

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APROXIMAÇÕES ESTABILIZADAS DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS
VISCOPLÁSTICOS ATRAVÉS DE UMA EXPANSÃO SEGUIDA DE UMA
CONTRAÇÃO AXISSIMÉTRICA

por

Lober Hermany

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, fevereiro de 2012

APROXIMAÇÕES ESTABILIZADAS DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS
VISCOPLÁSTICOS ATRAVÉS DE UMA EXPANSÃO SEGUIDA DE UMA CONTRAÇÃO
AXISSIMÉTRICA

por

Lober Hermany
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Comissão de avaliação:

Prof^ª. Dr^ª. Mônica Feijó Naccache – DEM/PUC- Rio

Prof^ª. Dr^ª. Flávia Schwarz Franceschini Zinani – UNISINOS

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França – PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 14 de fevereiro de 2012

"Procure ser um homem de valor, em vez de ser
um homem de sucesso"

Albert Einstein (1879 — 1955)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar aqui meus sinceros agradecimentos:

À Deus em primeiro lugar, pelas dádivas recebidas

Ao meu pai, Sighard Hermany, que me ensinou a ser uma pessoa boa e justa.

Aos meus irmãos, Nidrian, Bergus e Glauber, que sempre estiveram ao meu lado me apoiando a todo momento.

À minha companheira, Francine Inês Hauth, que me incentivou desde o início e também teve paciência para me escutar.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sérgio L. Frey, que me orientou de forma digna.

Aos meus colegas do laboratório (LAMAC), Daniel, Cleiton, Crissiane, Renato e Giovanni, que muitas vezes me ajudaram e apoiaram.

À todos os professores e funcionários do Programa de Pós-graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida.

À todas as pessoas que indiretamente contribuíram para a conclusão desta dissertação.

RESUMO

Os efeitos da inércia no escoamento de fluidos viscoplásticos através de uma expansão seguida de uma contração são analisados neste trabalho. O comportamento mecânico é modelado pela equação constitutiva do fluido Newtoniano Generalizado, com a função viscosidade definida pela equação do modelo SMD (de Souza Mendes e Dutra, 2004). As equações de conservação de massa e de quantidade de movimento, juntamente com a equação constitutiva, são aproximadas pela formulação de Galerkin mínimos-quadrados (GLS) em termos da pressão e da velocidade. Uma análise de sensibilidade é realizada, com o objetivo de investigar a influência da inércia e das forças viscosas na dinâmica do escoamento. A topologia das superfícies de escoamento é obtida, e provou-se estar fortemente relacionada com a inércia e com a tensão limite de escoamento considerados no escoamento. Além disso, os resultados são comparados com outros resultados obtidos na literatura, que consideram a elasticidade do fluido. Pode-se observar que os efeitos da inércia e da elasticidade levam a padrões de escoamento diferentes.

ABSTRACT

The effect of inertia in the flow of viscoplastic fluids through an expansion followed by a contraction is analyzed. The mechanical behavior is modeled by the Generalized Newtonian Fluid constitutive equation, with the viscosity function given by the SMD equation (de Souza Mendes and Dutra, 2004). The conservation equations of mass and momentum, together with the constitutive equation are approximated by a Galerkin least-squares (GLS) formulation in terms of pressure and velocity. A sensitivity analysis is performed, aiming at investigating the influence of inertia and viscous forces on the fluid dynamics. The topology of yield surfaces is obtained, and proved to be strongly related to inertia and yield stress amounts considered in the flow. Moreover, the results are compared to other results from the literature, which consider fluid elasticity. It is observed that inertia and elasticity effects lead to different flow patterns.

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO.....	01
2. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO.....	06
2.1 As equações de conservação em termos de fluxo.....	06
2.1.1 <i>Conservação de Massa</i>	06
2.1.2 <i>Conservação de Momentum</i>	08
3. COMPORTAMENTO MATERIAL.....	11
3.1 Fluido Newtoniano Generalizado.....	11
3.2 Modelos viscoplásticos.....	12
3.3 Modelo SMD de viscoplasticidade.....	14
4. APROXIMAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS.....	17
4.1 Formulação forte.....	18
4.2 Formulação de Galerkin.....	21
4.3 Formulação de Galerkin mínimos-quadrados.....	22
4.4 O problema matricial associado.....	23
4.5 O elemento bilinear quadrilateral.....	24
4.6 Integração numérica: quadratura gaussiana.....	28
4.6.1 <i>Regra geral da quadratura gaussiana</i>	29
4.7 Derivadas das funções de interpolação.....	30
5. SOLUÇÕES COMPLETAS DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO.....	33
5.1 Solução para fluidos Newtonianos.....	34
5.2 Solução para fluidos <i>power-law</i>	35
5.3 Solução para fluidos de Bingham.....	36
5.4 Solução para fluidos de Herschel-Bulkley.....	40
6. RESULTADOS NUMÉRICOS.....	43
6.1 Validação do código computacional.....	43
6.2 Teste de independência de malha.....	45
6.3 Análise de sensibilidade.....	48
6.3.1 <i>Escoamentos sem inércia</i>	49
6.3.2 <i>Escoamentos com inércia</i>	57

7. COMENTÁRIOS FINAIS E PERPECTIVAS FUTURAS.....	66
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	68

LISTA DE FIGURAS

	pg
Figura 3.1	15
Figura 3.2	16
Figura 4.1	25
Figura 4.2	27
Figura 5.1	33
Figura 6.1	43
Figura 6.2	44
Figura 6.3	45
Figura 6.4	46
Figura 6.5	48
Figura 6.6	49
Figura 6.7	51
Figura 6.8	52
Figura 6.9	53
Figura 6.10	54
Figura 6.11	55
Figura 6.12	57
Figura 6.13	58
Figura 6.14	59
Figura 6.15	61

Figura 6.16	Comportamento da variável φ em função da intensidade de escoamento U^* para vários números de Reynolds reológicos.....	62
Figura 6.17	Análise da perda de carga adimensional devido à influências dos parâmetros: (a) número de salto J ; (b) índice <i>power-law</i> n ; (c) intensidade de escoamento U^*	63
Figura 6.18	Comparação das zonas rígidas entre: (a) visualização experimental de escoamento sem inércia de solução de carbopol 0,09% [Souza Mendes <i>et al</i> , 2007] (b) resultado numérico de escoamento com inercia de fluido SMD.....	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Coordenadas nodais no espaço ξ	pg. 26
------------	------------------------------------	-----------

LISTA DE SÍMBOLOS

Bn	Número de Bingham	[-]
$C_{1,2,3,4,5}$	Constantes de integração	[-]
D	Tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
dt	Força devido à tensão que atua em um elemento de superfície	[N]
F	Matriz dos termos das forças de campo	[-]
Fr	Número de Froude	[-]
f	Função de forças de corpo	[N/m ³]
G	Matriz dos termos de pressão e continuidade	[-]
g	Campo de aceleração gravitacional	[m/s ²]
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω	[-]
$H_1^0(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam sobre o contorno Γ_g	[-]
HB	Número de Herschel-Bulkley	[-]
h_k	Comprimento de malha do elemento	[m]
I	Tensor unitário	[-]
I_D	Primeiro invariante do tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
II_D	Segundo invariante do tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
III_D	Terceiro invariante do tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
J	Matriz Jacobiana	[-]
j	Determinante da matriz Jacobiana	[-]
J	Número de salto	[-]
K	Matriz dos termos difusivos	[-]
K	Índice de consistência	[Pa.s ⁿ]
$L^2(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis sobre o domínio Ω	[-]
$L_0^2(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula no domínio Ω	[-]
m	Grau de interpolação de elementos finitos	[-]
m	Parâmetro regularizador de Papanastasiou	[s]
m_k	Parâmetro do grau de interpolação utilizado	[-]
N	Matriz dos termos advectivos	[-]
N_A	Função de interpolação do nó global A	[-]
N_a	Função de interpolação do nó local a	[-]
n	Índice de <i>power-law</i>	[-]
n	Vetor normal unitário	[-]
n_{sd}	Número de dimensões do problema	[-]
P	Espaço funcional do campo de pressão	[-]
P^h	Sub-espço de elementos finitos para o campo de pressão	[-]

P_m	Espaço polinomial de grau m para elemento triangular ou tetraédrico	[-]
p	Pressão	[Pa]
p^h	Aproximação de elementos finitos para o campo de pressão	[Pa]
Q_m	Espaço polinomial de grau m para elemento quadrangular ou hexaédrico	[-]
Q_1	Elemento quadrangular bi-linear	[-]
q	Função peso do campo de pressão	[-]
\mathfrak{R}	Espaço dos números reais	[-]
r	Coordenada cilíndrica na direção do raio	[m]
R_c	Comprimento característico	[m]
R_l	Espaço polinomial de ordem l	[-]
R_m	Espaço polinomial de ordem m	[-]
Re_k	Número de Reynolds de malha	[-]
Re_r	Número de Reynolds reológico	[-]
\mathbf{T}	Tensor de tensão total	[Pa]
\mathbf{t}^h	Vetor de força de superfície	[Pa]
t	tempo	[s]
tr	operador traço	
\mathbf{U}	Vetor de graus de liberdade	[-]
U^*	Intensidade de escoamento (vazão adimensional)	[-]
U	Variável genérica	[-]
U^h	Aproximação de elementos finitos de uma variável genérica U	[m/s]
\mathbf{u}	Vetor velocidade	[m/s]
\mathbf{u}^h	Aproximação de elementos finitos do campo de velocidade	[m/s]
u_c	Velocidade característica	[m/s]
\mathbf{V}	Espaço funcional do campo de velocidade	[-]
\mathbf{V}^h	Sub-espço de elementos finitos para o campo de velocidade	[-]
\mathbf{v}	Função peso do campo de velocidade	[-]
V^-	Volume de material não escoado dentro da expansão-contração e a montante do eixo $z^*=0$	[m ³]
V_T	Volume total de material não escoado no interior da expansão-contração	[m ³]
\mathbf{x}	Vetor posição	[m]
W	Peso do ponto de integração numérica	[-]
z	Coordenada cilíndrica na direção axial	[m]

LETRAS GREGAS

α	Parâmetro de estabilização da equação do movimento	[-]
$\dot{\gamma}$	Magnitude do tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_0$	Taxa de cisalhamento no fim da região de alta viscosidade da curva SMD	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_1$	Taxa de cisalhamento no início da região <i>power-law</i> da curva SMD	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_c$	Taxa de cisalhamento característica	[s ⁻¹]
η	Coordenada natural	[-]
η	Viscosidade não Newtoniana	[Pa.s]
η_0	Viscosidade Newtoniana para baixas taxas de cisalhamento	[Pa.s]
η_c	Viscosidade característica	[Pa.s]
μ	Viscosidade Newtoniana	[Pa.s]
ρ	Massa específica do fluido	[Kg/m ³]
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensão extra	[Pa]
τ	Tensão de cisalhamento	[Pa]
τ_0	Tensão limite de escoamento	[Pa]
Ω	Domínio do problema	[-]
Ω^h	Partição do domínio Ω em elementos finitos	[-]
Ω_k	Domínio do elemento finito k	[-]
$\bar{\Omega}$	Domínio limitado fechado do problema	[-]
$d\Gamma$	Elemento infinitesimal de superfície	[m ²]
Γ	Fronteira do domínio Ω	[-]
Γ_g	Parte da fronteira Γ na qual são impostas as condições de Dirichlet	[-]
Γ_h	Parte da fronteira Γ na qual são impostas as condições de Neuman	[-]
ξ	Coordenada natural	[-]
φ	Razão entre os volumes de V^- e V_T	[-]

SOBRESCRITOS

$*$	Denota variáveis adimensionais	[-]
h	Aproximação de elementos finitos	[-]
T	Transposta de uma matriz	[-]

SUBSCRITOS

a	Número do ponto nodal local	[-]
A	Número do ponto nodal global	[-]
g	Condição de contorno de Dirichlet	[-]
h	Condição de contorno de Neuman	[-]

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

∇	Operador gradiente espacial	[-]
$\ \cdot\ $	Norma das funções L^2	[-]

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho são apresentados resultados numéricos de escoamentos inerciais de fluidos viscoplásticos através de uma expansão abrupta seguida de contração em um canal axissimétrico. Os fluidos viscoplásticos estão presentes em vários processos industriais importantes. Na indústria do petróleo, por exemplo, o fluido de perfuração dos poços são materiais viscoplásticos. Diversos outros exemplos podem ser encontrados nas indústrias alimentícias e de cosméticos. Existem também tintas, medicamentos e fluidos biológicos que apresentam um comportamento mecânico de um fluido viscoplástico. Um fluido viscoplástico é caracterizado por possuir uma tensão limite de escoamento, contudo existem discussões na literatura a respeito desta definição (veja Barnes, 1999b).

A definição clássica descreve o fluido viscoplástico como uma classe dos fluidos Newtonianos generalizados que requer uma tensão limite de escoamento finita para deformar-se, exibindo um comportamento de corpo sólido (com viscosidade infinita) quando o nível de tensões é menor que a tensão limite de escoamento e escoam com uma relação entre tensão e deformação newtoniana ou pseudoplástica se este nível de tensões for superior à tensão limite de escoamento. Mais recentemente, alguns autores questionam a existência de tal limite, creditando sua existência principalmente à incapacidade de reômetros antigos em mensurar o nível de tensões do escoamento para valores muito baixos da taxa de deformação (Barnes, 1999a and 1999b). De acordo com esta nova definição, o fluido viscoplástico é um material estruturado que se comporta como um fluido newtoniano, com uma viscosidade muito alta, quando submetido a um nível de tensões abaixo da tensão limite de escoamento. Quando esta tensão limite de escoamento é superada, a estrutura molecular se quebra causando uma intensa diminuição da viscosidade, e o comportamento mecânico torna-se newtoniano ou pseudoplástico. A lei constitutiva empregada neste trabalho obedece este último conceito.

O padrão do escoamento de um fluido viscoplástico escoando através de uma geometria complexa é caracterizado por duas regiões distintas: as regiões não deformadas, onde as tensões são menores que a tensão limite de escoamento e a deformação é extremamente baixa; e as regiões deformadas, que aparecem onde o nível de tensões é superior à tensão limite de escoamento. A topologia destas zonas define algumas características importantes do escoamento, como a quantidade de fluido que pode permanecer estagnada em uma região específica do escoamento, ou a queda de pressão ao longo deste escoamento. Portanto, o estudo do padrão do escoamento e a determinação de como ele é afetado pelos parâmetros governantes é de grande

interesse. O foco principal do presente trabalho é apresentar resultados numéricos dos efeitos inércia em uma geometria complexa. E, conseqüentemente, verificar a influência dos parâmetros reológicos e cinemáticos que governam o escoamento, na morfologia das zonas rígidas de um fluido viscoplástico escoando através de uma expansão seguida de uma contração abrupta em um duto axissimétrico.

Uma questão importante da simulação numérica de fluidos viscoplásticos está associada a dificuldade numérica de implementação computacional devido à descontinuidade da equação da tensão dos modelos de viscosidade mais comuns, tais como as equações de Bingham ou Herschel-Bulkley. Algumas alternativas para contornar estas dificuldades são propostas e classificadas como modelos de regularização. Papanastasiou estabeleceu a mais ampla equação de regularização para viscoplasticidade, cujo sucesso deu sequência a uma série de artigos numéricos a partir dos anos 90 até os dias atuais (por exemplo, Alexandrou et al., 2001; Alexandrou et al., 2003; De Besses et al., 2003; Burgos and Alexandrou, 1999; Burgos et al., 1999; Mitsoulis et al., 2006). Vários trabalhos na literatura trataram de simulações numéricas de escoamentos complexos de fluidos viscoplásticos, analisando o padrão do escoamento e a topologia das regiões deformadas e não deformadas. Escoamentos através de contrações e/ou expansões foram discutidos em Naccache e Barbosa (2007), Mitsoulis et al. (1993), e Hammad e Vradis (1995). Escoamentos através de cilindros ou esferas foram investigados em Liu et al. (2002), Zisis and Mitsoulis (2002), e Roquet e Saramito (2003). Estes trabalhos negligenciaram os termos de inércia e utilizaram as equações regularizadas propostas por Papanastasiou (1987), Bercovier e Engelman (1980) e de Souza Mendes e Dutra (2004).

Os efeitos elásticos em escoamentos de fluidos viscoplásticos foram apresentados em Saramito (2007), de Souza Mendes et al. (2007) e Nassar et al. (2011). Saramito (2007) testou um modelo elasto-viscoplástico em escoamentos simples. De Souza Mendes et al. (2007) observou experimentalmente um comportamento assimétrico em escoamentos com baixos números de Reynolds de uma solução de Carbopol através de uma expansão seguida de uma contração. Uma investigação numérica foi realizada para analisar o mesmo escoamento em Nassar et al. (2011). Os autores mostraram que a elasticidade pode explicar este comportamento mencionado anteriormente. No entanto, como os efeitos da inércia são negligenciados, os autores não puderam verificar se a inércia também poderia estar relacionada com o comportamento assimétrico obtido experimentalmente. Elasticidade em fluidos com tensão limite de escoamento também foi analisada nos trabalhos de Beverly e Tanner (1989) e Sofou et al. (2008). Ambos os trabalhos analisaram a expansão de fluidos viscoelásticos com tensão limite de escoamento,

negligenciando os termos de inércia. Os autores tentaram reproduzir os resultados experimentais obtidos para massas propelentes. Mostrou-se que a elasticidade altera a topologia das regiões deformadas e não deformadas.

Os efeitos de inércia em escoamentos complexos de fluidos viscoplásticos foram considerados em vários trabalhos da literatura. Dimakopoulos e Tsamopoulos (2003) estudaram o deslocamento provocado pelo ar, de um fluido viscoplástico em uma contração axissimétrica. Mitsoulis et al. (2006) obteve o padrão do escoamento e a queda de pressão de escoamentos inerciais de fluidos de Bingham sobre uma cavidade quadrada utilizando o modelo de regularização de Papanastasiou. Vários trabalhos investigaram escoamentos inerciais de fluidos viscoplásticos através de expansões. Mitsoulis e Huilgol (2004) realizaram um estudo numérico de escoamentos através de uma expansão abrupta de um fluido de Bingham, usando o modelo regularizado por Papanastasiou. Eles obtiveram a forma das regiões deformadas e não-deformadas e a queda de pressão para uma ampla gama de números de Reynolds e números de Bingham. O escoamento inercial de fluidos de Herschel-Bulkley em uma expansão quadrada tridimensional foi discutida em Alexandrou et al. (2001). Os autores observaram uma intensa interação entre os efeitos dos números de Reynolds e de Bingham, influenciando na formação e destruição das zonas não-deformadas nas quinas da expansão. Jay Magnin e Piau (2001) realizaram simulações numéricas de fluidos com tensão limite de escoamento através de uma expansão axissimétrica, analisando os efeitos pseudoplásticos, da tensão limite de escoamento e da inércia sobre a queda de pressão e na forma das regiões deformadas e não-deformadas. Eles utilizaram o modelo de bi-viscosidade (Lipscomb e Denn, 1984) e observaram o aparecimento de zonas não-deformadas nas quinas da expansão e também na linha de centro do duto, longe da expansão. Os autores observaram que a inércia e a tensão limite de escoamento atuam em sentidos opostos. O primeiro tende a aumentar o tamanho do vórtice e a diminuir as zonas não-deformadas, enquanto que maiores tensões limites de escoamento proporcionam vórtices menores e mais regiões não-deformadas. Além disso, observou-se que a pseudoplasticidade tende a reduzir ligeiramente o tamanho dos vórtices e das zonas não-deformadas. Os autores também apresentaram algumas conclusões interessantes em relação ao critério da taxa de cisalhamento crítica para determinação das superfícies deformadas usando o modelo de bi-viscosidade. Neofytou e Drikakis (2003), focaram seu trabalho na determinação da quebra de simetria na bifurcação de escoamentos através de uma expansão, usando os modelos *Power Law*, Casson e Quemada. Eles mostraram os efeitos do número de Bingham e de Reynolds no surgimento de um comportamento assimétrico do escoamento. Este comportamento é

caracterizado por diferentes tamanhos de vórtices nas regiões superiores e inferiores do canal. Os autores obtiveram os números críticos de Bingham e Reynolds para o limite de bifurcação, e observaram que o comprimento do vórtice no ponto de transição é o mesmo para todos os modelos não-Newtonianos, e igualmente ao modelo de Newton.

Neste trabalho, a solução numérica é obtida através de aproximações mistas de Galerkin mínimos-quadrados (GLS – Galerkin least-squares). O método GLS – introduzido por Hughes et al. (1986) para o problema de Stokes, e posteriormente estendida para as equações mistas de Navier-Stokes por Franca e Frey (1992) e equações de Navier-Stokes a três campos por Behr et al. (1993) – não necessita satisfazer as condições de compatibilidade oriundas do método de Galerkin clássico e permanece estável mesmo em regiões do escoamento advectivo-dominadas – veja o artigo citado para os detalhes de como este método é realizado. Neste artigo ambos recursos são explorados para a estabilização da inércia em escoamentos de fluidos viscoplásticos. Contornar a condição de Babuska-Bezzi permite o uso de, computacionalmente convenientes, combinações de igual ordem de interpolações de elementos finitos, enquanto o segundo permite atingir escoamentos com altos números de Reynolds, uma questão muito interessante quando a pseudoplasticidade da viscosidade é considerada.

A modelagem mecânica do problema em análise é feita através das equações de conservação de massa e de quantidade de movimento para fluidos incompressíveis, acopladas com a equação constitutiva de fluidos Newtonianos Generalizados e a função viscosidade proposta por de Souza Mendes e Dutra (2004) para modelar o comportamento viscoplástico do fluido. Partindo do modelo de Herschel-Bulkley, os autores propuseram um modelo de viscosidade contínuo – denotado como modelo SMD – no qual o parâmetro de regularização não é mais uma constante numérica arbitrária, mas, em vez disso, é totalmente determinado pelos parâmetros reológicos do material. Além disso, o termo de regularização reológico atua em ambos os termos, da tensão limite de escoamento e o termo *power-law*. Portanto, o termo *power-law* não é mais ilimitado quando a taxa de cisalhamento tende a zero – uma deficiência que restringe a regularização de Papanastasiou somente para fluidos de Bingham. Esta é uma característica muito importante da equação de regularização SMD, uma vez que amplia a equação de regularização de Papanastasiou para os fluidos de Herschel-Bulkley. O modelo SMD já é aplicado em simulações numéricas de escoamentos complexos de materiais viscoplásticos por alguns autores (Naccache e Barbosa, 2007; Nassar et al., 2011; dos Santos et al., 2010), com resultados encorajadores. Contudo, estes resultados não apresentam um estudo mais aprofundado dos efeitos causados pela inércia nestes tipos de escoamentos, que é foco deste presente trabalho.

Neste sentido, a principal contribuição deste trabalho está relacionada com o estudo da morfologia das zonas deformadas e não-deformadas em escoamentos de fluidos viscoplásticos modelados pela equação SMD, e como os efeitos de inércia influenciam na topologia destas zonas.

Concluindo este primeiro capítulo, para um melhor entendimento deste trabalho, será apresentado um plano geral dos capítulos seguintes:

- Capítulo 2: é apresentada a modelagem mecânica do problema através das leis de conservação de massa e de quantidade de movimento;
- Capítulo 3: estudo do comportamento material de fluidos viscoplásticos, com maior enfoque na teoria constitutiva de fluidos SMD;
- Capítulo 4: descrição do método de elementos finitos de Galerkin mínimos-quadrados para as equações da modelagem mecânica;
- Capítulo 5: apresentação de algumas soluções analíticas para a equação do movimento para escoamentos de fluidos não-newtonianos e newtonianos;
- Capítulo 6: demonstra os resultados numéricos obtidos nas simulações computacionais, bem como a validação do código computacional.

2 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Para o estudo e análise do comportamento material dos fluidos não-Newtonianos, é necessário a solução simultânea de equações que representam as leis físicas. Essas equações são separadas em duas categorias distintas. A primeira categoria inclui as equações de balanço, que são válidas para todos os corpos mecânicos e são chamadas de equações de conservação. Essas equações traduzem matematicamente os quatro princípios de conservação mais importantes da mecânica, o princípio de conservação de massa, de quantidade de movimento, de quantidade de movimento angular e energia. A outra categoria engloba as equações constitutivas, que representam as características do comportamento do material, as quais serão abordadas no próximo capítulo.

Neste capítulo, serão apresentadas as equações de conservação para escoamentos isotérmicos. Essas equações serão apresentadas em termos de fluxo de massa e de quantidade de movimento, de modo a serem válidas para qualquer tipo de fluido.

2.1 As equações de conservação em termos de fluxos

2.1.1 Conservação de Massa

Seja um escoamento material submetido a um espaço Euleriano com um sistema de referência. Assumindo que \mathbf{u} representa vetor velocidade, ρ a massa específica do fluido, \mathbf{x} um ponto material e t tempo de observação do escoamento, com \mathbf{u} e ρ funções da posição e do tempo,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \rho &= \rho(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

O vetor $\rho\mathbf{u}$ representa o fluxo de massa (medido em unidades de massa por tempo) cruzando uma superfície diferencial ortogonal ao vetor \mathbf{u} . Aplicando-se o teorema de Gauss ao vetor $\rho\mathbf{u}$, tem-se que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma\tag{2.2}$$

onde Ω é o volume de uma região arbitrária de um espaço fechado pela superfície Γ e $\mathbf{nd}\Gamma$ o vetor que representa um elemento diferencial de superfície, direcionado para fora da região do espaço considerada. Como $\rho\mathbf{u}$ representa o fluxo de massa, então $\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{nd}\Gamma$ é a vazão mássica através da superfície elementar $\mathbf{nd}\Gamma$ e a integral do lado direito da Eq. (2.2) representa o efluxo total de massa através da superfície Γ . Consequentemente, $\text{div}(\rho\mathbf{u})$ representa o efluxo de massa, por unidade de volume, para um volume diferencial na vizinhança do ponto arbitrário \mathbf{x} . Se cada volume diferencial é escolhido como um sistema termodinâmico, o princípio de conservação de massa estabelece que: “o afluxo líquido de massa na fronteira Γ do sistema Ω é igual ao aumento de massa no seu interior” [Slattery, 1999]. Matematicamente, este princípio pode ser expresso por

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(\rho \mathbf{u}) \quad (2.3)$$

Para explicitar-se a taxa de variação temporal da massa específica em um ponto material deve-se modificar a Eq.(2.3). Assumindo-se que a trajetória de um ponto material é a função $\mathbf{x}(t)$, tem-se:

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) = \rho[\mathbf{x}(t), t] = \bar{\rho}(t) \quad (2.4)$$

onde a função ρ é diferente da função $\bar{\rho}$, embora seus valores são iguais quando \mathbf{x} , na função ρ , toma o valor de $\mathbf{x}(t)$. Tem-se, assim,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \dot{\bar{\rho}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (2.5)$$

onde a quantidade $\dot{\mathbf{x}}$ é a velocidade \mathbf{u} . A derivada $\dot{\bar{\rho}}$ é a taxa de variação da massa específica seguindo a partícula e é indicada pelo símbolo $\frac{D\rho}{Dt}$ e chamada de derivada substancial. Sendo assim, tem-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Pode-se expandir o termo do lado direito da Eq.(2.3) da seguinte forma:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \rho (\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.7)$$

e, utilizando-se da Eq.(2.6), obtém-se a seguinte expressão para a equação do balanço de massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (2.8)$$

A Eq.(2.3) é conhecida como a forma Euleriana da equação da continuidade e a Eq.(2.8) como a forma Lagrangeana. Considerando-se fluidos onde a massa específica é constante, ambas as formas da equação do balanço de massa reduzem-se a:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2.9)$$

2.1.2 Conservação da Quantidade de Movimento

O princípio da conservação da quantidade de movimento estabelece que a taxa líquida de quantidade de movimento que atravessa o sistema, somada a todas as forças de superfície que atuam no sistema e todas as forças de corpo que agem neste sistema, é igual a taxa de aumento de quantidade de movimento no sistema. Deve-se ressaltar que, diferentemente da equação da continuidade, o princípio de conservação de quantidade de movimento assim enunciado, vale apenas para um referencial inercial de um espaço Euclidiano.

A fim de se expressar a taxa líquida de quantidade de movimento, considera-se o tensor de segunda ordem $\rho \mathbf{u}\mathbf{u}$. Pela definição de produto tensorial, tem-se que

$$(\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \mathbf{u} (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma) \quad (2.10)$$

onde o termo entre parênteses do lado direito da equação é o fluxo de massa que atravessa o elemento de superfície considerado. Sendo assim, $(\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$ representa o fluxo de quantidade de movimento através do mesmo elemento de superfície. Isto identifica o produto tensorial $\rho \mathbf{u}\mathbf{u}$ como o fluxo de quantidade de movimento por unidade de área e tempo.

A analogia com a Eq.(2.2) permite estabelecer que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.11)$$

o que identifica a divergência de $\rho \mathbf{u}\mathbf{u}$ como o fluxo líquido de quantidade de movimento, por unidade de volume, que atravessa a fronteira Γ do sistema.

De modo a estabelecer a resultante das forças de superfície, emprega-se o teorema de Cauchy [Gurtin, 1981], o qual enuncia que a força de tensão $d\mathbf{t}$ agindo através de um elemento de superfície $\mathbf{n} d\Gamma$, é dado por $d\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} d\Gamma$. Utilizando-se novamente do teorema de divergência de Gauss, de maneira semelhante ao tensor fluxo de quantidade de movimento, pode-se escrever

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{T}) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{T} \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.12)$$

onde o lado direito da equação acima representa a resultante das forças de contato que atuam na superfície Γ do sistema Ω e a divergência de \mathbf{T} representa estas forças de contato por unidade de volume.

A resultante das forças de corpo, quando expressas por unidades de volume, é simplesmente $\rho \mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é o campo de aceleração (a gravidade na maioria dos casos).

Fazendo-se uso das ideias apresentadas acima, e lembrando que a taxa de aumento de quantidade de movimento no interior do sistema, quando expresso por unidades de volume, é dada pela derivada parcial temporal do vetor fluxo de massa $\rho \mathbf{u}$, chega-se à forma Euleriana da equação do movimento

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = \operatorname{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{g} \quad (2.13)$$

Utilizando-se da equação da continuidade na sua forma Euleriana e substituindo-a na equação do movimento, obtém-se a equação de conservação de quantidade de movimento na forma Lagrangeana:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \operatorname{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{g} \quad (2.14)$$

Considerando-se fluidos com massa específica constante (incompressíveis), a tensão total \mathbf{T} é definida como

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.15)$$

onde p é o campo de pressões, \mathbf{I} é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor viscoso ou deviatório.

Substituindo-se esta definição da tensão total na equação da conservação de quantidade de movimento, Eq.(2.14), tem-se:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \text{div}(\boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{g} \quad (2.16)$$

Na equação acima, o termo da esquerda é responsável pelo fenômeno de advecção, devido à aceleração da partícula, ou seja, é o termo das forças de inércia. Já os termos da direita da equação são oriundos das forças de corpo e de contato que agem na partícula.

3 COMPORTAMENTO MATERIAL

Para a descrição do comportamento mecânico de determinado material existem as chamadas equações constitutivas. A forma e os parâmetros destas equações depende exclusivamente do material considerado. Tomando-se o caso particular de escoamentos isotérmicos precisa-se de uma equação termodinâmica de estado para o campo de pressão, e uma equação constitutiva para o tensor tensão.

A partir de diversas observações feitas por reologistas, notou-se que a lei da viscosidade de Newton não descrevia com exatidão escoamentos de vários fluidos. Com isso, introduziu-se uma alteração nesta lei de Newton permitindo que a viscosidade variasse com a taxa de cisalhamento, surgindo assim a ideia de fluido newtoniano generalizado.

3.1 Fluido Newtoniano Generalizado

A modificação proposta da lei de Newton substitui a viscosidade constante por uma viscosidade que varia de acordo com o gradiente de velocidades, ou seja, para a tensão cisalhante teríamos a seguinte expressão

$$\tau_{12} = \eta \frac{d u_1}{d x_2} \quad (3.1)$$

onde η é uma função do gradiente de velocidades du_1/dx_2 .

Estendendo-se esta ideia para escoamentos arbitrários, com qualquer campo de velocidades, tem-se o modelo de Fluido Newtoniano Generalizado (FNG).

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ é o tensor taxa de deformação definido como

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \quad (3.3)$$

A viscosidade aparente η é uma grandeza escalar que depende somente das combinações dos componentes do tensor taxa de deformação e suas invariantes, não dependendo do sistema de coordenadas.

Os invariante do tensor taxa de deformação são definidos, segundo [Astarita e Marucci, 1974], por

$$\begin{aligned} I_D &= \text{tr } \mathbf{D} \\ II_D &= \text{tr } \mathbf{D}^2 \\ III_D &= \det \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde “tr” representa o traço de uma matriz, também definido em [Astarita e Marucci, 1974]. Sendo esta matriz quadrada, o traço representa a soma dos elementos da diagonal principal.

No entanto, para fluidos incompressíveis o primeiro invariante, I_D , é nulo pois $I_D = \text{tr } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{u} = 0$. Além disso, para escoamentos puramente cisalhantes o terceiro invariante III_D também é nulo, pois os elementos fluidos não sofrem alteração de volume. Portanto, para escoamentos puramente cisalhantes, a viscosidade aparente η é função apenas do segundo invariante do tensor taxa de deformação, II_D (Bird, 1987). A magnitude do tensor taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, é uma função deste segundo invariante, e é dada pela equação:

$$\dot{\gamma} = [2(\text{tr } \mathbf{D}^2)]^{1/2} = [2 II_D]^{1/2} \quad (3.5)$$

3.2 Modelos viscoplásticos

Os primeiros estudos sobre viscoplasticidade realizados por Bingham em 1922, mostram que existe um valor residual para a tensão de cisalhamento – tensão limite de escoamento – que precisa ser excedido para que o material apresente fluxo viscoso [Navarro, 1997]. Ou seja, apenas escoará se a tensão aplicada a ele for superior à tensão limite de escoamento.

Para ajustar dados reológicos de viscosidade de materiais viscoplásticos, introduz-se uma função viscosidade. Inicialmente, Bingham propôs o seguinte modelo matemático

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + K \dot{\gamma} & \text{se } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{se } \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde K é o índice consistência, τ_0 é a tensão limite de escoamento, τ é a tensão cisalhante, $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação.

Porém, para alguns fluidos, este modelo matemático não descreve adequadamente suas características. Principalmente em sistemas poliméricos, que apresentam características de viscoplasticidade, o modelo mais adequado seria o modelo proposto por Herschel-Bulkley. Para este modelo, a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação é dada pela equação

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + K \dot{\gamma}^n & \text{se } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{se } \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde n é o índice *power-law*. Percebe-se que se o índice de *power-law* tiver valor unitário o modelo de Herschel-Bulkley se reduz ao modelo de Bingham.

Com o objetivo de aumentar a abrangência dos modelos de viscoplasticidade Papanastasiou propôs uma regularização das funções viscoplásticas clássicas [Papanastasiou, 1987]. Esta regularização é feita através de uma função exponencial que leva em seu argumento um parâmetro regularizador m . Se este parâmetro tende a um valor infinito, a função viscosidade regularizada por Papanastasiou tende à função viscosidade do modelo viscoplástico empregado, seja ele pseudoplástico, dilatante ou a viscosidade constante.

A principal vantagem desta regularização proposta por Papanastasiou é de gerar funções de tensão de cisalhamento e viscosidade contínuas, válidas tanto para regiões de escoamento, onde $\tau > \tau_0$, como para as regiões onde o material se comporta como corpo rígido.

Se esta regularização for aplicada ao modelo de Herschel-Bulkley, tem-se a seguinte equação para a tensão de cisalhamento

$$\tau = (1 - \exp(-m \dot{\gamma})) \tau_0 + K \dot{\gamma}^n \quad (3.8)$$

Alternativamente, um modelo que possui um comportamento qualitativo mais adequado para materiais viscoplásticos é o da bi-viscosidade, cuja tensão cisalhante é relacionada com a taxa de deformação pela seguinte equação

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + K \dot{\gamma}^n & \text{se } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \\ \tau &= \eta_0 \dot{\gamma} & \text{se } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\dot{\gamma}_0 = \tau_0 / (\eta_0 - K \dot{\gamma}^{n-1}) \approx \tau_0 / \eta_0$ é a taxa de cisalhamento limite de escoamento.

A equação da tensão cisalhante do modelo de bi-viscosidade apresenta duas expressões distintas, cada uma se aplica a faixas diferentes da taxa de deformação. Estas faixas são delimitadas pela taxa de cisalhamento limite de escoamento, que é obtida através de um ajuste de curvas. Estas características, aliadas ao fato de que a função não possui derivadas contínuas, causam problemas práticos que impedem ajustes de boa qualidade para os dados experimentais de fluidos viscoplásticos e ainda dificultam a implementação computacional deste modelo.

3.3 Modelo SMD de viscoplasticidade

Para contornar as dificuldades encontradas dos modelos citados anteriormente, Souza Mendes e Dutra, através de observações experimentais propuseram uma nova equação para a função viscosidade. A grande vantagem desta nova função viscosidade se dá ao fato de ser contínua assim como sua derivada. Qualitativamente esta função apresenta comportamento semelhante às demais funções viscosidade viscoplásticas. Ou seja, em regiões de baixas taxas de cisalhamento apresenta um platô de alta viscosidade, seguida de uma queda abrupta desta viscosidade em valores da tensão cisalhante próximos da tensão limite de escoamento (em $\tau \approx \tau_0$) e, logo após, prescreve uma região *power-law*, para altas taxas de cisalhamento.

Em termos matemáticos, a equação da função viscosidade SMD é dada por

$$\tau = (1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)) (\tau_0 + K \dot{\gamma}^n) \quad (3.10)$$

onde η_0 é a viscosidade para baixas taxas de cisalhamento.

A representação gráfica desta equação, juntamente com o significado físico dos parâmetros τ_0 , η_0 , K e n está na Fig. (3.1) abaixo.

A viscosidade η_0 é a razão entre a tensão e a taxa de cisalhamento tomadas em uma região onde esta tensão seja suficientemente menor que τ_0 , para assegurar que a taxa de cisalhamento esteja dentro da região de platô delimitada pela taxa de cisalhamento limite de escoamento $\dot{\gamma}_0$. O índice n é a inclinação da região *power-law* no gráfico log-log de $\tau \times \dot{\gamma}$.

$\dot{\gamma}_0$ é a taxa de cisalhamento no fim da região que apresenta viscosidade finita, dada pela razão entre τ_0 e η_0 , e $\dot{\gamma}_1$ é a taxa de cisalhamento no início da região *power-law*, dada por $(\tau_0 / K)^{1/n}$.

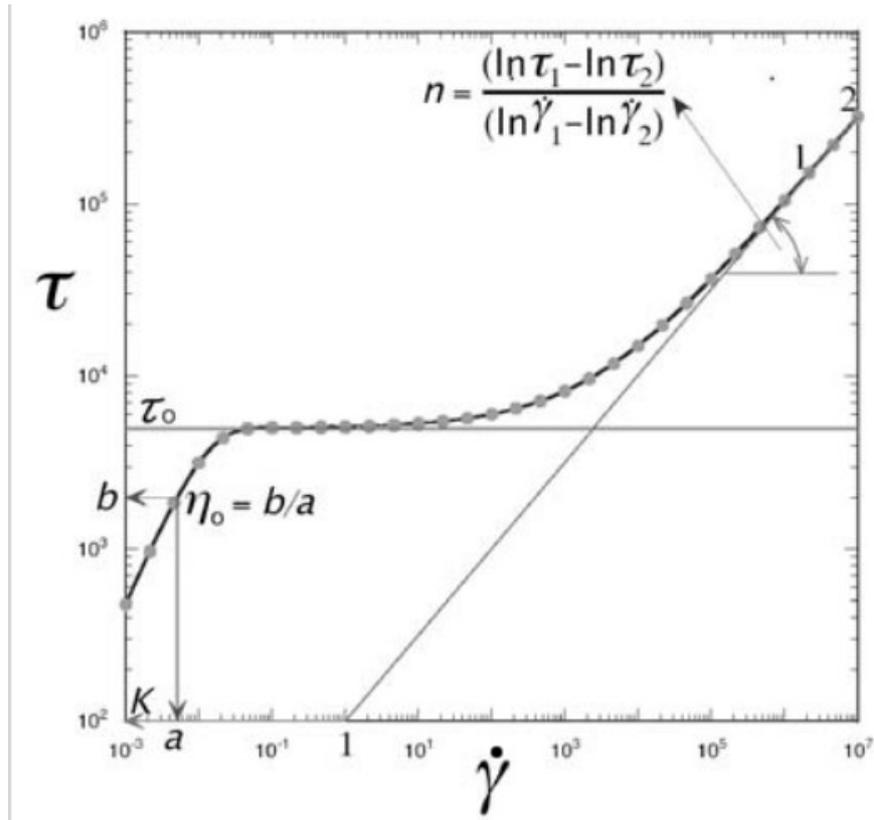
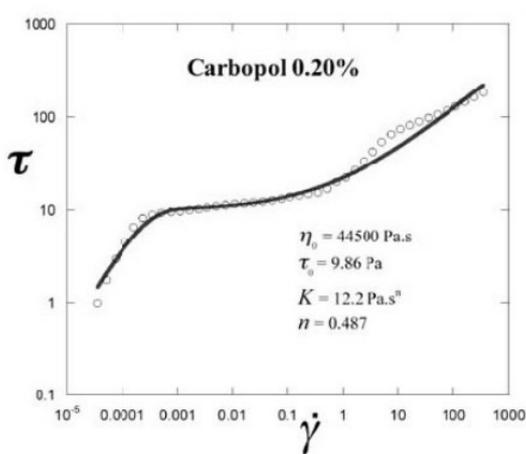
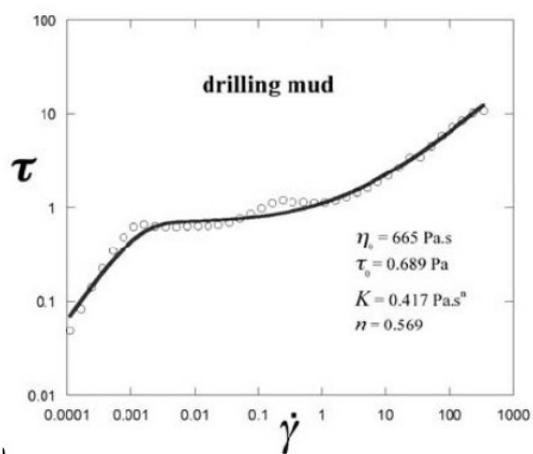


Figura 3.1 – Curva de escoamento do modelo SMD.[Souza Mendes e Dutra, 2004]

Pode-se observar na Fig. (3.2) abaixo algumas curvas de escoamentos de materiais viscoplásticos reais descritos pelo modelo SMD. Percebe-se que todos possuem, qualitativamente, o mesmo comportamento.



(a)



(b)

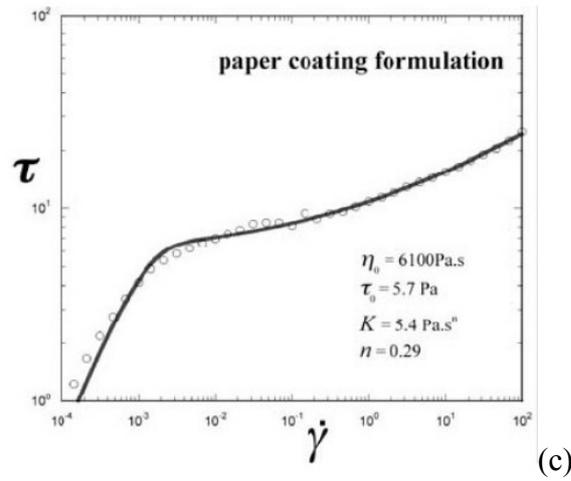


Figura 3.2 – Curvas de escoamento de materiais reais: (a) solução de água e carbopol a 0,2%, (b) lama de perfuração e (c) formulação de papel. [Souza Mendes e Dutra, 2004]

4 APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Muitos dos problemas encontrados na engenharia não são lineares e necessitam de métodos numéricos para obtenção de solução. Uma forma de aproximação numérica é o método de elementos finitos. Os princípios básicos do método de elementos finitos para a solução de problemas de valor de contorno são o estabelecimento de uma formulação variacional do problema investigado e a solução aproximada das equações variacionais através do uso de funções de interpolação de elementos finitos [Reddy e Gartling, 1994].

Partindo de uma partição do domínio do problema em elementos finitos não superpostas, estas aproximações para as variáveis primais são construídas como combinações de funções de forma e graus-de-liberdade incógnitos, os quais serão determinados pela solução numérica do problema matricial associado.

O domínio dos problemas aqui abordados é definido por $\Omega \subset \mathbb{R}^{nsd}$, onde nsd é o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com uma fronteira Γ poligonal,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_g \cup \Gamma_h \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h &= \emptyset, \quad \Gamma_g \neq \emptyset \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde Γ_g é a porção da fronteira Γ na qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet e Γ_h a porção na qual são prescritas as condições de contorno de Neumann. Sobre o domínio fechado $\bar{\Omega}$ realiza-se uma partição Ω_h de elementos finitos, de domínio K , na forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \bigcup_{K_i \in \Omega_h} K_i \\ K_i \cap K_j &= \emptyset, \quad \forall i \neq j; K_i, K_j \in \Omega_h \end{aligned} \quad (4.2)$$

Com isso, pode-se representar a aproximação de elementos finitos U^h de uma variável genérica U pela expansão

$$U^h = \sum_{A=1}^{n+1} N_A d_A \quad (4.3)$$

onde N_A é a função de interpolação associada ao nó A da discretização Ω_h e d_A é o coeficiente a ser determinado. Para os espaços polinomiais, adota-se a seguinte notação,

$$R_m(K) = \left\{ \begin{array}{l} P_m(K) \quad , \text{ se } K \text{ for um triângulo ou tetraedro} \\ Q_m(K) \quad , \text{ se } K \text{ for um quadrilátero ou hexaedro} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

onde “m” é o grau de interpolação de elementos finitos dos tipos P_m e Q_m , assumindo valores maiores ou iguais a 0 [Ciarlet, 1978].

Sobre os espaços de funções tem-se, conforme Ciarlet, 1978,

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \left\{ q \mid \int_{\Omega} q^2 d\Omega < \infty \right\} \\ L_0^2(\Omega) &= \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0 \right\} \\ H_1(\Omega) &= \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \partial v / \partial x_i \in L^2(\Omega), i=1, nds \right\} \\ H_1^0(\Omega) &= \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \partial v / \partial x_i \in L^2(\Omega) \mid v=0 \text{ sobre } \Gamma_{g_i}, i=1, nds \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $L^2(\Omega)$ define o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis sobre o domínio Ω , $L_0^2(\Omega)$ define o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre o domínio Ω , $H_1(\Omega)$ define o espaço de Sobolev das funções de primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω e $H_1^0(\Omega)$ define o espaço de Sobolev das funções de primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω que se anulam sobre o contorno Γ_g .

4.1 Formulação forte

Os escoamentos estudados neste trabalho são modelados pelas equações de conservação de massa e a equação de conservação de quantidade de movimento. Considerando-se escoamentos em regime laminar e permanente, para um fluido Newtoniano generalizado, pode-se construir o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned} \rho(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} &= -\nabla p + 2 \operatorname{div} [\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u})] + \rho \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g^u \\ [2 \operatorname{div} [\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u})] - p \mathbf{I}] \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde ρ representa a massa específica do fluido, \mathbf{u} é o vetor velocidade, p é a pressão, η é a função viscosidade, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, \mathbf{g} representa a aceleração da gravidade que

atua no sistema, \mathbf{u}_g é a condição de contorno de Dirichlet, \mathbf{I} é tensor identidade e \mathbf{t}_h é a condição de contorno de Neumann.

Admitindo-se que R_c seja um comprimento característico, u_c uma velocidade característica, $\dot{\gamma}_1$ a taxa de cisalhamento no início da região *power-law* da função SMD, η_c uma viscosidade característica dada por $\eta_c = \tau_0 / \dot{\gamma}_1$, pode-se obter as seguintes adimensionalizações:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{R_c}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{\dot{\gamma}_1 R_c}, \quad p^* = \frac{p}{\tau_0}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{\eta_c}, \quad \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} \quad (4.7)$$

Fazendo-se uso destas adimensionalizações (Eq.(4.7)), pode-se reescrever as Eq.(4.6) da forma:

$$\begin{aligned} \rho \dot{\gamma}_1^2 R_c (\nabla^* \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* + \frac{\tau_0}{R_c} \nabla^* p^* - \frac{\eta_c \dot{\gamma}_1}{R_c} 2 \operatorname{div}^* [\eta^* (\dot{\gamma}^*) \mathbf{D}^* (\mathbf{u}^*)] &= \rho \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_g^* && \text{sobre } \Gamma_g^u \\ \left[\frac{\eta_c \dot{\gamma}_1}{R_c} 2 \operatorname{div}^* [\eta^* (\dot{\gamma}^*) \mathbf{D}^* (\mathbf{u}^*)] - \tau_0 p^* \mathbf{I} \right] \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (4.8)$$

Utilizando-se das definições do número de Reynolds reológico, que é uma modificação da definição do número de Reynolds clássico e que tem por objetivo desacoplar os parâmetros cinemáticos e reológicos, do número de Bingham e do número de Froude, que são definidos pelas equações:

$$Re_r = \frac{\rho (\dot{\gamma}_1 R_c)^2}{\tau_0} = \frac{\rho \tau_0^{(2-n)/n} R_c^2}{K^{2/n}}, \quad Bn = \frac{\tau_0}{\eta_c \dot{\gamma}_c}, \quad Fr = \frac{u_c}{\sqrt{R_c g}} \quad (4.9)$$

pode-se reescrever a Eq. (4.8) na forma

$$\begin{aligned} Re_r (\nabla^* \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* - \frac{2}{Bn} \operatorname{div}^* [\eta^* (\dot{\gamma}^*) \mathbf{D}^* (\mathbf{u}^*)] &= \frac{Re_r}{Bn (Fr)^2} && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_g^* && \text{sobre } \Gamma_g^u \\ \left[\frac{\eta_c \dot{\gamma}_1}{R_c} 2 \operatorname{div}^* [\eta^* (\dot{\gamma}^*) \mathbf{D}^* (\mathbf{u}^*)] - \tau_0 p^* \mathbf{I} \right] \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para mensurar o salto abrupto, observado experimentalmente, que ocorre na taxa de deformação quando a tensão no fluido se aproxima da tensão limite de escoamento ($\tau \approx \tau_0$), Souza Mendes et al., 2007, definem uma propriedade reológica adimensional, o número de salto J . Este número adimensional quantifica o salto na taxa de cisalhamento quando $\tau \approx \tau_0$ na forma:

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \frac{\eta_0 \tau_0^{(n-1)/n}}{K^{1/n}} - 1 \quad (4.11)$$

A partir destas definições e adimensionalizações, pode-se reescrever a função SMD (Eq. (3.10)) na forma adimensional, ou seja

$$\tau^* = (1 - \exp(-(J+1)\dot{\gamma}^*)) (1 + \dot{\gamma}^{*n}) \quad (4.12)$$

Para considerar os efeitos cinemáticos introduz-se a intensidade de escoamento U^* , dada pela relação

$$U^* = \frac{u_c}{\dot{\gamma}_1 R_c} \quad (4.13)$$

onde u_c é uma velocidade característica que nesta dissertação é tomada como sendo igual a velocidade média de entrada.

Com esta definição pode-se estabelecer uma relação entre a intensidade de escoamento U^* e os números adimensionais de Bingham, com a viscosidade característica igual ao índice de consistência, e de Herschell-Bulkley, dados respectivamente por

$$\text{Bn} = \frac{\tau_0}{K \dot{\gamma}_c} = \frac{\tau_0}{K \left(\frac{u_c}{R_c} \right)} \quad \text{e} \quad \text{HB} = \frac{\tau_0}{K \dot{\gamma}_c^n} = \frac{\tau_0}{K \left(\frac{u_c}{R_c} \right)^n} \quad (4.14)$$

substituindo u_c/R_c por $\dot{\gamma}_1 U^*$ na equação acima e considerando $\dot{\gamma}_1 = (\tau_0/K)^{1/n}$,

$$\text{Bn} = \frac{\tau_0}{K(\dot{\gamma}_1 R_c)} = \frac{1}{U^*} \quad \text{e} \quad \text{HB} = \frac{\tau_0}{K(\dot{\gamma}_1 R_c)^n} = \frac{1}{U^{*n}} \quad (4.15)$$

4.2 Formulação de Galerkin

O método de aproximação de elementos finitos utilizado nesta dissertação é o conhecido método de Galerkin, também chamado de método de Bubnov-Galerkin. Este método consiste em aproximar os espaços de dimensões infinitas por subespaços de dimensão finita apropriados. Sendo assim, sendo P e \mathbf{V} os espaços funcionais dos campos de pressão e velocidade pode-se escrever:

$$\begin{aligned} P^h &\subset P \quad (\text{isto é, se } p^h \in P^h \text{ então } p^h \in P) \\ \mathbf{V}^h &\subset \mathbf{V} \quad (\text{isto é, se } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \text{ então } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Estas aproximações de elementos finitos devem ser construídas sobre as definições de subespaços usuais da mecânica dos fluidos para a aproximação dos campos de velocidade (\mathbf{V}^h) e pressão (P). Segundo Ciarlet, 1978, estes espaços são,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^h &= \left\{ \mathbf{v} \in H_1^0(\Omega)^N \mid \mathbf{v}_{\Omega_K} \in R_l(\Omega_K)^N, K \in \Omega^h \right\} \\ \mathbf{V}_g^h &= \left\{ \mathbf{v} \in H_1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}_{\Omega_K} \in R_l(\Omega_K)^N, K \in \Omega^h, \mathbf{v} = u_g \text{ sobre } \Gamma^h \right\} \\ P_h &= \left\{ q \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p_{\Omega_K} \in R_m(\Omega_K), K \in \Omega^h \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde R_l e R_m denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau l e m .

Desta forma, consegue-se definir a aproximação de Galerkin para o problema dado pela Eq.(4.6), como:

Achar o par $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_g^h \times P^h$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p^h \text{div } \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}^h \times P^h \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde \mathbf{v} e q são campos de velocidade e pressão virtuais.

4.3 Formulação de Galerkin mínimos-quadrados

O método de Galerkin clássico apresenta dificuldades, principalmente oscilações nos campos de pressão e velocidade quando estes apresentam gradientes muito elevados, tornando-se instável. A estabilidade de métodos de elementos finitos foi estabelecida a partir da introdução da condição de Babuška-Brezzi, ou condição LBB [Oden e Carey, 1983; Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Esta condição, uma vez satisfeita, estabelece se uma dada combinação dos sub-espacos de velocidade e pressão irá gerar aproximações estáveis.

Por estes motivos, adota-se a estratégia de mínimos quadrados na formulação clássica de Galerkin, conhecida como Galerkin least-square – GLS. Este método mantém a estrutura da formulação de Galerkin e adiciona termos que conferem estabilidade.

Para o problema proposto nesta dissertação, a formulação de Galerkin mínimos-quadrados pode ser definida como:

Achar o par $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_g^h \times P^h$ tal que:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega + \\
 & \sum_{K \in C_h} \int_{\Omega_K} (\rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h + \nabla p^h - 2 \operatorname{div}(\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h))) \alpha(\operatorname{Re}_K) \\
 & (\rho(\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h + \nabla q^h - 2 \operatorname{div}(\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{v}^h))) d\Omega_K = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma + \\
 & \sum_{K \in C_h} \int_{\Omega_K} \mathbf{f} \cdot \alpha(\operatorname{Re}_K) (\rho(\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h + \nabla q^h - 2 \operatorname{div}(\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{v}^h))) d\Omega_K \\
 & (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}^h \times P^h
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde $\alpha(\operatorname{Re}_K)$ é um parâmetro de estabilização definido, como em Franca e Frey, 1992, por:

$$\begin{aligned}
 \alpha(\operatorname{Re}_K) &= \frac{h_K}{2|\mathbf{u}^h|_p} \xi(\operatorname{Re}_K) \\
 \xi(\operatorname{Re}_K) &= \begin{cases} \operatorname{Re}_K, & 0 \leq \operatorname{Re}_K < 1 \\ 1, & \operatorname{Re}_K \geq 1 \end{cases} \\
 \operatorname{Re}_K &= \frac{m_k |\mathbf{u}^h|_p h_K}{4\eta(\dot{\gamma})}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde $|\mathbf{u}^h|_p$ representa a norma p do \mathfrak{R}^N .

$$|\mathbf{u}^h|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N |u_i^h|^p \right)^{1/p}, & 0 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, \dots, N} |u_i^h|, & p = \infty \end{cases} \quad (4.21)$$

e o parâmetro m_k é proveniente da análise de erro da formulação GLS introduzida em Franca e Frey (1992).

Observações:

1. Tomando o parâmetro de estabilidade, α , igual a zero, na formulação GLS definida pela Eq.(4.14), obtém-se novamente a aproximação clássica de Galerkin (Eq.(4.13)).
2. Com a intenção de levar em conta o grau de interpolação empregado, a expressão do número de Reynolds de malha, encontrada em Johnson, 1987, foi modificada incluindo o parâmetro m_K na Eq.(4.15). Com isso, as regiões advectivo- dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $Re_K > 1$ e as difusivo-dominadas por $Re_K < 1$, independente do elemento considerado [Franca e Frey, 1992].

4.4 O problema matricial associado

Pode-se discretizar a Eq.(4.14) expandindo-se as aproximações de elementos finitos dos pares (\mathbf{u}^h, p^h) e (\mathbf{v}^h, q^h) em uma combinação de suas respectivas funções de interpolação e graus de liberdade, e gerando, conseqüentemente, um sistema de equações discretas não-lineares. Este sistema de equações resultante pode ser escrito na forma residual como

$$[\mathbf{R}(\mathbf{U}_K)] = [0] \quad (4.22)$$

onde \mathbf{U}_K é vetor dos graus de liberdade das aproximações \mathbf{u}^h e p^h e assim, pode-se definir $\mathbf{R}(\mathbf{U}_K)$ como

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}(\mathbf{U}_K)] = & \mathbf{N}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{N}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})\mathbf{u} + [\mathbf{K}(\eta^*(\dot{\gamma}^*)) + \mathbf{K}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})]\mathbf{u} \\ & + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})]\mathbf{p} + \mathbf{G}^T \mathbf{u} - \mathbf{F} - \mathbf{F}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde as matrizes $[\mathbf{K}]$ e $[\mathbf{G}]$ são originadas pelos termos difusivo e de pressão, respectivamente, $\mathbf{N}(\mathbf{u})$, \mathbf{G}^T e \mathbf{F} pelos termos convectivo, incompressível e de forças de corpo. Já as matrizes $\mathbf{N}(\mathbf{u})_\alpha$, $[\mathbf{K}]_\alpha$, $[\mathbf{G}]_\alpha$ e \mathbf{F}_α são originadas dos termos mínimos quadrados da formulação GLS.

Aplicando-se um algoritmo de quasi-Newton para a solução do sistema de equações não-lineares, deve-se estimar os campos de velocidade e pressão iniciais – neste trabalho utilizou-se campos nulos. Com isso, a cada iteração é resolvido o seguinte sistema linear de equações:

$$[\mathbf{J}(\mathbf{U}_k)][\Delta \mathbf{U}_{k+1}] = -[\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)] \quad (4.24)$$

onde $[\mathbf{J}(\mathbf{U}_k)]$ é definido por:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}(\mathbf{U}_k)] = & \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{N}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{N}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \\ & + \mathbf{K}(\eta^*(\dot{\gamma}^*)) + \mathbf{K}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{K}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{G} \\ & + \frac{\partial \mathbf{G}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{p} + \mathbf{G}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u}) + \mathbf{G}^T + \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

e $[\Delta \mathbf{U}_{k+1}]$ por

$$[\Delta \mathbf{U}_{k+1}] = [\mathbf{U}_{k+1}] - [\mathbf{U}_k] \quad (4.26)$$

Assim, o algoritmo de solução pode ser descrito como:

- I. Estima-se o vetor $[\mathbf{U}_{k=0}]$ e define-se o critério de convergência bem como o número de iterações para a atualização da matriz jacobiana;
- II. Resolve-se o vetor incremental $[\Delta \mathbf{U}_{k+1}]$ dado pela Eq.(4.19);
- III. Calcula-se o vetor $[\mathbf{U}_{k+1}]$ pela Eq.(4.21);
- IV. Se o resíduo $|\mathbf{R}(\mathbf{U}_{k+1})|_\infty < 10^{-7}$ a solução é armazenada e o algoritmo finalizado, caso contrário, faz-se $k=k+1$ e retorna-se ao passo II.

4.5 O elemento bilinear quadrilateral

O elemento quadrangular bilinear, denominado pelo símbolo Q1, é atribuído, segundo Hughes (1986), a Taig (1961). O domínio elementar global de um elemento quadrilátero Q1 é

definido pela localização de seus quatro pontos nodais de coordenadas globais \mathbf{x}_a^e , $a = 1, \dots, 4$ no plano \mathcal{R}^2 . Assume-se que os pontos nodais sejam numerados localmente no sentido anti-horário, como ilustra a Fig. (4.1). Através de uma transformação linear, relaciona-se o elemento global, cujas coordenadas de um ponto são $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$, com o elemento do ponto de vista local, um quadrilátero bi-unitário. O domínio do quadrilátero bi-unitário é denominado domínio aparente e é representado pelas coordenadas locais

$$\xi = \{\xi, \eta\} \quad (4.27)$$

onde ξ e η são as chamadas coordenadas naturais e $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$. Mapeando em Ω^e segundo as transformações

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{1a}^e \\ x_2(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{2a}^e \end{aligned} \quad (4.28)$$

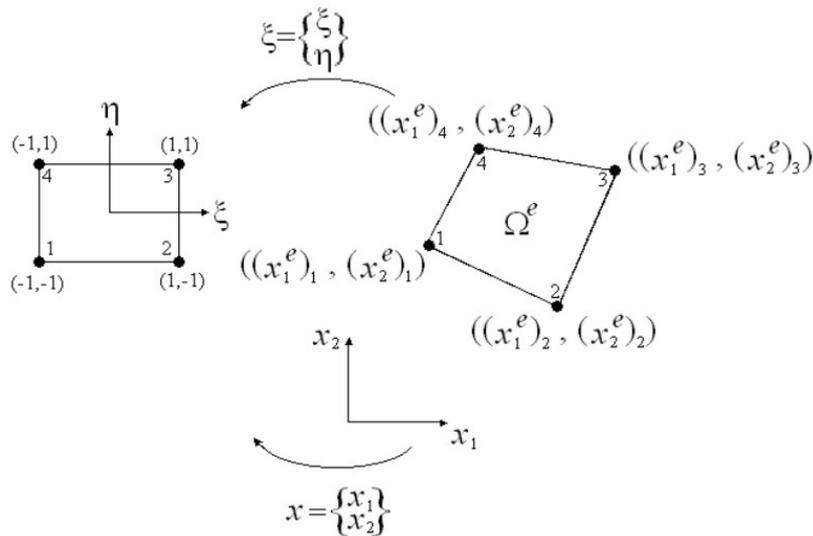


Figura 4.1 – Domínio aparente do elemento quadrilátero bi-unitário e ordenação nodal local.

Estas expressões podem ser escritas vetorialmente como

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi) \mathbf{x}_a^e \quad (4.29)$$

As funções de interpolação locais N_a podem ser obtidas assumindo-se, inicialmente, as expressões

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta \\ x_2(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde α e β são parâmetros a serem determinados. Supondo que as equações acima satisfaçam as condições do mapeamento

$$\begin{aligned} x_1(\xi_a, \eta_a) &= x_{1a}^e \\ x_2(\xi_a, \eta_a) &= x_{2a}^e \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde η_a e ξ_a são definidos na Tabela 4.1 abaixo.

Tabela 4.1 – Coordenadas nodais no espaço ξ

a	ξ_a	η_a
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Com isso, pode-se montar um sistema de equações para determinar os parâmetros α e β , como segue

$$\begin{pmatrix} x_{11}^e \\ x_{12}^e \\ x_{13}^e \\ x_{14}^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{pmatrix} x_{21}^e \\ x_{22}^e \\ x_{23}^e \\ x_{24}^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Resolvendo-se estes sistemas de equações, Eq. (4.27) e Eq. (4.28), obtém-se a equação da função de interpolação bi-linear local, $N_a(\xi)$:

$$N_a(\xi) = N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad (4.34)$$

onde os valores de η_a e ξ_a são dados na Tab 4.1 e visualizados na Fig. (4.2) .

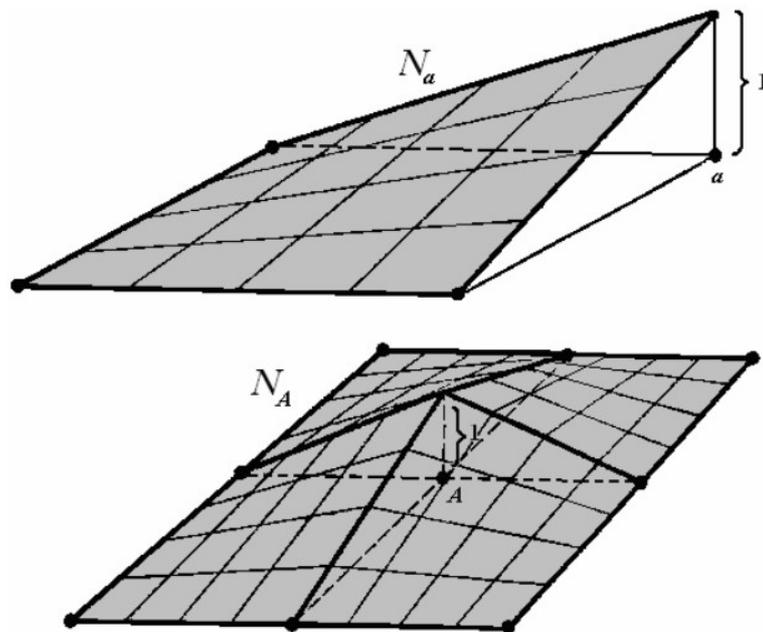


Figura 4.2 – Funções de forma local (N_a) e global (N_A) do elemento quadrilátero bi-unitário Q1.

Observações:

1. Esta forma é igual ao produto das funções de interpolação lineares unidimensionais nas direções ξ e η , o que caracteriza o elemento quadrangular bi-linear Q1, como um elemento Lagrangeano de baixa ordem.

2. Elemento quadrangular bi-linear é um elemento isoparamétrico, isto é, as funções de interpolação que definem o mapeamento global definido pela Eq. (4.29) são as mesmas funções de interpolação utilizadas na aproximação das variáveis primais da formulação GLS definida pelas Eqs. (4.14)-(4.17).

3. A importância dos elementos isoparamétricos é que, para estes elementos, as condições básicas de convergência do método de elementos finitos são virtualmente satisfeitas [Hughes, 1986], garantindo, desse modo, que a solução aproximada da formulação GLS definida pelas Eqs. (4.14)-(4.17) irá convergir para a solução exata do problema forte definido pela Eq. (4.6), quando o comprimento de malha h tender para zero. Além disso, do ponto de vista computacional, os elementos isoparamétricos são de implementação relativamente simples e concisa.

4.6 Integração numérica: quadratura Gaussiana

Seja $f : \Omega^e \subset \mathcal{R}^{n_{sd}} \rightarrow \mathcal{R}$ uma dada função suave e integrável. Pretende-se calcular

$$\int_{\Omega^e} f(x) d\Omega \quad (4.35)$$

para fins de construção das matrizes de elementos. Utilizando a fórmula para mudança de variáveis, pode-se transformar a integral sobre o domínio global do elemento para uma integral local, definida no intervalo de -1 a 1. Para o caso bidimensional tem-se

$$\int_{\Omega^e} f(x_1, x_2) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1(\xi, \eta), x_2(\xi, \eta)) j(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.36)$$

lembrando que $j = \det(\partial x / \partial \xi)$, é o determinante da matriz Jacobiana.

Considerando o caso unidimensional, teria-se:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad (4.37)$$

Este caso pode ser calculado aproximadamente com o auxílio da seguinte fórmula de integração numérica

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{n_{\text{int}}} g(\tilde{\xi}_l) W_l + R \approx \sum_{l=1}^{n_{\text{int}}} g(\tilde{\xi}_l) W_l \quad (4.38)$$

onde n_{int} é o número de pontos de integração, $\tilde{\xi}_l$ é a coordenada do l -ésimo ponto de integração W_l é o “peso” do l -ésimo ponto de integração.

Extrapolando este resultado para o caso bidimensional ter-se-ia

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{l^{(1)}=1}^{n_{\text{int}}^{(1)}} \sum_{l^{(2)}=1}^{n_{\text{int}}^{(2)}} g(\tilde{\xi}_{l^{(1)}}^{(1)}, \tilde{\eta}_{l^{(2)}}^{(2)}) W_{l^{(1)}}^{(1)} W_{l^{(2)}}^{(2)} \quad (4.39)$$

4.6.1 Regra geral da quadratura Gaussiana

A regra geral da quadratura Gaussiana é definida como segue

$$W_l = \frac{2}{[(1 - \tilde{\xi}_l^2)(P'_{n_{\text{int}}}(\tilde{\xi}_l))^2]} \quad 1 \leq l \leq n_{\text{int}} \quad (4.40)$$

$$R = \frac{2^{2n_{\text{int}}+1} (n_{\text{int}}!)^4}{(2n_{\text{int}}+1)(2n_{\text{int}}!)^3} g^{(2n_{\text{int}})}(\xi)$$

onde $\tilde{\xi}_l$ é o l -ésimo zero do polinômio de Legendre $P_{n_{\text{int}}}(\xi)$, $P'_{n_{\text{int}}}$ denota a derivada de $P_{n_{\text{int}}}(\xi)$ e $g^{(2n_{\text{int}})}(\xi)$ é a derivada de ordem $2n_{\text{int}}$ da função $g(\xi)$. O polinômio de Legendre é definido por:

$$P_{n_{\text{int}}}(\xi) = \frac{1}{2^{n_{\text{int}}} n_{\text{int}}!} \frac{d^{n_{\text{int}}}}{d\xi^{n_{\text{int}}}} (\xi^2 - 1)^{n_{\text{int}}} \quad (4.41)$$

Considerando o caso bidimensional, com dois pontos de integração em cada direção, o polinômio de Legendre será

$$P_2(\xi) = \frac{1}{10080}(3\xi^2 - 1) \quad (4.42)$$

o qual possui como raízes os valores $-1/\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{3}$, que também são as coordenadas dos pontos de integração $\tilde{\xi}_1$ e $\tilde{\xi}_2$ respectivamente.

Consequentemente os pontos de integração terão pesos iguais, ou seja, $W_1 = W_2 = 1$.

4.7 Derivadas das funções de interpolação

Para construir a matriz de rigidez do elemento é necessário calcular explicitamente as derivadas das funções de interpolação. Tomando-se o caso bidimensional, ou seja, $n_{sd} = 2$, as derivadas de N_a com respeito a x_1 e x_2 podem ser encontradas aplicando-se a regra da cadeia, então

$$\begin{aligned} \frac{dN_a}{dx_1} &= \frac{dN_a}{d\xi} \frac{d\xi}{dx_1} + \frac{dN_a}{d\eta} \frac{d\eta}{dx_1} \\ \frac{dN_a}{dx_2} &= \frac{dN_a}{d\xi} \frac{d\xi}{dx_2} + \frac{dN_a}{d\eta} \frac{d\eta}{dx_2} \end{aligned} \quad (4.43)$$

As equações acima podem ser representadas na forma matricial, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{dN_a}{dx_1} & \frac{dN_a}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_a}{d\xi} & \frac{dN_a}{d\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\xi}{dx_1} & \frac{d\xi}{dx_2} \\ \frac{d\eta}{dx_1} & \frac{d\eta}{dx_2} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

As derivadas $dN_a/d\xi$ e $dN_a/d\eta$ podem ser calculadas explicitamente. Contudo, os termos da matriz da direita não podem ser calculados diretamente pelo fato de se ter uma equação explícita do tipo $\xi = \xi(x_1, x_2)$ e $\eta = \eta(x_1, x_2)$. Por outro lado, tem-se a relação inversa

$$\begin{aligned}
 x_1(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi, \eta) x_{1a}^e \\
 x_2(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi, \eta) x_{2a}^e
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

Com estas relações pode-se calcular a seguinte matriz

$$\left[\frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \right] = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{d\xi} & \frac{dx_1}{d\eta} \\ \frac{dx_2}{d\xi} & \frac{dx_2}{d\eta} \end{bmatrix}
 \tag{4.46}$$

na qual os componentes são

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{d\xi} &= \sum_{a=1}^{n_{en}} \frac{dN_a}{d\xi} x_{1a}^e & \frac{dx_1}{d\eta} &= \sum_{a=1}^{n_{en}} \frac{dN_a}{d\eta} x_{1a}^e \\
 \frac{dx_2}{d\xi} &= \sum_{a=1}^{n_{en}} \frac{dN_a}{d\xi} x_{2a}^e & \frac{dx_2}{d\eta} &= \sum_{a=1}^{n_{en}} \frac{dN_a}{d\eta} x_{2a}^e
 \end{aligned}
 \tag{4.47}$$

A matriz da Eq. (4.41) é a inversa da matriz que deseja-se calcular na Eq. (4.39), isto é,

$$\begin{bmatrix} \frac{d\xi}{dx_1} & \frac{d\xi}{dx_2} \\ \frac{d\eta}{dx_1} & \frac{d\eta}{dx_2} \end{bmatrix} = \left[\frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \right]^{-1} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} \frac{dx_2}{d\eta} & -\frac{dx_1}{d\eta} \\ -\frac{dx_2}{d\xi} & \frac{dx_1}{d\xi} \end{bmatrix}
 \tag{4.48}$$

onde

$$j = \det \left[\frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \right] = \frac{dx_1}{d\xi} \frac{dx_2}{d\eta} - \frac{dx_1}{d\eta} \frac{dx_2}{d\xi}
 \tag{4.49}$$

Todas as relações anteriores são tipicamente calculadas através de sub-rotinas para as funções de interpolação. Um método para cálculo destas funções de interpolação está descrito abaixo.

Para um determinado grupo de elementos calcular os pesos e as coordenadas dos pontos de integração, as funções de interpolação, e as derivadas locais, ou seja:

$$\begin{aligned}
 & \text{Para } l=1, \dots, n_{\text{int}} \\
 & \text{Determine : } W_l, \tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l \\
 & \text{Para } a=1, \dots, n_{\text{en}} \\
 & \text{Calcule :} \\
 & N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l), \frac{N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi}, \frac{N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Dadas as coordenadas dos elementos (x_{1a}^e, x_{2a}^e onde $1 \leq e \leq n_{\text{en}}$), calcular as derivadas globais das funções de interpolação e os determinantes Jacobianos:

Para $l=1, \dots, n_{\text{int}}$

Calcular :

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi} &= \sum_{a=1}^{n_{\text{en}}} \frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi} x_{1a}^e \\
 \frac{dx_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} &= \sum_{a=1}^{n_{\text{en}}} \frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} x_{1a}^e \\
 \frac{dx_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi} &= \sum_{a=1}^{n_{\text{en}}} \frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi} x_{2a}^e \\
 \frac{dx_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} &= \sum_{a=1}^{n_{\text{en}}} \frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} x_{2a}^e \\
 j(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) &= \frac{dx_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi} \frac{dx_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} - \frac{dx_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} \frac{dx_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Para $a=1, \dots, n_{\text{en}}$

Calcular :

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{dx_1} &= \left[\frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi} \frac{dx_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} - \frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} \frac{dx_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi} \right] / j(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) \\
 \frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{dx_2} &= - \left[\frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi} \frac{dx_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} - \frac{dN_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\eta} \frac{dx_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{d\xi} \right] / j(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)
 \end{aligned}$$

5 SOLUÇÕES COMPLETAS DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Neste capítulo serão apresentadas algumas soluções analíticas para escoamentos simples de fluidos viscoplásticos através de um canal planar e também de um duto axissimétrico. O objetivo deste capítulo é apresentar soluções analíticas que permitam uma comparação com resultados numéricos. Esta comparação permite a validação do código computacional empregado nesta dissertação.

A equação de conservação de quantidade de movimento para regime permanente possui a forma

$$\rho(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p - \text{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = 0 \quad (5.1)$$

onde ρ é a massa específica, \mathbf{u} é o vetor velocidades, p é a pressão, $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor das tensões desviador e \mathbf{f} é o vetor das forças de corpo por unidade de massa. Esta equação, quando expressa apenas na direção x_1 (pois trata-se um escoamento totalmente desenvolvido), assumindo que não haja forças de corpo agindo no sistema, em regime permanente e em duas dimensões, se torna

$$\rho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \quad (5.2)$$

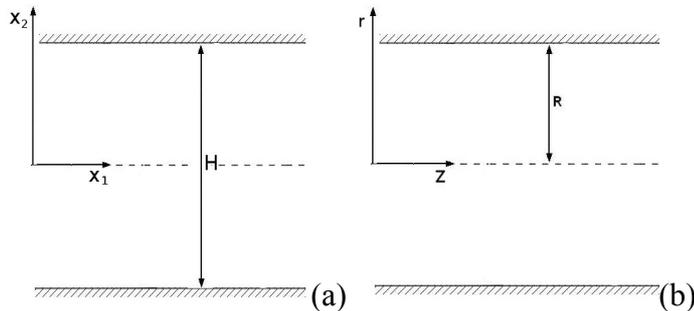


Figura 5.1 – Representação do domínio; (a) canal plano e (b) canal axissimétrico

Para um escoamento interno laminar, entre placas planas, e totalmente desenvolvido, a Eq. 5.2 pode ser simplificada na forma

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (5.3)$$

Já para escoamentos que acontecem no interior de um duto circular, a equação de conservação de quantidade de movimento é melhor expressa em coordenadas cilíndricas. Assumindo um escoamento em regime permanente e que não existam forças de corpo agindo no sistema, esta equação possui a forma

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (5.4)$$

Mantendo as mesmas características do escoamento que para o caso de um canal plano, ou seja, escoamento laminar e totalmente desenvolvido, a equação do movimento se reduz a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5.5)$$

Resolvendo-se a esta equação para o perfil de tensões de cisalhamento obtemos

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{c_1}{r} \quad (5.6)$$

Contudo, para escoamentos reais – fisicamente possíveis – a tensão τ_{rz} deve ser finita quando $r=0$, e isto só é possível se $c_1=0$. Então, a tensão τ_{rz} se torna

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (5.7)$$

5.1 Soluções para fluidos newtonianos

A solução para escoamento de fluido newtoniano já é extensivamente conhecida para estes tipos de escoamentos. Desta forma a dedução matemática para este caso não será

apresentada. Contudo, o perfil de velocidades para o escoamento de fluido newtoniano através de um canal planar é dado por

$$u_1(x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(x_2^2 - \frac{H^2}{4} \right) \quad (5.8)$$

onde μ representa a viscosidade.

Para o duto circular o perfil de velocidades obedece a equação abaixo

$$u_z(r) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) (r^2 - R^2) \quad (5.9)$$

5.2 Soluções para fluidos *power – law*

Para fluidos que apresentam comportamento pseudoplástico o modelo mais simples é o de *Ostwald-de-Waele*, também conhecido como modelo *power-law*. Para este modelo, a equação material, em coordenadas cartesianas e para escoamento totalmente desenvolvido, toma a forma

$$\tau_{12} = K \left(\frac{d u_1}{d x_2} \right)^n \quad (5.10)$$

Fazendo-se uso da condição de simetria, $\tau_{12} = 0$ quando $x_2 = 0$ e resolvendo a equação do movimento, tem-se que

$$\tau_{12} = \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 \quad (5.11)$$

Igualando-se as duas equações acima, pode-se obter a expressão para o perfil de velocidades para esta classe de fluidos, ou seja

$$\int d u_1 = \int \left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 \right)^{\frac{1}{n}} d x_2 \quad (5.12)$$

Com a equação acima e a condição de não-deslizamento na parede, a expressão do perfil de velocidades é

$$u_1(x_2) = \frac{n}{1+n} \left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{\frac{1}{n}} \left[x_2^{\frac{1+n}{n}} - \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \quad (5.13)$$

Da mesma forma é possível encontrar-se a expressão do perfil de velocidades de um escoamento totalmente desenvolvido, permanente e laminar, para um duto circular. O desenvolvimento segue os mesmos passos do caso de escoamento entre placas planas, porém as equações são expressas em coordenadas cilíndricas.

A equação constitutiva toma a forma

$$\tau_{rz} = K \left(\frac{d u_z}{dr} \right)^n \quad (5.14)$$

e a expressão a ser resolvida é

$$\int d u_z = \int \left(\frac{r}{2K} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n}} dr \quad (5.15)$$

Após resolvida a expressão acima, fazendo-se uso da condição de não-deslizamento na parede, ou seja $u_z(R) = 0$, tem-se o perfil de velocidades abaixo

$$u_z(r) = \frac{n}{1+n} \left(\frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n}} \left[(r)^{\frac{1+n}{n}} - (R)^{\frac{1+n}{n}} \right] \quad (5.16)$$

5.3 Soluções para fluidos de Bingham

A equação constitutiva para o modelo de Bingham, em coordenadas cartesianas retangulares, em duas dimensões, para um escoamento totalmente desenvolvido num canal plano, é

$$\tau_{12} = \tau_0 + K \left(\frac{d u_1}{d x_2} \right) \quad (5.17)$$

onde τ_0 é a tensão limite de escoamento e K é o índice de consistência do fluido quando este inicia seu escoamento, ou seja, $\tau_{12} > \tau_0$.

O perfil de tensões é obtido resolvendo-se a Eq. 5.3, porém a condição de contorno para esse modelo seria que a tensão cisalhante na linha de simetria do canal é igual a tensão limite de escoamento, ou seja $\tau_{12} = 0$ quando $x_2 = 0$. Com isso, o perfil de tensões cisalhantes é dado por

$$\tau_{12} = \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 \quad (5.18)$$

A expressão para o perfil de velocidades num canal plano pode ser obtida resolvendo-se a seguinte equação, que é obtida igualando-se as equações constitutiva e de conservação da quantidade de movimento

$$\int d u_1 = \int \left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 - \frac{\tau_0}{K} \right) d x_2 \quad (5.19)$$

Então, resolvendo a equação acima, tem-se

$$u_1(x_2) = \frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2^2 - \frac{\tau_0}{K} x_2 + C_3 \quad (5.20)$$

Pela condição de não deslizamento na parede, $u_1(H/2) = 0$, consegue-se obter a expressão para a constante de integração C_3 , como segue

$$C_3 = \frac{\tau_0}{K} \left(\frac{H}{2} \right) - \frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(\frac{H}{2} \right)^2 \quad (5.21)$$

Com isso, a expressão para o perfil de velocidades é

$$u_1(x_2) = \frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(x_2^2 - \frac{H^2}{4} \right) + \frac{\tau_0}{K} \left(\frac{H}{2} - |x_2| \right) \quad (5.22)$$

Este mesmo desenvolvimento pode ser realizado em coordenadas cilíndricas, afim de obter-se o comportamento da velocidade em dutos circulares. A equação constitutiva do modelo de Bingham para este caso é

$$\tau_{rz} = \tau_0 + K \frac{d u_z}{dr} \quad (5.23)$$

Comparando-se a equação acima com a equação do movimento, obtém-se

$$\tau_0 + K \frac{d u_z}{dr} = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5.24)$$

A equação integral a ser resolvida é

$$\int d u_z = \int \left(\frac{r}{2K} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\tau_0}{K} \right) dr \quad (5.25)$$

que, como solução apresenta

$$u_z = \frac{r^2}{4K} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{r \tau_0}{K} + C_4 \quad (5.26)$$

onde C_4 é uma constante de integração que pode ser obtida aplicando-se a condição de contorno $u_z(R) = 0$, com isso

$$C_4 = \frac{R \tau_0}{K} - \frac{R^2}{4K} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5.27)$$

Portanto o perfil de velocidades é descrito pela equação

$$u_z = \left(\frac{R\tau_0}{K} - \frac{R^2}{4K} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{r^2}{4K} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{r\tau_0}{K} \quad (5.28)$$

Vale salientar que as equações do perfil de velocidade, tanto no canal plano como no duto axissimétrico, é válido apenas para as regiões do escoamento em que a tensão cisalhante no fluido é superior à tensão limite de escoamento. Sabendo que neste ponto, onde a tensão excede a tensão limite de escoamento, a derivada da velocidade é nula, pode-se obter a expressão para o cálculo deste ponto. Assim tem-se que

$$x_2 = \tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \quad (5.29)$$

para escoamento entre placas planas, e

$$r = 2\tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} \quad (5.30)$$

para escoamentos em duto axissimétrico.

Em resumo, tem-se

$$\begin{aligned} u_1(x_2) &= \frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(x_2^2 - \frac{H^2}{4} \right) + \frac{\tau_0}{K} \left(\frac{H}{2} - |x_2| \right) & \text{se } |x_2| \geq \tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \\ u_1 &= \frac{H}{2K} \left(\tau_0 - \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{H}{4} \right) & \text{se } |x_2| < \tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

para escoamentos em canal planar, e

$$\begin{aligned} u_z(r) &= \left(\frac{R\tau_0}{K} - \frac{R^2}{4K} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{r^2}{4K} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{r\tau_0}{K} & \text{se } r \geq 2\tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} \\ u_z &= \frac{R\tau_0}{K} - \frac{R^2}{4K} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\tau_0}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} & \text{se } r < 2\tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.32)$$

para escoamentos em duto axissimétrico.

5.4 Soluções para fluidos de Herschel – Bulkley

Outro modelo de viscoplasticidade bastante estudado é o de Herschel-Bulkley. Para este modelo a equação constitutiva é semelhante a equação de Bingham, porém apresenta um parâmetro reológico a mais, o índice de *power-law* n . Desta forma, para escoamento em canal plano, em regime permanente, o modelo clássico de Herschel-Bulkley pode ser representado pela equação

$$\tau_{12} = \tau_0 + K \left(\frac{d u_1}{d x_2} \right)^n \quad (5.33)$$

Para este modelo também tem-se a condição de que $\tau_{12} = 0$ na linha de simetria do escoamento, portanto

$$\tau_{12} = \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 \quad (5.34)$$

Igualando-se as Eqs. (5.33) e (5.34), pode-se obter a equação integral para a velocidade, como segue

$$\int d u_1 = \int \left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} |x_2| - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1}{n}} d x_2 \quad (5.35)$$

toma-se o valor absoluto de x_2 pelo fato de o escoamento ser simétrico em relação à linha de simetria horizontal, em $x_2 = 0$.

Resolvendo-se esta equação tem-se

$$u_1(x_2) = \frac{n}{1+n} K \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} |x_2| - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} + C_5 \quad (5.36)$$

Fazendo-se uso da condição de não-deslizamento na parede, é possível encontrar-se a constante C_5 , ou seja

$$C_5 = -\frac{n}{1+n} K \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{H}{2} - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} \quad (5.37)$$

Assim, o perfil de velocidades é

$$u_1(x_2) = \frac{n}{1+n} K \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} |x_2| - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} - \left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{H}{2} - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \quad (5.38)$$

Um desenvolvimento matemático semelhante pode ser realizado para encontrar-se o perfil de velocidades em coordenadas cilíndricas. Nesta situação, a equação integral a ser resolvida é

$$\int du_z = \int \left(\frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial z} r - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1}{n}} dr \quad (5.39)$$

Esta expressão apresenta como resultado a equação do perfil de velocidades abaixo

$$u_z(r) = 2K \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} \frac{n}{1+n} \left[\left(\frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial z} r - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} - \left(\frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial z} R - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \quad (5.40)$$

As equações anteriores descrevem o perfil de velocidade para a região em que o fluido ultrapassa a tensão limite de escoamento. E na região de *plug-flow* o fluido apresenta perfil de velocidade constante e igual à velocidade máxima (quando a variação da velocidade em relação ao raio é nula). Ou seja, os pontos em que ocorrem as velocidades máximas são os mesmos que para fluidos de Bingham, tanto para escoamentos entre placas planas como em escoamentos em canais axissimétricos. Portanto, para os perfis de velocidades tem-se:

$$\begin{aligned} u_1(x_2) &= \frac{n}{1+n} K \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} |x_2| - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} - \left(\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{H}{2} - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] & \text{se } x_1 \geq \tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \\ u_1 &= \frac{n}{1+n} K \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\tau_0}{K} - \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{H}{2} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] & \text{se } x_1 < \tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.41)$$

para escoamento entre placas planas, e

$$\begin{aligned}
u_z(r) &= 2K \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} \frac{n}{1+n} \left[\left(\frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial z} r - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} - \left(\frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial z} R - \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] & \text{se } r \geq 2\tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} \\
u_z &= 2K \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} \frac{n}{1+n} \left[\left(\frac{\tau_0}{K} - \frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial z} R \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] & \text{se } r < 2\tau_0 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{5.42}$$

para escoamentos em duto circular.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

O problema proposto para análise consiste em um escoamento interno em duto axissimétrico com uma expansão seguida de uma contração. O domínio do problema está representado na Fig. (6.1) abaixo. A razão entre o raio R_2 do duto intermediário e o raio R_1 do duto principal é igual a 6,3 que é a mesma razão do artigo de Souza Mendes *et al* de 2007, razão esta que foi escolhida para fins de comparação de resultados. Já a razão entre o comprimento L_2 do duto intermediário e seu raio é igual a 1 bem como a razão entre o comprimento L_1 do duto menor e seu raio é 16,85, totalizando um comprimento do duto de 40 unidades. Assume-se como condição de contorno que as paredes são impermeáveis e não há deslizamento do fluido nas mesmas, na entrada e na saída do duto o perfil de velocidades é totalmente desenvolvido e existe simetria do escoamento em torno do eixo axial, ou seja

$$u_r = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d u_z}{d r} = 0 \quad .$$

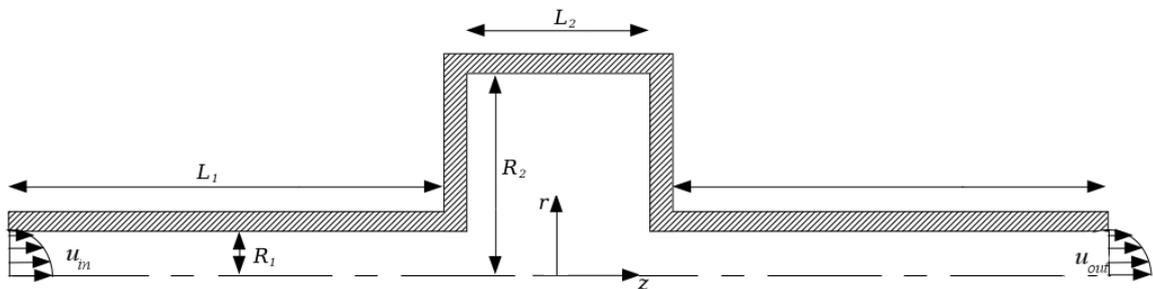


Figura 6.1 – Descrição da geometria do problema.

6.1 Validação do código computacional

Afim de validar a implementação computacional da formulação GLS, a Fig. (6.2) abaixo apresenta as comparações entre as soluções analíticas e as obtidas através do código computacional para os perfis transversais de velocidade, em uma região totalmente desenvolvida ($z^* = -10$ – onde z^* é a coordenada na direção axial adimensionalizada pelo raio do duto menor R_1) a montante da expansão do duto.

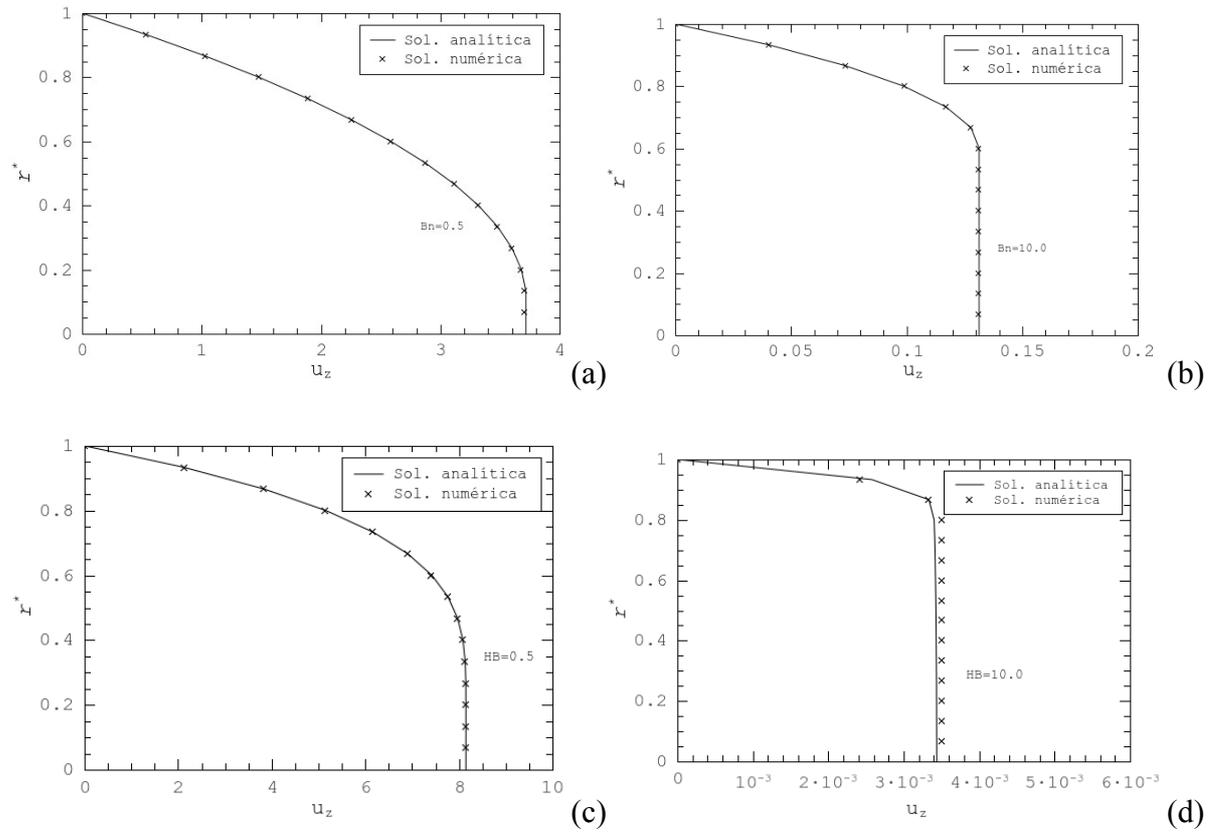


Figura 6.2 – Comparação entre as soluções analíticas e numéricas do perfil de velocidades axial para os modelos de: (a) Bingham, $Bn=0,5$ ($U^*=2$); (b) Bingham, $Bn=10$ ($U^*=0,1$); (c) Herschel-Bulkley, $HB=0,5$ ($U^*=5,6568$); (d) Herschel-Bulkley, $HB=10$ ($U^*=0,003623$).

De acordo com a Fig. (6.2), a influência da intensidade de escoamento U^* nos perfis de velocidade em escoamentos de fluidos viscoplásticos é bastante clara; quanto menor U^* , mais planos se tornam os perfis, aumentando as regiões não escoadas em torno da linha de simetria do duto e tornando a camada limite menos espessa próximas à parede. Nestas figuras tal comportamento é confirmado para escoamentos de Bingham e Herschel-Bulkley, respectivamente. Para valores de U^* baixos, os perfis de velocidade apresentam uma região significativa de derivadas zero em torno da linha de simetria – indicando uma região onde o fluido se comporta como um corpo rígido, também chamado de *plug-flow* – enquanto que, próximo a parede, nas regiões de altas derivadas apresenta as regiões deformadas do escoamento. Além disso, esses resultados, mesmo que obtidos em regiões desenvolvidas do escoamento, são utilizados para validar a rotina de elementos finitos empregada neste trabalho, uma vez que apresentam uma boa concordância com as soluções analíticas, tanto

para o caso de um fluido de Bingham como para um fluido de Herschel-Bulkley, com um erro médio de aproximadamente 0,4%.

6.2 Teste de independência de malha

Para se obter resultados numéricos que independam da malha utilizada para discretizar o domínio do problema, fez-se um teste de independência de malha. Foram estudadas quatro malhas com gradativo refinamento. A malha M1, com menor refinamento, possui 2200 elementos e as demais são M2 com 5200, M3 com 10500 e M4 com 18000 elementos, as quais podem ser observadas na Fig. (6.3) abaixo.

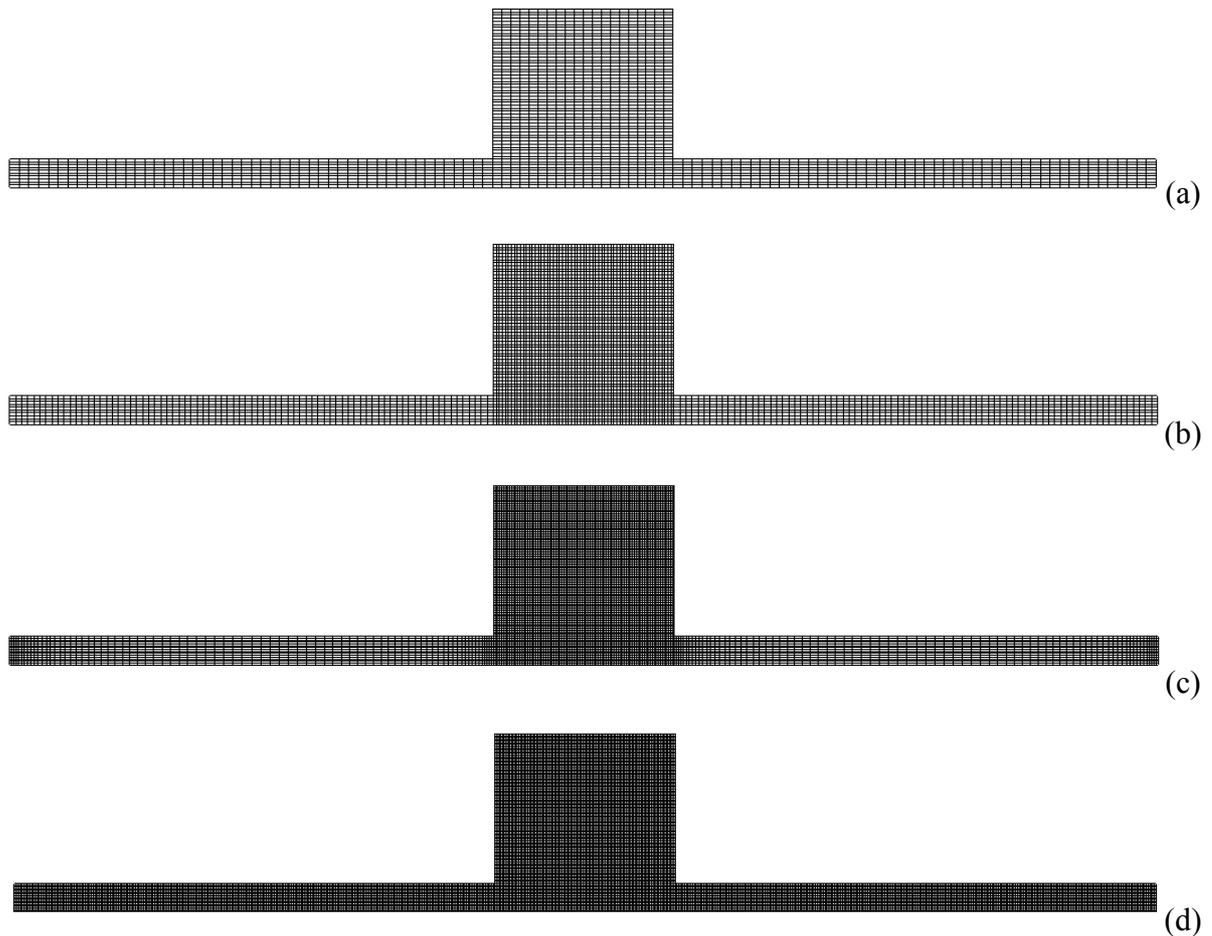


Figura 6.3 – discretizações do domínio para o teste de independência de malha: (a) malha M1; (b) malha M2; (c) malha M3 e (d) malha M4.

A malha M1 é totalmente uniforme, já a malha M2 é uniforme, porém com duas zonas distintas, ou seja, apresenta um maior refinamento no duto maior, na expansão-contracção. A malha M4 também é totalmente uniforme e a malha M3 é uniforme apenas no duto maior, apresentando não uniformidade nos elementos do duto menor.

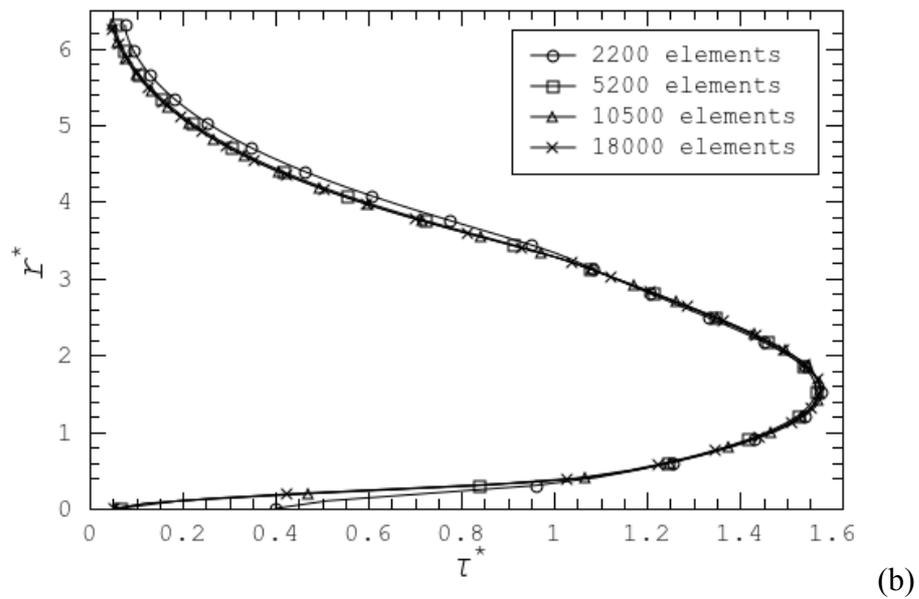
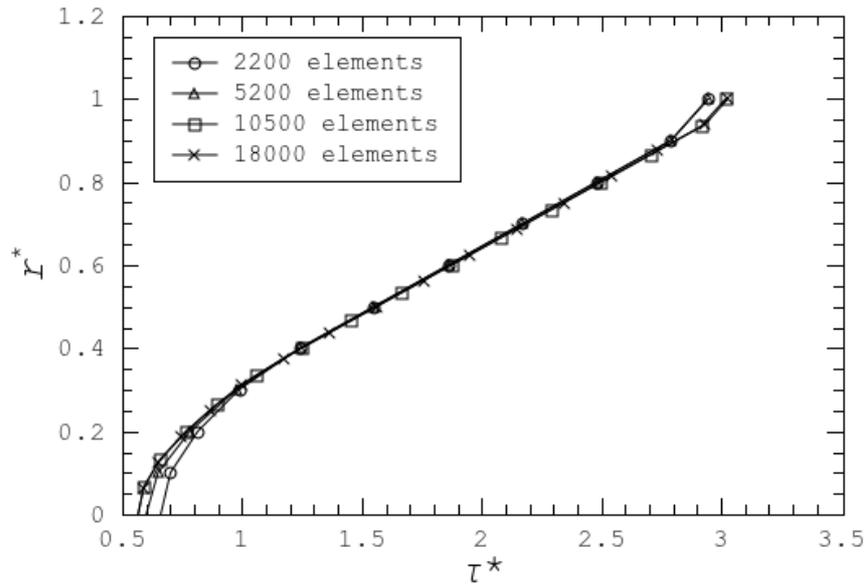


Figura 6.4 – Comparação dos perfis de tensões para as quatro malhas, em duas posições do domínio: (a) em $z^* = -10$ e (b) em $z^* = 0$.

Para o teste foram realizadas simulações para um fluido SMD com $\tau_0=1\text{ Pa}$, $K=1\text{ Pa}\cdot\text{s}^n$, $n=0,4$ e $J=18000$. Compararam-se os perfis do módulo da tensão, obtidos com cada malha, em dois locais de interesse: (i) na região desenvolvida a montante da expansão-contração, na coordenada $z^* = -10$ e (ii) no centro do duto maior, ou seja, em $z^*=0$.

Pela análise dos gráficos da Fig. (6.4) nota-se que as soluções para a malha M1 diferem bastante das demais, principalmente nos pontos extremos – na linha de simetria e na parede do domínio. Nestes pontos, onde o erro tende a ser maior, compararam-se as soluções entre as malhas sucessivas e constatou-se que na posição $z^* = -10$ o maior erro relativo entre as malhas M1 e M2 é de 10,13%, entre as malhas M2 e M3 é de 5,97% e entre as malhas M3 e M4 este erro é de 0,02%. Já na posição $z^* = 0$, estes erros são, respectivamente, iguais a 512,18%, 18,12% e, entre as malhas mais refinadas, 1,95%. Sendo assim, considera-se que a malha M3, de 10500 elementos do tipo Q1, retorna soluções que independem da discretização do domínio e será a malha utilizada para todas as simulações seguintes.

O gráfico da Fig. (6.5) abaixo apresenta a comparação entre as localizações em que ocorre a transição das zonas não escoantes para as zonas rígidas no duto maior, entre a expansão-contração. Esta comparação é feita com o trabalho de Souza Mendes *et al.* (2007) que também estudou este tipo de escoamento e obteve resultados numéricos através do algoritmo SIMPLE. O escoamento consiste de um fluido com índice de *power-law* igual a 0,4 e número de salto igual a 18000. A intensidade de escoamento U^* imposta ao fluido é igual a 2,5, considerando o escoamento sem inércia. Pode-se observar que esta comparação apresenta uma topologia bastante semelhante, apesar de ocorrer uma pequena diferença nos valores obtidos em ambos os trabalhos. Contudo, pode-se considerar que os resultados sejam semelhantes, pois a topologia é praticamente a mesma para ambos os trabalhos.

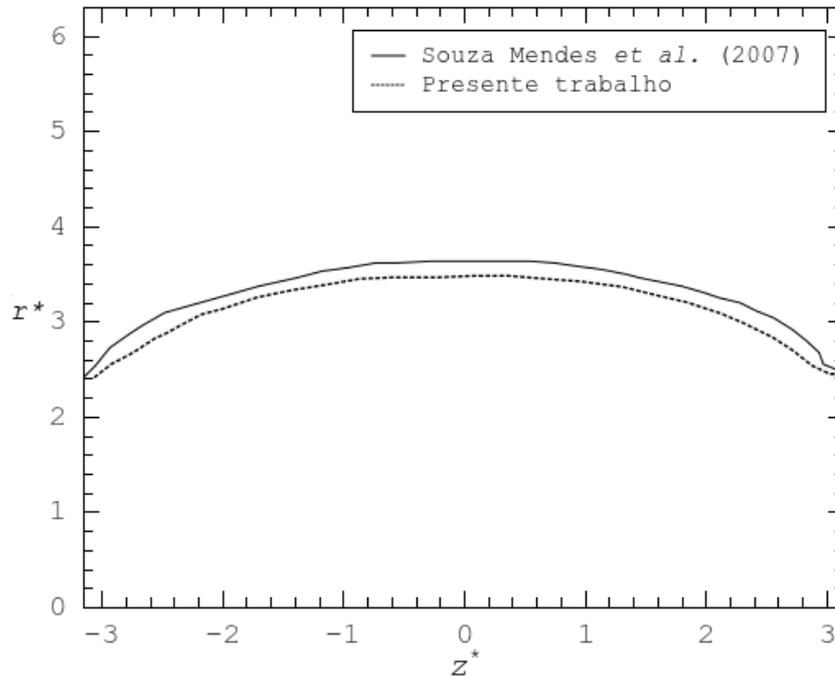


Figura 6.5 – comparação entre as superfícies de ocorrência das zonas rígidas encontradas neste trabalho e no trabalho de Souza Mendes *et al.* de 2007.

6.3 Análise de sensibilidade

Simulações numéricas foram realizadas para investigar a influência da inércia, das tensões de escoamento e os efeitos pseudoplásticos em escoamentos viscoplásticos. Este estudo é realizado variando-se o número de Reynolds reológico Re_r , de 0,5 até 25, a intensidade de escoamento U^* , de 0,5 a 10,0, o número de salto J , de 10^2 a 10^8 , e o coeficiente *power-law* n de 0,2 até 1,0. Do ponto de vista numérico, escoamentos submetidos a altos valores de Re_r e U^* apresentam maiores dificuldades para a convergência e, portanto, um procedimento de continuação de ordem zero sobre estes parâmetros é implementado no método numérico. Utilizando campos de escoamento Newtoniano para pressão e velocidade como estimativas de solução para iniciar o método de iterações de quasi-Newton, as quais serão executadas até que um critério de convergência seja satisfeito, ou seja, a magnitude do resíduo das equações discretas associadas à formulação GLS seja menor que 10^{-7} . Vale a pena ressaltar que escoamentos submetidos a valores de J muito altos reforçam a necessidade do procedimento de continuação.

Pela análise do gráfico da Fig. (6.6) abaixo, percebe-se que as velocidades se tornam desprezíveis – menores que 10^{-4} – a partir de um valor da tensão cisalhante ligeiramente superior à tensão limite de escoamento. Este fato foi observado por de Souza Mendes *et al* (2007), quando comparou dados experimentais a simulações numéricas de escoamentos de fluidos viscoplásticos, ou seja, as simulações numéricas se aproximavam do comportamento real do escoamento quando se considerou o critério para determinação das zonas rígidas um valor ligeiramente superior ao valor da tensão limite de escoamento. Portanto, será considerado como critério para determinação das zonas rígidas, tanto para escoamentos sem efeitos de inércias como para os escoamentos em que estes efeitos estão presentes, um valor ligeiramente superior à tensão limite de escoamento, ou seja, para que o fluido comece realmente a escoar, a tensão cisalhante adimensional deverá ser maior que 1.102.

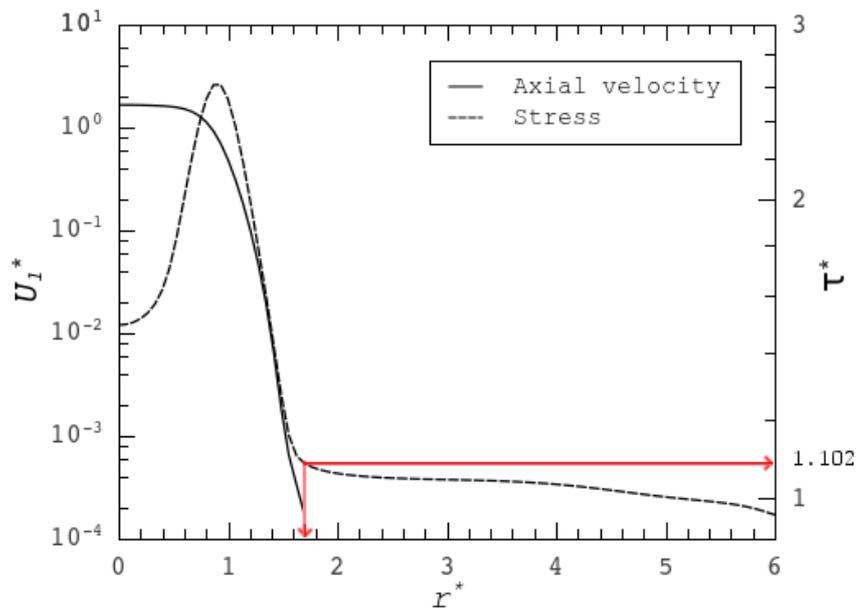
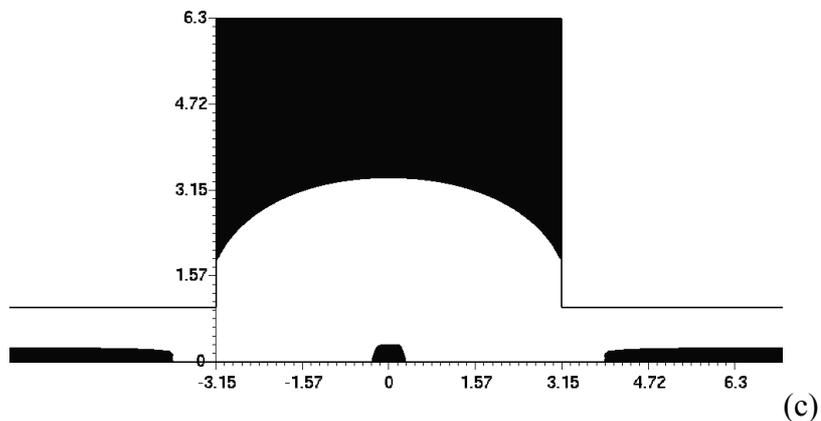
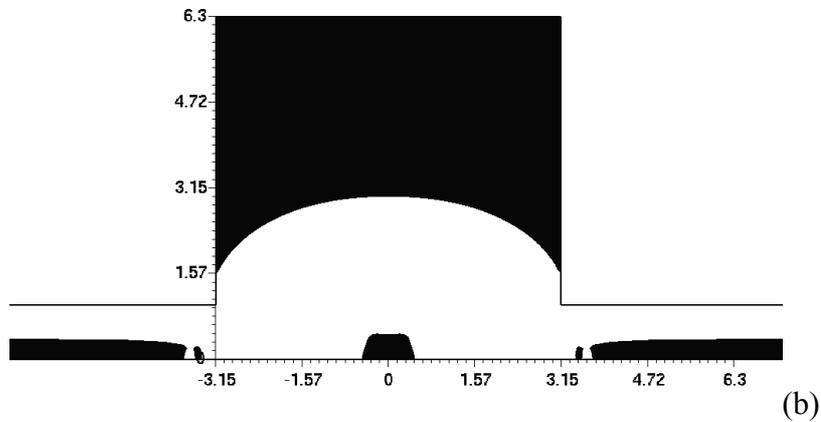
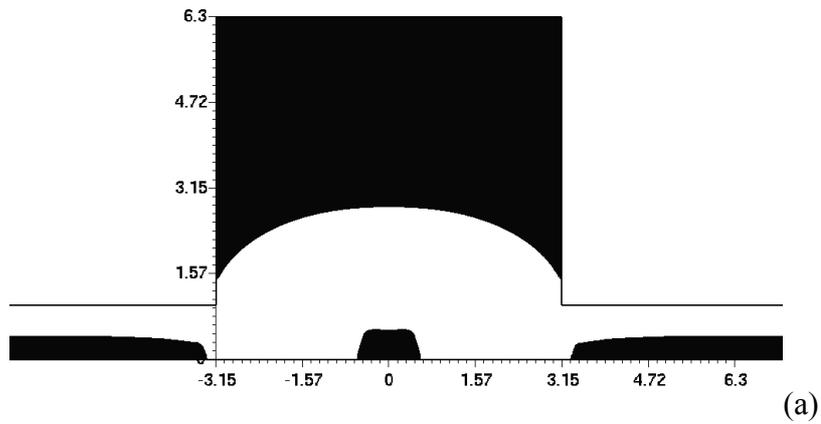


Figura 6.6 – Gráfico dos perfis de velocidade e tensão em função do raio do duto maior, para escoamento com $Re_r=25$, $U^*=1,0$ na posição $z^*=0$

6.3.1 Escoamentos sem inércia

A Fig. (6.7) mostra a influência da intensidade de escoamento U^* na topologia das superfícies escoadas em escoamentos sem inércia de materiais viscoplásticos com efeito pseudoplástico. Para um determinado material viscoplástico com número de Reynolds

reológico negligenciável ($Re_r=0,5$), um coeficiente *power-law* menor que um ($n = 0,4$), e uma função viscosidade que apresenta um queda brusca quando o material quebra sua microestrutura em $\tau \approx \tau_0$ ($J=10^4$), a cinemática do escoamento é investigada em uma faixa relevante ($U^*=0,5 - 3,0$). Tal investigação é possível desde que o aumento da cinemática do escoamento promovido pelo aumento de U^* não modifique a inércia e os efeitos viscosos do material representados pelos valores fixos de Re_r e do par (J, n) , respectivamente.



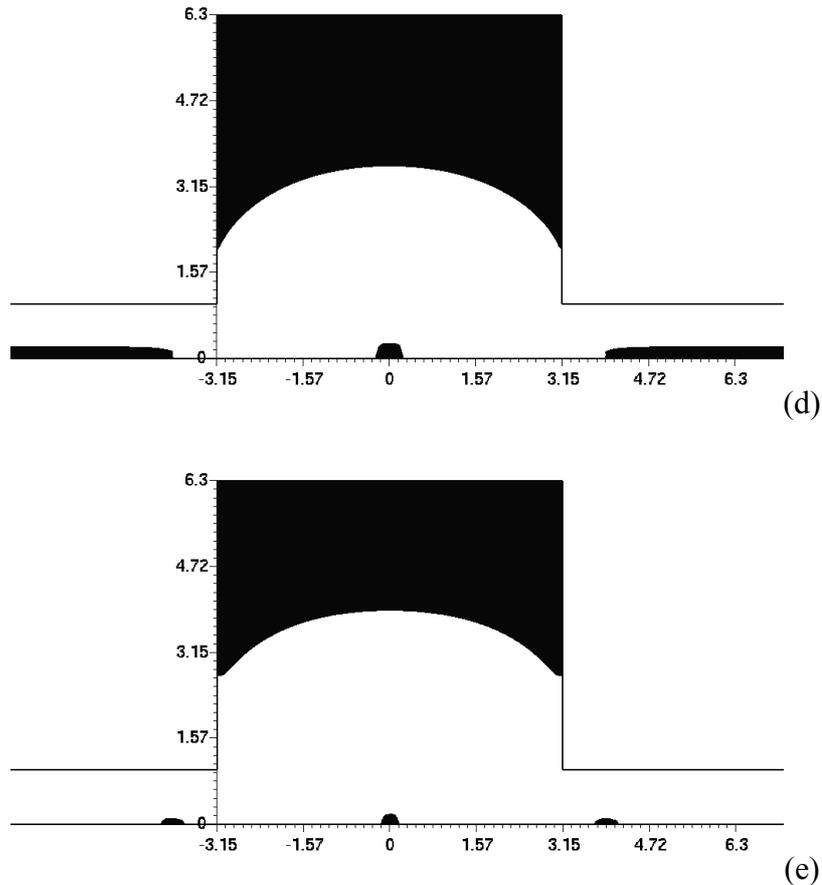


Figura 6.7 – Zonas rígidas para escoamentos sem inércia, $Re_r=0,5$, $J=1,8 \times 10^4$ e $n=0,4$:
 (a) $U^*=0,5$; (b) $U^*=1,0$; (c) $U^*=3,0$; (d) $U^*=5,0$; (e) $U^*=10,0$.

Pela análise das figuras nota-se que as três zonas não deformadas (regiões pretas) do material – denominadas, (i) o *plug-flow* em torno da linha de simetria do duto menor, a montante e a jusante do duto maior, (ii) a região não deformada estagnada dentro do duto maior e (iii) o *plug-flow* na linha de simetria e no meio do duto maior – estão sujeitas a uma diminuição gradativa e monotônica. Devido a maior taxa de deformação no duto menor, as regiões de *plug-flow* diminuem mais rapidamente que as demais regiões não deformadas. Além disso, devido ao efeito *upwind* insignificante derivado do pequeno valor de Re_r e nível de elasticidade nulo dos fluidos GNL, juntamente com a imposição de perfis de velocidade na entrada e saída do duto, todas as regiões não deformadas são simétricas em relação ao plano $z^* = 0$, para todos os valores de U^* considerados. A Fig. 6.7(b) apresenta uma pequena ilha de região não deformada próxima à expansão e também próxima a contração. Pode-se atribuir este fato a erros numéricos pois todas as outras situações não demonstram tais regiões.

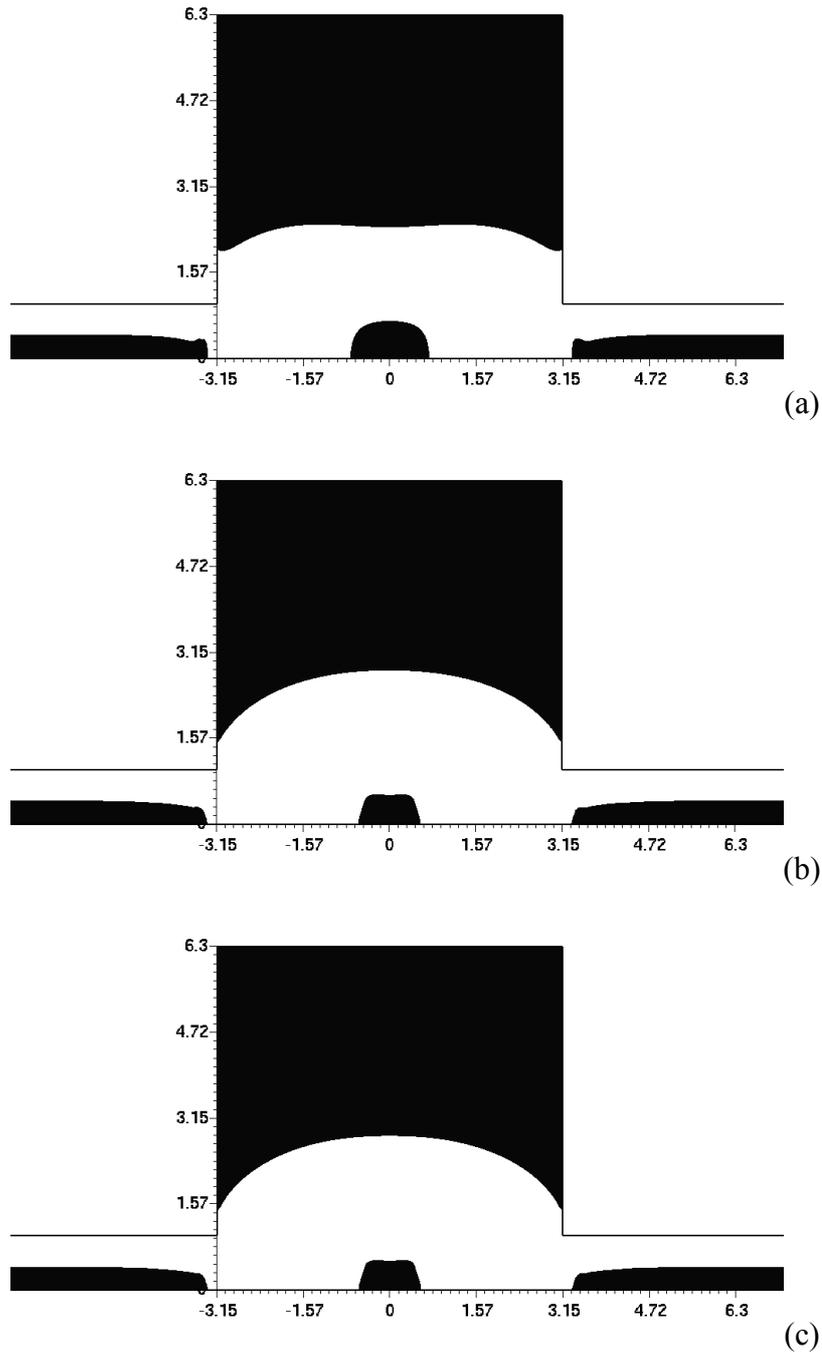


Figura 6.8 – Zonas rígidas para escoamentos sem inércia, $Re_r=0,5$, $U^*=0,50$, e $n=0,4$:
 (a) $J=10^2$; (b) $J=10^4$ e (c) $J=10^6$

Na Fig. (6.8) vaira-se J de 10^2 a 10^6 a fim de se investigar a influência deste parâmetro na morfologia das zonas rígidas. O comportamento monotonicamente decrescente demonstrado nestas figuras pode ser previsto pelas curvas de escoamento ilustrada na Fig. (6.9) , isto é, o aumento de J proporciona mais regiões do material sujeitas a baixas taxas de

deformação que alcançam a tensão limite de escoamento $\tau \approx \tau_0$. A variação do parâmetro reológico J produz um efeito interessante na morfologia das regiões não deformadas do escoamento; os *plug-flows* no duto menor e na região estagnada no centro do duto maior reduzem visivelmente, principalmente na variação de $J = 10^2$ para $J = 10^4$. Esta redução é bem menor para a variação de $J = 10^4$ para $J = 10^6$.

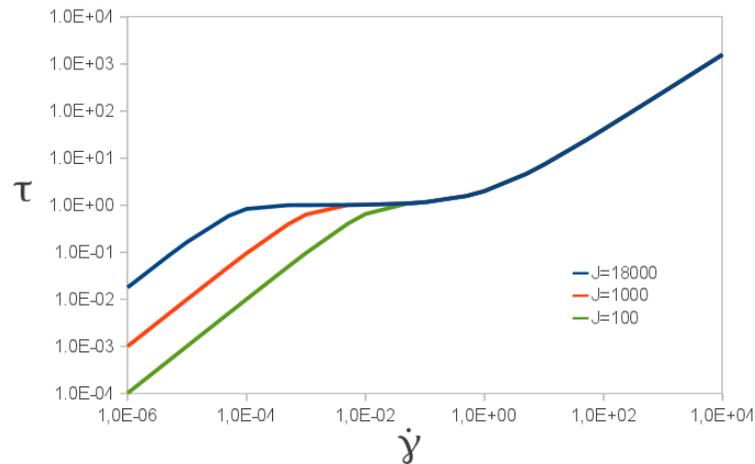
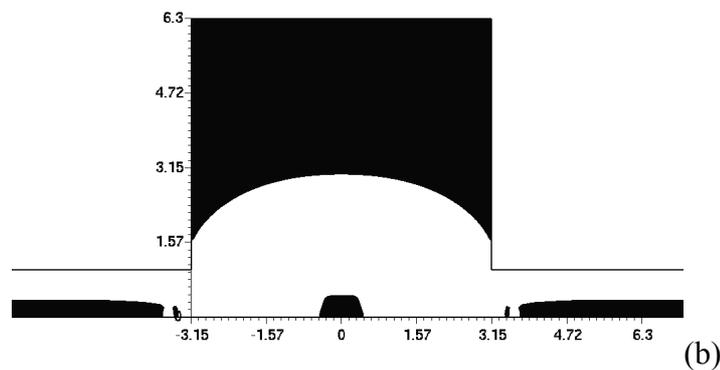
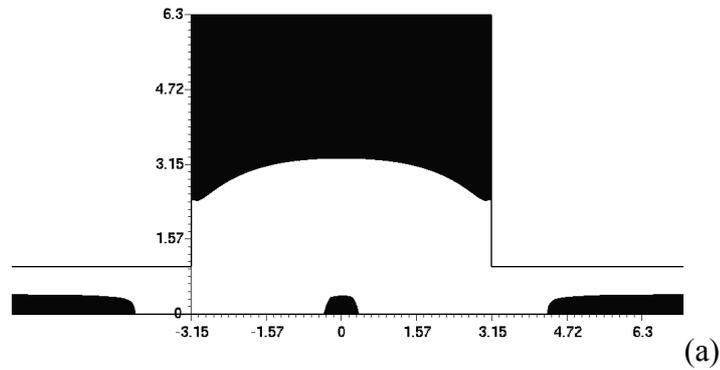


Figura 6.9 – Curva de escoamento para fluidos SMD.



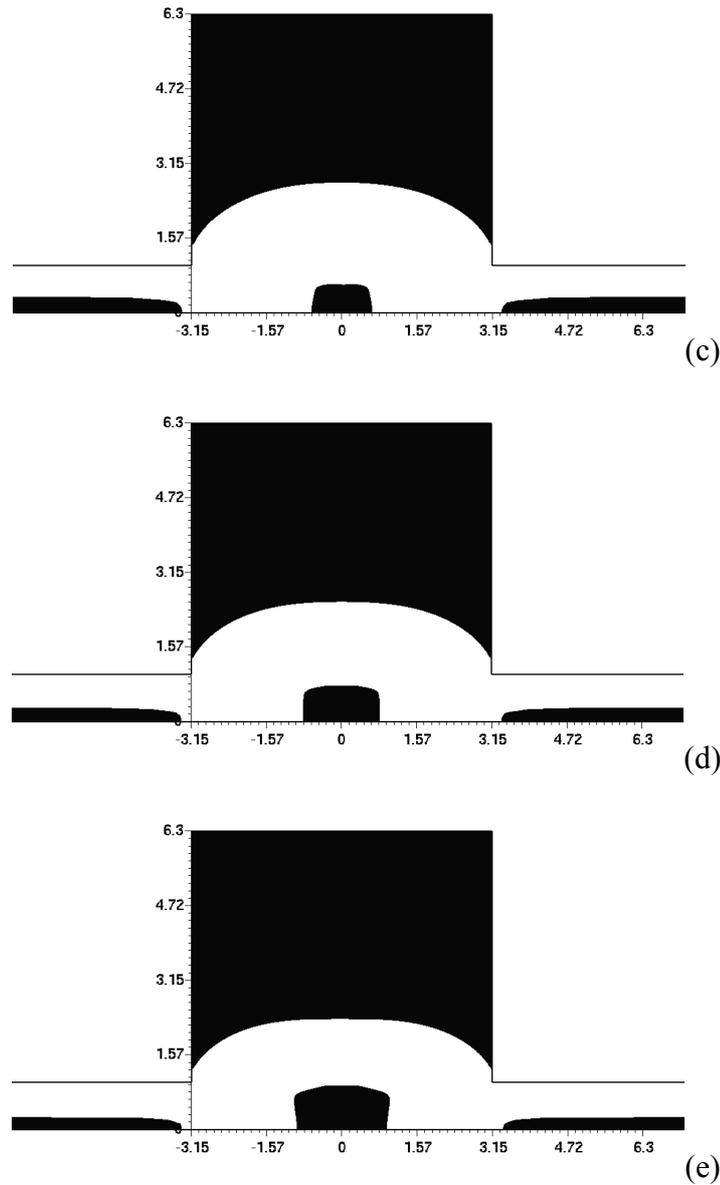


Figura 6.10 – Zonas rígidas para escoamentos sem inércia, $Re_r=0,5$, $U^*=0,50$, $J=1,8\times 10^4$:
 (a) $n=0,2$; (b) $n=0,4$; (c) $n=0,6$; (d) $n=0,8$ e (e) $n=1,0$

Por outro lado, a Fig (6.10) avalia os efeitos viscosos associados à pseudoplasticidade da viscosidade através da variação do coeficiente *power-law* n (0,2 até 1,0), para escoamentos sem inércia ($Re_r=0,5$) de materiais viscoplásticos ($J=1,8\times 10^4$), sujeitos à mesma condição cinemática do caso anterior ($U^*=0,50$). Como pode ser observado nas figuras, a diminuição do coeficiente *power-law* permite que mais regiões do material escoem, diminuindo, assim, os *plug-flows* no duto menor como também as regiões não deformadas do duto maior. Em resumo, o aumento de n faz com que mais regiões do escoamento apresentem

níveis de tensão abaixo de τ_0 e, portanto, aumentando as regiões não deformadas em ambos os canais.

Para o estudo da perda de carga em escoamentos de fluidos viscoplásticos é interessante adimensionalizar esta queda de pressão. Uma adimensionalização interessante obedece à equação abaixo:

$$\Delta p^* = \frac{\Delta p}{\rho(\dot{\gamma}_1 R_1)^2} \quad (6.1)$$

onde $\Delta p = p_s - p_c$ é a diferença entre a pressão que aconteceria se não houvesse o duto maior, em um ponto a jusante da expansão-contração, no duto menor, em uma região desenvolvida do escoamento, e a pressão que ocorre neste mesmo ponto considerando a perda de pressão devido a expansão-contração. Estas pressões estão ilustradas na Fig. 6.11 abaixo.

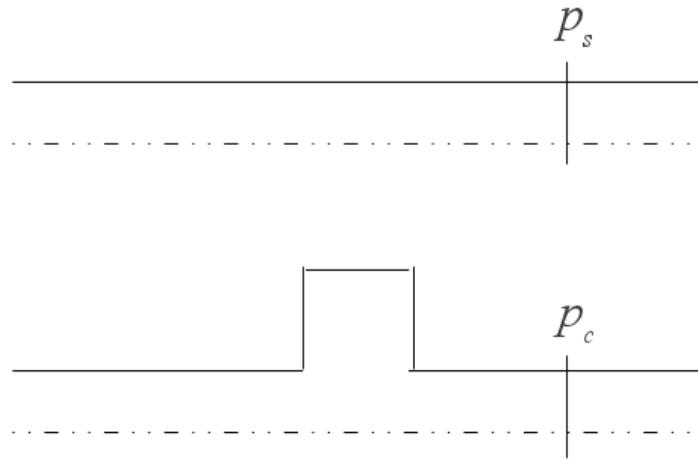
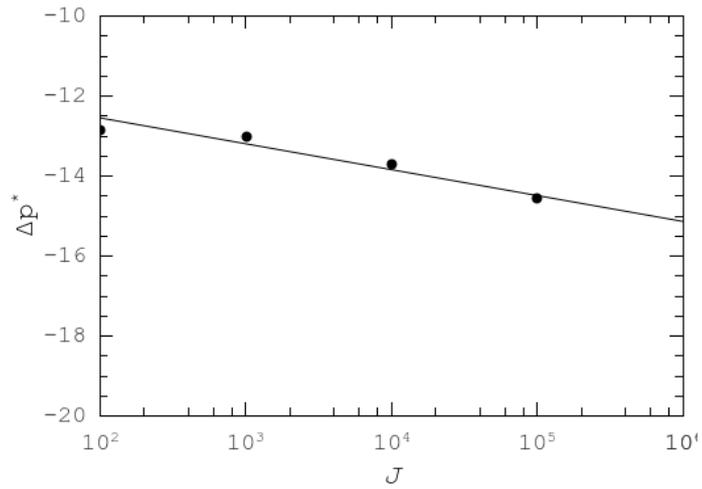


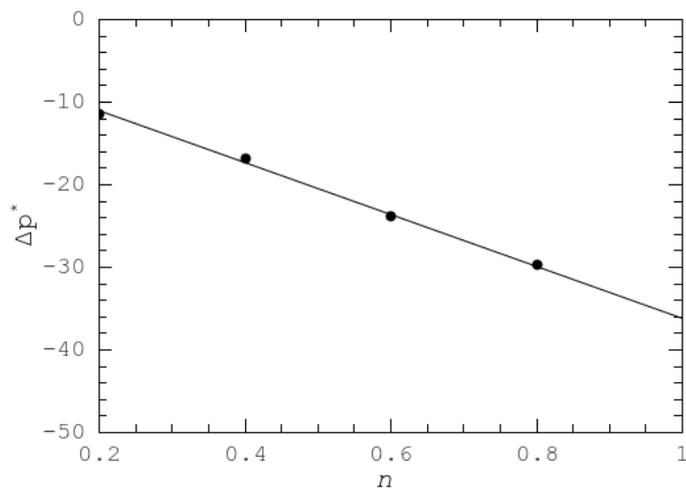
Figura 6. 11 – ilustração da diferença de pressões

De acordo com os gráficos demonstrados na Fig. (6.12), pode-se concluir que o parâmetro reológico J , tem uma influência menos intensa quando comparado com os outros parâmetros analisados. Além disso, percebe-se que a perda de carga adimensional se torna mais negativa a medida que o número de salto J aumenta. Na Fig. (6.12 – (b)), nota-se que o índice *power-law* influencia mais intensamente o cálculo da perda de carga. De maneira semelhante ao parâmetro J , o índice *power-law* também faz com que a perda de carga se torna mais negativa a medida que n aumenta. O comportamento da perda de carga adimensional em

função da intensidade de escoamento U^* está demonstrado na Fig. (6.12-(c)). Nesta situação, o aumento de U^* também faz com que a perda de carga adimensional se torne cada vez mais negativa, aumentando em módulo, de maneira bastante intensa para valores baixos de U^* , tornando-se mais suave para valores de U^* maiores que 10.



(a)



(b)

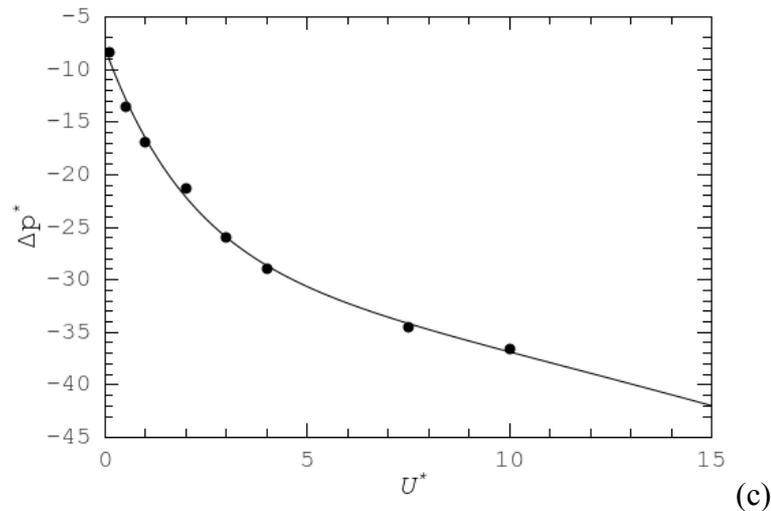


Figura 6.12 – análise da perda de carga adimensional devido à influências dos parâmetros: (a) número de salto J ; (b) índice *power-law* n e (c) intensidade de escoamento U^* .

6.3.2 Escoamentos com inércia

A avaliação dos efeitos causados pela inércia – efeito *up-wind* devido ao termo advectivo da equação de conservação de quantidade de movimento – na morfologia das regiões deformadas para escoamentos de fluidos viscoplásticos é feita através da variação dos parâmetros, tanto cinemáticos – U^* – como reológicos – n e Re_r .

Na primeira situação, onde é feita a variação da intensidade de escoamento U^* (de 0,25 a 1,50), pode-se observar, na Fig. (6.13) abaixo primeiramente a total quebra de simetria em relação ao eixo vertical, em $z^*=0$. Ou seja, as regiões não deformadas são carregadas à jusante no duto menor, onde estas praticamente desaparecem quando a intensidade de escoamento atinge o valor de 1,50. Percebe-se que a ilha, região de *plug-flow* na linha de simetria axial ($r^*=0$) e entre as paredes do duto maior, também é carregada a jusante e diminui bastante até quase sumir, para $U^*=1,50$. Já a região de estagnação no duto maior, perdem totalmente a característica de simetria e, além disso, a quantidade de fluido estagnado aumenta, pois quanto maior o efeito *up-wind*, maior será a tendência de o fluido escoar sem perceber a expansão abrupta do duto maior. Na Fig. (6.13-(d)) o duto maior apresenta-se praticamente cheio de fluido estagnado, enquanto que o duto menor está praticamente livre de *plug-flow*.

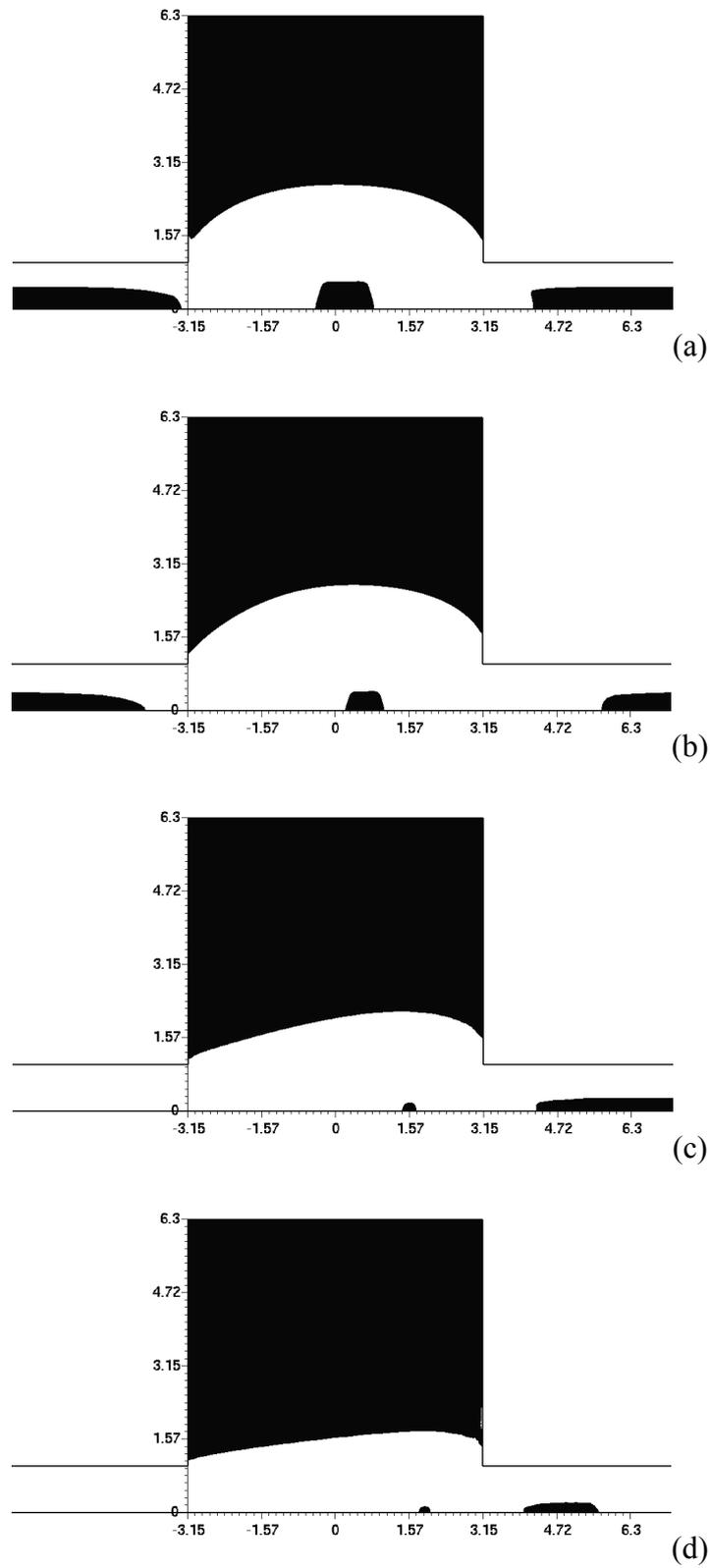


Figura 6.13 – Zonas rígidas para escoamento inercial, $Re_r=25$, $n=0,4$, $J=1,8 \times 10^4$ e:
 (a) $U^*=0,25$, (b) $U^*=0,50$, (c) $U^*=1,00$ e (d) $U^*=1,50$

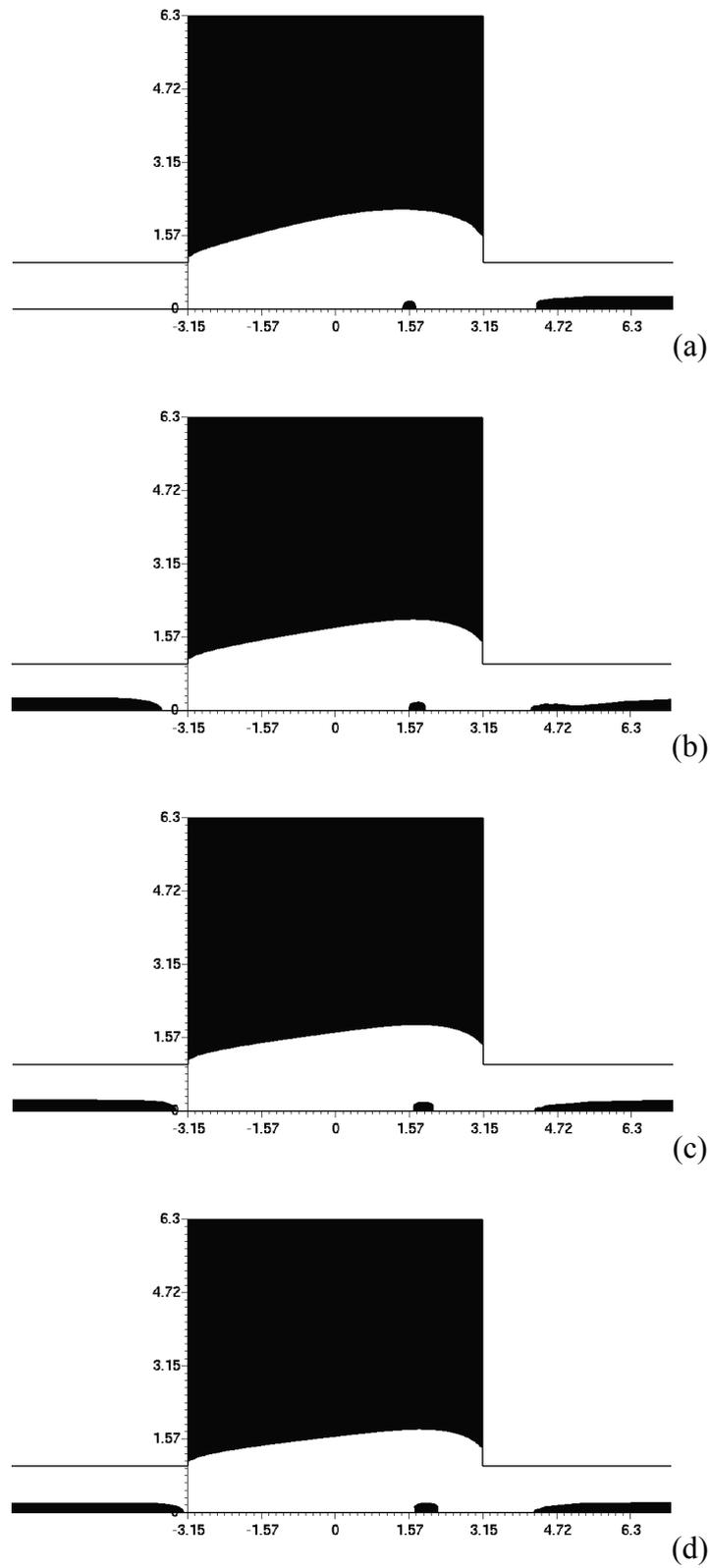
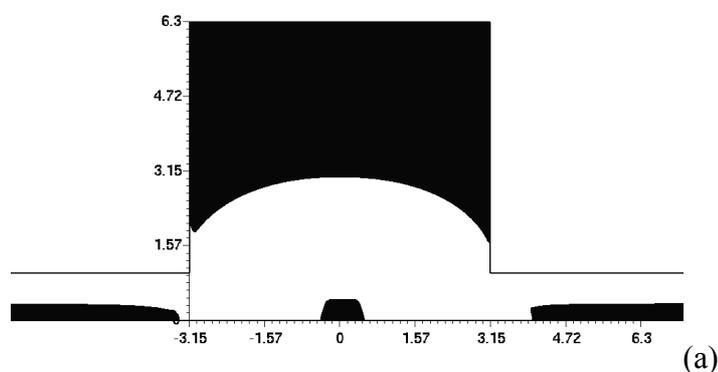


Figura 6.14 – Zonas rígidas para escoamento inercial, $Re_r=25$, $U^*=1,0$, $J=1,8 \times 10^4$ e:

(a) $n=0,4$, (b) $n=0,6$, (c) $n=0,8$ e (d) $n=1,0$

A Fig. (6.14) mostra os efeitos causados na topologia das regiões não deformadas do escoamento devido ao índice de *power-law* n . Quando mantém-se fixa a cinemática do escoamento, ou seja, U^* permanece constante assim como Re_r , e é realizada a variação do índice de *power-law* n somente, a forma topológica das regiões não deformadas possuem um comportamento inverso ao comportamento observado quando a intensidade de escoamento é estudada. Ou seja, quando o n aumenta, a quantidade de fluido que não é deformado também aumenta. Este aumento das zonas não deformadas acontece tanto no duto menor, quanto na região de estagnação do duto maior. A ilha presente na linha de simetria axial também aumenta, porém não se observa o carreamento desta a jusante, permanecendo assim praticamente na mesma posição. Este carreamento também não é observado com as regiões de *plug-flow* do duto menor. Portanto, o parâmetro reológico n não tem influência sobre o efeito *up-wind*.

A outra situação analisada corresponde a um escoamento com intensidade de escoamento novamente fixa e também o índice de *power-law* n constante. E o único parâmetro a ser variado é o número de Reynolds reológico Re_r , ou seja, acrescenta-se efeitos de inércia ao escoamento. Nesta situação o escoamento apresenta comportamento semelhante ao escoamento sujeito a variação de cinemática – ou seja, sujeito a variação de U^* . A medida que Re_r aumenta, a simetria do escoamento desaparece e as regiões não deformadas no duto menor diminuem monotonicamente e são carreadas a jusante. A ilha de fluido não deformado presente na linha de simetria axial também obedece esta tendência, diminui de tamanho e é carreada a jusante do plano $z^*=0$. Este comportamento pode ser observado na Fig. (6.15) abaixo.



(a)

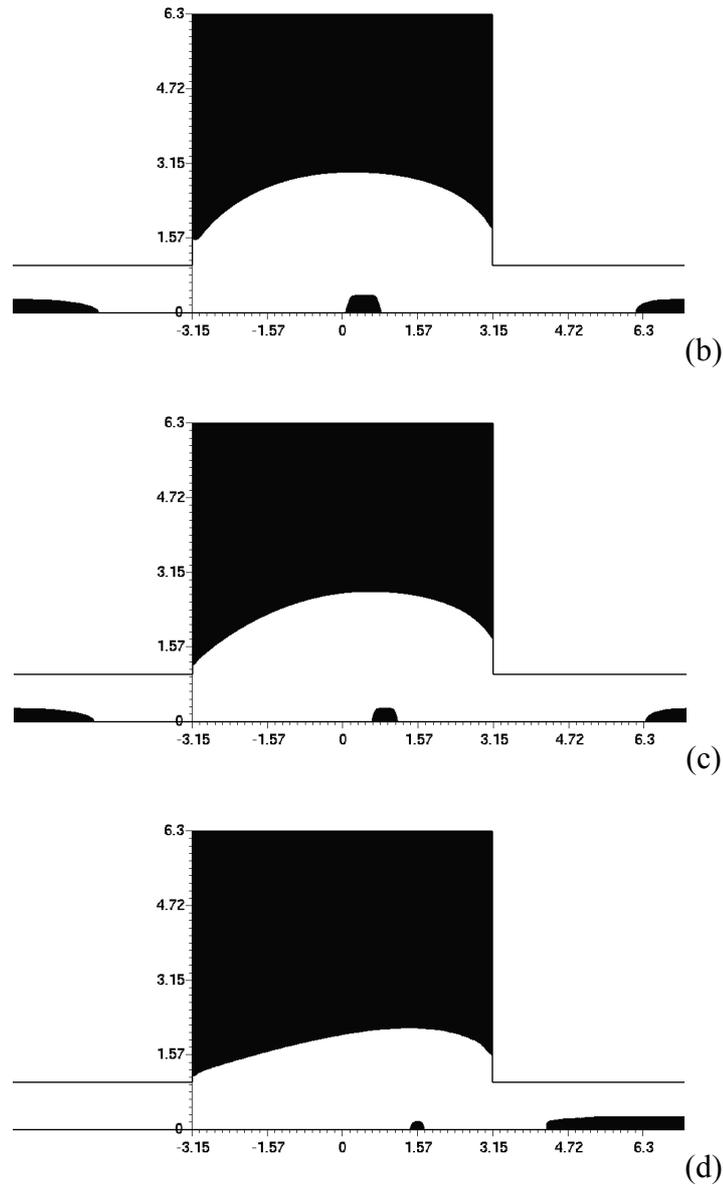


Figura 6.15 – Zonas rígidas para escoamento inercial, $n=0,4$, $U^*=1,0$, $J=1,8 \times 10^4$ e:

(a) $Re_r=0,5$, (b) $Re_r=5,0$, (c) $Re_r=10,0$ e (d) $Re_r=25,0$

Pode-se definir uma variável φ como sendo a razão entre o volume de material não escoante do fluido na parte à montante do eixo $z^*=0$, e dentro da expansão-contração, e o volume total de material não escoante dentro de toda expansão-contração. Em termos de equação, tem-se:

$$\varphi = \frac{V^-}{V_T} \quad (6.2)$$

onde V^- é o volume de material não escoado dentro da expansão-contração e a montante do eixo $z^*=0$, e V_T é o volume total de fluido não escoado dentro da expansão-contração.

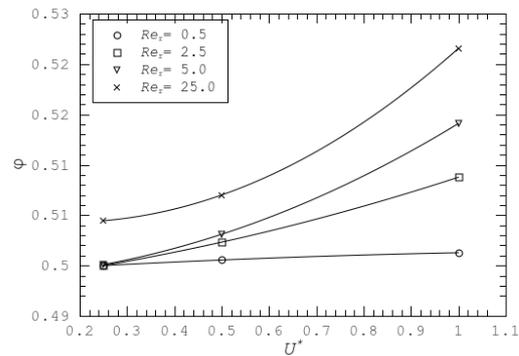
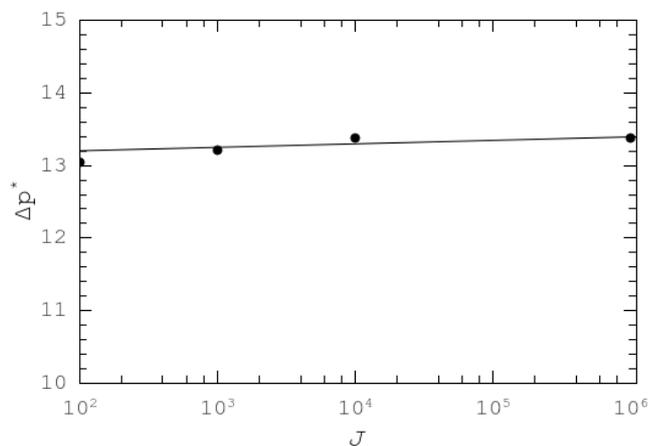


Figura 6.16 – comportamento da variável ϕ em função da intensidade de escoamento U^* para vários números de Reynolds reológicos.

O gráfico da Fig. (6.16) permite concluir que o aumento do número de Reynolds reológico faz com que a razão ϕ também aumente. Ou seja, para uma mesma intensidade de escoamento U^* há mais regiões não deformadas a montante do eixo $z^*=0$. Pode-se observar também que para $Re_r=0,5$ o aumento de U^* não tem influencia na razão ϕ , ou seja, a topologia das regiões não deformadas é praticamente simétrica em relação ao eixo $z^*=0$. Ainda pode-se notar que quanto maior Re_r , maior será a intensidade com que U^* influencia na morfologia das regiões não deformadas dentro da expansão-contração.



(a)

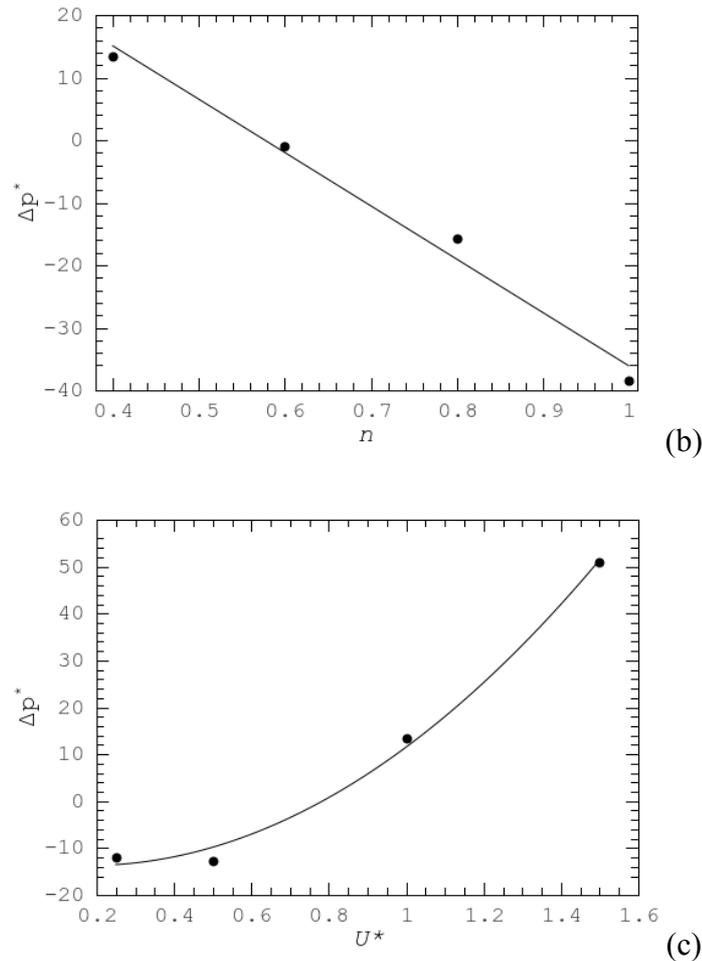


Figura 6.17 – análise da perda de carga adimensional devido à influências dos parâmetros: (a) número de salto J ; (b) índice *power-law* n e (c) intensidade de escoamento U^* .

Considerando-se, para o estudo da perda de carga em escoamentos sujeitos aos efeitos de inércia, a mesma adimensionalização utilizada para escoamentos sem inércia dada pela Eq. (6.1), tem-se, nas Fig. (6.17), a influência dos parâmetros estudados sobre esta perda de carga. Percebe-se que o número de salto J não tem grande influência na perda de carga, semelhante ao comportamento observado no escoamento sem efeitos de inércia, porém no escoamento com efeitos de inércia o aumento do número de salto proporciona um aumento desta perda de carga. Já o índice de *power-law* n , apresenta uma influência mais acentuada sobre a perda de carga adimensional. Ao aumentar-se este índice a perda de carga diminui consideravelmente de forma praticamente linear, semelhante ao comportamento do escoamento sem efeitos de inércia. Por outro lado, a intensidade de escoamento U^* apresenta um comportamento inverso, ou seja, o aumento deste parâmetro faz a perda de carga aumentar exponencialmente, como

pode-se observar no gráfico da Fig. (6.17-(c)). Este fato pode parecer estranho em uma primeira análise, pois a pressão em um ponto a jusante da expansão-contratação, em uma região desenvolvida do escoamento, deveria ser maior, em módulo, quando não houvesse a expansão-contratação. Porém, a condição de contorno de perfil de velocidade desenvolvido na saída do duto implica em aumento da pressão do fluido, quando aumenta-se a cinemática do escoamento.

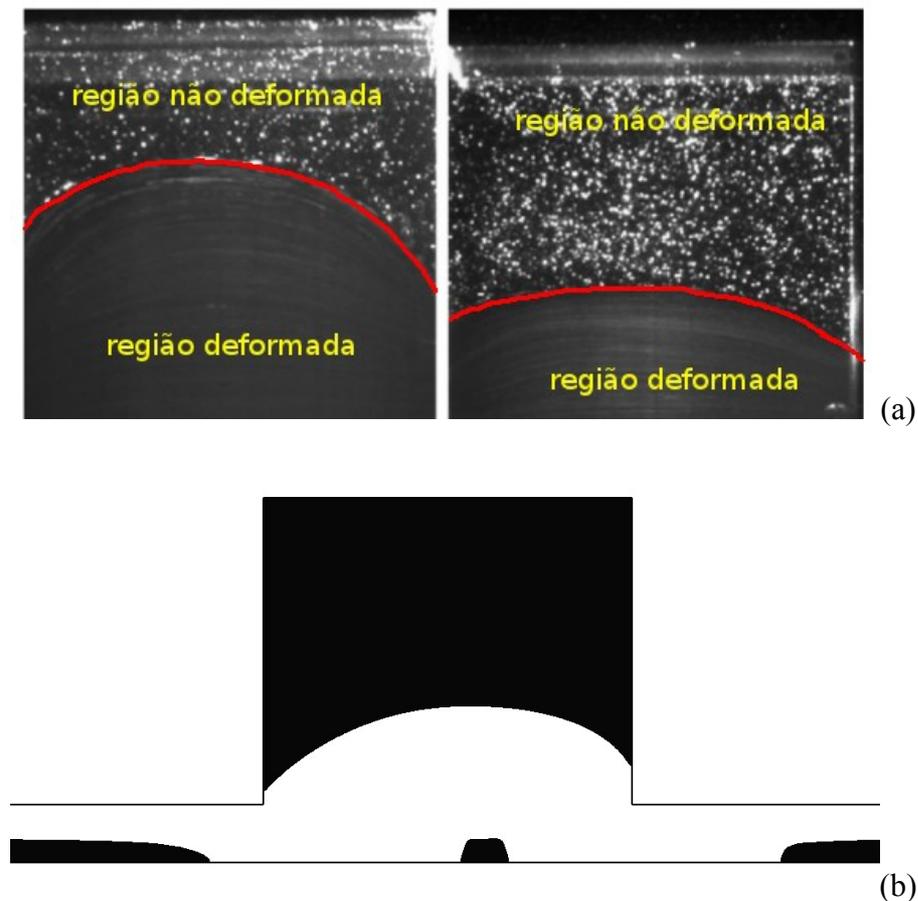


Figura 6.18 – comparação das zonas rígidas entre: (a) visualização experimental de escoamento sem inércia de solução de carbopol 0,09% [Souza Mendes *et al*, 2007] (b) resultado numérico de escoamento com inercia de fluido SMD.

Outro resultado importante que pode-se perceber através da comparação entre resultados experimentais e numéricos que ilustrados na Fig (6.18). A Fig (6.18-(a)) ilustra a visualização experimental de uma solução a 0,09% de carbopol obtida no trabalho de Souza Mendes *et al* , 2007. A linha vermelha delimita as regiões deformadas e não deformadas deste escoamento, que é considerado sem inércia pelos autores. Já a (6.18-(b)) demonstra a

topologia das regiões não deformadas para escoamento de um fluido viscoplástico sujeito aos efeitos de inércia.

A diferença destas duas figuras é bastante clara. Pode-se perceber que no escoamento observado experimentalmente existe uma concentração de fluido não escoado a jusante do eixo $z^*=0$. Este fato é totalmente contrario no escoamento simulado computacionalmente. Como existe o efeito *upwind* em escoamentos sujeitos a efeitos de inércia, é coerente o resultado numérico. Sendo assim o comportamento inverso observado experimentalmente é creditado aos efeitos de elasticidade do fluido. Ou seja, pode-se concluir que os efeitos elásticos e inerciais são inversos.

7 COMENTÁRIOS FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho foram realizadas simulações de escoamentos em regime permanente, bi-dimensionais, tanto para escoamentos lentos, como para escoamentos com inércia, através de uma expansão seguida de uma contração. Com o objetivo de separar os efeitos de inércia e os efeitos viscosos, uma escala reológica introduzida por de Souza Mendes (2007) para escoamentos de fluidos não newtonianos é utilizada na normalização das equações de governo. Com isso é possível aumentar a cinemática do escoamento sem alterar os níveis de inércia e pseudoplasticidade do material. De acordo com esta escala alternativa, a influencia dos níveis de inércia, de pseudoplasticidade e de tensão limite na topologia das regiões não deformadas são avaliadas apenas variando a intensidade de escoamento U^* , para valores fixos do número de Reynolds reológico Re_r , do número de salto J e do índice de *power-law* n , respectivamente.

Para escoamentos lentos ($Re_r \approx 0$) a ausência de *momentum* a montante da expansão-contracção dá origem a regiões não deformadas totalmente simétricas tanto nos canais menores como no duto maior, tanto a montante como a jusante da expansão-contracção. Sobre suas morfologias, estão estreitamente relacionadas com o aumento da intensidade de escoamento U^* , para um dado nível de tensão limite e de pseudoplasticidade. E são mais levemente afetadas quando aumenta-se os níveis de tensão limite e de pseudoplasticidade, para uma condição de cinemática fixa, ou seja, U^* constante. A introdução de nível de inércia não nulo no escoamento ($Re_r > 0$), contudo, muda drasticamente a topologia das regiões não deformadas. Quando acrescenta-se o efeito *upwind* através do aumento do número de Reynolds reológico, as regiões não deformadas a jusante da expansão-contracção desaparecem, já a jusante estas regiões diminuem e dentro do duto maior, entre a expansão e a contração, as regiões não deformadas perdem a simetria e são torcidas no sentido anti-horário. Como nota final, ressalta-se a discrepância entre a simetria das superfícies deformadas de escoamentos lentos de fluidos SMD aqui obtidos, e a assimetria destes visualizada em experimentos de algumas suspensões de polímeros, atestando, portanto, a relevância de se considerar efeitos elásticos na morfologia das regiões não deformadas de alguns materiais viscoplásticos reais.

Para dar continuidade ao estudo de escoamentos de fluidos não-newtonianos, pode-se sugerir como perspectivas futuras das simulações numéricas e análises realizadas nesta dissertação:

- realizar simulações tridimensionais para o escoamento através de uma expansão-contração, a fim investigar os efeitos de extremidades;
- realizar simulações com uma formulação multi-campos GLS ($\boldsymbol{\tau}$ - p - \mathbf{u}) para o escoamento através de uma expansão seguida de uma contração abrupta;
- incluir efeitos de temperatura no escoamento, para estudar seus efeitos sobre a morfologia das zonas rígidas;

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexandrou, A.N., McGilvrey, T.M., Burgos, G., 2001. "Steady Herschel-Bulkley fluid flow in three-dimensional expansions", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 100, pp. 77 – 96.

Alexandrou, A.N., LeMenn, P., Georgiou, G., Entov, V., 2003. "Flow instabilities of Herschel-Bulkley fluids", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** vol. 116, pp. 19 – 32.

Astarita G., Marucci G., 1974. "Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics" McGraw-Hill, London.

Babuška, I., 1973. "The finite element method with lagrangian multipliers", **Numer. Math.**, vol. 20, pp. 179-192.

Barnes, H. A., 1999a. "A brief history of the yield stress", **Appl. Rheol.** vol. 9, pp. 262 – 266.

Barnes, H. A., 1999b. "The yield stress Ñ a review", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 81, pp. 133 – 178.

Behr, M., Franca, L.P., Tezduyar, T.E., 1993. "Stabilized Finite Element Methods for the Velocity-Pressure-Stress Formulation of Incompressible Flows", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 104, pp. 31-48.

Bercovier, M., Engelman, M., 1980. "A finite element method for incompressible non-Newtonian flows", **J. Comp. Phys.** vol. 36, pp. 313 – 326.

Beverly, C.R., Tanner, R.I, 1989. "Numerical analysis of extrudate swell in viscoelastic materials with yield stress", **J. Rheol.**, vol. 33/6, pp. 989 – 1009.

Bird, R. B. Armstrong, R. C. Hassager, O., 1987, "Dynamics of polymeric liquids". v.1, John Wiley & Sons, U.S.A.

Brezzi, F., 1974. "On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers", **RAIRO Ser. Rouge** 8, pp. 129-151.

Burgos, G.R., Alexandrou, A.N., 1999. "Flow development of Herschel-Bulkley fluids in a sudden 3-D expansion", **J. Rheol.** vol.43/3, pp. 485 – 489.

Burgos, G.R., Alexandrou, A.N., Entov, V., 1999. "On the determination of yield surfaces in Herschel-Bulkley fluids", **J. Rheol.** vol. 43/3, pp. 463 – 483.

Ciarlet, P.G., 1978. "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam.

De Besses, D.D., Magnin, A., Jay, P., 2003. "Viscoplastic flow around a cylinder in an infinite medium", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 115, pp. 27 – 49.

Dimakopoulos Y., Tsamopoulos, J., 2007. "Transient displacement of Newtonian and viscoplastic liquids by air from complex conduits". **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 142, pp.162 – 182.

Franca, L. P., Frey, S., 1992, "Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 99, pp. 209-233.

Gurtin, M.E., 1981. "An Introduction to continuum mechanics", Academic Press.

Hammad, K.J., Vradis, G.C., Otugen, M.V., 2001. "Laminar flow of a Herschel-Bulkley fluid over an axisymmetric sudden expansion", **J. Fluids Eng.**, vol. 123, pp. 588 – 594.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 59, pp. 85-99.

Jay, P., Magnin, A., Piau, J.M., 2001. "Viscoplastic fluid flow through a sudden axisymmetric expansion", **AICHE J.** , vol. 47/10, pp. 2155 – 2166.

Johnson, C., 1987. "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method", Cambridge University Press, Cambridge.

Lipscomb, G.G., Denn, M.M., 1984, "Flow of Bingham fluids in complex geometries", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 14, pp. 337 – 346.

Liu, B.T., Muller, S.J., Denn, M.M., 2002. "Convergence of regularization method for creeping flow of a Bingham material about a rigid sphere", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 102, pp. 179-191.

Mitsoulis E, Abdali S.S., Markatos, N.C., 1993. "Flow simulation of Herschel-Bulkley fluids through extrusion dies", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 71, pp. 147 – 160.

Mitsoulis, E. and Huilgol, R.R., 2004. "Entry flows of Bingham plastics in expansions", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 122 pp. 45-54.

Mitsoulis, E., Marangoudakis, S., Spyratos, M., Zizis, Th. 2006. N.A. Malamataris, "Pressure-driven flows of Bingham plastics over a square cavity", **J. Fluids Eng.** vol. 128, pp. 993 – 1003.

Naccache M. F. , Barbosa R. S. , 2007. "Creeping flow of viscoplastic materials through a planar expansion followed by a contraction", **Mechanics Research Communications**, vol. 34 , pp. 423-431.

Nassar, B., de Souza Mendes, M.F. Naccache, 2011. "Flow of elasto-viscoplastic liquids through an axisymmetric expansion-contraction", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 166, pp. 386 – 394.

Navarro, R.F., 1997 "Fundamentos de Reologia de Polímeros" Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul.

Neofytou, P. Drikakis, D., 2003. "Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 111, pp.127 – 150.

Papanastasiou, T.C., 1987, "Flows of materials with yield", **J. Rheology**, vol. 31, pp. 385-404.

Reddy, J.N., and Gartling, D.K., 1994. "The finite element method in heat transfer and fluid dynamics", CRC Press Inc., USA.

Roquet, N., Saramito, P., 2003. "An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder", **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, vol. 192, pp. 3317 – 3341.

Santos, D.D.O., Frey, S.L., Naccache, M.F., and Souza Mendes, P.R., 2011. "Numerical approximations for SMD flows in a lid-driven cavity", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 166, pp. 667 – 679.

Saramito, P., 2007. "A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 145, pp. 1 – 14.

Slattery, J.C., 1999. "Advanced transport phenomena", Cambridge University Press, Cambridge.

Sofou, S., Muliawan, E.B., Hatzikiriakos, S.G., Mitsoulis, E. 2008. "Rheological characterization and constitutive modeling of bread dough", **Rheol. Acta**, vol. 47, pp. 369 – 381.

Souza Mendes, P.R., Dutra, E.S.S., 2004. "Viscosity function for yield-stress liquids", **Appl. Rheol.** vol. 14, pp. 296 – 302.

Souza Mendes, P.R., 2007. "Dimensionless Non-Newtonian Fluid Mechanics", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol.147, pp. 109-116.

Souza Mendes, P.R., Naccache, M. F., Vargas, P. R., Marchesini, F. H., 2007. "Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions-contractions", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 142, pp. 207 – 217.

Taig, I.C., 1961. "Structural analysis by the matrix displacement method", English Electric Aviation Report, vol. S017.

Zisis, Th., Mitsoulis, E., 2002. "Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** vol. 105, pp. 1 – 20.