

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL MODAL DA CAIXA ACÚSTICA DE UM VIOLÃO  
CLÁSSICO

por

Alexandre Marks Löw

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, junho de 2012

IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL MODAL DA CAIXA ACÚSTICA DE UM VIOLÃO  
CLÁSSICO

por

Alexandre Marks Löw  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Aprovada por:

Prof. Dr. Marcelo Maia Rocha, PPGEC / UFRGS

Profa. Dra. Letícia Fleck Fadel Miguel, PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler, PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Francis H. R. França

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 31, de julho de 2012

*Aos bardos do passado cujos nomes não alcançaram a posteridade.  
Aos poetas que viveram pra cantar do mundo apenas a essência sutil.  
Aos artistas do cotidiano.  
Àqueles que cantaram as causas impossíveis,  
os extraterrestres, o disco voador!  
A eles dedico meu engenho e meu labor.  
Em especial a ti, ó musa que foste desta empreitada, Carolina Avellar.*

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar gostaria de verbalizar meu imenso agradecimento à minha família e à Carolina Avellar, que ao longo destes dois anos tranquilizaram angústias e comemoraram comigo as pequenas vitórias;

A meu orientador, Herbert Martins Gomes;

Ao luthier Eduardo Castañera, pela disponibilização de instrumentos e ideias;

Ao Professor César Miguel de Almeida Vasques;

Ao Téc. Mec. Rodrigo Rodrigues de Barros;

E finalmente à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela bolsa concedida.

## RESUMO

Este trabalho consiste na aplicação de técnicas de identificação de parâmetros estruturais, especificamente massa, rigidez e amortecimento, à caixa acústica de um violão clássico. A abordagem experimental tradicional é adotada, com medição de aceleração em um ponto da estrutura e excitação proveniente de martelo instrumentado registrada em diferentes pontos. As funções de resposta em frequência são então traçadas para, em conjunto com um modelo analítico representativo dos primeiros graus de liberdade do acoplamento ar/estrutura, realizar-se o ajuste de curvas e posterior identificação dinâmica. Para tanto, esta última etapa foi tratada como um problema matemático de otimização não linear no qual se busca a minimização de uma função objetivo que contabiliza de alguma forma a diferença entre o resultado das medições e os valores previstos pelo modelo utilizado. Várias funções de erro (objetivo) e vários algoritmos foram utilizados, como mínimos quadrados não linear, simplex de Nelder-Mead, algoritmo genético padrão e enxame de partículas (*particle swarm*), entre outros, sendo este último o de melhor desempenho entre todos, quando aplicado em conjunto com a norma da diferença dos logaritmos das magnitudes ao quadrado. Assim, uma calibração com boa concordância entre dados experimentais e resultados teóricos foi estabelecida para o modelo proposto, sendo realizada também a verificação do ajuste através da comparação de um conjunto independente de dados, trazendo, desta forma, confiabilidade para posteriores cálculos das grandezas associadas ao comportamento dinâmico utilizando-se o modelo ajustado.

Palavras-chave: identificação de parâmetros; violão clássico; vibroacústica de instrumentos musicais; Funções de resposta em frequência.

## **ABSTRACT**

This work aims at identify structural parameters of a classical acoustic guitar's resonant chamber by comparing theoretical and experimental frequency response functions. The quantities used to construct the mass, stiffness and damping matrices of an air/structure analytical model, which is representative of the first few modes of the body, are considered as project variables, and an impact vibration testing approach is used to obtain the measured data, with a roving instrumented hammer and an accelerometer attached to a predefined point of the body. Then, a curve-fit analysis is performed as a mathematical problem of non-linear optimization, wherein the objective function, which is to be minimized, somehow accounts for the difference between the measured data and the theoretically predicted values. Some different error (objective) functions and optimization algorithms, like non-linear least-squares, Nealder-Mead simplex, standard genetic algorithm and particle swarm, among others, were applied, and the latter yielded, together with the squared error norm, the best performance. Then, an updated model was achieved with fair agreement between analytical predictions and experimental results, verified using a validation data set, bringing reliability for further theoretical predictions.

Keywords: parameters identification; classical acoustic guitar; vibroacoustics of musical instruments, frequency response functions.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>14</b>
1.1	Objetivos.....	15
1.2	Estruturação do texto .....	16
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>18</b>
2.1	Caracterização vibroacústica de violões .....	19
2.2	Análise Modal e Identificação de Parâmetros .....	23
2.2.1	Métodos diretos no domínio do tempo.....	24
2.2.2	Métodos diretos no domínio da frequência .....	26
2.2.3	Métodos iterativos .....	27
2.2.4	Identificação direta comparando as FRFs calculadas e experimentais .....	27
<b>3</b>	<b>MODELO TEÓRICO A SER AJUSTADO .....</b>	<b>30</b>
3.1	Modelo simplificado para o violão .....	30
3.2	Protótipo de 2 GDL para teste do procedimento .....	36
<b>4</b>	<b>PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS.....</b>	<b>41</b>
4.1	Instrumentação.....	41
4.2	Aferição e Calibração do equipamento.....	41
4.3	Aquisição de dados .....	43
4.3.1	Posicionamento do acelerômetro.....	43
4.3.2	Configurações do sistema de aquisição.....	45
4.3.3	Cuidados na aplicação do martelo instrumentado.....	45
<b>5</b>	<b>ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL.....</b>	<b>47</b>
5.1	Equacionamento básico analítico em força e deslocamento.....	47
5.2	Adaptação do equacionamento aos dados experimentais .....	53
5.3	Tratamento numérico dos dados experimentais .....	56
<b>6</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS .....</b>	<b>61</b>
6.1	Estimativa das grandezas modais e do amortecimento.....	62
6.2	Identificação no plano de Nyquist ( <i>circle fit</i> ) .....	62
6.3	Função objetivo (erro) .....	63
6.4	Algoritmos de otimização.....	64
6.4.1	Mínimos quadrados não-linear – MQ .....	65
6.4.2	Simplex de Nelder-Mead – NM .....	66
6.4.3	Algoritmo Genético – AG .....	67
6.4.4	Estratégias Evolutivas Diferenciais – EED .....	69
6.4.5	Enxame de Partículas ( <i>Particle Swarm Optimization – PSO</i> ) .....	70
6.5	Procedimento de cálculo.....	72

<b>7</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>74</b>
7.1	Protótipo de teste de 2 GDL .....	75
7.2	Modelo de acoplamento ar-caixa – 3 GDL.....	80
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>87</b>
8.1	Conclusões .....	87
8.2	Trabalhos futuros .....	89
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>92</b>
	<b>APÊNDICE A – Detalhamento do modelo simplificado 3 GDL .....</b>	<b>95</b>
	<b>APÊNDICE B – Amortecimento proporcional e autovalores/autovetores .....</b>	<b>96</b>
	<b>APÊNDICE C – Rearranjo da receptância da forma matricial para indicial.....</b>	<b>97</b>
	<b>ANEXO A – Características da célula de carga .....</b>	<b>98</b>
	<b>ANEXO B – Características da placa de aquisição .....</b>	<b>100</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Representação esquemática do modelo simplificado de 2 GDL.....	31
Figura 3.2 – Representação esquemática do modelo simplificado de 3 GDL.....	33
Figura 3.3 – Desenho em <i>CAD</i> do tampo com pontos utilizados para <i>spline</i> .....	35
Figura 3.4 – Relatório fotográfico e dimensional do protótipo de 2 GDL .....	37
Figura 3.5 – Protótipo de 2 GDL como um sistema massa-mola-amortecedor .....	37
Figura 3.6 – Medição das rigidezes estáticas .....	38
Figura 3.7 – Regressão linear para a obtenção dos coeficientes de flexibilidade .....	39
Figura 4.1 – Resultado da calibração do acelerômetro.....	42
Figura 4.2 – Resultado da calibração do martelo instrumentado .....	42
Figura 4.3 – FRFs do violão e modos mais frequentemente identificados .....	44
Figura 4.4 – Pontos utilizados para a seleção dos 3 GDL do modelo adotado .....	45
Figura 4.5 – Equipamento de medição utilizado .....	46
Figura 5.1 – Representação gráfica dos algoritmos H1 (ex), H2 (ef) e Hv (ev) .....	59
Figura 6.1 – Breve fluxograma do algoritmo genético tradicional .....	68
Figura 7.1 – $FRF_{12}$ e respectiva função de coerência.....	76
Figura 7.2 – Resultado gráfico da calibração utilizando AG .....	78
Figura 7.3 – Ângulo de fase com os parâmetros ajustados para o protótipo por AG.....	80
Figura 7.4 – Resultados da função de coerência para o violão.....	81
Figura 7.5 – Resultado gráfico do ajuste para a $FRF_{11}$ .....	83
Figura 7.6 – Esboço dos modos obtidos com o modelo ajustado.....	84
Figura 7.7 – Resultado gráfico do ajuste para a $FRF_{12}$ .....	85
Figura 7.8 – Resultado gráfico do ajuste para a $FRF_{13}$ .....	86
Figura 7.9 – Resultado gráfico do ajuste para o ângulo de fase .....	86

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Constantes necessárias à avaliação numérica das matrizes.....	35
Tabela 3.2	Vetor dos parâmetros de ajuste para o modelo do violão.....	36
Tabela 3.3	Resultados do processo de regressão linear.....	39
Tabela 3.4	Parâmetros do Protótipo de teste.....	40
Tabela 7.1	Estimativas iniciais dos parâmetros do protótipo de teste 2 GDL.....	75
Tabela 7.2	Resultados por cada algoritmo.....	77
Tabela 7.3	Resultados da calibração por AG para os parâmetros residuais.....	79
Tabela 7.4	Correções percentuais realizadas pelo processo de ajuste por AG.....	79
Tabela 7.5	Vetor de parâmetros com estimativas para o amortecimento.....	81
Tabela 7.6	Erro resultante com cada algoritmo [adimensional].....	82
Tabela 7.7	Vetor de parâmetros resultante e diferenças (ajustes) percentuais.....	82
Tabela 7.8	Análise de sensibilidade do ponto de mínimo encontrado [adim.].....	83

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AG	Algoritmo Genético
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno – algoritmo de otimização
EED	Estratégias Evolutivas Diferenciais – algoritmo de otimização
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> – Transformada discreta (rápida) de Fourier
FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Grau De Liberdade
LM	Levenberg-Marquardt – algoritmo de otimização
MEF	Método dos Elementos Finitos
NM	Nelder-Mead – algoritmo de otimização
NPS	Nível de Pressão Sonora
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i> – Otimização por enxame de partículas

## LISTA DE SÍMBOLOS

(Unidades no sistema internacional)

### Simbologia:

- [▪] Matriz quadrada  
[▪]<sup>-1</sup> Matriz inversa  
diag(▪) Matriz diagonal  
(▪)<sup>\*</sup> Complexo conjugado

### Letras latinas:

- A Área, m<sup>2</sup>; Aceleração – espectro, m/s<sup>2</sup>;  
c Velocidade de propagação do som, m/s; Amortecimento, N.s/(m);  
[C] Matriz de amortecimento proporcional, N.s/(m);  
f Excitação (força) externa – histórico, N; frequência, Hz;  
F Excitação (força) externa – espectro, N;  
g Aceleração da gravidade: 9,81 m/s<sup>2</sup>;  
H Receptância, m/N;  
[H] Matriz de receptâncias, m/N;  
I Inertância teórica, (m/s<sup>2</sup>)/N;  
I<sup>°</sup> Inertância experimental, (m/s<sup>2</sup>)/N;  
[I] Matriz identidade, adimensional;  
j  $\sqrt{-1}$ ;  
k Rigidez (constante de mola equivalente), N/m;  
[K] Matriz de rigidez, N/m;  
[K]<sup>-1</sup> Matriz de flexibilidade, m/N;  
m Massa, kg;  
[M] Matriz de massa, kg;  
p Pressão, N/m<sup>2</sup>;  
R Função de correlação (direta ou cruzada);  
S Espectro de potência (direto ou cruzado);  
V Volume, m<sup>3</sup>;

$x$	Deslocamento – no domínio do tempo, m;
$\dot{x}$	Velocidade – no domínio do tempo, m/s;
$\ddot{x}$	Aceleração – no domínio do tempo, m/s <sup>2</sup> .

### Letras Gregas:

$\beta$	Constante de proporcionalidade entre amortecimento e massa, s <sup>-1</sup> ;
$\gamma$	Constante de proporcionalidade entre amortecimento e rigidez, s;
$\Delta$	Diferencial (diferença finita associada a uma grandeza);
$\zeta$	Razão do amortecimento crítico, adimensional;
$\lambda$	Autovalor;
$\mu$	Constante de proporcionalidade entre variações de pressão e volume, (N/m <sup>2</sup> )/m <sup>3</sup> ;
$\Pi$	Vetor dos parâmetros de ajuste (variáveis de projeto);
$\rho$	Massa específica, kg/m <sup>3</sup> ;
$\phi$	Autovetor normalizado por massa modal, adimensional;
$[\Phi]$	Matriz de autovetores normalizados por massa modal;
$\psi$	Autovetor normalizado arbitrariamente;
$[\Psi]$	Matriz dos autovetores normalizados arbitrariamente;
$\omega$	Frequência angular, rad/s;
$\omega_r$	Frequência natural angular do modo ‘r’, rad/s.

### Índices:

b	Referente ao tampo posterior (fundo) – <i>back</i> ;
e	Referente a valores experimentais;
h	Referente à coluna de ar que cruza a abertura do tampo frontal (boca) – <i>hole</i> ;
i	i-ésima linha da matriz de FRFs;
j	j-ésima coluna da matriz de FRFs;
k	k-ésimo elemento do vetor de FRFs experimentais;
p	Referente ao tampo frontal – <i>plate</i> ;
r	r-ésimo modo de vibração.
t	Referente a valores teóricos

# 1 INTRODUÇÃO

Parte da motivação que levou à realização deste trabalho advém das dificuldades encontradas quando se faz necessária a comparação entre diferentes instrumentos musicais, mais especificamente o violão clássico (no escopo deste texto adota-se o termo **violão** para guitarra acústica, modelo clássico). Por um lado, quando se trata de qualidade subjetiva, diversos fatores psicológicos incomensuráveis que regem a maneira como os seres humanos percebem os sons impossibilitam uma classificação unívoca entre dois ou mais projetos (ou protótipos) que seja calcada exclusivamente no conhecimento dos fenômenos físicos envolvidos e nas boas práticas de engenharia. Entretanto, se o foco da questão é direcionado às grandezas físicas relacionadas à geração e propagação sonoras, um esforço no sentido da modelagem estrutural e/ou medição experimental pode ser de grande valia neste âmbito. Por exemplo, a intensidade de radiação sonora pode ser perfeitamente correlacionada com o que se chama, no jargão da área da música acústica, de ‘projeção de um instrumento’; da mesma forma, o conceito de tempo de reverberação é associado diretamente à ‘sustentação’ (ou *sustain*, na bastante difundida nomenclatura em língua inglesa), e vários outros exemplos semelhantes poderiam ser enumerados. Assim sendo, uma possibilidade de avaliação da qualidade sonora de um determinado instrumento musical seria a medição do campo de radiação sonora ao seu redor – geralmente usando microfones de pressão em conjunto com algum método de medição ou estimativa da velocidade de partícula do deslocamento de ar em um determinado ponto do espaço circundante – visando a estimar sua ‘projeção’. Porém, o aparato experimental necessário para este tipo de medição requer alto investimento em equipamento, tempo e ajuste preciso de todos os elementos envolvidos no processo. Além disto, a informação adquirida desta maneira diz respeito unicamente à condição de ensaio, não revelando em maior profundidade as características intrínsecas da estrutura. Por esta razão, uma alternativa viável à abordagem acústica direta é a medição do comportamento dinâmico da estrutura para, uma vez traçadas as funções de resposta em frequência (FRFs), aplicar algum procedimento de identificação dos parâmetros estruturais visando à obtenção de modelos (analíticos ou numéricos) mais precisos e confiáveis com os quais possam ser calculadas, numa etapa posterior, as grandezas de interesse.

Impulsionado em grande parte pela possibilidade de aplicação na calibração de modelos discretizados de métodos numéricos – e em especial de elementos finitos – o uso da análise modal experimental vem crescendo amplamente nas últimas décadas. Além disto, a versatilidade desta técnica, associada aos avanços da tecnologia de processamento de sinais e de computação, tanto em equipamento quanto em programas dedicados, vem colaborando também para a sua popularização. Também por uma questão de praticidade, o martelo instrumentado algumas vezes é escolhido como meio de excitação do teste vibracional ao invés de serem empregadas formas de excitação mais sofisticadas, como por exemplo o oscilador eletromecânico (*shaker*) [Ewins, 1984] (nos casos em que vibrações operacionais ou ambientais são inviáveis), ainda que os resultados deste último possam ser considerados como mais confiáveis, uma vez que estão livres de incertezas introduzidas pelo manuseio do equipamento. Já para o registro da resposta dinâmica, o uso de acelerômetro constitui uma opção simples e eficaz, e, em grande parte graças a isto, amplamente utilizada, embora seja necessária uma verificação de que a massa do sensor não chegue a interferir no mesurando. Então, com as transformadas de ambos os sinais – excitação e resposta – para o domínio da frequência, é possível calcular as FRFs, que representam as características dinâmicas da estrutura testada, e finalmente, pela comparação com os resultados obtidos no teste, desenvolvem-se uma ampla gama de técnicas de identificação de parâmetros (também chamadas de calibração de modelos, nas situações em que as matrizes estruturais são determinadas analiticamente, e então apenas pequenas correções são aplicadas pelo algoritmo).

## 1.1 Objetivos

Assim, seguindo o exposto acima, o objetivo principal deste trabalho é a identificação dos parâmetros de um modelo simplificado, mas ainda assim representativo, das características mais importantes do comportamento estrutural/acústico da caixa acústica de um violão clássico.

Primeiramente, todo o procedimento é testado sobre uma estrutura simples de 2 graus de liberdade (GDLs) em forma de prédio de 2 andares, construída com colunas de metal e ‘pavimentos’ de madeira, visando à validação da metodologia, uma vez que uma estrutura simples como esta apresenta resultados já conhecidos e bem

estabelecidos. Verificadas a viabilidade e confiabilidade da metodologia através da avaliação dos resultados obtidos sobre o protótipo descrito anteriormente, toda a análise experimental é realizada novamente sobre a caixa acústica do violão e, com o conjunto de dados daí obtidos, procede-se ao ajuste do modelo da caixa acústica de 3 GDLs proposto por French, 2009, às curvas experimentais. Para tanto são traçadas algumas funções de resposta em frequência (FRF) associando a resposta em aceleração medida em uma localização pré-definida com as excitações em força (inertância) registradas em diferentes pontos da estrutura, e a calibração das componentes das matrizes de massa, rigidez e amortecimento é então realizada minimizando-se uma função erro, a qual é definida a partir da diferença entre os valores de inertância medidos e aqueles previstos pelo modelo citado anteriormente. Desta forma, o processo todo se caracteriza como um problema de otimização cuja resolução pode ser obtida através da aplicação de uma ampla gama de algoritmos disponíveis, todos de confiabilidade já comprovada para diversos casos. Porém, no que toca a heurísticos, conforme Wolpert e Macready, 1997, (apud Yang, 2010) é impossível que um mesmo algoritmo encontre a melhor solução para todos os tipos de aplicações. Este fato ressalta a importância de se buscar a solução de um determinado problema utilizando-se para tanto não apenas um algoritmo, mas realizando um estudo da aptidão de cada um dos métodos disponíveis. Com este intuito foram aplicadas algumas técnicas meta-heurísticas, como algoritmo genético padrão, estratégias evolutivas diferenciais e enxame de partículas (*particle swarm*), assim como o simplex de Nelder-Mead e ainda algumas das técnicas que utilizam o cálculo/estimativa do gradiente (matriz jacobiana), como mínimos quadrados não linear e quasi-Newton (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno – BFGS). Por fim estes são testados em relação à qualidade e eficácia das soluções encontradas, e a partir daí um comparativo é gerado com os ajustes resultantes de cada uma das técnicas empregadas.

## 1.2 Estruturação do texto

Seguindo, no capítulo dois apresenta-se uma revisão bibliográfica que se estende desde o começo da aplicação de equipamentos digitais de medição a instrumentos musicais até os últimos avanços no sentido de caracterizar o comportamento acústico e/ou dinâmico do violão clássico como estrutura, assim como os trabalhos consagrados e o estado da arte no tocante a identificação de parâmetros e calibração de modelos

numéricos. No capítulo três é apresentado o modelo teórico a ser ajustado comparando-o a um sistema massa-mola, onde as flexibilidades dos tampos superior e inferior, assim como a compressibilidade do ar enclausurado pela caixa, são consideradas como os elementos conservativos, enquanto uma massa equivalente para cada um dos três movimentos considerados é adotada para a simulação dos efeitos inerciais. O detalhamento dos procedimentos de medição e registro dos dados experimentais é exposto no capítulo quatro, desde a descrição dos equipamentos escolhidos/disponíveis para a obtenção dos sinais de excitação e resposta, juntamente com os cuidados tomados para que estes atinjam o seu melhor desempenho, até a configuração (*set up*) dos parâmetros de operação da placa de aquisição e das estruturas a serem testadas. O capítulo cinco é reservado para o desenvolvimento das equações da análise modal, partindo-se das equações do movimento em forma matricial e chegando-se, primeiramente, à forma analítica tradicional das funções de resposta em frequência, e num segundo momento a uma forma mais apropriada ao tratamento do sinal digital de excitação em aceleração. No sexto capítulo estão descritas as questões relativas aos procedimentos de identificação, como as técnicas utilizadas para se obter estimativas iniciais dos parâmetros, os algoritmos utilizados, e a construção de uma função objetivo (erro) a partir da comparação entre os valores medidos e os resultados experimentais. No sétimo capítulo são apresentados os resultados dos ajustes, tanto para a estrutura de teste e validação, quanto para o violão, e finalmente o último capítulo traz as conclusões tiradas do processo como um todo, assim como as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No meio acadêmico, as primeiras tentativas relevantes no sentido de uma avaliação de qualidade acústica através da medição/modelagem dos fenômenos físicos surgiram do estudo de uma possível otimização da arquitetura de salas de concerto em relação à propagação dos sons produzidos no palco e sua percepção pelos ouvintes. Considerado como um pioneiro neste campo, Leo L. Beranek produziu uma série de artigos abordando vários projetos importantes em diversos países [e.g. Beranek, 1962].

O interesse científico nos instrumentos musicais remonta ao final do século XIX, quando surgiu o que é considerado o primeiro trabalho sobre a acústica dos instrumentos musicais, devido a Lord Rayleigh. Daí em diante, pouca coisa foi escrita sobre o assunto antes da segunda guerra mundial, porém, a partir da década de quarenta já se encontram alguns trabalhos publicados principalmente na Acoustical Society of America. Todavia neste estágio inicial tratou-se basicamente de questões relativas a métodos de fabricação, e suas possíveis consequências na qualidade subjetiva do instrumento.

Foi a partir da crescente acessibilidade aos equipamentos de medição que uma aplicação do conceito de caracterização experimental objetiva aos instrumentos musicais também foi possível; instrumentos mais antigos, como o violino e o piano, foram os primeiros a despertar o interesse dos pesquisadores [e.g. Hutchins, Hopping e Saunders, 1960], ao mesmo tempo em que as técnicas de medição e aquisição de dados começavam a se popularizar no meio da pesquisa acadêmica e científica. Outro grande incentivo à produção científica específica nesta área é a fundação, no começo da década de 60, da Catgut Acoustical Society, dedicada exclusivamente à pesquisa e aplicação dos conhecimentos científicos e tecnológicos à fabricação de instrumentos musicais (especialmente à família do violino).

Identificação de parâmetros através da aplicação de análise modal, por outro lado, embora seja também um campo de pesquisa relativamente novo, tem sido palco de abundante produção científica/acadêmica, em função principalmente da aplicação às indústrias da construção civil, aeroespacial, automotiva, à confiabilidade estrutural, etc. Esta grande profusão de trabalhos tem algumas tendências já estabelecidas, por exemplo, quanto ao domínio os procedimentos adotados podem utilizar grandezas em função do tempo ou da frequência, há métodos diretos ou iterativos, há métodos que

desconsideram o amortecimento, etc. A seguir apresenta-se um breve panorama de alguns trabalhos importantes nos tópicos já mencionados.

## 2.1 Caracterização vibroacústica de violões

As primeiras tentativas de caracterizar quantitativamente o comportamento dinâmico de violões foram focadas na determinação experimental dos modos de vibração utilizando linhas de Chladni e interferometria holográfica, esta já relativamente recente, para tornar possível a rápida identificação visual das linhas neutras, sendo o artigo de Firth, 1977, pioneiro neste sentido. Neste trabalho foram medidos vários modos de vibração de um violão em condição livre-livre aplicando-se a técnica da holografia. Também foi medido o NPS (Nível de Pressão Sonora) a 1 m da boca em câmara anecóica, excitando com um vibrador eletromecânico, e as linhas de Chladni foram traçadas no tampo (no escopo desse texto o termo ‘tampo’ refere-se ao tampo superior, e ‘fundo’ ao tampo inferior da caixa acústica do violão). Um circuito elétrico análogo foi proposto para descrever o comportamento dinâmico dos dois primeiros modos, e uma comparação da caixa acústica com o sistema usado nas cavidades de reflexão de autofalantes (para graves) foi estabelecida, chegando-se a conclusão de que ambos funcionam de forma semelhante na região das primeiras frequências naturais, e que esta comparação pode ser facilmente estendida a outros instrumentos de cordas com caixa acústica (como, por exemplo, os da família do violino).

Já Caldersmith, 1978, desenvolveu, aproximando a caixa acústica do violão por uma cavidade rígida contendo uma parede flexível com abertura para a entrada e saída do ar, um sistema de equações para modelar a interação entre a flexão do tampo e a propagação de onda sonora resultante. A ideia proposta neste artigo é de que a caixa acústica se comporta como uma cavidade de reflexão, seguindo basicamente o exposto por Firth, 1977. Medições em um protótipo construído com as características do modelo proposto foram realizadas, assim como na caixa acústica de um violão, e os resultados, em ambos os casos, apresentaram razoável concordância quando comparados ao desenvolvimento matemático.

A partir do modelo físico proposto por Caldersmith, 1978, Christensen e Vistisen, 1980, elaboraram um modelo de 2 GDL para o acoplamento ar-tampo (frontal). A argumentação parte de uma comparação experimental das frequências de

ressonância, registradas em FRFs da caixa acústica para diferentes níveis de obstrução da abertura do tampo, com o objetivo de se estabelecer uma correlação entre o deslocamento de ar entrando e saindo da cavidade de ressonância e as frequências naturais da própria caixa acústica. A conclusão desta análise corrobora com a ideia de que as duas primeiras frequências naturais, juntamente com a antirressonância presente entre elas (frequência de Helmholtz) nas componentes da diagonal da matriz das FRFs, são fortemente afetadas pelo acoplamento entre a flexibilidade devida à compressibilidade do ar encerrado pela caixa e a rigidez dos elementos estruturais. Então, equacionando as forças associadas à pressão e velocidade do ar, assim como a uma rigidez equivalente do tampo, ao mesmo tempo em que massas equivalentes são concebidas para a coluna de ar responsável pela propagação do som e para o tampo, um sistema massa-mola de 2 GDL é definido para aproximar o comportamento da caixa nas baixas frequências.

Num esforço no sentido de caracterizar, ainda que somente de forma qualitativa, os primeiros modos do violão em situação similar à de operação, Caldersmith, 1986, traça uma FRF da resposta estrutural, capturada com um acelerômetro fixado à ponte, e outra acústica, medindo a pressão sonora em um microfone a 1 m de distância da abertura do tampo frontal (boca). Neste trabalho encontra-se uma descrição física detalhada de cada modo, junto com a sua localização na FRF, sendo identificados seis modos entre 50 e 500 Hz; este entendimento aprofundado do comportamento estrutural e acústico da caixa de ressonância é de grande importância como orientação para futuras abordagens analíticas ou numéricas.

Também traçando as FRFs a partir de medições acústicas de pressão sonora, Suzuki, 1986, realizou um estudo semelhante, porém sobre o tampo harmônico de um piano. Medindo simultaneamente a pressão sonora e a velocidade de partícula em uma grade de pontos ao redor do instrumento, foi possível determinar a eficiência de radiação sonora, definida como a razão da potência de radiação medida no campo próximo pela potência fornecida à estrutura pelo sinal de excitação proveniente de um excitador eletromecânico (*shaker*). Visando a adaptar este trabalho ao caso do violão, Lai e Burgess, 1990, conseguiram comparar dois instrumentos, chegando ao um valor de eficiência de radiação de 0,14 para um violão e 0,12 para outro. Porém, algumas dificuldades desta abordagem são o custo do equipamento, a necessidade de se realizarem as medições dentro de uma câmara anecóica e a impossibilidade de se medir

toda área irradiada ao redor da estrutura. Neste trabalho também foram realizadas medições de inertância estrutural, chegando-se a outra importante conclusão: as FRFs medidas desta forma apresentaram boa concordância que com as medições de pressão sonora, sinalizando que as informações obtidas pelas medições acústicas podem ser adquiridas via medição estrutural, que é muito mais acessível em custo e tempo de operação.

Numa abordagem inovadora, Boullosa, Orduña-Bustamante e López, 1999, realizaram tanto uma comparação objetiva, na linha dos trabalhos já mencionados, via eficiência de radiação, quanto subjetiva, através de audições para um júri especializado, em um conjunto de violões de faixas de preço bastante distintas. Alguns resultados foram reveladores, no sentido de que contrariaram uma suposta correlação direta entre preço e qualidade, porém, daí também é possível perceber a dificuldade de se chegar a resultados conclusivos quando se trabalha com análise subjetiva.

Elejabarrieta, Ezcurra e Santamaría, 2002, partiram diretamente para uma modelagem numérica tridimensional da caixa via método dos elementos finitos (MEF), tomando o cuidado de realizar sucessivas análises, incrementando, a cada uma delas, o detalhamento da estrutura. Assim, calculando a solução modal a cada detalhe adicionado ao modelo, foi possível determinar o fator de participação modal de cada modo para as primeiras oito ressonâncias, chegando a conclusões que confirmam a validade das ideias propostas por Caldersmith, 1978, e Christensen e Vistisen, 1980, no que diz respeito à importância dos modos de acoplamento ar-estrutura para a resposta total da caixa acústica e da validade dos modelos simplificados para a simulação do comportamento em baixas frequências. Porém, o uso de propriedades materiais tabeladas, e a desconsideração do amortecimento, tanto na estrutura quanto no ar circundante, gerou erros nas frequências naturais de até 10%, mesmo nas primeiras ressonâncias.

Por outro lado, French, 2007, utiliza o modelo de 2 GDL apresentado por Christensen e Vistisen, 1980, para realizar uma identificação de parâmetros sobre suas matrizes de massa e rigidez. A ideia aplicada aí é alcançar o número de equações suficiente para que possam ser determinados os parâmetros desconhecidos dos quais são compostas as matrizes estruturais deste modelo, ou seja, massas e rigidezes equivalentes. Para tanto são adicionadas massas de pequenos objetos (neste trabalho foram utilizadas porcas com massa entre 10 e 40 g) ao tampo, uma vez que esta é uma

grandeza cuja medição resulta fácil e confiável. Outra alteração controlada é obtida cobrindo-se a abertura da caixa acústica, resultando em área nula para este parâmetro. Para outros parâmetros presentes no equacionamento, como massa específica e velocidade do som para o ar, utilizam-se valores tabelados. Então, utilizando valores de frequências naturais provenientes de medição e aplicando a técnica de mínimos quadrados foi possível determinar os parâmetros desconhecidos. Assim, de posse do modelo completo, estas mesmas frequências foram calculadas e comparadas aos resultados experimentais, apresentando diferenças de menos de 0,1% para a primeira e abaixo de 1% para a segunda ressonância. A intenção disto é que o conhecimento de como algumas propriedades (neste caso as duas primeiras frequências naturais) da caixa acústica respondem a pequenas alterações na geometria do instrumento pudesse servir de orientação para futuras melhorias nos projetos. Este mesmo modelo foi ampliado para 3 GDL agregando a flexibilidade do fundo da caixa acústica em French, 2009, e um procedimento semelhante é apresentado, porém desta vez as frequências atingem um nível de concordância um pouco menor.

Uma tese de doutorado específica sobre a acústica do violão foi desenvolvida por Inta, 2007, abordando aspectos objetivos e subjetivos relacionados ao projeto, fabricação e até mesmo utilização do instrumento. Um capítulo inteiro é dedicado à análise por MEF, chegando-se à conclusão de que os resultados obtidos foram úteis mais qualitativamente que quantitativamente, ainda que tenha sido reconhecida a falta de fidelidade do modelo utilizado. Outro resultado interessante deste trabalho é o desenvolvimento de um léxico específico dos usuários do instrumento através de votações coletadas via internet. De mais de vinte parâmetros levantados, chegou-se a conclusão que apenas quatro são realmente importantes, a ‘potência’ (de radiação) entre eles, sendo os outros o ‘brilho’, a ‘percussão’ e a ‘aridez’.

Mais recentemente, então, voltando ao tema do modelo simplificado, Popp, 2012, considerou ainda a influência das faixas laterais, e assim foi capaz de prever, também comparando com FRFs experimentais, o comportamento tanto de oscilador acoplado (abertura desobstruída) quanto isolado (abertura lacrada) da caixa acústica com “surpreendente acurácia” [Popp, 2012].

## 2.2 Análise Modal e Identificação de Parâmetros

Compilando boa parte do material exposto nos primeiros IMAC – International Modal Analysis Conference, no começo da década de 80, Ewins, 1984, ainda hoje é uma das principais fontes de referência não só a respeito de análise modal experimental mas também de todas as etapas do processo, desde a teoria básica até os métodos de identificação de parâmetros, passando pelas técnicas de aquisição de dados e de estimativa do amortecimento. Na abordagem aí apresentada, primeiramente realiza-se a identificação dos parâmetros modais: frequências naturais, razões de amortecimento e modos de vibração; para tanto, como alternativas de solução são apresentadas nesta obra algumas das técnicas mais populares à época, como a aproximação a 1 GDL, identificação Multi-GDL e identificação circular no plano de Nyquist (*circle fit*), no domínio da frequência, e o método de Ibrahim e o método das exponenciais complexas, no domínio do tempo (este último sendo ainda hoje bastante utilizado). Até aí, porém, todos os métodos dependiam da identificação preliminar dos parâmetros modais, só então partia-se para a identificação/calibração das matrizes de massa e rigidez, onde, segundo Maia, Silva, *et al.*, 1997, “as técnicas de comparação são, em maior ou menor grau, baseadas nas condições de ortogonalidade”. Ou, Alternativamente, muitos métodos foram desenvolvidos utilizando o coeficiente de correlação modal (*Modal Assurance Criterion – MAC*); tamanha foi a utilização (e eventualmente até banalização) deste coeficiente que motivou a publicação de Allemang, 2003, sobre as consequências da sua própria publicação no 1º IMAC [Allemang e Brown, 1982].

Estimulados pela significativa profusão de métodos surgidos na década de 80, oriundos fundamentalmente da rápida popularização e crescente importância da análise modal e calibração de parâmetros nos setores da indústria e pesquisa acadêmica, Friswell e Mottershead, 1993, apresentam uma revisão de mais de 200 trabalhos nesta área, servindo de um bom ponto de partida para a escolha de uma metodologia adequada a uma determinada aplicação neste sentido. Ainda os mesmos autores [Friswell e Mottershead, 1995], reunindo vários dos métodos compreendidos no trabalho anterior, publicaram um livro que constituiu uma importante referência na aplicação de métodos direcionados especificamente a modelos de elementos finitos, cobrindo uma demanda crescente, à época, por uma abordagem detalhada deste tipo de aplicação, desde questões preliminares, como expansão de modos ou redução de

modelos, seleção ótima dos parâmetros a serem determinados junto a análise de sensibilidade, até várias metodologias diferentes, classificadas em métodos diretos e iterativos usando parâmetros modais, e métodos usando dados experimentais no domínio da frequência. Esta última categoria refere-se à técnicas cujo objetivo é o de minimizar alguma forma de função erro definida entre uma FRF medida e outra calculada com as matrizes a serem atualizadas.

Em Maia, Silva, *et al.*, 1997, encontra-se uma nova recompilação de métodos em análise modal e identificação de parâmetros. Idealizado inicialmente como uma atualização do livro de Ewins, 1984, esse livro apresenta todo um capítulo dedicado ao MEF e outro dedicado a alterações locais nas matrizes estruturais. Uma grande quantidade de novos métodos (à época) foi apresentada nesta obra. Alguns destes vieram a se popularizar em diversas áreas, como o método das exponenciais complexas poli-referenciado (*PRCE*), o método de realização do auto-sistema (*Eigensystem Realization Algorithm – ERA*) e a auto-regressão de média móvel (*Autoregressive Moving Average – ARMA*) no domínio do tempo, e o método das frações racionais polinomiais (*Rational Fraction Polynomial – RFP*) no domínio da frequência. Porém, especial atenção aí é dada à aplicação de métodos de otimização para resolver o problema diretamente a partir das FRFs, minimizando uma função erro. Dois algoritmos heurísticos são considerados nesse livro: algoritmo genético (AG) e recozimento simulado (*simulated annealing*), assim como a aplicação de redes neurais.

### **2.2.1 Métodos diretos no domínio do tempo**

Atualmente, a escolha por uma determinada técnica de identificação de parâmetros conta com uma vasta gama de possibilidades. Várias técnicas no domínio do tempo vêm sendo utilizadas já há décadas, especialmente nas áreas de controle e automação [Marwala, 2010]. Algumas das principais metodologias seguindo esta abordagem são expostas brevemente a seguir, conforme descrição apresentada em Maia, Silva, *et al.*, 1997:

- Método da exponencial complexa: é um dos métodos mais tradicionais (bastante utilizado até hoje em dia na indústria, em programas comerciais dedicados), e deriva diretamente da definição de função discreta de impulso unitário (transformada de Fourier inversa discreta). Necessita aplicação do

método de Prony para sua completa solução. Altamente sensível a ruído, mas de aplicação relativamente simples.

- Método de Ibrahim: também amplamente utilizado à época da popularização dos métodos de análise modal experimental, esta técnica foi apresentada pela primeira vez em 1970, sendo melhorada pelo próprio autor em 1970. Aplicável a medições de múltipla saída à excitação individual (*Single Input Multiple Output – SIMO*), porém, somente à resposta livre. Por não ser extraído a partir das FFTs inversas, não recebe tratamento estatístico (média), sendo geralmente mais influenciado, por conta disto, pelo ruído das medições.
- Média móvel autoregressiva (*ARMA*): esta é uma técnica amplamente usada em várias áreas da ciência e engenharia, aplicável a séries temporais. Desenvolve-se a partir da solução por transformada de Laplace de uma equação diferencial linear genérica a coeficientes constantes. Uma adaptação a múltiplas medições do sinal de resposta é conhecida como média móvel autoregressiva com variáveis exógenas (*ARMAX*). Particularmente útil quando aplicada a excitações não-determinísticas, como em situação de operação (e.g. carga de vento).
- Método de realização do auto-sistema (*ERA*): Aborda diretamente as equações do movimento utilizando o vetor de espaço-estado. O termo ‘realização’ refere-se ao objetivo final do método que é a reconstrução do sinal experimental com a menor ordem possível para a formulação de espaço-estado. Apresenta vantagens, quando há disponibilidade de várias respostas medidas, pois seleciona automaticamente as de melhor qualidade (baixo nível de ruído). Porém, sua aplicação é bastante complexa e exige vários estágios de cálculos.

Uma comparação da maioria dos métodos citados acima, específica para aplicação em estruturas flexíveis, pode ser encontrada em Lew, Juang e Longman, 1991.

Outra metodologia cujo alto potencial vêm sendo amplamente reconhecido é a identificação estocástica de subespaço (*Stochastic Subspace Identification – SSI*), principalmente para situações onde a vibração ambiente ou operacional é a única forma de excitação possível, como no caso de edificações ou maquinário industrial que opere em tempo integral. Segundo Brincker e Andersen, 2006, um grande avanço nesta

técnica foi apresentado no trabalho seminal de van Overschee e de Moor, 1996, cobrindo desde os aspectos geométricos de onde é derivada a metodologia, passando pela análise detalhada dos algoritmos e da teoria de identificação estocástica, além da investigação de métodos combinados (com técnicas determinísticas) e aplicações dos algoritmos propostos. Por outro lado, a tese de doutorado de Fadel Miguel, 2007, traz uma aplicação da técnica SSI à avaliação da integridade de estruturas treliçadas, e Fadel Miguel, Miguel, *et al.*, 2011, investiga a influência de fatores ambientais e de erros na matriz de rigidez sobre as propriedades modais de estruturas sujeitas a vibrações ambientais, utilizando o método SSI para detecção de dano.

### 2.2.2 Métodos diretos no domínio da frequência

Entre os métodos específicos para o domínio da frequência expostos também em Maia, Silva, *et al.*, 1997, destacam-se aqui os seguintes:

- Aproximação a 1 GDL: quando as ressonâncias são suficientemente espaçadas, para estruturas levemente amortecidas e fracamente acopladas, é possível tratar cada modo como um sistema massa-mola simples; este método geralmente serve apenas para se obter uma estimativa inicial dos parâmetros.
- Identificação Multi-GDL: semelhante à técnica acima, porém, aqui considera-se, para cada modo, uma constante a ser determinada, com o objetivo de simular a parcela dos modos faltantes. Geralmente é utilizada a partir dos parâmetros obtidos através da aplicação do método anterior, e apresenta significativa melhora em relação a este.
- Identificação circular no plano de Nyquist (circle fit): algebrizando as expressões para as FRFs é possível perceber que, quando se traça a curva da parte real vs. parte imaginária (plano de Nyquist, ou Argand), ao redor das ressonâncias desenham-se círculos perfeitos nos gráficos de mobilidade (FRF de velocidade), para amortecimento viscoso, e da receptância, para amortecimento histerético. Do equacionamento é possível verificar que o diâmetro de cada círculo tem o mesmo valor numérico que a constante modal de cada modo. As frequências naturais também podem ser extraídas por este método. Apresenta a vantagem de uma aplicação bastante simples e resultados com boa acurácia.

- Frações racionais polinomiais (RFP): a ideia básica deste método é transformar a expressão das FRFs da forma tradicional, em termos de um somatório sobre cada modo da razão da constante modal sobre um polinômio em função da frequência angular, para a forma de uma razão entre os somatórios de dois polinômios cujos coeficientes devem ser encontrados. Esta metodologia exige um grande número de etapas de cálculo, porém, geralmente consegue evitar modos espúrios. Vários métodos vêm sendo desenvolvidos a partir deste (como, por exemplo, o chamado PolyMAX), trazendo ainda mais estabilidade aos modos obtidos.

### 2.2.3 Métodos iterativos

Alternativamente ao uso de métodos diretos, em Friswell e Mottershead, 1995, apresentam-se métodos iterativos, onde é possível controlar a acurácia (respectiva somente aos erros de modelagem) do resultado realizando sucessivas iterações. A ideia básica aí é partir das condições de ortogonalidade e alterar os parâmetros desejados, sejam eles as componentes das matrizes ou quaisquer outras grandezas, como valores de rigidez de vinculação, ou alguma dimensão do modelo que seja difícil de estimar, ou ainda algum parâmetro material de alta variabilidade; eventualmente podem ser escolhidos mesmo através de uma análise de sensibilidade, conforme exposto nesta mesma obra. As principais técnicas apresentadas aí utilizam funções de penalidade ou mínima variância. Matrizes de peso podem ser definidas, se algum conhecimento prévio sobre o problema estiver disponível, e a comparação geralmente é realizada empregando-se o *MAC*.

### 2.2.4 Identificação direta comparando as FRFs calculadas e experimentais

Mais recentemente a identificação de parâmetros direta, ou seja, sem a identificação prévia dos parâmetros modais, passou a ser um tópico amplamente estudado, paralelamente à popularização dos algoritmos heurísticos, que ao final da década de 90 já representavam um papel de destaque em vários campos da engenharia. Antes disto, entretanto, Shye e Richardson, 1987, apresentaram, ainda no 5º IMAC, uma proposta de identificação direta das matrizes estruturais (massa, rigidez e

amortecimento), porém, utilizando a transformada de Laplace e, conseqüentemente, a função de transferência (lembrando que a FRF pode ser interpretada como um caso particular desta última quando se define  $s = j \cdot \omega$ , sendo 's' a 'frequência' de Laplace e 'ω' a frequência de Fourier). O exemplo de um modelo de 5 GDLs é apresentado neste trabalho, porém, aí utilizam-se FRFs sintetizadas computacionalmente para simular dados experimentais. Já Jeong, Okuma e Nagamatsu, 1989, apresentam não somente as condições que os parâmetros modais de uma estrutura devem satisfazer para que se possam extrair deles as matrizes estruturais, mas também uma proposta de ajuste de curva (não-linear, conseqüentemente) entre FRFs medidas e teóricas, apresentando 3 exemplos aplicados a modelos simplificados (de até 10 GDLs, com amortecimento viscoso generalizado) de peças automotivas com dados experimentais reais, chegando à conclusão que este procedimento reduz o tempo computacional, já que este não depende mais do número de modos procurados, como nos casos anteriores de ajuste dos parâmetros modais, mas sim do número de GDLs que compõe o modelo a ser ajustado.

Seguindo o direcionamento de Friswell e Mottershead, 1995, porém, agora abordando também as modernas técnicas computacionais de otimização, Marwala, 2010, apresenta diversas alternativas especificamente à minimização do erro entre FRFs medidas e calculadas, empregando desde técnicas clássicas como Newton-Rahpson, quasi-Newton (BFGS) e simplex de Nelder–Mead, passando pelos heurísticos já citados em Maia, Silva, *et al.*, 1997, e estendendo um pouco mais até enxame de partículas (*particle swarm*), estimadores bayesianos com método de Monte Carlo e também um híbrido de Nelder–Mead e enxame de partículas. Além disto, todo um capítulo é dedicado à detecção de dano utilizando FRFs experimentais neste texto, tendo em vista a grande popularização deste tipo de aplicação, além das metodologias mais populares citadas anteriormente, como técnicas no domínio do tempo e utilizando identificação prévia de parâmetros modais. Ainda segundo Maia, Silva, *et al.*, 1997, algumas vantagens de se utilizar as FRFs diretamente na identificação dos parâmetros estruturais (ao invés de primeiramente determinar as grandezas modais) são: a abundância de dados disponíveis para a comparação (geralmente na ordem de  $10^2$  a  $10^4$ ), o que conduz a um ajuste mais completo uma vez que utiliza toda a faixa de frequências de interesse, a possibilidade de evitar os erros agregados no procedimento de identificação modal, dado que esta vem a ser uma etapa intermediária, além de que altos níveis de

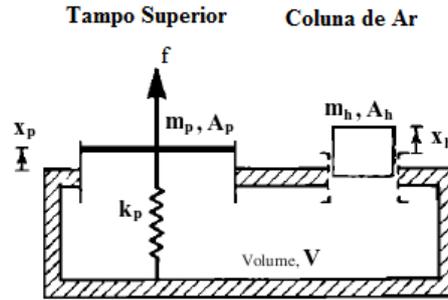
amortecimento passam a não ser um problema. Estas vantagens contribuíram para a adoção, no presente trabalho, por esta metodologia.

### 3 MODELO TEÓRICO A SER AJUSTADO

As dificuldades encontradas em trabalhos anteriores (e.g. Ina, 2007) para modelar por MEF todos os detalhes da caixa acústica, dadas as grandes variabilidades encontradas principalmente na rigidez da cola utilizada para fechar o tampo e nas propriedades materiais da madeira, levaram a um desestímulo quanto à adoção desta abordagem. Somado a isto, um modelo simplificado vem sendo desenvolvido desde o final da década de 70 e segue sendo melhorado ainda atualmente, conforme exposto anteriormente no capítulo dois, e mesmo trabalhos essencialmente numéricos (e.g. Elejabarrieta, Ezcurra e Santamaría, 2002) vem a corroborar com a importância dos GDL considerados por esse modelo na descrição do comportamento da caixa como um todo. Neste trabalho, a possibilidade de se aplicar uma metodologia de identificação baseada em técnicas de otimização robustas sobre um sistema de pequena dimensão, porém bastante representativo, definiram a escolha por este modelo. A seguir desenvolve-se brevemente o equacionamento que leva à definição das matrizes estruturais para este sistema simplificado, partindo-se das equações do movimento considerando apenas 2 GDL num primeiro momento. Ao final do capítulo é apresentado um breve detalhamento do modelo físico de 2 GDL utilizado para testar o procedimento, abrangendo as dimensões, materiais e um desenho esquemático.

#### 3.1 Modelo simplificado para o violão

O desenvolvimento de um sistema simplificado para o violão começou comparando-se a mecânica da caixa acústica a uma cavidade de reflexão, e, em termos de deslocamentos, considerando apenas a flexibilidade do tampo e a compressibilidade do ar, resultando em um sistema de 2 GDL, conforme apresentado em Christensen e Vistisen, 1980, e French, 2009. A Figura 3.1 abaixo representa esquematicamente este modelo físico, onde a nomenclatura utilizada segue o exposto em French, 2009: ‘A’ refere-se à área, ‘m’ à massa, ‘x’ ao deslocamento (ambos positivos para fora da caixa) e ‘f’ é a força externa aplicada ao tampo, já os índices ‘h’ e ‘p’ referem-se à boca, *hole*, e ao tampo, *plate*, respectivamente.



Fonte: adaptada de Christensen e Vistisen, 1980.

Figura 3.1 – Representação esquemática do modelo simplificado de 2 GDL

Equacionando o equilíbrio entre as forças inerciais, elásticas, acústicas e a excitação externa aplicada ao tampo (o amortecimento é desprezando, por enquanto), é possível escrever, para cada um dos GDL:

$$\begin{aligned} m_p \cdot \ddot{x}_p + k_p \cdot x_p - \Delta p \cdot A_p &= f \\ m_h \cdot \ddot{x}_h - \Delta p \cdot A_h &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $-\Delta p$  é a diferença de pressão causada pela variação (considerada adiabática) do volume da caixa, e o sinal negativo refere-se ao fato de que uma diferença de pressão positiva produz um deslocamento de ar no sentido contrário dos deslocamentos positivos em ambos os GDL (para uma abordagem mais detalhada sobre propagação de ondas sonoras veja-se, por exemplo, Hurley e Garrod, 1978).

Aplicando uma aproximação de diferenças finitas (justificável uma vez que se trata de pequenos deslocamentos) sobre a definição genérica da velocidade de propagação do som advinda da equação da onda acústica, é possível escrever:

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{dp}{d\rho} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta m}{V}} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho \cdot \Delta V}{V}} \\ \Delta p &= \frac{\rho \cdot \Delta V}{V} \cdot c^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde ' $\rho$ ' é a massa específica do ar, ' $c$ ' é a velocidade de propagação do som no ar e ' $V$ ' é o volume físico da caixa acústica.

Então, a pressão diferencial ' $\Delta p$ ' pode ser escrita em termos das propriedades do ar, da soma dos volumes deslocados pelos dois GDL, e pelo volume da caixa acústica:

$$\begin{aligned}\Delta V &= -(x_p \cdot A_p + x_h \cdot A_h) \\ \Delta p &= -\rho \cdot c^2 \cdot \frac{A_p \cdot x_p + A_h \cdot x_h}{V}\end{aligned}\quad (3.3)$$

onde o volume deslocado  $\Delta V$  é definido negativo em relação aos deslocamentos para compensar o sinal referente à pressão diferencial.

A expressão acima (3.3) pode ser condensada agrupando-se os termos constantes:

$$\Delta p = -\mu \cdot (A_p \cdot x_p + A_h \cdot x_h) \quad (3.4)$$

onde:

$$\mu = \frac{\rho \cdot c^2}{V} \quad (3.5)$$

A constante acima também pode ser vista como uma relação de proporcionalidade entre variações de volume e de pressão [French, 2009].

Substituindo-se então a expressão acima (3.4) nas equações do movimento (3.1), resulta:

$$\begin{aligned}m_p \cdot \ddot{x}_p + k_p \cdot x_p + \mu \cdot (A_p \cdot x_p + A_h \cdot x_h) \cdot A_p &= f \\ m_h \cdot \ddot{x}_h + \mu \cdot (A_p \cdot x_p + A_h \cdot x_h) \cdot A_h &= 0\end{aligned}\quad (3.6)$$

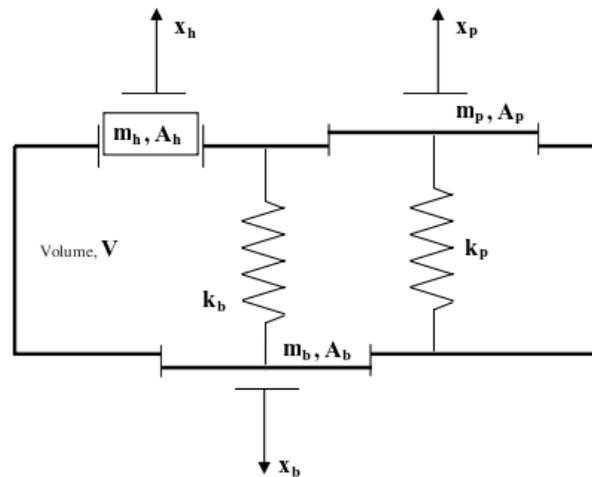
Ou, expandindo os produtos e coletando os termos resultantes sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_h \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_h \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_p + \mu \cdot A_p^2 & \mu \cdot A_h \cdot A_p \\ \mu \cdot A_h \cdot A_p & \mu \cdot A_h^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_p \\ x_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

A partir do equacionamento acima (3.7) é possível explicitar as matrizes de massa e rigidez, para o modelo apresentado, em termos das constantes e parâmetros a serem determinados:

$$\begin{aligned}[\mathbf{M}] &= \begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_h \end{bmatrix} \\ [\mathbf{K}] &= \begin{bmatrix} k_p + \mu \cdot A_p^2 & \mu \cdot A_h \cdot A_p \\ \mu \cdot A_h \cdot A_p & \mu \cdot A_h^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Um desenvolvimento análogo pode ser realizado para o caso em que se considere a flexibilidade do tampo posterior, ao invés de considerá-lo rígido como antes, gerando um modelo de 3 GDL, conforme desenho esquemático abaixo (Figura 3.2):



Fonte: adaptada de French, 2009.

Figura 3.2 – Representação esquemática do modelo simplificado de 3 GDL

A seguir (3.9 e 3.10) apresentam-se as matrizes de massa e rigidez obtidas para o modelo de 3 GDL representado na Figura 3.2, acima (o desenvolvimento completo encontra-se no APÊNDICE A), seguindo-se um procedimento análogo ao que foi aplicado ao caso de 2 GDL (o índice 'b' refere-se ao tampo posterior, *back plate*, e o deslocamento positivo nos 3 GDLs é considerado de dentro para fora da caixa):

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_h & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_p + \mu \cdot A_p^2 & \mu \cdot A_h \cdot A_p & \mu \cdot A_p \cdot A_b \\ \mu \cdot A_h \cdot A_p & \mu \cdot A_h^2 & \mu \cdot A_b \cdot A_h \\ \mu \cdot A_p \cdot A_b & \mu \cdot A_b \cdot A_h & k_b + \mu \cdot A_b^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Quanto ao amortecimento, a grande influência do deslocamento de ar sobre a resposta dinâmica da caixa acústica, comprovada em vários trabalhos anteriores (veja-se

o capítulo dois, Revisão Bibliográfica) levou à escolha do modelo de amortecimento viscoso, ao invés de histerético (estrutural), e os picos relativamente estreitos ao redor das frequências de ressonância, assim como um suficiente espaçamento observado entre estas nas FRFs, permitem a adoção do modelo de amortecimento proporcional, conforme recomendado por Ewins, 1984. Porém, a matriz de amortecimento só é realmente necessária para previsões da resposta transiente devida a uma determinada condição inicial. Daí, dado que os objetivos principais deste trabalho concentram-se na identificação dos parâmetros estruturais, utilizam-se aqui as razões de amortecimento modais como constantes a serem calibradas. Ainda assim, uma vez de posse destas, a determinação explícita da matriz de amortecimento pode ser facilmente realizada (no capítulo 5 aborda-se em maiores detalhes a definição de amortecimento proporcional, assim como o equacionamento que relaciona a matriz de amortecimento proporcional às razões de amortecimento modal).

Finalmente, para a avaliação numérica do modelo, a determinação das constantes expressas pela equação (3.5) também se faz necessária, assim como da área da abertura da caixa acústica (boca). Para as propriedades materiais do ar (massa específica e velocidade de propagação do som no ar) foram adotados os mesmos valores de French, 2009, até para fins de comparação:  $c = 338 \text{ m/s}$ ,  $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$  (utilizando a correção de Laplace para a formula de Newton da velocidade do som [Pierce, 1989] e os valores tabelados de Wylen, Borgnakke e Sonntag, 2003, chega-se a  $c = 346.11 \text{ m/s}$  e  $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$  para o ar como gás ideal a  $25^\circ \text{ C}$  e  $103,25 \text{ kPa}$ , mas estas pequenas diferenças são aceitáveis dada a variabilidade da composição do ar tomado como referência). Já para o volume físico da caixa foi gerada uma sequência de pontos ao longo da linha curva que define a forma das laterais, e com estes pontos foi traçada, numa ferramenta de desenho computacional (*Computer Aided Design - CAD*), uma interpolação cúbica (*spline*) sobre a qual se calculou posteriormente, ainda utilizando a mesma ferramenta *CAD*, a área do tampo e, por fim, o volume da caixa apenas multiplicando esta área pela altura das laterais, também medida utilizando-se o paquímetro. A seguir, na Figura 3.3, encontra-se o desenho utilizado para o cálculo do volume da caixa, juntamente às dimensões (em mm) medidas nos pontos utilizados para construir a interpolação cúbica.

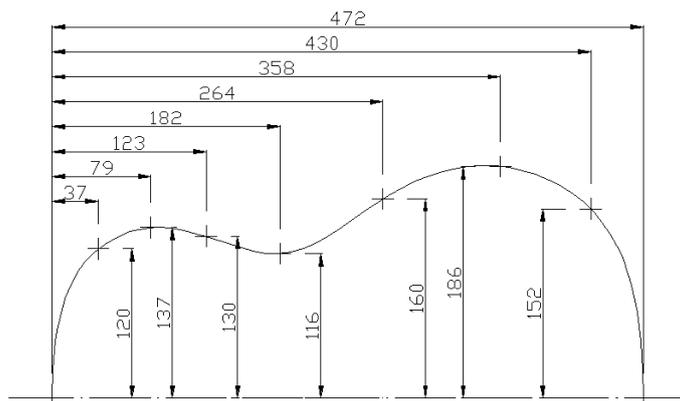


Figura 3.3 – Desenho em CAD do tampo com pontos utilizados para *spline*

O cálculo da área forneceu uma superfície total para o tampo de  $1340 \text{ cm}^2$ , e a altura do tampo foi medida em 85 mm, resultando em um volume de 11,4 L. Por fim, o diâmetro da boca pôde ser facilmente medido usando um paquímetro, chegando-se ao valor de 84 mm, e, portanto, área de  $55,4 \text{ cm}^2$ . A Tabela 3.1 abaixo lista as constantes usadas no cálculo das matrizes estruturais.

Tabela 3.1 – Constantes necessárias à avaliação numérica das matrizes

Constantes	Descrição	Valores
$A_h$	Área da boca	$55,4 \text{ cm}^2$
$V$	Volume da caixa	11,4 L
$c$	Velocidade do som no ar	338 m/s
$\rho$	Massa específica do ar	$1.23 \text{ kg/m}^3$

Dada a variabilidade no cálculo deste volume, sobretudo tendo em vista que dentro da caixa acústica são instalados vários reforços para os tampos, laterais e também para o braço, que acabam por diminuir seu volume físico em comparação ao valor obtido da forma descrita anteriormente, este parâmetro foi também considerado uma variável, ainda que com limites de busca bem estreitos. Então, utilizando os valores mostrados na Tabela 3.1 acima, e os do exemplo de French, 2009, na Tabela 3.2, a seguir, está exposto o vetor de parâmetros para este modelo do violão, juntamente às estimativas iniciais que posteriormente foram utilizadas nos algoritmos de minimização do erro (as estimativas iniciais para o amortecimento foram obtidas somente após as medições das FRFs, porquanto não serão apresentadas neste capítulo).

Tabela 3.2 – Vetor dos parâmetros de ajuste para o modelo do violão

Parâmetros a ajustar	Descrição	Estimativas iniciais
$m_h$	Massa da coluna de ar	248,7 g
$m_p$	Massa do tampo frontal	0,967 g
$m_b$	Massa do tampo posterior	60 g
$A_p$	Área do tampo frontal	748,5 cm <sup>2</sup>
$A_b$	Área do tampo posterior	556,4 cm <sup>2</sup>
$V$	Volume físico da caixa	11,4 L
$k_p$	Rigidez do tampo frontal	248,4 kN/m
$k_b$	Rigidez do tampo posterior	180,5 kN/m
$\zeta_1, \zeta_2, \text{ e } \zeta_3$	Razões de amortecimento associadas a cada um dos 3 modos	-

### 3.2 Protótipo de 2 GDL para teste do procedimento

A importância da construção e aplicação completa do procedimento sobre este protótipo reside no grau de incerteza associado aos parâmetros do modelo do violão, ou seja, por se tratar de grandezas equivalentes (massas, rigidezes e áreas), os limites de buscas são muito amplos, fazendo com que, mesmo que se obtenha um bom ajuste entre os dados experimentais e a predição analítica, seja difícil de avaliar se os parâmetros resultantes são coerentes com a ordem de grandeza das variáveis envolvidas ou se são absurdos do ponto de vista físico. Portanto, tendo em mãos uma estrutura cujo comportamento seja bem conhecido, i.e., da qual se possa extrair um modelo analítico cujos parâmetros possam ser calculados com baixo nível de incerteza, então este modelo pode ser utilizado para trazer confiabilidade sobre o procedimento de ajuste se os resultados obtidos através da calibração forem coerentes com o que seria esperado para esse sistema. Na Figura 3.4, a seguir, apresenta-se o modelo juntamente a um desenho contendo as suas dimensões (em mm).

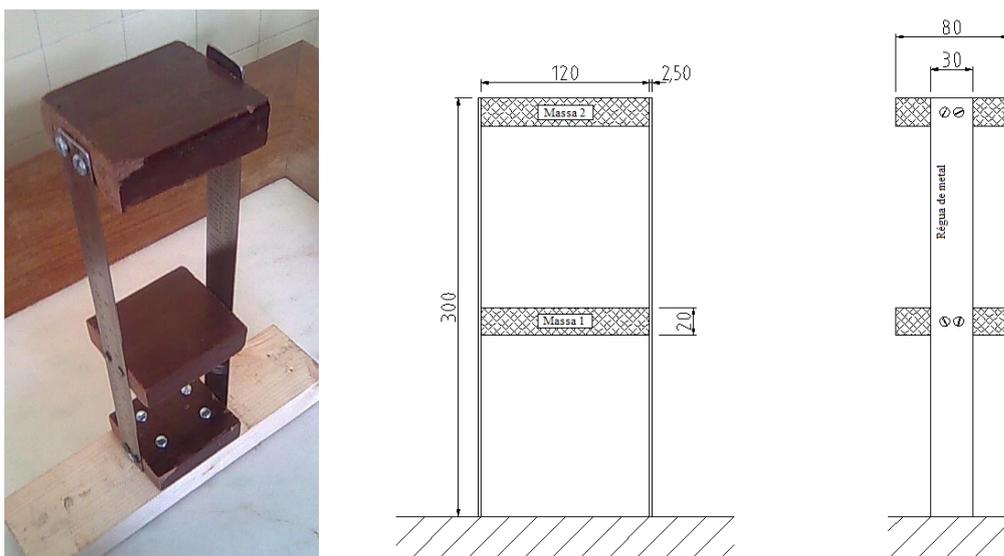


Figura 3.4 – Relatório fotográfico e dimensional do protótipo de 2 GDL

Como pode-se perceber pela Figura 3.4 acima, esta estrutura configura basicamente um sistema de 2 GDL, ou seja, os 2 modos referentes à interação entre as duas massas com as rigidezes impostas pela flexão das réguas de metal deve se sobressair em relação aos outros modos desta estrutura, e isto deve ser claramente perceptível nas FFTs dos sinais de aceleração e, portanto, também nas FRFs. A Figura 3.5, abaixo, traz este mesmo sistema, porém representado esquematicamente como um modelo massa-mola-amortecedor.

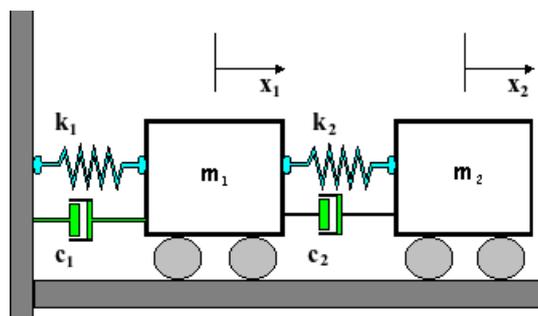


Figura 3.5 – Protótipo de 2 GDL como um sistema massa-mola-amortecedor

As matrizes estruturais para um modelo como este são expostas em (3.11), abaixo (para uma dedução completa destas matrizes veja-se, por exemplo, Rao, 1995).

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{K}] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Antes da montagem final do modelo, as massas foram medidas em uma balança com incerteza de 0,5 g chegando-se ao valor de 90 g para cada uma. Porém, com o intuito de transladar as duas primeiras ressonâncias para uma faixa de frequência de menor ruído no equipamento de medição, massas adicionais foram agregadas fixando-se porcas de metal a cada um dos blocos de madeira. Já quanto às rigidezes, para uma estimativa inicial realizou-se uma medição estática fixando-se rigidamente a estrutura a uma parede (na carcaça de metal do *shaker*), de forma a deixar as régua na posição horizontal, e então pesos conhecidos foram pendurados em cada GDL, sendo os respectivos deslocamentos medidos com relógio comparador com incerteza de 0,005 mm. Para cada GDL três pesos foram aplicados, chegando-se assim, por regressão linear aos dados de cada GDL, à matriz de flexibilidade e, conseqüentemente, à matriz de rigidez realizando-se a inversão matricial. A foto abaixo (Figura 3.6) retrata a montagem do relógio comparador pelo técnico do laboratório (Téc. Mec. Rodrigo Rodrigues de Barros):



Figura 3.6 – Medição das rigidezes estáticas

A Tabela 3.3, a seguir, traz o resumo do processo de regressão linear, onde ‘x’ refere-se aos deslocamentos medidos no índice referente ao primeiro GDL e o segundo índice refere-se ao GDL onde foram aplicadas as forças mostradas na segunda coluna, e

então a inclinação da reta fornece uma estimativa para os coeficientes de flexibilidade em mm/N.

Tabela 3.3 – Resultados do processo de regressão linear

Massas:	Pesos:	x <sub>22</sub>	x <sub>12</sub>	x <sub>21</sub>	x <sub>11</sub>
[g]	[N]	[mm]			
505,80	4,96	2,58	0,34	0,72	0,68
788,60	7,74	4,80	0,81	1,26	1,14
1071,40	10,51	5,85	1,28	1,75	1,67
Coef. Corr.:		97,93%	100,00%	99,96%	99,92%
Inclinação:		<b>0,5893</b>	<b>0,1694</b>	<b>0,1856</b>	<b>0,1784</b>

A Figura 3.7, abaixo, apresenta graficamente este mesmo processo de regressão linear.

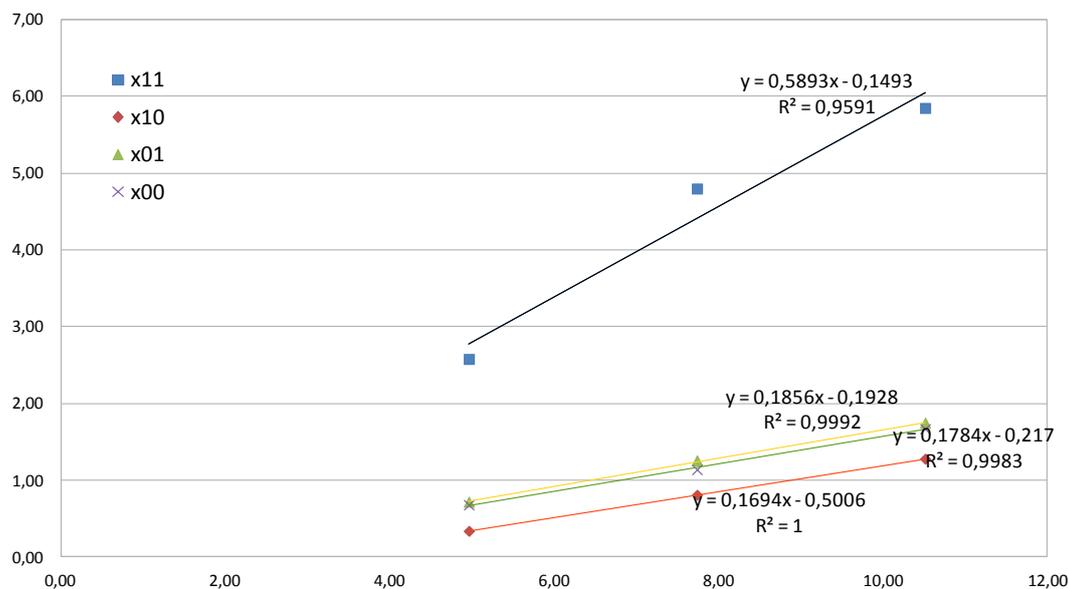


Figura 3.7 – Regressão linear para a obtenção dos coeficientes de flexibilidade

Dos resultados expostos na Tabela 3.3 e na Figura 3.7, acima, resulta a seguinte matriz de flexibilidade (em mm/N):

$$[\mathbf{K}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1784 & 0,1856 \\ 0,1694 & 0,5893 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Porém, o princípio da reciprocidade exige que tanto a matriz de rigidez quanto a de flexibilidade sejam simétricas, porquanto foi extraída uma média dos dois valores da

diagonal secundária, resultando na seguinte matriz de flexibilidade, com respectiva matriz de rigidez (em N/mm) mostrada logo abaixo (3.13):

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}]^{-1} &= \begin{bmatrix} 0,1784 & 0,1775 \\ 0,1775 & 0,5893 \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{K}] &= \begin{bmatrix} 8,003 & -2,411 \\ -2,411 & 2,423 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Comparando-se o resultado acima (3.13) com a matriz de rigidez apresentada em (3.11) é possível perceber que as componentes  $K_{21}$ ,  $K_{12}$  e  $K_{22}$  devem ter o mesmo valor absoluto, então novamente é aplicada a média sobre estes valores, chegando-se, finalmente, à seguinte matriz (em N/m), cujos valores foram utilizados como estimativas iniciais nos algoritmos de ajuste:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 8003 & -2415,3 \\ -2415,3 & 2415,3 \end{bmatrix}
 \tag{3.14}$$

Ainda a partir de (3.11) é possível desmembrar as componentes da matriz de rigidez nas constantes de mola equivalentes, de acordo com o sistema massa-mola apresentado na Figura 3.5, resultando em  $k_2 = 2415,3$  N/m e  $k_1 = 8003 - 2415,3 = 5587,7$  N/m. Então, a Tabela 3.4, abaixo, reúne os parâmetros do protótipo de teste, assim como suas estimativas iniciais, no caso da massa e rigidez.

Tabela 3.4 – Parâmetros do Protótipo de teste

Parâmetros a ajustar	Descrição	Estimativas iniciais
$k_1$	Rigidez entre engaste e GDL 1	5587,7 N/m
$k_2$	Rigidez entre GDL 1 e GDL 2	2415,3 N/m
$m_1$	Massa do GDL 1	0,214 kg
$m_2$	Massa do GDL 2	0,285 kg
$\zeta_1$	Razão de amortecimento do 1º modo	-
$\zeta_2$	Razão de amortecimento do 2º modo	-

No tópico 7.1 apresenta-se a análise dos resultados referentes ao protótipo de 2 GDL como parte da proposta de validação da metodologia.

## 4 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

As medidas experimentais foram tomadas em um violão de baixo custo, industrializado (ou seja, produzido em escala, não manufaturado por um *luthier*), todo em madeira (exceto partes móveis), com dimensões baseadas no modelo tradicional de Antonio de Torres, com reforço em forma de leque e espessura do tampo ao redor de 2,5 mm. Para aproximar as condições de operação, cordas de nylon de baixa tensão foram utilizadas e estiradas até atingirem a afinação padrão (Mi, Lá, Ré, Sol, Si, Mi – 82,41, 110, 146,83, 196, 246,94 e 329,63 Hz, respectivamente, considerando o Lá a duas oitavas acima da segunda corda solta em 440 Hz) – juntas, as cordas aplicam uma tração de aproximadamente 400 N, a uma distância de 14 mm, resultando em um momento aplicado de aproximadamente 5,6 Nm no tampo, transmitido pelo cavalete. O tipo de vinculação adotado foi (*quasi*) livre-livre, simulado pendurando-se o violão por linhas finas de nylon em uma viga rígida do laboratório.

### 4.1 Instrumentação

Para as medições do ensaio de vibração utilizou-se um acelerômetro Endevco Isotron 2250 (pesando aproximadamente quatro gramas), conectado ao condicionador de sinais Endevco 104/109, fixado com cera de abelha a várias posições ao redor da caixa acústica. O sistema foi excitado com martelo instrumentado Endevco Modal Hammer 2302 – 5, com sensibilidade nominal de 1.14 mV/N.

### 4.2 Aferição e Calibração do equipamento

Com o intuito de verificar a conformidade dos sensores utilizados para a aquisição e registro dos dados experimentais, assim como as sensibilidades utilizadas, ensaios para aferição/calibração do equipamento foram realizados. Para a calibração do acelerômetro, primeiramente realizou-se a comparação contra outro acelerômetro Analog Devices ADXL 203, com sensibilidade de 970 mV/g, e saturação de  $\pm 1,7$  V, chegando-se a uma sensibilidade de 1.027 mV/g. Posteriormente procedeu-se à verificação em um calibrador B&K 4291 de excitação fixo em 1 g, do qual foi possível verificar a concordância com a sensibilidade indicada. Por último, ambos os sensores

foram fixados a uma estrutura medianamente rígida (o baixo nível de saturação do acelerômetro de referência resultou em uma limitação sobre a flexibilidade da estrutura de aferição) sobre a qual foi aplicada excitação de impacto; as respostas foram então comparadas mostrando boa concordância e resposta plana na faixa de frequência de interesse (0 a 350 Hz). Na Figura 4.1, abaixo, apresenta-se o gráfico resultante da calibração do acelerômetro no qual o espectro da aceleração adquirida com o acelerômetro a ser calibrado (A) foi dividido pelo espectro do acelerômetro de referência (Ar).

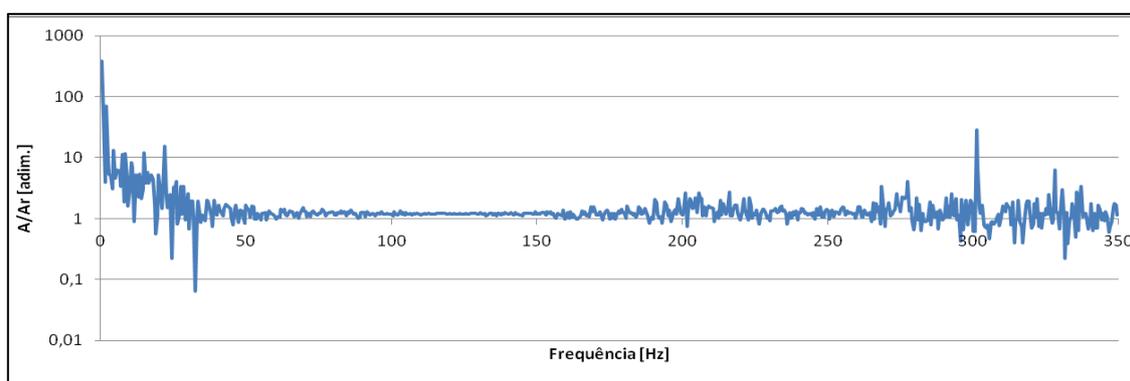


Figura 4.1 – Resultado da calibração do acelerômetro

Para a aferição do martelo instrumentado utilizou-se uma célula de carga Flexar ITX CDL-10 ANEXO A. O sinal de ambos foi registrado impactando-se o martelo sobre a célula, esta última fixa a uma bancada de testes rígida. Ambas as respostas apresentaram aceitável concordância e espectro plano na faixa de frequência de interesse em questão. A Figura 4.2 abaixo mostra a relação entre o espectro do martelo e da célula, onde ‘F’ refere-se ao sinal do martelo e ‘Fr’ ao sinal da célula.

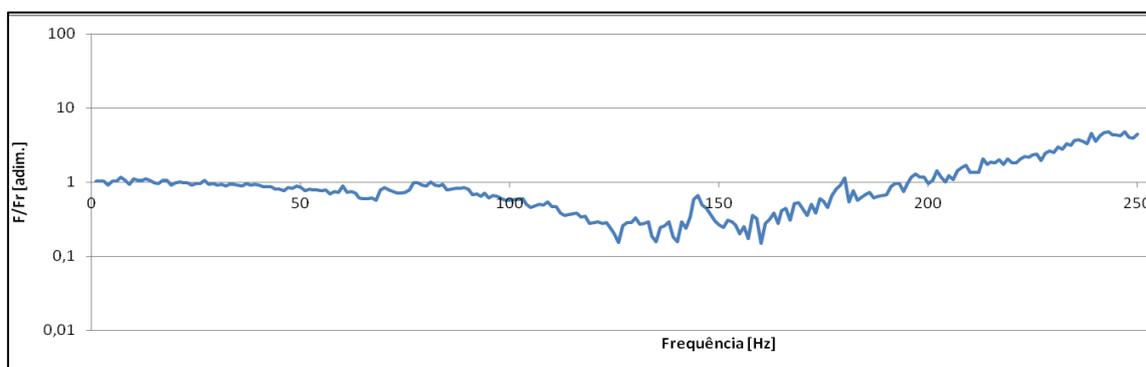


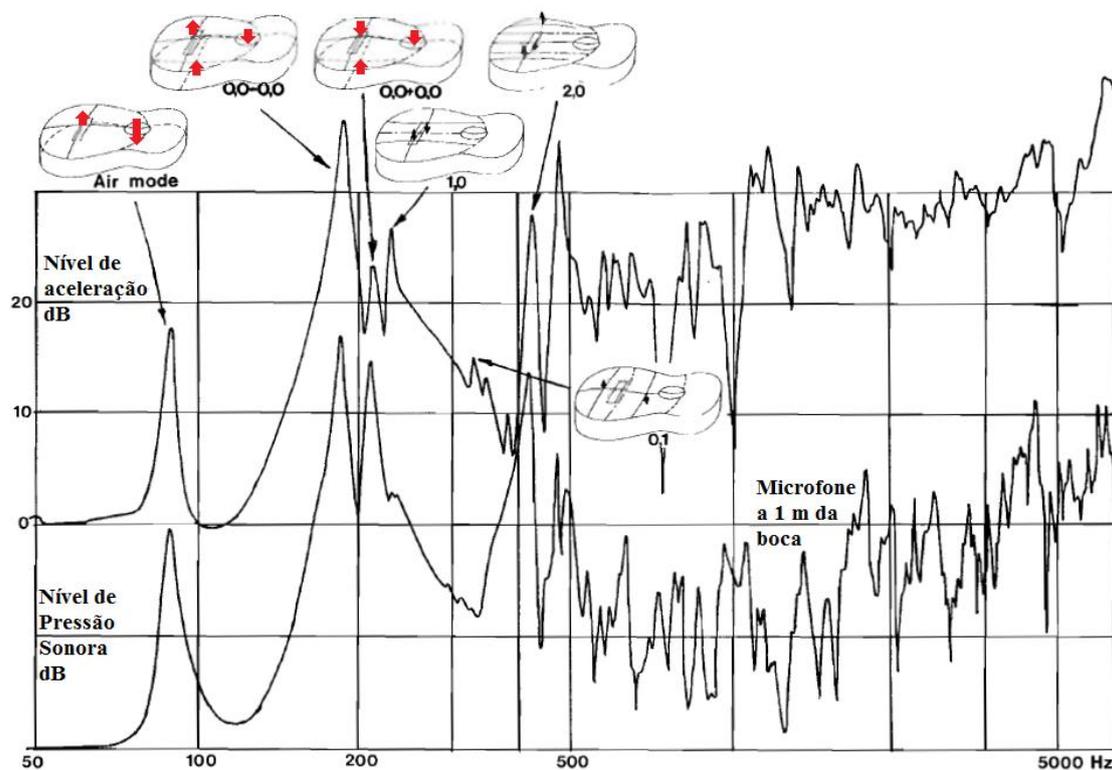
Figura 4.2 – Resultado da calibração do martelo instrumentado

### **4.3 Aquisição de dados**

Os dados foram registrados utilizando-se uma placa de aquisição de 12 bits e 8 canais (ou 4 diferenciais, dependendo da configuração) modelo USB-1208FS (ANEXO B), Measurement Computing. O sinal digital proveniente da placa foi tratado utilizando-se um diagrama de blocos em Agilent Vee.

#### **4.3.1 Posicionamento do acelerômetro**

De acordo com Ewins, 1984, para que se possa definir precisamente um sistema limitado a um número finito de GDLs como sendo um subsistema de uma estrutura contínua, é necessário que (pelo menos) toda uma linha (ou coluna) da matriz de FRFs seja traçada, e a simetria desta (de acordo com o princípio da reciprocidade de Maxwell para sistemas lineares) permite a escolha entre excitar vários pontos e medir a resposta em apenas um, ou o contrário; a mobilidade do martelo instrumentado acaba por determinar a escolha pela primeira destas duas opções, de forma que ao final do procedimento experimental seja definida toda uma linha da matriz de FRFs. Portanto, para o presente caso, onde se pretende ajustar um modelo de 3 GDL que represente a dinâmica da caixa acústica, faz-se necessária a escolha de 3 pontos cujo comportamento dinâmico caracterize adequadamente o sistema (para o qual pretende-se identificar os 3 primeiros modos), localizados preferencialmente nas regiões mais amplificadas pelos primeiros modos da caixa; nestas localizações deverão ser registrados os históricos de força do martelo instrumentado, sendo uma delas reservada também para o posicionamento do acelerômetro. De acordo com alguns trabalhos anteriores, por exemplo, Boullosa, 1981, e Caldersmith, 1986, a região ao redor do cavalete, no tampo, assim como a região ocupada pela projeção da sua área sobre o fundo, são boas candidatas a essa função. Ainda de acordo com este último, o modo associado à primeira frequência natural corresponde ao movimento de entrada e saída do ar através da boca impulsionado pelo afastamento e aproximação sucessivos dos tampos inferior e superior, enquanto os modos relacionados à segunda e terceira ressonâncias são caracterizados pela oscilação (flexão) em conjunto de ambos os tampos, porém em fase e antifase, respectivamente, com o fluxo de ar. A Figura 4.3, a seguir, representa os primeiros modos de vibração da caixa.



Fonte: adaptada de Caldersmith, 1986.

Figura 4.3 – FRFs do violão e modos mais frequentemente identificados

Então, para determinar exatamente quais localizações – contidas nessa região – melhor representariam o modelo teórico, um conjunto de 4 pontos sobre o tampo e 3 sobre o fundo foi distribuído sobre a caixa, semelhante ao descrito por Boullosa, 1981, gerando uma matriz  $7 \times 7$  relacionando excitações e respostas em cada um dos pontos, com 28 componentes independentes ( $n^2/2 + n/2$ , em função da simetria da matriz). Destas, 20 foram medidas, e para cada uma delas foram registradas as frequências de pico na faixa de 0 a 350 Hz, sendo identificadas também as mais pronunciadas entre estas. Na Figura 4.4, a seguir, são apresentados esquematicamente estes pontos. A análise das curvas daí resultantes permitiu identificar os pontos 1, 4 e 7 como sendo os mais representativos entre os elementos desse conjunto.

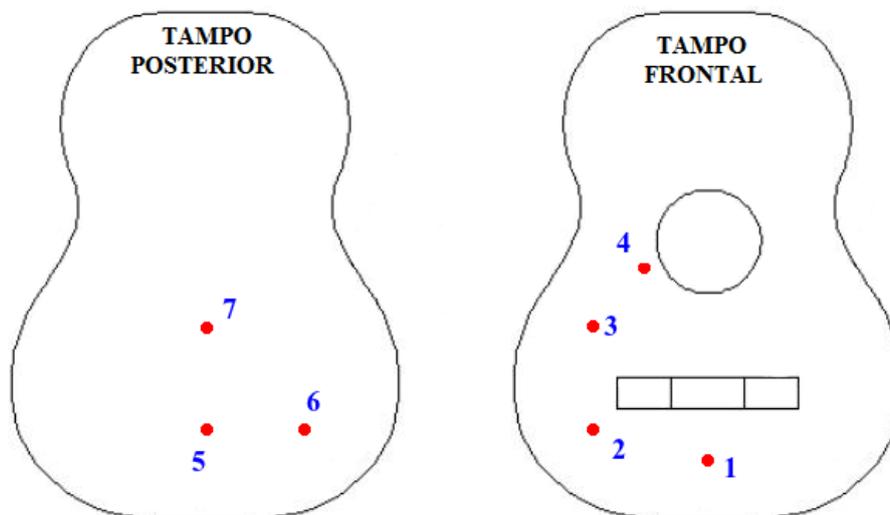


Figura 4.4 – Pontos utilizados para a seleção dos 3 GDL do modelo adotado

### 4.3.2 Configurações do sistema de aquisição

A partir da análise preliminar descrita anteriormente também foi possível definir a faixa de frequência de interesse entre 50 e 200 Hz. Ou seja, nesta região do espectro concentram-se as três primeiras frequências naturais representativas do modelo a ser ajustado. Esta estreita faixa permite o uso de uma taxa de amostragem relativamente baixa: 5 kHz resultou suficiente para evitar efeitos de *aliasing*. A partir desse conjunto de ensaios foi possível estabelecer, ainda, um período total de aquisição de 5 s (resultando em uma resolução espectral de 0,2 Hz) como suficiente para registrar toda a resposta da estrutura, desde antes do impacto até a total atenuação, dado o amortecimento do sistema, de maneira que não se fez necessária a imposição de janelamento (para evitar efeitos de *leakage*).

### 4.3.3 Cuidados na aplicação do martelo instrumentado

O uso de excitação de impacto depende fortemente da habilidade do operador para a obtenção de um sinal de boa qualidade (problemas de rebote). Então, visando a evitar resultados ruins decorrentes da aplicação inadequada do equipamento, um critério de aceitação/rejeição de 15 dB de máxima queda no espectro de força [BRÜEL & KJAER, 1998] foi adotado. Além disto, para se conseguir um espectro de força o mais

plano possível, dois tipos de pontas foram testados para o martelo, sendo ao final escolhida a ponta de borracha em razão do seu melhor desempenho na redução do efeito de duplo impacto, dada a significativa flexibilidade e baixo amortecimento da estrutura. Ainda assim, 10 registros (não reprovados pelo critério de aceitação) de cada inertância foram gravados para posterior cálculo da FRF resultante (num sentido médio/integral) através do espectro de potência.

Por fim, a foto abaixo (Figura 4.5) retrata a bancada e equipamentos utilizados na calibração dos instrumentos, mostrando os acelerômetros, o martelo, a célula, os condicionadores de sinal, a placa de aquisição e o programa em Agilent empregados ao longo de todo o trabalho para adquirir e realizar o primeiro tratamento dos sinais:

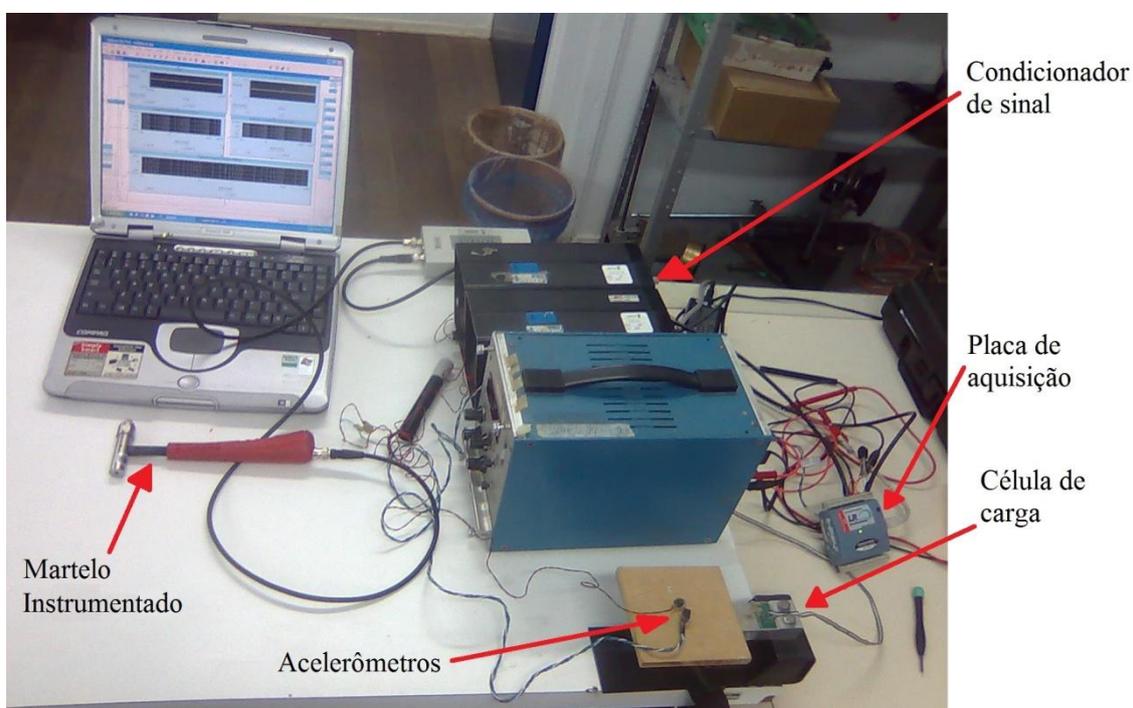


Figura 4.5 – Equipamento de medição utilizado

## 5 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Para o desenvolvimento preciso das equações que descrevem o modelo teórico, duas hipóteses básicas foram consideradas (mais premissas poderiam ser citadas aqui, como a linearidade, por exemplo, porém estas não serão enfatizadas):

- excitação e resposta podem ser tratadas como sinais harmônicos, ou seja, podem ser transformadas para o domínio da frequência;
- amortecimento proporcional, conforme tratado no capítulo 3.

Por outro lado, as curvas experimentais da matriz de FRFs foram traçadas conforme o procedimento descrito por Allemang, 1999, chamado de algoritmo  $H_v$ , para minimizar o ruído tanto no sinal de excitação como no sinal de resposta.

As equações básicas são normalmente descritas na literatura em termos da relação entre força e deslocamento, chamada de receptância ou rigidez dinâmica, em uma abordagem analítica/teórica. Entretanto, para a aplicação da teoria de uma forma mais conveniente aos dados experimentais – geralmente provenientes de acelerômetros, convertidos em saída analógica e posteriormente tratados usando-se a transformada discreta de Fourier (FFT) – uma abordagem alternativa, baseada em aceleração, se faz necessária.

### 5.1 Equacionamento básico analítico em força e deslocamento

O desenvolvimento de uma expressão para as FRFs a partir de um somatório envolvendo os modos de vibração, as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento, pode ser encontrado na maioria dos textos sobre vibrações ou, especificamente, análise modal; o desenvolvimento a seguir acompanha, vagamente, o exposto em Maia, Silva, *et al.*, 1997 e Ewins, 1984.

Parte-se das equações do movimento em forma matricial:

$$[\mathbf{M}] \cdot \ddot{\mathbf{x}} + [\mathbf{C}] \cdot \dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{f}$  são os vetores de deslocamento e força, respectivamente, e  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}]$  e  $[\mathbf{K}]$  são, nesta ordem, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez.

Considerando-se a solução harmônica:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{X} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \\
\dot{\mathbf{x}} &= j \cdot \omega \cdot \mathbf{X} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \\
\ddot{\mathbf{x}} &= -\omega^2 \cdot \mathbf{X} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

e, similarmente para o termo da excitação:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \tag{5.3}$$

onde  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\omega)$  e  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\omega)$  são, respectivamente, os vetores das amplitudes de força e deslocamento em função da frequência angular  $\omega$  [rad/s],  $t$  é o tempo e  $j = \sqrt{-1}$ .

Substituindo-se estas relações em (5.1) obtém-se as equações do movimento no domínio da frequência:

$$(-\omega^2 \cdot [\mathbf{M}] + j \cdot \omega \cdot [\mathbf{C}] + [\mathbf{K}]) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{5.4}$$

(vale observar que o termo entre parênteses costuma ser chamado de matriz de rigidez dinâmica, e que sua inversa é a própria definição de matriz das funções de resposta em frequência, também chamada, neste caso, de receptância, já que a resposta é o deslocamento).

Primeiramente desconsidera-se o amortecimento e busca-se a solução homogênea deste sistema de equações diferenciais, que corresponde ao sistema em vibração livre e que resulta no problema clássico de autovalores e autovetores generalizado abaixo (5.5), cuja solução fornece as frequências naturais e modos de vibração da estrutura.

$$(-\omega^2 \cdot [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{5.5}$$

Há várias abordagens possíveis para a derivação da equação característica a partir da expressão acima (5.5). Em Maia, Silva, *et al.*, 1997, por exemplo, argumenta-se que pré-multiplicando ambos os lados desta equação (5.5) pela inversa da matriz definida pela expressão entre parênteses resulta em  $\mathbf{X}=\mathbf{0}$ , caso esta matriz exista, fazendo com que a única solução possível seja a solução trivial. Portanto, para buscar as soluções não-triviais é preciso garantir a inexistência da inversa impondo-se a condição de determinante nulo sobre a matriz:

$$\det (-\omega^2 \cdot [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = 0 \tag{5.6}$$

Cada uma das soluções da equação polinomial resultante da expressão (5.6) acima (de mesma ordem que a dimensão das matrizes de massa e rigidez) é um autovalor da matriz, e a partir destes obtém-se cada uma das frequências naturais do sistema:

$$\lambda_r = \omega_r^2, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.7)$$

onde  $\lambda_r$  são os autovalores,  $\omega_r$  são as frequências naturais e  $N$  é a dimensão do sistema. Além disto, associado a cada autovalor define-se um autovetor complementar para a solução do problema:

$$(-\lambda_r \cdot [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) \cdot \boldsymbol{\psi}_r = \mathbf{0}, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.8)$$

onde  $\boldsymbol{\psi}_r$  representa cada um dos autovetores normalizados arbitrariamente.

Todos os autovetores juntos e dispostos lado a lado como colunas formam a chamada matriz modal, que tem a importância de realizar a transformação entre as coordenadas espaciais e modais (desacopladas):

$$[\boldsymbol{\Psi}] = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_N] \quad (5.9)$$

Utilizando-se a ortogonalidade da matriz modal (para uma demonstração detalhada desta propriedade veja-se, por exemplo, Rao, 1995) é possível extrair as chamadas massa e rigidez modais, ou seja, na forma diagonalizada:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\Psi}]^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\boldsymbol{\Psi}] &= \text{diag}(m_r), \quad r = 1, 2, \dots, N \\ [\boldsymbol{\Psi}]^T \cdot [\mathbf{K}] \cdot [\boldsymbol{\Psi}] &= \text{diag}(k_r), \quad r = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde  $\text{diag}(m_r)$  e  $\text{diag}(k_r)$  são matrizes diagonais contendo, respectivamente, as componentes de massa e rigidez modais (desacopladas).

Dentre as várias alternativas possíveis, resulta especialmente conveniente, tendo em vista o desenvolvimento a seguir, realizar a normalização dos autovetores, utilizando-se a expressão acima para a massa diagonalizada (5.10), da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\phi}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \cdot \boldsymbol{\psi}_r, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.11)$$

onde  $\Phi_r$  são os autovetores normalizados por massa modal (*mass-normalized eigenvectors*). A grande importância desta normalização é que daí resulta a seguinte forma canônica:

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = [I] \quad (5.12)$$

onde  $[\Phi]$  é a matriz dos autovetores normalizados pela massa, e  $[I]$  é a matriz identidade.

A matriz de amortecimento proporcional pode ser definida, na forma mais geral, da seguinte maneira:

$$[C] = \beta \cdot [M] + \gamma \cdot [K] \quad (5.13)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes a serem determinadas (de fato resulta mais prático trabalhar com a razão do amortecimento crítico ao invés de se utilizarem explicitamente estas constantes, porém cabe aqui a definição formal para que se possa analisar o impacto do amortecimento sobre a matriz modal).

Segundo Ewins, 1984, os autovalores do problema amortecido não são iguais aos do problema não-amortecido, levando à definição das chamadas frequências naturais amortecidas (lembrando que estas se aplicam somente a vibrações livres), porém os autovetores do problema amortecido são os mesmos. Isto se deve à definição do amortecimento proporcional como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, de onde resulta, dado que estas são diagonalizáveis pela matriz de autovetores, que a matriz de amortecimento conserva esta característica. O APÊNDICE B apresenta uma análise mais detalhada do efeito da consideração do amortecimento proporcional ao problema de autovalores e autovetores, e uma discussão aprofundada a respeito das questões relativas à álgebra linear envolvida nesta passagem pode ser encontrada, por exemplo, em Lay, 1999.

Então, retornando à diagonalização das matrizes de massa e rigidez exposta em (5.10), de acordo com a definição do amortecimento proporcional apresentado em (5.13), a matriz de amortecimento modal diagonalizada pode ser escrita como na expressão (5.14) a seguir:

$$[\Psi]^T \cdot [C] \cdot [\Psi] = \beta \cdot \text{diag}(m_r) + \gamma \cdot \text{diag}(k_r) \equiv \text{diag}(c_r), \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.14)$$

Por definição, a matriz das FRFs deve relacionar a resposta em qualquer GDL à excitação aplicada também a qualquer GDL, de forma que esta relação pode ser expressa, em notação indicial, da seguinte maneira:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{X_i}{F_j}, \text{ ou:}$$

$$X_i = H_{ij}(\omega) \cdot F_j \quad (5.15)$$

onde  $X_i = X_i(\omega)$  é o espectro da resposta em deslocamento no GDL 'i',  $F_j = F_j(\omega)$  é o espectro da excitação aplicada no GDL 'j', e na última expressão (5.15) é adotada a convenção do somatório (lembrando que o princípio da reciprocidade garante a simetria da matriz das FRFs, ou seja,  $H_{ij}(\omega) = H_{ji}(\omega) = \frac{X_i}{F_j} = \frac{X_j}{F_i}$ ).

A última das equações acima (5.15) pode ser apresentada também na forma matricial:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{H}(\omega)] \cdot \mathbf{F} \quad (5.16)$$

Então, retornando-se a (5.4) é possível escrever a inversa da matriz das funções de resposta em frequência, a partir da definição acima (5.16), da seguinte forma:

$$(-\omega^2 \cdot [\mathbf{M}] + j \cdot \omega \cdot [\mathbf{C}] + [\mathbf{K}]) = [\mathbf{H}(\omega)]^{-1} \quad (5.17)$$

Pós multiplicando pela matriz modal e pré multiplicando pela sua transposta é possível desacoplar o lado esquerdo da equação acima (5.17) através das formas diagonalizadas das matrizes estruturais, expostas em (5.10) e (5.14):

$$-\omega^2 \cdot \text{diag}(m_r) + j \cdot \omega \cdot \text{diag}(c_r) + \text{diag}(k_r) = [\mathbf{\Psi}]^T \cdot [\mathbf{H}(\omega)]^{-1} \cdot [\mathbf{\Psi}] \quad (5.18)$$

Assim, sob a forma diagonalizada, a equação acima (5.18) se torna facilmente invertível, o que é de fato a grande vantagem do desenvolvimento exposto até aqui. Então, algebrizando esta expressão (5.18), resulta:

$$\begin{aligned} \text{diag}(-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot c_r + k_r) &= [\mathbf{\Psi}]^T \cdot [\mathbf{H}(\omega)]^{-1} \cdot [\mathbf{\Psi}] \\ \text{diag}(-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot c_r + k_r) \cdot [\mathbf{\Psi}]^{-1} &= [\mathbf{\Psi}]^T \cdot [\mathbf{H}(\omega)]^{-1} \\ \text{diag}(-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot c_r + k_r) \cdot [\mathbf{\Psi}]^{-1} \cdot [\mathbf{H}(\omega)] &= [\mathbf{\Psi}]^T \\ [\mathbf{\Psi}]^{-1} \cdot [\mathbf{H}(\omega)] &= \text{diag}(-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot c_r + k_r)^{-1} \cdot [\mathbf{\Psi}]^T \end{aligned}$$

$$[\mathbf{H}(\omega)] = [\Psi] \cdot \text{diag} \left( \frac{1}{-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot c_r + k_r} \right) \cdot [\Psi]^T, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.19)$$

A forma final para a receptância é geralmente expressa em termos de uma determinada componente da matriz, como na forma indicial exposta em (5.15). Para tanto, primeiramente o produto matricial da equação acima (5.19) é expandido para posteriormente ser coletado sob a forma de um somatório sobre o índice modal 'r', onde é possível perceber claramente a superposição dos modos presente na resposta dinâmica (uma demonstração detalhada desta passagem encontra-se no APÊNDICE C):

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_{ir} \cdot \Psi_{jr}}{-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot c_r + k_r} \quad (5.20)$$

O denominador de cada uma das parcelas do somatório acima (5.20) constitui, *per se*, um sistema de 1 GDL, uma vez que o sistema foi desacoplado, de maneira que a cada um destes sistemas se podem aplicar as relações advindas da solução homogênea (vibração livre) para uma única equação do movimento, expostas a seguir (estas relações, assim como a solução completa da equação do movimento para 1 GDL podem ser encontradas em textos introdutórios de mecânica vibratória, tais como Rao, 1995, e Groehs, 2001 de onde foram tiradas as expressões abaixo):

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.21)$$

$$\frac{c_r}{m_r} = 2 \cdot \omega_r \cdot \zeta_r, \quad r = 1, 2, \dots, N$$

$$\omega_{ra} = \omega_r \cdot \sqrt{1 - \zeta_r^2}, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.22)$$

onde  $\zeta_r$  é a razão do amortecimento crítico do modo 'r',  $\omega_{ra}$  é a chamada frequência natural amortecida do modo 'r' (a definição das FRFs utilizada aqui se aplica a vibrações forçadas, de maneira que as frequências amortecidas não são essencialmente necessárias, porém, esta definição é apresentada visando à completude do desenvolvimento), e  $\omega_r$  são as frequências naturais de também cada modo.

Então, a partir das expressões acima (5.21) é possível definir a receptância em termos das frequências naturais e das razões de amortecimento, através da substituição

de  $k_r$  e  $c_r$  presentes na forma indicial das FRFs (5.20). Para tanto, as duas primeiras relações acima (5.21) são utilizadas:

$$k_r = m_r \cdot \omega_r^2, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.23)$$

$$c_r = 2 \cdot m_r \cdot \omega_r \cdot \zeta_r, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.24)$$

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_{ir} \cdot \Psi_{jr}}{-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot 2 \cdot m_r \cdot \omega_r \cdot \zeta_r + m_r \cdot \omega_r^2} \quad (5.25)$$

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_{ir} \cdot \Psi_{jr}}{m_r \cdot (-\omega^2 + j \cdot \omega \cdot 2 \cdot \omega_r \cdot \zeta_r + \omega_r^2)} \quad (5.26)$$

Finalmente, utilizando a definição de autovetor normalizado por massa modal (5.11) é possível reescrever a expressão acima (5.26) de maneira que esta dependa apenas das frequências naturais, das razões de amortecimento e das componentes da matriz modal:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\frac{\Psi_{ir}}{\sqrt{m_r}} \cdot \frac{\Psi_{jr}}{\sqrt{m_r}}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + j \cdot (2 \cdot \omega \cdot \omega_r \cdot \zeta_r)} \quad (5.27)$$

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ir} \cdot \phi_{jr}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + j \cdot (2 \cdot \omega \cdot \omega_r \cdot \zeta_r)} \quad (5.28)$$

## 5.2 Adaptação do equacionamento aos dados experimentais

A equação acima (5.28) compõe a base da maioria dos métodos de análise modal e identificação de parâmetros no domínio da frequência. Porém, determinados ajustes se fazem necessários para que esta possa ser aplicada especificamente a cada metodologia. Para o presente caso, a primeira alteração diz respeito ao sinal de resposta captado em aceleração, e não em deslocamento, levando à necessidade de uma definição da inertância a partir da definição da receptância apresentada em (5.28). Então, similarmente à definição do deslocamento na primeira das equações em (5.2), a hipótese de resposta harmônica também pode ser estendida à aceleração:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot e^{j\omega t} \quad (5.29)$$

onde  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\omega)$  é a transformada de Fourier da aceleração.

Comparando-se a equação acima (5.29) com a expressão para a aceleração derivada a partir do deslocamento em (5.2), é possível escrever a seguinte relação entre os espectros destas duas grandezas:

$$\mathbf{A} = -\omega^2 \cdot \mathbf{X} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{A}}{-\omega^2} \quad (5.31)$$

Ou, na forma indicial:

$$X_i = \frac{A_i}{-\omega^2} \quad (5.32)$$

Substituindo a expressão acima (5.32) na definição indicial da receptância apresentada anteriormente (5.15), resulta:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{A_i}{-\omega^2 \cdot F_j} \quad (5.33)$$

Agora definindo uma expressão análoga para a inertância, ou seja, para as FRFs em aceleração e força:

$$I_{ij}(\omega) \equiv \frac{A_i}{F_j} \quad (5.34)$$

onde  $I_{ij}(\omega)$  é a inertância entre os GDL 'i' e 'j' (é importante notar que o princípio da reciprocidade garante igualmente a simetria da matriz de inertâncias).

Então, comparando as equações acima (5.34) e (5.33), resulta a definição expandida da inertância através da receptância:

$$I_{ij}(\omega) = -\omega^2 \cdot H_{ij}(\omega) = -\omega^2 \cdot \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ir} \cdot \phi_{jr}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + j \cdot (2 \cdot \omega \cdot \omega_r \cdot \zeta_r)} \quad (5.35)$$

Na forma apresentada acima (5.35), a expressão para as FRFs depende de quatro parâmetros para cada modo: a frequência natural, a razão de amortecimento, e duas componentes da matriz modal, uma referente ao GDL de excitação e outra ao de resposta. Com o objetivo de reduzir as dependências desta expressão (e também o número de variáveis a identificar, consequentemente) a três parâmetros por modo,

especialmente para o caso de identificação dos parâmetros modais, as duas componentes da matriz modal podem ser condensadas em uma só:

$$R_{ijr} \equiv \phi_{ir} \cdot \phi_{jr}, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.36)$$

onde  $R_{ijr}$  é a chamada constante modal, e quantifica a participação de cada modo em uma determinada FRF.

Então, a forma final da inertância utilizada neste procedimento para a identificação de parâmetros é obtida através da substituição da equação acima (5.36) em (5.35):

$$I_{ij}(\omega) = -\omega^2 \cdot \sum_{r=1}^N \frac{R_{ijr}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + j \cdot (2 \cdot \omega \cdot \omega_r \cdot \zeta_r)} \quad (5.37)$$

Dado que as FRFs medidas compõe toda uma linha da matriz das inertâncias, conforme exposto na seção 4.3.1 – Posicionamento do acelerômetro, uma vez escolhido o ponto da estrutura no qual será medida a resposta em aceleração, juntamente ao seu GDL correspondente no modelo analítico, então automaticamente o índice ‘i’ da expressão acima (5.37) passa a estar definido como uma constante. Portanto, para que se possam recuperar os valores das componentes da matriz modal após a realização do procedimento de identificação, primeiramente utiliza-se a componente diagonal, ou seja, aquela em que o GDL de excitação é o mesmo de resposta ( $i = j$ ). Então, retornando-se a (5.36) é possível calcular as componentes da linha da matriz modal escolhida para a medição do sinal de resposta, cada coluna representando um modo:

$$R_{iir} = \phi_{ir} \cdot \phi_{ir} = R_{iir} = \phi_{ir}^2 \quad (5.38)$$

$$\phi_{ir} = \sqrt{R_{iir}}, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (5.39)$$

Uma vez definidas as componentes da FRF diagonal, as outras componentes são determinadas a partir destas:

$$\phi_{jr} = \frac{R_{ijr}}{\phi_{ir}}, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N, j \neq i \quad (5.40)$$

### 5.3 Tratamento numérico dos dados experimentais

De posse dos históricos de aceleração e força em arquivos digitais em formato ASCII, o posterior tratamento para a determinação das inertâncias experimentais foi realizado em um programa de álgebra computacional numérica (Scilab).

O sinal proveniente de excitação de impacto pode ser considerado como não-periódico (transiente). Ainda assim, por ser determinístico, a rigor permite o cálculo direto da transformada de Fourier, ou, mais precisamente, da transformada discreta através do algoritmo computacional chamado de FFT, já que é calculada a partir de um histórico digital [Ewins, 1984]. O mesmo pode se dizer para os dados capturados pelo acelerômetro, desde que ambos satisfaçam a condição de Dirichlet, a qual impõe a necessidade de limite tendendo a zero para a função quando o tempo tende a infinito positivo e negativo, para que a transformada integral, que é definida nestes limites, atinja a convergência a um valor finito. Sendo assim, a rigor a inertância experimental ‘ $I_{ij}^e$ ’ poderia ser determinada a partir das FFTs dos sinais de aceleração e força de acordo com a definição da inertância apresentada em 5.34:

$$I_{ij}^e(f_k) = \frac{A_i^e}{F_j^e} \quad (5.41)$$

onde  $A_i^e = A_i^e(f_k)$  e  $F_j^e = F_j^e(f_k)$  são, respectivamente, as FFTs da aceleração medida no GDL ‘i’ e da força no GDL ‘j’, e  $f_k$  é a k-ésima frequência medida [Hz], e pode ser definida através da resolução em frequência,  $\Delta f$ , e do índice ‘k’, que determina a posição no vetor de frequências das FFTs:

$$f_k = (k - 1) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Delta f, \quad k = 1, 2, \dots \left( \frac{N_t}{2} + 1 \right) \quad (5.42)$$

onde  $N_t$  é o número total de pontos medidos nos históricos de aceleração e força.

A definição acima (5.41) pode ser facilmente aplicada ao conjunto de dados obtidos, porém, em vista das incertezas introduzidas pelo uso do martelo, uma diminuição do ruído das FRFs é esperada se estas forem calculadas a partir da média dos espectros de potência, da mesma forma com que se tratam os dados quando se utiliza excitação aleatória com excitador eletromecânico (*shaker*). Para tanto, começa-se apresentando a definição das funções de correlação diretas e cruzadas (‘R’), cuja

importância (do ponto de vista teórico/analítico) é transformar a função original no domínio do tempo em uma nova função que respeite a condição de Dirichlet:

$$\begin{aligned}
 R_{ff}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot f(t + \tau) dt \\
 R_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt \\
 R_{fx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot x(t + \tau) dt \\
 R_{xf}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot f(t + \tau) dt
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

onde  $R_{ff}(\tau)$  e  $R_{xx}(\tau)$  são as funções de correlação direta de força e tempo, respectivamente,  $R_{fx}(\tau)$  e  $R_{xf}(\tau)$  são as funções de correlação cruzada entre força e tempo e vice-versa, e  $x(t)$  e  $f(t)$  são funções no domínio do tempo para força deslocamento e força, respectivamente.

Então, sobre as funções de correlação é possível aplicar a transformada de Fourier, que passa a ser chamada de espectro de potência direto/cruzado ('S'), analogamente:

$$\begin{aligned}
 S_{ff}(\omega) &= \mathcal{F}\{R_{ff}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ff}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} dt \\
 S_{xx}(\omega) &= \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} dt \\
 S_{fx}(\omega) &= \mathcal{F}\{R_{fx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{fx}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} dt \\
 S_{xf}(\omega) &= \mathcal{F}\{R_{xf}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xf}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} dt
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

onde  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  representa a transformada de Fourier (analítica, neste contexto).

A partir daí, tendo em vista a definição da transformada discreta de Fourier:

$$X(k) = \frac{1}{N_t} \cdot \sum_{l=1}^{N_t} x(l-1) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot (l-1) / N_t} \tag{5.45}$$

é possível provar as seguintes definições para os espectros de potência (a demonstração completa destas relações, assim como do algoritmo FFT de Cooley-Tukey, pode ser encontrada em Maia, Silva, *et al.*, 1997), calculadas a partir das transformadas discretas (na prática, a partir das FFTs):

$$\begin{aligned}
 S_{ff}(f_k) &= F_j^e \cdot F_j^{e*} \\
 S_{xx}(f_k) &= X_i^e \cdot X_i^{e*} \\
 S_{fx}(f_k) &= F_j^e \cdot X_i^{e*} \\
 S_{xf}(f_k) &= X_i^e \cdot F_j^{e*}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

onde  $(\cdot)^*$  representa o complexo conjugado de uma FFT,  $X_i^e = X_i^e(f_k)$  é a FFT do histórico de deslocamento. É importante ainda notar que cada uma destas expressões deveria, a rigor, ser multiplicada por um fator de escala adequado proveniente do desenvolvimento a partir das definições (5.43), (5.44) e (5.45), porém a abordagem deste ponto para adiante segue o exposto em Allemang, 1999, onde estes fatores são suprimidos em razão do posterior cancelamento que ocorre naturalmente nos cálculos das FRFs, já que estas sim são o objetivo final deste desenvolvimento.

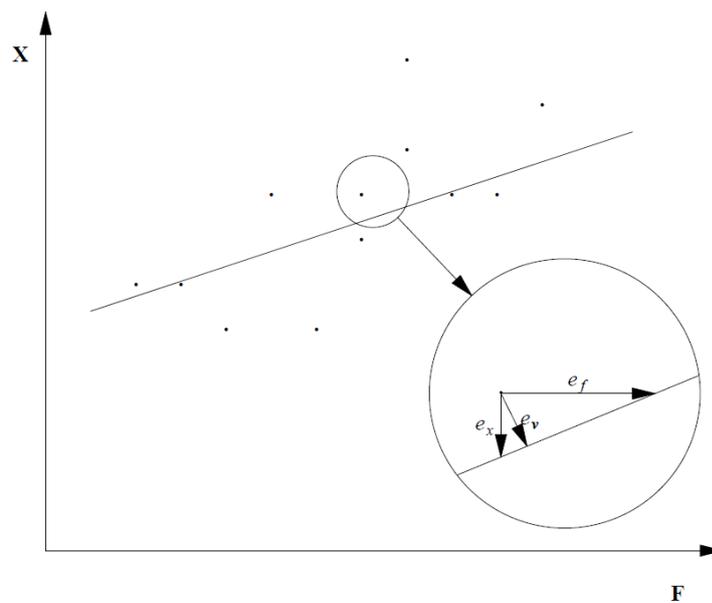
As equações acima para os espectros de potência (5.46) já poderiam, a priori, ser aplicadas aos espectros disponíveis, ou seja, em aceleração, bastando, para tanto, a aplicação da relação (5.33), de forma análoga ao caso analítico. Porém, por conta da forma não-determinística com que foram tratados os dados experimentais, se faz necessário ainda, antes que se possam aplicar as essas expressões, manipular estatisticamente as medições, de maneira que o resultado final seja a média de várias amostras:

$$\begin{aligned}
 S_{ff}(f_k) &= \sum_{n=1}^{N_m} F_{jn}^e \cdot F_{jn}^{e*} \\
 S_{xx}(f_k) &= \sum_{n=1}^{N_m} \frac{A_{in}^e \cdot A_{in}^{e*}}{(-\omega^2)^2} \\
 S_{fx}(f_k) &= \sum_{n=1}^{N_m} \frac{F_{jn}^e \cdot A_{in}^{e*}}{-\omega^2}
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$S_{xf}(f_k) = \sum_{n=1}^{N_m} \frac{A_{in}^e \cdot F_{jn}^{e*}}{-\omega^2}$$

onde ‘n’ contabiliza as várias medições realizadas e  $N_m$  é o número total destas medições (relembrando que os somatórios deveriam ser divididos por  $N_m$  para caracterizar rigorosamente uma média aritmética, porém, este fator de escala também foi omitido pelo mesmo motivo apresentado anteriormente).

A partir daí a receptância pode ser calculada através das expressões acima (5.47), porém de posse dos quatro espectros de potência é possível calcular a receptância de mais de uma maneira. Então surgem três métodos alternativos, comparando-se a distribuição dos dados experimentais com o comportamento linear esperado para a estrutura, de acordo com o gráfico da Figura 5.1 abaixo:



Fonte: Allemang, 1999.

Figura 5.1 – Representação gráfica dos algoritmos  $H_1$  ( $e_x$ ),  $H_2$  ( $e_f$ ) e  $H_v$  ( $e_v$ )

Segundo Allemang, 1999, a minimização de cada um dos tipos de ruído mostrados na Figura 5.1 acima:  $e_x$ ,  $e_f$  ou  $e_v$ , dá origem, respectivamente, a cada uma das técnicas de definição da receptância experimental:  $H_1$ , que minimiza o ruído no sinal de excitação,  $H_2$ , no sinal de resposta e  $H_v$  em ambos. Pelas incertezas observadas

nas leituras, tanto do acelerômetro quanto do martelo instrumentado, esta última é adotada no posterior desenvolvimento, e é calculada conforme o seguinte procedimento:

- primeiramente monta-se uma matriz auxiliar, para cada ponto em frequência:

$$\mathbf{G}(f_k) = \begin{bmatrix} \sum F_j^e \cdot F_j^{e*} & \sum F_j^e \cdot A_i^{e*} \\ \sum A_i^e \cdot F_j^{e*} & \sum A_i^e \cdot A_i^{e*} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

onde cada somatório contabiliza as  $N_m$  medições; lembrando que os limites do somatório foram omitidos para uma melhor visualização, assim como os fatores  $-\omega^2$ , que foram removidos para que a resposta final resulte diretamente em inertância, tendo em vista a relação entre inertância e receptância (5.35);

- então a inertância experimental é definida através do autovetor associado ao menor autovalor da matriz acima (5.48), normalizado como a seguir (5.49):

$$\mathbf{V}_{\min} = \begin{bmatrix} I_{ij}^e(f_k) \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

De posse dos espectros de potência também é possível calcular a chamada função de coerência, cuja importância é fornecer uma medida quantitativa da correlação entre os sinais de excitação e resposta, através da seguinte expressão:

$$\gamma^2(f_k) = \frac{\sum(A \cdot F^*) \cdot \sum(F \cdot A^*)}{\sum(A \cdot A^*) \cdot \sum(F \cdot F^*)} \quad (5.50)$$

Da forma como é apresentada acima (5.50), a função de coerência pode assumir valores entre 0 e 1, significando baixos níveis de coerência (correlação entre excitação e resposta) nas frequências onde a função chega próxima a zero (este comportamento é esperado somente nas antirressonâncias), e, pelo contrário, alta coerência para valores próximos da unidade. Assim, a ocorrência de baixas coerências na faixa de frequências de interesse, especialmente ao redor das ressonâncias, indica um registro experimental de baixa qualidade.

## 6 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

Antes de iniciar quaisquer procedimentos de identificação, é importante pensar quais são os parâmetros que devem ser determinados. Em sistemas mais detalhados, contendo centenas, milhares, ou, em muitos casos até muitos mais GDLs, como os provenientes de métodos numéricos, várias escolhas são possíveis, dependendo da complexidade do modelo. Neste caso, uma análise de sensibilidade é necessária. Para o presente estudo, dado que o sistema adotado é bastante reduzido (3 GDLs), a escolha de quais parâmetros devem ser determinados pelo procedimento e de quais podem ser encontrados na literatura com suficiente acurácia já foi realizada em trabalhos anteriores, apresentando resultados satisfatórios, e, portanto, foi adotada igualmente aqui.

Já a metodologia de identificação escolhida foi a comparação direta entre as FRFs obtidas experimentalmente e analiticamente, e levou em consideração a praticidade na aplicação dos procedimentos de cálculo e a disponibilidade de códigos de otimização para programas de computação numérica (aqui foram utilizados o Matlab e o Scilab). As FRFs disponíveis (inertâncias) cobrem a região das três primeiras ressonâncias, e preenchem toda uma linha da matriz, de maneira que milhares de pontos podem ser utilizados para a comparação com os resultados analíticos, e não apenas algumas poucas frequências naturais ou autovetores de mesma dimensão que o número de GDLs medidos na estrutura (neste caso, três, mas de qualquer maneira este número geralmente não passa de algumas dezenas). Então, a ideia básica para a aplicação deste procedimento é:

- adquirir um conjunto de dados experimentais de boa qualidade, que sejam representativos do comportamento acústico da caixa – FRFs experimentais;
- calcular as FRFs teóricas com os parâmetros a serem ajustados, partindo-se de um conjunto de estimativas iniciais para estes valores;
- realizar o ajuste de curvas entre os dados medidos e calculados variando-se os valores dos parâmetros que definem o modelo teórico de maneira a minimizar uma medida de erro.

## 6.1 Estimativa das grandezas modais e do amortecimento

As frequências naturais foram desconsideradas da lista de parâmetros a serem determinados e passaram a ser tratadas como constantes, dada a boa acurácia com que puderam ser detectadas nas medições das FRFs, muito superior ao que se consegue para as outras grandezas, confirmando o exposto em Friswell e Mottershead, 1995, sobre a escolha do vetor de parâmetros. A rigor, a cada iteração do algoritmo de otimização as matrizes de massa rigidez (e portanto amortecimento também, dada a forma proporcional) são redefinidas, e então a matriz modal e as frequências naturais, necessárias para o cálculo da receptância, também. Porém, a função inertância utilizada aqui foi definida de forma a rejeitar, a cada iteração, os valores de frequência natural calculados, substituindo-os pelos valores pré-definidos experimentalmente.

Como consequência da escolha pela abordagem direta para o procedimento de identificação, a determinação explícita dos modos e a montagem da matriz modal deixaram de ter maior importância. Além do mais, uma vez que o modelo possui apenas 3 GDL, e dado o conhecimento prévio dos trabalhos apresentados no capítulo dois, os modos esperados já são conhecidos a priori, ao menos qualitativamente.

Uma estimativa prévia do amortecimento foi realizada aplicando-se o método da semi-largura de banda, conforme descrito em Groehs, 2001. A partir destas estimativas iniciais, as razões de amortecimento foram calibradas pelo procedimento de ajuste.

## 6.2 Identificação no plano de Nyquist (*circle fit*)

Tendo disponível toda uma linha da matriz de FRFs, é possível realizar este procedimento, que basicamente também é um ajuste de curva e, portanto, pode ser resolvido com alguns pontos do círculo modal; recomenda-se não menos que 6 acima e 6 abaixo do ponto mais próximo da ressonância [Ewins, 1984]. Então, escolhidos os pontos, a parte real compõe um vetor de pontos em  $X$ , enquanto outro vetor,  $Y$ , contém a informação da parte imaginária. Na sequência, com a equação do círculo e um vetor de estimativas iniciais para a posição do centro e diâmetro, pode-se determinar os valores para o melhor ajuste, utilizando também um algoritmo de otimização; pela simplicidade de operação foi utilizado aqui AG.

Esta operação deve ser repetida para cada modo, para cada FRF da linha medida, resultando, para o sistema de 3 GDL, em 9 componentes, de onde podem ser determinadas todas as componentes da matriz modal, de utilizando-se as equações (5.38) e (5.39).

### 6.3 Função objetivo (erro)

A função erro (objetivo) foi definida de maneira a contabilizar, de alguma forma, a diferença entre as magnitudes da FRF teórica, calculada a partir das estimativas iniciais, e dos resultados experimentais. A primeira possibilidade citada por vários autores [e.g. Friswell e Mottershead, 1995] seria o quadrado da norma do erro, ou seja, a soma dos quadrados de cada componente do vetor formado pela subtração de uma determinada FRF medida e da sua respectiva FRF teórica calculada nas mesmas frequências, pois assim garante-se uma grandeza escalar sempre crescente com cada diferença pontual. Porém, com o intuito de amenizar as variações bruscas presentes geralmente ao redor das ressonâncias, o logaritmo das magnitudes das FRFs é adotado ao invés das próprias magnitudes. De fato, tentativas foram realizadas diretamente com o uso do quadrado da norma (sem o uso dos logaritmos), e daí foi possível verificar a dificuldade do algoritmo de otimização em obter boas soluções para o problema de ajuste. Então, a forma resultante deste estudo é apresentada abaixo (6.1), onde o erro (para cada componente da matriz de FRFs) é descrito como função somente do vetor de parâmetros a ajustar, dado que o vetor das linhas espectrais (frequências resultantes da aplicação das FFTs sobre os sinais adquiridos) é definido *a priori* a partir da análise experimental:

$$\text{Err}_{ij}(\mathbf{\Pi}) = \sum_{k=1}^{N_t} [\ln(|I^e_{ij}(f_k)|) - \ln(|I_{ij}(\mathbf{\Pi}, 2 \cdot \pi \cdot f_k)|)]^2 \quad (6.1)$$

onde  $\text{Err}_{ij}(\mathbf{\Pi})$  é a função objetivo a ser minimizada associada a uma determinada componente da matriz de FRFs,  $\ln(*)$  é o logaritmo natural,  $\mathbf{\Pi}$  é o vetor de parâmetros a ajustar e  $|*|$  representa a magnitude de uma grandeza complexa (as demais grandezas seguem as definições apresentadas no Capítulo 5). É importante mencionar ainda que, de acordo com as propriedades dos logaritmos, a expressão acima (6.1) pode ser

alterada para que o argumento do somatório contenha o logaritmo da razão entre as magnitudes das FRFs, de onde é possível afirmar que o resultado da função objetivo é adimensional.

O fato de considerar apenas as magnitudes das FRFs resulta em que o ajuste de curvas é realizado ignorando-se a informação relativa ao ângulo de fase. A princípio isto poderia gerar uma dificuldade para o algoritmo de busca, porém, por outro lado, este conjunto de dados pode ser utilizado para a validação do ajuste, ou seja, já que este conjunto é independente dos dados utilizados no procedimento de calibração, caso as curvas teóricas e experimentais da fase apresentem também boa concordância, então isto indica uma boa confiabilidade para previsões dinâmicas com diferentes condições iniciais e de contorno.

#### **6.4 Algoritmos de otimização**

Otimização é um ramo de grande e crescente importância dentro não somente da engenharia, mas também de várias áreas da economia e mais recentemente nos mais diversos campos da ciência. De fato, otimização e engenharia são dois conceitos que sempre andaram juntos, e de certa forma se confundem se for levado em consideração que a própria engenharia surgiu da necessidade de se economizar tempo e recursos, e de melhorar o desempenho do que já existia e, portanto, de se encontrar máximos e mínimos. “Mesmo quando planejamos nossos finais de semana, queremos maximizar o lazer com o menor custo”, numa tradução livre de Yang, 2010, “ainda que não estejamos aptos a encontrar tais soluções”. Esta última frase, se levada ao campo do desenvolvimento matemático dos procedimentos de busca, retrata uma situação ambígua em torno da escolha dos algoritmos: se por um lado as técnicas clássicas encontram garantidamente a melhor solução, por outro lado a convergência destes métodos é alcançada normalmente apenas para problemas de dimensão muito reduzida, enquanto as técnicas meta-heurísticas, pelo contrário, não garantem a melhor solução, mas em compensação se aplicam a virtualmente qualquer problema de busca de pontos extremos, e têm se provado uma ferramenta valiosa neste sentido.

A seguir pretende-se apresentar brevemente, tendo como base principal o material exposto em Yang, 2010, e Marwala, 2010, os métodos de otimização utilizados neste trabalho para a minimização da função objetivo (erro) apresentada no tópico

anterior, com uma maior ênfase aos heurísticos, pois foi possível observar ao longo do trabalho que estes forneceram melhores resultados tanto para o protótipo de teste quanto para a caixa do violão propriamente.

#### 6.4.1 Mínimos quadrados não-linear – MQ

A primeira técnica que se apresenta para problemas de ajuste de curva, amplamente utilizada para modelos lineares, é o ajuste (chamado de regressão, para o caso linear) por mínimos quadrados, até porque esta técnica provém da própria definição do teorema da melhor aproximação [Lay, 1999], onde coeficientes são ajustados para que uma reta passe o mais próximo possível de um determinado conjunto de dados, neste caso, uma regressão linear. Para problemas não-lineares, o gradiente não pode ser calculado a priori, de maneira que é necessário um procedimento iterativo. Segundo Chong e Zak, 2008, uma possibilidade é a aplicação do método de Newton, de forma que a cada iteração a matriz jacobiana da função objetivo deve ser calculada, e o resultado final é atingido quando a norma desta matriz é pequena o suficiente. Além disto, para que se possa saber o sentido da inclinação, a derivada segunda também deve ser calculada, ou seja, a matriz hessiana. Porém, o cálculo das derivadas pode se tornar extremamente dispendioso, e eventualmente até impossível. A partir daí surgiram uma série de métodos para contornar este problema, sendo os principais deles a modificação de Levenberg-Marquardt e a estimativa por diferenças finitas de BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), que é o mais amplamente utilizado entre os chamados quasi-Newton. Ainda segundo Chong e Zak, 2008, no algoritmo de Levenberg-Marquardt um múltiplo da matriz identidade é adicionado à hessiana de forma a garantir que a matriz resultante desta operação seja positiva definida e que a direção de busca seja sempre decrescente.

De uma forma geral, os dois algoritmos citados acima são conhecidos como métodos baseados no cálculo do gradiente (*gradient-based methods*) e, embora historicamente tenham sido amplamente utilizados, especialmente em programas comerciais de identificação de parâmetros modais, apresentam dificuldades para funções com variações abruptas, como é o caso quando se parte para a identificação direta das matrizes estruturais a partir das FRFs, dados os picos extremamente agudos nas ressonâncias. Além disto, o método BFGS não aceita restrições [Yang, 2010], o que

representa uma dificuldade a mais, tendo em vista que na verdade o processo pretendido aqui é uma atualização/calibração, ou seja, estimativas iniciais são conhecidas para os parâmetros, e resultados acima ou abaixo de determinadas ordens de grandeza não tem utilidade e, portanto, devem ser evitados. Já o algoritmo de Levenberg-Marquardt aceita a imposição de limites de busca, mas tende a estagnar nestes valores.

#### 6.4.2 Simplex de Nelder-Mead – NM

Ainda segundo Yang, 2010, um simplex em um espaço n-dimensional é a generalização de um triângulo no plano, e é então identificado como um n-simplex. Daí, um 3-simplex, por exemplo, é um tetraedro contido no espaço tridimensional, e assim por diante. O simplex de Nelder-Mead, também chamado de simplex descendente (*downhill simplex*), já que é uma ferramenta de minimização (para maximização basta inverter o sinal da função objetivo), busca o ‘melhor’ ponto, ou seja, aquele no qual a função objetivo apresenta o menor valor, através do cálculo do valor da função nos vértices, e posterior reconfiguração do simplex utilizando alguma das quatro transformações permitidas: reflexão a volume constante, expansão/contração ao longo da linha de reflexão, ou redução proporcional. Resumidamente, os seguintes passos são aplicados:

- calcula a função em  $n + 1$  pontos;
- escolhe o ‘pior’ deles e o exclui;
- calcula o centroide do n-polígono resultante;
- compara o valor da função objetivo calculada no centroide com o valor do ‘melhor’ ponto;
- decide qual transformação é mais indicada, de acordo com a comparação do item anterior, e a aplica sobre o ‘pior’ ponto.

O procedimento exposto acima (que é totalmente distinto do que se aplica a problemas lineares [Yang, 2010]), não apresenta nenhuma dificuldade no manejo dos limites de busca, e, além disto, não requer o cálculo do gradiente na sua formulação, o que, como já foi mencionado, representa uma significativa vantagem do ponto de vista da propagação dos erros numéricos e do esforço computacional. Entretanto, por se tratar de uma varredura determinística, é mais suscetível a mínimos locais, e acaba também

encontrando dificuldades em espaços de busca muito grandes, pois avança muito lentamente em comparação à dimensão do problema.

Por fim é importante ressaltar, a respeito das técnicas clássicas, que embora atualmente tenham sido muitas vezes substituídas por meta-heurísticos, continuam sendo ferramentas extremamente úteis, e ainda são abordadas em detalhes mesmo nos textos de otimização mais modernos, por exemplo, em Marwala, 2010, onde todo um capítulo é dedicado à calibração de modelos em elementos finitos utilizando Nelder-Mead e BFGS, chegando-se a erros médios de 2,1% e 2,6%, respectivamente, para as primeiras 5 frequências naturais de uma estrutura simples de teste (pórtico plano em forma de 'H', assimétrico, composto por elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli).

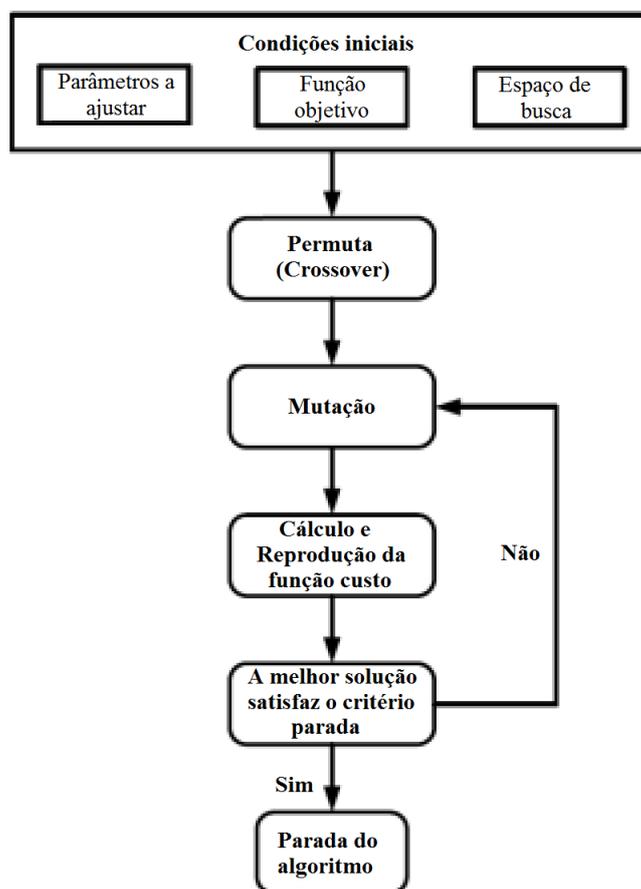
### 6.4.3 Algoritmo Genético – AG

Algoritmo genético é talvez a mais amplamente utilizada entre as técnicas baseadas em evolução populacional (*population-based techniques*), e ainda assim um dos mais importantes algoritmos heurísticos atualmente em várias áreas da engenharia e ciências. A grande revolução apresentada pelos AG (e pelos meta-heurísticos, em geral) é de que vários processos na natureza construíram, ao longo de muito tempo, via tentativa-e-erro, procedimentos otimizados para uma determinada tarefa. Segundo Yang, 2010, esta técnica foi proposta ainda na década de 60, inspirando-se nos avanços alcançados pela engenharia genética na descrição dos modelos evolutivos desde Darwin, e um dos pontos chave do sucesso deste tipo de técnica é que levam em consideração efeitos aleatórios, que por sua vez estão invariavelmente presentes nos processos da natureza, na forma de coeficientes (heurísticos) probabilísticos. Em grande parte por conta deste fato é que tal classe de algoritmos está menos sujeita à estagnação em mínimos locais.

A ideia básica na construção deste método é a codificação de determinados pontos do espaço de busca, escolhidos aleatoriamente, em 'genes' de dimensão igual à do vetor de variáveis do problema. A partir daí, a cada 'geração' (iteração), alguns membros da população sofrem transformações ou combinações, de forma a gerar novos genes:

- mutação: um elemento do gene é alterado aleatoriamente, de acordo com um coeficiente probabilístico (normalmente utilizam-se aí valores pequenos);
- cruzamento genético: parte da informação de um gene é trocada com outro gene, de acordo com outro coeficiente probabilístico, permitindo a troca de informações muito distantes no espaço de busca, o que seria inviável para algoritmos baseados em trajetória (para este coeficiente costumam-se adotar valores próximos de 1).

Uma vez realizadas as transformações genéticas, a cada geração devem ser escolhidos, segundo algum critério, os genes mais aptos a constituírem a geração seguinte, ou seja, aqueles nos quais a função objetivo apresenta os valores mais baixos. A Figura 6.1 abaixo apresenta um breve fluxograma do AG tradicional.



Fonte: Marwala, 2010.

Figura 6.1 – Breve fluxograma do algoritmo genético tradicional

Por fim, é importante ressaltar que, segundo Yang, 2010, o desempenho do AG é fortemente sensível aos valores adotados para as probabilidades de mutação e *crossover*,

assim como ao método de seleção escolhido, de maneira que este pode ser um sério inconveniente à aplicação desta técnica, já que muitas vezes nenhum conhecimento prévio é disponível para estes parâmetros. O que se faz nesta situação é adotar valores já consagrados para vários casos, porém, nada garante que estes serão os mesmos para cada problema específico.

#### 6.4.4 Estratégias Evolutivas Diferenciais – EED

Esta é mais uma técnica baseada em evolução populacional surgida na década de noventa, porém, não alcançou o nível de popularidade do algoritmo genético, ao qual, aliás, é bastante parecida (por isto não será abordada aqui em detalhes). Storn e Price, 1997, apresentaram este algoritmo do qual foram os idealizadores, fornecendo também um pseudocódigo em formato tipo linguagem C. Segundo os autores, esta técnica foi concebida para preencher os quatro requisitos que, numa tradução livre, “os usuários de técnicas de minimização práticas geralmente exigem”:

- capacidade de lidar com funções objetivo multimodais, não lineares e não diferenciáveis;
- possibilidade de paralelização;
- facilidade de uso: um algoritmo de otimização deve ter poucos parâmetros de controle, e ainda assim estes devem ser robustos e de fácil escolha;
- boa convergência: o algoritmo deve conseguir desviar de mínimos locais em tentativas consecutivas independentes.

Da forma como apresentado no trabalho citado, este algoritmo pode ser aplicado de oito formas diferentes, dependendo do tipo de escolha da geração seguinte. Além disto, os parâmetros de controle (heurísticos) requisitados são três:

- ‘F’: age sobre a mutação; esta etapa é realizada escolhendo-se aleatoriamente três elementos do vetor tentativa, onde o primeiro é somado à diferença (daí o nome do algoritmo) dos outros dois multiplicada por ‘F’ (este deve ser positivo);
- ‘CR’: a probabilidade de cruzamento genético (*crossover*), semelhante a outras técnicas populacionais;
- ‘NP’: o número de membros da população (a cada iteração).

Ainda segundo os autores, o algoritmo foi testado contra várias técnicas disponíveis (à ocasião), como recozimento simulado (*simulated annealing*) e um híbrido deste com Nelder-Mead, e apresentou a convergência mais rápida para a função de De Jong. Porém, para problemas restringidos pode não apresentar o melhor desempenho, uma vez que os limites de busca não podem ser definidos diretamente (neste caso foram adicionados termos de penalização à função de erro).

#### 6.4.5 Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization – PSO*)

Inspirada no voo dos pássaros [Marwala, 2010], esta técnica foi estudada detalhadamente por Salmon, 2010-2012. Segundo o autor, o desenvolvimento deste algoritmo parte de uma ideia simples: um conjunto de ‘partículas’ é ‘atirado’ aleatoriamente dentro do espaço de busca, sendo cada ponto uma solução possível para o problema de minimização global. Então, a cada iteração verifica-se qual ponto fornece o menor valor para a função objetivo; a partícula que ocupa este ponto é chamada de ‘líder’, e cada partícula ‘memoriza’ o seu melhor resultado obtido até a iteração atual, chamado de ‘melhor (resultado) individual’ (*personal best*). Porém, cada partícula guarda as informações não somente de posição, a cada iteração, mas também de ‘velocidade’, ou seja, o quanto uma determinada partícula percorreu o espaço de busca entre uma iteração e outra, e estas informações são compartilhadas entre partículas ‘vizinhas’ (esta capacidade é chamada de ‘socialismo’). O fato de considerar a ‘velocidade’ permite ao algoritmo varrer regiões muito afastadas do espaço de busca, entre uma de uma iteração e a seguinte, diminuindo a chance de estagnação em mínimos locais. Ainda segundo Salmon, 2010-2012, a posição e a velocidade de cada partícula são atualizadas, a cada iteração, conforme a seguinte regra:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{t+1} &= \mathbf{v}_t + R_1 \cdot C_1 \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{x}_t) + R_2 \cdot C_2 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{x}_t) \\ \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_{t+1} \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde  $\mathbf{x}_t$  é o vetor das variáveis,  $\mathbf{v}_t$  é o vetor das ‘velocidades’, ‘ $C_1$ ’ e ‘ $C_2$ ’ são parâmetros heurísticos de controle chamados de ‘fatores de conhecimento’, ‘ $R_1$ ’ e ‘ $R_2$ ’ são números aleatórios, ‘ $\mathbf{g}$ ’ é a localização do líder, e ‘ $\mathbf{p}$ ’ é o ‘melhor individual’ da partícula em questão.

Ainda em Salmon, 2010-2012, encontra-se uma variante deste método, chamada de ‘peso inercial’ (*inertia weight model*), na qual um determinado peso, dado

inicialmente às partículas na forma de mais um coeficiente heurístico, é diminuído gradativamente para retardar o movimento destas ao redor do líder, com o objetivo de estabelecer um balanço entre a manutenção de bons resultados e a busca de outros melhores, como a seguir (6.3):

$$\mathbf{v}_{t+1} = w_t \cdot \mathbf{v}_t + R_1 \cdot C_1 \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{x}_t) + R_2 \cdot C_2 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{x}_t) \quad (6.3)$$

onde ' $w_t$ ' é o peso inercial da iteração ' $t$ '.

Além desta modificação já consagrada, duas melhorias desenvolvidas pelo próprio autor também são apresentadas em Salmon, 2010-2012: uma estabelece um critério de parada baseado em um raio mínimo de busca, (porquanto é chamada de *radius improvement*) e outra, chamada de BSG-Starcraft, foi inspirada em um filme de ficção científica (BattleStar Galactica) e em um jogo de computador (Starcraft), e foi idealizada com o objetivo de, partindo-se já do modelo de peso inercial, agregar mais duas possibilidades ao algoritmo:

- a partícula líder passa a ser um 'carregador', de onde são espalhadas mais algumas partículas, chamadas de 'raptos', aleatoriamente;
- se algum raptor encontra uma posição melhor que o ponto de mínimo global atual, então todo o enxame se move para que a posição deste raptor passe a ser a posição do líder, conservando as posições relativas entre todas as partículas (como um movimento de corpo rígido).

Resumindo o exposto acima, abaixo são apresentados os parâmetros heurísticos requisitados pelo modelo:

- ' $C_1$ ' e ' $C_2$ ': fatores de conhecimento individual e global, respectivamente;
- ' $w_{\min}$ ' e ' $w_{\max}$ ': pesos inerciais final e inicial, respectivamente;
- ' $N$ ': número de partículas;
- ' $v_{\min}$ ' e ' $v_{\max}$ ': velocidades mínima e máxima permitidas, respectivamente.

Da maneira como foi implementado, o BSG-Starcraft permite ainda determinar a priori a velocidade para cada variável, e o número de raptos, porém, caso estes valores não sejam fornecidos pelo usuário, o programa utiliza valores padrão.

Por fim, segundo Marwala, 2010, o enxame de partículas conduziu a melhores resultados que o AG na calibração das matrizes de elementos finitos da estrutura de

teste já citada no último parágrafo do tópico 6.4.2, sendo que este, por sua vez, já obteve um desempenho superior a Nelder-Mead e BGFS.

## 6.5 Procedimento de cálculo

De posse das FRFs experimentais, de uma função que calcule as FRFs (teóricas) a partir das matrizes estruturais, dos parâmetros iniciais, de uma função objetivo (erro), e tendo escolhido um algoritmo de otimização (minimização), então finalmente pode-se executar o ajuste de curva chamando-se a função/sub-rotina de minimização. Abaixo estão sintetizadas as principais etapas de cálculo; todo o procedimento foi executado em Scilab:

- Preparação dos dados experimentais:
  - ler os arquivos em ASCII contendo os históricos de aceleração (para este trabalho utilizaram-se 10 históricos de força e 10 de aceleração para cada uma das 3 componentes medidas da matriz de FRFs);
  - obter as transformadas de Fourier para cada histórico de aceleração e força;
  - calcular os espectros de potência, e, a partir destes, as inertâncias experimentais conforme descrito no tópico 5.3;
- Preparação das FRFs teóricas:
  - elaborar uma função/sub-rotina que receba como argumento de entrada o vetor de parâmetros, a seguir monte as matrizes de massa e rigidez, conforme (3.10), e entregue como resultado as frequências naturais e a matriz de autovetores normalizados pela massa;
  - elaborar uma função/sub-rotina que receba como argumentos de entrada o vetor das frequências medidas (que contém os pontos provenientes da FFT, dentro da faixa de frequência de interesse), e o vetor de parâmetros, a seguir chame a sub-rotina descrita no tópico anterior fornecendo o vetor de parâmetros, e entregue como resultado um vetor contendo as inertâncias teóricas, conforme (5.35), nos mesmos pontos que o vetor de inertâncias experimentais;

- elaborar uma função/sub-rotina que receba como argumentos de entrada os vetores das inertâncias teórica e experimental e entregue como resultado o valor do erro calculado conforme (6.1), um escalar;
- Código principal:
  - carregar as estimativas iniciais para o vetor de parâmetros, conforme a Tabela 3.4 para o protótipo de teste, e utilizando os valores apresentados por French, 2009, para o violão;
  - determinar os limites superior e inferior de busca na forma de vetores de mesma dimensão que o vetor dos parâmetros (não há uma fórmula determinística para estes valores, mas é possível estimar ordens de grandeza procurando-se por exemplos parecidos na literatura);
  - carregar a função de erro e todas as sub-rotinas descritas acima;
  - chamar a função/sub-rotina referente ao algoritmo de minimização a ser utilizado, fornecendo a função objetiva (erro), o vetor de estimativas iniciais, e dois vetores para os limites inferior e superior (no caso dos algoritmos heurísticos, valores para os parâmetros de controle precisam também ser determinados; no presente trabalho foram adotados os valores padrão contidos nas referências apresentadas no tópico anterior);
  - graficar os resultados e inspecionar a qualidade do ajuste obtido, tanto visualmente quanto através da avaliação do valor do erro na última iteração realizada pelo algoritmo de minimização;
  - avaliar o impacto de alterações no valor dos parâmetros de controle e verificar a qualidade do ajuste para um conjunto independente de medições (neste caso, como descrito no tópico 5.3, a informação referente à fase foi utilizada para este fim).

## 7 RESULTADOS

Seguindo à aplicação do procedimento descrito no capítulo anterior, na sequência apresentam-se os resultados obtidos para os parâmetros, começando pelo protótipo de teste, e seguindo com os valores encontrados para o modelo da caixa do violão. Ênfase é dada à inspeção visual do ajuste e ao valor do erro obtido com cada algoritmo, assim como à avaliação da qualidade das medições através da verificação das funções de coerência.

Antes, porém, de aplicar as equações (5.35), para o caso de identificação direta dos parâmetros estruturais, ou (5.37), para identificação modal, Ewins, 1984, recomenda a realização de um pequeno ajuste nas equações para contabilizar as parcelas desprezadas no somatório (superposição) das FRFs teóricas, pois estes modos certamente vão estar presentes nas FRFs experimentais, dado que, a rigor, a resposta de qualquer estrutura real é formada pela superposição de infinitos modos. Segundo o autor, a importância desta modificação foi observada na prática a partir de sucessivas aplicações do método a várias estruturas reais, e pode ser entendida analisando-se a forma polinomial (em função da frequência) presente no denominador da formula das FRFs apresentada na equação (5.19). Aí é possível perceber que, no caso da receptância, o termo dominante para cada modo nas altas frequências é a massa modal, enquanto, por outro lado, as rigidezes determinam o comportamento próximo de zero. Já para as inertâncias, tendo em vista que estes dois tipos de FRFs se relacionam pelo quadrado da frequência (5.35), esse comportamento em relação aos valores de massa e rigidez se inverte. Então, mais dois parâmetros são adicionados a cada componente da matriz das FRFs teóricas para que estas consigam reproduzir o comportamento dos dados experimentais na ‘entrada’ e ‘saída’ da faixa de frequências de interesse, e a forma final para a expressão da inertância é exposta abaixo (7.1):

$$I_{ij}(\omega) = -\omega^2 \cdot \sum_{r=1}^N \left[ \frac{\phi_{ir} \cdot \phi_{jr}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + j \cdot (2 \cdot \omega \cdot \omega_r \cdot \zeta_r)} \right] - \frac{1}{\omega^2 \cdot MR_{ij}} + \frac{1}{KR_{ij}} \quad (7.1)$$

onde MR é a massa dos modos residuais, e KR é a rigidez dos modos residuais.

Esta alteração, embora exija um esforço computacional maior por agregar mais dois elementos ao vetor de parâmetros (e conseqüentemente aumentar a dimensão do

problema) estabiliza o algoritmo de busca por lhe dar mais dois graus de liberdade que são realmente necessários à minimização. Em outras palavras, a falta destes parâmetros faz com que o algoritmo tente minimizar o erro na ‘entrada’ e ‘saída’ da faixa de frequências de interesse variando parâmetros que não tem ligação com o erro nestas regiões.

### 7.1 Protótipo de teste de 2 GDL

Antes da aplicação do procedimento de ajuste sobre esta estrutura, uma estimativa para as razões de amortecimento de cada modo foi obtida a partir das inertâncias medidas, seguindo o procedimento da semi-largura de banda descrito em Groehs, 2001, conforme já mencionado anteriormente. Do ponto de vista operacional, a importância das estimativas iniciais no escopo deste trabalho é a aplicação de mínimos quadrados e NM, que requerem necessariamente um vetor de valores iniciais para os parâmetros. Geralmente os heurísticos são programados de forma a aceitarem um vetor de valores iniciais, mas como parâmetros opcionais de controle. Porém, dado o propósito do protótipo de 2 GDL, que, como já foi mencionado, é a validação do procedimento, aqui é fundamental que estimativas razoáveis para os parâmetros sejam conhecidas previamente para que a qualidade da solução encontrada possa ser avaliada, ainda que o ajuste de curva obtido apresente um alto grau de correlação. Então, para as estimativas iniciais das massas e rigidezes residuais utilizaram-se inicialmente valores dos exemplos apresentados em Ewins, 1984. Num segundo momento, porém, o procedimento de busca foi rodado várias vezes utilizando-se AG, já que este não requer valores iniciais, sendo possível assim isolar ordens de grandeza esperadas para conter os valores corretos para esses parâmetros. Seguindo, a Tabela 7.1 apresenta as estimativas iniciais obtidas, juntamente aos valores já expostos no capítulo 3 para massa e rigidez:

Tabela 7.1 – Estimativas iniciais dos parâmetros do protótipo de teste 2 GDL

<b>Massa</b>	<b>Rigidez</b>	<b>Amortecimento</b>
$m_1 = 0,285 \text{ kg}$	$k_1 = 5587,7 \text{ N/m}$	$\zeta_1 = 1,1\%$
$m_2 = 0,214 \text{ kg}$	$k_2 = 2415,3 \text{ N/m}$	$\zeta_2 = 0,57\%$
<b>Massa residual:</b>	$MR_{11} = 100 \text{ kg}$	$MR_{12} = 100 \text{ kg}$
<b>Rigidez residual:</b>	$KR_{11} = -100 \text{ kN/m}$	$KR_{12} = 100 \text{ kN/m}$

Antes de abordar a aplicação do procedimento de ajuste, na Figura 7.1, abaixo, está exposta a função de coerência, juntamente à magnitude da FRF<sub>12</sub>, ambas até 1000 Hz, para que se possa avaliar a qualidade dos dados experimentais em uma ampla faixa de frequência, cobrindo bastante além do necessário para o ajuste do modelo teórico.

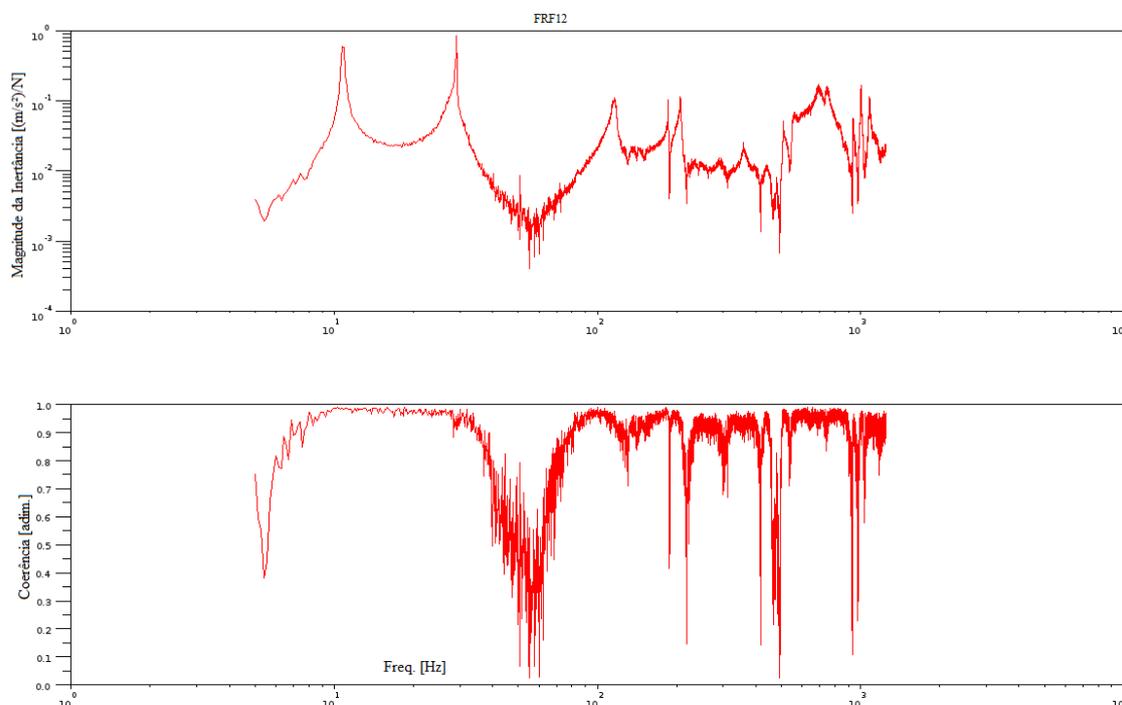


Figura 7.1 – FRF<sub>12</sub> e respectiva função de coerência

Nos dois gráficos apresentados na Figura 7.1 acima observa-se um comportamento bem de acordo com o esperado, tanto para a coerência quanto para a inertância. Além da função de coerência próxima à unidade na maior parte do espectro, também é possível perceber claramente que as duas primeiras ressonâncias se destacam em relação às demais regiões amplificadas, assim como a correlação entre as antirressonâncias e as regiões de baixa coerência.

Então, com os parâmetros iniciais e dados teóricos apresentados anteriormente, a aplicação do procedimento de ajuste forneceu os seguintes resultados para o valor do erro (na última iteração), onde o algoritmo de BFGS é omitido por ter-se verificado que o desempenho deste método foi praticamente idêntico ao de MQ com Levenberg-Marquardt:

Tabela 7.2 – Resultado por cada algoritmo

MQ-LM	NM	EED	AG	PSO	
<b>Erros [adimensional]</b>					
69039	595	236,0	103,7	111,6	-
<b>Parâmetros [unidades na coluna da direita]</b>					
m <sub>1</sub> =194 m <sub>2</sub> =265	m <sub>1</sub> =323 m <sub>2</sub> =222	m <sub>1</sub> =636 m <sub>2</sub> =661	m <sub>1</sub> =274 m <sub>2</sub> =362	m <sub>1</sub> =263 m <sub>2</sub> =353	g
k <sub>1</sub> =5922 k <sub>2</sub> =2009	k <sub>1</sub> =6687 k <sub>2</sub> =3836	k <sub>1</sub> =6729 k <sub>2</sub> =12085	k <sub>1</sub> =5941 k <sub>2</sub> =2402	k <sub>1</sub> =8024 k <sub>2</sub> =2417	N/m
ζ <sub>1</sub> =1,1 ζ <sub>2</sub> =0,56	ζ <sub>1</sub> =0,011 ζ <sub>2</sub> =0,0057	ζ <sub>1</sub> =5,5 ζ <sub>2</sub> =1,4	ζ <sub>1</sub> =0,038 ζ <sub>2</sub> =0,25	ζ <sub>1</sub> =0,058 ζ <sub>2</sub> =0,028	%

Dos valores apresentados na Tabela 7.2 acima é possível perceber um desempenho bastante semelhante entre os algoritmos, à exceção de MQ, que não atingiu a convergência principalmente em consequência de uma tendência à estagnação nos limites de busca, fato que ser observado para este algoritmo. A seguir são apresentados os resultados gráficos obtidos com AG, já que este forneceu a melhor solução à tarefa de minimização (Figura 7.2):

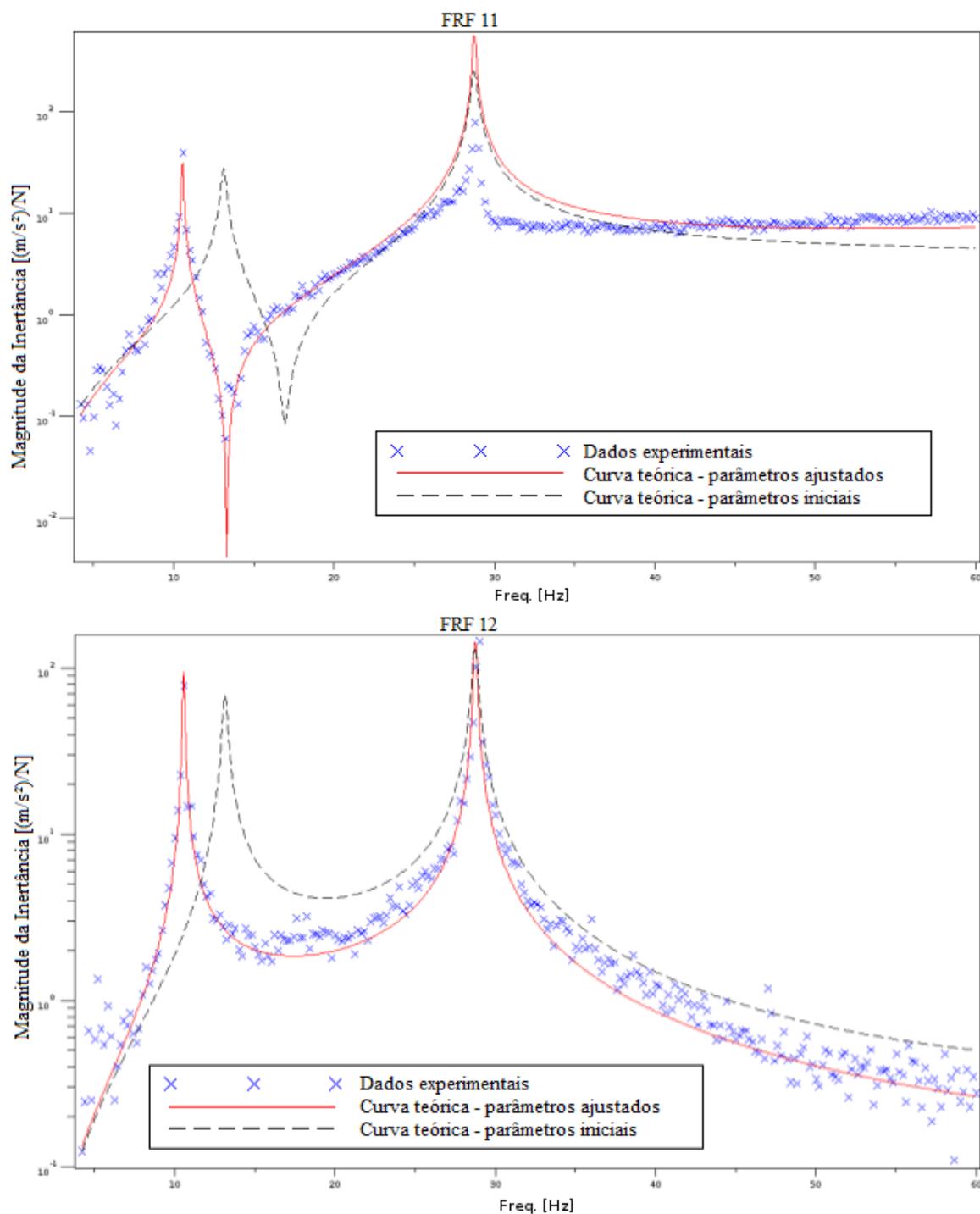


Figura 7.2 – Resultado gráfico da calibração utilizando AG

Os parâmetros extras (massas e rigidezes residuais) ajustados pelo processo de identificação cujos resultados gráficos encontram-se na Figura 7.2 acima são apresentados na Tabela 7.3, a seguir:

Tabela 7.3 – Resultados da calibração por AG para os parâmetros residuais

<b>Massa residual:</b>	$MR_{11} = 95,6 \text{ kg}$	$MR_{12} = 95,1 \text{ kg}$
<b>Rigidez residual:</b>	$KR_{11} = -54,9 \text{ kN/m}$	$KR_{12} = 294,8 \text{ kN/m}$

A partir destes valores, então, é possível avaliar a dimensão do impacto causado pelo ajuste nos parâmetros iniciais. A Tabela 7.4 abaixo apresenta as correções percentuais realizadas sobre os parâmetros de massa e rigidez.

Tabela 7.4 – Correções percentuais realizadas pelo processo de ajuste por AG

<b>Massa</b>	<b>Rigidez</b>
$m_1: -3,85\%$	$k_1: 5,94\%$
$m_2: 69,1\%$	$k_2: -0,522\%$

Conforme a Tabela 7.4, acima, o maior ajuste realizado foi da ordem de 70% em uma das massas, o que é compreensível se for levado em consideração que a massa das régua de metal de alguma maneira vai se distribuir sobre os GDL do modelo dinâmico. Aproximando a distribuição da massa, por exemplo, pela técnica das áreas de influência (*lumped mass*), considerando-se uma massa específica de  $7800 \text{ kg/m}^3$  para o aço das régua e as dimensões do modelo exposto no terceiro capítulo, chega-se a 41% de acréscimo para a massa em questão. Tendo em vista o grau de aproximação desta técnica e as incertezas presentes no protótipo de 2 GDL, os valores apresentados acima se encaixam bem dentro do que se poderia esperar para as correções percentuais sobre as estimativas iniciais obtidas para este modelo, e assim conferem confiabilidade à aplicação do procedimento de ajuste à caixa acústica do violão. Ainda, em termos das frequências naturais, o modelo ajustado forneceu valores bastante próximos aos dados experimentais: 10,5 Hz e 28,7 Hz, enquanto os valores obtidos experimentalmente foram 10,8 Hz e 29,1 Hz.

Finalmente, como forma de validação dos resultados, a Figura 7.3, a seguir, apresenta a fase experimental lado-a-lado com os dados teóricos originais e ajustados:

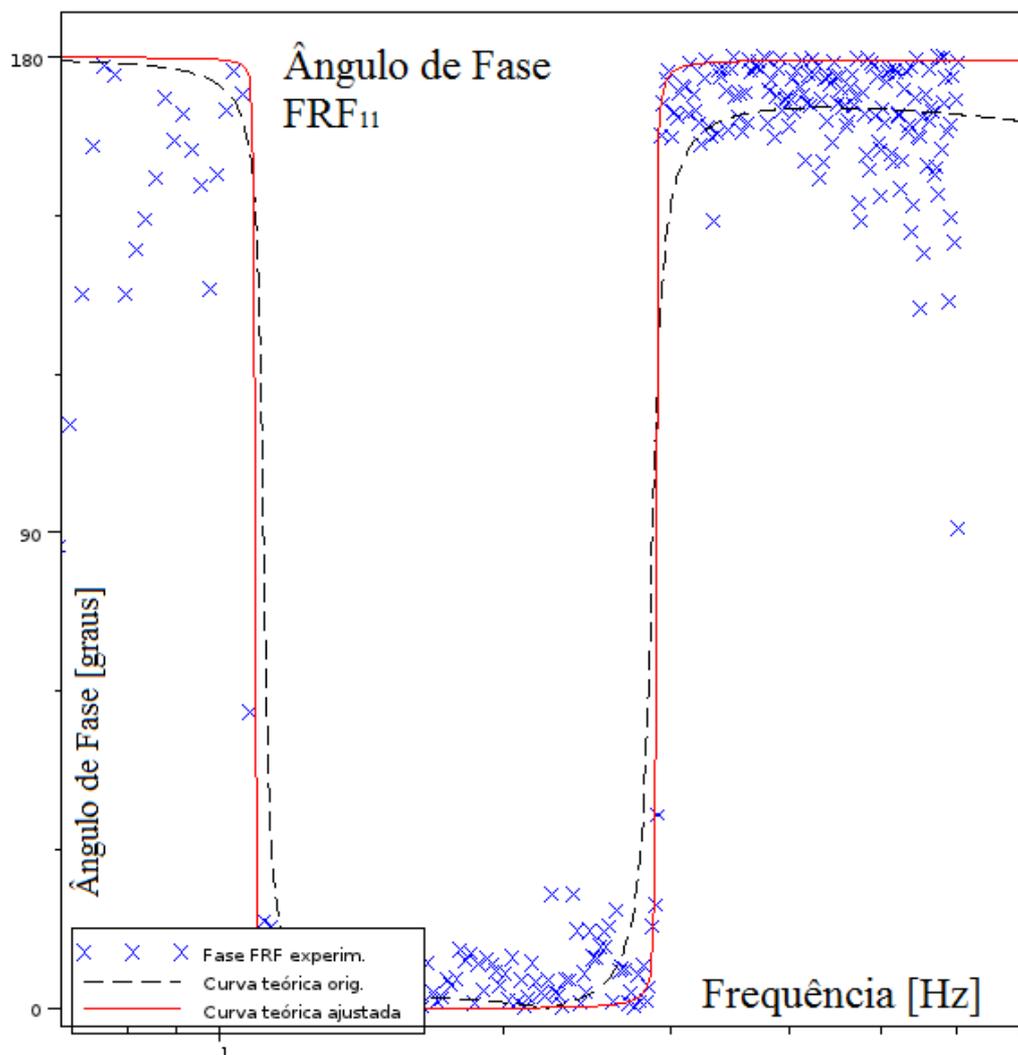


Figura 7.3 – Ângulo de fase com os parâmetros ajustados para o protótipo por AG

## 7.2 Modelo de acoplamento ar-caixa – 3 GDL

Na sequência apresenta-se o desenvolvimento deste mesmo procedimento sobre a caixa acústica do violão. Antes, porém, na Figura 7.4, a seguir, estão expostas as funções de coerência, contidas faixa de frequência de interesse, correspondentes a toda uma linha da matriz de FRFs, onde é possível verificar uma boa qualidade para os dados experimentais dentro da faixa de interesse:

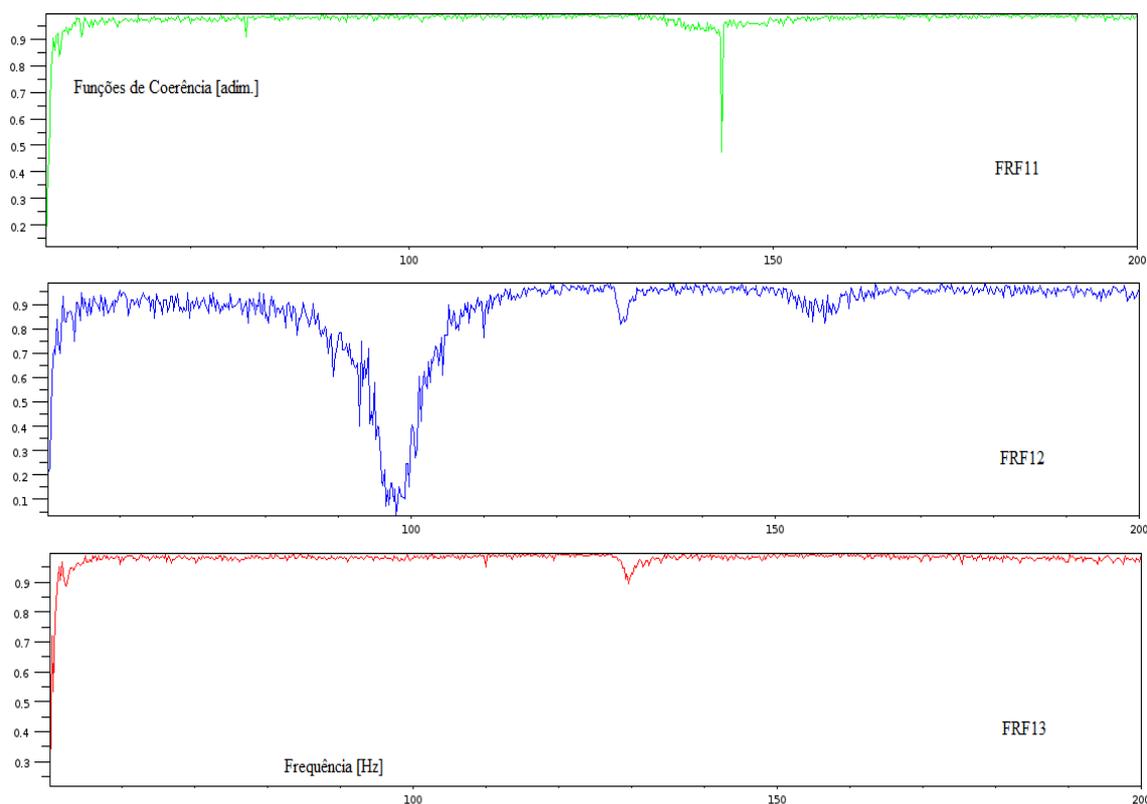


Figura 7.4 – Resultados da função de coerência para o violão

Aplicando novamente o método da semi-largura de banda, desta vez sobre as medições do violão, foi possível estimar as três razões de amortecimento modal para este modelo. Abaixo está exposto novamente, na Tabela 7.5, o conjunto das estimativas iniciais dos parâmetros do modelo da caixa acústica, porém, desta vez contendo os valores de amortecimento:

Tabela 7.5 – Vetor de parâmetros com estimativas para o amortecimento

Parâmetros a ajustar	Descrição	Estimativas iniciais
$m_h$	Massa da coluna de ar	0,967 g
$m_p$	Massa do tampo frontal	248,7 g
$m_b$	Massa do tampo posterior	60 g
$A_p$	Área do tampo frontal	748,5 cm <sup>2</sup>
$A_b$	Área da tampo posterior	556,4 cm <sup>2</sup>
$V$	Volume físico da caixa	11,4 L
$k_p$	Rigidez do tampo frontal	248,4 kN/m
$k_b$	Rigidez do tampo posterior	180,5 kN/m
$\zeta_1$	Razões de amortecimento do 1º modo	1,8%
$\zeta_2$	Razões de amortecimento do 2º modo	0,98%
$\zeta_3$	Razões de amortecimento do 3º modo	2,0%

Os limites de busca foram sendo definidos em várias tentativas consecutivas, aplicando-se um determinado fator de escala ao vetor de parâmetros iniciais mostrado na Tabela 7.5 acima. Desta forma foi possível definir o limite superior como sendo 20 vezes o vetor de parâmetros iniciais e 0,1 para o limite inferior.

Então, com estes valores iniciais e limites de busca foi rodado o procedimento de ajuste cujos resultados são apresentados na Tabela 7.6 abaixo, juntamente aos parâmetros de controle utilizados no caso dos heurísticos (as soluções por MQ foram omitidas, pois foi muito difícil atingir a convergência, de forma que foram obtidos erros muito altos com estes métodos):

Tabela 7.6 – Erro resultante com cada algoritmo [adimensional]

NM	EED	AG	PSO
1436	779	109,7	20,5
	TP=100 PC=0,8 F=0,8	TP=1000 PC=0,9 PM=0,3	N=300 $w_{\min}=0,9$ ; $w_{\max}=0,5$ $C_1=0,7$ ; $C_2=1,47$ $v_{\min}=1$ ; $v_{\max}=1$ Nº de raptores=80

Na Tabela 7.6, acima, apenas o resultado referente à  $FRF_{11}$  é abordado, pois o procedimento foi aplicado somente a esta componente, restando as demais como um conjunto de validação dos parâmetros resultantes. A Tabela 7.7 a seguir apresenta todos os parâmetros de ajuste utilizados, juntamente aos valores resultantes obtidos com PSO e diferenças percentuais em relação às estimativas iniciais.

Tabela 7.7 – Vetor de parâmetros resultante e diferenças (ajustes) percentuais

Parâm.	Result.	Dif. %	Parâm.	Result.	Dif. %
$m_h$	1,01 g	5,1%	V	9,1 L	-19%
$m_p$	273,6 g	10%	$\zeta_1$	0,68%	-61%
$m_b$	621,7 g	936%	$\zeta_2$	2,03%	107%
$A_p$	694,8 cm <sup>2</sup>	-7,1%	$\zeta_3$	1,96%	-1,7%
$A_b$	344,3 cm <sup>2</sup>	-38%	MR <sub>11</sub>	828,9 g	-
$k_p$	240,2 kN/m	-3,2%	KR <sub>11</sub>	120,4 kN/m	-
$k_b$	175,8 kN/m	-2,5%			

Uma grande correção pode ser notada na Tabela 7.7, acima, para a massa do tampo posterior (fundo), porém, esta pode ser devida a diferenças construtivas entre o

violão utilizado neste trabalho e aquele do qual foram extraídos os parâmetros iniciais, conforme mencionado no terceiro capítulo.

Com o intuito de desenvolver uma análise de sensibilidade da função objetivo no ponto de mínimo encontrado, a Tabela 7.8 abaixo apresenta a variação percentual do valor de erro encontrado (20,5) para perturbações de 5% nos parâmetros, para cima e para baixo:

Tabela 7.8 – Análise de sensibilidade do ponto de mínimo encontrado [adim.]

	$m_h$	$m_p$	$m_b$	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$	
+5%	185	101	146	0,27	-1,0	-0,20	%
-5%	154	101	140	-0,13	1,71	0,90	
	$k_p$	$k_b$	$A_p$	$A_b$	$V$		
+5%	77	153	88	22	93	%	
-5%	92	179	91	35	95		

A Figura 7.5 abaixo apresenta graficamente o ajuste obtido.

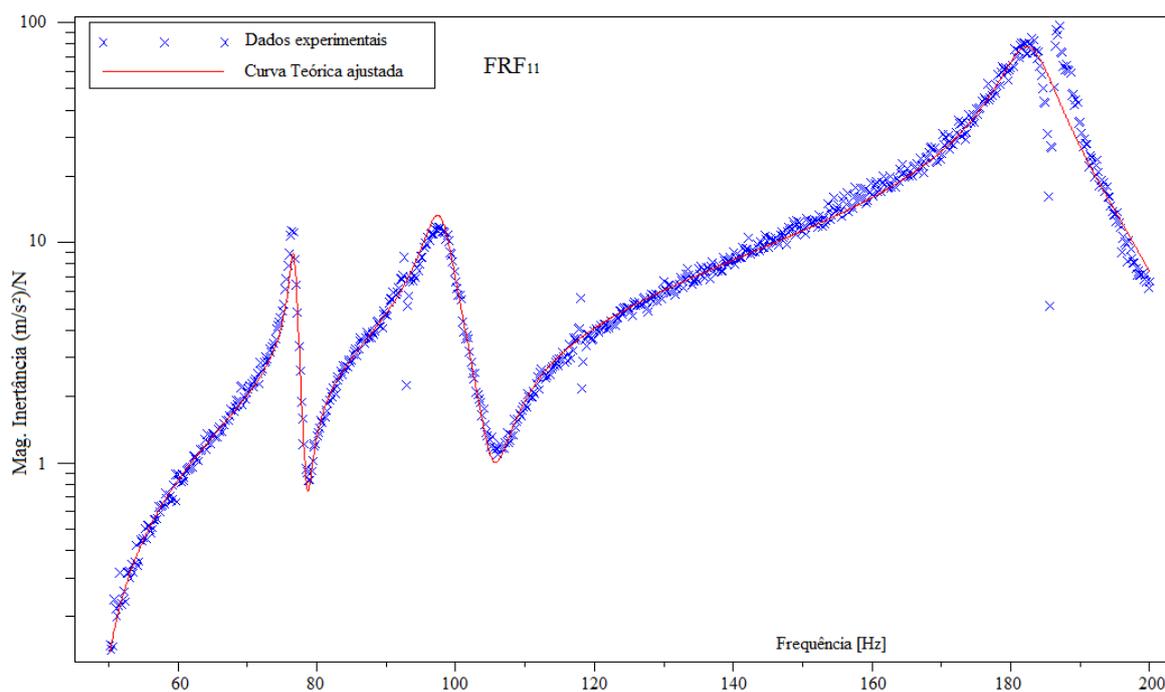


Figura 7.5 – Resultado gráfico do ajuste para a FRF<sub>11</sub>

As frequências naturais obtidas com o modelo ajustado foram 76,7 Hz, 97,7 Hz e 182,6 Hz, enquanto os valores experimentais foram 76,6, 98,0 e 187,2 Hz, e a seguir é exposta a matriz dos autovetores normalizados pela massa (7.2), também obtidos com os parâmetros ajustados:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,380 & -0,731 & 1,60 \\ -27,5 & 24,2 & 17,5 \\ 0,648 & 0,638 & 0,137 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Pelos valores presentes na matriz acima (7.2) é possível perceber uma amplitude de movimento associada ao GDL do ar (entrando e saindo através da abertura da caixa) muito maior relativamente aos movimentos associados às flexibilidades do tampo, o que condiz com o comportamento esperado para o modelo físico. A Figura 7.6 abaixo apresenta um esboço dos três modos expostos em (7.2).

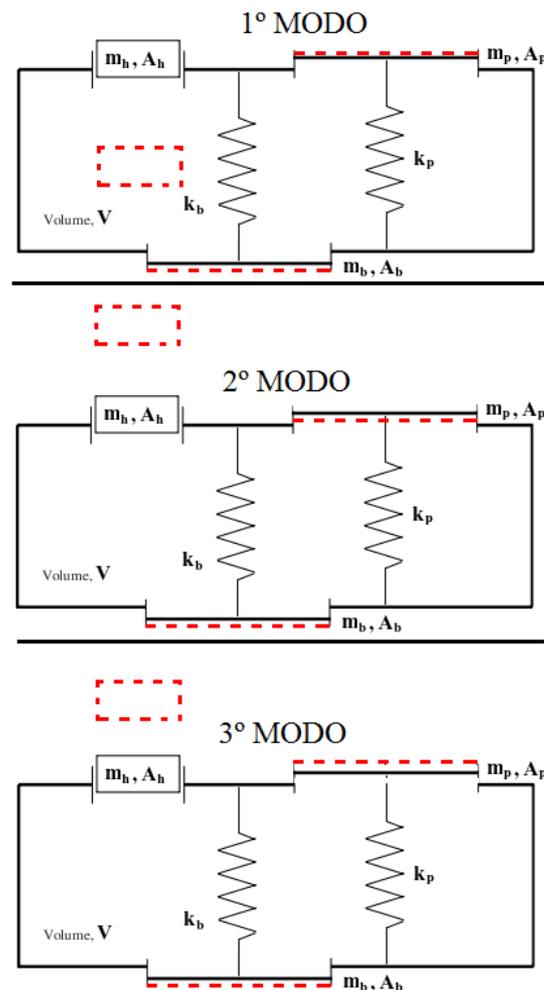


Figura 7.6 – Esboço dos modos obtidos com o modelo ajustado

As curvas referentes aos demais elementos da matriz de FRFs são apresentadas na Figura 7.7 e Figura 7.8, a seguir, lembrando que os parâmetros aí utilizados são os mesmos já apresentados anteriormente, ou seja, calibrados somente para a  $FRF_{11}$ . Aqui vale mencionar que tentativas foram realizadas com multiobjetivo, ou seja, ajustar os

parâmetros de maneira a contabilizar as três FRFs disponíveis ao mesmo tempo, porém, desta forma foram observados ajustes menos próximos para as três componentes.

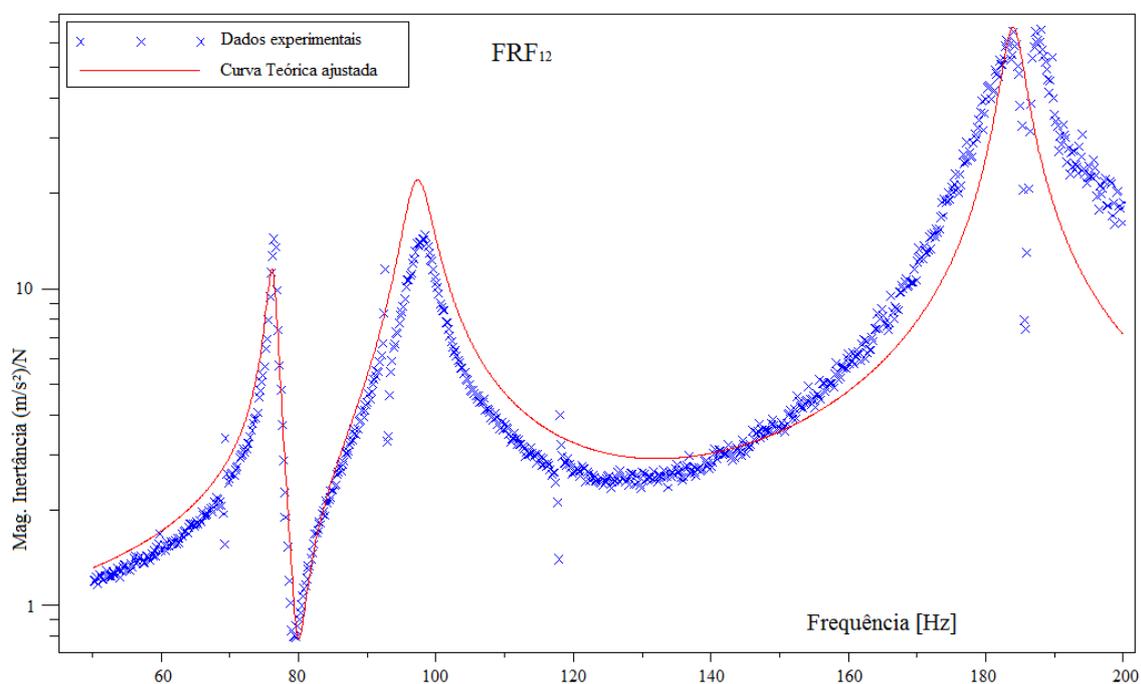


Figura 7.7 – Resultado gráfico do ajuste para a  $FRF_{12}$

Segundo Ewins, 1984, FRFs diretas ( $FRF_{11}$ ) apresentam sempre antirressonâncias entre dois picos consecutivos, o que pode ser observado na Figura 7.5, enquanto nas componentes cruzadas ( $FRF_{12}$  e  $FRF_{13}$ ) nota-se a presença de vales e picos intercaladamente. Na Figura 7.7 acima é possível observar este comportamento, assim como na Figura 7.8, apresentada a seguir, onde a  $FRF_{13}$  concorda igualmente neste aspecto, confirmado pelos sinais negativos presentes na matriz de autovetores.

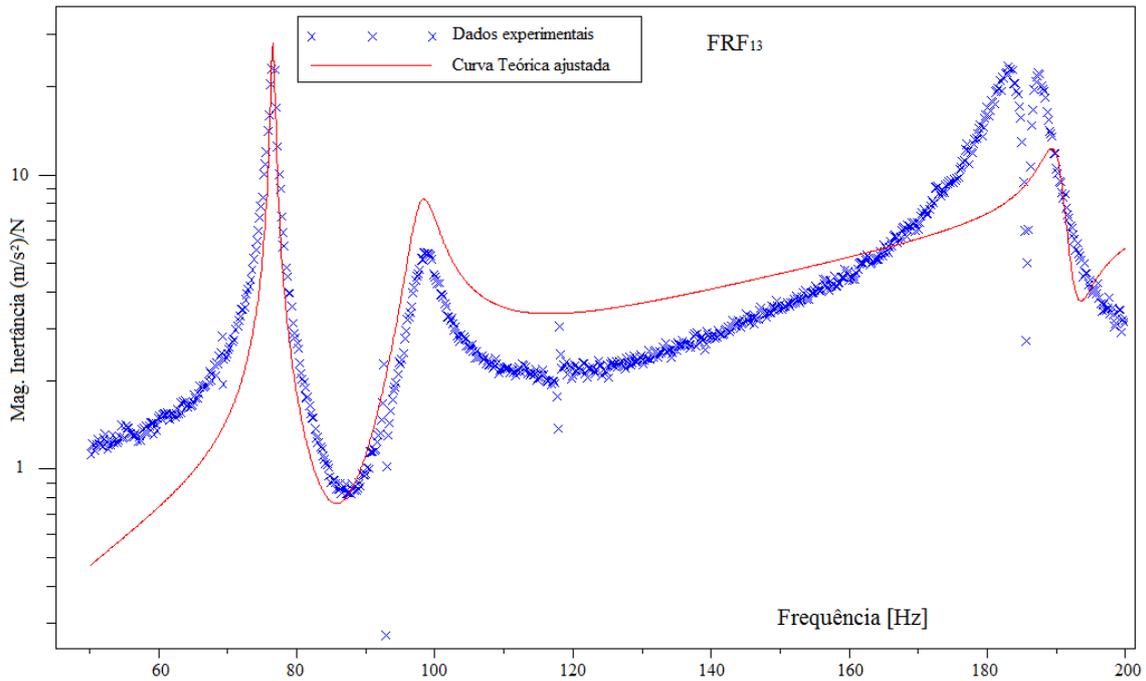


Figura 7.8 – Resultado gráfico do ajuste para a FRF<sub>13</sub>

Além da comparação com as duas FRFs acima, Figura 7.8 e Figura 7.7, o ângulo de fase também constitui um conjunto independente de dados. Então, semelhante ao que foi apresentado anteriormente para a estrutura de teste, a Figura 7.9 a seguir compara os resultados medidos e teóricos em relação à fase.

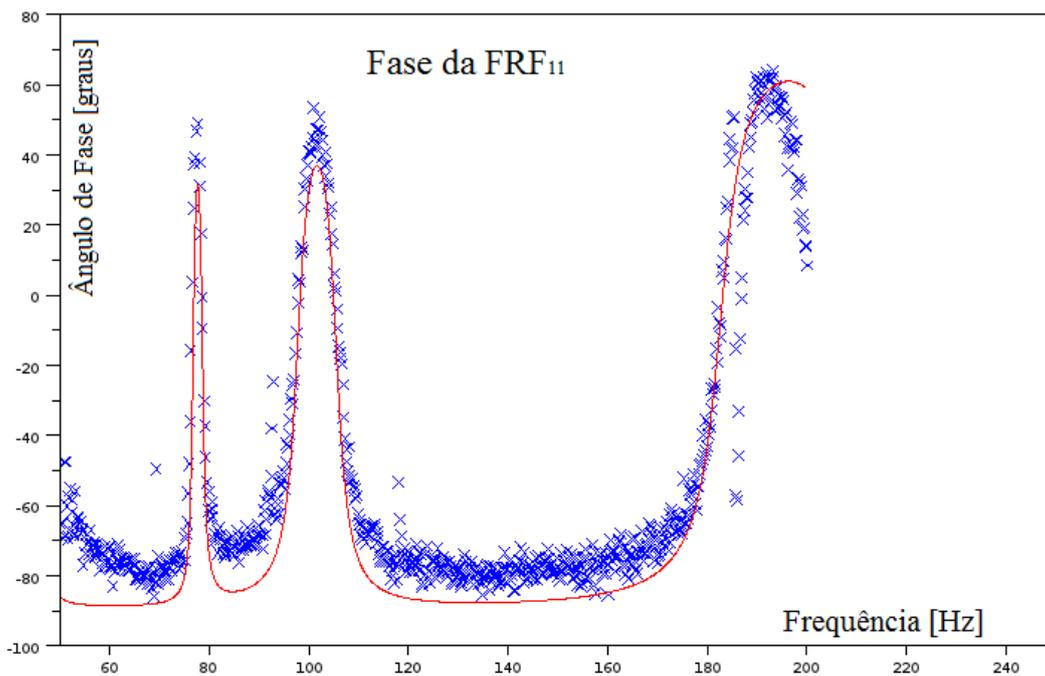


Figura 7.9 – Resultado gráfico do ajuste para o ângulo de fase

## 8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Os grandes avanços tecnológicos ocorridos nas áreas da computação e instrumentação nas últimas décadas possibilitaram a popularização de vários tipos equipamentos de medição graças ao fornecimento de aparelhos menores, mais leves, e ainda assim mais precisos. Desta forma passaram a ser rapidamente evidenciadas, muitas vezes, discrepâncias enormes nas previsões teóricas, devidas principalmente a incertezas na definição dos parâmetros presentes nos modelos. Especialmente no campo da engenharia estrutural, o ensaio de vibrações provou ser uma poderosa ferramenta neste sentido. No presente trabalho um procedimento de identificação de parâmetros é aplicado a um modelo simplificado do comportamento dinâmico e sonoro da caixa de ressonância de um violão acústico, utilizando para tanto as inertâncias experimentais obtidas em um ensaio de vibrações.

### 8.1 Conclusões

Primeiramente, após a apresentação das principais linhas de pesquisa nesta área, duas possibilidades foram consideradas para o procedimento de ajuste: a identificação prévia dos parâmetros modais e posterior calibração das matrizes estruturais via comparação de autovetores e frequências naturais, ou a identificação direta das matrizes de massa, rigidez e amortecimento via minimização do erro entre as FRFs medidas e calculadas. Os resultados apresentados no capítulo anterior demonstraram a viabilidade da escolha pela segunda das abordagens mencionadas acima, desde que uma ferramenta suficientemente robusta de otimização seja utilizada, tendo se revelado o algoritmo genético e o enxame de partículas como especialmente adequados para o caso aqui estudado. Então, a praticidade desta abordagem se revela como uma interessante vantagem em relação a outros métodos citados anteriormente.

Ao longo do trabalho foi possível avaliar na prática a importância da qualidade dos registros experimentais, percebendo-se o grande impacto destes sobre a precisão numérica, fato que já seria de se esperar. Porém, mais do que isto foi observado também o papel fundamental de uma correta associação entre os pontos de medição e os GDL do modelo teórico, conforme o procedimento descrito no tópico 4.3.1, cuja importância pôde ser confirmada através dos resultados experimentais obtidos. Uma discussão sobre

este tema é apresentada junto às três últimas figuras expostas no capítulo anterior, referentes aos gráficos das FRFs obtidas experimentalmente. Várias rodadas de testes demonstraram também a relevância dos cuidados apresentados no capítulo 4 para a utilização dos equipamentos de medição e calibração/aferição dos sensores, fato que pôde ser observado nas funções de coerência apresentadas no capítulo anterior, onde valores próximos a 100% são verificados em grande parte da faixa de frequência útil.

Se estimativas prévias com baixo nível de incerteza são conhecidas para os parâmetros iniciais fornecidos aos algoritmos de otimização, e caso a aplicação do procedimento de ajuste forneça um conjunto de parâmetros resultantes muito afastados dos valores iniciais (de ordens de grandeza muito diferentes) então este pode ser um indicador da presença de possíveis erros na formulação do método. Com este intuito, uma estrutura simples foi construída com régua de metal e blocos de madeira, lembrando a forma de um prédio de dois pavimentos, de maneira a apresentar um comportamento dinâmico bastante próximo ao de um sistema ideal massa-mola-amortecedor de 2 GDL. Estimativas iniciais foram obtidas estaticamente para massa e rigidez, e a aplicação do procedimento de ajuste realizou uma correção máxima de 70% em uma das massas, não ultrapassando a faixa dos 10% para os outros parâmetros. Este resultado contraria certa expectativa de que as estimativas obtidas para as massas apresentariam menor incerteza, já que estas foram medidas em uma balança com relativamente alta exatidão. Porém, é preciso lembrar que a massa das régua de metal foi desconsiderada das estimativas iniciais, e, no entanto, ela alcança de fato uma fração relevante da massa dos blocos de madeira associados a cada um dos GDL. Sendo assim, um aumento significativo nas massas ajustadas pelo procedimento deve ser esperado para contabilizar os efeitos desta inércia extra, de forma essas correções foram consideradas compatíveis com as grandezas envolvidas, e o procedimento foi julgado suficientemente confiável, em termos de engenharia, para o ajuste do modelo do violão, que é o objetivo principal deste trabalho.

A opção pela abordagem direta exige a aplicação de algum(s) algoritmo(s) de otimização para a tarefa de minimizar a função objetivo (erro). As primeiras tentativas foram realizadas com o método dos mínimos quadrados não-linear, onde foi possível observar uma grande dificuldade desta família de métodos para lidar com os limites do espaço de busca. A Tabela 7.2 mostra o AG como o de melhor resultado para o ajuste do protótipo de teste, ainda que valores muito próximos tenham sido obtidos pelos

outros heurísticos e também por Nelder-Mead para esta estrutura. Já para o modelo do violão foi verificado um desempenho significativamente melhor por enxame de partículas, resultado apresentado na Tabela 7.6. Ainda assim, é importante mencionar que, por outro lado, este método exigiu um tempo computacional superior aos demais.

Finalmente, os bons resultados obtidos na minimização do erro se refletem em um ajuste de curva com boa concordância para a inertância direta (que relaciona a excitação e resposta num mesmo GDL, neste caso, o primeiro), como apresentado na Figura 7.5. As outras inertâncias medidas não foram consideradas pelo procedimento de ajuste, de maneira que, se for verificada uma boa concordância com as curvas experimentais referentes a estas outras componentes da matriz de FRFs, isto indica que os parâmetros daí obtidos representam bem o comportamento dinâmico global do modelo de 3 GDL, ainda que estes valores tenham sido obtidos através do ajuste a apenas uma FRF. Esta consideração se aplica igualmente ao ângulo de fase, dado que, como mencionado anteriormente, a informação daí proveniente não foi levada em consideração na definição da função erro. As figuras 7.6 a 7.8 apresentam estas comparações, onde é possível perceber um bom ajuste para a  $FRF_{12}$  e para a fase, ainda que não tanto quanto o obtido para a  $FRF_{11}$ , e um resultado um pouco pior para a última componente. Quanto às frequências naturais, a maior diferença foi verificada na última, ou seja, terceira, chegando aproximadamente a 2,5%, enquanto para as outras duas se manteve abaixo de 0,5%. O maior erro na terceira ressonância concorda com uma tendência observada nos resultados apresentados em outros trabalhos de caracterização dinâmica de violões acústicos, porém, a magnitude das diferenças nas frequências naturais obtidas no presente trabalho é levemente menor do que o apresentado em alguns dos trabalhos citados no segundo capítulo.

## 8.2 Trabalhos futuros

Como sugestão de trabalhos futuros aponta-se primeiramente, como consequência dos resultados aqui apresentados, uma análise de sensibilidade do comportamento dinâmico da caixa do violão a alterações nos parâmetros estudados, como massa e rigidez dos tampos, e também às constantes presentes no modelo, como o volume da caixa e a área da boca. Tal estudo viria a trazer um conhecimento que poderia orientar os construtores de violões a testar, por exemplo, o aumento na resposta

estrutural da caixa acústica devida a determinadas alterações na geometria do projeto, o que aponta no sentido da motivação inicial deste presente trabalho. Ainda nesta mesma linha, e complementar a este desenvolvimento, apresenta-se a dificuldade em relacionar parâmetros subjetivos – adotados pelos instrumentistas na caracterização dos violões – a grandezas físicas mensuráveis e calculáveis através do modelo teórico. Por exemplo, uma possível correlação poderia ser investigada entre a chamada ‘projeção’ e os valores das componentes referentes ao deslocamento do ar na matriz de autovetores do modelo ajustado.

Como forma de testar a interferência da massa do acelerômetro sobre as leituras do histórico de aceleração, seria interessante refazer os experimentos, porém, desta vez medindo a resposta com um medidor de vibrações a laser (ótico). Igualmente importante seria incorporar ao procedimento de ajuste a medição do NPS da resposta referente ao segundo GDL através de microfone (transdutor de pressão sonora) montado em frente à caixa acústica (geralmente) a 1 m da boca, semelhante à comparação entre as respostas acústica e estrutural apresentada na Figura 4.3.

Outra possibilidade que viria a dar sequência ao trabalho apresentado aqui seria a aplicação do modelo de 4 GDL desenvolvido por Popp, 2012, considerando também a flexibilidade das laterais, como já mencionado no segundo capítulo. Para tanto seria necessário adquirir um conjunto de dados experimentais de boa qualidade em uma faixa mais larga de frequências, de forma a abranger também a quarta ressonância. Eventualmente, dado o nível de sutileza necessário para se capturar a contribuição destes elementos estruturais à resposta total do instrumento, este grau de precisão poderá ser atingido somente com técnicas não intrusivas semelhantes ao exposto no parágrafo anterior. Levando em consideração o aumento da dimensão do problema, dado o acréscimo de um GDL ao modelo, uma técnica que poderia ser aplicada para diminuir o esforço computacional é o uso de métodos mistos de otimização, como por exemplo algoritmo genético para um mapeamento inicial do espaço de busca, seguido de Neelder-Mead para a determinação precisa do mínimo global.

Por último, um modelo de elementos finitos poderia ser construído para todo o violão, como já realizado por vários autores (alguns dos quais são citados aqui no segundo capítulo), porém, aplicando posteriormente um procedimento de calibração das matrizes estruturais (esta opção requer prévia identificação modal) ou ajuste de um vetor de parâmetros mais representativos do modelo. Como continuação do presente

trabalho, recomenda-se aqui a segunda opção, definindo como parâmetros para tal análise a flexibilidade da junção entre tampos e laterais, as propriedades materiais das madeiras (adotando o modelo ortotrópico), as espessuras dos tampos (considerando que estes sejam modelados com elementos de placa) e parâmetros referentes a alguma forma de amortecimento presente na formulação adotada [e.g. Matter, 2008]. Os ajustes resultantes obtidos desta forma poderiam ser comparados com aqueles apresentados no presente trabalho para baixas frequências, assim como os valores das primeiras frequências naturais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allemang, R. J. **Experimental Modal Analysis**. Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, Cincinnati, 1999.

Allemang, R. J. The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse, **Sound and Vibration**, p. 14-21, 2003.

Allemang, R. J.; Brown, D. L. **A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis**. Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference. Orlando: 1982. p. 110-116.

Beranek, L. L. **Music, Acoustics and Architecture**. John Wiley & Sons, New York, 1962.

Boullosa, R. R. The use of transient excitation for guitar frequency response testing, **Catgut Acoustical Society Newsletter**, v. 36, p. 17-20, 1981.

Boullosa, R. R.; Orduña-Bustamante, F.; López, A. P. Tuning characteristics, radiation efficiency and subjective quality of a set of classical guitars, **Applied Acoustics**, v. 56, p. 183-197, 1999.

Brincker, R.; Andersen, P. **Understanding Stochastic Subspace Identification**. Conference Proceedings - IMAC-XXIV - A Conference & Exposition on Structural Dynamics. St. Louis, Missouri - EUA: Society for Experimental Mechanics. 2006.

BRÜEL & KJAER. **Structural Testing, Part I**, 1998.

Caldersmith, G. Guitar as a Reflex Enclosure, **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 63, n. 5, p. 1566-1575, maio 1978.

Caldersmith, G. Vibration geometry and radiation fields in acoustic guitars, **Acoustics Australia**, v. 14, p. 47-51, ago. 1986.

Chong, E. K. P.; Zak, S. H. **An Introduction To Optimization**. 3ª Edição. ed. John Wiley & Sons, New Jersey, 2008.

Christensen, O.; Vistisen, B. B. Simple model for low-frequency guitar function, **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 68, p. 758-766, Setembro 1980.

Elejabarrieta, M. J.; Ezcurra, A.; Santamaría, C. Coupled modes of the resonance box of the guitar, **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 111, p. 2283-2292, 2002.

Ewins, D. J. **Modal Testing – Theory and Practice**. John Wiley & Sons, London, 1984.

Fadel Miguel, L. F. **Identificação de sistemas e avaliação da integridade de estruturas treliçadas**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Tese de Doutorado, Porto Alegre, 2007.

Fadel Miguel, L. F.; Miguel, L. F. F. et al. Influence of System Uncertainties on Structural Damage Detection by Ambient Vibrations, **Mecânica Computacional**, v. XXX, p. 1181-1185, Novembro 2011.

Firth, I. M. Physics of the Guitar at the Helmholtz and First Top Plate, **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 61, p. 588-593, 1977.

French, M. Structural modification of stringed instruments, **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 21, p. 98-107, 2007.

French, M. **Engineering the Guitar – Theory and Practice**. Springer Verlag, New York, 2009.

Friswell, M. I.; Mottershead, J. E. Modal Updating in Structural Dynamics - a Survey, **Journal of Sound and Vibration**, v. 167, p. 347-375, 1993.

Friswell, M. I.; Mottershead, J. E. **Finite Element Model Updating in Structural Dynamics**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

Groehs, A. G. **Mecânica Vibratória**. 2ª Edição. ed. Editora da Unisinos, São Leopoldo, 2001.

Hurley, J. P.; Garrod, C. G. **Principles of Physics**. Houghton Mifflin Co., Boston, 1978.

Hutchins, C. M.; Hopping, A. S.; Saunders, F. A. Subharmonics and Plate Tap Tones in Violin Acoustics, **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 32, p. 1443-1449, 1960.

Ina, R. **The Acoustics of the Steel String Guitar**. The University of New South Wales, Tese de Doutorado, Sidney, 2007.

Jeong, W. B.; Okuma, M.; Nagamatsu, A. Experimental Identification of Mechanical structure with Characteristic Matrices, **JSME International Journal**, v. 32, p. 30-35, Março 1989.

Lai, J. C. S.; Burgess, M. A. Radiation efficiency of acoustic guitars, **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 88, p. 1222-1227, Setembro 1990.

Lay, D. C. **Álgebra Linear e Suas Aplicações**. 2ª Edição. ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1999.

Lew, J.-S.; Juang, J.-N.; Longman, R. W. **Comparison of Several System Identification Methods for Flexible Structures**. Proceedings of the 32nd AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. [S.l.]: [s.n.]. 1991.

Maia, N. M. M.; Silva, J. M. M.; et al. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. Editores: Maia, N. M. M.; Silva, J. M. M. Research Studies Press Ltd., England, 1997.

Marwala, T. **Finite-element-model Updating Using Computational Intelligence Techniques**. Springer-Verlag, London, 2010.

Matter, M. **Identification modale numérique-expérimentale des propriétés élastiques et dissipatives de matériaux composites**. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Tese de Doutorado, Lausanne, 2008.

Miguel, L. F. F. **Introdução ao Estudo de Vibrações, Notas de Aula de ENG03374 - Vibrações I**. 1ª Edição. ed. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

Pierce, A. D. **Acoustics - An Introduction to Its Physical Principles and Applications**. 3ª Edição. ed. Acoustical Society of America, Melville, NY, 1989.

Popp, J. E. Four mass coupled oscillator guitar model, **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 131, p. 829–836, Janeiro 2012.

Rao, S. S. **Mechanical Vibrations**. 3ª Edição. ed. Addison-Wesley Publishing Co., EUA, 1995.

Salmon, S. M3M-UTBM. Particle Swarm Optimization Toolbox, versão 0.6-1, 2010-2012. Disponível em: <<http://forge.scilab.org/index.php/p/psa-toolbox/>>. Acesso em: Março 2012.

Shye, K.; Richardson, M. **Mass, Stiffness, and Damping Matrix Estimates from Structural Measurements**. 5º IMAC. [S.l.]: [s.n.]. 1987. p. 756-761.

Storn, R.; Price, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, **Journal of Global Optimization**, v. 11, p. 341–359, Dezembro 1997.

Suzuki, H. Vibration and sound radiation of a piano soundboard, **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 80, p. 1573-1582, 1986.

van Overschee, P.; de Moor, B. L. R. **Subspace identification for linear systems - theory, implementation, applications**. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts - EUA, v. I, 1996.

Wolpert, D. H.; Macready, W. G. No free lunch theorems for optimization, **IEEE Transaction on Evolutionary Computation**, v. 1, p. 67-82, 1997.

Wylen, G. J. V.; Borgnakke, C.; Sonntag, R. E. **Fundamentos da Termodinâmica**. 6 Edição. ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2003.

Yang, X. S. **Engineering optimization - an introduction with metaheuristic applications**. John Wiley & Sons, New Jersey, 2010.

## APÊNDICE A – Detalhamento do modelo simplificado 3 GDL

As equações do movimento para este caso, considerando a flexibilidade do tampo posterior e tendo em vista o desenho esquemático da Figura 3.2, resultam:

$$\begin{aligned} m_p \cdot \ddot{x}_p + k_p \cdot x_p - \Delta p \cdot A_p &= F \\ m_h \cdot \ddot{x}_h - \Delta p \cdot (A_h + A_b) &= 0 \\ m_b \cdot \ddot{x}_b + k_b \cdot x_b - \Delta p \cdot A_b &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde ‘A’ refere-se à área, ‘m’ a massa, ‘x’ ao deslocamento (positivo para fora da caixa nos três GDL) e ‘F’ é a força externa aplicada ao tampo, já os índices ‘h’, ‘p’ e ‘b’ referem-se à boca, *hole*, ao tampo frontal, *plate*, e ao tampo posterior, *back plate*, respectivamente.

Tendo em vista as definições (3.2) e (3.5), expressões análogas para o volume deslocado e para a pressão diferencial podem ser escritas como a seguir:

$$\begin{aligned} \Delta V &= -(x_p \cdot A_p + x_h \cdot A_h + x_b \cdot A_b) \\ \Delta p &= -\mu \cdot (A_p \cdot x_p + A_h \cdot x_h + x_b \cdot A_b) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Substituindo nas equações do movimento, resulta:

$$\begin{aligned} m_p \cdot \ddot{x}_p + k_p \cdot x_p + \mu \cdot (A_p \cdot x_p + A_h \cdot x_h + x_b \cdot A_b) \cdot A_p &= F \\ m_h \cdot \ddot{x}_h + \mu \cdot (A_p \cdot x_p + A_h \cdot x_h + x_b \cdot A_b) \cdot A_h &= 0 \\ m_b \cdot \ddot{x}_b + k_b \cdot x_b + \mu \cdot (A_p \cdot x_p + A_h \cdot x_h + x_b \cdot A_b) \cdot A_b &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Recoletando os termos obtém-se as duas matrizes:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_h & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_p + \mu \cdot A_p^2 & \mu \cdot A_h \cdot A_p & \mu \cdot A_p \cdot A_b \\ \mu \cdot A_h \cdot A_p & \mu \cdot A_h^2 & \mu \cdot A_b \cdot A_h \\ \mu \cdot A_p \cdot A_b & \mu \cdot A_b \cdot A_h & k_b + \mu \cdot A_b^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

## APÊNDICE B – Amortecimento proporcional e autovalores/autovetores

Substituindo-se a definição de amortecimento proporcional (5.13) nas equações do movimento no domínio da frequência, equação (5.4), é possível redefinir o problema de autovalores e autovetores generalizado de maneira que inclua a matriz de amortecimento:

$$\begin{aligned}
 (-\omega^2 \cdot [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}] + j \cdot \omega \cdot \beta \cdot [\mathbf{M}] + j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot [\mathbf{K}]) \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{0} \\
 (j \cdot \omega \cdot \beta - \omega^2) \cdot [\mathbf{M}] + (j \cdot \omega \cdot \gamma + 1) \cdot [\mathbf{K}] &\cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \\
 \left( \frac{j \cdot \omega \cdot \beta - \omega^2}{j \cdot \omega \cdot \gamma + 1} \cdot [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}] \right) \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Na expressão acima (B.1), o termo multiplicando a matriz de massa é um escalar, e é composto, à exceção da frequência, apenas por constantes. Então, comparando-a com o caso não amortecido, equação (5.5), é possível perceber que as frequências naturais não serão mais definidas diretamente pela raiz quadrada dos autovalores, conforme (5.7), porém, por outro lado os autovetores não sofrem nenhuma mudança com a inclusão da matriz de amortecimento proporcional. Isto equivale a afirmar que a matriz modal para o caso de amortecimento proporcional é igual à do caso não amortecido.

Segundo Ewins, 1984, os autovalores para amortecimento proporcional são grandezas complexas, ao invés de conter somente a parte imaginária, como no caso não amortecido. Ainda assim, podem ser decompostos em uma parte oscilatória e outra referente ao decaimento, análogo ao caso de um único GDL:

$$\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{X} \cdot e^{j \cdot (\omega_r \cdot \sqrt{1 - \zeta_r^2})} \cdot e^{-(\omega_r \cdot \zeta_r)} \tag{B.2}$$

de onde saem as expressões para a frequência natural amortecida e para a razão de amortecimento em termos das constantes de proporcionalidade:

$$\begin{aligned}
 \omega_{ra} &= \omega_r \cdot \sqrt{1 - \zeta_r^2}, \quad r = 1, 2, \dots, N \\
 \zeta_r &= \frac{\beta \cdot \omega_r}{2} + \frac{\gamma}{2 \cdot \omega_r}, \quad r = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

## APÊNDICE C – Rearranjo da receptância da forma matricial para indicial

Partindo-se de (5.19):

$$[\mathbf{H}(\omega)] = [\Psi] \cdot \text{diag} \left( \frac{1}{-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot c_r + k_r} \right) \cdot [\Psi]^T, \quad r = 1 \dots N \quad (\text{C.1})$$

Primeiramente, por conveniência, os elementos da matriz diagonal acima (C.1) são agrupados em uma letra:

$$[\mathbf{H}(\omega)] = [\Psi] \cdot \text{diag}(\alpha_r) \cdot [\Psi]^T, \quad r = 1 \dots N \quad (\text{C.2})$$

onde:

$$\alpha_r = \frac{1}{-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot c_r + k_r}, \quad r = 1 \dots N \quad (\text{C.3})$$

Então, expandindo-se o produto matricial resulta:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}(\omega)] &= \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \dots & \Psi_{1N} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{N1} & \Psi_{N2} & \dots & \Psi_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \dots & \Psi_{1N} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{N1} & \Psi_{N2} & \dots & \Psi_{NN} \end{bmatrix}^T \\ [\mathbf{H}(\omega)] &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot \Psi_{11} & \alpha_2 \cdot \Psi_{12} & \dots & \alpha_N \cdot \Psi_{1N} \\ \alpha_1 \cdot \Psi_{21} & \alpha_2 \cdot \Psi_{22} & \dots & \alpha_N \cdot \Psi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 \cdot \Psi_{N1} & \alpha_2 \cdot \Psi_{N2} & \dots & \alpha_N \cdot \Psi_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21} & \dots & \Psi_{N1} \\ \Psi_{12} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{1N} & \Psi_{2N} & \dots & \Psi_{NN} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

Portanto, tomando-se um elemento qualquer da matriz de FRFs,  $\mathbf{H}_{23}(\omega)$ , por exemplo, resulta:

$$\mathbf{H}_{23}(\omega) = \alpha_1 \cdot \Psi_{21} \cdot \Psi_{31} + \alpha_2 \cdot \Psi_{22} \cdot \Psi_{32} + \dots + \alpha_N \cdot \Psi_{2N} \cdot \Psi_{3N} \quad (\text{C.5})$$

Por indução, então, generalizando a expressão acima (C.5) é possível reescrevê-la sob a forma compacta:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \alpha_r \cdot \Psi_{ir} \cdot \Psi_{jr} \\ \mathbf{H}_{ij}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_{ir} \cdot \Psi_{jr}}{-\omega^2 \cdot m_r + j \cdot \omega \cdot c_r + k_r} \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

## ANEXO A – Características da célula de carga

Flexar ITX					
	<b>Capacidade</b> <b>3,5,10,20,30</b> <b>35,50</b>	<b>A</b> <b>30</b> <b>40</b>	<b>B</b> <b>7,5</b> <b>12,5</b>	<b>C</b> <b>25</b> <b>23,5</b>	
<b>Modelo</b>	<b>CDL</b>	<b>CD</b>	<b>CDB</b>	<b>CTMB</b>	<b>CTGC</b>
<b>Descrição</b>	Single Point para plataformas de até 40x40 cm	Single Point para plataformas de até 40x40 cm	Single Point para plataformas de até 40x40 cm	Single Point para plataformas de até 50x50 cm	Single Point para plataformas de até 60x60 cm
<b>Capacidade (Kg)</b>	3, 5, 10, 20, 30, 35, 50	2, 5, 10, 20, 30, 50, 75, 100	10, 20, 30, 50	50, 100, 200, 300	100, 200, 300, 500, 700
<b>Tensão Máxima (V)</b>	15	15	15	15	15
<b>Resistência Elétrica (OHM)</b>	350	350	350	350	350
<b>Saída Nomina/Sensibilidade (mV/V)</b>	2+/-10%	2+/-10%	2+/-10%	2+/-10%	2+/-10%
<b>Temp. de Trabalho Útil/Compensada (C)</b>	-10 a 40	-10 a 40	-10 a 40	-10 a 40	-10 a 40
<b>Zero Inicial (%SN)</b>	+/- 1	+/- 1	+/- 1	+/- 1	+/- 1
<b>Não Linearidade (%SN)</b>	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
<b>Histerese (%SN)</b>	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
<b>Não Repetibilidade (%SN)</b>	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
<b>Creep à Cap. Normal (% Carga em 20')</b>	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
<b>Comprimento do Cabo</b>	70 cm	70 cm	70 cm	3 m	3 m
<b>Grau de Proteção</b>	IP66	IP66	IP66	IP67	IP67
<b>Máxima Sobrecarga (%SN)</b>	150	150	150	150	150
<b>Efeito de Temp. no Zero (%SN/C)</b>	+/- 0,003	+/- 0,003	+/- 0,003	+/- 0,003	+/- 0,003
<b>Efeito de Temp. na Calibração (%SN/C)</b>	+/- 0,0015	+/- 0,0015	+/- 0,0015	+/- 0,0015	+/- 0,0015
<b>Resistência de Isolamento</b>	>5000	>5000	>5000	>5000	>5000
<b>Material</b>	Alumínio	Alumínio	Alumínio	Alumínio	Alumínio
<b>Modelo</b>	<b>EP</b>	<b>ITX</b>	<b>EG</b>	<b>CTG/CTGB</b>	<b>CL</b>
<b>Descrição</b>	Single Point para plataformas de até 25x35 cm	Single Point para plataformas de até 25x35 cm	Single Point para plataformas de até 40x40 cm	Single Point para plataformas de até 60x60 cm	Single Point para plataformas de até 120x120 cm
<b>Capacidade (Kg)</b>	10, 20, 30, 40	20, 40	10, 20, 75	100, 200, 300, 500, 700, 1000	1000, 2000
<b>Tensão Máxima (V)</b>	15	15	15	15	15
<b>Resistência Elétrica (OHM)</b>	350 +/-3,5	350 +/-3	350 +/-3,5	350	350
<b>Saída Nomina/Sensibilidade (mV/V)</b>	2+/-10%	2+/-10%	2+/-10%	2+/-10%	2+/-5%
<b>Temp. de Trabalho Útil/Compensada (C)</b>	-10 a 40	-10 a 40	-10 a 40	-10 a 40	-10 a 40
<b>Zero Inicial (%SN)</b>	+/- 2	+/- 2	+/- 2	+/- 1	+/- 2
<b>Não Linearidade (%SN)</b>	0,017	0,03	0,017	0,03	0,02

	Flexar ITX				
<b>Histerese (%SN)</b>	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
<b>Não Repetibilidade (%SN)</b>	0,01	0,02	0,01	0,02	0,02
<b>Creep à Cap. Normal (% Carga em 20')</b>	0,015	0,03	0,02	0,03	0,02
<b>Comprimento do Cabo</b>	40 cm	45 cm	3 m	3 m	3 m
<b>Grau de Proteção</b>	IP65	IP65	IP65	IP67	IP65
<b>Máxima Sobrecarga (%SN)</b>	150	120	150	150	120
<b>Efeito de Temp. no Zero (%SN/C)</b>	+/- 0,017	+/- 0,017	+/- 0,017	+/- 0,003	+/- 0,02
<b>Efeito de Temp. na Calibração (%SN/C)</b>	+/- 0,014	+/- 0,014	+/- 0,014	+/- 0,0015	+/- 0,0017
<b>Resistência de Isolamento</b>	>5000	>5000	>5000	>5000	>5000
<b>Material</b>	Alumínio	Alumínio	Alumínio	Alumínio	Alumínio

## ANEXO B – Características da placa de aquisição

### Specifications

Typical for 25°C unless otherwise specified.

Specifications in *italic text* are guaranteed by design.

#### Analog input

Table 1. Analog input specifications

Parameter	Conditions	Specification
A/D converter type		Successive approximation type
Input voltage range for linear operation, single-ended mode	CHx to GND	±10 volts (V) max
Input common-mode voltage range for linear operation, differential mode	CHx to GND	-10 V min, +20 V max
<i>Absolute maximum input voltage</i>	<i>CHx to GND</i>	<i>±28 V max</i>
<i>Input impedance</i>		<i>122KOhm</i>
Input current (Note 1)	V <sub>in</sub> = +10 V	70 microamperes (µA) typ
	V <sub>in</sub> = 0 V	-12 µA typ
	V <sub>in</sub> = -10 V	-94 µA typ
Number of channels		8 single-ended / 4 differential, software selectable
Input ranges, single-ended mode		±10 V, G=2
Input ranges, differential mode		±20 V, G=1 ±10 V, G=2 ±5 V, G=4 ±4 V, G=5 ±2.5 V, G=8 ±2.0 V, G=10 ±1.25 V, G=16 ±1.0 V, G=20 Software selectable
Throughput (Note 2)	Software paced	250 samples per second (S/s) typ, PC-dependent
	Continuous scan	50 kilosamples per second (kS/s)
Channel gain queue	Up to 16 elements	Software configurable channel, range, and gain.
Resolution (Note 3)	Differential	12 bits, no missing codes
	Single-ended	11 bits
CAL accuracy	CAL = 2.5 V	±36.25 mV max
Integral linearity error		±1 least significant bit (LSB) typ
Differential linearity error		±0.5 LSB typ
Repeatability		±1 LSB typ
CAL current	Source	5 milliamperes (mA) max
	Sink	20 µA min, 100 µA typ
Trigger source	Software selectable	External digital: TRIG_IN
Pacer source	Software selectable	Internal External (SYNC), rising edge triggered Programmed IO

Note 1: Input current is a function of applied voltage on the analog input channels. For a given input voltage, V<sub>in</sub>, the input leakage is approximately equal to (8.181\*V<sub>in</sub>-12) µA.