UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Vanessa Silva Barbosa

UM ESTUDO DO MODELO DE MACROALOCAÇÃO PROPOSTO POR BLACK & LITTERMAN

Porto Alegre

2010

Vanessa Silva Barbosa

UM ESTUDO DO MODELO DE MACROALOCAÇÃO PROPOSTO POR BLACK & LITTERMAN

Trabalho de conclusão de curso de Especialização apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Mercado de Capitais.

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

Porto Alegre
2010

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS e à Associação dos Analistas e Profissionais de Investimento do Mercado de Capitais, pelos excelentes professores do curso de Especialização, de modo especial ao professor João Fróis Caldeira pelo apoio à realização deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO *6*
1 Modelo de Markowitz *8*
1.1 Modelo de Markowitz **8**
2 Modelo de Black-Litterman *12*
2.1 Otimização Reversa ao Modelo de Markowitz **14**
2.2 Especificação das Opiniões **16**
2.2.1 Cálculo da Variância das Opiniões **16**
2.3 Fórmula do Modelo de Black-Litterman **18**
2.4 Derivação do Novo Vetor Combinado de Retornos **19**
2.5 Calibragem do Modelo **21**
3. Aplicação Empírica do Modelo de Black-Litterman *24*
3.1 Composição do Mercado: (jan/10) **24**
3.2 Matriz de Correlação **25**
3.3 Matriz de Covariância dos Excessos de Retornos **26**
3.4 Cálculo do Retorno da Carteira **26**
3.5 Acrescentando Opiniões e Definindo Confiança nas Opiniões **27**
4. Conclusão *30*
5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS *32*

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fronteira Eficiente 9
Figura 2 – Derivando o novo vetor combinado de retornos 20
Figura 3 - Capitalização de mercado (jan/10) 25
Figura 4 - Matriz de correlação 25
Figura 5 - Matriz de covariância 26
Figura 6 - Excesso de retorno da carteira 26
Figura 7 - Retorno da carteira 27
Figura 8 - w de mercado x w posterior 29

RESUMO

A construção de carteiras ótimas é um problema recorrente da gestão de ativos, como por exemplo, em consultorias de investimentos, bancos, asset management, fundos de pensões, entre outras instituições financeiras. E no centro de todas as decisões e estratégias da gestão de ativos está a volatilidade, a qual é de compreensão dos investidores antes mesmo de estudos mais formais, pois o entendimento que o retorno esperado varia diretamente com o risco assumido é de aceitação comum.

Em meados da década de 50, os economistas e financistas começaram a tratar de forma mais formal a relação risco e retorno, do ponto de vista para tomada de decisão para investimentos. Com vistas a extrair implicações para construções de carteiras, os investidores, a partir da publicação do trabalho seminal de Markowitz (1952), costumam utilizar os embasamentos teóricos publicados neste estudo, o qual funda as bases da moderna teoria de carteiras. O autor aborda quantitativamente o problema da formação de *portfolios*, propondo que se leve em consideração para tal fim, além das características individuais dos ativos, a forma como cada ativo se relaciona com os demais, ou seja, a percepção de Markowitz é a de olhar para os ativos no *portfolio* e não considerar só o risco intrínseco de cada ativo e sim a forma que esses ativos se correlacionam com outros ativos dentro de uma carteira. Porém, a utilização do modelo de Markowitz apresenta problemas como a obtenção de *portfolios* instáveis com elevada sensibilidade às estimativas de retorno esperado imputadas ao modelo, a geração de *portfolios* altamente concentrados e não intuitivos, o problema em não considerar os diferentes níveis de incerteza associados às estimativas dos *inputs* do modelo e o de não levar em consideração a capitalização de mercado.

Portanto, este trabalho visa apresentar as limitações do modelo de Markowitz, desenvolver os fundamentos teóricos do modelo construído por Black-Litterman (ver Litterman et al., 1992), o qual busca contornar as dificuldades existentes no modelo de Markowitz e apresentar a construção de um *portfolio* ótimo, através de dados observados do mercado e por meio da metodologia bayesiana.

INTRODUÇÃO

Os investidores definem estratégias e buscam construir carteiras ótimas, através do processo de otimização da média/variância, método básico de alocação de ativos, que remonta ao famoso artigo de Markowitz (1952). Onde conceitua "*portfolio* eficiente" como aquele que maximiza o retorno esperado por unidade de risco (variância ou volatilidade) ou que minimiza o risco por unidade de retorno. O processo de otimização seleciona *portfolios* eficientes com base nos ativos em questão, combinando as estimativas de retorno esperado e de risco para cada ativo com a covariância (ou momentos simultâneos de altas e baixas) de cada ativo com cada um dos demais ativos em questão. O objetivo é maximizar o retorno esperado do *portfolio* e, ao mesmo tempo, minimizar todas as covariâncias, de modo que o *portfolio* seja tão diversificado quanto possível.

Porém, os processos de otimizações geram um problema, já que esses se mostram parciais em relação aos ativos que apresentam covariâncias baixas com outros ativos ou combinações de ativos com altas correlações. Sendo qualquer inconsistência entre dois conjuntos de *inputs*, como por exemplo, retorno esperado e risco (o que acontece com freqüência quando esses dois *inputs* são estimados separadamente) são tratados pelo processo de otimização como oportunidade. Dessa forma, muitos dos ativos que o processo de otimização tende a favorecer, como *private equity* e ações de mercados emergentes, apresentam liquidez relativamente baixa ou retornos de alta volatilidade, o que gera *portfolios* concentrados. Os detentores de *portfolios* tradicionais se sentem desconfortáveis com processos de otimização malcomportados, que recomendam alocações altas demais para esses tipos de ativos, por envolverem custos de operação muito altos ou por serem demasiado heterodoxo para gostos conservadores. Sendo possível melhorar o comportamento do processo de otimização por meio de instruções para alocar não mais que determinada porcentagem do *portfolio* total para ativos que gerem desconforto. Contudo, embora tais restrições possam tornar o processo de otimização mais bem comportado, elas também criam um novo dilema: o excesso de restrições dilui as próprias vantagens de usar o processo de otimização. Contudo, esse dilema poderá ser contornado com a utilização do modelo proposto por Black-Litterman.

Tem-se, portanto, a intenção de apresentar a metodologia desenvolvida por Black-Litterman que otimiza relação risco/retorno, contrapondo com alguns problemas vivenciados até então na utilização do modelo de Markowitiz e por fim mostrar sua aplicabilidade com dados observados do mercado financeiro para melhor entendimento do modelo.

O primeiro capítulo deste trabalho destina-se, a compreender os problemas encontrados no modelo de Markowitz, os quais desafiaram a construção do modelo de estratégias de gestão de ativos de Black-Litterman. O segundo capítulo será abordado os fundamentos teóricos do modelo de Black-Litterman, onde o objetivo será entender como é utilizado a abordagem bayesiana para combinar as opiniões dos investidores, em relação ao retorno esperado de um ou mais ativos com a posição de mercado. Por fim, o terceiro e último capítulo demonstra o modelo passo-a-passo, desenvolvendo na prática as teorias abordadas nos capítulos anteriores.

1 Modelo de Markowitz

1.1 Modelo de Markowitz

Nesse modelo, o autor aborda quantitativamente o problema de construção de *portfolios*, propondo que se leve em consideração para tal fim, além das características individuais dos ativos, a forma como cada ativo se relaciona com os demais.

A matemática do retorno esperado de um *portfolio* é relativamente simples, tendo em vista que os retornos esperados dos diferentes ativos são aditivos em qualquer ponto do tempo. Considerando-se um *portfolio* composto por ações (E) e títulos (D) nas proporções w_D e $w_E = 1 - w_D$, tem-se que o retorno esperado do *portfolio* $E(r_p)$ consiste na média ponderada do retorno esperado dos ativos que o compõem, conforme a seguir:

$$E(r_p) = w_D . E(r_D) + w_E . E(r_E)$$

Equação (1)

Diferentemente dos retornos, o risco pode ser não aditivo, à medida que depende da forma com que os retornos se correlacionam, o que tem como implicação que a diversificação entre ativos pouco correlacionados tende a reduzir o risco do *portfolio*.

No caso do *portfolio* composto por ações (E) e títulos (D) nas proporções w_D e $w_E = 1 - w_D$, tem-se que a variância do *portfolio* consiste na soma ponderada das covariâncias dos ativos que o compõem, tendo como pesos o produto das proporções dos pares de ativos de cada covariância.

$$\sigma_p^2 = w_D \cdot w_D \cdot Cov(r_{D,} r_{D,}) + w_E \cdot w_E \cdot Cov(r_{E,} r_{E,}) + 2 \cdot w_D \cdot w_E \cdot Cov(r_{D,} r_{E,})$$

Equação (2)

Sendo:

$$Cov(r_D, r_D) = [r_D - E(r_D)] \cdot [r_D - E(r_D)] = [r_D - E(r_D)]^2 = \sigma_D^2$$
$$Cov(r_E, r_E) = [r_E - E(r_E)] \cdot [r_E - E(r_E)] = [r_E - E(r_E)]^2 = \sigma_E^2$$

Equação (3)

Importante destacar que *portfolios* com ρ < 1 apresenta-se uma melhor relação risco e retorno do que a dos ativos isoladamente, sendo maior o ganho de eficiência quanto menor for o ρ. Se um ativo da carteira se movimentar positivamente e outro ativo se movimentar na mesma proporção, considero como coeficiente de correlação = 1, não havendo o efeito de diversificação.

A partir da função de variância (σ) é possível determinar o *portfolio* de mínima variância, como podemos visualizar, na figura abaixo, diversas combinações de retorno esperado e risco (desvio-padrão) de todos os *portfolios* que podem ser construídos com os ativos disponíveis. Onde identificamos a fronteira eficiente (de mínima variância) e o respectivo conjunto de oportunidades de investimento, o qual determina o *portfolio* de ativos com risco ótimo.

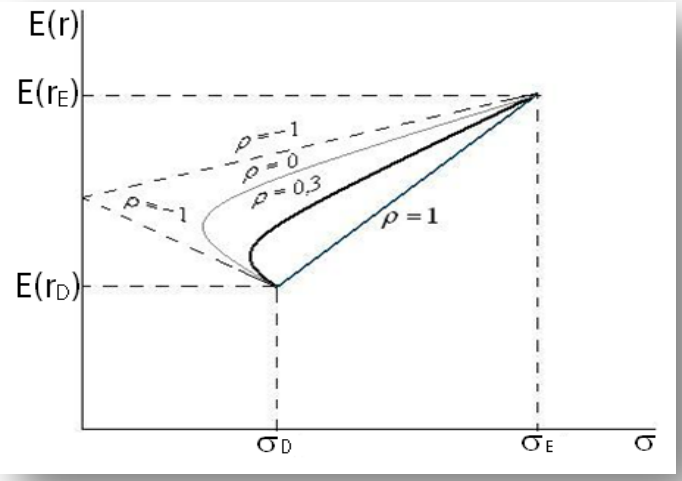

Figura 1 – Fronteira Eficiente

A contribuição de um ativo para o risco do *portfolio* é mensurada pela sua covariância com o *portfolio* de mercado. A contribuição de um ativo para a variância do *portfolio* pode ser expressa pela soma das covariâncias da coluna correspondente ao ativo, multiplicadas pelos pesos das linhas e da coluna. Deste modo, é possível expressar a contribuição do ativo X para o risco do *portfolio* de mercado pela sua covariância com este *portfolio*. É feita a escolha dos ativos, a partir da análise de mercado e dos títulos, com o intuito de identificar os ativos que apresentam as melhores relações entre risco e retorno dentro de cada classe de ativos.

Em finanças existem dois "*free lunch*", um é a condição de diversificação de ativos e o outro é a diversificação temporal, à medida que se avança no tempo se tem uma diluição no risco. Através da fronteira eficiente, a qual representa todas as combinações de ativos que são eficientes sobre o ponto de vista risco / retorno, ou seja, para um determinado risco qual o maior retorno esperado possível, otimizando o índice de Sharpe (maior retorno esperado por unidade de risco assumida) e considerando o efeito diversificação pode-se aumentar o retorno mantendo-se o mesmo nível de risco, escolhendo o melhor ponto sobre a fronteira eficiente, que é o ponto que tangencia a fronteira. Sendo que pode-se combinar a carteira ótima com alocações em ativo livre de risco para diminuir o risco e adequá-la a aversão a risco do investidor.

1.2 Limitações do Modelo de Markowitz

Deve-se tomar alguns cuidados na utilização do modelo de Markowitz, pois ele é robusto em conceitos teóricos, porém tem problemas na aplicabilidade. Como o modelo utiliza retorno esperado com base em retornos passados, gera resultados contra intuitivos, como por exemplo, se considerar o desempenho da bolsa dos últimos 252 dias, o qual é sensibilizado por diversos fatores, como pelo cenário macroeconômico, não é razoável considerar que ele se repetirá daqui para frente, principalmente quando ocorrem retornos extraordinários, claro que pode atribuir maior peso aos eventos mais recentes, utilizando por exemplo, a suavização exponencial, porém a incerteza para estimar retornos esperados permanece, por isso o mais interessante é analisar o retorno esperado olhando para frente, de forma prospectiva.

Desta forma, obtêm-se *portfolios* instáveis com elevada sensibilidade às estimativas de retorno esperado imputadas ao modelo, gerando muitas vezes *portfolios* altamente concentrados. Já que o processo de otimização tende a favorecer ativos que apresentam liquidez relativamente baixa ou retornos de alta volatilidade, alocando percentuais altos demais nesses ativos, nesse caso conforme Bernstein, Peter (2007, p. 251): quando isso acontece, o processo de otimização "se comportou mal": E para melhorar esse comportamento de alta concentração é inserido restrições ao processo de otimização, porém geram o problema de diluir as próprias vantagens de utilizar o processo de otimização.

Portanto, o resultado são carteiras pouco diversificadas, altamente concentradas em determinados ativos, sem interferência dos pontos de vista do gestor em relação as suas opiniões de alocações e não leva em consideração a capitalização do mercado, ou seja, onde o mercado está posicionado e qual o retorno esperado que justifica essa posição.

2 Modelo de Black-Litterman

Várias outras metodologias foram propostas com o objetivo de melhor alocação de ativos e de solucionar os problemas encontrados na utilização de Markowitz. O problema no processo de otimização, de concentração em determinados ativos e a necessidade de inserir restrições chamou a atenção dos analistas quantitativos do Goldman Sachs em 1989. Conforme (Bernstein, 2007) Bob Litterman (que se juntou a equipe da Goldman Sachs em 1986 e até então era Vice Presidente do departamento de análise do Federal Reserve de Minneapolis) como chefe de pesquisas de renda fixa teve então como tarefa construir um modelo global de composição de *portfolios* de renda para os clientes do Goldman Sachs em todo mundo. Sentindo-se inseguro sobre como iniciar o trabalho, Litterman consultou Fischer Black (economista americano, conhecido por ser co-autor do famoso modelo de Black-Scholes, equação utilizada para avaliar opções). Este se interessou pelo desafio, mas não tinha o hábito de raciocinar sobre os modelos em termos de mundo real. Litterman se queixou do comportamento do processo de otimização. "O mau comportamento é bem conhecido", respondeu Black, "e é por isso que a maioria dos usuários de processos de otimização impõe restrições aos resultados". Litterman resistiu à sugestão, já que acreditava que inserir restrições faz com que o processo perca seu valor, considerando como manipulação. Black sugeriu um método alternativo, já que tinha acabado de publicar um trabalho onde desenvolveu uma solução de equilíbrio para o problema do hedge do risco cambial nos *portfolios* globais, apesar desse trabalho não fazer referência ao comportamento dos processos de otimização, Litterman com base nesse artigo de Black, o qual sugere que se pode obter a resposta para sua questão, mediante a otimização do *trade-off* entre risco de flutuações cambiais e o retorno esperado do *portfolio*. Sem restrições e sem pressupostos, inserem-se no processo de otimização os retornos esperados da condição de equilíbrio para os ativos de renda fixa e para as moedas, além das volatilidades e covariâncias para cada ativo em questão. Em seguida, o processo de otimização recomendará que se mantenha o *portfolio* de mercado global de renda fixa. Com isso, Litterman teve um grande entendimento, se não se tem pressupostos, mantenha o *portfolio* de mercado.

Em contexto sem restrições, o processo de otimização agora recomenda que o *portfolio* ótimo consiste em manter parte do capital no *portfolio* do mercado e o restante em *portfolios* que

representem as opiniões do gestor. Além disso, quando se adota o equilíbrio como centro de gravidade, não se precisa ter opiniões sobre cada um dos ativos. No entanto, quando se tem opiniões sobre determinados ativos, o processo de otimização aplica essa opinião, até o ponto considerado adequado a todos os outros ativos correlacionados, esse procedimento evita os *portfolios* "malcomportados". Agora, é possível compor *portfolios* aceitáveis com base na confiança nas próprias opiniões e no nível de risco a ser atribuídos às próprias opiniões. Dessa maneira, o processo de otimização se torna bem comportado.

Litterman assim descreveu a sua abordagem:

O investidor se interessa por uma ou mais opiniões, cada uma das quais gera uma expectativa de retorno do *portfolio* de sua escolha. Denomina-se cada uma dessas carteiras como "view *portfolio*". Pede-se ao investidor para especificar não só as expectativas de retorno para cada um dos *portfolios* opinativos, mas também o grau de confiança, que é o desvio-padrão em torno da expectativa, sendo o *portfolio* ótimo uma combinação ponderada das capitalizações de mercado do *portfolio* de equilíbrio dos *portfolios* opinativos. Os tamanhos dos desvios para os *portfolios* opinativos são função de magnitude e da confiança expressas nos retornos esperados inerentes às opiniões específicas dos investidores.

Sobre o modelo de Black-Litterman , Idzorek (2002, p. 2) descreve:

> *The Black-Litterman model enables investors to combine their unique views regarding the performance of various assets with the market equilibrium in a manner that results in intuitive, diversified portfolios.*

Como vimos, esse modelo permite otimizar um *portfolio* considerando as posições de mercado e atribuindo para cada ativo opiniões e confiança que o investidor atribui as suas convicções a respeito do cenário econômico. Esse é um modelo de alocação de ativos sofisticado e que supera problemas encontrados no modelo de Markowitz. Utilizando a abordagem bayesiana para combinar as opiniões dos investidores, em relação ao retorno esperado de um ou mais ativos, com a posição de mercado.

Conforme Idzorek (2002), esse modelo de alocação de ativos foi introduzido por Black and Litterman em 1990, mas foi em 1992 que seus estudos culminaram no modelo imortalizado, capaz da proeza notável de combinar a noção de retornos esperados em condições de equilíbrio

com ampla variedade de estratégias de gestão ativa. Ficando conhecido como Black-Litterman Global Asset Allocation Modal publicado em setembro de 1992 pelo Financial Analyst Journal.

2.1 Otimização Reversa ao Modelo de Markowitz

A partir da observação do *portfolio* total dos participantes do mercado (capitalização de mercado das classes de ativos relevantes), da estimação da matriz de variância-covariância e da suposição do nível de aversão a risco do mercado, é inferido o vetor de retornos esperados implícitos de equilíbrio (distribuição de referência).

O modelo permite incorporar também as opiniões dos investidores por meio de uma abordagem bayesiana (distribuição condicional) que fornece alto grau de liberdade, no sentido que não há necessidade de fornecer pressupostos para todos os ativos e que pode atribuir maiores ou menores níveis de confiança às diferentes opiniões. Considerando as duas distribuições é obtida uma distribuição combinada posterior.

Sendo o procedimento de otimização reversa procedido a partir da função utilidade quadrática a seguir[1]:

$$U = w'\pi - \left(\frac{\lambda}{2}\right) w' \sum w$$

Equação (4)

onde,

U = função de utilidade do investidor

w = vetor de pesos investidos em cada ativo

π = vetor de excesso de retorno de equilíbrio implícito

λ = parâmetro de aversão a risco médio de mercado

$\sum$= matriz de covariância de ativos

[1] A versão aqui apresentada segue Idzorek (2002)

Para utilizar a fórmula anterior para π é necessário especificar o valor do coeficiente de aversão a risco (λ).

$$\frac{dU}{dw} = \pi - \lambda \cdot \sum \cdot w = 0$$

Equação (5)

Resolvendo para π, primeiramente multiplicam-se ambos os lados da equação por w' e encontra-se o parâmetro de aversão a risco (λ), depois se tem (π):

$$w'\pi = \lambda w' \sum w \therefore \lambda = \frac{w'\pi}{w'\sum w}$$

$$\pi = \lambda \cdot \sum \cdot w$$

Equação (6)

A partir da fórmula para o excesso de retorno esperado (π) é possível obter-se o vetor de pesos ótimos:

$$w = (\lambda \sum)^{-1} \pi$$

Equação (7)

Como seria de se esperar (desde o processo de extrair o retorno de equilíbrio implícito do mercado usando os pesos de capitalização), o vetor de excesso de retorno de equilíbrio implícito (π) leva para o *portfolio* de mercado. Na ausência dos pontos de vista dos investidores no *portfolio* de mercado, que difere dos retornos implícitos obtidos com a otimização inversa, os investidores mantém com a carteira de mercado, mercado neutro ou de equilíbrio, já que existe a idéia de que o mundo se movimenta para o equilíbrio, que a mão invisível ainda está por aí.

2.2 Especificação das Opiniões

Os gestores de investimentos freqüentemente possuem opiniões/*views* específicas sobre o retorno esperado dos ativos, opiniões que podem divergir dos retornos implicitamente retirados do mercado. O modelo de Black-Litterman permite que esses pontos de vista sejam inseridos na carteira de mercado e devem ser expressas tanto em termos absolutos ou relativos. A combinação dos pontos de vista dos investidores é chamada de distribuição condicional.

A matriz de covariância das opiniões é suposta diagonal, o que implica que cada opinião não se correlacione com as demais, ou seja, o modelo pressupõe que as *views* são independentes umas das outras. Porém, o modelo exige disciplina e coerência dessas opiniões, pois essas serão consideradas para obtenção de toda carteira ótima.

A representação dos k *views* sobre n ativos será realizada considerando-se as seguintes matrizes:

P, matriz (k x n) dos pesos dos *views* de cada ativo (para *views* relativos a soma dos pesos será 0; para *views* absolutos a soma será 1)

Q, matriz (k x 1) dos retornos de cada *view*

Ω, matriz (k x k) de covariância dos *views* (a variância dos *views* é inversamente relacionada com a confiança do investidor nos *views*)

2.2.1 Cálculo da Variância das Opiniões

Uma possibilidade é assumir que a variância dos *views* é proporcional a variância dos retornos dos ativos, assim como a variância da distribuição de referência o é. Deste modo, tem-se:

$$w_i = p \cdot (\tau\sum) \cdot p' \; ou \; \Omega = diag[P \cdot (\tau\sum) \cdot P']$$

Equação (8)

A incerteza das opiniões é representada por um termo de erro aleatório, independente e normalmente distribuído, com média zero e matriz de covariância (Ω). Quanto maior a variância do termo de erro (ω), maior a incerteza que o investidor atribui a seu ponto de vista.

Portanto, em termos gerais, uma *view* assume a seguinte forma:

$$Q + \varepsilon = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}$$

Equação (9)

Exceto no caso hipotético em que um investidor tem 100% de confiança na sua opinião expressa, o termo de erro (ε) é um valor positivo ou negativo, diferente de 0. O termo de erro (ε) não entra diretamente na fórmula de Black-Litterman, mas a variância do erro (Ω), sim. As variâncias dos termos de erro (ω) formam a matriz (Ω), que representa a incerteza das opiniões

Para o caso em que se tem k *views* e n ativos, a matriz de covariância dos *views* assume o formato abaixo, sendo que o modelo não exige que o investidor tenha opiniões sobre todos os ativos.

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_k \end{bmatrix}$$

Equação (10)

O vetor coluna das opiniões Q é vinculado com os ativos por meio da matriz P, que para o caso de k *views* e n ativos assume a dimensão (k x n).

Conceitualmente, o modelo Black-Litterman é uma média ponderada dos complexos vetor de excesso de retorno de equilíbrio implícito (Π) e do vetor view (Q), em que seus relativos pesos são uma função escalar (τ) e as incertezas das opiniões (Ω). Quanto menor for a confiança e a certeza do investidor sobre suas percepções, mais próximo ficará o novo vetor de retorno do vetor de excesso de retorno de equilíbrio implícito (Π), ou seja, quanto menor a certeza em relação às percepções, mais próximo da alocação de mercado o investidor se posicionará.

Infelizmente, a definição do escalar (τ) e a incerteza em relação às opiniões são os parâmetros mais abstratos e difíceis de especificar no modelo. O escalar (τ) é mais ou menos inversamente proporcional ao peso relativo do vetor de excesso de retorno de equilíbrio implícito (Π). A abordagem encontrada na literatura sobre a definição do escalar (τ) é escassa. Sobre a abordagem do escalar (τ), Idzorek (2002, p. 14) comenta: "*Both Black and Litterman (1992) and Lee (2000) address this issue: since the uncertainty in the mean is less than the uncertainty in the return, the scalar (τ) is close to zero. One would expect the Equilibrium Returns to be less volatile than the historical returns*".

Autores divergem ao definirem o valor para o escalar (τ), Lee (2000) define entre 0,01 e 0,05 e em seguida calibra o modelo baseado em um nível de *tracking error*. Já Satchell and Scowcroft (2000) consideram o escalar (τ) como 1,10 e Blamont e Firoozye (2003) interpretam τΣ como erro padrão da estimativa do excesso de retorno de equilíbrio implícito (Π), assim, o escalar (τ) é de aproximadamente 1 dividido pelo número de observações.

2.3 Fórmula do Modelo de Black-Litterman

Conceitualmente, o modelo de Black-Litterman constitui uma média ponderada complexa do vetor de retorno implícito de mercado e do vetor de opiniões, tendo como pesos relativos a covariância dos retornos e o nível de confiança das opiniões, conforme a seguir:

$$E[R] = [(\tau\sum)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} \cdot [(\tau\sum)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

Equação (11)

Breve descrição de cada um dos elementos da fórmula:

E(R) = nova distribuição combinada do vetor de retorno

τ = escalar

Σ = matriz de covariância dos excessos de retornos (matriz N x N)

P = matriz que identifica os ativos que possuem opiniões

Ω = diagonal da matriz de covariância dos termos de erros das opiniões que expressam as incertezas de cada opinião

Π = vetor de retornos implícitos de equilíbrio

Q = vetor de *views*

Essa fórmula pode ser dividida em 2 termos, sendo que o 1º termo (denominador) assume a função de normalizador e o 2° termo (numerador) expressa a ponderação entre o vetor de retornos implícitos de equilíbrio (Π) e o vetor das opiniões, tendo como pesos a covariância dos retornos e o nível de confiança das percepções do investidor

Casos extremos: $P = 0 \Rightarrow E(R) = \pi,\ \ \Omega \rightarrow 0 \Rightarrow E(R) = P^{-1}Q$

2.4 Derivação do Novo Vetor Combinado de Retornos

Depois de definido o escalar (τ) e a matriz de covariância do termo de erro (Ω), todas as entradas são, então, vindas da fórmula de Black-Litterman e as novas distribuições combinadas do vetor de retorno (E [R]) são derivadas. O processo de juntar as duas fontes de informação é representado na Figura 2:

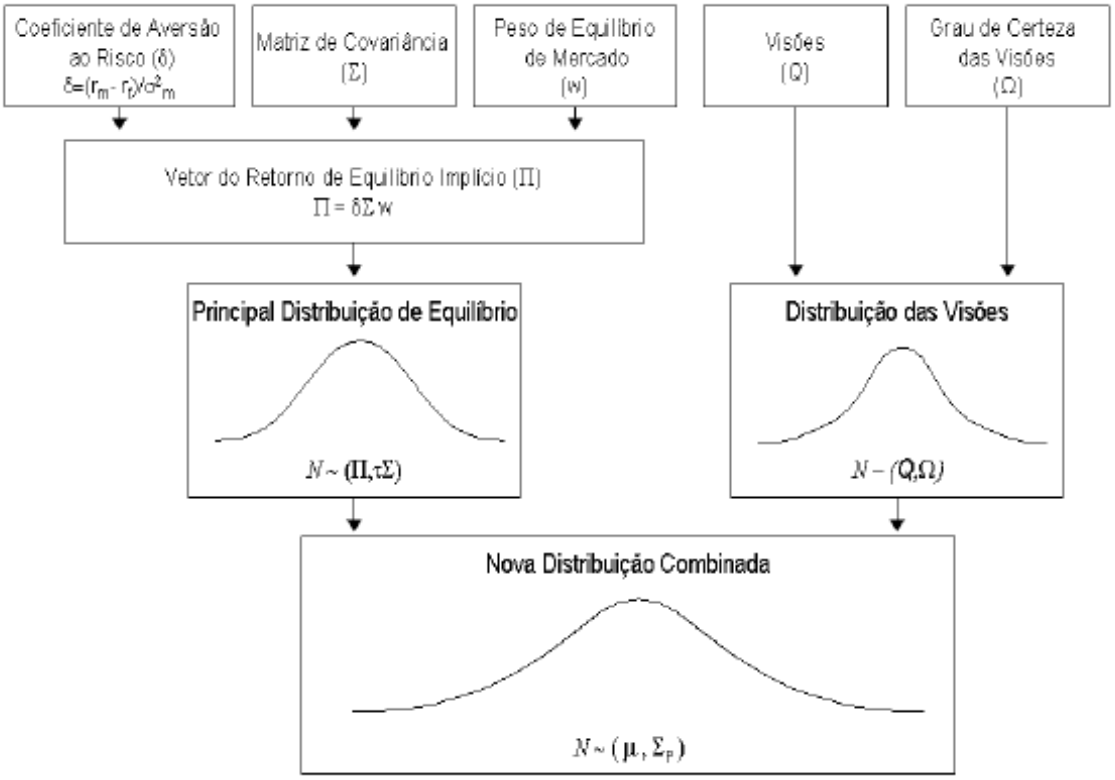

Figura 2 – Derivando o novo vetor combinado de retornos

Como pode ser visto na figura acima a distribuição de equilíbrio juntamente com a distribuição das opiniões forma a nova distribuição combinada do vetor de retorno, sendo importante destacar que mesmo o investidor tendo opiniões apenas para alguns ativos, os retornos individuais de todos os ativos foram influenciados e mudaram seus respectivos retornos de equilíbrio implícitos. A opinião acerca de apenas um único ativo faz com que o retorno implícito dos ativos mude, uma vez que cada um dos ativos está linkado com o retorno do outro, através da matriz de covariância dos excessos de retorno (Σ), por isso é importante a disciplina e a coerência por parte do investidor ao definir e inserir suas percepções.

De maneira geral, a nova carteira pode ser vista como a soma de duas carteiras, onde a carteira 1 é a carteira extraída da capitalização do mercado, ou seja, onde o mercado está posicionado e a carteira 2 é uma série de posições *long and short* com base nas opiniões do investidor.

2.5 Calibragem do Modelo

A matriz de covariância dos *views* (Ω) constitui o parâmetro matemático mais abstrato do modelo, não havendo uma resposta universal para a sua especificação. Idzorek (2004) desenvolve um método para determinação do nível de confiança implícito das opiniões, permitindo que os mesmos sejam expressos em termos do intervalo de 0% a 100%.

Considerando que as variâncias individuais dos termos de erro (ω), que formam a diagonal da matriz de covariância dos *views* (Ω), são calculadas considerando a variância dessas opiniões ($p_k \Sigma p'_k$) multiplicada pelo escalar (τ), o autor entende que há outros fatores (acurácia do modelo, habilidade, qualidade do analista, etc.) que também afetam a confiança do investidor nas suas percepções.

Se todos os elementos da diagonal principal (Ω) são iguais a zero, equivale a especificação de 100% de confiança em todas opiniões, já que a variância do termo de erro (ω) de uma opinião é inversamente relacionada com a confiança do investidor sobre sua percepção inserida. Assim, uma variação do termo de erro (ω) de 0 representa 100% de confiança (certeza absoluta).

Neste caso, tem-se o maior distanciamento possível dos pesos de equilíbrio de mercado, conforme fórmulas a seguir:

$$E[R_{100\%}] = \pi + \tau\sum P'(P\tau\sum P')^{-1} \cdot (Q - P\pi)$$

Equação (12)

$$w_{100\%} = (\lambda\sum)^{-1}\pi$$

Equação (13)

Os novos vetores combinados de retorno esperado [E(R) e $E(R_{100\%})$] possibilitam o cálculo dos vetores de pesos.

A partir do distanciamento nos novos vetores em relação ao vetor de pesos de equilíbrio de mercado é possível o cálculo dos níveis de confiança implícitos das opiniões.

Considerando-se o caso mais geral e usual em que Ω = αP(τΣ)P', com α ≥ 1, e substituindo na equação principal modificada, tem-se:

$$E[R] = \pi + \left[\frac{1}{(1+\alpha)}\right](P^{-1}Q - \pi)$$

Equação (14)

Substituindo em $\widehat{\boldsymbol{w}} = (\lambda\sum)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\pi}$ tem -se:

$$\widehat{w} = \left\{\pi + \left[\frac{1}{(1+\alpha)}\right](P^{-1}Q - \pi)\right\}(\lambda\sum)^{-1}$$

Resolvendo-se para condições limites, fica:

$$Se, \left[\frac{1}{(1-\alpha)}\right] = 0 \Rightarrow w_{mk} = \pi(\lambda\sum)^{-1}$$

$$Se, \left[\frac{1}{(1-\alpha)}\right] = 1 \Rightarrow w_{100} = P^{-1}Q(\lambda\sum)^{-1}$$

Combinando-se ambos termos, resulta:

$$\widehat{w} = \pi(\lambda\sum)^{-1} + \left[\frac{1}{(1+\alpha)}\right] \cdot [P^{-1}Q(\lambda\sum)^{-1} - \pi(\lambda\sum)^{-1}]$$

Substituindo w_{mk} e w_{100}, fica:

$$\widehat{w} = w_{mk} + \left[\frac{1}{(1+\alpha)}\right] \cdot [w_{100} - w_{mk}]$$

Tem-se, portanto, que:

$$Confiança = \frac{1}{(1+\alpha)} = \left[\frac{(\widehat{w} - w_{mk})}{(w_{100} - w_{mk})}\right]$$

Equação (15)

Como vimos, o modelo de Black-Litterman permite que os investidores combinem suas opiniões com o vetor de retornos implícitos de equilíbrio do mercado (Π) para encontrar o novo vetor combinado de retornos. Essa nova distribuição combinada leva de forma intuitiva a encontrar uma carteira bem diversificada. O modelo tem dois parâmetros que controlam a importância relativa entre o vetor de retornos implícitos de equilíbrio (Π) e o retornos das opiniões, que é o escalar (τ) e a incerteza dos *views* (Ω), no qual ambos são muito difíceis de especificar. A fórmula de Black-Litterman com 100% de segurança nos permite determinar a confiança implícita nas percepções dos investidores. Tirando dessa confiança implícita, um novo método para controlar a inclinação e os pesos do *portfolio* final, causado pela inserção das opiniões. O método afirma que a magnitude das inclinações deve ser controlada pelo investidor baseado no nível de confiança intuitiva de 0% a 100%. Globalmente, o modelo de Black-Litterman supera os problemas encontrados pela otimização de média-variância, como, as carteiras pouco intuitivas e altamente concentradas, já que a distribuição de ativos através da otimização clássica de Markowitz, pode gerar posições em poucos bens. Por não levar em conta a capitalização do mercado, este modelo acarreta em problema para gestão efetiva de carteiras, por gerar *portfolios* “malcomportado”. Portanto, o grande diferencial do modelo de Black-Litterman é partir de uma carteira de equilíbrio que representa todo o mercado, extraindo implicitamente os retornos esperados e incorporando as opiniões dos investidores para alcançar a carteira ótima.

3. Aplicação Empírica do Modelo de Black-Litterman

Para desenvolver o modelo foi feita a captação de dados históricos no site www.andima.com.br da posição dos contratos de DI futuro de vencimentos 2011, 2012 e 2017, da posição em papéis indexados de vencimentos 2011, 2015 e 2045, da posição em IMA-S e do estoque de CDB, no site www.debentures.com.br do estoque de debêntures e no site www.bmfbovespa.com.br do valor da capitalização bursátil das empresas que compõem o IBX-100, sendo considerado dessa capitalização, somente o valor negociado em bolsa. A posição utilizada é de 29 de janeiro de 2010.

3.1 Composição do Mercado: (jan/10)

Com a base de dados adquirida nos sites relacionados acima, chega-se na posição de mercado. Essa posição é a soma da dívida pública, da dívida privada e da renda variável. Sendo que a dívida pública é representada pelos contratos de DI futuro de vencimentos 2011, 2012 e 2017, pelos títulos públicos de vencimento 2011, 2015 e 2045 e pelo IMA –S, sendo utilizado os critérios de maior liquidez e representatividade desse segmento, já a dívida privada é a soma dos CDB/RDB e das Debêntures e por último a renda variável, que é considerado o valor do *free float*, ou seja, o valor que está sendo negociado em bolsa da capitalização do IBX-100, foi utilizado esse índice por medir o retorno de 100 ações selecionadas entre as mais negociadas na bmfbovespa em termos de número de negócios e volume financeiro.

Chegando à seguinte composição de mercado no mês de janeiro de 2010:

DÍVIDA PÚBLICA			DÍVIDA PRIVADA						RENDA VARIÁVEL			MERCADO TOTAL	W
TPF	R$ MIL	%	DEBÊNTURES	R$ MIL	%	CDB/RDB	R$ MIL	%	AÇÕES	R$ MIL	%	R$ MIL	
DIJAN11	383.128.204,02	26,03%	PRE	1.095.614,69	0,42%	PRE	27.988.407,00	3,75%				412.212.225,70	12,33%
DIJAN12	90.544.211,71	6,15%										90.544.211,71	2,71%
DIJAN17	35.435.218,00	2,41%										35.435.218,00	1,06%
NTNB MAI11	149.106.525,85	10,13%	INFLAÇÃO	11.438.267,37	4,41%	INFLAÇÃO	2.301.442,00	0,31%				162.846.235,21	4,87%
NTNB MAI15	172.138.952,87	11,69%										172.138.952,87	5,15%
NTNB MAI45	128.480.045,49	8,73%										128.480.045,49	3,84%
IMAS	513.314.672,00	34,87%	DI	247.007.181,68	95,17%	DI	716.349.914,00	95,94%				1.476.671.767,68	44,16%
IBX 100									FREE FLOAT	865.238.816,12	46,03%	865.238.816,12	25,88%
									MKT CAP	1.879.728.038,49	100,00%		
TOTAL	1.472.147.829,93	100,00%		259.541.063,73	100,00%		746.639.763,00	100,00%		865.238.816,12		3.343.567.472,78	100,00%

Figura 3 - Capitalização de mercado (jan/10)

3.2 Matriz de Correlação

Para calcular a matriz de correlação foi utilizado dados históricos de um período de 252 dias dos preços diários (PU) dos contratos de DI, dos preços de abertura e fechamento dos títulos indexados, IMA-S e do índice IBX 100 para a partir da variação logarítmica dos preços encontrar os retornos que serão utilizados para calcular a matriz a baixo:

Matriz de Correlação								
Ativos	DIJAN10	DIJAN12	DIJAN17	NTNB MAI11	NTNBMAI15	NTNBMAI45	IMA-S	IBrX-100
DIJAN11	1,00	0,69	0,24	0,51	0,54	0,38	0,12	-0,15
DIJAN12	0,69	1,00	0,71	0,37	0,69	0,52	0,19	0,01
DIJAN17	0,24	0,71	1,00	0,08	0,50	0,41	0,15	0,15
NTNB MAI11	0,51	0,37	0,08	1,00	0,45	0,28	0,36	-0,37
NTNB MAI15	0,54	0,69	0,50	0,45	1,00	0,76	0,26	-0,05
NTNB MAI45	0,38	0,52	0,41	0,28	0,76	1,00	0,25	-0,07
IMAS	0,12	0,19	0,15	0,36	0,26	0,25	1,00	-0,20
IBX 100	-0,15	0,01	0,15	-0,37	-0,05	-0,07	-0,20	1,00

Figura 4 - Matriz de correlação

A figura 4 mostra que a matriz de correlação retorna ao coeficiente de correlação entre pares de ativos, definidos como sendo o mercado.

3.3 Matriz de Covariância dos Excessos de Retornos

Matriz de Covariância ou Matriz Sigma - Σ									
	w	0,123	0,027	0,011	0,049	0,051	0,038	0,442	0,259
w		DIJAN10	DIJAN12	DIJAN17	NTNB MAI11	NTNBMAI15	NTNBMAI45	IMA-S	IBrX-100
0,123	DIJAN11	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	-0,0003
0,027	DIJAN12	0,0001	0,0002	0,0007	0,0000	0,0001	0,0003	0,0000	0,0000
0,011	DIJAN17	0,0001	0,0007	0,0042	0,0000	0,0004	0,0011	0,0000	0,0023
0,049	NTNB MAI11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	-0,0008
0,051	NTNB MAI15	0,0001	0,0001	0,0004	0,0001	0,0002	0,0004	0,0000	-0,0002
0,038	NTNB MAI45	0,0001	0,0003	0,0011	0,0001	0,0004	0,0016	0,0000	-0,0006
0,442	IMAS	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,259	IBX 100	-0,0003	0,0000	0,0023	-0,0008	-0,0002	-0,0006	0,0000	0,0567
1,0000		**(0,00001)**	**0,00000**	**0,00001**	**(0,00001)**	**(0,00000)**	**(0,00000)**	**(0,00000)**	**0,00377**

Figura 5 - Matriz de covariância

Para encontrar a matriz dos excessos de retornos, foi necessário o histórico de 252 dias do IDI, índice de preços do ativo livre de risco (CDI). Foi calculada a variação dos retornos desse índice utilizando também a função logarítmica e dessa forma encontramos os excessos de retorno de cada um dos ativos em relação ao ativo livre de risco para calcularmos a matriz de covariância.

A matriz de covariância, também chamada como matriz sigma é a média dos produtos dos desvios de cada par de ativos, levando em consideração o peso de equilíbrio de mercado, ou seja, o percentual de alocação em cada ativo com base na capitalização de mercado.

3.4 Cálculo do Retorno da Carteira

Ativo	Excesso Retorno (252du)	Risco (252du)	$\Pi = \lambda \Sigma w_{mkt}$
DIJAN11	2,48%	0,73%	-0,02%
DIJAN12	2,07%	1,41%	0,03%
DIJAN17	-0,21%	6,51%	0,36%
NTNB MAI11	4,07%	0,93%	-0,10%
NTNB MAI15	5,90%	1,31%	0,00%
NTNB MAI45	8,65%	3,98%	-0,02%
IMAS	0,04%	0,00%	0,00%
IBX 100	38,42%	23,81%	7,13%

Figura 6 - Excesso de retorno da carteira

Para utilizar a fórmula do vetor de retornos implícitos de equilíbrio (Π) é necessário especificar o valor do coeficiente de aversão a risco (λ), neste exercício esse coeficiente foi calculado da seguinte forma: Sharpe/Volatilidade. Sendo o Sharpe definido pelo investidor conforme seu perfil de aversão a risco, já que o Sharpe é a relação retorno/risco, ou seja, qual o retorno esperado por unidade de risco assumido. Nesse exercício foi utilizado Sharpe de 0,30 e a volatilidade é a raiz quadrada da variância. Com essas informações foi calculado o vetor de retornos implícitos de equilíbrio (Π), onde calculamos o valor do coeficiente de aversão a risco (λ) e encontramos o valor de 4,89%, a matriz de covariância e os pesos de mercado. O excesso de retorno de 252 dias é a média dos excessos de retornos diários anualizados e o risco é o desvio-padrão do excesso de retorno diário, anualizados. E com o vetor de retornos implícitos de equilíbrio (Π) chegamos ao retorno implícito do mercado, o qual é calculado através da multiplicação do vetor de retornos implícitos de equilíbrio (Π) pelo vetor de pesos investidos em cada ativo (w). Como pode ser visto na figura abaixo o retorno encontrado é de 1,84%.

ATIVO	EXCESSO RETORNO	RISCO	$\Pi = \lambda\Sigma w_{mkt}$
DIJAN11	2,48%	0,73%	-0,02%
DIJAN12	2,07%	1,41%	0,03%
DIJAN17	-0,21%	6,51%	0,36%
NTNB MAI11	4,07%	0,93%	-0,10%
NTNB MAI15	5,90%	1,31%	0,00%
NTNB MAI45	8,65%	3,98%	-0,02%
IMAS	0,04%	0,00%	0,00%
IBX 100	38,42%	23,81%	7,13%
RETORNO CARTEIRA	1,84%		
VOL CARTEIRA	6,14%		
AVERSÃO RISCO	4,89		
SHARPE	0,3		

Figura 7 - Retorno da carteira

3.5 Acrescentando Opiniões e Definindo Confiança nas Opiniões

A partir desse modelo de inferência, os investidores muitas vezes, em comitês de macroaloação formados pelos gestores, discutem os cenários macroeconômicos. Com o

conhecimento do posicionamento do mercado e sabendo qual o excesso de retorno em relação ao ativo livre de risco, podem concordar ou não com o mercado e a partir dessa carteira de equilíbrio aplicar suas opiniões em relação ao desempenho dos ativos. Como por exemplo, considerar que os excessos de retornos esperados pelos investidores do mercado estão abaixo de suas convicções e aumentar sua exposição em determinados ativos, considerando que suas opiniões possam implicar em maiores exposições a risco. Acrescentando suas opiniões e convicções e aplicando percentuais de confiança a elas, encontrará o *portfolio* ótimo, que terá embasamento, não em retornos históricos e sim no posicionamento do mercado, sabendo quanto o mercado espera ganhar além do ativo livre de risco e de forma intuitiva encontrar uma carteira que agrega suas opiniões sobre o mercado, ocorrendo uma realocação de ativos de maneira customizada conforme o perfil do investidor em relação a assumir riscos para atingir seu retorno desejado.

Portanto, através da Matriz P, matriz das opiniões, composta por k *views* e n ativos onde nesse exercício foi utilizado n= 8 (oito ativos) e o k= 2 (duas opiniões), já que o modelo não exige que o investidor tenha opiniões sobre todos os ativos foi trabalhado com duas opiniões. Considerando as condições macroeconômicas e de mercado foram formuladas opiniões, sendo atribuído um nível de confiança para cada uma delas. Sendo a primeira opinião relativa sobre a inclinação da curva de juros entre os vértices DIJAN11 e DIJAN12. Considerando que a opinião implícita em relação ao vértice DIJAN11 é de queda de 0,02% e a opinião implícita relativa do vértice DIJAN12 é de valorização de 0,03%, resulta numa inclinação de 0,05%. A opinião do investidor considera que a referente inclinação será de 0,07%. A outra opinião inserida no modelo é absoluta, considerando que o excesso de retorno para bolsa não é apenas 7,13% como foi extraído implicitamente do mercado e sim, sendo em nossa opinião, de 8%. Para essas duas opiniões foi considerado o nível de confiança de 70% para opinião relativa sobre taxa de juros e de 60% para opinião absoluta sobre bolsa. Com as inserções dessas opiniões encontramos uma alocação de ativos posterior, como podemos visualizar no quadro abaixo:

	W Mercado	W Posterior
DIJAN11	12,33%	-8,08%
DIJAN12	2,71%	22,85%
DIJAN17	1,06%	1,04%
NTNB MAI11	4,87%	4,78%
NTNBMAI15	5,15%	5,06%
NTNBMAI45	3,84%	3,78%
IMA-S	44,16%	43,39%
IBrX-100	25,9%	27,18%

Figura 8 - w de mercado x w posterior

Conforme a carteira posterior obtida estaríamos -8,08% comprado em taxa (vendido em PU) em DIJAN11, 22,85% vendido em taxa (comprado em PU) em DIJAN12, 27,18% com uma exposição em bolsa (IBX-100) e nos demais ativos estaríamos posicionados próximo a posição de mercado.

Com os dados obtidos através da utilização do modelo proposto, é importante destacar que a carteira ótima encontrada possui uma estabilidade muitas vezes não vista com a utilização dos retornos históricos proposto pelo modelo de Markowitz, já que as opiniões dos investidores sobre as informações extraídas do mercado permitem isso. Os resultados gerados nesse estudo estão factíveis com a realidade e o modelo mostrou-se uma ótima ferramenta a ser utilizada pelos investidores. Já que encontramos uma carteira posterior com os reflexos de nossas opiniões e em linha com a posição do mercado.

4. Conclusão

Todos os três conjuntos de dados exigidos pelo modelo de otimização tradicional de Markowitz como: retorno esperado, volatilidade e correlação esperada são importantes. No entanto, o mais importante é a rentabilidade esperada. Quando se usa retornos históricos os erros de estimação são grandes. É neste ponto que Black-Litterman (1992) propõem repensar a teoria da carteira para torná-la mais útil para os investidores.

Do modelo de macroalocação de Black-Litterman se obtém um procedimento robusto para a criação da carteira ótima. O modelo tem um sólido fundamento teórico, como foi visto nesse trabalho, onde foram abordados pontos como a incorporação das opiniões dos gestores e da utilização da carteira de mercado com o enfoque bayesiano, o qual permite determinar vetores de pesos e a matriz de covariância, que deve ser usada para fazer a otimização da carteira, tipo Markowitz. É através das opiniões que os pesos da carteira de mercado, considerado o ponto de equilíbrio, é alterado, sendo que o investidor pode concordar ou não com o retorno implicitamente obtido do mercado de equilíbrio e a partir dessa alocação do mercado inserir suas opiniões. Para os gestores é mais intuitivo pensar em pesos relativos para predizer o retorno esperado dos ativos.

Portanto, a utilização de Markowitz pode levar a obtenção de carteiras “mal-comportadas” e Black-Litterman corrigem esse problema partindo da alocação do mercado, tirando implicitamente o excesso de retorno esperado por classe de ativos e incorporando as *views* dos investidores. Sendo válido ressaltar o importante papel do investidor para a aplicabilidade desse modelo. Como vimos, a maneira de obter o retorno esperado é crucial para encontrar a carteira ótima e o ponto chave para não utilizar o clássico modelo de Markowitz. Black-Litterman partem de uma posição de equilíbrio de mercado, os mesmos argumentam que a definição mais sensata de equilíbrio é quando a posição de mercado coincidi com os preços correntes de mercado, se todos os investidores têm as mesmas visões. Ou seja, em vez de descobrir que peso uma carteira necessita para certo retorno esperado, é feito o contrário, qual o retorno esperado retirado através da capitalização do mercado. Esse retorno é obtido através da otimização inversa.

Portanto, o retorno retirado implicitamente do mercado pode ser ajustado conforme as convicções do investidor, permitindo encontrar carteiras diversificadas e incorporar essas convicções de maneira intuitiva, embora pareça óbvio partir da capitalização do mercado para

inferir os retornos esperados, até o surgimento dessa metodologia de Black-Litterman não era nada simples.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MARKOWITZ, "*Portfolio Selection*", Journal of Finance, March 1952.

BLACK, Fischer and Robert Litterman, "*Asset Allocation: Combining Investor Views With Market Equilibrium*", Goldman, Sachs & Co., Fixed IncomeResearch, Setembro, 1990.

BLACK, Fischer and Robert Litterman, "*Global Asset Allocation Modal*", Financial Analysts Journal, Setembro-Outubro, 1992.

IDZOREK, Thomas M., " *A step-by-step guide to the black-litterman model*", Preprint, January, 2002.

BERNSTEIN, Peter L., " *A História do Mercado de Capitais – O Impacto da Ciência e Tecnologia nos Investimentos*" Brasil, 2007.

FRANCÉS, Carlos J., "*Metodologia: Black-Litterman Global Asset Allocation Model*", Janeiro 2007. (artigo)

FRANCÉS, Carlos J., " *Un modelo de rebalanceo de carteras en base al VaR por optimización inversa y Black Litterman en un entorno Mifid*", Julho 2007. (artigo)

SATCHELL, S. and Scowcroft, A. (2000). "*A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Construction*." Journal of Asset Management, September, 138-150.

LEE, W., "*Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation"*, NewYork: John Wiley & Sons, 2000.

BLAMONT, D. and Firoozy, N. (2003). "Asset Allocation Model." Global Markets Research: Fixed Income Research, Deutsche Bank, July.