta das equações diferenciais que as governam, tendo o seguinte enunciado: uma estrutura submetida à ação de forças externas está em equilíbrio quando, ao serem impostos deslocamentos arbitrários (virtuais) compatíveis com as condições de contorno, o trabalho realizado pelas forças externas sobre os deslocamentos virtuais é igual ao trabalho que realizam as tensões sobre as deformações produzidas pelos deslocamentos virtuais [De Navarra, 1995].

O PTV é condição necessária e suficiente para garantir o equilíbrio de toda a estrutura, bem como de qualquer uma de suas partes. Considera-se uma variação do funcional e busca-se a função  $u$  para a qual o funcional se anula. Para o caso de funcionais convexos e

com matriz de coeficientes positiva-definida, como no caso da energia potencial da elasticidade linear infinitesimal, é possível provar que se está em um ponto de mínimo.

Alternativamente, uma expressão similar é obtida a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total (PMEP), segundo o qual, entre todas as configurações possíveis, as que respeitam as condições de equilíbrio são as da mínima energia potencial. Para o caso da elasticidade linear infinitesimal, há sempre solução para o problema, e essa solução é sempre única. Assim, partindo-se do funcional de energia, tem-se:

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (2.14)$$

em que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (2.15)$$

Logo minimizando  $\Pi$  pode-se determinar o deslocamento  $\mathbf{u}$  no equilíbrio:

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (2.16)$$

em que o primeiro termo é o operador bilinear correspondente à parcela de energia interna de deformação, o segundo termo é referente às forças de superfície, e o terceiro termo é referente às forças de corpo, sendo que os dois últimos representam o operador linear, referente ao trabalho das forças externas, ou seja, a energia potencial externa.  $\mathbf{E}$  é o tensor constitutivo de quarta ordem das propriedades elásticas do material,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  é o tensor de segunda ordem das deformações infinitesimais,  $\mathbf{t}$  é o vetor de forças de superfície,  $\mathbf{b}$  é o vetor de forças de corpo,  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamento.

São consideradas apenas as deformações infinitesimais, em que a relação entre a deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e o deslocamento  $\mathbf{u}$  é dada pelo operador diferencial  $\mathbf{L}(\cdot)$ , que, no caso da elasticidade bidimensional, é dado por:

$$\mathbf{L}(\cdot) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

de tal forma que:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.18)$$

em que:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Dividindo-se o domínio em  $n_e$  elementos finitos, de tal forma que:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n_e} \Omega_i^e \quad (2.20)$$

e interpolando-se os deslocamentos  $\mathbf{u}$  (variável primária) no interior de cada elemento, baseados nos valores nodais de deslocamento  $\mathbf{q}^e$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^e &= \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e \\ \mathbf{w}^e &= \mathbf{N}^e \delta \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (2.21)$$

em que o expoente  $e$  indica que se está no nível do elemento,  $\mathbf{N}^e$  é a matriz que contém as funções de interpolação do elemento, e

$$q^e = \begin{pmatrix} u_{1_x} \\ u_{1_y} \\ u_{2_x} \\ u_{2_y} \\ u_{3_x} \\ u_{3_y} \\ u_{4_x} \\ u_{4_y} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Inserindo-se a Equação 2.21 na Equação 2.14, obtém-se:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{L}(\mathbf{N}^e) \delta \mathbf{q}^e)^T : \mathbf{E}^e : \mathbf{L}(\mathbf{N}^e) \mathbf{q}^e d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma^e} \mathbf{t} \cdot \mathbf{N}^e \delta \mathbf{q}^e d\Gamma^e - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \mathbf{b} \cdot \mathbf{N}^e \delta \mathbf{q}^e d\Omega^e \quad (2.23)$$

em que os deslocamentos nodais  $\mathbf{q}^e$  não dependem da posição e não são influenciados pelo operador  $\mathbf{L}(\cdot)$ .

Isolando-se  $\delta \mathbf{q}^e$ , chega-se a:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{q}^e \left[ \int_{\Omega^e} (\mathbf{L}(\mathbf{N}^e))^T : \mathbf{E} : \mathbf{L}(\mathbf{N}^e) d\Omega^e \mathbf{q}^e - \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{b} d\Omega^e \right] = 0 \quad \forall \quad \delta \mathbf{q}^e \quad (2.24)$$

Como  $\delta \mathbf{q}^e$  é arbitrário, o equilíbrio se dá quando o termo entre colchetes da Equação 2.24 se anula. Reescrevendo-se a equação na forma matricial, passando-se os termos derivados da expressão do trabalho externo para o lado direito da equação, obtém-se:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{E}^e \mathbf{B}^e d\Omega^e \mathbf{q}^e = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t} d\Gamma^e - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{b} d\Omega^e \quad (2.25)$$

em que a matriz  $\mathbf{B}^e = \mathbf{L}(\mathbf{N}^e)$ , de derivadas das funções de interpolação, é introduzida para simplificar a notação. Analisando-se os termos da Equação 2.25, verifica-se que o lado

esquerdo da igualdade é um produto de matriz por vetor, e o lado direito é um vetor, de forma que:

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (2.26)$$

As únicas incógnitas são os deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ , que podem ser obtidos pela solução do sistema de Equações 2.26, o qual é conhecido como a equação que relaciona a rigidez com as forças externas.

Para um sólido discretizado em  $n_e$  elementos finitos, a matriz de rigidez e o vetor de forças do sólido são a união das matrizes e dos vetores locais de cada elemento, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{A} \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{K}_i^e \\ \mathbf{f} &= \mathbf{A} \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{f}_i^e \end{aligned} \quad (2.27)$$

em que  $\mathbf{A}$  é um operador de superposição (“*assembly*”),  $\mathbf{K}_i^e$  é a matriz de rigidez de cada um dos elementos  $i$ , e  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global equivalente ao superposição das matrizes de rigidez de cada um dos elementos.

O vetor força global  $\mathbf{f}$  é montado de forma análoga. Além disso, os graus de liberdade específicos correspondentes às forças também podem ser adicionados. As matrizes de rigidez dos elementos  $\mathbf{K}_i^e$  não possuem a mesma ordem da matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$ . Entretanto, considerando-se a estrutura interna das matrizes de rigidez  $\mathbf{K}_i^e$ , os elementos diferentes de zero são encontrados somente nas linhas e colunas que correspondem aos graus de liberdade dos elementos.

Por essa razão, só é preciso armazenar a matriz de rigidez do elemento compactada, a qual possui a mesma ordem do número dos graus de liberdade do elemento, juntamente com a matriz que relaciona cada grau de liberdade do elemento ao correspondente grau de liberdade na montagem da matriz global. Essa matriz é uma matriz de indexação, na qual o valor de  $i$  fornece o número dos graus de liberdade correspondente ao elemento  $i$  [Bathe, 1996].

Considerando-se que se trata de elementos derivados do funcional mostrado na Equação 2.14, as funções de interpolação, a ordem e o número de nós mudam de acordo com o tipo de elemento. Os elementos mais simples, tais como o elemento triangular de

deformações constantes ou *Constant Strain Triangle* (CST) para elasticidade plana e o elemento tetraédrico linear para elasticidade tridimensional, obtidos a partir da interpolação do campo de deslocamentos, permitem a obtenção de valores constantes de deformação e de tensão em cada elemento, apresentando, portanto, reduzido custo computacional, que viabiliza, por sua vez, a utilização de malhas com um maior número de elementos sem prejuízo da rapidez da simulação.

O elemento bilinear isoparamétrico de 4 nós para elasticidade plana tem formulação e implementação relativamente simples, sendo obtido a partir de interpolação linear em cada direção, ou seja, bilinear em elasticidade bidimensional. Muito embora apresente um desempenho superior aos elementos CST, com apenas um pequeno aumento no tempo de processamento, muitas vezes não consegue descrever o comportamento da estrutura com precisão, a menos que se utilize uma malha bastante refinada, isto é, com muitos elementos.

Por outro lado, o elemento bilinear isoparamétrico de 4 nós não representa corretamente a flexão, devido ao cisalhamento parasita, que faz com que a estrutura, submetida a um carregamento de flexão, responda em cisalhamento de modo mais rígido do que o real [Bathe, 1996; Hughes, 1987]. Esse efeito pode induzir direções preferenciais de rigidez durante o processo de otimização topológica, uma vez que qualquer deficiência na formulação do elemento tende a ser amplificada pela própria natureza iterativa do processo, que requer um número considerável de reanálises por elementos finitos.

Como a rigidez artificial na formulação do elemento influi no resultado final da otimização topológica, com poucos elementos na espessura, utilizam-se elementos com campo de deformação enriquecido, tais como o elemento não conforme de Taylor. Esse elemento admite mais modos de deformação, o que leva a uma descrição mais fiel do comportamento da estrutura, evitando, assim, o aparecimento do cisalhamento parasita, ao acrescentar novos graus de liberdade ao campo original de deslocamento do elemento. Com isso, o elemento torna-se mais flexível, incorporando o modo de deformação de flexão.

### **2.2.1 Elemento Bilinear Isoparamétrico Não Conforme de Taylor**

O elemento bilinear isoparamétrico não conforme de Taylor possui campos de deformação enriquecidos, razão pela qual ele possui um comportamento semelhante aos elementos de alta ordem, com a vantagem de não apresentar o aumento do número de nós.

Neste trabalho, foi utilizado o elemento isoparamétrico com campos de deformação enriquecidos proposto por Taylor [Taylor *et al.*, 1976 *apud* Hughes,1987] e derivado do trabalho de Wilson [Wilson *et al.*, 1973<sup>2</sup> *apud* Hughes,1987].

A melhora do comportamento do elemento bilinear isoparamétrico dá-se por meio da adição de funções de interpolação extras (funções bolha) às funções já existentes, conforme a equação a seguir:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\
 N_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\
 N_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\
 N_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \\
 N_5(\xi_1, \xi_2) &= 1 - \xi_1^2 \\
 N_6(\xi_1, \xi_2) &= 1 - \xi_2^2
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Com isso, o campo de deslocamentos passa a ser interpolado na forma de:

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) = \underbrace{\sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_{e_a}}_{\text{Elemento bilinear}} + \underbrace{\sum_{i=5}^6 \mathbf{N}_i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_{e_b}}_{\text{Funções bolha}} \tag{2.29}$$

em que  $\mathbf{u}_{e_a}$  são os graus de liberdade do elemento isoparamétrico bilinear de 4 nós, e  $\mathbf{u}_{e_b}$  são os novos graus de liberdade. Essas novas componentes de deslocamento (4 componentes extras) acrescentam novos termos à matriz de derivadas das funções de interpolação  $\mathbf{B}$ , a qual tem a sua dimensão aumentada, passando de 3x8 para 3x12:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4 \ | \ \mathbf{B}_5 \ \mathbf{B}_6] \tag{2.30}$$

---

<sup>2</sup> Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty, W. P. e Ghaboussi, J., Incompatible Displacement Models, **Numerical and Computer Models in Structural Mechanics**, Academic Press, 1973.

Consequentemente, com o procedimento usual de obtenção da matriz de rigidez local, obtém-se uma matriz de dimensão 12x12 na forma de:

$$\mathbf{K}_{12 \times 12}^e = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{K}_A}_{8 \times 8} & \underbrace{\mathbf{K}_B}_{8 \times 4} \\ \underbrace{\mathbf{K}_B^T}_{4 \times 8} & \underbrace{\mathbf{K}_C}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Como alguns termos dessa matriz estão relacionados aos deslocamentos  $\mathbf{u}_{e_b}$ , é necessário condensar a matriz  $\mathbf{K}_{12 \times 12}^e$ , de modo a eliminarem-se esses deslocamentos da formulação do problema. Isso pode ser feito com o uso das relações de equilíbrio da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_A \mathbf{u}_{e_a} + \mathbf{K}_B \mathbf{u}_{e_b} = \mathbf{f}^e \quad (2.32)$$

$$\mathbf{K}_B^T \mathbf{u}_{e_a} + \mathbf{K}_C \mathbf{u}_{e_b} = 0 \quad (2.33)$$

Pelo fato de as componentes de  $\mathbf{u}_{e_b}$  não possuírem forças associadas [Hughes,1987], obtém-se, a partir da Equação de 2.33:

$$\mathbf{u}_{e_b} = -\mathbf{K}_C^{-1} \mathbf{K}_B^T \mathbf{u}_{e_a} \quad (2.34)$$

Inserindo-se a Equação 2.34 na Equação 2.32, chega-se à expressão da matriz de rigidez do elemento de Taylor, que, dessa forma, passa a ter, novamente, a dimensão 8x8 (oito graus de liberdade):

$$\mathbf{K}_{8 \times 8}^e = \mathbf{K}_A - \mathbf{K}_B \mathbf{K}_C^{-1} \mathbf{K}_B^T \quad (2.35)$$

Esse processo é conhecido como condensação estática, após o qual o processo de montagem da matriz de rigidez global é feita pelo procedimento usual de elementos finitos [Hughes, 1987].

Após a solução dos deslocamentos nodais, o campo de deslocamento enriquecido é calculado em cada elemento como:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_{e_a} \mid \mathbf{u}_{e_b}] \quad (2.36)$$

Logo, as deformações podem ser calculadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.37)$$

e as tensões por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.38)$$

Os pontos ótimos para o cálculo das tensões segue a regra de Barlow, que ao contrário do quadrilátero bilinear, as tensões e as deformações não são calculadas no centro do elemento, e, sim, nos quatro pontos de integração de Gauss [Hughes, 1987].

O elemento proposto por Wilson [Wilson *et al.*, 1973 *apud* Hughes, 1987] apresenta resultados muito superiores aos do elemento bilinear isoparamétrico de 4 nós. No entanto, apresenta problemas relativos à não continuidade do campo de deslocamentos entre os elementos, quando utilizados elementos com geometrias diferentes de retângulos ou paralelogramos. Para superar esses problemas, Taylor *et al.* [Taylor *et al.*, 1976 *apud* Hughes, 1987], propôs modificações no cálculo da matriz das derivadas das funções de interpolação, de modo que os termos referentes aos novos graus de liberdade tivessem o seu jacobiano calculado no ponto central do elemento ( $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ), tornando os resultados válidos para qualquer geometria.

As funções de interpolação quadráticas, mostradas na Equação 2.28, permitem que o elemento represente modos de flexão e, com isso, possam ser utilizados com sucesso no processo de otimização topológica, por conseguirem representar, satisfatoriamente, o campo de deslocamentos em reforços finos. O custo computacional desses elementos é mais elevado do que o custo dos elementos isoparamétricos tradicionais, principalmente por causa do processo de condensação estática (Equação 2.35), que necessita de uma inversão de matriz e de produtos matriciais. Mas, mesmo assim, esses elementos são utilizados devido à sua simplicidade e à sua capacidade de representar adequadamente o campo de deslocamentos em reforços finos [Cardoso, 2000].

## 2.2.2 Suavização Global das Tensões

Em muitos problemas de otimização topológica que envolvem o método dos elementos finitos, em especial, os que utilizam elementos de baixa ordem, como é o caso do elemento bilinear isoparamétrico não conforme de Taylor, as derivadas das funções de interesse, nesse caso a tensão, apresentam descontinuidade entre os elementos. Essa descontinuidade pode levar a erros de interpretação, principalmente em projetos de otimização, devido às várias reanálises utilizadas [Hinton e Campbell, 1974].

Por essa razão, é crucial que alguns procedimentos consistentes para a interpretação dessas descontinuidades sejam adotados. Hinton e Campbell [Hinton e Campbell, 1974] propuseram o método de suavização por mínimos quadrados, denominado Método de Suavização Global, que é aplicado ao longo de todo o domínio dos elementos finitos, tendo sido empregado no presente trabalho.

Pelo método do deslocamento, devido à natureza da variação, as tensões apresentam descontinuidades entre os elementos, o que é mostrado na Figura 2.3:

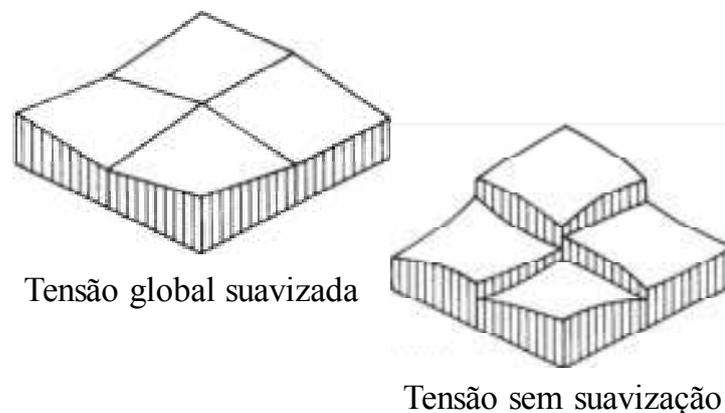


Figura 2.3 - Tensão suavizada e não suavizada.

Fonte: Adaptada de Hinton e Campbell, 1974.

Na análise envolvendo elementos com integração numérica, como no elemento de Taylor, a experiência tem mostrado que os melhores pontos de amostragem da tensão são os pontos de integração gaussiana, em uma ordem inferior à necessária para a integração da matriz de rigidez. No elemento isoparamétrico bilinear isso significa apenas no ponto central do elemento. Os nós do elemento, os quais são os locais de saída mais útil para as tensões, parecem ser os pontos em que se tem a pior amostragem. As razões para esse fenômeno não

são aparentes. No entanto, é sabido que as funções de interpolação tendem a se comportar mal perto das extremidades da região de interpolação. Assim, é razoável esperar que as derivadas da função de interpolação e, portanto, as tensões, encontradas no interior do elemento, sejam mais precisas do que as encontradas na periferia do mesmo [Hinton e Campbell, 1974].

Para contornar esses problemas, muitos analistas têm tomado a média das tensões nodais, que consistem na média de todas as tensões nodais dos elementos que se encontram em um nó comum. Essa solução simples funciona bem, mas não para todos os casos, pois não considera o tamanho dos elementos adjacentes, o que torna a suavização das tensões por elementos finitos bastante útil [Hinton e Campbell, 1974].

Se as incógnitas de um problema de mínimos quadrados são as tensões nodais suavizadas, a função de suavização pode ser representada em qualquer ponto dentro do elemento pela expressão:

$$g(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i \tilde{\sigma}_i \quad (2.39)$$

em que  $\tilde{N}_i$  é a função de interpolação de suavização do nó  $i$ , com coordenadas  $(\xi_1, \xi_2)$ , conforme pode ser visto na Figura 2.4.  $\tilde{\sigma}_i$  é a tensão nodal suavizada do nó  $i$ , e  $n$  é o número de nós por elemento na análise de suavização.

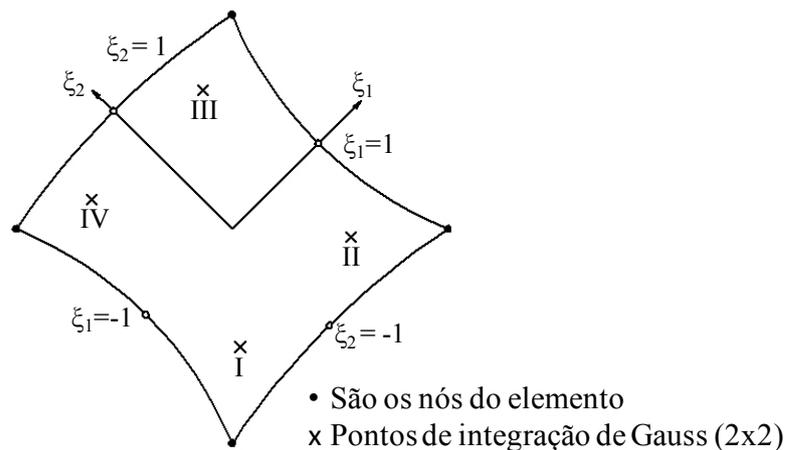


Figura 2.4 - Elemento isoparamétrico bidimensional parabólico.

Fonte: Adaptada de Hinton e Campbell, 1974.

Nota-se que a função de interpolação de suavização  $\tilde{N}_i$  não precisa, obrigatoriamente, ser de ordem igual à da função de interpolação  $N_i$ , utilizada nas análises iniciais de elementos infinitos, de forma que as funções de interpolação parabólicas sejam utilizadas na análise inicial e, em seguida, seja utilizada uma função de interpolação linear na análise de suavização [Hinton e Campbell, 1974].

O erro entre a tensão suavizada e a não suavizada, em qualquer ponto dentro do elemento, é dada por:

$$e(\xi_1, \xi_2) = \sigma(\xi_1, \xi_2) - g(\xi_1, \xi_2) \quad (2.40)$$

em que a tensão não suavizada  $\sigma(\xi_1, \xi_2)$ , em qualquer ponto dentro do elemento, é obtida pela relação usual tensão-deslocamento:

$$\sigma(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (2.41)$$

em que  $\mathbf{E}$  é o tensor constitutivo de quarta ordem (matriz constitutiva),  $\mathbf{B}$  é a matriz de deformação/deslocamento, e  $\mathbf{u}^e$  são os deslocamentos nodais do elemento.

Logo, o próximo passo é encontrar o conjunto de tensões nodais suavizadas  $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_{n_{mos}}$ , as quais minimizam o funcional:

$$\chi = \sum_{j=1}^{n_e} \iint e(\xi_1, \xi_2)^2 dx dy \quad (2.42)$$

em que  $n_e$  é o número total de elementos.

Para  $\chi$  ser um mínimo, é necessário que:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\sigma}_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n_{mos} \quad (2.43)$$

em que  $n_{mos}$  é o número total de nós do elemento.

Portanto, a matriz de suavização do elemento, é dada por:

$$\mathbf{S}^e = \begin{bmatrix} \iint \tilde{N}_1 \tilde{N}_1 \det(\mathbf{J}) d\xi_1 d\xi_2 & \cdots & \iint \tilde{N}_1 \tilde{N}_n \det(\mathbf{J}) d\xi_1 d\xi_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \iint \tilde{N}_n \tilde{N}_1 \det(\mathbf{J}) d\xi_1 d\xi_2 & \cdots & \iint \tilde{N}_n \tilde{N}_n \det(\mathbf{J}) d\xi_1 d\xi_2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

em que o  $\det(\mathbf{J})$  é o determinante da matriz Jacobiana ( $\mathbf{N.B.} dx dy = \det(\mathbf{J}) d\xi_1 d\xi_2$ ).

Percebe-se que a Matriz de suavização  $\mathbf{S}^e$  tem a mesma forma da Matriz Massa, utilizada em problemas dinâmicos [Hinton e Campbell, 1974]. O vetor força, associado ao lado direito da equação do método dos elementos finitos, tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} \iint \tilde{N}_1 \sigma \det(\mathbf{J}) d\xi_1 d\xi_2 \\ \vdots \\ \iint \tilde{N}_n \sigma \det(\mathbf{J}) d\xi_1 d\xi_2 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Tanto a matriz suavização quanto o vetor força do elemento podem ser montados dentro da matriz suavização e do vetor força total para todo o domínio de elementos finitos e resolvidos da forma usual para  $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_{n_{mos}}$ . Deve-se notar que, se as funções de interpolação de suavização sugerem a continuidade de  $C^{(0)}$  através das interfaces do elemento, a tensão suavizada também possui essa continuidade de  $C^{(0)}$  [Hinton e Campbell, 1974].

### 2.3 Otimização Estrutural

A otimização estrutural surgiu da necessidade de concepção de novas estruturas com melhor desempenho e menor consumo de matéria-prima, ou seja, peso reduzido, menores custos de fabricação e, por consequência, melhor resultado financeiro, sem prejuízo à sua qualidade e integridade estrutural. A otimização estrutural é um tema que vem sendo estudado há mais de um século, sendo derivado da união de áreas multidisciplinares, tais como engenharia e matemática.

Normalmente, o desempenho dessas estruturas, que são sistemas mecânicos com a finalidade de transmitir esforços estáticos ou dinâmicos, são avaliados por medidas econômicas, tais como custo e lucro. Na linguagem da engenharia, o custo e o lucro, são traduzidos em grandezas mecânicas como, por exemplo, mínimo volume e máxima tensão. A otimização estrutural, portanto, envolve estudos que buscam melhorar o desempenho de componentes ou sistemas mecânicos de maneira sistemática até o resultado ótimo, maximizando ou minimizando a função objetivo [Guilherme, 2006].

### **2.3.1 Definições**

Um problema de otimização estrutural envolve a identificação das variáveis do projeto, dos seus limites e das condições de contorno, assim como das restrições impostas à estrutura para um determinado tipo de carregamento. Os conceitos apresentados nesta seção estão baseados, principalmente, nos livros textos de Haftka e Gürdal [Haftka e Gürdal, 1992] e Arora [Arora, 2004].

#### **2.3.1.1 Variáveis de Projeto**

As variáveis de projeto são os parâmetros que podem ser definidos e alterados para otimizar o sistema, como a área da seção transversal, o módulo de inércia e o módulo de elasticidade. A escolha das mesmas é essencial para o sucesso do processo de otimização estrutural, na medida em que elas devem representar, da melhor forma possível, o modelo a ser estudado.

A escolha de um grande número de variáveis de projeto aumenta a dimensão do problema de otimização e, com isso, as dificuldades numéricas. Desse modo que é aconselhável se definir um lote pequeno de variáveis, que é ampliado na medida em que aumenta a complexidade da formulação. Além disso, é importante que as variáveis escolhidas sejam independentes umas das outras para evitar complicações extras ao problema. O processo numérico é influenciado pelo tipo e número das variáveis utilizadas, tendo reflexos na taxa de convergência.

As variáveis de projeto são expressas pelo vetor:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.46)$$

As variáveis de projeto podem ser contínuas, quando assumem qualquer valor dentro de um conjunto, sendo expressas na forma  $\{x \in X \mid k_{\text{inf}} \leq x \leq k_{\text{sup}}\}$ , ou variáveis discretas, que são limitadas a valores isolados dentro de um conjunto e expressas na forma  $\{x \in X \mid x = (k_1, k_2, \dots, k_n)\}$ .

Os problemas de otimização que envolvem variáveis discretas têm natureza combinatória, o que eleva muito o custo computacional, de modo que é preferível se utilizar uma aproximação contínua na solução dos mesmos. Entretanto, quando há valores muito espaçados das variáveis discretas, essa aproximação nem sempre é confiável. Isso porque se pode afastar muito da solução ótima, desrespeitando-se alguma restrição imposta no início do problema, caso em que se deve utilizar algoritmos específicos para esse tipo de variáveis.

### 2.3.1.2 Função Objetivo (ou Função Custo)

A função objetivo ou função custo é um critério numérico (geralmente um funcional), cujo valor é determinado a partir de um conjunto de variáveis de projeto, ou seja, ela é uma função das variáveis de projeto. A seleção de uma função objetivo é de extrema importância no processo de otimização, pois deve quantificar o que se quer otimizar. Ela está, muitas vezes, relacionada a questões financeiras e é utilizada para medir a eficiência do projeto.

A função objetivo pode ser classificada em simples ou multiobjetivo (ou multicritério). A função objetivo simples busca otimizar apenas um objetivo, sendo denotada por  $f(x)$ . Já a função multiobjetivo pretende otimizar vários objetivos de uma só vez e sua expressão matemática combina todos os objetivos do problema na forma  $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$ .

Como é bastante complexo trabalhar com as funções multiobjetivo, geralmente se escolhe a mais importante para ser a função objetivo única, transformando-se as demais em

restrições do projeto. O sucesso do problema de otimização depende diretamente da formulação da função objetivo, sendo importante encontrar uma expressão matemática (deslocamento, frequência de ressonância, rigidez) que quantifique corretamente a eficiência do projeto.

### 2.3.1.3 Restrições do Projeto

Essencialmente, as restrições são as limitações impostas para se obter a solução otimizada. Elas podem ser aplicadas a qualquer grandeza envolvida no problema, sendo importante considerar que quanto maior o número de restrições do problema, maior o seu custo computacional.

As restrições dividem o espaço de solução em dois domínios distintos: o domínio admissível, em que as restrições são satisfeitas, e o domínio inadmissível, em que, ao menos, uma das restrições é violada. Em muitos problemas, o ponto extremo encontra-se na fronteira que separa esses dois domínios.

As restrições são classificadas, de uma forma geral, em três tipos: laterais, de igualdade e de desigualdade. As laterais podem ser bastante simples, como os limites superiores e inferiores para os valores admissíveis. As restrições de igualdade, que estão sempre presentes em problemas de otimização estrutural, são as equações de equilíbrio. As demais restrições aparecem, geralmente, na forma de desigualdades (a tensão em cada ponto da estrutura, por exemplo, deve ser inferior a um limite admissível).

Considerando-se um conjunto de variáveis de projeto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , uma restrição lateral é do tipo  $x_{\min_i} \leq x_i \leq x_{\max_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; uma restrição de igualdade é do tipo  $h_k(x) = 0$ ,  $k = 1, \dots, n_e$ ; e uma restrição de desigualdade é uma equação do tipo  $g_j(x) \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n_g$ . As restrições de igualdade são, via de regra, de difícil implementação em alguns algoritmos não lineares de otimização, podendo ser transformadas em  $h_k(x) \leq 0$  e  $h_k(x) \geq 0$ .

A presença de restrições com ordens de grandeza muito distantes entre si pode gerar problemas de condicionamento numérico do algoritmo, prejudicando o resultado final da otimização. Para superar esse problema, é necessária a normalização das restrições, como

ocorre, por exemplo, quando o valor de uma restrição de tensão mecânica é da ordem de MPa, e o valor de uma restrição de deslocamento é da ordem de milésimos de milímetro. A normalização das restrições é mostrada abaixo:

$$g_j(x) \leq g_{máx_j} \Rightarrow \frac{g_j(x)}{g_{máx_j}} \leq 1 \Rightarrow \bar{g}_j(x) - 1 \leq 0. \quad (2.47)$$

### 2.3.2 Formulação Geral de um Problema de Otimização

O problema de otimização estrutural apresenta a seguinte formulação geral [Haftka e Gürdal, 1992; Arora, 2004]:

$$\begin{aligned} & \text{mínimo } f(x) \\ & \text{sujeito a } g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n_g \\ & \quad \quad \quad h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, k_e \end{aligned} \quad (2.48)$$

em que  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de projeto,  $g_j$  e  $h_k$  são, respectivamente, as restrições de desigualdade e igualdade, e  $f$  é o funcional a ser minimizado.

Observa-se que, sem nenhuma perda de generalidade, a formulação serviria para maximizar o funcional  $f(x)$ , bastando, para isso, inverter-se o sinal do funcional da seguinte maneira:  $f(x) = -f(x)$ .

A solução admissível para o problema de otimização significa que as variáveis de projeto satisfazem as restrições de igualdade e de desigualdade, conforme mostrado na Figura 2.5:

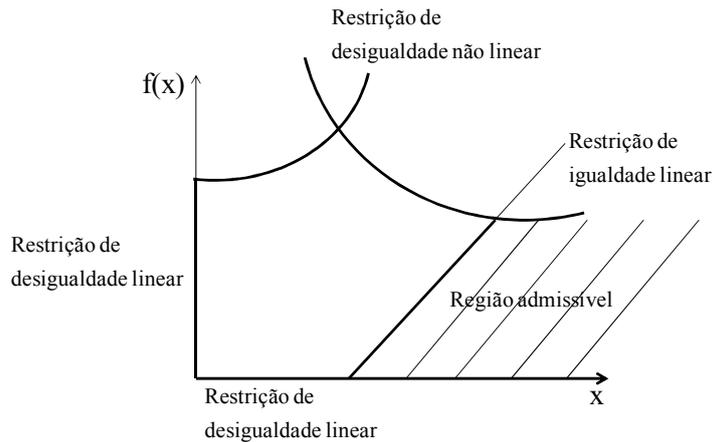


Figura 2.5 - Região admissível para um problema de otimização envolvendo duas variáveis independentes.

Fonte: Adaptada de Guilherme [Guilherme, 2006].

O espaço admissível consiste em uma linha em restrição de igualdade e em duas restrições de desigualdade nas extremidades. A solução ótima do problema deve satisfazer as restrições e, também, conduzir a um ótimo valor da função objetivo.

A função objetivo, descrita por  $f: X \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , pode apresentar mínimos locais e mínimos globais. A função  $f(x)$  de “ $n$ ” variáveis tem um mínimo local para  $x^*$ , se a desigualdade  $f(x^*) \leq f(x)$  no domínio admissível possuir um  $x$  menor na vizinhança  $N$  de  $x^*$ . Matematicamente, pode-se definir a vizinhança  $N$  no ponto  $x^*$  como:

$$N = \{x \mid x \in S \text{ com } \|x - x^*\| < \delta\} \quad (2.49)$$

em que  $\delta > 0$ , e  $S$  representa todas as regiões viáveis no projeto.

A função objetivo  $f(x)$  apresenta um mínimo global no ponto  $x^*$  se  $f(x^*) \leq f(x)$ , considerando-se  $x$  no espaço admissível. Se, para qualquer  $x$ , o comportamento dessa equação for de desigualdade, então  $x^*$  é conhecido como mínimo global absoluto [Arora, 2004].

Isso significa que, para o mínimo local, deve ser testada a desigualdade  $f(x^*) \leq f(x)$  apenas para pequenas regiões do domínio ao redor de  $x^*$ , ao passo que, para o mínimo global, a desigualdade deve ser testada para o domínio inteiro. Logo, a função objetivo pode ter múltiplos mínimos locais em pequenas regiões do domínio admissível,

assim como vários mínimos globais, desde que os valores da função sejam idênticos em todos os pontos, conforme é mostrado na Figura 2.6:

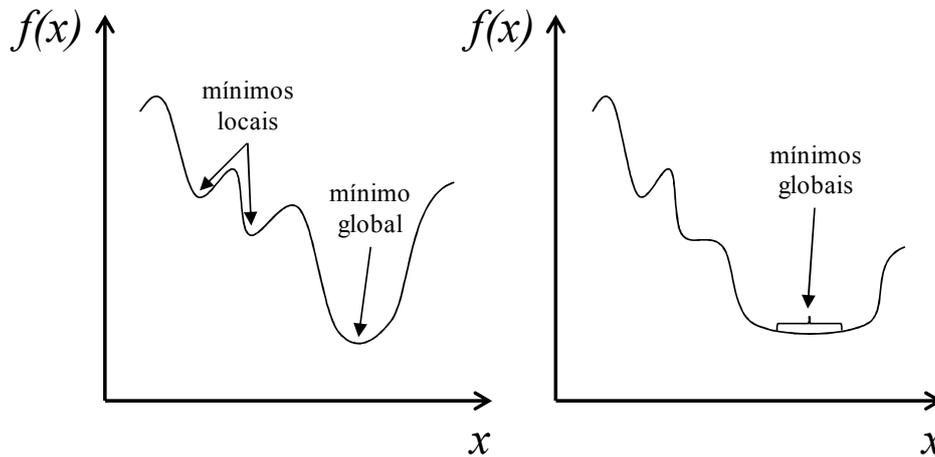


Figura 2.6 - Casos possíveis de função.

Fonte: De Leon [De Leon, 2011]

Na maioria dos problemas de otimização estrutural, é difícil identificar o mínimo global, porque, normalmente, a função não é linear, e os algoritmos utilizados, sem envolver altos custos computacionais, tendem a identificar, na maior parte dos casos, os mínimos locais. Por essa razão, o funcionamento do algoritmo desenvolvido para o problema de otimização estrutural pode envolver uma série de complicações quando a função objetivo ou alguma de suas restrições é uma função não linear, ou seja, não são continuamente diferenciáveis, apresentando interações complexas entre as variáveis do projeto, do que podem resultar valores múltiplos para a solução ótima da função objetivo, isto é, mínimos locais ao invés de um mínimo global.

Um bom algoritmo de otimização deve possuir, segundo Arora [Arora, 2004], robustez, generalidade, precisão, facilidade de uso e eficiência. Além disso, deve ser capaz de convergir para o ponto ótimo com precisão e alta taxa de convergência, independentemente da estimativa inicial, e ser capaz de tratar tanto as restrições de igualdade quanto as de desigualdade, para que seja alcançado um bom resultado final no processo de otimização.

### 2.3.3 Programação Matemática

A programação matemática é uma classe especial de método numérico iterativo e constitui uma ferramenta para a solução dos problemas de otimização. A partir de uma estimativa inicial usada como ponto de partida, uma busca sistemática iterativa é feita no domínio de projeto até que um projeto próximo do ótimo seja alcançado. O projeto intermediário (subótimo) deve necessariamente satisfazer as condições de equilíbrio e as restrições definidas pelo problema de otimização. A busca termina quando um determinado critério é satisfeito, indicando que o atual projeto está suficientemente perto do ótimo [Sant'Anna, 2002].

A programação matemática recebe diferentes denominações de acordo com os tipos de funções que constituem as restrições e a função objetivo do problema de otimização, destacando-se a Programação Linear (PL) e a Programação Linear Sequencial (PLS).

#### 2.3.3.1 Programação Linear (PL)

A PL descreve uma categoria de problemas de otimização, nos quais a função objetivo e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto. Isso significa que as derivadas da função objetivo em relação às variáveis de projeto (sensibilidade) são constantes, mas não necessariamente nulas, ou seja, o ponto extremo está localizado na fronteira, e não no interior, do domínio admissível. Além disso, como as restrições são lineares, ele se encontra na intersecção de duas ou mais restrições, a menos que a restrição seja paralela ao contorno definido pela função objetivo [Haftka e Gürdal, 1992].

A forma geral da minimização de um problema de otimização, aplicando-se a programação linear, é a seguinte:

$$\begin{array}{ll}
 \textit{encontrar} & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \textit{minimizando} & f(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \textit{sujeito a} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
 & x \geq 0
 \end{array} \tag{2.50}$$

em que  $n$  é o número de variáveis de projeto,  $\mathbf{c}$  é o vetor dos coeficientes de dimensão  $n \times 1$ ,  $\mathbf{A}$  é uma matriz de dimensão  $m \times n$ , com  $m$  restrições, e  $\mathbf{b}$  é um vetor de dimensão  $m \times 1$ .

### 2.3.3.2 Programação Linear Sequencial (PLS)

A PLS, método de solução escolhido neste trabalho, é uma variação da programação linear, utilizada para os problemas de otimização em que a função objetivo e/ou as restrições de projeto envolvem funções não lineares, que são linearizadas por expansão das séries de Taylor [Haftka e Gürdal, 1992].

A PLS, portanto, utiliza a programação linear na busca do ótimo de forma iterativa. Determinando-se um ponto inicial, a função objetivo e suas restrições são linearizadas em torno desse ponto, de modo que o problema pode ser resolvido com a programação linear propriamente dita. A solução apresentada pela programação linear pode ser usada como um novo ponto em torno do qual a função objetivo e as suas restrições são novamente linearizadas, num processo que continua até ser atingido o critério de convergência.

Tomando-se a formulação geral do problema de otimização, mostrada na Equação 2.48, e a partir de uma estimativa inicial da variável de projeto ( $x^*$ ), a função objetivo e as restrições são linearizadas em torno desse ponto através da expansão das séries de Taylor, obtendo-se a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{n_e} (x_i - x^*) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x^*} = 0 \\
 \text{sujeito a} \quad & g(x) = g(x^*) + \sum_{i=1}^{n_e} (x_i - x^*) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x^*} \leq 0 \\
 & h(x) = h(x^*) + \sum_{i=1}^{n_e} (x_i - x^*) \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x^*} = 0 \\
 & a_i^{\text{inf}} \leq (x_i - x^*) \leq a_i^{\text{sup}}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

em que  $n_e$  é o número de variáveis de projeto, sendo que a última restrição é adicionada ao problema para garantir que a variação das variáveis de projeto não seja demasiadamente

grande, violando a aproximação linear realizada. Essas restrições são conhecidas como limites móveis e são de grande importância para a convergência e estabilidade do processo.

Com a primeira aproximação linear apresentada na Equação 2.50, obtém-se um novo valor ( $x_i, i=1, \dots, ne$ ) para as variáveis de projeto. A cada aproximação, são obtidos novos valores que, por sua vez, são introduzidos no problema de forma iterativa, verificando-se sempre se nenhuma restrição é violada até que o ponto extremo seja alcançado. Ocorrendo uma mudança de sinal na variação de alguma das variáveis de projeto, o limite móvel correspondente é reduzido, diminuindo-se, assim, o intervalo de variação dessa variável [Sant'Anna, 2002].

Embora a PLS possa apresentar alto custo computacional quando comparada a outros métodos de programação, ela é mais simples, requerendo apenas derivadas de primeira ordem, o que é bastante desejável em problemas de otimização estrutural, em que a função a ser minimizada (função objetivo) e as restrições são, muitas vezes, funções implícitas das variáveis de projeto, o que dificulta a obtenção analítica das derivadas [Cardoso, 2000].

Por outro lado, o ponto sensível da PLS é a escolha dos limites móveis, uma vez que a inadequação dos mesmos pode impedir a convergência do algoritmo. Limites móveis com valores muito elevados podem causar instabilidades e oscilações e, até mesmo, impedir que o ponto ótimo seja encontrado pelo algoritmo. Para valores muito pequenos desses limites, o processo de iteração pode se tornar demasiadamente lento, levando, inclusive, a uma parada prematura do algoritmo. Assim, é importante que os limites móveis iniciem com um valor razoavelmente grande e sejam reduzidos de forma gradual à medida que o processo converge [Cardoso, 2000].

Alguns autores [Haftka e Gürdal, 1992; Fonseca, 1997; Cardoso, 2000] utilizam métodos heurísticos para a determinação dos limites móveis, de acordo com os quais não é utilizada a informação das restrições, mas, tão somente, a da variação do valor da função objetivo. O principal fundamento desses métodos é o de que a violação das restrições nas iterações iniciais ainda permite uma grande melhora da função objetivo, pois, à medida que o processo iterativo avança, o próprio algoritmo de PLS se assegura de respeitar as restrições, desde que os limites móveis sejam reduzidos ao longo do processo.

No presente trabalho, a escolha dos limites móveis foi baseada nos trabalhos de Fonseca [Fonseca, 1997], Sant'Anna [Sant'Anna, 2002] e De Leon [De Leon, 2011]. Sinteticamente, os limites móveis foram calculados mediante a análise do histórico das três iterações anteriores do algoritmo, na forma a seguir descrita:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (x_{i-1} - x_{i-2}), \\ \Delta_2 &= (x_{i-2} - x_{i-3}),\end{aligned}\tag{2.52}$$

em que  $x_{i-1}$ ,  $x_{i-2}$  e  $x_{i-3}$  são os valores das variáveis de projeto, obtidos nas três iterações anteriores do algoritmo; e  $i$  é a iteração atual.

O produto de  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  foi denominado  $a$ , o qual determinou os limites móveis a serem aumentados ou diminuídos, como mostrado abaixo:

$$a = \Delta_1 \Delta_2,\tag{2.53}$$

$$\begin{cases} l_i = (1 + \delta)l_{i-1}, & \text{se } a \leq 0 \\ l_i = (1 - \delta)l_{i-1}, & \text{se } a > 0, \end{cases}\tag{2.54}$$

em que  $l_i$  é o tamanho dos limites, e  $\delta$  é o fator que determina a variação do limite móvel, para mais ou para menos, devendo ser escolhido dentro de uma faixa de acréscimo ou decréscimo de até 20% nos limites móveis ( $\delta = 0,2$ ). Logo, as restrições laterais puderam ser calculadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{\text{inf}} = x_i - l_i \\ a_{\text{sup}} = x_i + l_i \end{cases}\tag{2.55}$$

## 2.4 Otimização Topológica

A otimização topológica é um método computacional que permite projetar a topologia ótima de uma estrutura dentro de um domínio de projeto fixo, definido a partir de certos critérios de custo, tais como máxima rigidez e menor volume [Silva, 2003]. Isto é, a otimização topológica determina a distribuição ótima de material no domínio, definido por uma região de projeto, condições de contorno de deslocamento e de forças pré-determinadas [Cardoso, 2000], como mostra a Figura 2.7.

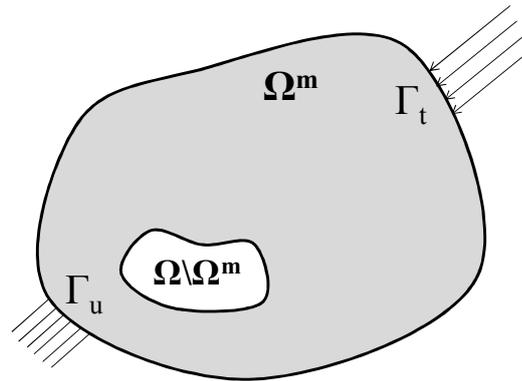


Figura 2.7 - Definição do domínio e das condições de contorno.

Fonte: Adaptada de Bendsøe e Sigmund [Bendsøe e Sigmund, 2003].

Como explica Bendsøe e Sigmund [Bendsøe e Sigmund, 2003], a distribuição ótima de material consiste em verificar quais pontos do domínio  $\Omega$  conterão material isotrópico e quais pontos serão vazios (sem material), isto é, um problema binário do tipo 0-1, podendo existir pontos com densidades intermediárias entre um e outro, de acordo com o modelo de material definido. Desse modo, a distribuição de material no domínio pode ser parametrizada como:

$$\begin{aligned}
 E_{ijkl} &\in L^\infty \\
 E_{ijkl} &= 1_{\Omega^m} E_{ijkl}^0 \quad \text{onde} \quad 1_{\Omega^m} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^m \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega^m \end{cases} \\
 \int_{\Omega^m} 1_{\Omega^m} d\Omega &= Vol(\Omega^m) \leq V
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

em que  $\Omega^m$  corresponde à porção de domínio com material,  $\Omega$  corresponde à totalidade do domínio,  $V$  é o volume total do domínio, e  $E_{ijkl}^0$  é o tensor constitutivo linear de quarta ordem correspondente ao material base isotrópico, definido no espaço  $L^\infty$ . Esse espaço  $L^\infty$  é o das funções integráveis limitadas, segundo Lebesgue, descartando-se as funções de medida zero, sendo que, nessa definição, são permitidos apenas dois estados: cheio ou vazio.

Segundo o Teorema de Weierstrass, o problema de otimização topológica somente possui solução se o domínio de solução é fechado, e a função a ser otimizada é contínua nesse domínio. Caso contrário, não há solução para o problema de otimização topológica. Para

garantir-se uma solução Bendsøe e Kikuchi [Bendsøe e Kikuchi, 1988<sup>3</sup> *apud* Silva, 2003], propuseram o Método da Homogeneização, que parametriza o tensor constitutivo do material, transformando o problema 0-1 em um problema de natureza contínua.

O Método da Homogeneização descreve as propriedades efetivas de um material composto, formado a partir de um material isotrópico ou ortotrópico de base, representado pelo tensor  $E_{ijkl}^0$ . Ele baseia-se na definição de uma microestrutura de material composto em cada ponto do domínio, a qual consiste em uma célula unitária com um furo retangular no seu interior, com dimensões definidas pelas variáveis do projeto  $a$  e  $b$  e pelo ângulo  $\theta$ , conforme mostrado na Figura 2.8 [Silva, 2003].

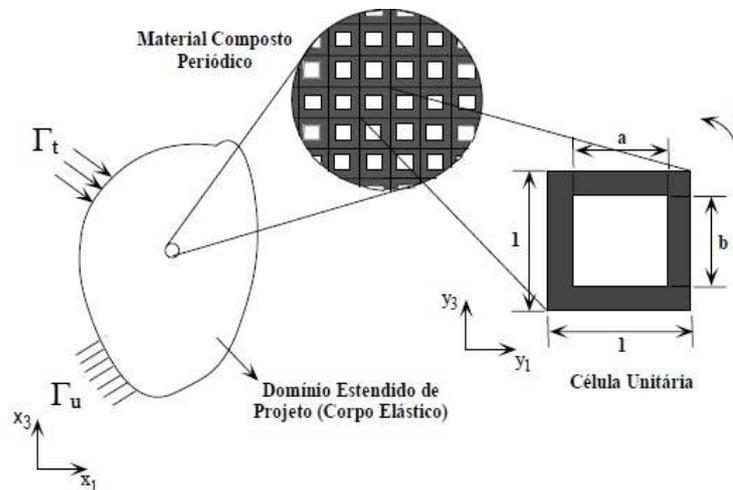


Figura 2.8 - Modelo de material baseado em homogeneização.

Fonte: Adaptada de Silva [Silva, 2003].

Em cada ponto do domínio, as propriedades são iguais às propriedades de um material composto gerado pela repetição periódica da microestrutura de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $\theta$ , correspondentes a cada ponto. Variando esses valores, altera-se a distribuição das propriedades de material ao longo do domínio, de forma que, ao final da otimização, existirão pontos vazios ( $a=b=1$ ), pontos sólidos ( $a=b=0$ ) e pontos com densidades intermediárias. Essa representação não tem sentido físico, sendo apenas um recurso matemático para a relaxação do problema, que depende da definição do modelo de material. Apesar de ser mais realista, o Método da Homogeneização é de difícil implementação e de elevado custo computacional,

<sup>3</sup> Bendsøe, M. P. e Kikuchi, N., Generating Optimal Topologies in Structural Design Using Homogenization Method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71, nº 2, pp. 197-224, 1988.

pois, dependendo da geometria da célula unitária, muitos parâmetros precisam ser otimizados [Silva, 2003].

Como alternativa, é possível utilizar-se o Método da Densidade Relativa de Material, que se baseia em microestruturas artificiais, nas quais a única variável de projeto é a densidade do material  $\rho(x)$ . O valor da propriedade  $E_{ijkl}(x)$ , em cada ponto do domínio, é definido em função da densidade do material e da propriedade básica  $E_{ijkl}^0$  :

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)E_{ijkl}^0 \quad (2.57)$$

O Método da Densidade Relativa de Material apresenta menor custo computacional e permite a mistura, em microescala, de dois ou mais materiais, dos quais um pode ser vazio, viabilizando os estágios intermediários ao se passar da condição de zero material a sólido em cada ponto do domínio. Evitando-se que essa passagem ocorra de forma brusca, garante-se a relaxação do problema de otimização e facilita-se o seu tratamento numérico. Os projetos tornam-se mais simples, principalmente se também for utilizada alguma técnica de filtragem para evitar-se a formação de grande quantidade de materiais intermediários (escalas de cinza). Entretanto, esse método é de formulação empírica, e o seu resultado final depende da discretização da malha do MEF [Silva, 2003].

#### 2.4.1 Penalização das Densidades Intermediárias

Como o objetivo do processo de otimização topológica é a obtenção de regiões com ou sem material, os valores intermediários da função artificial da densidade (escalas de cinza) devem ser penalizados, de maneira que seus valores se aproximem de 0 (sem material) ou 1 (com material). Um método simples e eficiente de realizar a penalização dos valores intermediários é o SIMP, proposto por Bendsøe [Bendsøe, 1989<sup>4</sup> *apud* Sant'Anna, 2002], que parametriza o tensor constitutivo do material por uma função contínua, como mostrado a seguir:

---

<sup>4</sup>Bendsøe, M. P., Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem, **Structural Optimization**, vol. 1, pp. 193-202, 1989.

$$\begin{aligned}
\rho(x) &\in L^\infty(\Omega) \\
E_{ijkl}(x) &= \rho^p(x) E_{ijkl}^0 \\
\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V \\
0 &\leq \rho(x) \leq 1 \\
x &\in \Omega
\end{aligned} \tag{2.58}$$

O parâmetro  $p$ , inserido na formulação, é definido empiricamente, mas a sua influência sobre o resultado final é bastante evidente: para  $p > 1$ , as densidades intermediárias são penalizadas, gerando-se resultados com pouca ou sem presença de cinzas.

O método SIMP propõe uma parametrização constitutiva artificial, baseada na ideia que, para uma determinada densidade intermediária a microestrutura é desconhecida (daí a denominação artificial), mas a sua rigidez (tensor constitutivo) não é [Pereira, 2001]. A Equação 2.58 mostra, claramente, a proporcionalidade existente entre o tensor constitutivo homogeneizado ( $E_{ijkl}$ ), obtido através da aplicação do Método da Homogeneização sobre uma célula com densidade de material  $\rho$ , e o tensor constitutivo isotrópico (poroso) do material de base ( $E_{ijkl}^0$ ).

A penalização das densidades intermediárias também pode ser feita pelo Método da Continuação, apresentado por Rozvany [Rozvany *et al.*, 1995], Swan e Kosaka [Swan e Kosaka, 1997], Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998] e Sigmund e Petersson [Sigmund e Petersson, 1998], e utilizado por Cardoso e Fonseca [Cardoso e Fonseca, 1999], Cardoso [Cardoso, 2000] e Sant'Anna [Sant'Anna, 2002]. Esse método permite obter topologias bem definidas e penaliza diretamente a função objetivo  $f(\rho)$ , através de uma relação exponencial, da seguinte forma:

$$f(\rho) = \int_{\Omega} \rho^p d\Omega \tag{2.59}$$

em que  $p \leq 1$ .

Assim, partindo-se de uma função sem penalização ( $p = 1$ ), obtém-se um domínio inicial, a partir do qual o valor do expoente vai sendo reduzido, gerando-se novas topologias que apresentam, progressivamente, um menor número de regiões com densidades

intermediárias. E, nos casos em que é necessário reduzir, ainda mais, as regiões de cinza na topologia final, essa penalização pode ser reforçada por meio de:

$$f(\rho) = \int_{\Omega} [\rho^p + \alpha\rho(1-\rho)]d\Omega \quad (2.60)$$

em que o parâmetro  $\alpha$  é escolhido de modo arbitrário. Por óbvio, se  $\alpha = 0$ , a Equação 2.60 é igual à Equação 2.59.

Na Figura 2.9, pode ser visto o comportamento da função objetivo em função da densidade para a hipótese de aplicação dessas penalizações:

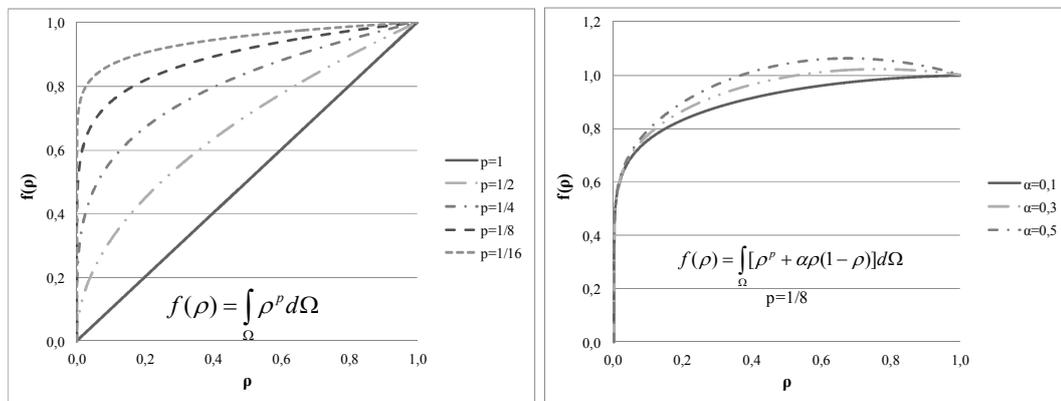


Figura 2.9 - Penalizações da função objetivo conforme Equações 2.62 e 2.63.

Fonte: Adaptada de De Leon [De Leon, 2011].

Entretanto, o Método da Continuação não garante a convergência da topologia para o ponto desejado, sendo importante referir que Stolpe e Svanberg [Stolpe e Svanberg, 2001<sup>5</sup> *apud* De Leon, 2011] citam uma série de exemplos, nos quais esse método apresentou falhas, independentemente do valor da penalização.

<sup>5</sup> Stolpe, M., Svanberg, K. On the Trajectories of Penalization Methods for Topology Optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Vol. 21, p. 128-139, 2001.

### 2.4.2 Instabilidade de Tabuleiro

A instabilidade de tabuleiro (*checkerboard*) é um fenômeno que ocorre na solução final do processo de otimização topológica de estruturas contínuas e que está associado ao surgimento de regiões em que elementos pretos (com material) se alternam com elementos brancos (sem material), formando um padrão semelhante a um tabuleiro de xadrez, como se observa na Figura 2.10:

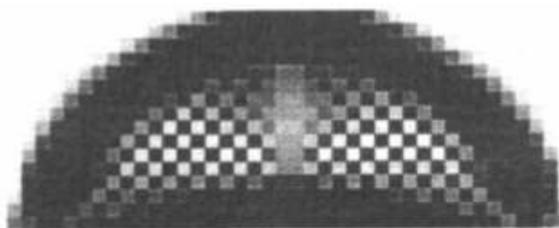


Figura 2.10 - Instabilidade de tabuleiro (malha do MEF com elemento de baixa ordem).

Fonte: [Bendsøe e Sigmund, 2003].

Esse fenômeno, cuja consequência é o aumento artificial da rigidez da estrutura, não foi previsto nos trabalhos que fundamentaram a base matemática da otimização topológica proposta por Bendsøe e Kikuchi [Bendsøe e Kikuchi, 1988]. E a razão disso está em que a instabilidade de tabuleiro não decorre da formulação do método de otimização topológica, mas do condicionamento inadequado das soluções das equações de equilíbrio, ocasionado pelo uso do MEF [Díaz e Sigmund, 1995<sup>6</sup>; Jog e Haber, 1996<sup>7</sup> *apud* Sant'Anna, 2002].

Tanto a utilização do Método da Homogeneização quanto do SIMP estão sujeitas ao aparecimento da instabilidade de tabuleiro, quando se utiliza o MEF baseado nos deslocamentos associados a elementos com funções de interpolação bilineares, tais como elementos quadriláteros de 4 nós e triangulares de 3 nós [Stump, 2006]. Díaz e Sigmund [Díaz e Sigmund, 1995] e Jog e Haber [Jog e Haber, 1996] mostraram que o uso de elementos finitos de alta ordem, como os quadriláteros de 8 e 9 nós, podem prevenir o fenômeno da

---

<sup>6</sup> Díaz, A. R. e Sigmund, O., Checkerboard Patterns in Layout Optimization, **Structural Optimization**, vol. 10, pp. 40-45, 1995.

<sup>7</sup> Jog, C. S. e Haber, R. B., Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design, **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, vol. 130, pp. 203-226, 1996.

instabilidade de tabuleiro, por enriquecerem o campo de deslocamentos, se o expoente utilizado na parametrização do tensor constitutivo não for muito elevado [Sant'Anna, 2002].

Contudo, o emprego de elementos finitos de alta ordem acarreta um aumento expressivo do custo computacional. Como alternativa, o elemento não conforme de Taylor apresenta um campo de deslocamentos enriquecido e uma interpolação polinomial de baixa ordem, não implicando um grande aumento do custo computacional. Esse elemento, associado a uma estratégia de filtragem, pode minimizar o problema da instabilidade de tabuleiro [Sant'Anna, 2002].

### 2.4.3 Dependência da Malha

A dependência da malha significa que, para o mesmo problema de otimização topológica, o mesmo domínio fixo estendido e as mesmas condições de contorno, podem ser obtidas diferentes soluções de acordo com a discretização da malha de MEF. Isso porque o refinamento da discretização do contínuo por elementos finitos não apenas melhora a definição dos contornos da estrutura, mas altera a própria topologia da estrutura ótima, aumentando o seu detalhamento e complexidade [Stump, 2006], conforme ilustrado na Figura 2.11:

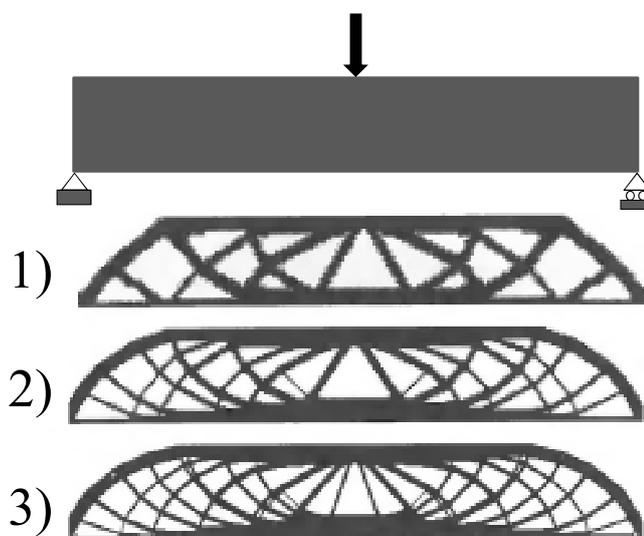


Figura 2.11 - Dependência da malha para: 1) 2700, 2) 4800 e 3) 17200 elementos.

Fonte: Adaptada de Bendsøe e Sigmund [Bendsøe e Sigmund, 2003].

Nos casos em que o aumento da discretização da malha de MEF sempre implica a obtenção de diferentes topologias, a dependência da malha é decorrência da inexistência de solução para o problema de otimização topológica. Já nos casos em que a discretização não apresenta solução única, a dependência da malha ocorre conforme as condições de contorno aplicadas. Esse é o caso do projeto de uma estrutura sob tensão uniaxial, em que as soluções de uma única barra de maior diâmetro ou de diversas barras de diâmetro menor apresentam a mesma rigidez, como pode ser visto na Figura 2.12 [Sigmund e Petersson, 1998, Bendsøe e Sigmund, 2003]:

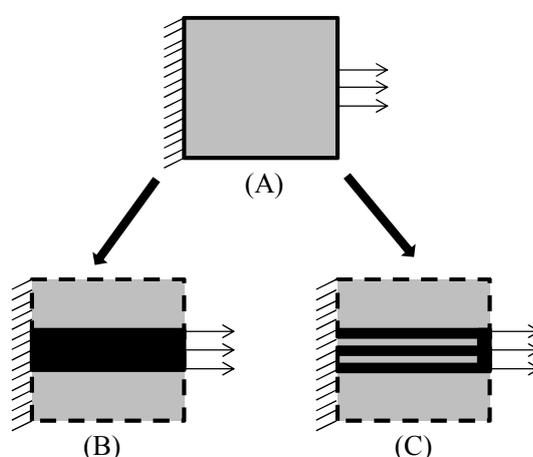


Figura 2.12 - Diferentes soluções de otimização para um mesmo problema.

Fonte: Adaptada de Sant'Anna [Sant'Anna, 2002].

Para evitar a dependência da malha, alguns artifícios podem ser introduzidos, a exemplo da restrição de perímetro, utilizada no trabalho de Haber, Bendsøe e Jog [Haber, Bendsøe e Jog, 1996], a qual, porém, não garante a unicidade de solução, uma vez que o problema passa a conter múltiplos mínimos locais. Seguindo a abordagem de restrição do espaço de solução, Peterson e Sigmund [Petersson e Sigmund, 1998<sup>8</sup> *apud* Stump, 2006] propuseram uma restrição no gradiente da densidade volumétrica. Utilizando-se o modelo material SIMP para o caso bidimensional, é possível impedir o surgimento de oscilações bruscas no campo das densidades, mas, por outro lado, aumenta-se o número de restrições locais inseridas no problema de otimização, dificultando o seu tratamento [Stump, 2006].

Outra possibilidade é inserir uma restrição global do gradiente, a qual se relaciona com a restrição do perímetro, como discutido por Bendsøe e Sigmund [Bendsøe e Sigmund,

<sup>8</sup> Petersson, J., Sigmund, O., Slope constrained Topology Optimization, **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 41, pp. 1171-1194, 1998.

2003]. Essa restrição aumenta a complexidade do problema de otimização topológica, tornando-o computacionalmente mais trabalhoso. Contudo, na prática, essa restrição é substituída pelas técnicas de filtragem, cuja escolha pode reduzir, consideravelmente, a dependência da malha, desde que o filtro leve em consideração o tamanho dos seus elementos [Guilherme, 2006].

#### 2.4.4 Filtros

Como anteriormente dito, os problemas de otimização topológica estão sujeitos à instabilidade de tabuleiro e à dependência da malha, sendo necessário associar o uso de técnicas de filtragem, cada qual com suas vantagens e desvantagens. De acordo com Sigmund [Sigmund, 2007], a categoria dos filtros mais populares para evitar a dependência da malha nos problemas de otimização topológica baseados na densidade é a dos filtros de sensibilidade [Sigmund, 1994<sup>9</sup>, 1997<sup>10</sup>; Sigmund e Petersson, 1998] e a dos filtros de densidade [Bruns e Tortorelli, 2001; Bourdin, 2001<sup>11</sup>], em virtude de sua facilidade de implementação e eficiência.

A categoria dos métodos de restrição, que inclui, entre outros, o método de controle de perímetro [Ambrosio e Buttazzo, 1993<sup>12</sup>; Haber *et al.*, 1994<sup>13</sup>], o de controle de gradiente global [Borrvall, 2001<sup>14</sup>] e o de controle de gradiente local [Niordson, 1983<sup>15</sup>; Petersson e Sigmund, 1998; Zhou *et al.*, 2001<sup>16</sup>], são, em geral, de difícil implementação.

---

<sup>9</sup> Sigmund, O., **Design of Material Structures Using Topology Optimization**, PhD thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, DK-2800, DCAMM Special Report No. S69, 1994.

<sup>10</sup> Sigmund, O., On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization, **Mechan Struct Mach** 25(4):493– 524, 1997.

<sup>11</sup> Bourdin, B., Filters in Topology Optimization, **Int J Numer Methods Eng** 50(9): 2143–2158, 2001.

<sup>12</sup> Ambrosio, L., Buttazzo, G., **An Optimal Design Problem with Perimeter Penalization**, *Calc Var* 1:55–69, 1993.

<sup>13</sup> Haber, R. B., Jog, C. S., Bendsøe, M. P., **Variable-Topology Shape Optimization with a Constraint on Perimeter**, In: Gilmore, B., et al. (eds) *Advances in design automation*, Vol. DE 69-2. ASME, New York, pp 261–272, 1994.

<sup>14</sup> Borrvall, T., Topology Optimization of Elastic Continua Using Restriction, **Arch Comput Methods Eng** 8(4):351–385, 2001.

Há, ainda, os métodos híbridos entre essas duas categorias, como o proposto por Cardoso e Fonseca [Cardoso e Fonseca, 2003], no qual as restrições do algoritmo de otimização são modificadas de acordo com a técnica de filtragem, de modo que o filtro se comporte como um filtro de controle de gradiente local [Sigmund, 2007].

No caso do filtro de densidade, utilizado neste trabalho, a densidade de cada elemento da malha é redefinida como o peso médio das densidades na vizinhança do elemento, caracterizando um filtro de vizinhança fixa. Após, as sensibilidades são calculadas e modificadas. No filtro de sensibilidade, as sensibilidades de cada elemento são inicialmente calculadas e, depois, substituídas, heurísticamente, pela média do peso da sensibilidade dos elementos da vizinhança [Sigmund, 2007].

Cardoso [Cardoso, 2000] propôs uma técnica de filtragem espacial, no qual a densidade de cada elemento da malha depende da densidade dos elementos vizinhos e de todos os elementos que estão compreendidos dentro de um raio de varredura em torno de um elemento central previamente definido. Se o centroide de um determinado elemento está dentro do círculo de raio, a sua densidade é considerada no cálculo da densidade do elemento central. Enquanto, no filtro de vizinhança, o raio de influência depende, tão somente, dos elementos conectados ao elemento central, no filtro espacial, o raio de influência é definido independentemente da conectividade da malha [Stump, 2006].

O filtro proposto por Cardoso [Cardoso, 2000] é aplicado sobre os limites móveis das densidades a cada passo do processo iterativo de otimização. Isso importa restringir a sua aplicação aos algoritmos que têm os seus limites móveis explicitamente definidos, como no caso da programação linear, não podendo ser aplicado em conjunto com o Método das Assíntotas Móveis (MAM), proposto por Svanberg [Svanberg, 1987]. A vantagem desse filtro é permitir o controle da dependência da malha sem grandes alterações na formulação do problema, e a sua desvantagem é influenciar a convergência do método de otimização [Stump, 2006].

Por sua vez, Fonseca [Fonseca, 1997] utilizou o filtro gaussiano (Gaussian Blur), aplicando-o diretamente aos limites superiores e inferiores das variáveis de projeto de cada iteração, sendo modificado pela seguinte equação:

---

<sup>15</sup> Niordson, F. I., Optimal Design of Plates with a Constraint on the Slope of the Thickness Function, **Int J Solids Struct** 19:141–151, 1983.

<sup>16</sup> Zhou, M., Shyy, Y.K., Thomas, H.L., Checkerboard and Minimum Member Size Control in Topology Optimization, **Struct Multidisc Optim** 21:152–158, 2001.

$$x_i = w_1 x_{i-1} + w_2 x_i + w_3 x_{i+1} \quad (2.61)$$

em que  $w_j$  são os pesos do filtro, e  $x_k$  são os valores limites de densidade dos elementos nas direções  $X_1$  e  $X_2$ .

As principais vantagens do filtro proposto por Fonseca [Fonseca, 1997] são: 1) reduzir o aparecimento da instabilidade de tabuleiro, mesmo usando elementos de baixa ordem, tal como o elemento bilinear isoparamétrico; 2) simplificar a topologia final, facilitando sua interpretação; e 3) reduzir o problema da não unicidade da solução ao restringir a variação das densidades. As suas desvantagens são: 1) o aparecimento de grandes áreas de material com densidades intermediárias; 2) a necessidade de malhas refinadas para garantir-se a convergência do algoritmo; e 3) o aumento do número de iterações necessárias para a convergência do algoritmo, que pode chegar até duas vezes mais do que no caso de não ser usado o filtro [Guilherme, 2006].

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O principal objetivo deste trabalho é encontrar o mínimo volume  $V$  de uma estrutura contínua bidimensional em EPT, sujeita a uma restrição de tensão admissível  $\sigma_y$ , de maneira que a mesma esteja completamente tensionada, utilizando-se o MEF para discretizar o domínio e resolver as equações de equilíbrio.

Como o objetivo deste trabalho é minimizar a massa de um domínio de projeto, o método pode ser expresso como um problema de minimização de volume com restrição da tensão escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & V = \int_{\Omega} \rho d\Omega \\ \text{sujeito a} \quad & \sigma_{eq} \leq \sigma_y \\ & 0 \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Via de regra, qualquer estrutura é projetada para suportar um determinado conjunto de cargas sem falhar por tensão excessiva em qualquer de seus membros. Isto é, o material trabalha no seu regime elástico linear e não pode superar a sua tensão limite ou a sua tensão de escoamento [Guilherme, 2006]. Em virtude disso, a tensão admissível na estrutura é, muitas vezes, considerada como a mais fundamental das restrições impostas [Vanderplaats, 1987<sup>17</sup>, *apud* Sant'Anna, 2002]. Certamente, entre as restrições mais importantes estão os critérios de falha baseados na tensão de von Mises, Tresca e Rankine.

No entanto, a utilização da tensão como restrição nos problemas de otimização topológica requer que alguns desafios sejam superados [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Sendo os três mais importantes: o fenômeno da singularidade [Rozvany, 2001<sup>18</sup>; Cheng e Guo, 1997<sup>19</sup>;

---

<sup>17</sup> Vanderplaats, G. N. e Salajegheh, E., New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis, **AIAA Journal**, vol. 27, nº 3, pp. 352-358, 1987.

<sup>18</sup> Rozvany, G.I.N., On design-dependent constraints and singular topologies, **Struct Multidisc Optim**, vol. 21, nº 2, pp. 164–172, 2001.

<sup>19</sup> Cheng, G. e Guo, X., Epsilon-Relaxed Approach in Structural Topology Optimization, **Struct Multidisc Optim**, vol. 13, nº 4, pp. 258-266, 1997

Cheng e Jiang, 1992<sup>20</sup>; *apud* Le *et al.*, 2010], a restrição de natureza local e o comportamento altamente não linear da tensão [Le, *et al.*, 2010].

O primeiro grande desafio é o fenômeno das topologias singulares ou, simplesmente, das singularidades das tensões, o qual consiste na degeneração do espaço de solução. Esse problema implica a incapacidade de os métodos tradicionais de otimização, baseados nos gradientes, atingirem o ponto ótimo, quando este é singular, pois o projeto ótimo global, muitas vezes, é um elemento desses tais espaços degenerados. Com isso, os algoritmos de programação não linear não podem identificar essas regiões e, portanto, eles convergem para projetos ótimos locais [Stump, 2006].

Esse problema foi primeiramente, mostrado por Kirsch [Kirsch, 1990<sup>21</sup> *apud* Farias *et al.*, 2011] e, desde então, muitos trabalhos têm apresentado propostas para remediar essa situação, dentre as quais o relaxamento da tensão com a eliminação das regiões degeneradas, o que permite que a programação não linear encontre um projeto ótimo global. Diversos tipos de relaxamento têm sido elaborados, como, por exemplo, a relaxação- $\epsilon$  (épsilon) e as funções de contornos suaves ou *Smooth Envelope Functions* (SEF's), propostas por Cheng e Guo [Cheng e Guo, 1997], e Rozvany e Sobieszczanski-Sobieski [Rozvany e Sobieszczanski-Sobieski, 1992<sup>22</sup> *apud* Le *et al.*, 2010].

O segundo desafio em otimização topológica ocorre devido à restrição de tensão ser de natureza local, o que torna necessário um controle preciso do campo de tensões no interior do domínio de projeto. Em uma aplicação contínua, o campo de tensões tem de ser limitado em cada ponto do projeto, e, mesmo com um domínio discreto, esse procedimento leva a um grande número de restrições locais, normalmente tão numerosos quanto o número de elementos na malha [Farias *et al.*, 2011]. A solução para essa dificuldade é substituir a restrição de tensão local por uma restrição de tensão integrada, que se aproxima da tensão máxima, como a norma- $p$  e as funções Kresselmeier-Steinhauser (KS) [Duysinx e Sigmund,

---

<sup>20</sup> Cheng, G. e Jiang, G., Study on Topology Optimization With Stress Constraints, **Engineering Optimization**, vol. 20, n° 2, pp. 129-148, 1992.

<sup>21</sup> Kirsch, U., On singular topologies in optimum structural design, **Struct Multidisc Optim**, vol. 2, n° 3, pp. 133–142, 1990.

<sup>22</sup> Rozvany G.I.N., Sobieszczanski-Sobieski J., New optimality criteria methods: forcing uniqueness of the adjoint strains by cornerrounding at constraint intersections, **Struct Multidisc Optim**, vol. 4, n° 3–4, pp. 244–246, 1992.

1998<sup>23</sup>; Yang e Chen, 1996<sup>24</sup> *apud* Le *et al.*, 2010]. Essa abordagem global é, computacionalmente, eficiente, mas não controla o comportamento da tensão local de maneira adequada.

O terceiro desafio, em problemas com restrições de tensão, é o comportamento altamente não linear da tensão no domínio do projeto. De fato, os níveis de tensão são, drasticamente, afetados por mudanças de densidade em regiões vizinhas, e esse fenômeno é agravado em regiões críticas, tais como regiões com concentradores de tensão, a exemplo dos cantos vivos [Le *et al.*, 2010].

### 3.1 Relaxação da Tensão

O problema da singularidade da tensão surge quando a solução ótima global não pertence a um domínio contínuo e, sim, a subespaços degenerados, sendo que a explicação para esse fenômeno se baseia na tensão limitante. A restrição de tensão apresenta uma descontinuidade quando a seção transversal de uma ou mais barras é igual a zero, a qual decorre do fato de não existir sentido físico em se calcular a tensão em uma barra que foi retirada da estrutura. Isso significa que a tensão em uma barra de seção transversal nula é, em princípio, nula, mas, para o modelo matemático, seu valor é finito. Esse valor foi definido como uma tensão limitante. Assim, o problema das topologias singulares ocorre quando a tensão limitante em um elemento é maior do que a tensão de referência do material [Cheng e Jiang, 1992; Kirsch, 1990; Rozvany e Birker, 1994<sup>25</sup>; *apud* Le *et al.* 2010].

A existência desses subespaços degenerados impedem, nos métodos clássicos de otimização baseados nos gradientes, a convergência para o ponto mínimo global singular. Para que esses subespaços degenerados sejam eliminados, as restrições de tensão são relaxadas, conforme o método da relaxação- $\epsilon$  e as funções de contornos suaves SEF's [Cheng

---

<sup>23</sup> Duysinx P., Sigmund O., **New development in handling stress constraints in optimal material distribution**, In: Proc. 7<sup>th</sup> AIAA/USAF/NASA/ISSMO symposium on multidisciplinary analysis and optimization. A collection of technical papers (held in St. Louis, Missouri), vol. 3, pp. 1501–1509, 1998.

<sup>24</sup> Yang R.J., Chen C.J., Stress-based topology optimization, **Struct Multidisc Optim**, vol. 12, n° 2, pp. 98–105, 1996.

<sup>25</sup> Rozvany G.I.N., Birker T., On singular topologies in exact layout optimization, **Struct Multidisc Optim**, vol. 8, n° 4, pp. 228–235, 1994.

e Guo, 1997; Rozvany e Sobieszczanski-Sobieski, 1992, *apud* Le *et al.*, 2010], tanto para estruturas treliçadas [Duysinx e Bendsøe, 1998], [Bruggi, 2008<sup>26</sup> *apud* Le *et al.* 2010] e suas variações, quanto para estruturas contínuas.

A principal motivação para aplicar-se o método da relaxação- $\varepsilon$  é tornar o problema de otimização topológica mais tratável, o que também motiva o uso das densidades intermediárias  $\rho \in [0,1]$ , ao invés das densidades discretas  $\rho \in \{0,1\}$  [Le *et al.* 2010]. No presente trabalho, foi utilizado, como método de relaxação da tensão, o mesmo método SIMP, apresentado por Le *et al.* [Le *et al.*, 2010] que, em até certo ponto, é coerente com o método de relaxação- $\varepsilon$ , usado por Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998].

A abordagem de Le *et al.* [Le *et al.*, 2010] é simples e inicia-se com um problema discreto de otimização topológica, ou seja,  $\rho \in \{0,1\}$ . Após, o problema é relaxado, tornando-o um problema contínuo de otimização, na qual  $\rho \in [0,1]$ , o que força o surgimento de um projeto discreto no final do processo de otimização. Consequentemente, torna-se necessário definir um esquema de interpolação para os possíveis valores máximos e mínimos da rigidez, do volume e da tensão.

Para uma parametrização do material, foi adotado o método SIMP, no qual o tensor constitutivo de quarta ordem é penalizado através da Equação 2.58, repetida abaixo:

$$E_{ijkl} = \rho^p E_{ijkl}^0 \quad (3.2)$$

Já a parametrização do volume fica:

$$V = \int_{\Omega} \rho^m d\Omega \quad (3.3)$$

E, por fim, para a parametrização do tensor tensão, foi utilizado:

$$\sigma_r = \rho^n E_{ijkl}^0 \varepsilon \quad (3.4)$$

em que  $\sigma_r$  é a tensão relaxada, desde que cumpridas as seguintes condições:

---

<sup>26</sup> Bruggi M., On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization, **Struct Multidisc Optim**, vol. 36, n° 2, pp. 125–141, 2008.

- 1)  $\rho^n$  seja uma função de crescimento lento;
- 2)  $\rho^p < \rho^n < 1$  para  $0 < \rho < 1$ , definido que  $\rho < \rho^n$  para que, na interpolação de tensão, as densidades intermediárias sejam mais penalizadas;
- 3)  $\rho^n = 0$ , de modo que a tensão em regiões vazias seja igual a zero, buscando-se um projeto mais suavizado, sem regiões degeneradas; e
- 4)  $\rho^n = 1$ , de maneira que a tensão relaxada seja coerente com a tensão no material sólido.

Segundo Le *et al.* [Le *et al.*, 2010], os limites impostos a  $\rho^n$ , na segunda condição, fazem com que a interpolação de tensão seja escolhida entre as duas tensões limitantes a seguir:

- 1) a tensão do material sólido  $\sigma = E_{ijkl}^0 \varepsilon$ , na qual o otimizador não é capaz de eliminar material em algumas áreas do domínio, pois, em alguns casos, para densidades iguais a zero, a tensão é diferente de zero; e
- 2) a tensão macroscópica definida como  $\sigma = \rho^p E_{ijkl}^0 \varepsilon$ , a qual conduz a um problema oposto, em que o otimizador gera um projeto sem material, isto é, com todos os elementos com densidades iguais a zero.

Neste trabalho, foram utilizados os mesmos valores sugeridos por Le *et al.* [Le *et al.*, 2010], nos seguintes esquemas de interpolação para a rigidez, o volume e a tensão, mostrados, respectivamente, nas equações abaixo:

$$p = 3 \quad \rightarrow \quad E_{ijkl} = \rho^3 E_{ijkl}^0 \quad (3.5)$$

$$m = 1 \quad \rightarrow \quad V = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (3.6)$$

$$n = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \sigma_r = \rho^{\frac{1}{2}} E_{ijkl}^0 \varepsilon \quad (3.7)$$

em que  $p$  é a penalização da rigidez,  $m$  é a penalização do volume, e  $n$  é a penalização da tensão.

A escolha desses valores conduz a um relaxamento do domínio mais suave do que o provocado pelo método de relaxação- $\varepsilon$ , proposto por Cheng e Guo [Cheng e Guo, 1997 *apud* Farias *et al.*, 2011], amenizando, portanto, o fenômeno da singularidade.

### 3.2 Medida de Tensão Global

Em problemas de otimização topológica com restrição de tensão, é utilizada uma restrição de tensão para cada elemento da malha discretizada pelo MEF, o que implica que o número de restrições e o número de variáveis de projeto sejam iguais ao número de elementos da malha. O conseqüente elevado custo computacional do cálculo das sensibilidades pode ser reduzido se uma única medida de tensão global é usada no lugar das várias medidas de tensão local (para cada elemento da malha) [Duysinx e Sigmund, 1998]; [Yang e Chen, 1996 *apud* Le *et al.*, 2010].

Na definição da medida de tensão global, seguindo-se a formulação de Le *et al.* [Le *et al.*, 2010], primeiramente, considera-se o problema original com  $n$  restrições, uma para cada elemento  $e$ :

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_y, \quad e = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

em que  $\sigma_{eq} \equiv \sigma_r$ , que é a medida de tensão relaxada, para a qual foi utilizada a tensão de von Mises.  $\sigma_y$  é o seu limite, e  $e$  é o índice do elemento. Essas  $n$  restrições podem ser reescritas em termos de uma única restrição de tensão máxima:

$$\sigma_{\max.}(\rho) = \max_{e=1, \dots, n} (\sigma_{eq}(\rho)) \leq \sigma_y \quad (3.9)$$

No entanto, essa função máxima não é diferenciável, devendo ser, portanto, suavizada, o que pode ser feito através da norma- $p$  ou de uma função de Kreisselmeier-Steinhauser (KS). No presente trabalho, seguindo-se Le *et al.* [Le *et al.*, 2010] e Farias *et al.* [Farias *et al.*, 2011], adotou-se a metodologia da restrição de tensão de von Mises, modificada pela norma- $p$  ( $\sigma_{PN}$ ). Dessa forma, a restrição torna-se:

$$\sigma_{PN} = \left( \sum_{e=1}^{n_{mos}} \sigma_{eq}^{n_p} \right)^{1/n_p} \leq \sigma_{y_{PN}} \quad (3.10)$$

em que  $n_p$  é o parâmetro da norma da de tensão,  $e$  é o elemento,  $n_{mos}$  é o número de pontos de tensão. Assim, define-se que o único critério de tensão imposto à estrutura é a tensão  $\sigma_e$ , e que essa tensão não pode assumir valores negativos [Le *et al.*, 2010].

Em um dos extremos, em que o parâmetro da norma da tensão tende ao infinito ( $n_p \rightarrow \infty$ ), a norma da tensão  $\sigma_{PN}$  aproxima-se da tensão máxima  $\sigma_{max}$  (em módulo de volume do elemento), não ocorrendo suavização. Já, no outro extremo, quando ( $n_p \rightarrow 1$ ), há uma suavização excessiva, sendo que  $\sigma_{PN}$  se aproxima da tensão média (em módulo de volume). Uma boa escolha para  $n_p$  deve, portanto, fornecer uma adequada suavização para melhorar o desempenho do algoritmo de otimização e uma adequada aproximação do valor da tensão máxima, para que o projeto otimizado satisfaça as restrições de tensão impostas [Le *et al.*, 2010]. Para formulações com minimização de tensão, a escolha da norma do parâmetro de tensão  $n_p$  não é crítica, porque a norma- $p$  precisa, simplesmente, capturar uma tendência da tensão máxima, e não o valor atual máximo da tensão.

### 3.3 Medida de Tensão Global Normalizada

Como a norma da tensão  $\sigma_{PN}$  não tem significado físico, é inadequado impor uma restrição de tensão máxima  $\sigma_{max}$ , usando-se a norma- $p$ , pois não há uma expressão matemática de  $\sigma_{max}$  em termos de  $\sigma_{PN}$  [Duysinx e Sigmund, 1998]. Para solucionar isso, Le *et al.* [Le *et al.*, 2010] propuseram uma medida de tensão global normalizada, a qual melhora a aproximação da tensão máxima.

Utiliza-se a informação de uma iteração anterior no processo de otimização, ou seja, normaliza-se a tensão global, a partir da norma- $p$  como  $C\sigma_{PN}$ , que é uma melhor aproximação da tensão máxima. Para definir o parâmetro de normalização  $C$ , são usados os valores da última iteração, tanto da tensão máxima ( $máx(\sigma_{eq})^{(I-1)}$ ), quanto da norma da tensão ( $\sigma_{PN}^{(I-1)}$ ). Desse modo, define-se a evolução da restrição de tensão global normalizada a cada iteração como [Le *et al.*, 2010]:

$$\sigma_{m\acute{a}x} \approx C\sigma_{PN} \leq \sigma_{y_{PN}} \quad (3.11)$$

em que  $C$  é calculado a cada iteração para  $I \geq 1$  como mostrado na Equação 3.12:

$$C^{(I)} = \frac{\acute{m}ax(\sigma_{eq})^{(I-1)}}{\sigma_{PN}^{(I-1)}} \quad (3.12)$$

Nota-se que a restrição  $C\sigma_{PN} \leq \sigma_{y_{PN}}$  não é diferenciável, porque o valor de  $C$  é alterado de uma maneira descontínua, o que resulta em um problema de otimização ligeiramente diferente a cada iteração. Entretanto, como a otimização converge, as mudanças entre as sucessivas iterações diminuem, o que faz com que as alterações no valor de  $C$  também convirjam, e, por meio disso, sejam reduzidos os efeitos da não diferenciabilidade e inconsistência [Le *et al.*, 2010].

Logo, o problema da minimização do volume torna-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & V = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \rho_e V_e \\ \text{su}j. \quad & a \quad g(\sigma) = C^{(I)} \left\| \sigma_{eq} \right\|_{n_p}^{(I)} \leq \sigma_{y_{PN}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que  $\sigma_{eq}$  é a tensão de von Mises, que é calculada pelo MEF, empregando-se o elemento bilinear isoparamétrico não conforme de Taylor.

A tensão, ao contrário do elemento quadrado bilinear, em que a tensão é calculada no centro do elemento, é calculada nos 4 pontos de integração de Gauss. Em seguida, as tensões são suavizadas para os nós do elemento, o que elimina as discontinuidades entre os elementos da malha, uma vez que, ao invés de um único valor, são obtidos quatro valores de tensão por elemento (um valor para cada um de seus nós).

### 3.4 Cálculo das Sensibilidades

Existem diversos métodos para o cálculo das sensibilidades (derivadas), tais como diferenças finitas, métodos variacionais, semianalíticos e analíticos [Haug *et al.*, 1986<sup>27</sup> *apud* Cardoso, 2000] e [Haftka e Gürdal, 1992]. Mas, sem dúvida, os métodos analíticos, utilizados no presente trabalho, são os mais eficientes, porque permitem obter valores exatos e de menor custo computacional. Porém, muitas vezes, pode ser difícil encontrar uma relação direta, ou mesmo indireta, entre a função objetivo e as variáveis de projeto [Guilherme, 2006], sendo que outro problema é que as derivadas analíticas são muito específicas, necessitando de uma nova dedução a cada mudança de formulação [Cardoso, 2000].

Como a função objetivo é o volume, que é uma função direta da variável de projeto  $\rho$ :

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n_e} \rho_i \mathbf{V}_i \quad (3.14)$$

a obtenção da derivada do volume em relação à densidade não apresenta maiores dificuldades, conforme a Equação 3.15:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \rho_i} = \mathbf{V}_i \quad (3.15)$$

A expressão alternativa para a penalização da função objetivo, apresentada na Equação 2.60, também são funções diretas da variável de projeto, sendo sua derivada igual a:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \rho_i} = [p(\rho_i^{p-1}) + \alpha(1 - 2\rho_i)]\mathbf{V}_i \quad (3.16)$$

Assim, quando  $p = 1$  e  $\alpha = 0$ , a Equação 3.16 torna-se igual à Equação 3.15, isto é, a derivada da função objetivo é constante e equivale ao volume de cada elemento finito da malha.

---

<sup>27</sup> Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov, V., **Design Sensitivity Analysis of Structural Systems**, Academic Press, 1986.

Para reduzir o elevado custo computacional do cálculo da derivada da tensão, uma única medida de tensão global é utilizada no lugar das várias medidas de tensão local. Desse modo, reescrevendo-se a Equação 3.13, tem-se:

$$g = C^{(I)} \left( \sum_{e=1}^{n_{mos}} \sigma_{vm_{nó}}^{n_p} \right)^{\frac{1}{n_p}} \quad (3.17)$$

em que  $n_{mos}$  é o número total de nós da malha, e  $\sigma_{vm_{nó}}$  é a tensão de von Mises nos nós.

Aplicando-se a regra da cadeia para derivar essa função, chega-se na Equação 3.18:

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_j} = C^{(I)} \left( \sum_{e=1}^{n_{mos}} \sigma_{vm_{nó}}^{n_p} \right)^{\left(\frac{1}{n_p}-1\right)} \left[ \sum_{e=1}^{n_{mos}} \sigma_{vm_{nó}}^{(n_p-1)} \frac{\partial \sigma_{vm_{nó}}}{\partial \rho_j} \right] \quad (3.18)$$

Para resolver essa equação, é necessário obter a derivada da tensão de von Mises em relação à variável de projeto  $\boldsymbol{\rho}$ , através da formulação utilizada por Sant'Anna e Guilherme [Sant'Anna, 2002; Guilherme, 2006], em que a tensão equivalente de von Mises é escrita se utilizando as tensões nas direções principais ou nos eixos coordenados. Assim, uma das representações mais comuns desse critério de falha, aplicado ao problema da elasticidade bidimensional (EPT), é mostrada na Equação 3.19:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}} \quad (3.19)$$

Sant'Anna e Guilherme [Sant'Anna, 2002; Guilherme, 2006] usaram uma formulação mais adequada para o cálculo da tensão de von Mises, baseada diretamente no vetor de deslocamentos. Essa formulação facilita o cálculo da derivada, conforme pode ser visto na Equação 3.20:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\mathbf{u}_e^T \mathbf{M} \mathbf{u}_e} \quad (3.20)$$

em que  $\mathbf{u}_e$  é o vetor deslocamento do elemento, calculado pelo MEF, e  $\mathbf{M}$  é uma matriz calculada da seguinte maneira:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^T \mathbf{V} \mathbf{T} \quad (3.21)$$

em que  $\mathbf{V}$  é dado por:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

e  $\mathbf{T}$  é um termo que relaciona os deslocamentos, calculados pelo MEF, com a tensão a partir da Equação 3.23:

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\rho}^{1/2} \mathbf{E}^0 \mathbf{B} \quad (3.23)$$

em que  $\boldsymbol{\rho}^{1/2} \mathbf{E}^0$  é a parametrização do tensor tensão, apresentada na Equação 3.7, e  $\mathbf{B}$  é a matriz das derivadas das funções de interpolação do MEF. Dessa forma, fica estabelecida a relação entre a tensão de von Mises e a densidade material.

Para montar a equação de von Mises, substituem-se as Equações 3.21 a 3.23 na Equação 3.20. Com os devidos ajustes, tem-se:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\boldsymbol{\rho} \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_e} \quad (3.24)$$

Logo, a Equação 3.24 é utilizada no cálculo da derivada da tensão. Mas, como, neste trabalho, a tensão de von Mises é calculada nos 4 pontos de integração de Gauss, é mais conveniente chamar  $\sigma_{vm}$  de  $\sigma_{vm_{eg}}$ , em que  $e$  é o elemento, e  $g$  é o ponto de integração de Gauss. Então:

$$\sigma_{vm_{eg}} = \sqrt{\boldsymbol{\rho}_e \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_e} \quad (3.25)$$

Derivando-se a Equação 3.25 em relação à densidade de um elemento  $j$ , obtém-se a expressão:

$$\frac{\partial \sigma_{vmeg}}{\partial \rho_j} = \frac{(\mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_e) + 2\rho_e (\mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \rho_j})}{2(\rho_e \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}_e)^{1/2}} \quad (3.26)$$

Nessa equação, surge o termo da derivada do deslocamento, a qual é calculada por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \rho_j} \quad (3.27)$$

em que  $\mathbf{u}_e$  é o vetor 12x1 dos deslocamentos do elemento, sendo que  $\mathbf{u}_e = [\mathbf{u}_{e_a} | \mathbf{u}_{e_b}]$ , em que  $\mathbf{u}_{e_a}$  é o vetor 8x1 dos deslocamentos nodais, e  $\mathbf{u}_{e_b}$  é o vetor 4x1 dos deslocamentos das funções bolhas, são calculados pela Equação 2.34, logo derivando-se essa equação tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e_b}}{\partial \rho_j} = - \left( \frac{\partial \mathbf{K}_C^{-1}}{\partial \rho_j} \mathbf{K}_B^T \mathbf{u}_{e_a} + \mathbf{K}_C^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_B^T}{\partial \rho_j} \mathbf{u}_{e_a} + \mathbf{K}_C^{-1} \mathbf{K}_B^T \frac{\partial \mathbf{u}_{e_a}}{\partial \rho_j} \right) \quad (3.28)$$

Por sua vez:

$$\mathbf{K}_e = \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega \quad (3.29)$$

De acordo com a penalização do tensor constitutivo, mostrado na Equação 3.5,  $\mathbf{K}_e$  equivale a:

$$\mathbf{K}_e = \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T \rho_e^3 \mathbf{E}^0 \mathbf{B} d\Omega = \rho_e^3 \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{B} d\Omega \quad (3.30)$$

Logo, a relação entre a densidade e a rigidez é dada por:

$$\rho_e^3 \mathbf{K}_e^0 \quad (3.31)$$

Assim, a derivada dos termos que possuem a matriz  $\mathbf{K}$  dos elementos em relação ao  $\rho$  podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{C_e}^{-1}}{\partial \rho_j} = \frac{\partial \rho_e^{-3}}{\partial \rho_j} \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}} = -\delta_{ej} \left( 3\rho^{-4} \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}} \right) \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{B_e}^T}{\partial \rho_j} = \frac{\partial \rho_e^3}{\partial \rho_j} \mathbf{K}_{B_e}^{0^T} = -\delta_{ej} \left( 3\rho^2 \mathbf{K}_{B_e}^{0^T} \right) \quad (3.33)$$

Retomando o termo da derivada do deslocamento e agrupando-se os termos iguais:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e_b}}{\partial \rho_j} = \delta_{ej} \left( -3\rho^{-1} \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}} \mathbf{K}_{B_e}^{0^T} + 3\rho^{-1} \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}} \mathbf{K}_{B_e}^{0^T} \right) \mathbf{u}_{e_a} + \mathbf{K}_{C_e}^{-1} \mathbf{K}_{B_e}^T \frac{\partial \mathbf{u}_{e_a}}{\partial \rho_j} \quad (3.34)$$

Como o primeiro termo da Equação 3.34 é igual a zero, sobra apenas o último termo da equação, de modo que a derivada dos deslocamentos da função bolha é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e_b}}{\partial \rho_j} = \mathbf{K}_{C_e}^{-1} \mathbf{K}_{B_e}^T \frac{\partial \mathbf{u}_{e_a}}{\partial \rho_j} \quad (3.35)$$

Quanto à derivada do termo dos deslocamentos nodais dos elementos em relação à variável de projeto, que constitui o último termo da Equação 3.35, importa referir que a relação entre os deslocamentos e as densidades não é direta, pois ambos estão vinculados à relação de equilíbrio. Para o cálculo dessa derivada, utiliza-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (3.36)$$

Logo, os deslocamentos nodais do elemento são:

$$\mathbf{u}_{e_a} = \mathbf{L}_e^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (3.37)$$

em que sua derivada é:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e_a}}{\partial \rho_j} = \mathbf{L}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \rho_j} \mathbf{f} \quad (3.38)$$

A derivada da matriz inversa pode ser obtida utilizando-se uma propriedade da álgebra linear, segundo a qual qualquer matriz quadrada, ao ser multiplicada pela sua inversa, resulta em uma matriz identidade de mesma dimensão. Aplicando-se essa propriedade à matriz de rigidez global, obtém-se:

$$\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I} \quad (3.39)$$

Derivando-se ambos os lados da equação em relação à  $\rho_j$ :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{K}^{-1} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \rho_j} = 0 \quad (3.40)$$

Como a matriz identidade não depende da variável de projeto, isolando-se a derivada de interesse, chega-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \rho_j} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{K}^{-1} \quad (3.41)$$

Essa expressão pode ser substituída na expressão da derivada do deslocamento do elemento (Equação 3.38), resultando em:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e_a}}{\partial \rho_j} = -\mathbf{L}_e^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (3.42)$$

chamando:

$$\boldsymbol{\lambda}_e = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{L}_e^T \quad (3.43)$$

A Equação 3.42 torna-se igual a:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e_a}}{\partial \rho_j} = \boldsymbol{\lambda}_e \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u}_{e_a} \quad (3.44)$$

### 3.5 Linearização das Restrições

Algoritmos de programação matemática, como o método da PLS, necessitam de informações provenientes do cálculo das derivadas da função objetivo e das restrições, e não apenas dos valores das funções. Além disso, esse método requer que a função objetivo e as restrições sejam lineares, motivo pelo qual se aplica a técnica da expansão por Séries de Taylor, truncadas na parte linear nessas funções envolvidas.

Aplicando-se a expansão das Séries de Taylor para linearizar a restrição de tensão, que é uma função não linear, a Equação 3.13 pode ser reescrita como:

$$g(\rho_0) + \frac{\partial g}{\partial \rho_i}(\rho_i - \rho_0) \leq \sigma_y \quad (3.45)$$

Reagrupando-se os termos da desigualdade, para deixar na forma  $Ax \leq b$ , que é o padrão para algoritmos de programação linear, e sabendo-se que o limite  $\sigma_y$  é um valor constante, obtém-se a forma linearizada da restrição:

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_i}(\rho_i) \leq \sigma_y - g(\rho_0) + \frac{\partial g}{\partial \rho_i}(\rho_0) \quad (3.46)$$

### 3.6 Filtro de Densidade

As técnicas de filtragem são utilizadas para evitar o fenômeno da instabilidade de tabuleiro e gerar um problema bem posto de otimização topológica. Além disso, o seu uso apresenta a vantagem de eliminar a dependência da malha, de modo que a dependência é transferida para um parâmetro físico, ou seja, o filtro de raio.

Uma consequência direta da definição de um raio de filtragem é possibilitar o controle da complexidade da topologia, isto é, do número de furos que podem aparecer dentro do domínio de projeto [Cardoso e Fonseca, 2003]. Uma boa revisão sobre as técnicas de filtros foi proposta por Sigmund [Sigmund, 2007]. Neste trabalho, utilizou-se o filtro de

densidade linear, proposto por Bruns e Tortorelli [Bruns e Tortorelli, 2001] e, posteriormente, demonstrado por Bourdin [Bourdin, 2001 *apud* Le *et al.*, 2010], em razão de sua simplicidade e eficiência.

Nessa técnica de filtragem, a variável de projeto densidade  $d_i$  é atribuída para cada elemento finito  $i$ , a fim de que o algoritmo de otimização satisfaça ao objetivo desejado. Uma medida de densidade  $\rho_i$  também é atribuída para cada elemento finito  $i$ , sendo definida como uma função das variáveis de projeto densidade  $d_j$ . Para definir-se a medida de densidade  $\rho_i$ , usa-se a Equação 3.47:

$$\rho_i = \frac{\sum_{j \in \Omega_i} w_j d_j}{\sum_{j \in \Omega_i} w_j} \quad (3.47)$$

sendo que:

$$w_j = \frac{r_0 - r_j}{r_0} \quad (3.48)$$

em que o domínio  $\Omega_i$  do elemento  $i$  contém todos os elementos de  $j$ , que se encontram dentro do raio  $r_0$  do elemento  $i$ , medidos a partir dos seus respectivos centroides. O fator  $w_j > 0$  é um filtro cônico, em que  $r_j$  é a distância entre os centroides dos elementos  $i$  e  $j$ . Assim, é utilizada a distância  $r_0$ , que varia de forma linear, independentemente do tamanho da malha [Bruns e Tortorelli, 2001].

Em problemas de otimização topológica, a densidade  $\rho$  é definida entre 0 e 1, impondo-se esse mesmo valor entre 0 e 1 para  $d$ . Por definição, em virtude do filtro de raio, é atribuído um limite superior a  $\rho$ , dado por  $|\nabla \rho|$ , que é o gradiente espacial de  $\rho$ . Em outras palavras, os limites impostos por  $d$  a  $\rho$  suavizam os valores de  $\rho$  sem requerer nenhuma outra restrição adicional de  $d$ . No entanto, essa suavização não pode ser usada em projetos com características de escala muito pequenas, tais como partes estreitas, cantos irregulares e microperfurações. Sem essa ou outra restrição similar sobre  $\rho$ , o problema de otimização topológica permanece mal posto [Bendsøe e Sigmund, 2003 *apud* Le *et al.*, 2010].

Neste trabalho, utiliza-se a restrição de tensão, que tem um comportamento altamente não linear, de modo que é bastante recomendado o uso de filtros consistentes, como o filtro introduzido por Bruns e Tortorelli [Bruns e Tortorelli, 2001].

## 4 IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

No presente trabalho, foi implementado um algoritmo de otimização para resolver o problema da minimização do volume de estruturas contínuas bidimensionais em EPT, submetidas à restrição de tensão. Foi utilizado o software MATLAB, que tem uma linguagem bastante simples e robusta, mas que, por outro lado, possui algumas limitações como a velocidade computacional, que limitou o tamanho das malhas dos casos estudados.

### 4.1 Descrição do Algoritmo Desenvolvido

O algoritmo implementado inicia lendo um arquivo de texto de entrada gerada no software GID, que é um pré e pós-processador para simulações numéricas. Esse arquivo traz informações sobre a malha e as condições de contorno e de carregamento. Após ler esses dados, outras variáveis de entrada também são inicializadas. Na sequência, o algoritmo faz a análise de elementos finitos, cujos resultados são os deslocamentos, a deformação e, por fim, a tensão.

Terminada a etapa de análise de elementos finitos, inicia-se a etapa de cálculo das sensibilidades, na qual são calculadas as derivadas dos deslocamentos, a tensão de von Mises e a sua derivada. Depois disso, é feita a suavização da tensão, ou seja, a nodalização da tensão de von Mises e de sua derivada. Em seguida, a tensão é normalizada, e calculada a derivada da restrição.

De posse de todos esses dados, tem início o processo de otimização. Processam-se o cálculo dos limites móveis e a linearização dos dados, que irão entrar no algoritmo de PLS. Então os dados são otimizados via sub-rotina SLATEC, que se mostrou mais robusta para este trabalho do que a sub-rotina do linprog do MATLAB. Concluída a otimização após o processo iterativo, a função objetivo passa por um critério de parada, que analisa a convergência do otimizador. Se o algoritmo converge, os resultados finais são gerados, encerrando-se a rotina. Caso não haja convergência, o algoritmo retorna para a análise de elementos finitos, reiniciando-se todo o processo até a sua convergência.

Na Figura 4.1, é mostrado o fluxograma de funcionamento do algoritmo:

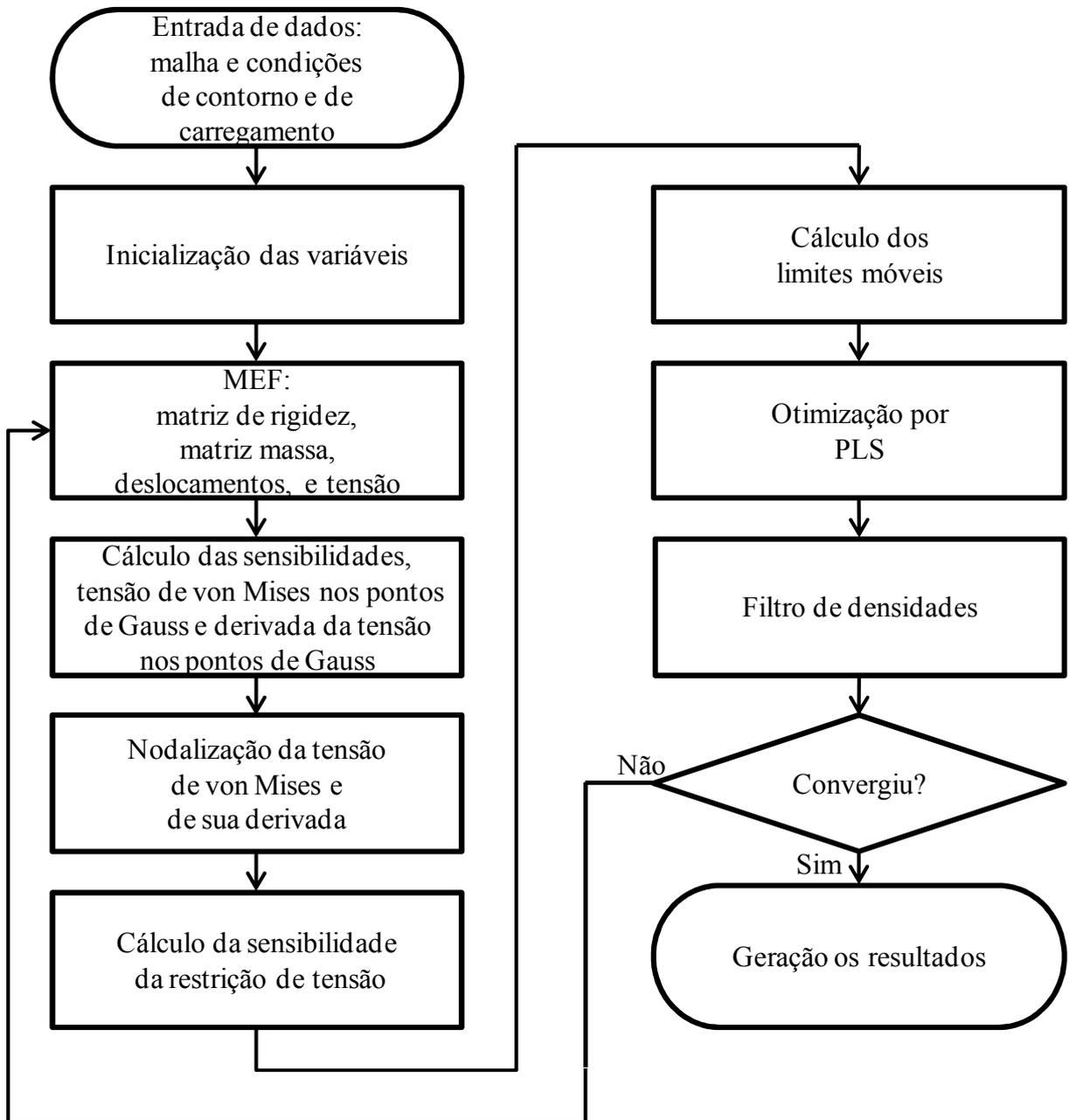


Figura 4.1 - Fluxograma do algoritmo de otimização.

## 4.2 Resultados Obtidos

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos através da formulação descrita no capítulo anterior. Foram estudados 3 casos clássicos apresentados em artigos de otimização topológica, todos eles submetidos à minimização do volume com restrição de tensão. Para viabilizar a comparação dos resultados obtidos neste trabalho com os já existentes, as dimensões das estruturas estudadas foram baseadas em exemplos apresentados em literatura especializada.

No primeiro caso, a estrutura utilizada foi uma viga curta bidimensional em balanço de proporção 8x5. Ela foi engastada em uma de suas extremidades (de menor dimensão) e recebeu um carregamento vertical no canto inferior da extremidade oposta (ver Figura 4.2). No segundo caso, foi usada uma estrutura de proporção igual à do primeiro caso, mas com condições de contorno diferentes. A estrutura foi engastada na extremidade superior (de maior dimensão) e recebeu uma carga horizontal aplicada no centro da extremidade inferior (ver Figura 4.12). Esses dois primeiros casos são bastante simples, e sua função foi testar se a formulação implementada era capaz de fornecer topologias bem definidas, respeitando a restrição de tensão imposta.

No terceiro caso, foi utilizado um componente estrutural em formato de “L”, engastado na sua extremidade superior, que recebeu um carregamento vertical no canto superior direito da base do “L” (ver Figura 4.20). Esse componente foi usado para testar a formulação de otimização topológica com restrição de tensão, justamente por favorecer o surgimento de concentração de tensão no ângulo reto formado na quina interna da estrutura. A tensão no ângulo reto é, em princípio, infinita, mas passa a ter um valor limitado com a discretização do domínio por elementos finitos.

### 4.2.1 Primeiro Caso

A geometria e as condições de contorno da viga curta, com proporção 8x5, em balanço, aparecem na Figura 4.2.

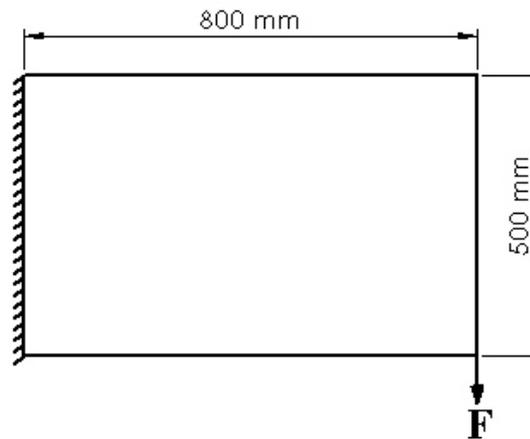


Figura 4.2 - Caso 1: geometria e condições de contorno da viga curta em balanço.

Devido ao alto custo computacional do problema de otimização topológica com restrição de tensão, a viga foi discretizada em uma malha de 1000 elementos finitos isoparamétricos bilineares não conformes de Taylor, com 1066 nós, o que resultou em um elemento de 20 mm x 20 mm. Os demais dados definidos para este primeiro caso são apresentados na Tabela 4.1:

Tabela 4.1 - Dados do caso 1.

módulo de elasticidade (E)	1 MPa
coeficiente de Poisson	0,3
espessura	1 mm
tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	1 MPa
norma da tensão de escoamento ( $\sigma_{y_{PN}}$ )	2,37 MPa
força distribuída em 2 nós (área de 20 mm <sup>2</sup> )	30 N

Os parâmetros variáveis dentro do problema de otimização topológica eram o valor do expoente da norma- $p$  ( $n_p$ ), mostrado na Equação 3.10, o raio de filtro ( $r_0$ ), mostrado na Equação 3.48, e os parâmetros do Método da Continuação  $p$  e  $\alpha$ , apresentados na Equação 2.60.

Utilizou-se  $n_p = 8$ , fundamentado nos resultados obtidos por Le [Le *et al.*, 2010], em que valores menores de  $n_p$ , tais como, os valores 4, 6 e 8, fornecem bons resultados de otimização, embora não eliminem os concentradores de tensão, surgidos na estrutura em “L”,

que será descrita no terceiro caso. Já, em projetos em que se utilizam maiores valores de  $n_p$ , tal como o valor 12, a distribuição de tensão tende a ser mais uniforme, o que reduz os concentradores de tensão. Mas, por outro lado, quando  $n_p = 12$ , aumenta significativamente o número de iterações até a convergência da função objetivo, e o problema torna-se mais suscetível a um mínimo local, e não global, se comparado com otimizações com menores valores de  $n_p$ . Por essa razão, adotou-se  $n_p = 8$  nos 3 casos descritos neste trabalho.

O raio de filtro foi definido de acordo com o tamanho da malha discretizada por elementos finitos. Para a malha com 1000 elementos, foi usado um raio de 1,1 multiplicado pelo tamanho do elemento, ou seja, um raio de 22 mm, de modo que só foram considerados os vizinhos de aresta de cada elemento. Em um primeiro teste, realizado sem esse filtro de densidade, surgiu, na topologia, o fenômeno da instabilidade de tabuleiro, como pode ser visto na Figura 4.3, comprovando a necessidade de uso do mesmo.



Figura 4.3 - Instabilidade de tabuleiro no caso 1.

Na primeira etapa do processo de otimização da estrutura, não foi aplicada nenhuma penalização na função objetivo, mantendo-se  $p = 1$  e  $\alpha = 0$ . Foi utilizado o valor de  $n_p = 8$ , com filtro de densidade com raio de filtragem igual a 1,1, iniciando-se com todos os elementos com densidade  $\rho = 1$ . Após 278 iterações, a função objetivo convergiu para o volume mínimo, obtendo-se, de início, a topologia apresentada na Figura 4.4:

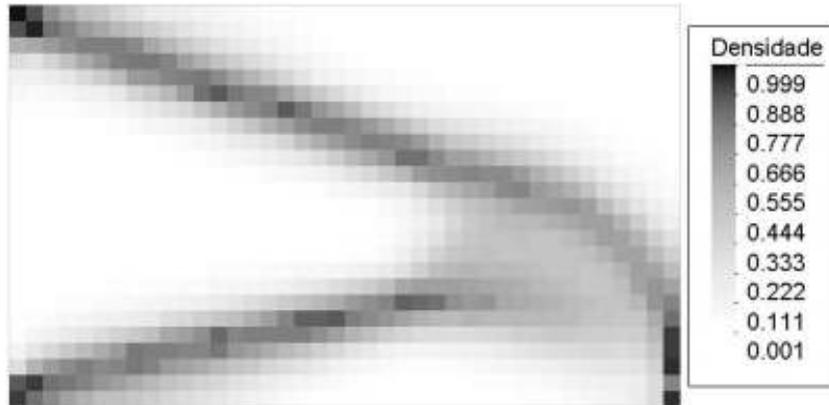


Figura 4.4 - Topologia do caso 1 sem penalização da função objetivo.

O volume inicial foi de  $0,4 \text{ m}^3$ . O algoritmo foi minimizando o volume até convergir para, aproximadamente,  $0,108 \text{ m}^3$ , o que resultou em uma estrutura com cerca de 27% do volume inicial, como mostra a Figura 4.5.

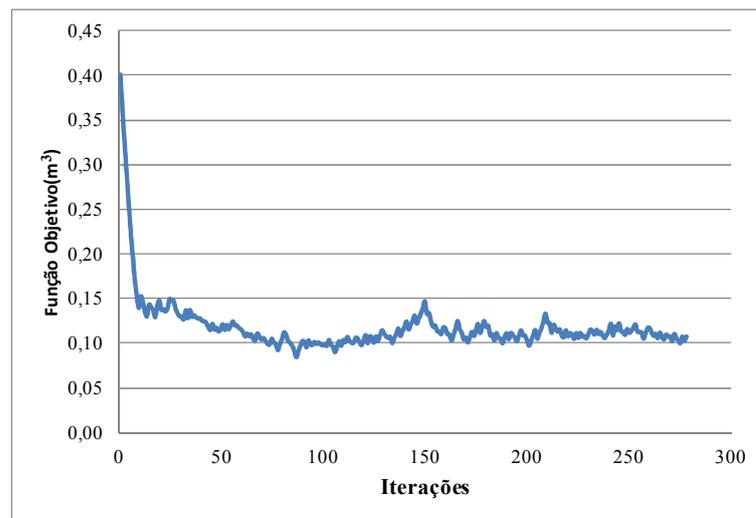


Figura 4.5 - Convergência da função objetivo sem penalização no caso 1.

Como essa primeira estrutura apresentou muitos elementos com densidades intermediárias (escalas de cinza), na segunda etapa do processo de otimização, utilizou-se o Método da Continuação, penalizando-se a função objetivo através do expoente  $p = 1/8$  e  $\alpha = 0$ . O algoritmo de otimização foi iniciado do ponto final da primeira etapa, convergindo após 401 iterações, o que permitiu obter a topologia apresentada na Figura 4.6.



Figura 4.6 - Topologia do caso 1 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$  e  $\alpha=0$ ).

Verifica-se que a estrutura ficou melhor definida, mas, ainda, com um número expressivo de elementos com densidades intermediárias. Para melhorar esse aspecto da topologia, na terceira etapa do processo de otimização, o algoritmo foi reiniciado, com a função objetivo novamente penalizada por  $p=1/8$ , porém, com  $\alpha=0,3$ , obtendo-se, então, a estrutura final mostrada na Figura 4.7 após 433 iterações.



Figura 4.7 - Topologia final do caso 1 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$  e  $\alpha=0,3$ ).

A região interna da estrutura ficou melhor definida, uma vez que a maioria dos seus elementos apresentaram valores de densidade bastante próximos a 1, tendo havido uma redução significativa das regiões de cinza. A distribuição da tensão de von Mises nodalizada para a estrutura obtida na topologia final é mostrada na Figura 4.8.

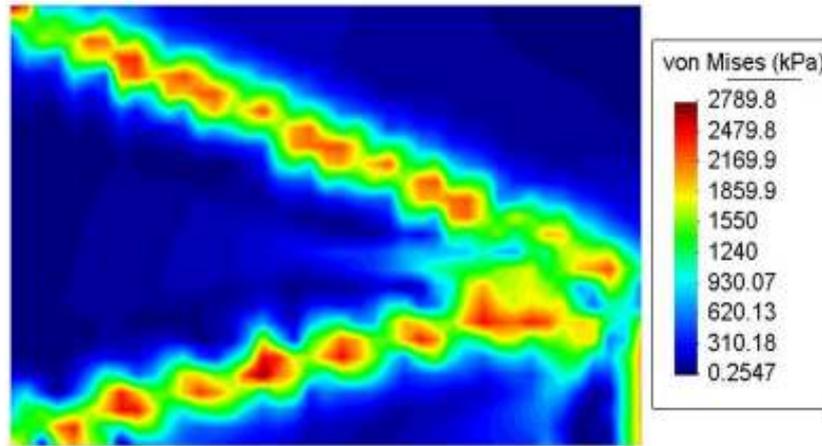


Figura 4.8 - Distribuição da tensão de von Mises nodalizada da topologia final do caso 1.

Nota-se que a maior parte dos valores da tensão de von Mises respeitou o valor da restrição de tensão ( $\sigma_{y_{PN}} = 2,37\text{MPa}$ ). Os valores de tensão superiores ao valor da restrição de tensão podem ser explicados pelo fato de a norma- $p$  ser uma média dos valores das tensões.

A Figura 4.9 mostra o comportamento da norma da tensão, da tensão máxima e da norma  $\sigma_{y_{PN}}$  da topologia final ao longo das iterações.

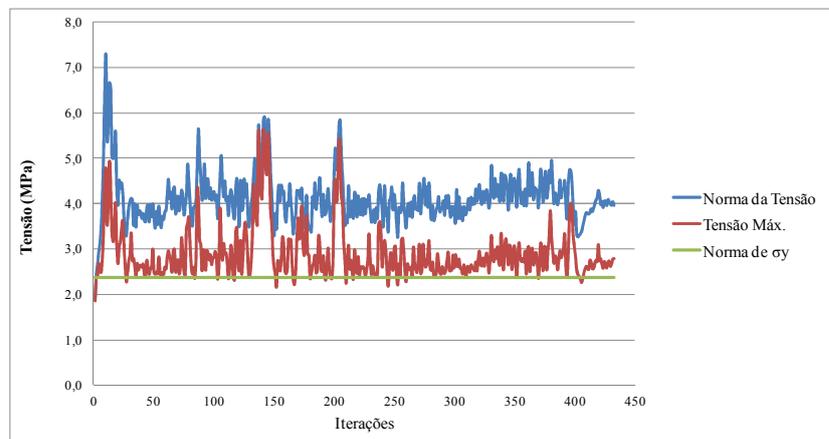


Figura 4.9 - Comportamento das tensões da topologia final ao longo das iterações no caso 1.

A partir da Figura 4.9, é possível observar que o valor da tensão máxima tendeu a se aproximar do valor da norma  $\sigma_{y_{PN}}$ , que foi a restrição imposta ao problema de otimização, cujo comportamento pode ser analisado na Figura 4.10. A restrição foi normalizada, de modo que o lado direito da desigualdade ( $Ax \leq b$ ) valesse sempre 1, o que melhora o desempenho do PLS.

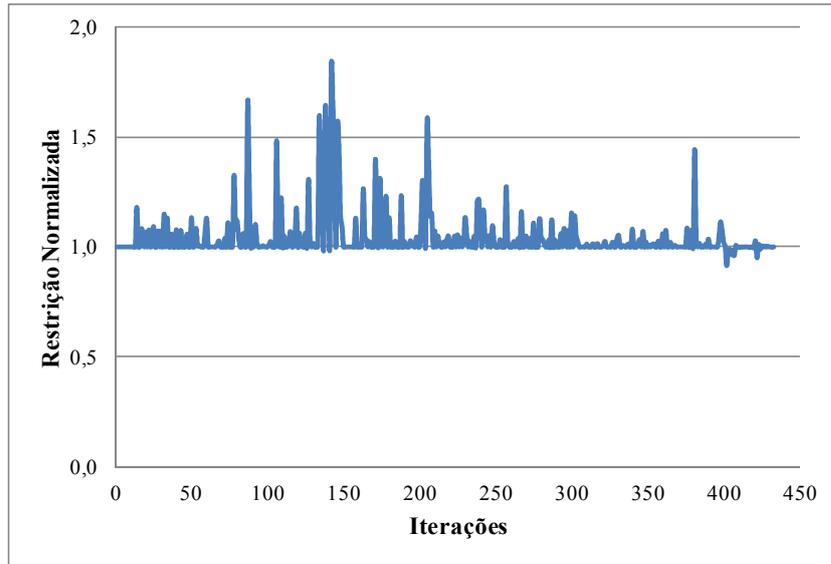


Figura 4.10 - Comportamento da restrição da topologia final ao longo das iterações no caso 1.

A Figura 4.10 demonstra que o algoritmo tendeu a respeitar a restrição imposta, uma vez que o valor da restrição foi sempre igual a 1 ou a valores bastante próximos a 1.

Na Figura 4.11, é apresentada a análise das tensões, feito pelo programa ANSYS, em uma interpretação da topologia final do caso 1 (Figura 4.7):

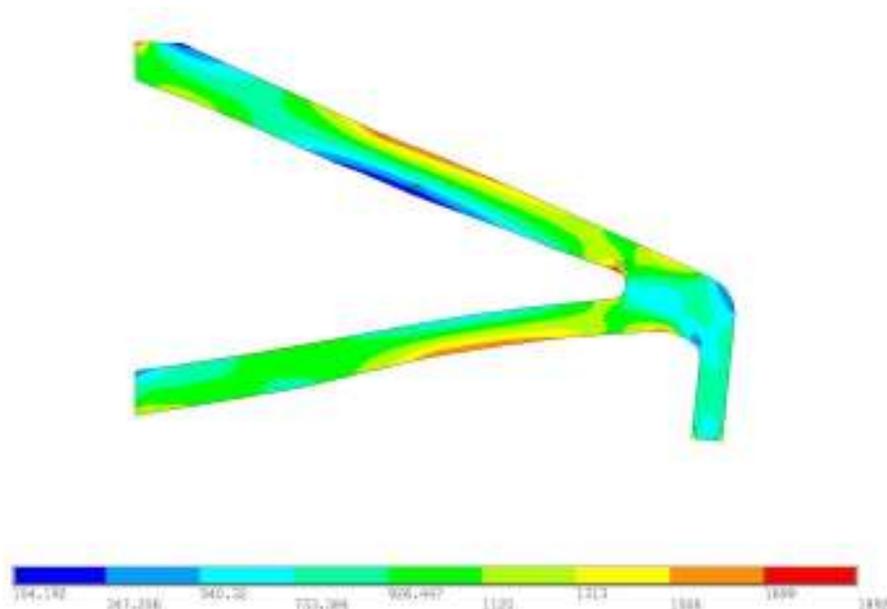


Figura 4.11 - Análise de tensões na estrutura interpretada.

Nota-se que o valor da tensão máxima de von Mises (1892 kPa) ficou abaixo do valor da tensão máxima encontrada na Figura 4.8 (2789,8 kPa), mas ficou próximo dos valores médios de tensão mostrados na mesma figura. Isso ocorreu porque foram removidos o

perfil serrilhado do contorno da estrutura, assim como os seus cantos vivos, o que eliminou os seus concentradores de tensão. Essa análise foi realizada somente para o caso 1.

#### 4.2.2 Segundo Caso

Neste segundo caso, a estrutura de proporção 8x5 foi submetida à flexão. Sua geometria e condições de contorno são mostradas na Figura 4.12:

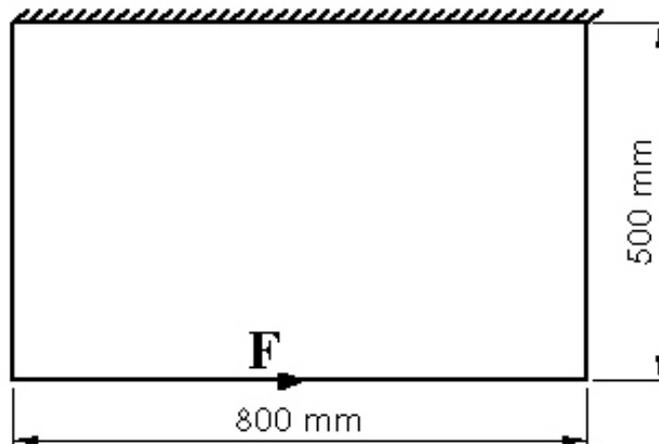


Figura 4.12 - Caso 2: geometria e condições de contorno da estrutura submetida à flexão.

Como no primeiro caso, a estrutura foi discretizada em uma malha de 1000 elementos finitos isoparamétricos bilineares não conformes de Taylor, com 1066 nós, o que resultou em um elemento de 20 mm x 20 mm. Os demais dados definidos para este segundo caso são apresentados na Tabela 4.2:

Tabela 4.2 - Dados do caso 2.

módulo de elasticidade (E)	1 MPa
coeficiente de Poisson	0,3
espessura	1 mm
tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	1 MPa
norma da tensão de escoamento ( $\sigma_{y_{PN}}$ )	2,37 MPa
força distribuída em 2 nós (área de 20 mm <sup>2</sup> )	60 N

Como no caso anterior, na primeira etapa do processo de otimização da estrutura, não foi aplicada nenhuma penalização da função objetivo, ou seja,  $p=1$  e  $\alpha=0$ . Também foi utilizada  $n_p=8$ , pelas mesmas razões expostas no caso 1, com filtro de densidade com raio de filtragem igual a 1,1 multiplicado pelo tamanho do elemento, isto é, raio de filtragem igual a 22 mm.

Iniciando-se com todos os elementos com densidade  $\rho=1$ , após 294 iterações, a função objetivo convergiu, obtendo-se a topologia mostrada na Figura 4.13.

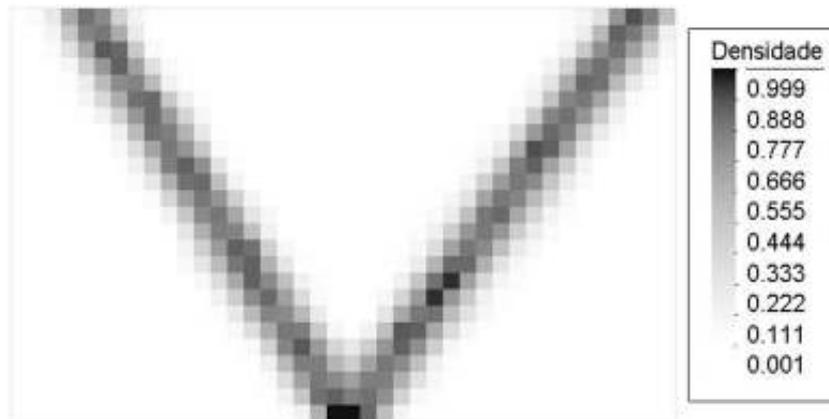


Figura 4.13 - Topologia do caso 2 sem penalização da função objetivo.

O volume inicial foi de  $0,4 \text{ m}^3$ , sendo que o algoritmo foi minimizando o volume até convergir para cerca de  $0,065 \text{ m}^3$ , resultando em uma estrutura com, aproximadamente, 16,25% do volume inicial, como pode ser observado na Figura 4.14.

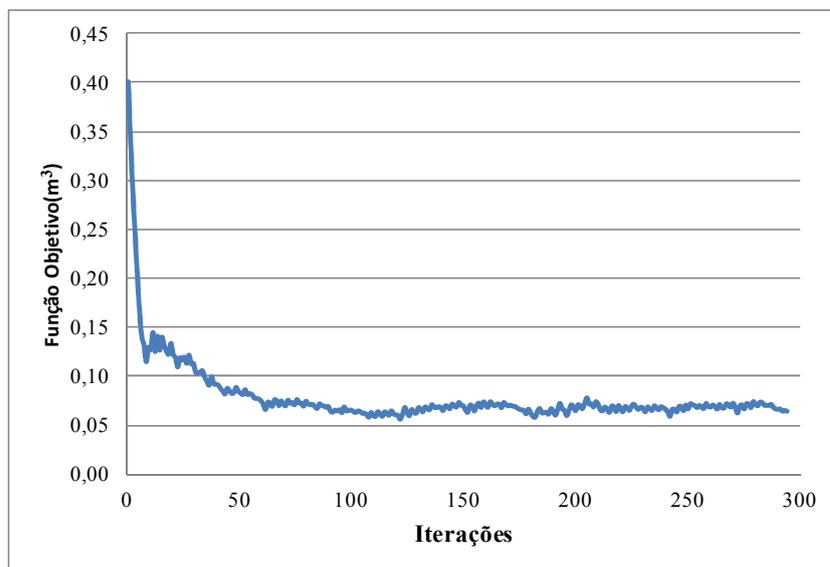


Figura 4.14 - Convergência da função objetivo sem penalização no caso 2.

Seguindo o procedimento adotado para o caso 1, a estrutura passou por uma segunda etapa de otimização, na qual a função objetivo foi penalizada com o expoente  $p=1/8$  do método da continuação, mantendo-se o parâmetro  $\alpha=0$ , com o intuito de reduzir as áreas com densidades intermediárias. Nessa segunda etapa, o algoritmo convergiu após 577 iterações, obtendo-se a topologia apresentada na Figura 4.15.

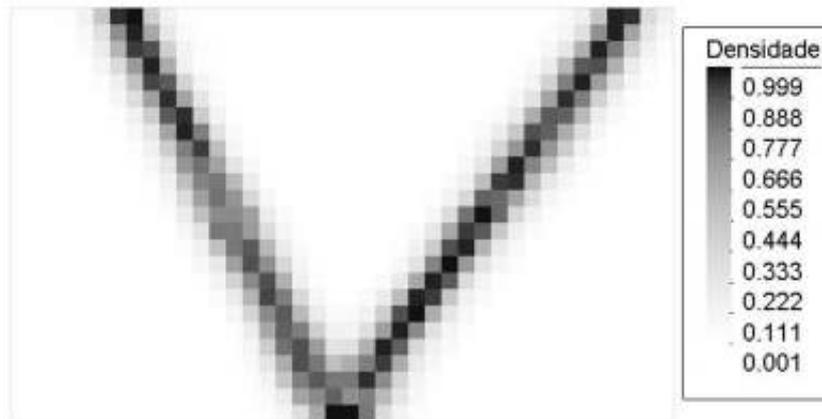


Figura 4.15 - Topologia do caso 2 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$  e  $\alpha=0$ ).

Na Figura 4.15, observa-se que as duas barras ainda apresentaram elementos com densidades intermediárias. Visando melhorar esse aspecto, na terceira etapa do processo de otimização, a função objetivo foi penalizada com  $p=1/8$  e  $\alpha=0,3$ , chegando-se, então, à seguinte estrutura final mostrada na figura 4.16 após 582 iterações:

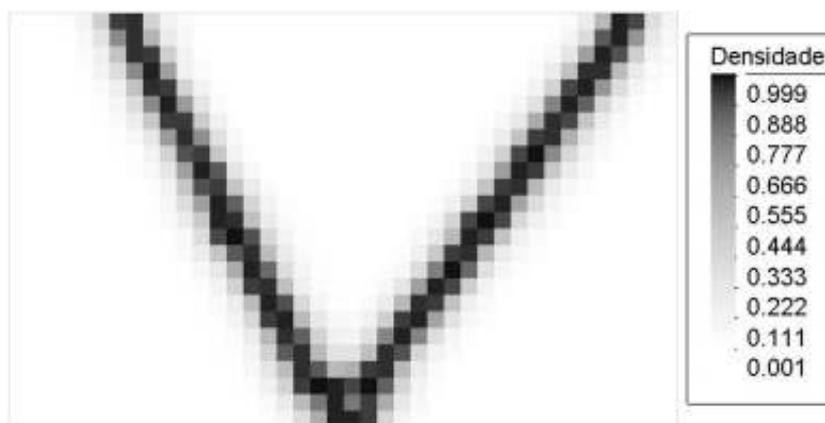


Figura 4.16 - Topologia final do caso 2 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$  e  $\alpha=0,3$ ).

A maior parte dos elementos da estrutura apresentou valor de densidade próximo a 1, melhorando a sua definição pela diminuição das regiões de cinza. A estrutura não ficou simétrica, porque, como dito anteriormente, a força foi aplicada em dois nós, o que impediu, considerando-se a malha de 41 nós no eixo horizontal, que ela fosse aplicada exatamente no centro da estrutura. Isso fez com que o algoritmo otimizasse a estrutura mais para o lado direito, para o qual a força estava mais deslocada, demonstrando o bom funcionamento do algoritmo. Por essa mesma razão, o algoritmo não distribuiu material formando barras a 45°, resultado analítico exato no caso de otimização de treliças com condições de contorno semelhantes [Rozvany *et al.*, 1995].

A distribuição da tensão de von Mises nodalizada para a topologia final obtida é mostrada na Figura 4.17, na qual se nota que os valores da tensão respeitaram o valor da restrição de tensão ( $\sigma_{y_{PN}} = 2,37 \text{ MPa}$ ), tendo sido superiores somente na região da estrutura em que a carga foi aplicada, o que não invalida o resultado, pois a violação da restrição ocorre somente na região da condição de contorno.

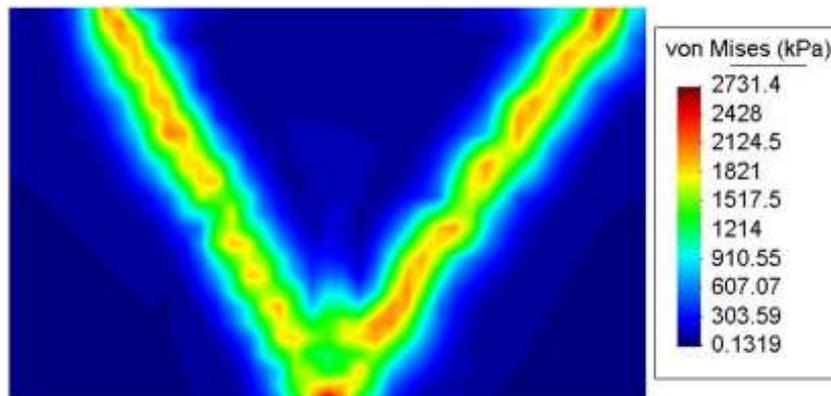


Figura 4.17 - Distribuição da tensão de von Mises nodalizada da topologia final no caso 2.

Constata-se, também neste segundo caso, que os valores da tensão máxima da topologia final tenderam a se aproximar do valor da norma  $\sigma_{y_{PN}}$ , como demonstra a Figura 4.18:

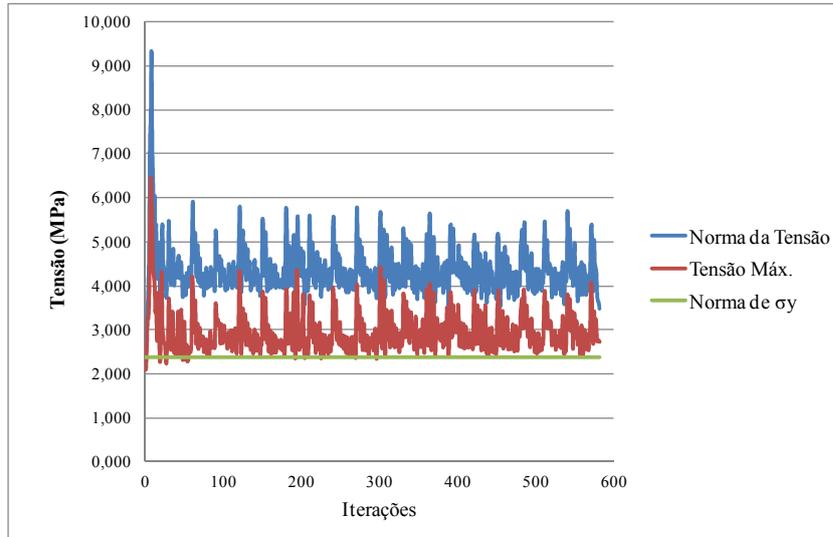


Figura 4.18 - Comportamento das tensões da topologia final ao longo das iterações no caso 2.

Na Figura 4.19, observa-se que o algoritmo sempre tendeu a 1 ou a valores próximos a 1, indicando que o mesmo buscou respeitar a restrição imposta ao longo das iterações:

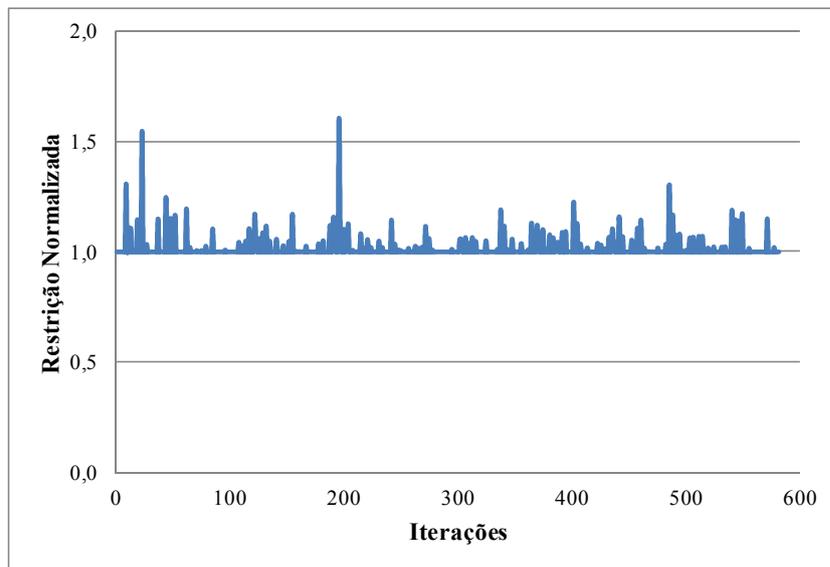


Figura 4.19 - Comportamento da restrição da topologia final ao longo das iterações no caso 2.

### 4.2.3 Terceiro Caso

A geometria e as condições de contorno do componente estrutural em formato de “L”, usado no caso 3, são mostradas na Figura 4.20.

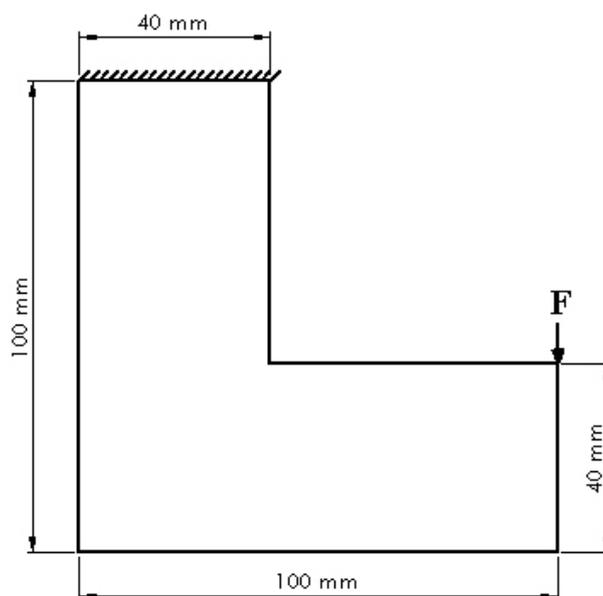


Figura 4.20 - Caso 3: geometria e condições de contorno da estrutura em “L”.

A estrutura em “L” foi discretizada em uma malha de 2304 elementos finitos isoparamétricos bilineares não conformes de Taylor, com 2425 nós, resultando em um elemento de 1,67 mm x 1,67 mm. Os demais dados definidos para este terceiro caso são apresentados na Tabela 4.3:

Tabela 4.3 - Dados do caso 3.

módulo de elasticidade (E)	1 MPa
coeficiente de Poisson	0,3
espessura	1 mm
tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	1 MPa
norma da tensão de escoamento ( $\sigma_{yPN}$ )	2,63 MPa
força distribuída em 3 nós (área de 3,34 mm <sup>2</sup> )	3 N

Diferentemente dos casos anteriores, na primeira etapa do processo de otimização neste terceiro caso, a função objetivo foi penalizada pelo Método da Continuação, isto é, com  $p=1/8$  e  $\alpha=0$ . Isso porque o algoritmo, testado sem a penalização, apresentou maior dificuldade para contornar a região do concentrador de tensão da estrutura em “L” (Figura 4.21). Vale destacar, contudo, que, sem a penalização, o algoritmo convergiu mais facilmente (Figura 4.22).

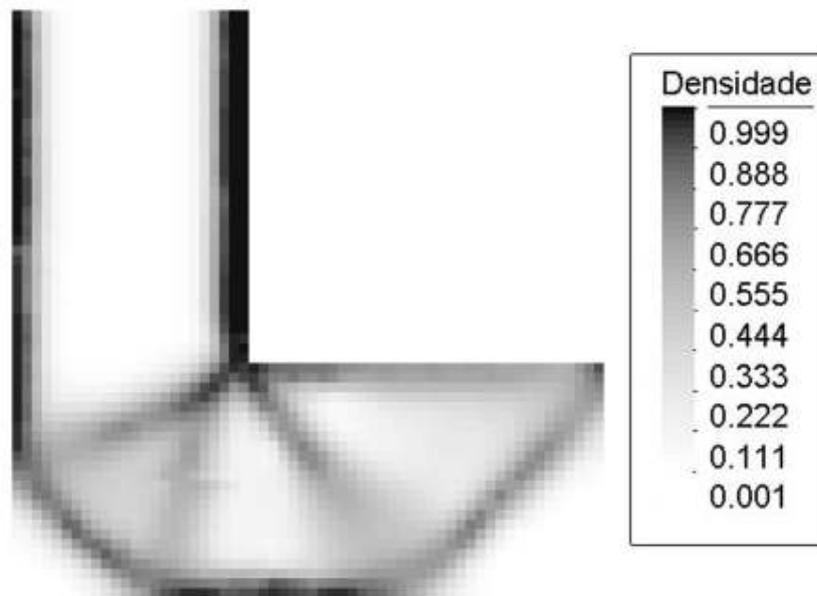


Figura 4.21 - Topologia do caso 3 sem penalização da função objetivo.

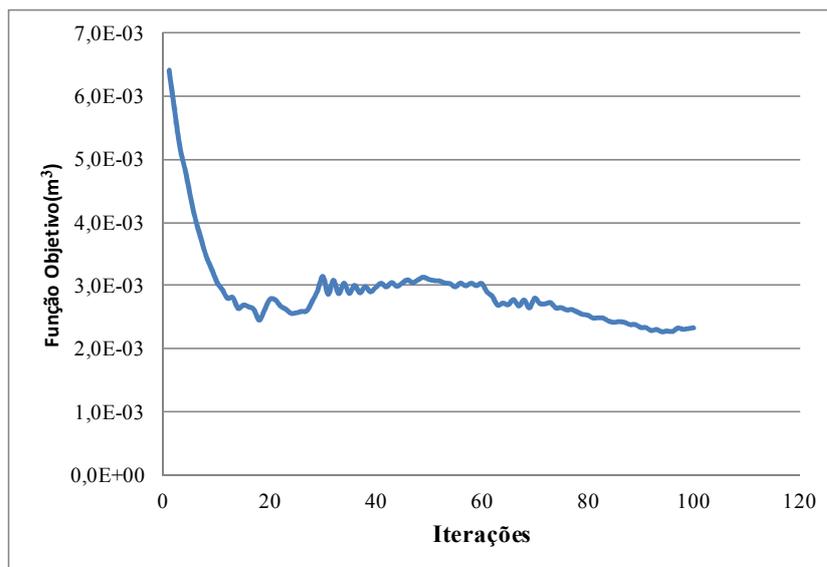


Figura 4.22 - Convergência da função objetivo sem penalização no caso 3.

Neste terceiro caso, foi aplicada  $n_p = 8$ , pelos motivos expostos no primeiro caso. Aplicou-se o filtro de densidade com raio de filtragem igual a 1,5 multiplicado pelo tamanho do elemento, ou seja, com um raio de 2,51 mm, de modo que, além dos vizinhos de aresta, também foram considerados os vizinhos de vértice (diagonais) de cada elemento.

Iniciando-se com todos os elementos com densidade  $\rho = 1$ , após 158 iterações, a função objetivo convergiu, obtendo-se a topologia mostrada na Figura 4.23.

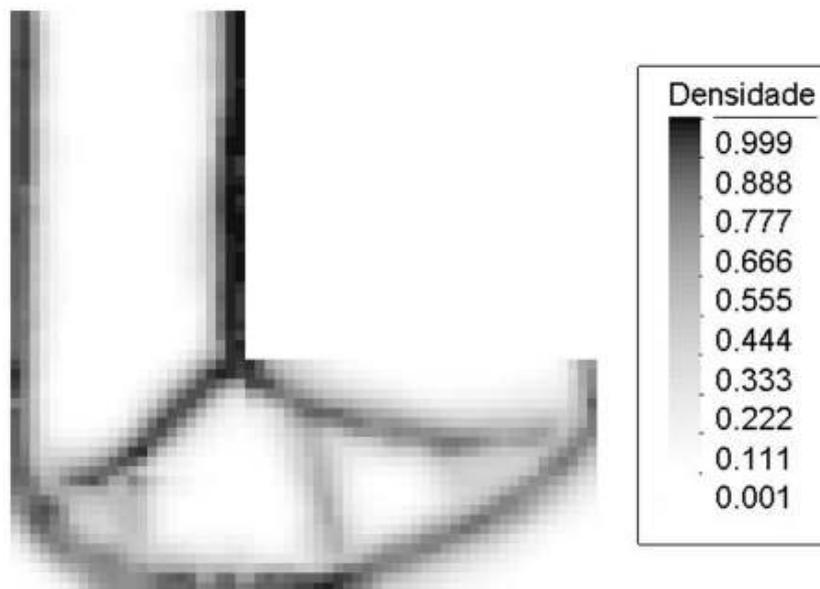


Figura 4.23 - Topologia do caso 3 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$  e  $\alpha=0$ ).

O volume inicial da estrutura foi de  $0,64 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ . O algoritmo foi minimizando o volume até convergir para, aproximadamente,  $4,95 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ , resultando em uma estrutura com cerca de 77,3% do volume inicial. O algoritmo teve maiores dificuldades para chegar à convergência, o que pode ser explicado pelo fato de a função objetivo ter sido penalizada na primeira etapa do processo de otimização. Esses dados são apresentados na Figura 4.24.

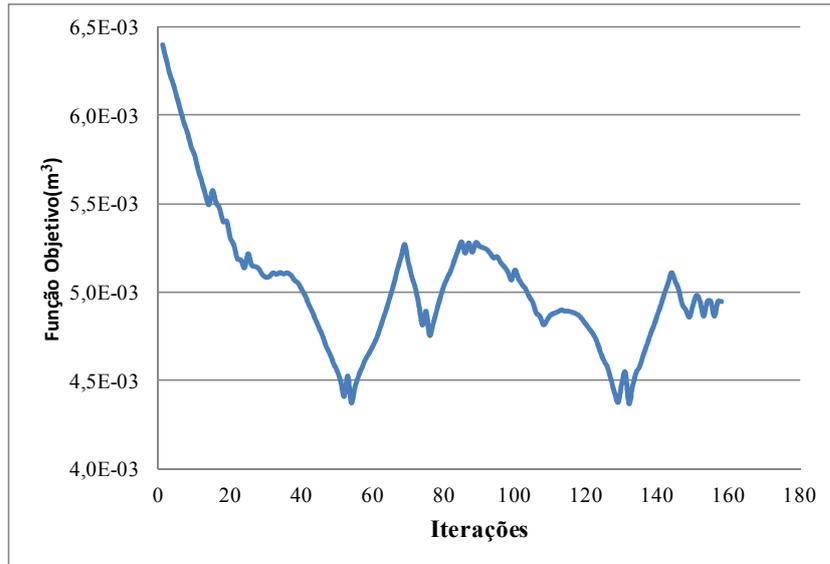


Figura 4.24 - Convergência da função objetivo com penalização no caso 3 ( $p=1/8$  e  $\alpha=0$ ).

Na segunda e última etapa do processo de otimização da estrutura em “L”, a função objetivo foi penalizada com o expoente  $p = 1/8$  do método da continuação e  $\alpha = 0,3$ , com o fim de diminuir as regiões com densidades intermediárias, obtendo-se, depois de 171 iterações, a topologia que aparece na Figura 4.25:

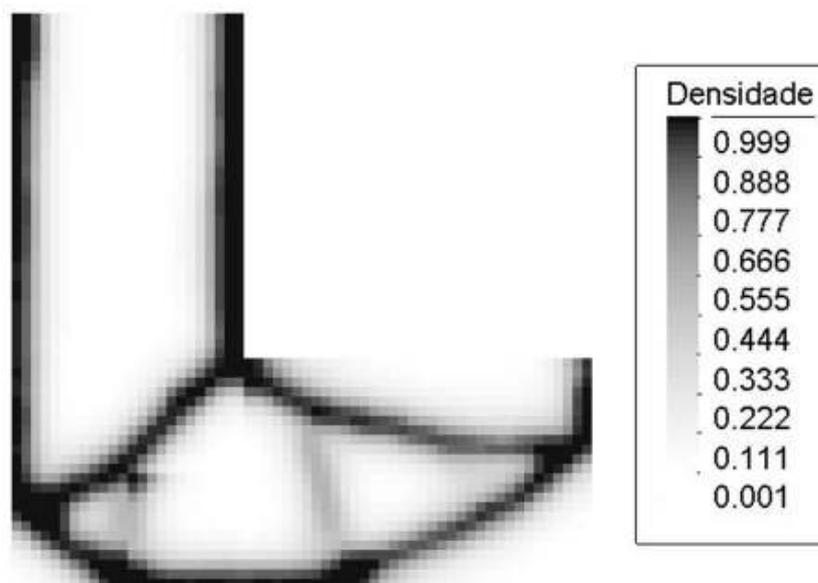


Figura 4.25 - Topologia do caso 3 com penalização da função objetivo ( $p=1/8$  e  $\alpha=0,3$ ).

Como pode ser observado a partir da geometria da estrutura obtida, o algoritmo não retirou totalmente o material da região de concentração de tensão, pois o arredondamento, que seria necessário para que a máxima tensão mecânica (a qual, em princípio, é infinita, devido

ao ângulo reto formado entre as arestas) se tornasse finita, não foi feito. Nota-se, ainda, que o arredondamento só foi iniciado após a formação do ângulo reto na estrutura.

O valor máximo da tensão de von Mises da topologia final ficou localizado na região do concentrador de tensão da estrutura, mas o seu valor não foi muito superior ao valor da restrição imposta ao problema ( $\sigma_{y_{PN}} = 2,63 \text{ MPa}$ ). Como pode ser visto na Figura 4.26, os demais valores de tensão ficaram bem distribuídos ao longo de toda topologia.

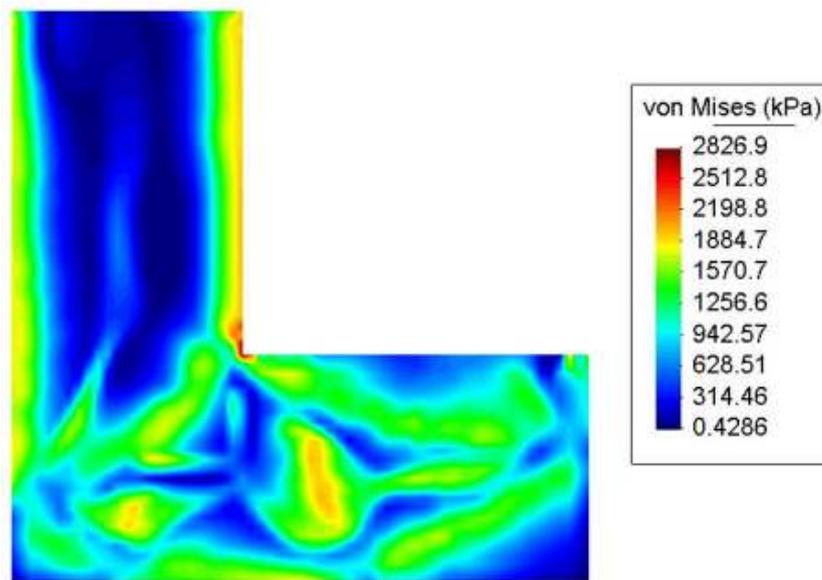


Figura 4.26 - Distribuição da tensão de von Mises nodalizada da topologia final no caso 3.

Nas Figuras 4.27 e 4.28, verifica-se que o algoritmo encontrou alguns picos de tensão ao longo das iterações, o que o levou a desrespeitar a restrição imposta. Contudo, após mais algumas iterações, o algoritmo conseguiu estabilizar-se novamente e chegar à convergência da função objetivo. Esses picos de tensão ocorreram, provavelmente, quando o algoritmo estava tentando contornar o problema do concentrador de tensão e chegar ao volume mínimo, conforme pode ser visto Figura 4.24.

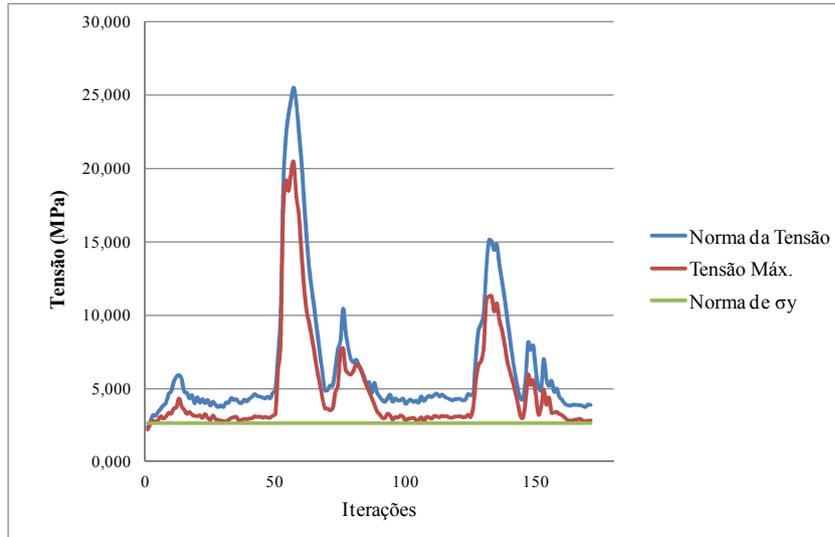


Figura 4.27 - Comportamento das tensões ao longo das iterações no caso 3.

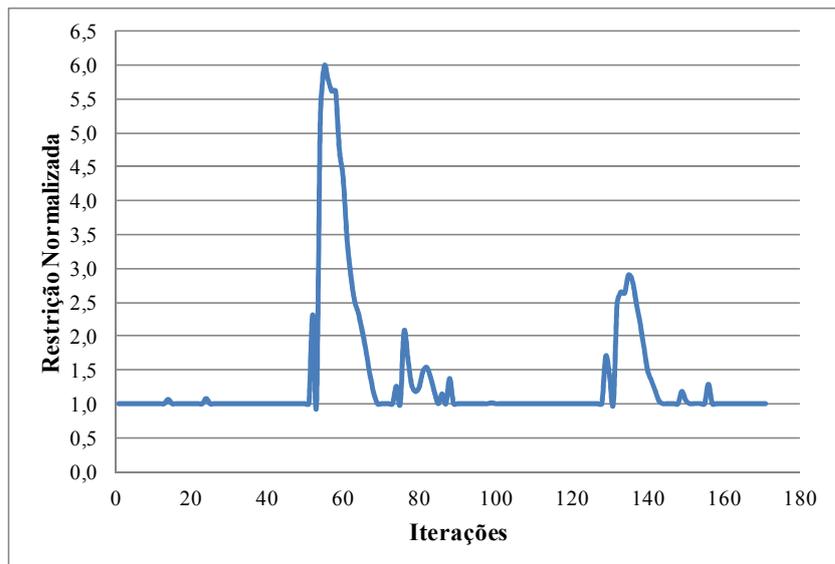


Figura 4.28 - Comportamento da restrição ao longo das iterações no caso 3.

A Figura 4.29 apresenta a topologia em algumas fases do processo de iteração do algoritmo.

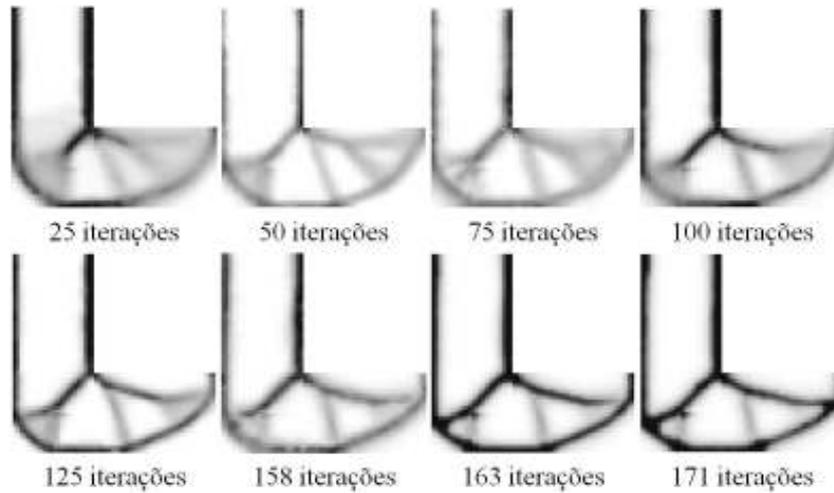


Figura 4.29 - Topologia do caso 3 ao longo do processo de iteração do algoritmo.

Para uma análise comparativa, a Figura 4.30 mostra os resultados apresentados para a otimização da estrutura em “L” por: (a) Pereira *et al.* [Pereira *et al.*, 2004]; (b) Stump [Stump, 2006]; (c) Guilherme [Guilherme, 2006]; (d) Le *et al.* [Le *et al.*, 2010]; (e) Farias *et al.* [Farias *et al.*, 2011]; e (f) Emmendoerfer [Emmendoerfer, 2011].

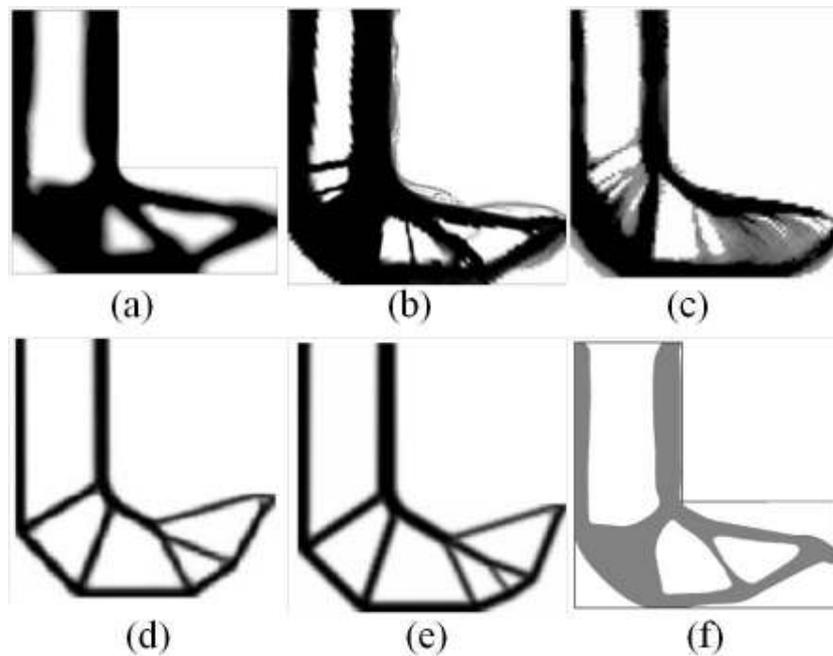


Figura 4.30 - Resultados da otimização da estrutura em “L” apresentados por alguns autores.

Conforme mostrado na Figura 4.30, esses autores, em suas respectivas formulações, conseguiram eliminar totalmente o concentrador de tensão.

## 5 CONCLUSÃO

O principal objetivo deste trabalho foi implementar um método de otimização topológica para problemas com restrição de tensão, seguindo o modelo proposto por Le *et al.* [Le *et al.*, 2010], no qual o SIMP é utilizado como método de relaxação da tensão, penalizando-se o tensor constitutivo, e a tensão global suavizada pela norma- $p$  é utilizada como restrição. A principal contribuição da formulação desenvolvida neste trabalho foi a utilização dos valores suavizados da tensão em todos os nós da malha, ao invés das medidas de tensões regionais, como empregado por Le *et al.* [Le *et al.*, 2010].

Os resultados obtidos com o processo de otimização nos casos 1 e 2, em que as estruturas não apresentavam concentradores de tensão, demonstraram que o algoritmo implementado atingiu os objetivos propostos neste trabalho, fornecendo topologias bem definidas, que atenderam à restrição de tensão imposta. Nota-se que houve a necessidade de serem empregadas mais duas etapas no processo de otimização, nas quais a função objetivo foi penalizada pelo método da continuação, a fim de serem diminuídas as regiões com densidades intermediárias.

No caso 3, em que foi usado um componente estrutural em formato de “L”, isto é, com concentrador de tensão para, justamente, testar a formulação de otimização topológica com restrição de tensão, o algoritmo desenvolvido gerou uma estrutura bem definida, respeitando a restrição imposta ao problema. Contudo, não eliminou totalmente o material da região de concentração de tensão, formando, nessa região, uma pequena área com ângulo reto, o que constitui indício de que a utilização dos valores de tensão suavizada em todos os nós da malha não é, ainda, o método mais adequado para a otimização topológica com restrição de tensão.

Algumas dificuldades encontradas no desenvolvimento da formulação apresentada estão associadas à grande dependência que os resultados têm em relação aos valores dos parâmetros de otimização utilizados pelo algoritmo, tais como, os valores do expoente da norma- $p$ , do raio de filtro e dos parâmetros de penalização da função objetivo. Como não foi possível escolher, de uma forma lógica, os valores desses parâmetros, porque o valor de qualquer um deles, uma vez alterado, influenciava o processo de otimização de uma maneira diferente, a escolha dos mesmos foi feita de maneira empírica.

O uso do MATLAB facilitou a programação do algoritmo, por possuir uma linguagem bastante simples e robusta e por incluir rotinas para a operação com matrizes, tornando a programação mais rápida e objetiva. Por outro lado, o MATLAB limitou a velocidade computacional, se comparada a outras linguagens compiladas, a exemplo da linguagem C ou C++, o que inviabilizou a aplicação do algoritmo em malhas mais refinadas, ou seja, com um maior número de elementos.

O uso da PLS conferiu uma certa sensibilidade ao algoritmo no que diz respeito à escolha dos valores utilizados para os limites móveis, pois, dependendo dos valores escolhidos, o algoritmo apresentava erro, deixando de completar o processo de otimização. Isso, muito provavelmente, devido ao comportamento altamente não linear da tensão. Esse problema talvez possa ser superado com a utilização de um algoritmo mais específico para problemas dessa natureza, tal como o MAM, proposto por Svanberg [Svanberg, 1987] e utilizado por Le *et al.* [Le *et al.*, 2010] e Farias *et al.* [Farias *et al.*, 2011], que chegaram a topologias melhores do que a encontrada neste trabalho, conforme pode ser visto na Figura 4.30 (d) e (e), respectivamente.

## 5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Algumas sugestões podem ser apontadas para melhorar a qualidade deste trabalho, dentre as quais:

- 1) implementar a formulação desenvolvida com o algoritmo MAM, proposto por Svanberg [Svanberg, 1987];
- 2) utilizar a formulação em uma linguagem compilada, tal como C ou C++, para melhorar o custo computacional e viabilizar o uso de malhas mais refinadas (com um maior número de elementos);
- 3) utilizar malhas de elementos finitos não uniformes, a fim de refiná-la nas regiões de concentração de tensão, buscando uma análise mais precisa das tensões; e
- 4) implementar a formulação para estruturas tridimensionais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arora, J. S., **Introduction to Optimum Design**. McGraw-Hill, 2004.
- Atkin, R. J. e Fox, N., **Introduction to the Theory of Elasticity**. Longman, 1<sup>a</sup> ed., 1980.
- Bathe, K. J., **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, 1996.
- Bendsøe M. P. e Sigmund, O., **Topology Optimization - Theory, Methods and Applications**. Springer, pp. 370, 2003.
- Bruns, T. E. e Tortorelli, D. A., Topology Optimization of Nonlinear Elastic Structures and Compliant Mechanisms. **Comput Methods Appl Mech Eng** 190(26-27):3443–3459, 2001.
- Cardoso, E. L., Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas. Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2000.
- Cardoso, E. L. e Fonseca, J. S. O., **Intermediate Density Reduction and Complexity Control in the Topology Optimization**, 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, São Paulo, Brazil 1999.
- Cardoso E. L. e Fonseca, J. S. O., Complexity Control in the Topology Optimization of Continuum Structures. **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.** (3):293–301, 2003.
- De Leon, D. M., Otimização Estrutural de Placas Compostas Laminadas Sujeitas a Efeitos Aeroelásticos. Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2011.
- De Navarra, E. O. I., **Calculo de Estructuras por el Metodo de Elementos Finitos – Análisis Estático Lineal**. Artes Gráficas Torres, 2<sup>a</sup> ed., 1995.
- Duysinx, P. e Bendsøe, M. P., Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constraints. **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, vol. 43, n° 2, pp. 1453-1478, 1998.
- Emmendoerfer J., H., Problema de Otimização Estrutural com Restrição de Tensão Local Usando o Método *Level Set*. Dissertação de Mestrado, UFSC, 2011.

Farias, C. J. M., Cardoso, E. L. e Rojas, P. A. M., Topology Optimization with Stress Constraints Using Superconvergent Patch Recovery. **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.** p. 175–195, 2011.

Fonseca, J. S. O., **Design of Microstructures of Periodic Composite Materials.** PhD Thesis, University of Michigan, 1997.

Guilherme, C. E. M., Otimização Topológica e Cálculo do Gradiente de Forma para Estruturas Submetidas à Restrição de Fadiga. Tese de Doutorado, PROMEC-UFRGS, 2006.

Haber, R. B., Bendsøe, M. P. e Jog, C., A New Approach to Variable- Topology Shape Design Using A Constraint on the Perimeter. **Structural Optimization**, vol. 11, pp. 1-12, 1996.

Haftka, R. e Gürdal, Z., **Elements of Structural Optimization.** Kluwer Academic Publishers, 3ª edição, 1992.

Hinton, E. e Campbell J. S., Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method. **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, vol. 8, pp. 461-480, 1974.

Hughes, T. J. R., The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice-Hall International, Inc., 1987.

Le, C., Norato, J., Bruns, T., Ha, C. e Tortorelli, D., Stress-based Topology Optimization for Continua. **Struct Multidisc Optim**, 41:605-620, 2010.

Pereira, J. T., Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha do Material. Tese de Doutorado, UFSC, 2001.

Pereira, J. T., Fancello, E. A. e Barcellos, C. S., Topology Optimization of Continuum Structures with Material Failure Constraints. **Struct Multidisc Optim**, 26(1–2):50–66, 2004.

Rozvany, G. I. N., Bendsøe, M. P. e Kirsch, U., Layout Optimization of Structures. **Appl. Mech. Rev.**, vol. 48, nº 2, pp. 41-119, 1995.

Sant'Anna, H. M., Otimização Topológica de Estruturas Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão. Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2002.

Sigmund, O., Petersson, J., Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-Dependencies and Local Minima. **Structural Optimization**, vol. 16, pp. 68-75, 1998.

Sigmund, O., Morphology-based Black and White Filters for Topology Optimization. **Struct Multidisc Optim**, 33(4-5):401-424, 2007.

Silva, E. C. N., **Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos**. Apostila. Escola Politécnica da USP, 2003. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/a1-5215.pdf>> acesso em abril de 2011.

Souza, C. E., Otimização em Dois Níveis da Orientação e da Topologia de Cascas Laminadas. Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2003.

Stump, F. V., Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional Sujeitas a Restrição de Tensão. Dissertação de Mestrado, USP, 2006.

Svanberg, K., The Method of Moving Asymptotes – A New Method for Structural Optimization. **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, vol. 24, pp. 359-373, 1987.

Swan, C. C. e Kosaka, I., Homogeneization-Based Analysis and Design of Composites. **Computers and Structures**, vol. 64, n° 1-4, pp. 603-621, 1997.