

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS CONCENTRADOS DE SUSPENSÃO
PARA CONFORTO E SEGURANÇA VEICULAR

por

Luis Roberto Centeno Drehmer

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre

2012

OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS CONCENTRADOS DE SUSPENSÃO PARA CONFORTO E SEGURANÇA VEICULAR

por

Luis Roberto Centeno Drehmer
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Co-orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Aprovada por:

Prof. Dr. Nilson Barbieri, PPGEM / PUCPR

Prof. Dr. Inácio Benvegno Morsch, PPGEC / UFRGS

Profa. Dra. Letícia Fleck Fadel Miguel, PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre

2012

*É preciso evitar o terrorismo da teoria
tanto quanto a relação parasitária
com os corpos teóricos esclerosados,
o bloqueio da pesquisa tanto quanto a
erudição interesseira. – Paul de
Bruyne, Jacques Herman, Marc de
Schoutheete (1991, p. 104).*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à *vida*, porque sem a graça de viver não poderíamos realizar os nossos sonhos.

Aos meus pais *Lourdes Terezinha Centeno Drehmer* e *Luis Carlos Melo Drehmer*, que, apesar dos momentos mais difíceis, sempre me disseram para escolher a vida e, então, viver.

À *Fabiana Mazzarollo*, que me ofereceu afeto e carinho em todos os momentos e contribuiu para fazer as referências corretamente.

Ao orientador, *Prof. Dr. Herbert Martins Gomes*, pela amizade, conhecimento e orientação.

Ao co-orientador, *Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas*, pela amizade, conhecimento e orientação.

À Comissão de Avaliação composta pelos Profs. Drs. Nilson Barbieri, Inácio Benvegnu Morsch e Leticia Fleck Fadel Miguel.

Ao *CNPq* e a *CAPES* pelo apoio financeiro dado à pesquisa.

DREHMER, L. R. C. **Otimização de Parâmetros Concentrados de Suspensão para Conforto e Segurança Veicular**. 2012. 98 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

RESUMO

O presente trabalho avalia a otimização de parâmetros concentrados de suspensão em veículos e considera a importância deste processo para minimizar a aceleração vertical *rms* transmitida para garantir conforto e segurança ao motorista. Dessa forma, o trabalho objetiva desenvolver uma modelagem capaz de representar o veículo completo para então otimizar os parâmetros de rigidez e amortecimento no domínio da frequência e identificar, em torno do ponto ótimo, quais desses parâmetros mais influenciam nessa minimização. Para atingir esses objetivos, dois modelos veiculares (com dois e oito graus de liberdade respectivamente) são propostos conforme as orientações das normas BS 6841 (1987), ISO 8608 (1995) e ISO 2631 (1997). Os modelos são analisados linearmente e otimizados por um algoritmo heurístico de enxame de partículas. Finalmente, os resultados de rigidez e amortecimento da suspensão são obtidos e reduzem em até 35,3% a aceleração vertical *rms* transmitida ao motorista. Por meio de uma análise de sensibilidade, as variáveis de projeto que mais contribuem para essa redução são identificadas.

PALAVRAS-CHAVE: Modelo veicular. Domínio da frequência. Conforto. Segurança. Otimização por enxame de partículas.

DREHMER, L. R. C. **Optimization of Lumped Parameters of Suspension for Vehicle Comfort and Safety**. 2012. 98 pages. Monograph (Master Thesis of Engineering Master) – Mechanical Engineering Department, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ABSTRACT

The present work evaluates the optimization of lumped parameters of suspension on vehicles and considers the importance of this process to minimize the rms vertical acceleration transmitted to ensure comfort and safety to the driver. Thus, this work aims to develop a model able to represent the whole vehicle and, then, optimize the parameters of stiffness and damping in the frequency domain and identify, around the optimal point, those parameters which most influence in this minimization. To achieve these goals, two vehicle models (with two and eight degrees of freedom respectively) are proposed according to the guidelines of the standards BS 6841 (1987), ISO 8608 (1995) and ISO 2631 (1997). The models are linearly analyzed and optimized by a heuristic algorithm of particle swarm. Finally, the results of stiffness and damping of suspension are obtained and reduces up to 35,3% of rms vertical acceleration transmitted to the driver. Through a sensitivity analysis, the design variables that most contribute to this reduction are identified.

KEYWORDS: Vehicle Model. Frequency Domain. Comfort. Safety. Particle Swarm Optimization.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 JUSTIFICATIVA.....	2
1.2 OBJETIVOS	3
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	3
2 REVISÃO DE LITERATURA	5
2.1 MODELOS VEICULARES	5
2.2 PERFIS DE IRREGULARIDADES DA PISTA.....	8
2.2.1 Modelo Teórico dos Perfis de Irregularidades	8
2.2.2 Descrição Matemática dos Perfis de Irregularidades	13
2.2.3 Validade do Intervalo de Integração dos Perfis de Irregularidades	17
2.3 ALGORITMO DE ENXAME DE PARTÍCULAS	18
2.3.1 Exemplo Vetorial e Pseudocódigo do Algoritmo de Enxame de Partículas	21
2.4 CONFORTO E SEGURANÇA VEICULAR.....	23
3 MODELO PROPOSTO	27
3.1 MODELO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE	27
3.1.1 Considerações e Hipóteses	28
3.1.2 Aplicabilidade do Modelo	28
3.1.3 Formulação Matemática para Análise Espectral do Modelo de ¼ Veículo	29
3.2 MODELO DE OITO GRAUS DE LIBERDADE	31
3.2.1 Considerações e Hipóteses	33
3.2.2 Aplicabilidade do Modelo	34
3.2.3 Modelo do Assento sob Abordagem das Equações de Movimento	34
3.2.4 Modelo da Carroceria sob Abordagem das Equações de Movimento	35
3.2.5 Representação Matricial do Modelo Completo	38
3.2.6 Formulação Matemática para Análise Espectral do Modelo Completo	43
4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA	50
4.1 SIMULAÇÃO DO MODELO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE.....	50
4.2 SIMULAÇÃO DO MODELO DE OITO GRAUS DE LIBERDADE.....	51
4.3 FLUXOGRAMA	52
4.4 PSEUDOCÓDIGOS	53
4.5 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	56

5 ANÁLISE DE DADOS E DISCUSSÃO DE RESULTADOS.....	57
5.1 RESULTADOS DO MODELO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE.....	57
5.2 RESULTADOS DO MODELO DE OITO GRAUS DE LIBERDADE.....	60
5.2.1 Análise e Discussão dos Resultados	64
5.2.2 Análise da Hipótese de Não Descolamento do Pneu com a Pista	71
6 CONCLUSÕES.....	74
REFERÊNCIAS.....	76
APÊNDICE A – TRANSFORMADA DE FOURIER.....	80
APÊNDICE B – QUADRATURA DE GAUSS-KRONROD.....	81

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Esboço da descrição da pista	9
Figura 2.2 – Parâmetros da descrição da pista	11
Figura 2.3 – Representação vetorial do algoritmo de enxame de partículas	22
Figura 3.1 – Modelo esquemático de dois graus de liberdade	27
Figura 3.2 – Modelo esquemático do veículo com o assento	32
Figura 3.3 – Modelo esquemático do assento	35
Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo	52
Figura 5.1 – Aceleração vertical <i>rms</i> transmitida pelo número de iterações	64
Figura 5.2 – Sensibilidade das variáveis de projeto	66
Figura 5.3 – Condições para descolamento do pneu com a pista	71
Figura 5.4 – Histórico de $u - u_b + \delta_{est}$ para $v = 50$ m/s num perfil da Classe G	73

LISTA DE TABELAS E QUADROS

Tabelas

Tabela 2.1 – Qualidade da pista para padrões europeus	15
Tabela 2.2 – Escala de desconforto para padrões europeus	25
Tabela 5.1 – Comparação entre os resultados obtidos e a literatura consultada	58
Tabela 5.2 – Parâmetros de entrada e variáveis de projeto	62
Tabela 5.3 – Parâmetros de entrada adicionais	63
Tabela 5.4 – Frequências naturais do sistema otimizado e não otimizado	64
Tabela 5.5 – Parâmetros otimizados em função do perfil de pista Classe G	67
Tabela 5.6 – Parâmetros otimizados em função do perfil de pista Classe E	69
Tabela 5.7 – Parâmetros otimizados em função do perfil de pista Classe A	70

Quadros

Quadro 2.1 – Pseudocódigo da sub-rotina do <i>PSO</i>	22
Quadro 2.2 – Causas de desconforto no assento	25
Quadro 4.1 – Pseudocódigo do modelo de dois graus de liberdade	53
Quadro 4.2 – Pseudocódigo do modelo de oito graus de liberdade	54
Quadro 5.1 – Minimização de $\sigma_{Z_1}^2$	57
Quadro 5.2 – Minimização da aceleração vertical <i>rms</i> transmitida	59
Quadro 5.3 – Minimização da aceleração vertical <i>rms</i> transmitida	61

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres Latinos

a	Distância entre o eixo dianteiro e o centro de gravidade	[m]
b	Distância entre o eixo traseiro e o centro de gravidade	[m]
C	Matriz de amortecimento do sistema	[Ns/m]
c_1	Constante cognitiva da partícula i	[Adimensional]
c_2	Constante social do enxame	[Adimensional]
C_a	Amortecimento do assento	[Ns/m]
CV	Coefficiente de variação	[Adimensional]
CV_{min}	Coefficiente de variação mínimo	[Adimensional]
C_{12}	Amortecimento da suspensão dianteira esquerda	[Ns/m]
C_{22}	Amortecimento da suspensão dianteira direita	[Ns/m]
C_{32}	Amortecimento da suspensão traseira esquerda	[Ns/m]
C_{42}	Amortecimento da suspensão traseira direita	[Ns/m]
E	Valor esperado	[Adimensional]
$E[Z^2]$	Variância de uma função qualquer Z	[Unidade ²]
\mathcal{F}	Transformada de Fourier	[Adimensional]
$F(\omega)$	Função qualquer no domínio da frequência	[rad/s]
$f(t)$	Vetor de forças externas	[N]
$f(x_i)$	Função objetivo	[Unidade]
$f_d(t)$	Função temporal de irregularidades dianteira	[s]
$f_g(t)$	Vetor de forças inerciais	[N]
$f_m(t)$	Vetor de forças modais	[N]
$f_r(t)$	Função temporal de irregularidades do perfil da pista	[s]
$f_t(t)$	Função temporal de irregularidades traseira	[s]
$G(n)$	Densidade espectral unilateral	[m ³ /ciclo]
$g(n)$	Função de coerência	[m ³ /ciclo]
$\vec{g}(t)$	Melhor posição do enxame	[m]
$g_j(t)$	Melhor posição do enxame da variável de projeto j	[m]
G_0	Densidade espectral unilateral específica	[m ³ /ciclo]

$G_z(n)$	Densidade espectral unilateral vertical	[m ³ /ciclo]
$G_z(\omega)$	Densidade espectral unilateral vertical	[m ³ /rad]
H	Matriz da função de resposta em frequência do sistema	[Adimensional]
$H_1(\omega)$	Função de resposta de frequência	[Adimensional]
$H_2(\omega)$	Função de resposta de frequência	[Adimensional]
H_m	Matriz da função de resposta em frequência modal	[Adimensional]
H_m[*]	Conjugado da matriz H_m	[Adimensional]
I	Matriz identidade	[Adimensional]
<i>i</i>	Número imaginário	[Adimensional]
I_{sx}	Momento de inércia de massa de rolagem	[kgm ²]
I_{sy}	Momento de inércia de massa de arfagem	[kgm ²]
K	Matriz de rigidez do sistema	[N/m]
K_a	Rigidez do assento	[N/m]
K_e	Matriz de rigidez elástica de entrada do sistema	[N/m]
K_{11}	Rigidez do pneu dianteiro esquerdo	[N/m]
K_{21}	Rigidez do pneu dianteiro direito	[N/m]
K_{31}	Rigidez do pneu traseiro esquerdo	[N/m]
K_{41}	Rigidez do pneu traseiro direito	[N/m]
K_{12}	Rigidez da suspensão dianteira esquerda	[N/m]
K_{22}	Rigidez da suspensão dianteira direita	[N/m]
K_{32}	Rigidez da suspensão traseira esquerda	[N/m]
K_{42}	Rigidez da suspensão traseira direita	[N/m]
<i>l</i>	Largura da carroceria	[m]
m_a	Massa do assento	[kg]
m_c	Massa da carroceria	[kg]
m_p	Número total de partículas	[Adimensional]
m_1	Massa da suspensão dianteira esquerda	[kg]
m_2	Massa da suspensão dianteira direita	[kg]
m_3	Massa da suspensão traseira esquerda	[kg]
m_4	Massa da suspensão traseira direita	[kg]
M	Matriz de massa do sistema	[kg]

n	Número de onda na frequência espacial	[ciclos/m]
n_0	Número de onda na frequência espacial especificado	[ciclos/m]
n_p	Número total de variáveis de projeto	[Adimensional]
$\vec{p}_i(t)$	Melhor posição da partícula i	[m]
$p_{i,j}(t)$	Melhor posição da partícula i da variável de projeto j	[m]
q_1	Deslocamento vertical dianteiro esquerdo da pista	[m]
q_2	Deslocamento vertical dianteiro direito da pista	[m]
q_3	Deslocamento vertical traseiro esquerdo da pista	[m]
q_4	Deslocamento vertical traseiro direito da pista	[m]
\mathcal{R}	Função de autocorrelação	[Adimensional]
\mathcal{R}_d	Função de autocorrelação dianteira	[Adimensional]
\mathcal{R}_D	Função de autocorrelação direita	[Adimensional]
\mathcal{R}_{DE}	Função de autocorrelação direita esquerda	[Adimensional]
\mathcal{R}_E	Função de autocorrelação esquerda	[Adimensional]
\mathcal{R}_{ED}	Função de autocorrelação esquerda direita	[Adimensional]
\mathcal{R}_{fm}	Matriz da autocorrelação das forças modais	[Adimensional]
\mathcal{R}_t	Função de autocorrelação	[Adimensional]
$S(n)$	Densidade espectral de uma função qualquer	[m ³ /ciclo]
S_D	Densidade espectral do lado direito	[m ³ /rad]
S_E	Densidade espectral do lado esquerdo	[m ³ /rad]
S_{fm}	Matriz da densidade espectral das forças modais	[m ³ /rad]
S_η	Matriz da densidade espectral de deslocamentos modais	[m ³ /rad]
S_u	Matriz da densidade espectral de deslocamentos	[m ³ /rad]
$S_{u_b}(\omega)$	Matriz da densidade espectral de deslocamentos da base	[m ³ /rad]
$S_X(n)$	Densidade espectral cruzada	[m ³ /ciclo]
T	Período	[s]
Δt	Intervalo de tempo da defasagem de rodas	[s]
$\mathbf{u}(t)$	Vetor de deslocamentos do sistema no tempo	[m]
$\dot{\mathbf{u}}(t)$	Vetor de velocidades do sistema no tempo	[m/s]
$\ddot{\mathbf{u}}(t)$	Vetor de acelerações do sistema no tempo	[m/s ²]

$\mathbf{u}_b(t)$	Vetor de deslocamentos da base do sistema	[m]
v	Velocidade linear do veículo	[m/s]
$\vec{V}_i(t)$	Velocidade da partícula i no tempo t	[m/s]
$v_{i,j}(t)$	Velocidade atual da partícula i da variável de projeto j	[m/s]
$v_{i,j}(t + 1)$	Velocidade futura da partícula i da variável de projeto j	[m/s]
$\vec{X}_i(t)$	Posição da partícula i no tempo t	[m]
$x_{i,j}(t)$	Posição atual da partícula i da variável de projeto j	[m]
$x_{i,j}(t + 1)$	Posição futura da partícula i da variável de projeto j	[m]
x_j	Vetor de variáveis de projeto	[Adimensional]
W_b	Distância entre eixos	[m]
w	Expoente unilateral da função $G(n)$ do perfil de pista	[Adimensional]
w_1	Expoente bilateral da função $G(n)$ do perfil de pista	[Adimensional]
w_2	Expoente bilateral da função $G(n)$ do perfil de pista	[Adimensional]
w_p	Momento ou inércia da partícula i	[Adimensional]
w_1	Coefficiente do perfil da pista de irregularidades	[Adimensional]
w_2	Coefficiente do perfil da pista de irregularidades	[Adimensional]
w_p	Inércia da partícula	[Adimensional]
\mathbf{Z}	Matriz das razões de amortecimento do sistema	[Adimensional]
$z(x, y)$	Irregularidades verticais	[m]
z_a	Deslocamento vertical do assento	[m]
\dot{z}_a	Velocidade vertical do assento	[m/s]
\ddot{z}_a	Aceleração vertical do assento	[m/s ²]
z_c	Deslocamento vertical da carroceria	[m]
\dot{z}_c	Velocidade vertical da carroceria	[m/s]
\ddot{z}_c	Aceleração vertical da carroceria	[m/s ²]
\ddot{z}_1	Aceleração vertical da suspensão dianteira esquerda	[m/s ²]
\ddot{z}_2	Aceleração vertical da suspensão dianteira direita	[m/s ²]
\ddot{z}_3	Aceleração vertical da suspensão traseira esquerda	[m/s ²]
\ddot{z}_4	Aceleração vertical da suspensão traseira direita	[m/s ²]
z_{11}	Deslocamento vertical do pneu dianteiro esquerdo	[m]

z_{21}	Deslocamento vertical do pneu dianteiro direito	[m]
z_{31}	Deslocamento vertical do pneu traseiro esquerdo	[m]
z_{41}	Deslocamento vertical do pneu traseiro direito	[m]
z_{12}	Deslocamento vertical da suspensão dianteira esquerda	[m]
z_{22}	Deslocamento vertical da suspensão dianteira direita	[m]
z_{32}	Deslocamento vertical da suspensão traseira esquerda	[m]
z_{42}	Deslocamento vertical da suspensão traseira direita	[m]
\dot{z}_{11}	Velocidade vertical do pneu dianteiro esquerdo	[m/s]
\dot{z}_{21}	Velocidade vertical do pneu dianteiro direito	[m/s]
\dot{z}_{31}	Velocidade vertical do pneu traseiro esquerdo	[m/s]
\dot{z}_{41}	Velocidade vertical do pneu traseiro direito	[m/s]
\dot{z}_{12}	Velocidade vertical da suspensão dianteira esquerda	[m/s]
\dot{z}_{22}	Velocidade vertical da suspensão dianteira direita	[m/s]
\dot{z}_{32}	Velocidade vertical da suspensão traseira esquerda	[m/s]
\dot{z}_{42}	Velocidade vertical da suspensão traseira direita	[m/s]

Caracteres Gregos

ξ_x	Incremento na direção x	[m]
φ	Número de onda angular	[rad/m]
λ	Comprimento de onda	[m]
θ	Deslocamento angular de arfagem	[rad]
$\dot{\theta}$	Velocidade angular de arfagem	[rad/s]
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular de arfagem	[rad/s ²]
ϕ	Deslocamento angular de rolagem	[rad]
$\dot{\phi}$	Velocidade angular de rolagem	[rad/s]
$\ddot{\phi}$	Aceleração angular de rolagem	[rad/s ²]
Φ	Matriz modal dos modos de vibração do sistema	[Adimensional]
ζ	Razão de amortecimento	[Adimensional]
η	Deslocamento modal	[m]
$\dot{\eta}$	Velocidade modal	[m/s]

$\ddot{\eta}$	Aceleração modal	[m/s ²]
η_y	Incremento na direção y	[m]
κ	Fator de constrição do algoritmo do <i>PSO</i>	[Adimensional]
χ	Fator de constrição do algoritmo do <i>PSO</i>	[Adimensional]
Ω	Número de onda na frequência angular	[rad/m]
$\mathbf{\Omega}$	Matriz das frequências naturais do sistema	[(rad/s) ²]
ω	Frequência (ou Velocidade) angular	[rad/s]
ω_n	Frequência natural	[rad/s]

1 INTRODUÇÃO

O sistema de suspensão automotiva apresenta uma linha de pesquisa que envolve o estudo de causa e efeito provocado pela exposição prolongada e repetida de vibração e ruído que são nocivos à saúde humana. Essa exposição é nitidamente observada quando um automóvel trafega sob condições adversas em uma pista, onde a menor irregularidade dela causaria um solavanco desagradável transmitido ao motorista e, conseqüentemente, aos passageiros. Os danos provocados dessa maneira estão relacionados com as magnitudes e as frequências de vibração transmitidas pelo assento e normalmente se acentuam na região lombar, no quadril e também no sistema digestivo. Como um assunto pertinente para pesquisa e desenvolvimento na área de engenharia, a suspensão automotiva oferece um conjunto de problemas que ainda precisam ser tratados no que diz respeito ao estudo de modelos matemáticos, simulação numérica e processos de otimização.

Os efeitos nocivos da exposição prolongada à vibração também podem contribuir para reduzir a vida útil de diversos componentes mecânicos da suspensão e da carroceria. A fadiga dos componentes pode comprometer a segurança dos passageiros, e a vibração excessiva pode contribuir para exercer forças que pioram as condições do pavimento. Nesse sentido, o nível de conforto e segurança associado à exposição de vibração não é objeto de estudo apenas para grandes estruturas sujeitas a solicitações oscilatórias. Sistemas dinâmicos, como veículos em movimento, também são estudados a ponto de evitar uma série de acidentes, e a melhoria de diversos componentes comuns ao veículo – como os sistemas de suspensão – permite ter uma abrangência de resultados tão significativa quanto aquelas obtidas mediante grandes projetos de estruturas. Os fenômenos vibratórios estão fortemente presentes em sistemas veiculares como ônibus, automóveis, motos e máquinas agrícolas pesadas e, por esse motivo, aprofundar-se sobre esse assunto sob o prisma da Engenharia Mecânica motiva descobertas através da análise teórica e numérica desses fenômenos.

Inúmeros modelos veiculares são estudados para esta finalidade, como os modelos de dois graus de liberdade (representando um quarto de veículo) e os modelos de quatro graus de liberdade (representando meio veículo). Em comum, tais modelos não perfazem a plenitude de realidade do veículo e simulam apenas alguns dos movimentos pertinentes a ele. Por meio de um modelo cujos graus de liberdade são suficientes para atender a dinâmica do veículo satisfatoriamente, é possível aplicar um processo de otimização a fim de obter os melhores

valores dos parâmetros de suspensão (como massa, mola e amortecedor) e, com isso, minimizar a aceleração vertical *rms* transmitida ao motorista.

Este é o real propósito deste trabalho, justificando a sua aplicação por intermédio de um algoritmo de otimização desenvolvido no domínio da frequência em ambiente *MATLAB*[®]. O domínio da frequência apresenta algumas vantagens interessantes em relação ao do tempo, o que pode reduzir o esforço computacional e permite trabalhar com as densidades espectrais de potência das irregularidades da pista. Abordar o problema no domínio da frequência oferece a possibilidade de uma otimização mais rápida e adapta-se diretamente aos dados das normas de segurança veicular, desde que a análise do problema seja linear e que o modelo assuma elementos de suspensão como sendo lineares. Assim, é possível unir a fundamentação teórica com a metodologia numérica, elaborando um modelo veicular capaz de atender os requisitos das normas BS 6841 (1987), ISO 8608 (1995) e ISO 2631 (1997).

O trabalho é desenvolvido no domínio da frequência e envolve basicamente três etapas de estudo: os dados de entrada (obtidos por intermédio do perfil da pista), o desenvolvimento do modelo da carroceria e do assento (assumido como de oito graus de liberdade) e o processo de otimização dos parâmetros de suspensão por meio de um algoritmo heurístico de enxame de partículas. A pista é a fonte de carregamento do sistema e fornece os dados para excitar o modelo do automóvel. Os parâmetros desse modelo são as variáveis a serem otimizadas. As acelerações verticais são as variáveis de saída do sistema e, quando comparadas com as exigências das normas, é possível averiguar a severidade das vibrações transmitidas ao motorista.

1.1 JUSTIFICATIVA

A justificativa desta pesquisa dá-se pela necessidade de aprofundar-se sobre o tema de otimização de parâmetros concentrados de suspensão no domínio da frequência. De um modo geral, esse trabalho é motivado pela oportunidade de otimizar um modelo veicular com vistas a melhorar o desempenho de veículos por meio da maximização do conforto. Fazer essa otimização no domínio da frequência e ter tal ferramenta à disposição é pouco explorada, principalmente quando feita por meio de algoritmos heurísticos, pois, de um modo geral, se sabe que os algoritmos determinísticos têm apresentado dificuldades para encontrar valores ótimos neste tipo de problema. As possibilidades de utilização da metodologia proposta e da

ferramenta desenvolvida estende-se desde a otimização de sistemas simples de suspensão veicular a sistemas mais complexos, não apenas para maximização de conforto, mas também para previsão de vida útil em fadiga, com um custo computacional relativamente baixo. Estudar esse tema justifica-se, portanto, como uma oportunidade de inseri-lo e adaptá-lo a realidade da indústria automotiva e da legislação vigente.

Nesse contexto, questiona-se quais são os parâmetros concentrados de suspensão (massa, mola, amortecedor) que, quando otimizados, mais influenciam na minimização da aceleração vertical *rms* transmitida para o motorista? Como se dá essa influência em torno do ponto ótimo global?

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral do trabalho é determinar os parâmetros concentrados de suspensão que mais influenciam na minimização da aceleração vertical *rms* transmitida para o motorista num modelo automotivo de oito graus de liberdade submetido a um perfil de irregularidades da pista. Esse objetivo desdobra-se nos seguintes objetivos específicos:

- a) desenvolver um modelo veicular analítico e numérico (de oito graus de liberdade) que adequadamente represente a carroceria e o seu assento;
- b) otimizar numericamente os parâmetros concentrados de rigidez e amortecedor por meio da otimização heurística de enxame de partículas no domínio da frequência;
- c) avaliar os resultados obtidos nas simulações numéricas em termos de robustez do algoritmo e valores finais dos parâmetros concentrados;
- d) identificar quais parâmetros mais influenciam na redução da aceleração vertical *rms* transmitida em termos de sensibilidade;
- e) comparar a aceleração vertical *rms* transmitida antes e depois da otimização.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A dissertação está organizada para discutir um assunto específico em cada capítulo. O tema central da dissertação é trabalhado em cada capítulo da seguinte forma: no Capítulo 1, apresenta-se uma Introdução ao tema abordado, expondo a motivação do autor para realizar a

pesquisa e como o trabalho, de um modo geral, é organizado; no Capítulo 2, discursa-se sobre a Revisão de Literatura referente ao assunto, discutindo os modelos veiculares, o algoritmo heurístico de otimização por enxame de partículas e as normas de conforto; no Capítulo 3, desenvolve-se o Modelo Proposto analiticamente; no Capítulo 4, apresenta-se a Simulação Numérica, os critérios de convergência e os seus respectivos pseudocódigos; no Capítulo 5, descreve-se a Análise dos Dados do problema, exibindo os resultados das simulações; e, no Capítulo 6, finaliza-se o trabalho, comentando as Conclusões e expondo as sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DE LITERATURA

A otimização de parâmetros concentrados de suspensão automotiva é um assunto abordado por diversas pesquisas recentes. Em comum, elas partem do modelo matemático do veículo em questão para então desenvolver uma análise numérica ou experimental do problema. Nesse sentido, o desenvolvimento teórico desse assunto está fundamentado nos temas de modelagem da dinâmica veicular, perfis de pista, processos estocásticos, algoritmos de otimização, conforto e segurança veicular e vibrações no corpo humano.

2.1 MODELOS VEICULARES

Os modelos veiculares procuram, matematicamente, representar a dinâmica de um veículo real submetido a uma excitação. Existem diversos modelos, cada qual direcionado a uma espécie de veículo: motocicletas, automóveis, caminhões, ônibus, reboques. Os modelos podem ser mais simples (dotados de um ou dois graus de liberdade) ou mais complexos (mais de quatorze graus de liberdade). Cada análise requer um modelo em específico para abordar e, em alguns casos, os modelos de dois e quatro graus de liberdade podem se mostrar – ou não – satisfatórios. Nesse sentido, Moura (2003) estudou amplamente um modelo de dois graus de liberdade para comparar três tipos de suspensão (ativa, semiativa e passiva) e, na sua análise de suspensões semiativas com amortecedores magneto-reológico, os dois graus de liberdade foram suficientes. Por outro lado, Motta (2005) decidiu utilizar um modelo de sete graus de liberdade para analisar uma suspensão não linear e as vantagens de se usar leis de controle semiativas em comparação a um modelo passivo. O autor demonstrou que o ganho ao adotar uma estratégia semiativa em sistemas não lineares não é grande, contrariando a literatura a respeito.

Ikenaga *et al.* (2000) propuseram o controle ativo da suspensão em um modelo de sete graus de liberdade, o qual não prevê o descolamento do pneu com o perfil da estrada e, como resultado, mostraram que esse controle combina um esquema de *feedback* dotado de filtros com uma transformação de entradas desacopladas. Os autores analisaram que o movimento da massa suspensa acima e abaixo da frequência das rodas pode ser aprimorado por meio de filtros ativos. Por meio de um amortecimento baseado na teoria do *skyhook*, esses filtros são

capazes de alterar os coeficientes de rigidez e amortecimento nos *loops* internos do sistema e de reduzir os movimentos de aceleração vertical, arfagem (*pitch*) e rolagem (*roll*).

A teoria do amortecimento *skyhook*, segundo o entender de Motta (2005), considera a força de amortecimento proporcional à velocidade vertical absoluta da carroceria, ao invés da velocidade relativa entre a carroceria e os eixos (dianteiro ou traseiro). Nessa configuração, as vibrações dos eixos não são transmitidas à carroceria e, por conseguinte, o amortecimento é valorizado a tal ponto que permite oferecer maior conforto aos passageiros. A dedução das equações dessa teoria foge ao escopo do trabalho e pode ser encontrada em Motta (2005).

Hyvärinen (2004) desenvolveu um modelo analítico de um veículo militar de oito graus de liberdade com um controle semiativo baseado na teoria *skyhook* de amortecimento. Ele também considerou a variação da força de contato dos pneus, embora não a utilizasse como principal critério de projeto para incluir no controle semiativo proposto. Para Hyvärinen (2004), essa variação da força de contato afeta, de um modo geral, a dirigibilidade do veículo devido às forças horizontais no contato pneu-pista. O autor desenvolveu exaustivamente a proposta de controle via *skyhook* a fim de minimizar a aceleração vertical transmitida pelo centro de massa e simulou o modelo veicular por meio do *software ADAMS* conforme as recomendações da ISO 5008 (2002). Essa norma é específica para veículos empregados na agricultura, como tratores e implementos agrícolas, embora possa ser adaptada para veículos em terrenos bastante irregulares, como veículos militares. Os resultados de Hyvärinen (2004) indicaram que a teoria de *skyhook* de amortecimento e o controle proposto podem melhorar a interação pneu-pista e facilitar as deflexões da suspensão.

Sob o prisma de modelos dotados de vários graus de liberdade, Bouazara, Richard e Rakheja (2006) desenvolveram uma otimização determinística baseada na técnica de minimização sequencial não restrita e compararam os resultados com as orientações das normas BS 6841 (1987) e ISO 2631 (1997). Os autores também compararam com uma bancada experimental e reduziram até 30% da aceleração vertical transmitida ao motorista. Já sob a ótica de modelos mais simples, Zhang *et al.* (2007) analisaram um modelo de dois graus de liberdade e inseriram vibrações aleatórias não estacionárias a fim de obter a resposta no domínio da frequência, resultando em um modelo efetivo para a proposta inicial, mas utilizável apenas em sistemas lineares. Para aprimorar os estudos de modelos de dois graus de liberdade, Chi, He e Naterer (2008) compararam três algoritmos distintos de otimização – algoritmos genéticos (*Genetic Algorithm* ou *GA*), procura padronizada (*Pattern Search* ou *PS*)

e programação quadrática sequencial (*Sequential Quadratic Program* ou *SQP*) – e afirmaram que o emprego do SQP é realmente afetado pelos mínimos locais da função objetivo.

Gao, Zhang e Du (2007) investigaram a resposta dinâmica de meio veículo (quatro graus de liberdade) frente a uma excitação aleatória e provaram que o método aleatório proposto para a pista pode ser utilizado também em modelos veiculares com mais graus de liberdade. Para complementar, Fai, Delbressine e Rauterberg (2007), de um modo geral, indicaram qual é o estado da arte atualmente pesquisado e quais são as descobertas mais recentes sobre projetos de assentos e modelos automotivos, aproximando a modelagem analítica com resultados mais práticos, incluindo modelos dotados de mais graus de liberdade.

O estudo de modelos de mais graus de liberdade permite abranger a dinâmica de um veículo com maior fidedignidade. Os movimentos de arfagem e rolagem inserem dois graus de liberdade a mais num modelo normalmente orientado para analisar os deslocamentos verticais da carroceria. Essa consideração torna o problema mais complexo, embora seja mais próximo do que acontece na realidade. Quanto maior a aproximação do modelo ao veículo real, maior a possibilidade de colocá-lo na prática. Isso se mostra evidente no trabalho de Paradiso (2009), em que o autor desenvolveu um modelo de dirigibilidade vertical dotado de cinco graus de liberdade para o BMW Mini Cooper. O objetivo geral do modelo era avaliar os efeitos da inserção do pneu não pneumático TWEEL[®], projetado pela Michelin, para reduzir as acelerações verticais transmitidas ao motorista e para aprimorar o desempenho de todo o veículo. Esse tipo de aplicação requer conhecimento dos fenômenos dinâmicos que permeiam o veículo e quase sempre envolve alguma não linearidade presente no problema.

Os modelos veiculares de vários graus de liberdade com não linearidades podem apresentar dificuldades consideráveis para fins de modelagem matemática e estabilidade de algoritmos. Morsch (2001) assume algumas considerações cinemáticas e simplificações gerais nas matrizes de massa e de amortecimento para elaborar um modelo matemático capaz de satisfazer os movimentos de um ônibus dotado de múltiplos apoios submetido a uma excitação na base. A matriz de massa é diagonal, o que apresenta resultados satisfatórios por meio de uma simplificação matemática que auxilia no processo de cálculo. No seu modelo, o amortecimento é dividido em duas matrizes – uma pertencente à carroceria e ao chassi e outra pertencente às suspensões –, e o autor emprega o Método de Rayleigh para obter a matriz de amortecimento da carroceria. No seu trabalho, a análise no domínio da frequência é utilizada

para obter estatísticas referentes aos esforços nos componentes da carroceria a fim de avaliar a segurança dos componentes frente aos esforços repetitivos que geram fadiga.

De posse de todas as informações dos autores supracitados, pode-se considerar que os veículos são representados matematicamente por modelos de $\frac{1}{4}$ de veículo, $\frac{1}{2}$ veículo e um veículo completo (dotado de, no mínimo, cinco graus de liberdade, os quais representam geralmente as quatro massas não suspensas e a massa suspensa). Por outro lado, as suspensões automotivas podem ser classificadas em apenas três tipos: passivas, ativas e semiativas. Em termos de controle de suspensão, é usual utilizar os métodos de Regulador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator* ou *LQR*), as Redes Neurais, a Lógica *Fuzzy* e os controles mais clássicos do tipo proporcional, integral e derivativo (PID). Além disso, os modelos veiculares podem ser analisados de forma linear ou não linear, no domínio do tempo ou da frequência.

2.2 PERFIS DE IRREGULARIDADES DA PISTA

Os perfis de irregularidades da pista são normalmente considerados como um dado de entrada para estudar o comportamento dinâmico do veículo. Um dos procedimentos mais usuais consiste em classificar os perfis de pista por meio da função densidade espectral de potência (FDEP) ou, do inglês, *Power Spectral Density (PSD)*. Dodds e Robson (1973) propuseram, inicialmente, um modelo de perfil de irregularidades da pista que corresponde a um campo bidimensional gaussiano, aleatório e isotrópico. Esse campo mostra-se bastante pertinente, uma vez que a natureza aleatória a qual as estradas estão submetidas deve ser considerada para que o estudo esteja próximo da realidade dinâmica do veículo. Os autores tratam a pista como uma função cujas propriedades superficiais são obtidas por meio de medições experimentais aplicadas em um único trecho ao longo da via. Essa função utiliza somente as direções x e y , o que caracteriza um problema tipicamente bidimensional, e a isotropia da condição implica manter as mesmas propriedades em todas as direções.

2.2.1 Modelo Teórico dos Perfis de Irregularidades

O modelo dos perfis de irregularidades da pista de Dodds e Robson (1973) é exibido na Figura 2.1 (onde o eixo positivo de z aponta para fora da página). Considera-se a estatística

do processo com média igual a zero e baseia-se no histórico de excitação, necessitando somente dos espectros de potência para descrever todo o perfil da estrada.

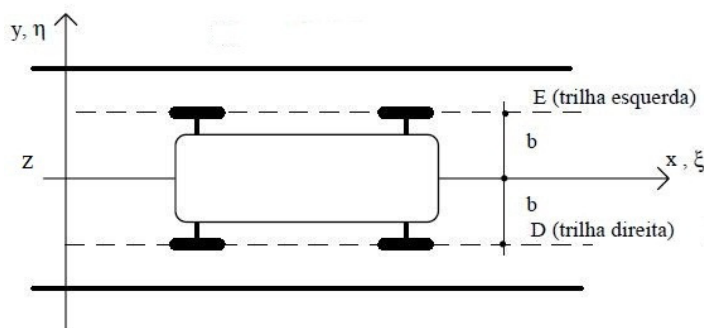


Figura 2.1 – Esboço da descrição da pista

Fonte: Morsch (2001, p. 73, adaptado).

O modelo de Dodds e Robson (1973) parte de uma autocorrelação capaz de definir os deslocamentos $z(x_r, y_r)$ em todos os pontos (x_r, y_r) . Essa autocorrelação é exibida a seguir na Eq. (2.1):

$$\mathcal{R}(x_r, y_r; x_s, y_s) = E[z(x_r, y_r) \cdot z(x_s, y_s)] \quad (2.1)$$

onde E representa o valor esperado da função. Os autores admitem que a obtenção dos dados experimentais para descrever o perfil da pista é trabalhosa e, na prática, mostra-se necessário simplificar a autocorrelação. Nesse sentido, as irregularidades $z(x, y)$ fazem parte de um processo aleatório homogêneo, descrito por uma função gaussiana, a seguir:

$$\mathcal{R}(\xi, \eta) = \lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ Y \rightarrow \infty}} \frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y z(x, y) \cdot z(x + \xi_x, y + \eta_y) dx dy \quad (2.2)$$

Simbolicamente, Dodds e Robson (1973) adotam uma simplificação na Eq. (2.2) para facilitar a compreensão da integral no domínio, substituindo o símbolo da integral dupla por colchetes. Dessa forma, é possível assumir a integral em todo o domínio, conforme a Eq. (2.3) a seguir:

$$\mathcal{R}(\xi, \eta) = \langle z(x, y) \cdot z(x + \xi_x, y + \eta_y) \rangle \quad (2.3)$$

onde ξ_x e η_y são incrementos nas direções x e y , respectivamente. Essa integração é simplificada, uma vez que o processo é tratado pelos autores como isotrópico. Isso atribui à Eq. (2.3) uma simetria circular que, ao assumir respectivamente $\eta_y = 0$ e $\xi_x = 0$, tem-se $\mathcal{R}_x(\xi) = \mathcal{R}(\xi_x, 0)$ e $\mathcal{R}_y(\eta) = \mathcal{R}(0, \eta_y)$.

Adotam-se duas trilhas na pista de rodagem, uma para o lado direito do veículo e outra para o esquerdo. Como as simplificações consideradas resultaram numa simetria, tem-se que $y = b$ e $y = -b$ para o lado esquerdo e direito, respectivamente, conforme a Fig. 2.1. Dessa forma, as Equações (2.4) e (2.5) exibem os resultados da simetria:

$$\mathcal{R}_{DE}(\xi) = \langle z_D(x) \cdot z_E(x + \xi) \rangle = \langle z(x, -b) \cdot z(x + \xi, b) \rangle = \mathcal{R}(\xi, 2b) \quad (2.4)$$

$$\mathcal{R}_{ED}(\xi) = \langle z_E(x) \cdot z_D(x + \xi) \rangle = \langle z(x, -b) \cdot z(x + \xi, -b) \rangle = \mathcal{R}(\xi, -2b) \quad (2.5)$$

em que os subíndices D e E representam, respectivamente, direito e esquerdo. Essa simetria também implica que

$$\mathcal{R}_{DE}(\xi) = \mathcal{R}_{ED}(\xi) = \mathcal{R}_{DE}(-\xi) \quad (2.6)$$

A correlação cruzada entre os deslocamentos das duas trilhas separados pela distância $2b$ mantém-se a mesma. Ou seja, a densidade espectral cruzada, $S_X(n)$, deve ser um valor real de tal forma que

$$S_{DE}(n) = S_{ED}(n) = S_X(n) \quad (2.7)$$

onde n é o número de onda, dado em ciclo/m. Algumas normas, sobretudo a ISO 8608 (1995), trabalham tanto com o número de onda na frequência espacial (ciclo/m), quanto com o número de onda na frequência angular (rad/m). Portanto, $S_X(n)$ pode ser trabalhada também com a frequência angular Ω de tal modo que $S_X(\Omega)$ também seja válida.

Ao considerar o processo como homogêneo, Dodds e Robson (1973) afirmam que as irregularidades ao longo de uma linha reta devem ter a mesma forma que as irregularidades de outra linha reta paralela à primeira. Isso permite concluir que

$$\mathcal{R}_D(\xi) = \mathcal{R}_E(\xi) \quad (2.8)$$

$$S_D(n) = S_E(n) = S(n) \quad (2.9)$$

em que $S_D(n)$ e $S_E(n)$ correspondem aos espectros de potência (ou densidades espectrais) do lado direito e esquerdo, respectivamente, em função do número de onda. Morsch (2001) esboça um gráfico esquemático para descrever a pista e compreender a isotropia do processo. A Figura 2.2 (onde o eixo positivo de z aponta para fora da página) exhibe a pista e os seus parâmetros:

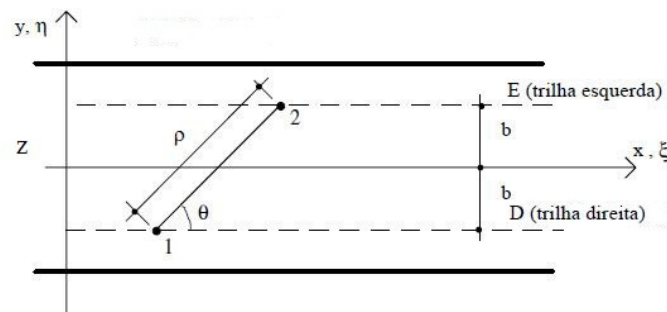


Figura 2.2 – Parâmetros da descrição da pista

Fonte: Morsch (2001, p. 75, adaptado).

Dodds e Robson (1973) introduzem duas variáveis, ρ e θ , para confirmar a isotropia do processo. Com isso, é possível afirmar que

$$\mathcal{R}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \mathcal{R}(\rho) \quad (2.10)$$

Por intermédio das Eqs. (2.4), (2.5) e (2.10), tem-se uma função capaz de determinar a forma de $\mathcal{R}(\rho)$ em outra direção, conhecendo-se apenas a autocorrelação $\mathcal{R}(\xi)$. Essa função é dada na Eq. (2.11), a seguir:

$$\mathcal{R}_{ED}(\xi) = \mathcal{R}_E(\rho) = \mathcal{R}(\sqrt{\xi^2 + 4b^2}) \quad (2.11)$$

Percebe-se que o modelo de Dodds e Robson (1973) poderia ser desenvolvido para η ao invés de ξ se o veículo trafega ao longo de y , devido às considerações de homogeneidade, isotropia e simetria. Por intermédio da Transformada de Fourier, é possível obter o espectro de potência cruzado unilateral dos perfis de estrada $x_D(x)$ e $x_E(x)$ separados pela distância $2b$, conforme a Eq. (2.12):

$$G(n) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(\xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi \quad (2.12)$$

onde $G(n)$ é a densidade espectral unilateral em termos do número de onda n . Para um $G_z(n)$ qualquer, tem-se

$$G_z(n) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_{ED}(\xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_{ED}(\rho) e^{-2\pi i n \xi} d\xi \quad (2.13)$$

em que, novamente, $\rho = \sqrt{\xi^2 + 4b^2}$. Finalmente, o modelo pode ser aplicado na prática por meio de uma relação entre $G_z(n)$ e $G(n)$. Nesse sentido, Dodds e Robson (1973) propuseram a seguinte relação:

$$g(n) = \frac{G_z(n)}{G(n)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} 2\mathcal{R}(\sqrt{\xi^2 + 4b^2}) e^{-2\pi i n \xi} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} 2\mathcal{R}(\xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi} \quad (2.14)$$

A relação proposta resulta num valor de $g(n)$ que pode estar próximo de 1 (quando submetido a pequenos números de onda n) ou próximo de zero (quando submetido a grandes números de onda). Conforme Dodds e Robson (1973), essa função permite aproximar a partir da isotropia uma expressão matemática *a priori* da realidade na prática.

A partir do trabalho de Dodds e Robson (1973), diversos outros modelos para gerar o perfil de irregularidades da pista foram desenvolvidos e aprimorados, a destacar: Hwang e Kim (2000), que propuseram um trabalho para determinar os perfis de estrada utilizando a

análise modal complexa, e Zhang, Lee e Wang (2002), que também apresentaram uma proposta de estudo de uma vibração não estacionária em um veículo em movimento nos domínios do tempo e da frequência. De um modo geral, todos os autores supracitados concluem que uma função de transferência pode representar as irregularidades da pista por intermédio do número de onda na frequência espacial (ou angular).

2.2.2 Descrição Matemática dos Perfis de Irregularidades

A descrição matemática do perfil de irregularidades pode ser trabalhada segundo o desenvolvimento das equações anteriores. Parte-se das equações fundamentais de frequência, a seguir, e determina-se a função densidade espectral de potência, assumindo que

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi n \quad (2.15)$$

$$n = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi v} \quad (2.16)$$

onde λ é o comprimento de onda, em metros, Ω é o número de onda na frequência angular, em rad/m, e n é o número de onda na frequência espacial, em ciclos/m. Assume-se que o veículo mantém uma velocidade constante v , em m/s, e que o comprimento de onda λ é dado após um período T , dado em segundos. Dessa forma, têm-se as seguintes expressões

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad (2.17)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} v = 2\pi n v \quad (2.18)$$

em que ω é a frequência, dada em rad/s. A Eq. (2.18) é extremamente importante para fazer uma mudança de variáveis do número de onda n para ω (e vice-versa) quando for necessária.

A FDEP unilateral de um dado perfil de irregularidades, $G_z(n)$, pode ser exibida em termos do valor esperado quadrático médio. Esse valor é demonstrado na Eq. (2.19) a seguir:

$$E[Z^2] = \int_0^{\infty} G_z(n)dn = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ub}(\omega)d\omega \quad (2.19)$$

onde $E[Z^2]$ é o valor esperado da variável Z ; n é o número de onda na frequência espacial, em ciclo/m; e $S_{ub}(\omega)$ é a densidade espectral dos deslocamentos da base oriundos do perfil de irregularidades, em m^3/rad . Na Eq. (2.19), é interessante realizar uma mudança de variável do tipo $dn = d\omega/2\pi v$. Dessa forma, tem-se a seguinte igualdade (MORSCH, 2001, p. 77):

$$E[Z^2] = \frac{1}{2\pi v} \int_0^{\infty} G_z(n)d\omega = \frac{1}{4\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} G_z(n)d\omega \quad (2.20)$$

Para relacionar a FDEP unilateral $G_z(n)$ com a FDEP bilateral $S_{ub}(\omega)$, basta igualar a Eq. (2.19) com a Eq. (2.20). Dessa forma, tem-se a seguinte relação:

$$S_{ub}(\omega) = \frac{1}{4\pi v} G_z(n) \quad (2.21)$$

onde v é a velocidade do veículo, em m/s.

O espectro obtido por meio de um grande número de medições é uma das propostas de descrição dos perfis de pista. Andrén (2006) expôs uma tabela contendo as diversas propostas do cálculo de $G_z(n)$ cuja aproximação desenvolvida pela norma ISO 8608 (1995) mostra-se pertinente. Essa proposta é consolidada na literatura e empregada no presente trabalho. Para tanto, tem-se

$$G_z(n) = G_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^{-w} \quad (2.22)$$

$$G_z(\Omega) = G_0 \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{-w} \quad (2.23)$$

onde w é o expoente de aproximação da curva, n_0 corresponde ao número de onda específico conforme a norma utilizada, G_0 é a FDEP de um dado perfil de irregularidades correspondente ao n_0 especificado e n é o número de onda medido na pista. Em termos gerais, n_0 equivale a $1/2\pi$ ciclos/m, o que corresponde a 6,3 metros de comprimento de onda, um valor típico para

construção de pavimento de pistas. A Equação (2.23) representa o cálculo na abordagem da frequência angular Ω , e o número de onda deve ser convertido adequadamente conforme a Eq. (2.18). O usual é utilizar o número de onda n , mas neste trabalho varrem-se as frequências ω nas integrações (adiante).

A Tabela 2.1, a seguir, reúne as informações necessárias para classificar o tipo de pista e a sua respectiva qualidade (variáveis subjetivas) com a densidade espectral em termos do número de onda n e os expoentes w_1 e w_2 necessários para o cálculo da densidade espectral (variáveis numéricas). Conforme o veículo trafega sob uma pista de determinada qualidade, pode-se avaliar a densidade espectral dela, utilizando-se os parâmetros indicados na Tabela 2.1:

Tabela 2.1 – Qualidade da pista para padrões europeus

Tipo de Pista	Qualidade da Pista	$G(n_0)$ [10^{-6} m ³ /ciclo]	w_1 [Adimensional]	w_2 [Adimensional]
Pistas Secundárias	Média	32 – 128	1,945	1,360
	Pobre	128 – 512		
	Muito Pobre	512 – 2048		
Pistas Principais	Muito Boa	2 – 8	2,050	1,440
	Boa	8 – 32		
	Média	32 – 128		
	Pobre	128 – 512		
Rodovias	Muito Boa	2 – 8	1,945	1,360
	Boa	8 – 32		

Fonte: Dodds e Robson (1973, p. 182, adaptado).

Os valores de w_1 e w_2 são muito próximos. Eles podem ser simplificados em relação aos valores de n , conforme desenvolvido por Morsch (2001), para $w_1 = w_2 = w \approx 2,0$. Isso se deve à pequena variação que ocorre na troca de valores de w dentro da faixa prática de uso (algo entre 1,5 e 2).

Morsch (2001) demonstra que as funções de densidades espectrais (FDEPs) da roda dianteira e traseira são iguais para uma dada trilha. Para tanto, parte-se da seguinte relação da defasagem das rodas:

$$\Delta t = \frac{W_b}{v} \quad (2.24)$$

onde W_b é a distância entre eixos (*wheel base*), dada em metros, e v é a velocidade, dada em m/s. O autor particulariza a função de autocorrelação para o caso unidimensional e, com isso, tem-se:

$$\mathcal{R}(\xi) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X z(x) \cdot z(x + \xi) dx \quad (2.24)$$

similar à Eq. (2.2), mas para uma única dimensão. Morsch (2001) deduz para uma dimensão para fins de simplificação, embora possa ser demonstrado facilmente para duas dimensões.

Faz-se uma mudança de variável tal que $t = x/v$, $T = X/v$, $\tau = \xi/v$ e $dx = vdt$. A Equação (2.24) torna-se o seguinte:

$$\mathcal{R}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2Tv(t)} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau)v(t)dt \quad (2.26)$$

onde $v(t)$ pode ser devidamente isolado da integração e simplificado. Morsch (2001) admite que uma função temporal representativa qualquer $f_r(t)$ pode ser tratada como uma função que genericamente aborda as irregularidades da pista tal que $f_d(t) = f_t(t + \Delta t)$ e $f_d(t + \Delta t) = f_t(t + \tau + \Delta t)$. Os subíndices d e t representam dianteiro e traseiro, respectivamente.

Aplicam-se as considerações de $f_r(t)$ na Eq. (2.26). Dessa forma, tem-se:

$$\mathcal{R}_t(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_t(t + \Delta t) \cdot f_t(t + \tau + \Delta t)dt \quad (2.27)$$

$$\mathcal{R}_t(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_d(t) \cdot f_d(t + \tau)dt \quad (2.28)$$

$$\mathcal{R}_t(\tau) = \mathcal{R}_d(\tau) \quad (2.29)$$

o que permite afirmar que a função de autocorrelação da roda dianteira e da traseira são iguais e defasadas por Δt . Por conseguinte, as FDEPs das rodas dianteiras também serão iguais às das rodas traseiras¹.

2.2.3 Validade do Intervalo de Integração dos Perfis de Irregularidades

O intervalo de integração da densidade espectral dos perfis de irregularidades da pista é um parâmetro importante a ser considerado, uma vez que depende da abordagem do número de onda adotado (frequência espacial ou frequência angular). Nesse aspecto, a norma ISO 8608 (1995) mostra-se abrangente, pois orienta que o intervalo de integração na frequência espacial seja entre 0,01 ciclos/m a 10 ciclos/m para pistas ditas normais. O limite superior pode ser ainda maior, conforme a velocidade máxima permitida naquele trecho, o que permite atingir valores acima de 1000 ciclos/m. O limite inferior, por outro lado, pode ser a partir de 0,05 ciclos/m para veículos fora de estrada. Todos esses limites devem ser convertidos para a frequência angular, caso seja trabalhada nessa abordagem, por meio da seguinte relação:

$$2\pi \text{ rad} = 1 \text{ ciclo} \quad (2.30)$$

a qual deve ser aplicada para converter o número de onda n para o número de onda Ω .

Morsch (2001, p. 80) discute a validade desse intervalo, porque a função $G_z(n)$ “[...] somente é aplicável sobre uma faixa de números de onda limitada.” Qualquer valor que esteja fora do intervalo de integração deve ser negligenciável e, por isso, determinar esse intervalo é fundamental para não violar as condições de admissibilidade propostas pela teoria isotrópica do modelo do perfil de irregularidades. Para o autor, ao trabalhar com perfis de uma única trilha, as propriedades de um intervalo restrito de número de onda são satisfatórias, o que limita o valor da integração da densidade espectral (normalmente definida entre $-\infty$ e $+\infty$, se for bicaudal, ou 0 e $+\infty$, se for unicaudal).

A integração usando as Eqs. (2.22) e (2.23) mostra-se sensível no que diz respeito ao limite inferior da integral, pois o uso delas pode ser duvidoso para baixos números de onda n_0 (pode ter problemas numéricos quando n_0 estiver muito próximo de zero, caracterizando uma

¹ Morsch desenvolve essa mesma dedução para comprovar a igualdade das FDEPs das rodas no Anexo E de sua Tese.

divisão por zero). Em contrapartida, o limite superior do intervalo de integração não contribui significativamente na resposta obtida de tal modo que frequências muito elevadas (na ordem de grandeza de 100 Hz ou mais) tornam o tempo de processamento do algoritmo mais lento apenas.

Na prática, os limites de integração são na frequência de 0,5 Hz até 50 Hz, o que corresponde a velocidades do veículo entre 5 m/s a 50 m/s. Morsch (2001) corrobora esses autovalores e frisa que a relação entre os números de onda deve trabalhar em diferença da ordem de grandeza de 1000 – exatamente o proposto pela norma ISO 8608 (1995). Para fins de simulação da presente dissertação, os limites de integração são aqueles orientados por essa norma.

2.3 ALGORITMO DE ENXAME DE PARTÍCULAS

O algoritmo de enxame de partículas é uma técnica fundamentada na observação dos fenômenos da natureza, baseada no estudo estocástico de populações. Inicialmente, Kennedy e Eberhart (1995) propuseram o conceito de inteligência de enxame para otimizar funções contínuas não lineares. Esse conceito é baseado na modelagem do comportamento de grupos sociais simplificados, em que a decisão do grupo e a decisão individual são ambos aspectos importantes para a tomada de decisão do todo, optando pelo melhor caminho. No entanto, o objetivo dos autores era fundamentalmente tratar da descrição do movimento de grupos de aves ou peixes, os quais apresentavam características peculiares, como sincronismo, ao se movimentarem. Insere-se também a esse conceito a hipótese de que a troca de informações entre os indivíduos do grupo é abordada como uma vantagem evolucionária e, com isso, resulta-se na criação do Método de Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization* ou *PSO*).

Por ser um algoritmo estocástico, o *PSO* apresenta características apreciáveis como uma fundamentação baseada nos fenômenos da natureza (o que facilita a sua compreensão) e uma independência de informações baseadas em gradientes. Conforme Lazinica (2009), o *PSO* também possui aspectos que são observados em outros processos de otimização, como os algoritmos genéticos. Ele utiliza uma população aleatória de soluções para inicializar o processo e busca o valor ótimo da função objetivo por meio de sucessivas iterações. Os candidatos à solução sobrevoam o espaço de soluções a fim de localizar a região ótima,

seguindo as partículas otimizadas da geração recorrente. Não há o uso de operadores evolutivos, como os operadores genéticos dos algoritmos genéticos, o que faz do *PSO* um algoritmo particularmente mais enxuto e de fácil compreensão.

A analogia com os fenômenos da natureza é evidente no *PSO*. Sabe-se que o *PSO* é uma metaheurística, o que significa observar a natureza e adotar regras sem dedução clássica ou analítica. De um modo geral, as partículas representam aves, insetos ou peixes, e cada uma delas apresenta um nível decisório e aleatório que pode influenciar o grupo todo por meio de sua decisão. Lazinica (2009) elucida que uma das características marcantes do *PSO* reside na movimentação do algoritmo durante a exploração do espaço de soluções. Nesse sentido, a velocidade com a qual cada partícula movimenta-se no espaço é vital para o andamento do algoritmo. Dessa forma, o enxame como um todo explora o espaço em busca de alimento, da mesma forma que um conjunto de soluções explora o seu espaço de soluções.

Conforme os estudos de Esmín (2005), Das, Abraham e Konar (2008) e Lazinica (2009), afirma-se que o algoritmo do *PSO* envolve basicamente seis definições importantes. Elas são, respectivamente, as variáveis de projeto (que se alteram ao longo do processo de otimização e que podem ser contínuas ou discretas), as restrições (que são funções de igualdade ou desigualdade sobre as variáveis de projeto a fim de descrever condições de contorno do projeto), o espaço de busca (que é definido como um conjunto, espaço ou região capaz de compreender as possíveis soluções das variáveis de projeto a serem otimizadas), a função de custo (que envolve uma ou mais variáveis de projeto a serem otimizadas por meio de sua minimização ou maximização), o ponto ótimo (que pode ser definido como um ponto formado pelas variáveis de projeto que otimiza a função de custo e também satisfaz as suas restrições) e o valor ótimo (que é justamente o valor da função de custo no ponto ótimo).

No entender de Das, Abraham e Konar (2008), o funcionamento do *PSO* simula um enxame de partículas em um espaço de busca que são atraídas por regiões nesse espaço com alto valor de adaptação. A posição da partícula determina um candidato à solução, e a topologia do espaço de busca representa a função de custo. A partícula também apresenta uma velocidade que informa a direção, a taxa de mudança de posição pelo tempo e a adequação. Quando a função de custo avalia a posição da partícula, determina-se quão adequada está essa partícula. A variação da posição e da velocidade da partícula é dada pela experiência dela conforme o histórico da exploração do espaço de soluções e a observação das partículas vizinhas.

O algoritmo considera que $\vec{X}_i(t) = \{x_{i,1}(t), \dots, x_{i,j}(t)\}$ e $\vec{V}_i(t) = \{v_{i,1}(t), \dots, v_{i,j}(t)\}$ são, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula i no tempo t no espaço de busca n -dimensional. Define-se $\vec{p}_i(t) = \{p_{i,1}(t), \dots, p_{i,j}(t)\}$ como a melhor posição já encontrada pela partícula i até o tempo t e $\vec{g}(t) = \{g_1(t), \dots, g_j(t)\}$ como a melhor posição já encontrada pelo enxame inteiro até o tempo t . De posse dessas informações da partícula e do enxame, o algoritmo do *PSO* utiliza as seguintes regras de atualização das posições e velocidades:

$$v_{i,j}(t+1) = \chi \left[w_p v_{i,j}(t) + c_1 r_1 (p_{i,j}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2 r_2 (g_j(t) - x_{i,j}(t)) \right] \quad (2.31)$$

$$x_{i,j}(t+1) = x_{i,j}(t) + v_{i,j}(t+1) \quad (2.32)$$

$$\chi = \frac{2\kappa}{|2 - (c_1 + c_2) - \sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4(c_1 + c_2)}|} \quad (2.33)$$

em que $v_{i,j}(t+1)$ é a velocidade da partícula a ser atualizada i correspondente a variável de projeto j , $v_{i,j}(t)$ é a velocidade atual da partícula i correspondente a variável de projeto j , $x_{i,j}(t)$ é a posição atual da partícula i correspondente a variável de projeto j , $x_{i,j}(t+1)$ é a posição da partícula a ser atualizada i correspondente a variável de projeto j , $p_{i,j}(t)$ é a melhor posição já encontrada pela partícula i correspondente a variável de projeto j , $g_j(t)$ é a melhor posição já encontrada pelo enxame de partículas correspondente a variável de projeto j , w_p é o peso de inércia ou “momento” para a velocidade das partículas (capaz de controlar a capacidade de exploração do espaço de solução e a observação de outras partículas vizinhas), c_1 é a constante de aceleração cognitiva individual da partícula referente à $p_{i,j}(t)$, c_2 é a constante de aceleração social do enxame referente à $g_j(t)$, r_1 e r_2 são números aleatórios entre zero e um para manter a característica estocástica da função e, finalmente, χ é um fator de constrição que utiliza um valor numérico κ para a convergência do algoritmo. Em geral, o valor de κ fica entre 0,8 e 1,0 e, para o presente trabalho, adota-se $\kappa = 0,8$.

A inicialização do algoritmo de otimização *PSO* é aleatória, de tal maneira que as partículas tenham posições e velocidades aleatórias. Executa-se o laço do algoritmo até atingir algum critério de parada. Esse laço apresenta os seguintes passos:

- a) avaliam-se as partículas conforme a função de custo;
- b) determinam-se os valores de aptidão de cada partícula;
- c) atualizam-se os valores de $p_{i,j}(t)$ e de $g_j(t)$;
- d) calcula-se o movimento das partículas conforme as Eqs. (2.31) a (2.33).

O critério de parada normalmente adotado é a razão entre o desvio padrão e a média referentes ao valor da função de custo para todas as partículas, a qual deve ser menor ou igual a um valor de tolerância para que o processo seja interrompido. As provas de que o método converge para um ótimo global podem ser encontradas na literatura (BERGH, 2001; MEI; LIU; XIAO, 2010) e fogem do escopo desta dissertação.

2.3.1 Exemplo Vetorial e Pseudocódigo do Algoritmo de Enxame de Partículas

Seja uma função objetivo $f(\mathbf{x}_i)$ a ser minimizada ou maximizada. Deseja-se obter um conjunto de variáveis de projeto $\mathbf{x}_j = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tal que $f(\mathbf{x}_i)$ seja minimizada, por exemplo. Indica-se o total de variáveis de projeto n_p e inicializa-se o algoritmo por meio da inserção do total de partículas m_p , as quais são aleatoriamente pré-dispostas no espaço de soluções. Entende-se por dispersão o posicionamento aleatório inicial das partículas.

De um modo vetorial, a Figura 2.3 esquematiza o funcionamento do algoritmo. Nela, determina-se que $g_j(t) = xgbest_i^k$, $p_{i,j}(t) = xlbst_i^k$, $x_{i,j}(t) = x_i^k$, $v_{i,j}(t) = v_i^k$, $x_{i,j}(t + 1) = x_i^{k+1}$, $v_{i,j}(t + 1) = v_i^{k+1}$, $w_p = \varpi$, $c_1 = \lambda_1$ e $c_2 = \lambda_2$ conforme as Eqs. (2.31) a (2.33). Quando avalia a função objetivo, a partícula desloca-se para outra posição, a qual pode ser um dos ótimos locais ou pode atingir o ótimo global.

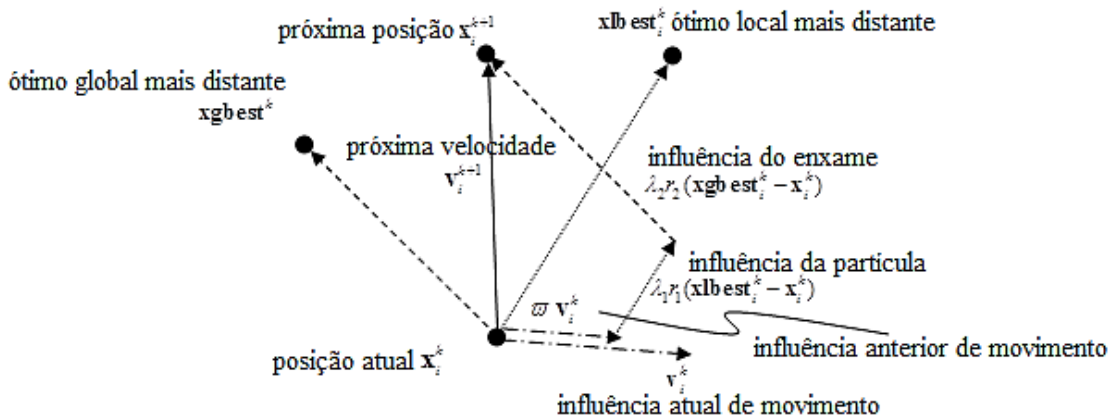


Figura 2.3 – Representação vetorial do algoritmo de enxame de partículas

Fonte: Gomes (2009, não paginado, adaptado).

O pseudocódigo a seguir refere-se à sub-rotina da otimização pelo *PSO*. Conforme a Fig. (2.3), o algoritmo pode ser escrito em três blocos (inicialização, laço do enxame e laço da função objetivo). O Quadro 2.1 ilustra um exemplo genérico da sub-rotina do *PSO*, e como ela retorna à função objetivo a que se refere (GOMES, 2009).

Quadro 2.1 – Pseudocódigo da sub-rotina do *PSO*

Insira os dados de entrada: número de partículas n_p , número de variáveis de projeto m_p , parâmetro cognitivo c_1 , parâmetro social c_2 , inércia das partículas w_p , coeficiente de convergência χ , coeficiente mínimo de variação CV_{min} , limites inferiores e superiores das variáveis de projeto x_{min} e x_{max} ;

Gere um Enxame inicial aleatório e inicialize os melhores valores locais:

Para cada partícula i até n_p faça

Para cada variável de projeto j até m_p faça

$r = \text{uniforme}[0,1]$

$x_{i,j}^0 = x_{jmin} + r(x_{jmax} - x_{jmin})$

$v_{i,j}^0 = 0$

Selecione o ótimo local das variáveis de projeto como o valor atual

$xlbest_{i,j} = x_{i,j}$

Fim

Selecione o ótimo local da função objetivo como o valor atual

Determine $f_i(xlbest_i) = f(x_i)$

Fim

Faça iteração no Enxame para encontrar a partícula com as variáveis de projeto que tenham o mínimo da função objetivo: faça o laço com o critério de convergência do Coeficiente de Variância $CV < CV_{min}$, ótimo global da função objetivo $f(xgbest_{i+1}) - f(xgbest_i) < \text{tolerância}$ ou ótimo global da norma das variáveis de projeto $|xlbest_{i+1} - xlbest_i| < \text{tolerância}$ que o Enxame encontrar;

Para cada partícula i até o critério de convergência escolhido faça

Avalie para cada partícula i a função objetivo $f_i(x_i)$

```

Atualize o ótimo local e a sua respectiva função objetivo
Para cada partícula  $i$  faça
  Se  $f(x_i) < f(\mathbf{xbest}_i)$ 
    Então  $f_i(\mathbf{xbest}_i) = f(x_i)$  e  $\mathbf{xbest}_i = x_i$ , sucessivamente
  Fim
Encontre a partícula mínima da função objetivo  $\min(f(x_i))$ 
  Se  $\min(f(x_i)) < f(\mathbf{xgbest}_i)$ 
    Então  $f(\mathbf{xgbest}_i) = \min(f(x_i))$  e  $\mathbf{xgbest}_i = x_{\text{index}(\min(f_i(x_i)))}$ , sucessivamente
Para cada partícula  $i$  no Enxame faça
   $r_1 = \text{uniforme}[0,1]$ 
   $r_2 = \text{uniforme}[0,1]$ 
   $\mathbf{v}_i^{k+1} = w_p \mathbf{v}_i^k + c_1 r_1 (\mathbf{xbest}_i^k - x_i^k) + c_2 r_2 (\mathbf{xgbest}_i^k - x_i^k)$ 
   $\mathbf{x}_i^{k+1} = x_i^k + \chi \mathbf{v}_i^{k+1}$ 
Fim
Fim

```

Fonte: Gomes (2009, não paginado, adaptado).

Exemplos de funções típicas de problemas *benchmark* resolvidos pelo *PSO* podem ser obtidos na literatura (CHEN; CHI, 2009). Por meio do pseudocódigo exposto no Quadro 2.1, é possível avaliar essas funções típicas substituindo $f(x_i)$ pela função de interesse.

2.4 CONFORTO E SEGURANÇA VEICULAR

A definição de conforto e segurança veicular é estritamente subjetiva, uma vez que trata da interação do motorista e dos passageiros em relação ao veículo e à pista. Para fins de pesquisa, o conforto relaciona-se com a massa suspensa e com o ambiente interno do veículo, e a segurança relaciona-se com as massas não suspensas e com o perfil da pista. Dessa forma, a suspensão tem a função de transmitir o mínimo possível das irregularidades da pista e de melhorar a dirigibilidade do motorista para garantir segurança.

Bester (2003) realizou uma extensa pesquisa acerca dos efeitos do perfil da pista na segurança de veículos que trafegavam na África do Sul e, frequentemente, sofriam acidentes. O tráfego contínuo, a baixa qualidade de dirigibilidade e as más condições da via eram muito questionadas, mas nada referente ao perfil da estrada. Após três anos de pesquisa, o autor descobriu que as estradas mais largas reduzem as taxas de acidentes, os terrenos acidentados e rugosos aumentam essas taxas e a má dirigibilidade pode ou não influenciá-las, especialmente em terrenos cuja topologia é variável. No entender do pesquisador, a suspensão tem papel fundamental na segurança, o esterçamento é influenciado diretamente pelas forças laterais e indiretamente pela largura da estrada (estradas largas permitiam o controle de direção, e

estradas curtas implicavam acidentes) e a frenagem é alterada pela rugosidade da pista, uma vez que há perda na força dos freios ou na resistência ao deslizamento do veículo. Ao comparar com estudos realizados em países como Israel, Suécia e Finlândia, Bester (2003) pôde classificar os tipos de acidentes e correlacioná-los às possíveis causas inerentes ao perfil da estrada. Em seus resultados, o autor concluiu que a segurança refere-se basicamente ao contato entre a estrada e o veículo (condição passível de solução de engenharia) e é influenciada também pelo comportamento do motorista (condição passível de solução via legislação).

Conforme Faheem (2006), os automóveis são compostos de diversos subsistemas, os quais incluem motor, suspensão, chassi, transmissão e frenagem, caracterizando um problema do tipo multicorpo. No seu entender, o motor está devidamente isolado para amenizar os ruídos aos passageiros e ao motorista, mas ainda há duas razões, no mínimo, para aprimorar o projeto da montagem e de isolamento dos motores em veículos: os requisitos de vibração para os passageiros – porque estão diretamente relacionados à aceleração vertical transmitida – e o projeto de veículos mais leves e mais potentes. Essa redução de peso aumenta a vibração e o nível de ruído para os passageiros, porque o motor é projetado para gerar grandes potências, e a massa suspensa é mais leve. Faheem (2006, p. 67, tradução nossa) afirma em seu trabalho que o “[...] fator de conforto pode ser definido como a raiz quadrada da média temporal das acelerações verticais transmitidas ao quadrado.” Nesse sentido, a aceleração vertical *rms* pode ser considerada como indicativo numérico para fins de conforto.

Malmedahl (2006) também reforça a importância de se avaliar a aceleração vertical *rms* transmitida. Em seus estudos, o autor esboça uma série de curvas, dentre as quais é possível traçar uma zona de perigo onde a saúde humana é comprometida conforme o tempo de exposição a um ambiente de vibração com determinada aceleração vertical equivalente. O autor conclui que existem pesquisas para determinar os diferentes perfis de pista e, com isso, obter uma norma para regulamentar os projetos de construção de vias e pavimentação. Para Malmedahl (2006), é importante empregar uma metodologia capaz de aliar a estatística das irregularidades, a qualidade de dirigibilidade e a reação do sistema de suspensão com o objetivo de estabelecer uma correlação entre o nível de conforto e o perfil da pista por meio de poucos parâmetros físicos (no caso, a aceleração vertical *rms* obtida).

Palmer *et al.* (2000) discute a vibração como uma fonte de riscos ocupacionais mais observada em ambiente industriais, sobretudo às dores lombares em motoristas. Esse aspecto

é previsto por White e Panjabi (1990) referente ao uso de veículos na indústria e o aumento da incidência de dores nas costas de seus usuários. Nesse sentido, determinar o conforto dos passageiros é uma tarefa difícil, pois a variação de sensibilidade de cada indivíduo não apresenta uma função comportada em relação à vibração (WONG, 2001). A norma britânica BS 6841 (1987) utiliza critérios numéricos para relacionar a aceleração *rms* ponderada pela frequência como um indicador de conforto, o que pode ser vislumbrado na Tabela 2.2:

Tabela 2.2 – Escala de desconforto para padrões europeus

Índice de Desconforto	Escala
Menor do que 0,315 m/s ²	Confortável
Entre 0,315 m/s ² a 0,63 m/s ²	Levemente confortável
Entre 0,5 m/s ² a 1,0 m/s ²	Pouco confortável
Entre 0,8 m/s ² a 1,6 m/s ²	Desconfortável
Entre 1,25 m/s ² a 2,5 m/s ²	Muito desconfortável
Maior do que 2,5 m/s ²	Extremamente desconfortável

Fonte: BS 6841 (1987, p. 21, adaptado).

No sentido de avaliar a condição de desconforto, Fai, Delbressine e Rauterberg (2007) realizaram um estudo geral do estado da arte nas pesquisas recentes de modelos veiculares. Os autores reuniram as causas de possíveis desconfortos, provenientes basicamente do assento do veículo, conforme a Quadro 2.2 a seguir:

Quadro 2.2 – Causas de desconforto no assento

Experiência Humana	Interação Biomecânica		Interação com o Assento
	Efeitos Fisiológicos	Variáveis de Engenharia	Fonte
Dor	Oclusão Circulatória	Pressão	Rigidez do Assento
Dor	Esquemia	Pressão	Rigidez do Assento
Dor	Oclusão Neural	Pressão	Contorno do Assento
Desconforto		Vibração	Dirigibilidade do Veículo
Transpiração	Coração	Porosidade do Material	Estofamento
Percepção	Audição, tato e visão	Design e Vibração	Custo do Veículo

Fonte: Fai, Delbressine e Rauterberg (2007, p. 52, adaptado).

De um modo geral, o quadro reúne os efeitos fisiológicos, as variáveis de engenharia e as possíveis fontes para que a experiência humana esteja desconfortável e perigosa. As experiências que o ser humano enfrenta são, em sua maioria, dores na região de contato com o assento (por exemplo, a lombar e os glúteos). A rigidez e o amortecimento equivalentes do assento são variáveis de projeto interessantes de se otimizar, pois podem evitar uma série de

dores fisiológicas aos passageiros. Mesmo assim, a pista pode ser muito prejudicial, pois, em situações onde o perfil de irregularidades é extremamente acentuado, a vibração excessiva causa desconforto e afeta a visão do motorista, o que pode reduzir a dirigibilidade e ocasionar acidentes.

3 MODELO PROPOSTO

O desenvolvimento analítico do modelo proposto compreende basicamente duas etapas. A primeira etapa discute um modelo de dois graus de liberdade a fim de validar, posteriormente, a estrutura do algoritmo proposto. A segunda apresenta, descreve e discute um modelo de oito graus de liberdade. Ambos os modelos utilizam a técnica de multicorpos, fundamentada na utilização de parâmetros concentrados e, no caso, aplicada no domínio da frequência.

3.1 MODELO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

O modelo mais simples, de apenas dois graus de liberdade, é discutido para elucidar o equacionamento, facilitar a compreensão e validar a estrutura geral do algoritmo. Ele serve para testar e comparar posteriormente o algoritmo com outros trabalhos desenvolvidos na área (SUN; CAI; YANG, 2007; GOMES, 2009). A Figura 3.1 exibe o esboço do modelo massa-mola-amortecedor (**MKC**) de dois graus de liberdade a ser equacionado:

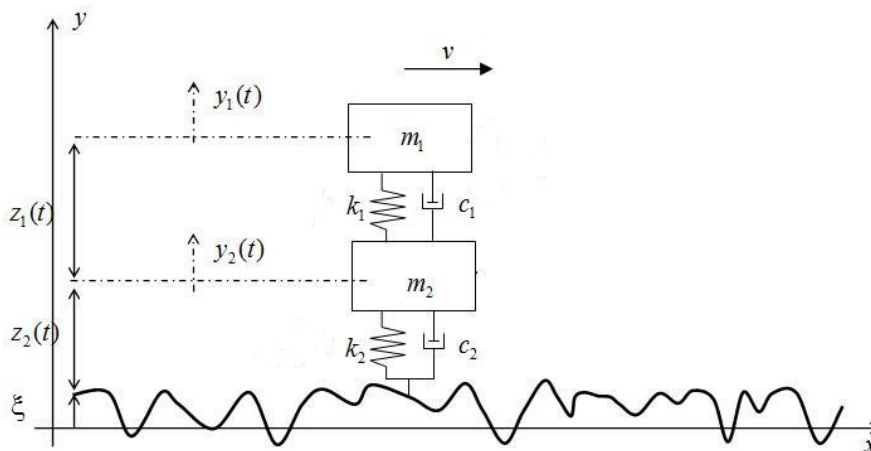


Figura 3.1 – Modelo esquemático de dois graus de liberdade

Fonte: Gomes (2009, não paginado, adaptado).

3.1.1 Considerações e Hipóteses

O modelo de dois graus de liberdade apresenta considerações e hipóteses pertinentes ao problema em que é aplicado. Essas simplificações permitem trabalhar o modelo de forma a compreender o fenômeno, mas dificilmente oferecem condições para implicações em projetos de engenharia. Normalmente, utilizam-se os modelos de dois graus de liberdade como uma ferramenta de pré-projeto. Nesse aspecto, as restrições adotadas são as seguintes:

- a) o modelo e seus parâmetros são lineares;
- b) o modelo não prevê descolamento do pneu com o perfil de estrada;
- c) o modelo não prevê completamente a dinâmica de um veículo, pois não é capaz de representar os movimentos de arfagem, guinada e rolagem;
- d) o pneu está em contato pontual com a pista;
- e) o veículo desloca-se numa trajetória retilínea.

Newland (1987), Sun, Cai e Yang (2007) e Gomes (2009) são autores que utilizam o modelo de dois graus de liberdade como objeto de estudo, seja para fins didáticos ou para realizar processos de otimização, e adotam considerações semelhantes. Nesse trabalho, esse modelo tem a função de compreender o fenômeno da aceleração vertical *rms* transmitida e de validar a estrutura do algoritmo proposto.

3.1.2 Aplicabilidade do Modelo

O modelo de dois graus de liberdade é usualmente aplicado na etapa de pré-projeto, válido para representar um quarto de veículo sem descolamento com o perfil da pista – isto é, um conjunto pneu-roda do veículo. Ele não prevê completamente a dinâmica veicular, mas pode ser usado para compreender o fenômeno estudado e obter soluções analíticas fechadas para o conjunto pneu-roda.

Nesse sentido, o modelo de dois graus de liberdade não é totalmente válido a fim de representar um veículo qualquer submetido a um perfil de irregularidades, pois é incapaz de agregar as equações de movimento referentes aos ângulos de arfagem, guinada e rolagem. Em casos onde o movimento vertical é unicamente o objeto de estudo, o modelo de dois graus

pode ser empregado satisfatoriamente. Além disso, esse modelo permite aplicar o processo de otimização para obter parâmetros ótimos de massa, uma vez que os momentos de inércia de massa são inaplicáveis nesse modelo.

3.1.3 Formulação Matemática para Análise Espectral do Modelo de ¼ Veículo

O modelo de dois graus de liberdade é formulado segundo as equações de movimento do modelo descritas abaixo. Admite-se que há apenas liberdade de movimento na direção vertical y e que o tratamento inicial dessas equações está no domínio do tempo.

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{\xi}) + k_1(y_2 - y_1) + k_2(y_2 - \xi) = 0 \quad (3.1)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_1(y_1 - y_2) = 0 \quad (3.2)$$

em que m_1 e m_2 são, respectivamente, a massa suspensa e a massa não suspensa, dadas em kg, c_1 e c_2 são, respectivamente, o coeficiente de amortecimento da suspensão e do pneu, dados em Ns/m, k_1 e k_2 são, respectivamente, as rigidezes da suspensão e do pneu, dados em N/m, y_1 e y_2 são o deslocamento da massa suspensa e da massa não suspensa, em metros, e, do mesmo modo, \dot{y}_1 , \dot{y}_2 , \ddot{y}_1 e \ddot{y}_2 são as velocidades e as acelerações da massa suspensa e da massa não suspensa, em m/s e m/s², respectivamente. ξ representa o perfil de irregularidades da pista, em metros.

Considera-se que $z_1(t) = y_2(t) - y_1(t)$ e que $z_2(t) = \xi - y_2(t)$ são as deflexões (ou deslocamentos) relativas das massas envolvidas. Em seguida, faz-se a mudança de variáveis e divide-se pela massa de cada equação:

$$\ddot{\xi} - \ddot{z}_2 + \frac{c_1}{m_2} \dot{z}_1 - \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_2 + \frac{k_1}{m_2} z_1 - \frac{k_2}{m_2} z_2 = 0 \quad (3.3)$$

$$\ddot{\xi} - \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 - \frac{c_1}{m_1} \dot{z}_1 - \frac{k_1}{m_1} z_1 = 0 \quad (3.4)$$

Aplica-se a Transformada de Fourier, conforme disposto no Apêndice A, para que as equações estejam no domínio da frequência. Insere-se, então, a formulação matricial para que se tenha a seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - i\omega(c_2/m_2) - (k_2/m_2) & i\omega(c_1/m_2) + (k_1/m_2) \\ \omega^2 & \omega^2 + i\omega(c_1/m_1) + (k_1/m_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2(\omega) \\ H_1(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \\ \omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

em que $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$ representam a função de resposta de frequência (FRF). É possível isolar as variáveis do sistema e obter o valor correspondente das FRFs conforme a seguir:

$$H_1(\omega) = \frac{\omega^3 i\alpha_2 + \omega^2 \beta_2}{-\omega^4 + i\omega^3 H_a + \omega^2 H_b + i\omega H_c + H_d} \quad (3.6)$$

$$H_2(\omega) = \frac{\omega^4 + \omega^3(i\alpha_1 - i\mu\alpha_1) + \omega^2(\beta_1 - \mu\beta_1)}{-\omega^4 + i\omega^3 H_a + \omega^2 H_b + i\omega H_c + H_d} \quad (3.7)$$

onde os coeficientes H_a , H_b , H_c e H_d são dados a seguir. Sabe-se também que $\alpha_1 = c_1/m_1$, $\alpha_2 = c_2/m_2$, $\beta_1 = k_1/m_1$, $\beta_2 = k_2/m_2$ e $\mu = m_1/m_2$ conforme desenvolvido por Gomes (2009, não paginado).

$$H_a = -\alpha_1 + \alpha_2 + \mu\alpha_1 \quad (3.8)$$

$$H_b = \beta_2 - \beta_1 + \mu\beta_1 - \alpha_1\alpha_2 \quad (3.9)$$

$$H_c = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \quad (3.10)$$

$$H_d = \beta_1\beta_2 \quad (3.11)$$

Por meio da teoria das densidades espectrais apresentado por Newland (1987) e por Mendes e Oliveira (2008), sabe-se que é possível correlacionar a densidade espectral dos deslocamentos das massas suspensas e das massas não suspensas com a densidade espectral do perfil de irregularidades da pista. Essa relação é exibida pelas Eqs. (3.12) e (3.13) a seguir:

$$S_{z_1}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 S_\xi(\omega) \quad (3.12)$$

$$S_{z_2}(\omega) = |H_2(\omega)|^2 S_\xi(\omega) \quad (3.13)$$

onde $S_{z_1}(\omega)$ e $S_{z_2}(\omega)$ são a densidade espectral da massa suspensa e da massa não suspensa, respectivamente, e $S_\xi(\omega)$ é a densidade espectral do perfil de irregularidades da pista.

A densidade espectral do perfil de irregularidades da pista, $S_{\xi}(\omega)$, pode ser obtida por meio da densidade espectral unilateral da mesma, $G_{\xi}(\omega)$, conforme a seguir:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{4\pi v} G_{\xi}(\omega) \quad (3.14)$$

em que v é a velocidade do veículo, em m/s. Por meio das Eqs. (3.12), (3.13) e (3.14), podem-se calcular diversos parâmetros do sistema. Esse cálculo integra a densidade espectral do grau de liberdade de interesse dentro de um limite de integração escolhido conforme previamente discutido na subseção 2.2.3. Para fins de exemplificação, é possível determinar a variância da deflexão da suspensão, $\sigma_{z_1}^2$, substituindo a Eq. (3.14) na Eq. (3.12) e integrando no intervalo de interesse, da seguinte forma:

$$\sigma_{z_1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{z_1}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} |H_1(\omega)|^2 \frac{1}{4\pi v} G_{\xi}(\omega) \quad (3.15)$$

Esse procedimento de cálculo no domínio da frequência também pode ser estruturado para calcular outras variáveis de interesse, como deslocamentos, velocidades e acelerações de qualquer grau de liberdade modelado. De posse das densidades espectrais de entrada por meio do perfil de irregularidades da pista, esse procedimento de cálculo pode ser empregado em modelos mais complexos, conforme a ser discutido a seguir.

3.2 MODELO DE OITO GRAUS DE LIBERDADE

O modelo proposto apresenta oito graus de liberdade, conforme a Fig. 3.2, composto de duas partes: uma referente ao assento do motorista e outra referente à carroceria. O assento possui um único grau de liberdade, e a carroceria, sete graus de liberdade (quatro massas não suspensas em cada eixo, uma massa suspensa na carroceria, arfagem e rolagem da mesma). O conjunto completo tem, portanto, oito graus de liberdade, submetido à excitação do perfil de estrada e, posteriormente, ao processo de otimização para minimizar a aceleração vertical *rms* transmitida ao motorista.

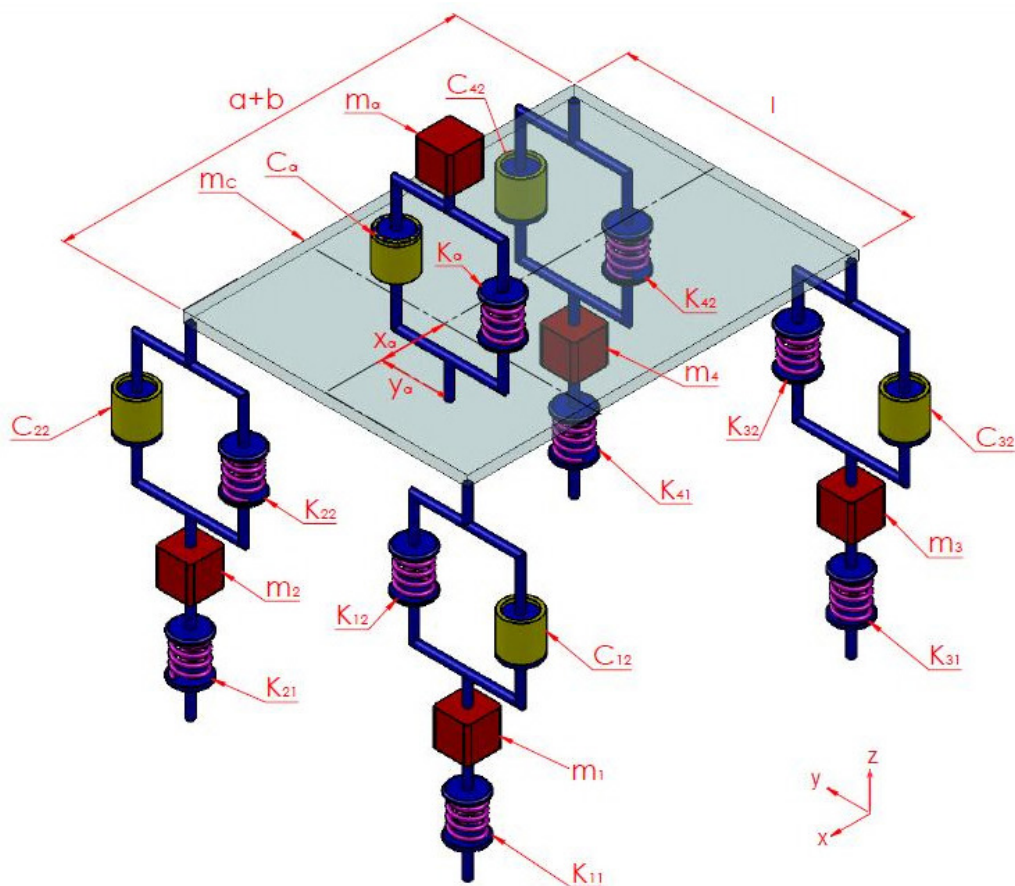


Figura 3.2 – Modelo esquemático do veículo com o assento

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

Esse sistema é composto pela massa da carroceria, m_c , e pelas massas não suspensas, m_1 , m_2 , m_3 , m_4 , em kg, pelos coeficientes de amortecimento da suspensão, C_{12} , C_{22} , C_{32} , C_{42} , em Ns/m, e pelos coeficientes de rigidez dos pneus, K_{11} , K_{21} , K_{31} , K_{41} e da suspensão, K_{12} , K_{22} , K_{32} , K_{42} , em N/m. Para o assento, sabe-se que m_a é a massa do assento, em kg; K_a é o coeficiente de rigidez do assento, em N/m; C_a é o coeficiente de amortecimento do assento, em Ns/m. Além disso, x_a é a posição x do assento em relação ao centro de gravidade da carroceria; y_a é a posição y do assento em relação ao centro de gravidade da carroceria, ambas em metros; a é a distância do eixo dianteiro do veículo até o centro de gravidade, em metros; b é a distância do eixo traseiro do veículo até o centro de gravidade, em metros; $a + b$ é a distância entre eixos, em metros; e l é a largura do veículo, também em metros.

3.2.1 Considerações e Hipóteses

O modelo proposto não é totalmente isento de simplificações físicas e matemáticas. Essas considerações e hipóteses permitem trabalhar o modelo nos processos de otimização de forma satisfatória sem grandes perdas com a realidade dinâmica do veículo. As considerações são as seguintes:

- a) o modelo e seus parâmetros são lineares;
- b) o modelo não prevê descolamento do pneu com o perfil de estrada;
- c) o assento está localizado fora do centro de massa da carroceria;
- d) o veículo desloca-se numa trajetória retilínea;
- e) os pneus estão em contato pontual com a pista;
- f) não é considerado o movimento de guinada;
- g) as suspensões são independentes.

O principal motivo de adotar essas considerações reside na simplificação do modelo para avaliar somente a redução da aceleração vertical transmitida pelo assento. Isso significa que todas as forças laterais são desprezadas (uma vez que o veículo trafega em linha reta) e, por conseguinte, não há necessidade de considerar os movimentos de guinada. Além disso, a hipótese dos pneus estarem em contato pontual com a pista implica que as irregularidades do perfil com comprimentos de onda contidos na zona de contato não têm influência no processo. Assume-se que a área de contato é infinitesimal, o que permite captar a menor irregularidade possível dentro de um dado comprimento de onda.

O modelo pode ser aprimorado posteriormente, considerando as não linearidades, os controles ativos de suspensão, o posicionamento do assento na carroceria e o deslocamento do veículo numa trajetória não retilínea. Nesse trabalho, entretanto, empregar tais limitações são suficientes para dar um primeiro passo e estudar o comportamento dinâmico do veículo em termos de aceleração vertical e realizar o processo de otimização pertinente.

3.2.2 Aplicabilidade do Modelo

O modelo não é aplicado em todos os tipos de veículos. Ele não prevê as condições de carregamento típicas em caminhões, nem as suspensões do assento do motorista de um ônibus ou de um caminhão. Não obstante, o modelo aqui proposto supre as necessidades de se avaliar a aceleração vertical transmitida pelo assento em veículos de passeio. Para outras aplicações, são necessárias algumas correções, como por exemplo:

- a) inserir um grau de liberdade no assento do motorista para representar a estrutura em forma de sanfona presente nos ônibus e caminhões;
- b) inserir pelo menos um grau de liberdade para representar a carga de um caminhão;
- c) deslocar o centro de massa do caminhão para situações onde há carga;
- d) modificar as equações dos momentos de inércia em função da massa (nos casos em que forem otimizadas as massas do sistema).

Portanto, o modelo proposto é válido para veículos com dois (ou mais) eixos em contato, sem descolamento com o perfil da pista – isto é, um eixo dianteiro com duas rodas e um ou mais eixos traseiros com duas rodas. Sugere-se que não se faça a otimização das massas, pois os momentos de inércia não estão explicitamente escritos em função da massa. Mesmo assim, a maioria dos veículos de passeio se enquadra nessa condição (com um eixo dianteiro e outro traseiro, sem estrutura de suspensão nos assentos da carroceria), e é esse tipo de exemplo que é simulado numericamente.

3.2.3 Modelo do Assento sob Abordagem das Equações de Movimento

O assento é modelado com um grau de liberdade conforme a Fig. 3.3. Ele representa o que normalmente é confirmado num assento de um veículo de passeio comum, sem nenhum tipo de suspensão especial, apenas o banco, a almofada e a estrutura metálica que, juntas, são concentradas nos parâmetros m_a , K_a e C_a , conforme a seguir:

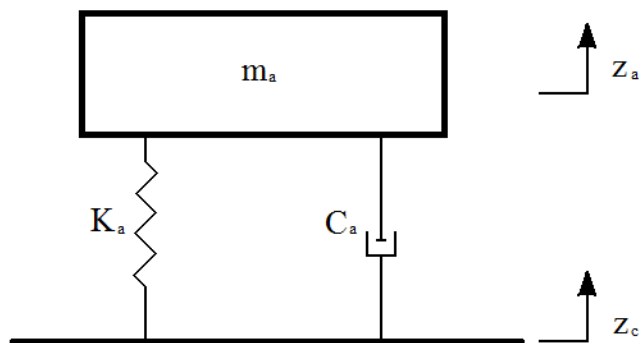


Figura 3.3 – Modelo esquemático do assento

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

Parte-se do domínio do tempo para realizar o somatório de forças e, posteriormente, realizar a Transformada de Fourier no sistema matricial. A Equação (3.16), portanto, descreve o comportamento dinâmico do assento conforme a Fig. (3.3):

$$m_a \ddot{z}_a = -K_a(z_a - z_c - x_a \theta - y_a \phi) - C_a(\dot{z}_a - \dot{z}_c - x_a \dot{\theta} - y_a \dot{\phi}) \quad (3.16)$$

onde m_a é a massa do assento, em kg; K_a é o coeficiente de rigidez do assento, em N/m; C_a é o coeficiente de amortecimento do assento, em Ns/m; z_a é o deslocamento vertical do assento, em metros; z_c é o deslocamento vertical da carroceria, em metros; \dot{z}_a é a velocidade vertical do assento, em m/s; \dot{z}_c é a velocidade vertical da carroceria, em m/s; \ddot{z}_a é a aceleração vertical do assento, em m/s²; \ddot{z}_c é a aceleração vertical da carroceria, em m/s²; θ é o deslocamento angular de arfagem, em rad; ϕ é o deslocamento angular de rolagem, em rad; $\dot{\theta}$ é a velocidade angular de arfagem, em rad/s; e $\dot{\phi}$ é a velocidade angular de rolagem, em rad/s. Além disso, sabe-se que x_a é a posição x do assento em relação ao centro de gravidade da carroceria, e y_a é a posição y do assento em relação ao centro de gravidade da carroceria, ambas em metros.

3.2.4 Modelo da Carroceria sob Abordagem das Equações de Movimento

O modelo massa-mola-amortecedor (**MKC**) proposto para a carroceria é demonstrado anteriormente na Fig. 3.2. Nele, os movimentos verticais, a rolagem (*roll*) e a arfagem (*pitch*) estão em função do deslocamento, da velocidade e da aceleração. Para Bouazara, Richard e

Rakheja (2006), os movimentos de guinada (*yaw*) podem ser negligenciados, porque os seus efeitos (em termos de conforto e dirigibilidade verticais) têm pouca influência.

Não são considerados amortecimentos provenientes de uma eventual força de controle; portanto, o modelo do veículo proposto não é ativo. Também não é considerado o efeito do amortecimento proveniente dos pneus. Esse efeito é normalmente negligenciado por autores na área, uma vez que a contribuição dos efeitos da rigidez do pneu é significativamente maior do que o amortecimento (BOUAZARA; RICHARD; RAKHEJA, 2006; MALMEDAHL, 2006; SHIRAHATT *et al.*, 2008).

A carroceria é representada pela Eq. (3.17) a seguir. Ela considera a interação entre os movimentos do veículo com os do assento.

$$m_c \ddot{z}_c = A_a - A_{12} - A_{22} - A_{32} - A_{42} \quad (3.17)$$

onde, para fins de simplificação, os coeficientes da Eq. (3.17) são devidamente separados e obtidos pelas seguintes expressões:

$$A_a = K_a(z_a - z_c - x_a\theta - y_a\phi) + C_a(\dot{z}_a - \dot{z}_c - x_a\dot{\theta} - y_a\dot{\phi}) \quad (3.18)$$

$$A_{12} = K_{12}\left(z_{12} - z_{11} - a\theta + \frac{l}{2}\phi\right) + C_{12}\left(\dot{z}_{12} - \dot{z}_{11} - a\dot{\theta} + \frac{l}{2}\dot{\phi}\right) \quad (3.19)$$

$$A_{22} = K_{22}\left(z_{22} - z_{21} - a\theta - \frac{l}{2}\phi\right) + C_{22}\left(\dot{z}_{22} - \dot{z}_{21} - a\dot{\theta} - \frac{l}{2}\dot{\phi}\right) \quad (3.20)$$

$$A_{32} = K_{32}\left(z_{32} - z_{31} + b\theta + \frac{l}{2}\phi\right) + C_{32}\left(\dot{z}_{32} - \dot{z}_{31} + b\dot{\theta} + \frac{l}{2}\dot{\phi}\right) \quad (3.21)$$

$$A_{42} = K_{42}\left(z_{42} - z_{41} + b\theta - \frac{l}{2}\phi\right) + C_{42}\left(\dot{z}_{42} - \dot{z}_{41} + b\dot{\theta} - \frac{l}{2}\dot{\phi}\right) \quad (3.22)$$

Sabe-se anteriormente que K_a é o coeficiente de rigidez do assento, em N/m; C_a é o coeficiente de amortecimento do assento, em Ns/m; z_a é o deslocamento vertical do assento, em metros; z_c é o deslocamento vertical da carroceria, em metros; \dot{z}_a é a velocidade vertical do assento, em m/s; \dot{z}_c é a velocidade vertical da carroceria, em m/s; \ddot{z}_a é a aceleração vertical do assento, em m/s²; \ddot{z}_c é a aceleração vertical da carroceria, em m/s²; θ é o deslocamento angular de arfagem, em rad; ϕ é o deslocamento angular de rolagem, em rad; $\dot{\theta}$ é a velocidade angular de arfagem, em rad/s; e $\dot{\phi}$ é a velocidade angular de rolagem, em rad/s.

Os quatro conjuntos pneu-roda são descritos pela Eqs. (3.23) a (3.26). Para fins de esclarecimento, os subíndices de 1 a 4 correspondem, respectivamente, cada um dos conjuntos massa-mola-amortecedor (que representa a roda, o pneu e a suspensão de $\frac{1}{4}$ da carroceria), e os subíndices de 1 a 2 correspondem, respectivamente, às massas não suspensas e suspensas do modelo. Os coeficientes A_{ij} são os mesmos da Eq. (3.17).

$$m_1 \ddot{z}_1 = A_{12} - K_{11}(z_{11} - q_1) \quad (3.23)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = A_{22} - K_{21}(z_{21} - q_2) \quad (3.24)$$

$$m_3 \ddot{z}_3 = A_{32} - K_{31}(z_{31} - q_3) \quad (3.25)$$

$$m_4 \ddot{z}_4 = A_{42} - K_{41}(z_{41} - q_4) \quad (3.26)$$

onde q_1, q_2, q_3 e q_4 representam as irregularidades da pista, em metros, que afetam cada um dos pneus do veículo. Não é previsto o descolamento desse contato. Incluem-se também as variáveis referentes aos deslocamentos verticais relativos dos quatro conjuntos de pneu-roda, $z_{11}, z_{21}, z_{31}, z_{41}, z_{12}, z_{22}, z_{32}$ e z_{42} , em metros; às velocidades verticais relativas desses conjuntos, $\dot{z}_{11}, \dot{z}_{21}, \dot{z}_{31}, \dot{z}_{41}, \dot{z}_{12}, \dot{z}_{22}, \dot{z}_{32}$ e \dot{z}_{42} , em m/s; e às acelerações verticais pertinentes, $\ddot{z}_1, \ddot{z}_2, \ddot{z}_3$ e \ddot{z}_4 , em m/s².

O movimento de arfagem é mais um grau de liberdade previsto pelo modelo. Ele é representado pela Eq. (3.27) a seguir:

$$I_y \ddot{\theta} = a(A_{12} + A_{22}) - b(A_{32} - A_{42}) - x_a A_a \quad (3.27)$$

onde I_y representa o momento de inércia de massa na arfagem, em kgm², e $\ddot{\theta}$ é a aceleração angular de arfagem, em rad/s². Os coeficientes A_{ij} são os mesmos da Eq. (3.17).

O movimento de rolagem é o último grau de liberdade considerado. Ele é representado pela Eq. (3.28) a seguir:

$$I_x \ddot{\phi} = -A_{I_{sx}} + B_{I_{sx}} - C_{I_{sx}} + D_{I_{sx}} - y_a A_a \quad (3.28)$$

onde I_x indica o momento de inércia de massa na rolagem, em kgm^2 , e $\ddot{\phi}$ é a aceleração angular de rolagem, em rad/s^2 . Conforme desenvolvido na Eq. (3.17), a Eq. (3.28) também é separada em diferentes parcelas para uma melhor visualização:

$$A_{I_{sx}} = \frac{l}{2}K_{12} \left(z_{12} - z_{11} - a\theta + \frac{l}{2}\phi \right) - \frac{l}{2}C_{12} \left(\dot{z}_{12} - \dot{z}_{11} - a\dot{\theta} + \frac{l}{2}\dot{\phi} \right) \quad (3.29)$$

$$B_{I_{sx}} = \frac{l}{2}K_{22} \left(z_{22} - z_{21} - a\theta - \frac{l}{2}\phi \right) - \frac{l}{2}C_{22} \left(\dot{z}_{22} - \dot{z}_{21} - a\dot{\theta} - \frac{l}{2}\dot{\phi} \right) \quad (3.30)$$

$$C_{I_{sx}} = \frac{l}{2}K_{32} \left(z_{32} - z_{31} + b\theta + \frac{l}{2}\phi \right) + \frac{l}{2}C_{32} \left(\dot{z}_{32} - \dot{z}_{31} + b\dot{\theta} + \frac{l}{2}\dot{\phi} \right) \quad (3.31)$$

$$D_{I_{sx}} = \frac{l}{2}K_{42} \left(z_{42} - z_{41} + b\theta - \frac{l}{2}\phi \right) - \frac{l}{2}C_{42} \left(\dot{z}_{42} - \dot{z}_{41} + b\dot{\theta} - \frac{l}{2}\dot{\phi} \right) \quad (3.32)$$

O modelo da carroceria apresenta sete graus de liberdade que, juntamente com o grau do assento, totalizam os oito graus de liberdade propostos no modelo. O grau da carroceria é representado pela Eq. (3.17), os graus dos quatro conjuntos pneu-roda são representados pelas Eqs. (3.23) a (3.26), o grau de liberdade de arfagem é representado pela Eq. (3.27) e o grau de liberdade de rolagem é representado pela Eq. (3.28). O assento é descrito pela Eq. (3.16).

3.2.5 Representação Matricial do Modelo Completo

O modelo completo (carroceria e assento associados) pode ser exibido e trabalhado na forma matricial. Para todos os coeficientes a serem listados, sabe-se que x_a é a posição x do assento em relação ao centro de gravidade da carroceria, em metros; y_a é a posição y do assento em relação ao centro de gravidade da carroceria, em metros; a é a distância do eixo dianteiro do veículo até o centro de gravidade, em metros; b é a distância do eixo traseiro do veículo até o centro de gravidade, em metros; $a + b$ é a distância entre eixos, em metros; l é a largura do veículo, em metros.

A matriz de massa \mathbf{M} , em kg, é dada a seguir. Admite-se que todos os parâmetros são concentrados no centro de gravidade de cada elemento, o que torna a matriz \mathbf{M} em uma matriz diagonal.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

onde m_a é a massa do assento, m_c é a massa da carroceria, I_y é o momento de inércia de massa na arfagem, I_x é o momento de inércia de massa na rolagem, m_1 é a massa do conjunto pneu-suspensão dianteira esquerda, m_2 é a massa do conjunto pneu-suspensão dianteira direita, m_3 é a massa do conjunto pneu-suspensão traseira esquerda e m_4 é a massa do conjunto pneu-suspensão traseira direita. Esses coeficientes estão de acordo com as equações expostas anteriormente.

A matriz de rigidez equivalente \mathbf{K} , em N/m, é dada a seguir. Ela está organizada na forma de elementos k_{ij} e, em seguida, são descritos cada um de seus termos. Esses termos são normalmente parâmetros de entrada do sistema, embora possam ser utilizados como variáveis de projeto no processo de otimização também.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde

$$k_{11} = -K_a \quad (3.35)$$

$$k_{12} = k_{21} = K_a \quad (3.36)$$

$$k_{13} = k_{31} = x_a K_a \quad (3.37)$$

$$k_{14} = k_{41} = y_a K_a \quad (3.38)$$

$$k_{15} = k_{51} = 0 \quad (3.39)$$

$$k_{16} = k_{61} = 0 \quad (3.40)$$

$$k_{17} = k_{71} = 0 \quad (3.41)$$

$$k_{18} = k_{81} = 0 \quad (3.42)$$

$$k_{22} = -K_a - (K_{12} + K_{22} + K_{32} + K_{42}) \quad (3.43)$$

$$k_{23} = k_{32} = a(K_{12} + K_{22}) - b(K_{32} + K_{42}) - x_a K_a \quad (3.44)$$

$$k_{24} = k_{42} = \frac{l}{2}(-K_{12} + K_{22} - K_{32} + K_{42}) - y_a K_a \quad (3.45)$$

$$k_{25} = k_{52} = -K_{12} \quad (3.46)$$

$$k_{26} = k_{62} = -K_{22} \quad (3.47)$$

$$k_{27} = k_{72} = -K_{32} \quad (3.48)$$

$$k_{28} = k_{82} = -K_{42} \quad (3.49)$$

$$k_{33} = -a^2(K_{12} + K_{22}) - b^2(K_{32} + K_{42}) - x_a^2 K_a \quad (3.50)$$

$$k_{34} = k_{43} = a \frac{l}{2}(K_{12} - K_{22}) + b \frac{l}{2}(K_{42} - K_{32}) - x_a y_a K_a \quad (3.51)$$

$$k_{35} = k_{53} = a K_{12} \quad (3.52)$$

$$k_{36} = k_{63} = a K_{22} \quad (3.53)$$

$$k_{37} = k_{73} = -b K_{32} \quad (3.54)$$

$$k_{38} = k_{83} = -b K_{42} \quad (3.55)$$

$$k_{44} = -\frac{l^2}{4}(K_{12} + K_{22} + K_{32} + K_{42}) - y_a^2 K_a \quad (3.56)$$

$$k_{45} = k_{54} = -\frac{l}{2} K_{12} \quad (3.57)$$

$$k_{46} = k_{64} = \frac{l}{2} K_{22} \quad (3.58)$$

$$k_{47} = k_{74} = -\frac{l}{2} K_{32} \quad (3.59)$$

$$k_{48} = k_{84} = \frac{l}{2} K_{42} \quad (3.60)$$

$$k_{55} = K_{11} + K_{12} \quad (3.61)$$

$$k_{56} = k_{65} = 0 \quad (3.62)$$

$$k_{57} = k_{75} = 0 \quad (3.63)$$

$$k_{58} = k_{85} = 0 \quad (3.64)$$

$$k_{66} = K_{21} + K_{22} \quad (3.65)$$

$$k_{67} = k_{76} = 0 \quad (3.66)$$

$$k_{68} = k_{86} = 0 \quad (3.67)$$

$$k_{77} = K_{31} + K_{32} \quad (3.68)$$

$$k_{78} = k_{87} = 0 \quad (3.69)$$

$$k_{88} = K_{41} + K_{42} \quad (3.70)$$

A matriz de amortecimento \mathbf{C} , em Ns/m, é dada a seguir. Similarmente, os elementos c_{ij} da matriz são descritos em função das variáveis de entrada do sistema, as quais podem ser utilizadas como variáveis de projeto no processo de otimização também.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} & C_{67} & C_{68} \\ C_{71} & C_{72} & C_{73} & C_{74} & C_{75} & C_{76} & C_{77} & C_{78} \\ C_{81} & C_{82} & C_{83} & C_{84} & C_{85} & C_{86} & C_{87} & C_{88} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

onde

$$c_{11} = -C_a \quad (3.72)$$

$$c_{12} = c_{21} = C_a \quad (3.73)$$

$$c_{13} = c_{31} = x_a C_a \quad (3.74)$$

$$c_{14} = c_{41} = y_a C_a \quad (3.75)$$

$$c_{15} = c_{51} = 0 \quad (3.76)$$

$$c_{16} = c_{61} = 0 \quad (3.77)$$

$$c_{17} = c_{71} = 0 \quad (3.78)$$

$$c_{18} = c_{81} = 0 \quad (3.79)$$

$$c_{22} = -C_a - (C_{12} + C_{22} + C_{32} + C_{42}) \quad (3.80)$$

$$c_{22} = -C_a - (C_{12} + C_{22} + C_{32} + C_{42}) \quad (3.80)$$

$$c_{23} = c_{32} = a(C_{12} + C_{22}) - b(C_{32} + C_{42}) - x_a C_a \quad (3.81)$$

$$c_{24} = c_{42} = \frac{l}{2}(-C_{12} + C_{22} - C_{32} + C_{42}) - y_a C_a \quad (3.82)$$

$$c_{25} = c_{52} = -C_{12} \quad (3.83)$$

$$c_{26} = c_{62} = -C_{22} \quad (3.84)$$

$$c_{27} = c_{72} = -C_{32} \quad (3.85)$$

$$c_{28} = c_{82} = -C_{42} \quad (3.86)$$

$$c_{33} = -a^2(C_{12} + C_{22}) - b^2(C_{32} + C_{42}) - x_a^2 C_a \quad (3.87)$$

$$c_{34} = c_{43} = a \frac{l}{2} (C_{12} - C_{22}) + b \frac{l}{2} (C_{42} - C_{32}) - x_a y_a C_a \quad (3.88)$$

$$c_{35} = c_{53} = a C_{12} \quad (3.89)$$

$$c_{36} = c_{63} = a C_{22} \quad (3.90)$$

$$c_{37} = c_{73} = -b C_{32} \quad (3.91)$$

$$c_{38} = c_{83} = -b C_{42} \quad (3.92)$$

$$c_{44} = -\frac{l^2}{4} (C_{12} + C_{22} + C_{32} + C_{42}) - y_a^2 C_a \quad (3.93)$$

$$c_{45} = c_{54} = -\frac{l}{2} C_{12} \quad (3.94)$$

$$c_{46} = c_{64} = \frac{l}{2} C_{22} \quad (3.95)$$

$$c_{47} = c_{74} = -\frac{l}{2} C_{32} \quad (3.96)$$

$$c_{48} = c_{84} = \frac{l}{2} C_{12} \quad (3.97)$$

$$c_{55} = C_{12} \quad (3.98)$$

$$c_{56} = c_{65} = 0 \quad (3.99)$$

$$c_{57} = c_{75} = 0 \quad (3.100)$$

$$c_{58} = c_{85} = 0 \quad (3.101)$$

$$c_{66} = C_{22} \quad (3.102)$$

$$c_{67} = c_{76} = 0 \quad (3.103)$$

$$c_{68} = c_{86} = 0 \quad (3.104)$$

$$c_{77} = C_{32} \quad (3.105)$$

$$c_{78} = c_{87} = 0 \quad (3.106)$$

$$c_{88} = C_{42} \quad (3.107)$$

Todos os coeficientes dessas matrizes estão dispostos conforme as Eqs. (3.16) a (3.28).
A escolha de separar cada um dos termos das matrizes serve apenas para visualizar como cada

parâmetro de projeto se relaciona com outro e também para facilitar, de um modo geral, a implementação do algoritmo.

3.2.6 Formulação Matemática para Análise Espectral do Modelo Completo

A formulação matemática desenvolve-se por intermédio das representações matriciais propostas. Ela parte da equação geral do movimento do modelo completo no domínio do tempo e, ao aplicar a Transformada de Fourier, é possível determinar as densidades espectrais de potência no domínio da frequência, conforme disposto no Apêndice A. Em termos de fenômenos físicos, o sistema pode ser resumidamente descrito como uma pista dotada de irregularidades onde um veículo qualquer de quatro rodas se desloca e transmite acelerações verticais aos seus ocupantes.

O equacionamento do modelo no domínio da frequência é baseado no equilíbrio de forças de uma estrutura de apoios múltiplos que está submetida a uma excitação em sua base (MORSCH, 2001). Dessa forma, a equação geral do movimento do modelo é exibida na Eq. (3.108). Ela está na formatação matricial com o vetor de deslocamentos \mathbf{u} e com o vetor de forças de excitação $\mathbf{f}(t)$, onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez tratadas na subseção 3.2.5.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (3.108)$$

Nesse aspecto, a Equação (3.108) apresenta uma força de excitação na base do veículo que pode ser separada em duas partes, conforme a Eq. (3.109) descrita a seguir:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_g(t) + \mathbf{K}_e \mathbf{u}_b(t) \quad (3.109)$$

onde $\mathbf{f}_g(t)$ é o vetor de forças gravitacionais, dado em N, \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez elástica de entrada no modelo, dada em N/m, e $\mathbf{u}_b(t)$ é o vetor de deslocamentos do perfil da estrada, dado em metros. Da mesma abordagem que Morsch (2001) trata o seu modelo, a formulação aqui proposta utiliza o movimento independente de cada conjunto pneu-roda. Isso induz a um problema do tipo *quasi-estático* que deve ser adotado devido ao deslocamento estático da base. Entretanto, as forças inerciais são negligenciadas, porque o veículo parte em movimento

após as condições de equilíbrio estável estejam satisfeitas. Se essas condições não forem consideradas, o veículo vai se deslocar inicialmente com uma aceleração vertical residual que não foi suportada pelo sistema massa-mola-amortecedor. Por isso, a análise é feita em torno do ponto de equilíbrio estático inicial, e os deslocamentos são referenciados a esse ponto de equilíbrio.

Dessa forma, desprezando essas forças inerciais e igualando a Eq. (3.108) com a Eq. (3.109), tem-se a equação geral:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_b(t) \quad (3.110)$$

onde

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{41} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Em termos de álgebra linear matricial, a Equação (3.110) é tipicamente um problema de autovalores e autovetores. Nesse sentido, trata-se do cálculo de frequências (autovalores) e modos de vibração (autovetores associados) de um sistema físico não amortecido. Parte-se, então, das Eqs. (3.112) e (3.113), descritas a seguir, para resolver o problema.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad (3.112)$$

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega \quad (3.113)$$

onde Φ é a matriz modal que contém todos os modos de vibração do modelo e Ω é a matriz diagonal que contém todas as frequências naturais (autovalores), $\omega_{n_i}^2$, do sistema. Isto é, Ω apresenta a seguinte forma:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_{n_i}^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Ao abordar como um problema de autovalores e autovetores associados, a formulação recebe propriedades matemáticas de independência linear e ortogonalidade para auxiliar na solução do problema. Nesse sentido, a propriedade de ortogonalidade das matrizes \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C} são as seguintes:

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I} \quad (3.115)$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Omega} \quad (3.116)$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\zeta_i \omega_{n_i} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = 2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega}^{1/2} \quad (3.117)$$

em que ζ_i é o coeficiente de razão de amortecimento do i -ésimo modo de vibração, e \mathbf{Z} é a matriz dessas razões. A matriz \mathbf{C} pode ser diagonalizada pelo Método de Decomposição RQ (*Rayleigh Quocient*), o qual foi utilizado no presente trabalho para determinar a razão de amortecimento, ou por outro método, como o da função dissipativa de Rayleigh (MORSCH, 2001). Ambos os métodos permitem formular uma matriz de amortecimento simplificada que, nas conclusões de Goel (2001), a razão de amortecimento aproximada – negligenciando os termos fora da diagonal – é praticamente a mesma que a razão de amortecimento obtida por métodos de análise modal de valores complexos conjugados. O Método de Decomposição RQ pode ser empregado, portanto, sem erros significativos desde que o sistema esteja submetido a vibrações de curtos períodos de tempo e, mesmo a longos períodos, o erro ainda é desprezível.

Aplica-se uma mudança de variáveis do tipo $\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\eta}$ e inserem-se as propriedades das Eqs (3.115), (3.116) e (3.117) na Eq. (3.110) para obter a seguinte expressão:

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\eta}} + 2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega}^{1/2}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{\Omega}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_b(t) \quad (3.118)$$

a qual está passível de receber a Transformada de Fourier, conforme as orientações discutidas no Apêndice A. Nesse sentido, a equação matricial no domínio da frequência fica

$$\mathcal{F}[I\ddot{\eta} + 2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega}^{1/2}\dot{\eta} + \mathbf{\Omega}\eta] = \mathcal{F}[\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_b(t)] \quad (3.119)$$

$$-\omega^2 \mathbf{I}\eta(\omega) + 2i\omega \mathbf{Z}\mathbf{\Omega}^{1/2}\eta(\omega) + \mathbf{\Omega}\eta(\omega) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_b(\omega) \quad (3.120)$$

onde ω são as frequências do sistema. Essa equação apresenta os deslocamentos modais em função das frequências da Transformada de Fourier, $\eta(\omega)$, os quais podem ser devidamente isolados na expressão. Logo,

$$\eta(\omega) = \mathbf{H}_m(\omega) \mathbf{K}_e \mathbf{u}_b(\omega) \quad (3.121)$$

onde

$$\mathbf{H}_m(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 \mathbf{I} + 2i\omega \mathbf{Z}\mathbf{\Omega}^{1/2} + \mathbf{\Omega}} \quad (3.122)$$

A Equação (3.122) pode ser designada como a função de resposta de frequência modal (FRFM), denotado por $\mathbf{H}_m(\omega)$. Mendes e Oliveira (2008) salientam que $\mathbf{H}_m(\omega)$ relaciona-se com as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} do sistema e, por conter matrizes no denominador, pode-se investir muito esforço computacional para o cálculo da inversa. A formulação modal, nesse aspecto, torna-se apreciável e numericamente atraente graças à mudança de variável e às propriedades modais que foram inicialmente aplicadas.

O próximo passo da formulação matemática consiste na determinação das densidades espectrais de potência dos deslocamentos modais, conforme a Eq. (3.123), a seguir,

$$\mathbf{S}_\eta(\omega) = \mathbf{H}_m(\omega) \mathbf{S}_{f_m}(\omega) \mathbf{H}_m^*(\omega)^T \quad (3.123)$$

onde $\mathbf{S}_\eta(\omega)$ é a densidade espectral dos deslocamentos modais, $\mathbf{H}_m^*(\omega)$ é o conjugado de $\mathbf{H}_m(\omega)$, e $\mathbf{S}_{f_m}(\omega)$ é a densidade espectral das forças de excitação modais.

O cálculo da densidade espectral das forças modais, $\mathbf{S}_{f_m}(\omega)$, emprega a função de autocorrelação $\mathcal{R}_{f_m}(\tau)$. Ela envolve o valor esperado E da função $f_m(t)$, a qual representa as forças de excitação modais, e um valor de incremento no tempo τ . Portanto, tem-se que

$$\mathcal{R}_{f_m}(\tau) = E[\mathbf{f}_m(t) \cdot \mathbf{f}_m^T(t - \tau)] \quad (3.124)$$

Desenvolve-se, então, a abordagem modal em $\mathcal{R}_{f_m}(\tau)$ para obter a autocorrelação nas forças de excitação do problema modal $\mathbf{f}_m(t) = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_b(t)$. Dessa forma, a Eq. (3.124) fica

$$\mathcal{R}_{f_m}(\tau) = \Phi^T \mathbf{K}_e E[\mathbf{u}_b(t) \mathbf{u}_b(t)^T] \mathbf{K}_e^T \Phi \quad (3.125)$$

a qual, de uma forma generalizada, pode ser representada por $\mathcal{R}_{f_m}(\tau) = \Phi^T \mathbf{K}_e \mathcal{R}_{u_b}(t) \mathbf{K}_e^T \Phi$, onde $\mathcal{R}_{u_b}(t) = E[\mathbf{u}_b(t) \mathbf{u}_b(t)^T]$. Portanto, a função densidade espectral das forças modais, $\mathcal{S}_{f_m}(\omega)$, analogamente pode ser determinada por:

$$\mathcal{S}_{f_m}(\omega) = \Phi^T \mathbf{K}_e \mathcal{S}_{u_b}(\omega) \mathbf{K}_e^T \Phi \quad (3.126)$$

onde $\mathcal{S}_{u_b}(\omega)$ é a densidade espectral dos deslocamentos da base de excitação. Essa densidade espectral pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{S}_{u_b}(\omega) = \frac{1}{4\pi v} G_z(n) \quad (3.127)$$

em que v é a velocidade do veículo, em m/s, e $G_z(n)$ é FDEP unilateral de um dado perfil de irregularidades na frequência espacial, conforme desenvolvido anteriormente na seção 2.2.2.

Substitui-se a Eq. (3.126) na Eq. (3.123). Dessa forma, é possível obter a importante expressão a seguir:

$$\mathcal{S}_\eta(\omega) = \mathbf{H}_m(\omega) \Phi^T \mathbf{K}_e \mathcal{S}_{u_b}(\omega) \mathbf{K}_e^T \Phi \mathbf{H}_m^*(\omega)^T \quad (3.128)$$

Pelo procedimento da autocorrelação da Eq. (3.124), é possível calcular as densidades espectrais dos deslocamentos do modelo a partir das densidades espectrais dos deslocamentos modais. Assim, tem-se:

$$\mathcal{S}_u(\omega) = \Phi \mathcal{S}_\eta(\omega) \Phi^T \quad (3.129)$$

onde $\mathbf{S}_u(\omega)$ é a função de densidade espectral dos deslocamentos nos graus de liberdade do modelo. Ela pode ser reescrita com a substituição de $\mathbf{S}_\eta(\omega)$ pela expressão da Eq. (3.128). Finalmente, tem-se o seguinte:

$$\mathbf{S}_u(\omega) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{H}_m(\omega)\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}_e\mathbf{S}_{u_b}(\omega)\mathbf{K}_e^T\mathbf{\Phi}\mathbf{H}_m^*(\omega)^T)\mathbf{\Phi}^T \quad (3.130)$$

A Equação (3.130) é a densidade espectral dos deslocamentos do modelo $\mathbf{S}_u(\omega)$ em termos da densidade espectral dos deslocamentos da base $\mathbf{S}_{u_b}(\omega)$. Na prática, $\mathbf{S}_u(\omega)$ pode ser considerada como os valores de saída do sistema, e $\mathbf{S}_{u_b}(\omega)$, como os valores de entrada no sistema, os quais são obtidos por meio de medições experimentais, pesquisas na literatura ou normas técnicas. Esta equação é versátil de tal maneira a representar todos os n autovalores do modelo (ou os m autovetores de um sistema reduzido) cuja principal característica é utilizar os modos mais baixos de vibração e adequar a proximidade da solução para o mais significativo em termos de engenharia e projeto. Morsch (2001) e Mendes e Oliveira (2008) reforçam essa versatilidade, afirmando que a formulação modal usa um número menor de modos de vibração que são representativos do sistema, o que culmina na redução do esforço computacional também.

Conforme desenvolvido por Newland (1987, p. 48), pode-se determinar diretamente as densidades espectrais referentes à velocidade e à aceleração dos graus de liberdade pertinentes a partir da Eq. (3.127). Para tanto, basta multiplicá-la por ω^2 e ω^4 , respectivamente, e integrá-la no intervalo de frequência de interesse, resultando em

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_v(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \mathbf{S}_u(\omega) d\omega \quad (3.131)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_a(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \mathbf{S}_u(\omega) d\omega \quad (3.132)$$

em que $\mathbf{S}_v(\omega)$ representa as densidades espectrais de potência da velocidade dos graus de liberdade de interesse, e $\mathbf{S}_a(\omega)$ representa as densidades espectrais de potência da aceleração dos graus de liberdade de interesse. O intervalo dessas integrações, na prática, é definido pelo usuário conforme discutido na seção 2.2.3.

Finalmente, a aceleração vertical *rms* transmitida pelo grau de liberdade de interesse pode ser determinada pela raiz quadrada da integração da densidade espectral referente à aceleração tal que

$$a_{rms} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_a(\omega)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \mathbf{S}_u(\omega) d\omega} \quad (3.133)$$

À título de complementação, a função de resposta de frequência modal $\mathbf{H}_m(\omega)$ pode ser reescrita utilizando o mesmo procedimento da autocorrelação da Eq. (3.124). Dessa forma, conclui-se que:

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{H}_m(\omega) \mathbf{\Phi} \quad (3.134)$$

onde a matriz modal pode transformar a função de resposta de frequência modal para a função de resposta de frequência global do sistema.

O procedimento de cálculo permite, portanto, obter os valores médios e as variâncias da resposta por meio da integração do espectro de potência da resposta em todo o domínio da frequência. Para isso, basta conhecer as propriedades do sistema e as densidades espectrais das forças de excitação.

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

A simulação numérica desenvolve-se nos dois modelos apresentados. Em um primeiro momento, o modelo de dois graus de liberdade é implementado para fins de comparação e validação da estrutura e funcionamento do algoritmo. Em um segundo momento, a simulação é realizada no modelo de oito graus de liberdade para identificar quais parâmetros mais influenciam na redução da aceleração vertical *rms* transmitida. Os pseudocódigos pertinentes são exibidos, e o método de integração é brevemente discutido para fins de compreensão. As funções objetivo são expostas no capítulo subsequente, conforme os exemplos são analisados.

4.1 SIMULAÇÃO DO MODELO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

A verificação do algoritmo em um modelo de dois graus de liberdade, antes do modelo de oito graus de liberdade, é interessante de ser realizada para ilustrar a estrutura do mesmo e para verificar como ele se comporta de um modo geral. O modelo mais simples apresenta rápido processamento computacional e é útil para identificar erros de sintaxe encontrados nos laços internos. Ao trabalhar com um modelo de mais graus de liberdade, a complexidade aumenta, mas alguns laços internos permanecem similares.

A simulação é realizada em ambiente *MATLAB*[®] e apresenta diferentes arquivos para as sub-rotinas. Uma delas representa basicamente o modelo matemático do veículo e as suas respectivas matrizes, outro se destina ao algoritmo do *PSO* (programa principal), e os demais realizam o laço de integração por meio das frequências naturais do sistema para calcular o deslocamento, a velocidade e a aceleração dos graus de liberdade. Os dados de entrada do usuário são inseridos manualmente no arquivo do modelo, e o programa é executado pelo arquivo do *PSO*.

O critério de parada do algoritmo é similar ao proposto pela literatura; isto é, a razão entre o desvio padrão e a média referentes ao valor da função de custo para todas as partículas (coeficiente de variação ou CV) deve ser menor ou igual ao valor de tolerância na ordem de 10^{-6} . A norma dos valores obtidos também deve ser inferior a essa tolerância. Portanto, têm-se as seguintes Eqs. (4.1) e (4.2) como critérios de parada:

$$CV = \frac{\sigma_{f_{custo}}}{\mu_{f_{custo}}} < \text{tolerância} = 1,0 \times 10^{-6} \quad (4.1)$$

$$\|f_{custo_{k+1}} - f_{custo_k}\| < \text{tolerância} = 1,0 \times 10^{-6} \quad (4.2)$$

4.2 SIMULAÇÃO DO MODELO DE OITO GRAUS DE LIBERDADE

A simulação numérica do algoritmo do modelo de oito graus de liberdade corresponde a um dos objetivos do trabalho. A estrutura do algoritmo é basicamente a mesma do anterior; apenas a complexidade das matrizes é aumentada. O número de graus de liberdade aumenta a quantidade de integrações, pois o cálculo é realizado para cada grau de liberdade de interesse. Entretanto, o usuário pode integrar apenas os graus de liberdade que desejar (optando, por exemplo, integrar apenas as acelerações provenientes do assento), o que pode reduzir o tempo computacional.

Da mesma forma que acontece no modelo de dois graus de liberdade, a simulação em oito graus de liberdade é realizada também em ambiente *MATLAB*[®] e apresenta, basicamente, os mesmos arquivos. A utilização do programa é exatamente a mesma que a anterior, embora seja necessária a inserção de mais informações referentes às variáveis de projeto, e o vetor de variáveis a serem otimizadas pode ser maior do que o de dois graus de liberdade.

O critério de parada do algoritmo é similar ao anterior; isto é, a razão entre o desvio padrão e a média referentes ao valor da função de custo para todas as partículas (coeficiente de variação ou CV) deve ser menor ou igual ao valor de tolerância na ordem de 10^{-6} . A norma dos valores obtidos também deve ser inferior a essa tolerância, e, para complementar, o algoritmo deve parar quando atingir 100 iterações, porque, quando encontra um ótimo global, ele ainda pode apresentar pequenas flutuações no coeficiente de variação. Portanto, o máximo de iterações permite parar o algoritmo. Em vista disso, têm-se as seguintes Eqs. (4.3), (4.4) e (4.5) como critérios de parada:

$$CV = \frac{\sigma_{f_{custo}}}{\mu_{f_{custo}}} < \text{tolerância} = 1,0 \times 10^{-6} \quad (4.3)$$

$$\|f_{custo_{k+1}} - f_{custo_k}\| < \text{tolerância} = 1,0 \times 10^{-6} \quad (4.4)$$

$$k_{max} \leq 100 \quad (4.5)$$

4.3 FLUXOGRAMA

O fluxograma de informações entre os diferentes arquivos do algoritmo (tanto para o modelo de dois graus de liberdade quanto para o de oito) é exibido na Fig. 4.1 a seguir. Esse fluxograma global é importante para entender como cada uma das sub-rotinas é chamada pelo programa principal.

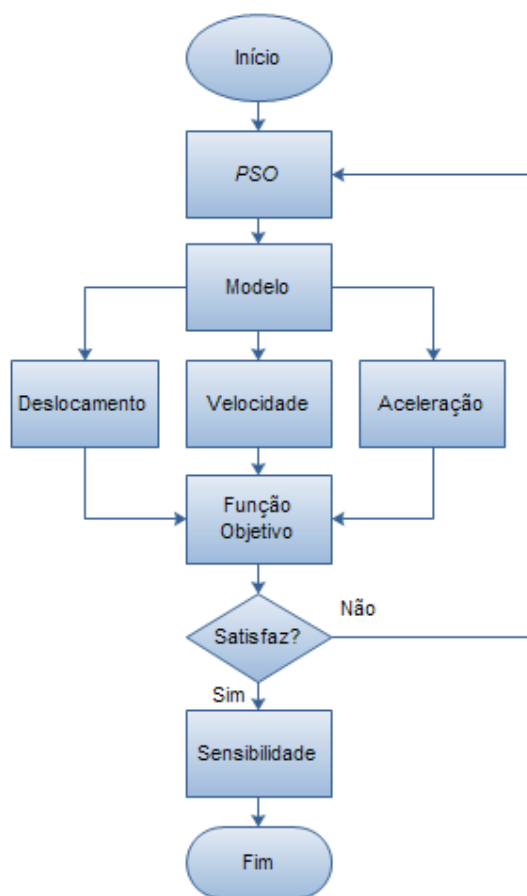


Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

Os dados de entrada são inseridos no modelo para a análise modal e, então, são chamadas as sub-rotinas que executam os laços das integrações de deslocamento, velocidade e aceleração dos graus de liberdade de interesse. Em seguida, o método de integração por quadratura de Gauss-Kronrod e a integração propriamente dita são realizados novamente na

função objetivo. O processo de otimização é tratado como se fosse o programa principal de execução, pois é ele que deve ser executado a fim de realizar as rotinas de cálculo do sistema. Se o usuário desejar, ele pode executar também uma sub-rotina para calcular a sensibilidade a partir dos resultados obtidos no processo de otimização e avaliar as influências das variáveis de projeto em torno do ponto ótimo global.

4.4 PSEUDOCÓDIGOS

O pseudocódigo do algoritmo do modelo de dois graus de liberdade é o que se segue no Quadro 4.1. Ele ilustra, de uma maneira geral, como funciona a estrutura do algoritmo, e como são chamadas as suas respectivas sub-rotinas.

Quadro 4.1 – Pseudocódigo do modelo de dois graus de liberdade

<p>Insira os dados de entrada: número de graus de liberdade n, massa suspensa m_1, massa não suspensa m_2, rigidez da suspensão k_1, rigidez do pneu k_2, amortecimento da suspensão c_1, amortecimento do pneu c_2;</p> <p>Atualiza as variáveis de projeto no vetor de parâmetros para a Otimização por Enxame de Partículas: vetor $x = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$;</p> <p>Gera as matrizes do sistema de equações: matriz de massa M, matriz de rigidez K, matriz de amortecimento C, matriz de rigidez das forças de excitação K_e;</p> <p>Realiza a análise modal: calcula os autovalores e autovetores de M e K, monta a matriz Ω, ordena os autovalores e autovetores, calcula as matrizes ortonormalizadas $\Phi^T M \Phi$ e $\Phi^T K \Phi$, calcula a razão de amortecimento pelo Método do Quociente de Rayleigh $\Phi^T C \Phi$;</p> <p>Para $i = 1$ até n calcule</p> $\zeta_i = \frac{C_{n,i,i}}{2\Omega_{ii}}$ <p>Fim</p> <p>Realiza a análise espectral: define o número imaginário Z_i, insere a velocidade do veículo v, insere o expoente da densidade espectral da pista w, insere a densidade espectral da pista G_0, insere o número de onda n_0, insere os limites de integração em termos do número de onda ω_{min} e ω_{max};</p> <p>Chama as sub-rotinas de deslocamento, velocidade e aceleração: calcula as densidades espectrais dos deslocamentos, velocidades e acelerações do sistema;</p> <p>Para cada sub-rotina (deslocamento, velocidade, aceleração) faça</p> <p>Para $k = \omega_{min}$ até ω_{max} calcule</p> $n = \frac{\omega_k}{2\pi v}$ $G_z(n) = G_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-w}$ $S_{u_b}(\omega) = \frac{1}{4\pi v} G_z(n)$ $S_{f_m}(\omega) = K_e S_{u_b}(\omega) K_e^T$ <p>Para $i = 1$ até n calcule</p>
--

```

Para  $j = i$  até  $n$  calcule
     $H_{m_{ij}} = 0$ 
     $H_{m_{ji}} = 0$ 
Fim
     $H_{m_{ii}} = \frac{1}{-\omega^2 I + 2i\omega Z\Omega^{1/2} + \Omega}$ 
Fim
 $S_u(\omega) = \Phi(H_m(\omega)\Phi^T K_e S_{u_b}(\omega) K_e^T \Phi H_m^*(\omega)^T) \Phi^T$ 
Fim
Fim

```

Realiza a integração para obter a variância, o desvio padrão e aceleração *rms* de cada grau de liberdade: chama cada sub-rotina, integra $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$ e $S_a(\omega)$ pela quadratura de Gauss-Kronrod;

Insera a função de custo e as restrições: define a função *custo*, define a *restrição*, chama a subrotina do *PSO*.

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

Esse algoritmo basicamente trabalha na análise modal do sistema matricial e, por meio das frequências naturais deste, calcula as densidades espectrais de potência de cada grau de liberdade de interesse. O algoritmo utiliza a função de resposta em frequência modal, H_m , para determinar a densidade espectral de saída, $S_u(\omega)$, e, com a integração desta, calcula a variância, o desvio padrão e a aceleração vertical *rms* de qualquer grau de liberdade. A mesma estrutura ocorre no modelo de oito graus de liberdade, no Quadro 4.2, a seguir:

Quadro 4.2 – Pseudocódigo do modelo de oito graus de liberdade

```

Insira os dados de entrada: número de graus de liberdade  $n$ ; massa do assento  $m_a$ , massa da carroceria  $m_c$ , massa das suspensões  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$ ; rigidez do assento  $k_a$ , rigidez das suspensões  $k_{12}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{32}$  e  $k_{42}$ , rigidez dos pneus  $k_{11}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{31}$  e  $k_{41}$ ; amortecimento do assento  $c_a$ , amortecimento das suspensões  $c_{12}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{32}$  e  $c_{42}$ ; momento de inércia de massa na rolagem  $I_x$ , momento de inércia de massa na arfagem  $I_y$ ; distância entre eixos dianteira  $a$ , distância entre eixos traseira  $b$ ; largura do veículo  $l$ ; posição  $x$  do assento em relação ao centro de gravidade da carroceria  $x_a$ , posição  $y$  do assento em relação ao centro de gravidade da carroceria  $y_a$ ; aceleração da gravidade  $g$ ;

```

Atualiza as variáveis de projeto no vetor de parâmetros para a Otimização por Enxame de Partículas: vetor $x = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$;

Gera as matrizes do sistema de equações: matriz de massa M , matriz de rigidez K , matriz de amortecimento C , matriz de rigidez das forças de excitação K_e ;

Realiza a análise modal: calcula os autovalores e autovetores de M e K , monta a matriz Ω , ordena os autovalores e autovetores, calcula as matrizes ortonormalizadas $\Phi^T M \Phi$ e $\Phi^T K \Phi$, calcula a razão de amortecimento pelo Método do Quociente de Rayleigh $\Phi^T C \Phi$;

```

Para  $i = 1$  até  $n$  calcule
     $\zeta_i = \frac{C_{n_i,i}}{2\Omega_{ii}}$ 
Fim

```

Realiza a análise espectral: define o número imaginário Z_i , insere a velocidade do veículo v , insere o expoente da densidade espectral da pista w , insere a densidade espectral da pista G_0 , insere o número de onda n_0 , insere os limites de integração em termos do número de onda ω_{min} e ω_{max} :

Chama as sub-rotinas de deslocamento, velocidade e aceleração: calcula as densidades espectrais dos deslocamentos, velocidades e acelerações do sistema;

Para cada sub-rotina (deslocamento, velocidade, aceleração) faça

Para $k = \omega_{min}$ até ω_{max} calcule

$$n = \frac{\omega_k}{2\pi v}$$

$$G_z(n) = G_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-w}$$

$$S_{u_b}(\omega) = \frac{1}{4\pi v} G_z(n)$$

$$S_{f_m}(\omega) = K_e S_{u_b}(\omega) K_e^T$$

Para $i = 1$ até n calcule

Para $j = i$ até n calcule

$$H_{m_{ij}} = 0$$

$$H_{m_{ji}} = 0$$

Fim

$$H_{m_{ii}} = \frac{1}{-\omega^2 I + 2i\omega Z\Omega^{1/2} + \Omega}$$

Fim

$$S_u(\omega) = \Phi(H_m(\omega)\Phi^T K_e S_{u_b}(\omega) K_e^T \Phi H_m^*(\omega)^T)\Phi^T$$

Fim

Fim

Realiza a integração para obter a variância, o desvio padrão e aceleração rms de cada grau de liberdade: chama cada sub-rotina, integra $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$ e $S_a(\omega)$ pela quadratura de Gauss-Kronrod;

Insere a função de custo e as restrições: define a função *custo*, define a *restrição*, chama a subrotina do *PSO*.

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

A única grande diferença entre os dois modelos reside nos dados de entrada, pois o modelo de oito graus de liberdade apresenta matrizes de massa, rigidez e amortecimento com mais elementos. Isso aumenta o tempo computacional do algoritmo, embora ainda seja curto quando comparado com as análises típicas do domínio do tempo.

O pseudocódigo do *PSO* apresentado como exemplo na seção 2.3 e os pseudocódigos dos modelos aqui expostos formam a estrutura do algoritmo para a solução geral do problema proposto. Para operá-lo adequadamente, o algoritmo deve ser testado acionando o programa principal (*PSO*), o qual chama, por meio da função objetivo, a sub-rotina do modelo veicular. Os valores ótimos das variáveis de projeto são calculados segundo a minimização da função objetivo.

4.5 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

O método de integração numérica é o da Quadratura de Gauss-Kronrod, utilizado em ambos modelos testados no *MATLAB*[®]. Esse método procura aproximar a integração de uma função escalar dentro dos limites de integração por meio de uma quadratura adaptativa e global de ordem elevada. A quadratura de Gauss-Kronrod é eficiente para integrandos do tipo oscilatórios, suporta intervalos infinitos e pode lidar com singularidades em pontos onde não é normalmente possível integrar por métodos de quadratura mais simples (desde que essa singularidade não seja tão abrupta na continuidade da função).

Justifica-se o uso da Quadratura Gauss-Kronrod pelo fato de ser um método robusto e também porque outras quadraturas podem não lidar corretamente com o comportamento da função objetivo (ela pode apresentar pontos de singularidades, por exemplo). Nesse sentido, testes com quadraturas mais simples (como trapézio e Simpson) foram realizados previamente e indicaram forte dependência em relação aos limites de integração, apresentando resultados estatisticamente dispersos. A influência do limite inferior de integração altera o resultado obtido de uma forma agressiva, pois pequenas variações nesse limite provocaram acelerações diferentes, o que não deveria acontecer. Assim, a Quadratura de Gauss-Kronrod mostrou-se robusta o suficiente frente a múltiplas simulações e não apresentou grandes variações nos resultados quando o limite inferior é sutilmente alterado. Outras informações são dispostas no Apêndice B sobre a Quadratura de Gauss-Kronrod.

Para fins de complementação, esse não é o único método numérico que pode ser usado satisfatoriamente. Por exemplo, Morsch (2001) testou diversos métodos (Método de Newton-Cotes, Quadraturas de primeira ordem (trapézio), segunda ordem (Simpson), quarta e sexta ordens e Método de Gauss-Legendre) e, por meio do erro relativo, adotou a quadratura de Gauss-Legendre. Essa técnica é interessante, pois exige uma quantidade menor de pontos de integração com pesos e pontos da base gerados automaticamente pelo algoritmo. De um modo geral, se a integração não é sensível aos limites de integração, então ela pode ser utilizada sem grandes erros relativos.

5 ANÁLISE DE DADOS E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

A análise de dados desenvolve-se da mesma forma que os modelos propostos e as simulações realizadas. Em um primeiro momento, discutem-se os resultados do modelo de dois graus de liberdade para então validar a estrutura do algoritmo. Essa validação é realizada basicamente pela comparação dos resultados obtidos com artigos na área. Em um segundo momento, parte-se para o modelo de oito graus de liberdade, e, por meio de valores numéricos dos parâmetros obtidos na literatura (WONG, 2001; SHIRAHATT *et al.*, 2008), discutem-se diferentes situações com o objetivo de elucidar o modelo em termos práticos.

5.1 RESULTADOS DO MODELO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Os resultados do modelo de dois graus de liberdade coincidem com aqueles previstos por Sun, Cai e Yang (2007) e Gomes (2009). Os parâmetros concentrados do modelo de dois graus de liberdade, de acordo com esses autores, são $m_1 = 4450$ kg, $m_2 = 550$ kg, $C_2 = 0$ Ns/m, $v = 20$ m/s, $G_0 = 10^{-2}$ m³/ciclo, $n_0 = 0,1$ ciclo/m e $w = 2,0$. Dessa maneira, m_1 e m_2 correspondem respectivamente à massa suspensa e à massa não suspensa, c_2 é o valor de amortecimento do pneu (nulo nesse caso), v é a velocidade do veículo, G_0 é a FDEP unilateral do perfil de irregularidades correspondente ao n_0 (número de onda específico).

Sun, Cai e Yang (2007) e Gomes (2009) sugerem o seguinte problema de otimização para minimizar a deflexão da suspensão conforme o Quadro 5.1 a seguir:

Quadro 5.1 – Minimização de $\sigma_{z_1}^2$

<i>Encontrar</i> K_1, K_2 e C_1	
<i>Para minimizar</i> $\sigma_{z_1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{z_1}(\omega) d\omega$	
<i>Sujeito a</i>	$1,0 \times 10^5 \text{N/m} \leq K_1 \leq 3,0 \times 10^6 \text{N/m}$
	$1,5 \times 10^6 \text{N/m} \leq K_2 \leq 2,0 \times 10^6 \text{N/m}$
	$0 \text{ Ns/m} \leq C_1 \leq 3,0 \times 10^5 \text{Ns/m}$
	$\sigma_{z_1} \leq 0,2 \text{ m}$

Fonte: Gomes (2009, não paginado, adaptado).

onde K_1 , K_2 e C_1 são respectivamente a rigidez da suspensão, a rigidez do pneu e o coeficiente de amortecimento da suspensão, S_p é a densidade espectral da força exercida pelo pneu em contato com a pista e σ_{Z_1} é o desvio padrão da deflexão da suspensão.

Gomes (2009) utiliza os seguintes parâmetros no algoritmo de enxame de partículas: $w_p = 0,5$, $c_1 = c_2 = 2,0$, $m = 30$ e $tolerância = 1,0 \times 10^{-6}$. Sabe-se que w_p é a inércia das partículas, c_1 é o coeficiente cognitivo das partículas, c_2 é o coeficiente social do enxame e m é o total de partículas. O autor também limita a integração da densidade espectral entre 0 a $500(2\pi\nu n_0)$. Para fins de comparação, utilizam-se os mesmos parâmetros de Gomes (2009) e também a mesma função a ser minimizada $\sigma_{Z_1}^2$. Os resultados são exibidos na Tabela 5.1 a seguir:

Tabela 5.1 – Comparação entre os resultados obtidos e a literatura consultada

Autores	K_1 [N/m]	K_2 [N/m]	C_1 [Ns/m]	$\sigma_{Z_1}^2$ [m ²]
Sun, Cai e Yang (2007)	$6,221 \times 10^5$	$1,705 \times 10^6$	$2,658 \times 10^4$	*
Gomes (2009)	$1,0 \times 10^5$	$1,5 \times 10^6$	$2,355 \times 10^4$	$1,65 \times 10^{-1}$
Presente trabalho	$1,0 \times 10^5$	$1,5 \times 10^6$	$2,355 \times 10^4$	$1,6573 \times 10^{-1}$

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

* Não especificado pelo artigo de Sun, Cai e Yang (2007).

Os resultados do algoritmo proposto são muito próximos àqueles obtidos por Gomes (2009). No entanto, ainda há diferenças entre ambos, pois o autor integra por meio da regra do trapézio, e o algoritmo desenvolvido no presente trabalho integra por meio da regra de Gauss-Kronrod. O autor também utiliza soluções analíticas fechadas para $S_{Z_1}(\omega)$ e utiliza a variável $Z_1(t) = y_2(t) - y_1(t)$. Por outro lado, o algoritmo desenvolvido nesta dissertação emprega as variáveis $y_1(t)$ e $y_2(t)$ separadamente e, nesse sentido, a relação $\sigma_{Z_1}^2 = \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2$ é válida. Os resultados obtidos são nitidamente diferentes dos obtidos por Sun, Cai e Yang (2007), uma vez que estes autores utilizaram algoritmos genéticos para realizar o processo de otimização com parâmetros de inicialização diferentes em relação ao *PSO*.

As variáveis de projeto K_1 , K_2 e C_1 não sofreram alterações numéricas apreciáveis, mesmo frente a métodos de integração distintos. Isso acontece basicamente por dois motivos: os valores ótimos das variáveis de projeto K_1 e K_2 estão exatamente nos limites de restrição impostos no problema de otimização, e ambos os algoritmos utilizam basicamente os mesmos parâmetros de inicialização. Como o método de integração atua exclusivamente para calcular

as densidades espectrais, o valor de $\sigma_{Z_1}^2$ mostra-se ligeiramente diferente daquele obtido por Gomes (2009). Conclui-se, portanto, que a estrutura do algoritmo proposto é satisfatória para o problema abordado.

Uma vez validado o algoritmo, agora é possível minimizar a aceleração *rms* vertical transmitida. Assim, pode-se formular o seguinte problema de otimização conforme o Quadro 5.2:

Quadro 5.2 – Minimização da aceleração vertical *rms* transmitida

<p><i>Encontrar</i> K_1, K_2 e C_1</p> <p><i>Para minimizar</i> $\sigma_{\ddot{y}_1} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \ddot{y}_1(\omega) d\omega}$</p> <p style="text-align: center;">$1,0 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \leq K_1 \leq 3,0 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$</p> <p><i>Sujeito a</i> $1,5 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \leq K_2 \leq 2,0 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$</p> <p style="text-align: center;">$0 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \leq C_1 \leq 3,0 \times 10^5 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$</p>
--

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

onde K_1 , K_2 e C_1 são respectivamente a rigidez da suspensão, a rigidez do pneu e o coeficiente de amortecimento da suspensão, e $\sigma_{\ddot{y}_1}$ é o desvio padrão da aceleração vertical *rms* da massa suspensa.

A aceleração vertical *rms* transmitida resultante é de $1,280 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$, utilizando os mesmos parâmetros de entrada com os valores ótimos obtidos na Tabela 5.1. Após calcular essa aceleração, os valores ótimos das variáveis de projeto são respectivamente $K_1 = 1,0 \times 10^5 \text{ N/m}$, $K_2 = 1,5 \times 10^6 \text{ N/m}$ e $C_1 = 2,355 \times 10^4 \text{ Ns/m}$. Esses resultados são os mesmos de Gomes (2009) e conclui-se que, nesse caso, minimizar $Z_1(t) = y_2(t) - y_1(t)$ equivale a minimizar $\ddot{y}_1(t)$ no que diz respeito aos valores das variáveis K_1 , K_2 e C_1 . Os valores ótimos das variáveis de projeto foram para os limites estabelecidos de tal forma a ter o máximo de amortecimento e o mínimo de rigidez possível. Como o cálculo da aceleração $\ddot{y}_1(t)$ envolve os deslocamentos $y_1(t)$ e $y_2(t)$, pode-se inferir que os valores ótimos de K_1 , K_2 e C_1 são os mesmos quando se minimiza $Z_1(t)$, pois $Z_1(t)$ é função de $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

O algoritmo atinge o mínimo global da aceleração vertical *rms* em apenas 3 iterações, o que demonstra o benefício de trabalhar no domínio da frequência e utilizar o *PSO*. Essa grande velocidade de convergência é evidente, pois o algoritmo do *PSO* preocupa-se em minimizar uma função objetivo que é integrada no domínio da frequência diretamente, sem a necessidade de resolver no domínio do tempo. Os algoritmos tradicionais no domínio do tempo empregam o método de Runge-Kutta de 4ª e 6ª ordens para realizar as integrações, exigindo mais parâmetros de inicialização e mais tempo computacional – o que não é necessário no domínio da frequência. No entanto, o algoritmo na frequência exige muito cuidado nos limites de integração, principalmente nos limites inferiores, conforme discutido anteriormente na seção 2.2.3.

5.2 RESULTADOS DO MODELO DE OITO GRAUS DE LIBERDADE

Os resultados da simulação do modelo de oito graus de liberdade proposto indicam a viabilidade em se utilizar uma abordagem no domínio da frequência a fim de obter valores numéricos ótimos em torno de um ótimo global da aceleração vertical *rms* transmitida. Esses resultados são analisados em termos da aceleração vertical *rms* transmitida (otimizada e não otimizada), da sensibilidade dos parâmetros do modelo proposto em torno do ponto ótimo e também da robustez do algoritmo frente a múltiplas simulações seguidas.

A simulação do modelo de oito graus de liberdade é baseada nos trabalhos anteriores de Shirahatt *et al.* (2008), bem como as orientações de Wong (2001) para valores de rigidez e de amortecimento de pneus. Nesses trabalhos, Shirahatt *et al.* (2008) propuseram o seguinte problema de otimização para ser resolvido:

Quadro 5.3 – Minimização da aceleração vertical *rms* transmitida

<p><i>Encontrar $K_a, C_a, K_{12}, C_{12}, K_{22}, C_{22}, K_{32}, C_{32}, K_{42}$ e C_{42}</i></p> <p style="text-align: center;"><i>Para minimizar $\sigma_{\ddot{z}_a} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \ddot{Z}_a(\omega) d\omega}$</i></p> <p style="text-align: center;"><i>Sujeito a</i></p> $90 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \leq K_a \leq 120 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $400 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \leq C_a \leq 900 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ $75 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \leq K_{12} = K_{22} \leq 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $875 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \leq C_{12} = C_{22} \leq 3000 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ $32 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \leq K_{32} = K_{42} \leq 70 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $875 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \leq C_{32} = C_{42} \leq 3000 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$	
--	--

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

As variáveis de projeto a serem minimizadas são $K_a, C_a, K_{12}, K_{22}, K_{32}, K_{42}, C_{12}, C_{22}, C_{32}$ e C_{42} respectivamente. Essas variáveis de projeto são as mesmas escolhidas por Shirahatt *et al.* (2008) e são usualmente empregadas por autores na área (BOUAZARA; RICHARD; RAKHEJA, 2006; CHI; HE; NATERER, 2008).

A simulação não é uma comparação entre os resultados de Shirahatt *et al.* (2008), pois o objetivo aqui proposto é simular um perfil de pista de irregularidades encontrado na prática. Os autores, por motivos de simplificação, utilizam apenas um perfil senoidal para representar duas depressões da pista, o que restringe os resultados desses autores a apenas um perfil de irregularidades de um só comprimento de onda. Além disso, Shirahatt *et al.* (2008) simulam no domínio do tempo. Mesmo assim, o trabalho desses autores é importante para fornecer dados de entrada das variáveis de projeto como exemplo de análise descritiva de dados.

Salienta-se que o algoritmo analisado não prevê a otimização da massa suspensa. Isso deve-se ao fato de que os momentos de inércia em x e y são funções que dependem da massa suspensa, e essa dependência não foi prevista pelo algoritmo. Presume-se que os momentos de inércia e a massa suspensa são parâmetros de entrada do problema e, portanto, não podem ser tratados como variáveis de projeto a serem otimizadas. Caso a massa suspensa fosse inserida como variável de projeto, os limites dessa variável não podem violar os momentos de inércia

de massa que foram inicializados como dados de entrada do algoritmo. Além disso, pela simetria do problema, as rigidezes e os amortecimentos das rodas esquerda e direita são iguais para cada eixo.

Os parâmetros de entrada da simulação são exibidos na Tabela 5.2. Alguns deles são parâmetros iniciais fixados, conforme apresentado por Shirahatt *et al.* (2008), e o restante são variáveis de projeto a serem utilizadas no algoritmo do *PSO*.

Tabela 5.2 – Parâmetros de entrada e variáveis de projeto

Parâmetros de Entrada	Limite Inferior	Valor Inicial	Limite Superior
m_a		100 kg	
m_c		2160 kg	
m_1, m_2		85 kg	
m_3, m_4		60 kg	
K_a	90 kN/m	105 kN/m	120 kN/m
$K_{11}, K_{21}, K_{31}, K_{41}$		200 kN/m	
K_{12}, K_{22}	75 kN/m	87,5 kN/m	100 kN/m
K_{32}, K_{42}	32 kN/m	51 kN/m	70 kN/m
C_a	400 Ns/m	650 Ns/m	900 Ns/m
C_{12}, C_{22}	875 Ns/m	1937,5 Ns/m	3000 Ns/m
C_{32}, C_{42}	875 Ns/m	1937,5 Ns/m	3000 Ns/m
I_x		946 kgm ²	
I_y		4140 kgm ²	
a		1,156 m	
b		1,524 m	
l		1,450 m	
x_a		0,234 m	
y_a		0,375 m	

Fonte: Shirahatt *et al.* (2008, p. 70-72, adaptado).

Sabe-se que m_a é a massa do assento, m_c é a massa da carroceria, m_1, m_2, m_3 e m_4 são as massas não suspensas; K_a é a rigidez do assento, K_{11}, K_{21}, K_{31} e K_{41} são as rigidezes dos pneus, K_{12}, K_{22}, K_{32} e K_{42} são as rigidezes da suspensão; C_a é o amortecimento do assento, C_{12}, C_{22}, C_{32} e C_{42} são os amortecimentos da suspensão; I_x é o momento de inércia de massa em rolagem, I_y é o momento de inércia de massa de arfagem; a é a distância entre eixos partindo da dianteira do veículo, b é a distância entre eixos partindo da traseira do veículo, l é a largura da carroceria, x_a é a distância entre o centro de gravidade e a posição x do assento, e y_a é a distância entre o centro de gravidade e a posição y do assento. Todas as variáveis seguem exatamente a dedução matemática desenvolvida no Capítulo 3.

Os valores das variáveis da Tabela 5.2 são de um projeto considerado aceitável para fins práticos. Por esse motivo, as simulações aqui realizadas partem de um resultado bom para obter parâmetros ainda melhores.

Outros parâmetros de entrada são utilizados nesse problema conforme a Tabela 5.3 a seguir. Nela, constam as constantes de inicialização do algoritmo do *PSO*, os coeficientes para classificar o perfil de irregularidades e os critérios de parada.

Tabela 5.3 – Parâmetros de entrada adicionais

Parâmetros de Entrada Adicionais	Valor Numérico
m	6
n	50
w	0,6
c_1	2,0
c_2	2,0
tol	$1,0 \times 10^{-6}$
k_{max}	100
v	20 m/s
G_0 (Classe G)	$65536,0 \times 10^{-6}$ m ³ /ciclo
n_0	$1/2\pi$ ciclo/m
Ω_0	1 rad/m
n_{min}	0,0001 ciclo/m
n_{max}	10,0 ciclos/m

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

onde m é o número de variáveis de projeto, n é o número de partículas, w é a inércia dessas partículas, c_1 é a componente cognitiva da partícula, c_2 é a componente social do enxame, tol é a tolerância máxima para os critérios de parada, k_{max} é o número máximo de iterações, v é a velocidade do veículo, G_0 é a densidade espectral de um perfil de irregularidades correspondente ao número de onda n_0 (ou Ω_0 para análise na frequência angular), n_{min} é o limite mínimo para a integração das densidades espectrais e n_{max} é o limite máximo dessas integrações.

Para fins informativos, as frequências naturais do sistema otimizado e não otimizado, ω_n , são exibidas na Tabela 5.4. Os valores obtidos são referentes aos parâmetros de entrada supracitados. Infere-se que o modo 1 de vibração representa a oscilação vertical do assento; o modo 2 representa a oscilação entre a carroceria e o assento (em torno de 1,5 Hz); os modos 5 a 8 representam as oscilações em torno dos eixos y e x (arfagem e rolagem), respectivamente; e os modos 3 e 4 representam as oscilações não simétricas.

Tabela 5.4 – Frequências naturais do sistema otimizado e não otimizado

Resultado	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7	Modo 8
Não otimizado	0,761	1,518	2,158	5,199	9,516	9,551	10,702	10,711
Otimizado	1,034	1,446	1,873	4,933	9,092	9,114	10,629	10,637

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

5.2.1 Análise e Discussão dos Resultados

Os resultados obtidos a seguir exibem a aceleração vertical *rms* transmitida em função do número de iterações do algoritmo. O valor de referência é a aceleração vertical *rms* obtida sem realizar o processo de otimização, e ela é igual a 0,7824 m/s². Essa aceleração provoca desconforto ao passageiro, o que é previsível, uma vez que o perfil de irregularidades é igual à média geométrica da Classe G conforme a classificação da ISO 8608 (1995). Por isso, mostra-se interessante realizar a otimização para obter novos valores ótimos das variáveis de projeto e reduzir essa aceleração vertical *rms* transmitida para 0,4989 m/s² conforme disposto na Fig. 5.1 a seguir:

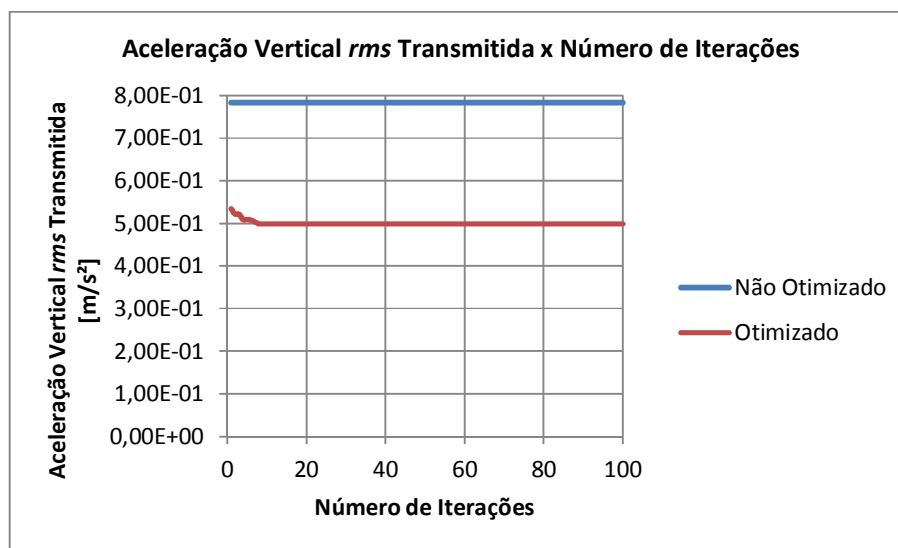


Figura 5.1 – Aceleração vertical *rms* transmitida pelo número de iterações

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

O algoritmo encontra o ótimo global entre a 8^a e a 9^a iteração. Entretanto, por ser uma metaheurística, o algoritmo pode localizar um ótimo local muito rapidamente e aceitá-lo como

ótimo global (o que pode estar errado). Isso significa que é necessário refazer a simulação quando o ótimo obtido converge rápido demais. O número de iterações também depende dos graus de liberdade e da complexidade do modelo abordado e, nesse sentido, o modelo de dois graus de liberdade foi capaz de encontrar o ótimo em apenas três iterações, e o de oito graus localizou a partir da 8ª iteração. Para esse ótimo global obtido, os valores das variáveis de projeto são os seguintes: $K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m, $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m, $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m, $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m, $K_{32} = K_{42} = 7,0 \times 10^4$ N/m e $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m. Percebe-se que as variáveis de projeto caem nas fronteiras em que estão limitadas, resultado este já observado por outros autores (HE; MCPHEE, 2005). Pode-se inferir que o sistema, de um modo geral, procura ter o máximo de amortecimento com o mínimo de rigidez admissível para reduzir a aceleração transmitida.

A próxima etapa da análise consiste em avaliar, por meio da sensibilidade, a influência das variáveis de projeto em torno do ponto ótimo global obtido. Para fazer isso, é necessário introduzir uma perturbação nas variáveis de projeto (por exemplo, 10% de variação em cada uma das variáveis) e, em seguida, aplicar a Eq. (5.1):

$$\frac{\partial f_{custo}(x)}{\partial x_i} = \frac{f_{custo}(x_i + \Delta x_i) - f_{custo}(x_i)}{\Delta x_i} \quad (5.1)$$

onde $f_{custo}(x)$ é a função a ser otimizada, e x_i é o vetor das variáveis de projeto.

A sensibilidade em torno do ponto ótimo é exibida na Fig. 5.2. Esse gráfico de barras reflete a participação e contribuição da variável de projeto para minimizar a função objetivo.

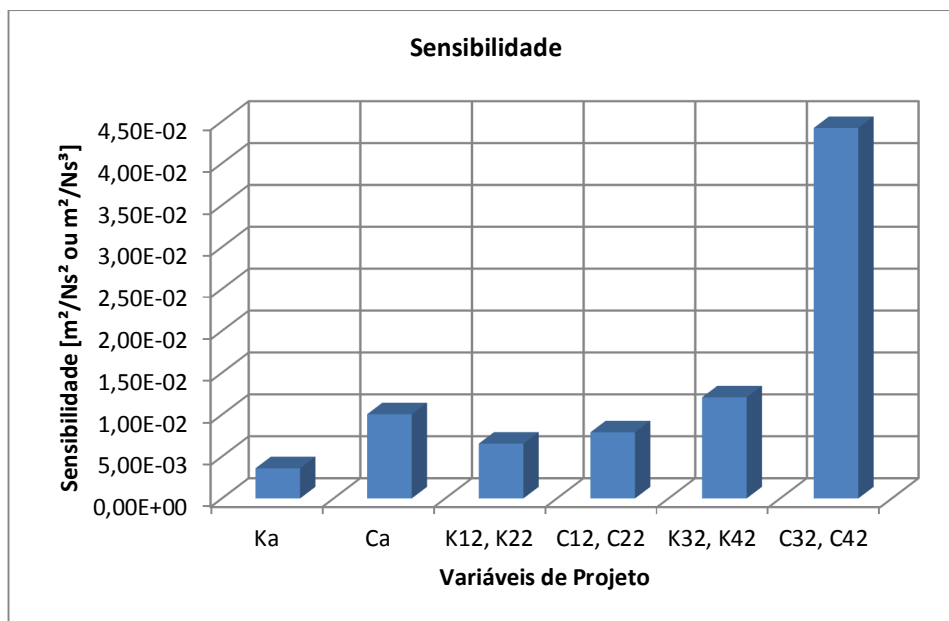


Figura 5.2 – Sensibilidade das variáveis de projeto

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

A ordem de grandeza relativa das variáveis de projeto é importante e, quanto maior for o gradiente obtido pela Eq. (5.1), maior será a contribuição daquela variável para minimizar a aceleração vertical *rms* transmitida. Já a ordem de grandeza absoluta de todas as variáveis de projeto resultou em torno de 10^{-3} , o que indica um ponto de gradiente praticamente nulo. Sabe-se que a sensibilidade é determinada, basicamente, pela variação de uma variável de interesse (mantendo-se fixas as outras) e avaliando a correspondente variação de função e, por isso, a sua respectiva unidade depende da variável de projeto avaliada. No caso analisado, tem-se que a sensibilidade $R_{a_{rms}}$ é

$$R_{a_{rms}} = \frac{\Delta a_{rms}}{\Delta x_i} \quad (5.2)$$

onde x_i é uma das variáveis de projeto que foram otimizadas (K_a , C_a , K_{12} , K_{22} , K_{32} , K_{42} , C_{12} , C_{22} , C_{32} ou C_{42}). Portanto, as unidades possíveis são m^2/Ns^2 para as rigidezes e m^2/Ns^3 para os amortecimentos.

A última etapa da análise dos dados consiste em verificar a robustez do algoritmo. Para isso, é necessário simular o algoritmo diversas vezes e calcular os valores médios e os

desvios padrões da variável de interesse a ser otimizada. Se o coeficiente de variação (CV) for pequeno, a dispersão dos resultados é pequena, o que indica um bom sinal da robustez do algoritmo. Se a dispersão for grande, o algoritmo está ficando preso aos mínimos locais da função objetivo e levando-se a crer que esses mínimos representam o mínimo global (o que não é verdade). Para tanto, após 30 simulações consecutivas e independentes, o valor médio da aceleração vertical *rms* das simulações é de 0,5091 m/s², e o coeficiente de variação desses dados é de $2,4880 \times 10^{-2}$. A dispersão é pequena, e o valor médio é praticamente o valor esperado; essa tendência indica uma boa robustez do algoritmo frente a múltiplas simulações.

As Tabelas 5.5, 5.6 e 5.7 revelam como a aceleração vertical *rms* transmitida varia conforme o perfil da pista e a velocidade do veículo. Elas foram construídas considerando os mesmos parâmetros de entrada simulados anteriormente, à exceção dos perfis de pista e das velocidades de tráfego do veículo. Tais velocidades não violam a condição dos limites de integração em função do número de onda e estão dentro do intervalo de 5,0 a 50 m/s.

Tabela 5.5 – Parâmetros otimizados em função do perfil de pista Classe G

Perfil	$G(n_0)$ [10 ⁻⁶ m ³ /ciclo]	Velocidade [m/s]	Parâmetros Otimizados	Aceleração Otimizada [m/s ²]	Aceleração Não Otimizada [m/s ²]
G	65536,0	20	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 7,0 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,4988	0,7824
		30	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 3,2 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,6590	1,0101
		40	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 3,2 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,7788	1,1997
		50	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 7,5 \times 10^4$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 6,887 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 2,335 \times 10^3$ Ns/m	0,8834	1,3643

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

A norma ISO 8608 (1995) define o perfil de pista G como o mais irregular, mas ainda admissível para construção de pavimentos. Os parâmetros otimizados na simulação do perfil G praticamente encontram-se nos limites estabelecidos nas variáveis de projeto; porém, para altas velocidades, alguns dos valores ótimos estão ligeiramente diferentes. Isso aconteceu, sobretudo, nas rigidezes traseiras K_{32} e K_{42} e nos amortecimentos traseiros C_{32} e C_{42} , com o veículo a 50 m/s submetido ao perfil de irregularidades da Classe G.

Esse resultado é esperado, pois pode-se inferir que, de um modo geral, os parâmetros traseiros são relevantes nas situações em que a arfagem é predominante. Tal situação ocorre quando o centro de gravidade do veículo é deslocado o suficiente para que o valor de b seja significativamente maior do que a . Se isso acontecer, o movimento de arfagem é bastante incômodo, e a sua contribuição na vibração transmitida é tão importante quanto o movimento vertical propriamente dito. Bouazara, Richard e Rakheja (2006) obtiveram resultados bastante semelhantes e sugeriram que a rigidez da suspensão dianteira deve ser levemente inferior que a traseira. Por outro lado, Shirahatt *et al.* (2008) adota justamente a ideia contrária; os autores forçam valores de projeto de tal forma que a rigidez dianteira seja mais rígida que a traseira, uma vez que o centro de gravidade do veículo que simularam é localizado na região traseira. Os parâmetros ótimos encontrados no presente trabalho, entretanto, corroboram as sugestões de Bouazara, Richard e Rakheja (2006). Na prática, as rigidezes das suspensões traseiras devem ser superiores em relação às suspensões dianteiras, quando o centro de gravidade do veículo é posicionado na dianteira (condição típica em automóveis), e o contrário, quando o centro de gravidade do veículo é posicionado na traseira (condição típica em caminhões com carga). Isso se deve à necessidade de equilibrar os momentos ocasionados pelo movimento de arfagem.

A Tabela 5.6 representa outra simulação numérica para um perfil de pista mais ameno e suave, típico de rodovias. Esta condição é dada pelo perfil E, e os resultados são exibidos a seguir:

Tabela 5.6 – Parâmetros otimizados em função do perfil de pista Classe E

Perfil	$G(n_0)$ [10^{-6} $m^3/ciclo$]	Velocidade [m/s]	Parâmetros Otimizados	Aceleração Otimizada [m/s^2]	Aceleração Não Otimizada [m/s^2]
E	4096,0	20	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 7,0 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,1009	0,1583
		30	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 3,2 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,1334	0,2044
		40	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 3,2 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,1576	0,2428
		50	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 3,2 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,1788	0,2761

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

O perfil de irregularidades da Classe E não provoca grandes vibrações no veículo e, por isso, mesmo frente a diferentes velocidades, os parâmetros otimizados são praticamente os mesmos. As acelerações obtidas são suavemente diferentes, e, para todos os efeitos da norma BS 6841 (1987), o motorista está confortável.

A última simulação refere-se à Classe A, em que a pista não apresenta irregularidades apreciáveis. A Tabela 5.7 mostra os resultados obtidos, e a aceleração vertical *rms* transmitida é muito pequena em qualquer velocidade:

Tabela 5.7 – Parâmetros otimizados em função do perfil de pista Classe A

Perfil	$G(n_0)$ [10^{-6} $m^3/ciclo$]	Velocidade [m/s]	Parâmetros Otimizados	Aceleração Otimizada [m/s^2]	Aceleração Não Otimizada [m/s^2]
A	16,0	20	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 7,0 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,0063	0,0099
		30	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 7,0 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,0083	0,0128
		40	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 3,2 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,0098	0,0152
		50	$K_a = 9,0 \times 10^4$ N/m $C_a = 4,0 \times 10^2$ Ns/m $K_{12} = K_{22} = 1,0 \times 10^5$ N/m $C_{12} = C_{22} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m $K_{32} = K_{42} = 3,2 \times 10^4$ N/m $C_{32} = C_{42} = 3,0 \times 10^3$ Ns/m	0,0111	0,0173

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

Os resultados verificados com o perfil de irregularidades da Classe G não coincidiram com os da Classe A, a qual indicou uma tendência em diminuir as rigidezes das suspensões da traseira à medida que a velocidade do veículo aumenta. Correlacionar essas situações tende a ser complexo, pois os efeitos dos amortecimentos da suspensão devem ser considerados. Isso sugere maiores investigações sobre a possibilidade de haver uma região de Pareto (diferentes conjuntos de variáveis de projeto que incidem no mesmo ponto ótimo global) para uma dada combinação de rigidezes e amortecimentos frente a esses perfis e velocidades analisados.

De um modo geral, os resultados obtidos ao variar as velocidades e os perfis de irregularidades indicam que o processo de otimização apresenta um ganho considerável em situações de vibração mais intensa, justamente nas pistas da Classe E e G. Nessas condições, por meio da média dos valores das acelerações obtidas, é possível inferir que os parâmetros otimizados do modelo ocasionam um ganho de 35,26% em relação ao modelo não otimizado. Na pista da Classe A, esse ganho é um pouco maior, no valor de 35,38%.

5.2.2 Análise da Hipótese de Não Descolamento do Pneu com a Pista

A hipótese adotada de não descolamento do pneu com o perfil de irregularidades da pista é verificada por meio de uma simulação do perfil de pista juntamente com o histórico de deslocamentos de cada conjunto pneu-roda. Assume-se que toda a análise de dados é feita a partir da posição de equilíbrio estático do veículo e que a situação de descolamento ocorre quando a diferença entre o deslocamento relativo do conjunto pneu-roda é maior que o deslocamento estático inicial. A Figura 5.3 exibe as condições para o caso de apenas um dos conjuntos pneu-roda de forma esquemática:

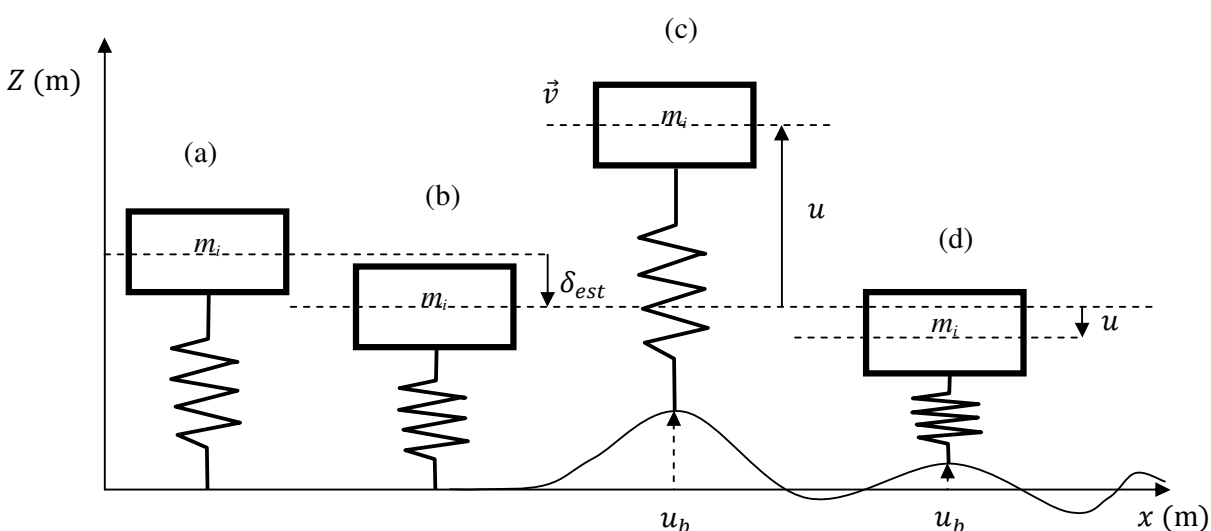


Figura 5.3 – Condições para descolamento do pneu com a pista

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

Na Figura 5.3, a situação (a) compreende o veículo parado antes de entrar em contato com o perfil da pista. Nessa situação, o conjunto pneu-roda está numa condição livre de forças de compressão. Logo após o contato pontual, a situação (b) procede, e o veículo, após sofrer uma vibração livre amortecida, está em equilíbrio estático com as forças gravitacionais. Dessa forma, as análises realizadas nesta dissertação partem da situação (b), a qual despreza esses deslocamentos iniciais que o conjunto pneu-roda possui.

A situação (b) também indica o deslocamento estático δ_{est} do conjunto pneu-roda em relação à posição inicial do caso (a). Na situação (c), o veículo encontra-se em movimento, o perfil de irregularidades da pista possui um deslocamento u_b (em relação ao valor médio do perfil) e o conjunto pneu-roda possui um deslocamento u (em relação à posição de equilíbrio). Dessa forma, tem-se o descolamento do pneu na situação (c) quando $u - u_b + \delta_{est} < 0$. Na situação (d), não haverá descolamento do pneu com a pista caso $u - u_b + \delta_{est} \geq 0$.

A partir das densidades espectrais dos deslocamentos do grau de liberdade do conjunto pneu-roda e do perfil de irregularidades da pista, podem-se obter os respectivos históricos de sinais no domínio do tempo. Então, aplica-se a soma ($u - u_b + \delta_{est}$) para verificar em qual situação tem-se o descolamento do pneu. Conforme Gomes *et al.* (2008), para gerar os históricos no tempo a partir de uma densidade espectral de potência, pode-se utilizar a Eq. (5.3) a seguir:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{np} \left[\sqrt{G_z(\omega)} \Delta\omega \text{sen}(\omega_k t - 2\pi \text{rand}(1)) \right] \quad (5.3)$$

em que $G_z(\omega)$ é a densidade espectral da grandeza de interesse no espaço das frequências angulares, dada em m^3/rad ; $\Delta\omega$ é o intervalo de frequências no qual a densidade espectral é dividida, dado em rad/s ; np é o número de pontos do intervalo onde a densidade é dividida (linhas espectrais); ω_k representa a frequência angular em que se avalia a densidade espectral de interesse, dada em rad/s ; t é o tempo, dado em segundos; e $\text{rand}(1)$ é um gerador de números aleatórios entre 0 e 1 para gerar ângulos de fase aleatórios entre 0 rad e 2π rad.

Como as densidades espectrais estão sendo trabalhadas com números de onda na frequência espacial (n), as mesmas devem ser transformadas para frequência angular (ω ou Ω) para utilizar a equação anterior. Por isso, é necessário realizar uma mudança de variável conforme discutido na seção 2.2.2 de tal forma que a seguinte Eq. (5.4) deve ser utilizada:

$$G_z(\omega) = \frac{G_z(n)}{2\pi v} \quad (5.4)$$

onde $G_z(n)$ é a densidade espectral com número de onda na frequência espacial, em m^3/ciclo , e v é a velocidade do veículo, em m/s .

Para tanto, por meio das Eqs (5.3) e (5.4), é possível simular o pior caso possível, com o veículo em movimento a partir de $v = 50$ m/s num perfil de pista da Classe G ($G_0 = 65536,0 \times 10^{-6}$ m³/ciclo), a fim de verificar o descolamento em um de seus conjuntos pneu-roda. Nessa simulação, por exemplo, o histórico da interação entre o pneu dianteiro esquerdo e o perfil de irregularidades da pista no domínio do tempo (para $t = 20$ segundos) é exibido na Fig. (5.4):

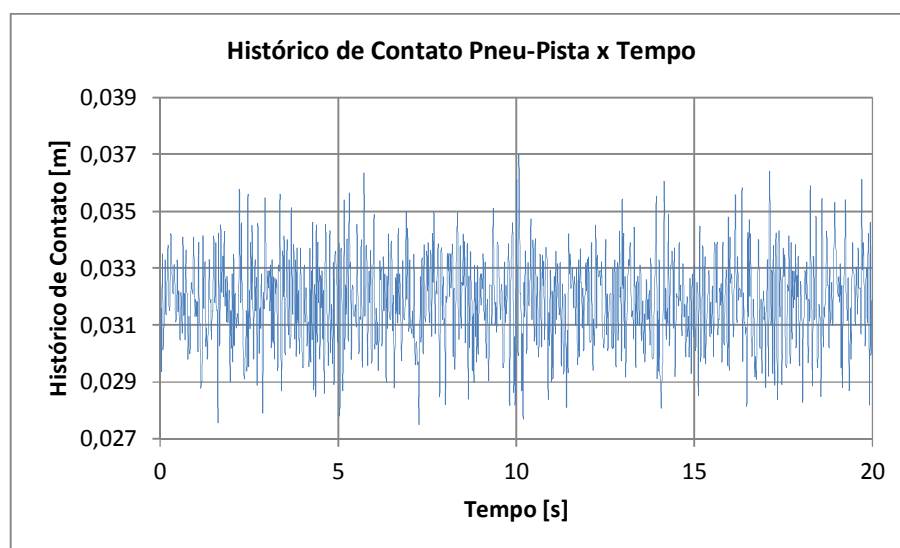


Figura 5.4 – Histórico de $u - u_b + \delta_{est}$ para $v = 50$ m/s num perfil da Classe G

Fonte: Dados da Pesquisa (2012).

Os valores obtidos do histórico $u - u_b + \delta_{est}$ na simulação nunca estiveram abaixo de zero. De um modo geral, isso assegura que a hipótese de não descolamento do pneu é válida em termos dos deslocamentos relativos. Os demais conjuntos pneu-roda do modelo também obtiveram resultados acima de zero, similares ao do pneu-roda dianteiro esquerdo da Fig. 5.4, o que confirma o não descolamento dos pneus do veículo com a pista.

6 CONCLUSÕES

A otimização de parâmetros concentrados de suspensão em modelos veiculares por meio do algoritmo de enxame de partículas no domínio da frequência é, de um modo geral, um procedimento de cálculo viável para reduzir a aceleração vertical *rms* transmitida pelo assento. Nas simulações realizadas, o algoritmo obtém satisfatoriamente o mínimo da função objetivo em um tempo computacional pequeno, identifica os parâmetros que mais influenciam no conforto e segurança e também calcula a variância e o desvio padrão dos deslocamentos, velocidades e acelerações para qualquer grau de liberdade. A otimização realizada resulta em valores aceitáveis de aceleração vertical *rms* transmitida quando comparados com as normas BS 6841 (1987), ISO 8608 (1995) e ISO 2631 (1997).

A pesquisa realizada permitiu conhecer os diversos modelos veiculares de diferentes graus de liberdade frente a um perfil de pista aleatório. Esse objetivo geral foi possível por meio dos objetivos específicos alcançados. Foi desenvolvido um modelo analítico e numérico de um veículo com assento, de oito graus de liberdade (quatro massas não suspensas, uma massa suspensão, arfagem, rolagem e assento), submetido a um perfil de pista aleatório. Nesse modelo, foram otimizados numericamente os parâmetros concentrados de massa, rigidez e amortecedor por meio do processo de otimização de enxame de partículas a fim de reduzir a aceleração vertical *rms* transmitida pelo assento dentro das variáveis de projeto estabelecidas na literatura. Dessa forma, o domínio da frequência e o uso das densidades espectrais foram importantes para diminuir o tempo computacional e permitir o cálculo da variância e do desvio padrão de qualquer grau de liberdade do modelo diretamente.

O modelo matemático e numérico foi exibido em duas partes. A primeira representou um modelo de apenas dois graus de liberdade cujo objetivo era compará-lo com a literatura e avaliar a estrutura geral do algoritmo proposto. A segunda parte exibiu todas as equações de movimento pertinentes ao modelo de oito graus de liberdade, o que permitiu arranjar-las num sistema matricial e avaliá-las no domínio da frequência por meio da Transformada de Fourier. Dessa forma, foi possível determinar analiticamente a densidade espectral dos deslocamentos em qualquer grau de liberdade de interesse em função da densidade espectral da pista. Com essas densidades, basta integrá-las adequadamente para calcular as velocidades e acelerações pertinentes a esses graus de liberdade.

A análise de dados também foi realizada em duas partes. A primeira representou o modelo de dois graus de liberdade submetido a um perfil de pista de irregularidades aleatório e simulou conforme as orientações de Sun, Cai e Yang (2007) e Gomes (2009). O resultado foi de uma variância da deflexão da suspensão $\sigma_{z_1}^2$ igual à $1,6573 \times 10^{-1} \text{ m}^2$, um valor muito próximo ao obtido pelos autores na área. A segunda parte simulou o modelo de oito graus de liberdade em diferentes situações, conforme os dados de entrada propostos por Shirahatt *et al.* (2008). Para complementar e testar o algoritmo, foram realizadas uma análise de sensibilidade das variáveis de projeto em torno do ponto ótimo global, uma verificação do algoritmo em função do número de iterações, um estudo de robustez frente a múltiplas simulações e uma comparação da aceleração vertical *rms* otimizada e não otimizada em função da velocidade do veículo e da qualidade da pista de irregularidades. Os resultados indicaram uma aceleração ótima igual a $0,4989 \text{ m/s}^2$ frente à Classe G de perfis de irregularidades, considerada a pior Classe permitida conforme a ISO 8608 (1995). Em comparação à aceleração não otimizada, o ganho é de 35,3% aproximadamente. Nas simulações realizadas, percebeu-se claramente que os intervalos de integração das densidades espectrais influenciam na resposta obtida e como o algoritmo é sensível aos limites inferiores dessa integração. Uma vez estabelecido esse limite inferior, o algoritmo trabalha normalmente e obtém resultados satisfatórios. A hipótese de não descolamento do pneu com as irregularidades da pista foi avaliada e assegurou que durante as simulações os pneus mantiveram-se em contato com a pista.

Sugere-se também que estudos sobre a otimização de parâmetros de suspensão em modelos veiculares por algoritmos metaheurísticos sejam realizados, pois a natureza aleatória dos perfis de irregularidades favorece esse tipo de algoritmo, e a otimização desenvolve-se ainda de forma muito tímida na indústria automotiva. Para tanto, mostra-se pertinente:

- a) inserir um grau de liberdade no assento do motorista para representar a estrutura pneumática, em forma de sanfona, presente nos ônibus e caminhões;
- b) realizar um levantamento de dados das densidades espectrais referentes às pistas de irregularidades nacionais;
- c) realizar medições experimentais com um automóvel numa pista de irregularidades e comparar os resultados medidos com as simulações numéricas;
- d) confirmar os resultados numéricos ótimos apresentados no domínio do tempo.

REFERÊNCIAS

- ANDRÉN, P. Power spectral density approximations of longitudinal road profiles. **International Journal of Vehicle Design**, Geneva, v. 40, n. 1-3, p. 2-14, 2006.
- BAUMAL, A. E.; MCPHEE, J.J.; CALAMAI, P.H. Application of genetic algorithms to the design optimization of an active vehicle suspension system. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 163, n. 1-4, p. 87-94, Sept. 1998.
- BERGH, F. v. d. **An analysis of particle swarm optimizers**. 2001. 283 p. Thesis (Ph. D. Computer Science) - Faculty of Natural and Agricultural Science, University of Pretoria, Pretoria, 2001.
- BESTER, C. J. The effect of road roughness on safety. In: ANNUAL MEETING OF THE TRANSPORTATION RESEARCH BOARD, 82., 2003, Washington, D.C. **Proceedings...** Washington, D.C., 2003. 1 CD-ROM.
- BOUAZARA, M.; RICHARD, M. J.; RAKHEJA, S. Safety and comfort analysis of a 3-D vehicle model with optimal non-linear active seat suspension. **Journal of Terramechanics**, Amsterdam, v. 43, n. 2, p. 97-118, Apr. 2006.
- BRITISH STANDARDS INSTITUTION. **BS-6841**: measurement and evaluation of human exposure to whole-body mechanical vibration and repeated shock. London, 1987.
- CALVETTI, D. et al. Computation of Gauss-Kronrod quadrature rules. **Mathematics of Computation**, Washington, D.C., v. 69, n. 231, p. 1035-1052, Feb. 2000.
- CHEN, T.; CHI, T. On the improvements of the particle swarm optimization algorithm. **Advances in Engineering Software**, Amsterdam, v. 41, p. 229-239, Sept. 2009.
- CHI, Z.; HE, Y.; NATERER, G. F. Desing optimization of vehicle suspensions with a quarter-car vehicle model. **Transactions of the CSME**, Oshawa, v. 32, n. 2, p. 297-312, Jun. 2008.
- DAS, S.; ABRAHAM, A.; KONAR, A. Particle swarm optimization and differential evolution algorithms: technical analysis, applications and hybridization perspectives. **Studies in Computational Intelligence**, Berlin, n. 116, p. 1-38, 2008.
- DODDS, C. J.; ROBSON, J. D. The description of road surface roughness. **Journal of Sound and Vibration**, Amsterdam, v. 31, n. 2, p. 175-183, 1973.
- ESMIN, A. A. A. **Estudo de aplicação do algoritmo de otimização por enxame de partícula na resolução de problemas de otimização ligados ao SEP**. 2005. v. 88 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Departamento de Elétrica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2005.

FAHEEM, A. **Study of dynamic modelling and stability of passenger cars**. 2006. 203 p. Thesis (Master of Engineering) – RMIT University, Melbourne, 2006.

FAI, T. C.; DELBRESSINE, F.; RAUTERBERG, M. Vehicle seat design: state of the art and recent development. In: **WORLD ENGINEERING CONGRESS**, 2007, Penang. **Proceedings...** Penang, 2007. p. 51-61.

GAO, W.; ZHANG, N.; DU, H. P.; A half-car model for dynamic analysis of vehicles with random parameters. In: **AUSTRALASIAN CONGRESS ON APPLIED MECHANICS**, 5., 2007, Brisbane. **Proceedings...** Brisbane: Engineers Australia, 2007. p. 595-600.

GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of vehicle dynamics**. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 2003.

GRIFFIN, M. J. **Handbook of human vibration**. New York: Academic Press, 2003.

GOEL, R. K. Simplified analysis of asymmetric structures with supplemental damping. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, Malden, v. 30, n. 9, p. 1399-1416, Sept. 2001.

GOMES, H. M. A swarm optimization algorithm for optimum vehicle suspension design. In: **INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING**, 20., 2009, Gramado. **Proceedings...**Rio de Janeiro: ABCM, 2009. 1 CD-ROM.

GOMES, H. M. *et al.* A simple closed-loop active control of electrodynamic shakers by acceleration power spectral density for environmental vibration tests. **Experimental Mechanics**, Norwell, v. 48, n. 5, p. 683-692, Oct. 2008.

HE, Y.; MCPHEE, J. Multidisciplinary optimization of multibody systems with application to the design of rail vehicles. **Multibody System Dynamics**, Dordrecht, v. 14, n. 2, p. 111-135, 2005.

HEALTH, M. T. **Scientific Computing: an introductory survey**. New York: McGraw-Hill, 1997.

HWANG, J. H.; KIM, J. S. On the approximate solution aircraft landing gear under nonstationary random excitations. **KSME International Journal**, Seoul, v. 14, n. 30, p. 968-977, 2000.

HYVÄRINEN, J. **The improvement of full vehicle semi-active suspension through kinematical model**. 2004. 157 p. Dissertation (Master in Mechanical Engineering) – Faculty of Technology, University of Oulu, Oulun Yliopisto, 2004.

IKENAGA, S. *et al.* Active suspension control of ground vehicle based on a full-vehicle model. In: **AMERICAN CONTROL CONFERENCE**, 2000, Chicago. **Proceedings...** Chicago: IEEE, 2000. p. 4019-4024.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO-2631:** Guide for evaluation of human exposure to whole-body vibration. Europe, 1997.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO-5008:** Agricultural wheeled tractors and field machinery -- Measurement of whole-body vibration of the operator. Europe, 2002.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO-8608:** mechanical vibration – road surface profiles – reported of measured data. Europe, 1995.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS, 1995, Perth. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 1995. p. 1942-1948.

LANIZICA, A. (Org.). **Particle swarm optimization**. Rijek: In tech, 2009.

MALMEDAHL, G. A. **A method for the characterization of off-road terrain severity**. 2006. xvii, 109 p. Thesis (Master of Science) – The Ohio State University, Ohio, 2006.

MEI, C.; LIU, G.; XIAO, X. Improved particle swarm optimization algorithm and its global convergence analysis. In: CHINESE CONTROL AND DECISION CONFERENCE, 22., 2010, Xuzhou. **Proceedings...** Singapore: IEEE, 2010. p. 1662-1667.

MENDES, P.; OLIVEIRA, S. **Análise dinâmica de estruturas: utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos**. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 2008.

MORSCH, I. B. **Análise estrutural de veículos comerciais tipo ônibus**. 2001. 215 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

MOTTA, D. S. **Modelagem de uma suspensão veicular com elementos não lineares e comparação de seu desempenho com um modelo semi-ativo**. 2005. 129 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

MOURA, E. D. **Estudo de suspensões passiva, semi-ativa MR e ativa**. 2003. 170 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2003.

NEWLAND, D. E. **An introduction to random vibrations and spectral analysis**. New York: Longman Scientific e Technical, 1987.

PALMER, K. T. et al. Prevalence and pattern of occupational exposure to whole body vibration in Great Britain: findings from a national survey. **Occupational Environmental Medicine**, London, v. 57, n. 4, p. 229-236, Apr. 2000.

PARADISO, M. A. **Development of a nonlinear ride quality model to aid in TWEEL© parameter selection.** 2009. xi, 207 p. Thesis (Master of Science in Mechanical Engineering) – Clemson University, Clemson, 2009.

SHIRAHATT, A. et al. Optimal design of passenger car suspension for ride and road holding. **ABCM**, Rio de Janeiro, v. 30, n. 1, p. 66-76, Jan./Mar. 2008.

SUN,L.; CAI, X; YANG, J. Genetic algorithm-based optimum vehicle suspension design using minimum dynamic pavement load as a design criterion. **Journal of Sound and Vibration**, Amsterdam, v. 301, n. 1-2, p. 18-27, Mar. 2007.

WHITE, A. A.; PANJABI, M. M. **Biomechanics of the spine.** Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins, 1990.

WONG, J. Y. **Theory of ground vehicles.** 3rd ed. New York: John Wiley and Sons, 2001.

ZHANG, L. J.; LEE, C. M.; WANG, Y. S., A study on nonstationary random vibration of a vehicle in time and frequency domains. **International Journal of Automotive Technology**, Seoul, v. 3, n. 3, p. 101-109, Apr. 2002.

ZHANG, Y. et al. Non-stationary random vibration analysis of vehicle with fractional damping. In: NATIONAL CONFERENCE ON MECHANISM AND MACHINES, 13., 2007, Bangalore. **Proceedings...** Bangalore: National Institute of Technology, 2007. p. 171-178.

APÊNDICE A – TRANSFORMADA DE FOURIER

O modelo matemático proposto na dissertação parte inicialmente no domínio do tempo e, por intermédio da Transformada de Fourier, chega-se no domínio da frequência. Para tanto, é necessário deduzir essa transformada para uma função qualquer:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.1})$$

onde $F(\omega)$ é uma função genérica no domínio da frequência e $F(t)$ é a função no domínio do tempo. Admite-se que o movimento tem início em $t = 0$ e, por isso, pode-se alterar o limite inferior da integração para zero, simplificando a Eq. (A.1) para:

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.2})$$

Por meio da Eq. (A.2), obtêm-se as duas derivadas da transformada para então aplicá-las na função de interesse. A primeira derivada é dada pela diferenciação da Eq. (A.2) e da sua posterior integração por partes:

$$\dot{F}(\omega) = -F(0) + i\omega F(\omega) \quad (\text{A.3})$$

Diferencia-se novamente a Eq. (A.3) para obter a segunda derivada. Da mesma forma que a primeira derivada, faz-se necessária a integração por partes:

$$\ddot{F}(\omega) = -\dot{F}(0) + i\omega F(0) - \omega^2 F(\omega) \quad (\text{A.4})$$

As Eqs. (A.3) e (A.4) representam, respectivamente, as velocidades e as acelerações que são usadas ao longo da dissertação. Para todos os efeitos, tem-se que $\dot{F}(0) = F(0) = 0$, porque se admite que o processo apresente média zero.

APÊNDICE B – QUADRATURA DE GAUSS-KRONROD

A Quadratura Gauss-Kronrod não difere muito das quadraturas tradicionais de Gauss, Newton-Cotes e Gauss-Legendre. Frente a isso, algumas vantagens são apreciáveis quando se utiliza as Quadraturas de Gauss, sobretudo no que diz respeito ao espaçamento nodal. Para as integrações baseadas nas regras de Newton-Cotes, os espaços nodais devem ser igualmente divididos, o que não é obrigatório nas regras de Gauss. Pelo contrário, a localização dos nós é previamente determinada para obter um polinômio de alto grau. Nesse sentido, os nós podem estar próximos dos extremos da função sem necessariamente incluí-los (HEATH, 1997).

A Quadratura de Gauss-Kronrod pode ser deduzida da seguinte forma. Seja dw uma medida diferencial não negativa no intervalo real $[a, b]$ com um infinito número de pontos de incremento tal que os momentos para $k = 0, 1, 2, \dots, n$ existam e estejam interligados. Sabe-se que

$$\mu_k = \int_a^b x^k dw(x) \quad (\text{B.1})$$

onde assume-se que $\mu_0 = 1$ em termos de notação indicial. A regra de Quadratura de Gauss de n -pontos para uma integral qualquer é

$$I_f = \int_a^b f(x) dw(x) \quad (\text{B.2})$$

em que pode ser formulada de tal modo que a sua discretização é dada pelo somatório da Eq. (B.3) a seguir:

$$G_n f = \sum_{k=1}^n f(x_k) w_k \quad (\text{B.3})$$

Sabe-se que os nós estão localizados em $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ e que os pesos w_k de ponderação atendem as condições de $G_n f = I_f \forall f \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Adota-se a notação \mathbb{P} em

relação ao conjunto de polinômios de grau máximo j . Dessa forma, a regra de Quadratura de Gauss-Kronrod modifica a Quadratura de Gauss tradicional tal que

$$K_{2n+1}f = \sum_{k=1}^{2n+1} f(\tilde{x}_k)\tilde{w}_k \quad (\text{B.4})$$

onde apresentam-se as seguintes propriedades

$$\{x_k\}_{k=1}^n \subset \{\tilde{x}_k\}_{k=1}^{2n+1} \quad (\text{B.5})$$

$$K_{2n+1}f = I_f \quad \forall f \in \mathbb{P}_{3n+1} \quad (\text{B.6})$$

Aplicam-se essas propriedades a fim de avaliar a Quadratura de Gauss tradicional $G_n f$ e a de Gauss-Kronrod $K_{2n+1}f$. Por meio de um par de aproximações de I_f , pode-se estimar o erro relativo de $G_n f$. Melhores informações sobre a Quadratura de Gauss-Kronrod podem ser obtidas em Heath (1997) e Calvetti *et al.* (2000), as quais fogem do escopo desta dissertação.