Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

PONTOS CRÍTICOS DA CONEXÃO RIEMANNIANA SOBRE CAMPOS DE VETORES

Tese de Doutorado

por

GIOVANNI DA SILVA NUNES

Professor Orientador: Dr. JAIME BRUCK RIPOLL

Porto Alegre, agosto de 2005

Tese submetida por Giovanni da Silva Nunes como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Ferderal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador: Dr. Jaime Bruck Ripoll.

Banca examinadora:
Dra. Elizabeth Quintana Ferreira da Costa
Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito (USP)
Dr. Mark Thompson (PPG-MAp-UFRGS)
Dr. Paolo Piccione (USP)
Dr.Jaime Bruck Ripoll

Data da defesa: 30 de agosto de 2005.

A minha esposa Lisandra, aos
meus pais Elço e Marilene e
aos meus irmãos Edison e Adilson.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por todas as bençãos em minha vida, entre elas a conquista deste trabalho.

Agradeço a meus pais, Elço e Marilene, pelo apoio e pelas orações que certamente fizeram por mim.

Aos meus irmãos Edison Fernando e Adilson, que além de viajarem de tão longe para se fazerem presentes a minha defesa, sempre se mostraram dispostos a me ajudar do jeito que fosse necessário para que este dia se tornasse realidade.

Ao meu sogro, Miguel, e a minha sogra, Alda, pelo apoio.

Ao meu incansável orientador Jaime Rippol, que não conheceu dia e nem horário para me orientar, e me passava a segurança necessária para que eu me mantivesse motivado para o trabalho, e mesmo quando tive dificuldades em questões elementares, ele foi paciente em suas respostas.

A professora Cidara Rippol a quem eu incomodava com telefonemas fora de horário à procura do professor Jaime, e que mesmo assim sempre me atendeu com simpatia e com bom-humor.

Ao professor Alexandre e a professora Flávia, pelas valiosas sugestões.

Ao professor Fabiano Britto, por ter sugerido o tema, e pela co-orientação.

Aos meus colegas do CPGMAT, pelo companheirismo.

A Rosane pela solicitude.

Ao Ivan, ao Edson, a Carmen, o Fernando e o Fidélis pela amizade.

Aos meus colegas da ULBRA, onde destaco a Claudia, o Paulo Bujes, a Carmen e a Rosvita.

E meu agradecimento especial a minha esposa Lisandra, a " Lica" como é conhecida. Obrigado pelo seu amor, pela sua paciência, pela compreensão, por cuidar de mim e por ter demonstrado tanto valor ao que eu estava fazendo. Você foi minha inspirição nas horas de desafio, meu maior incentivo no começo do doutorado. Não consigo imaginar como teria sido sem você, mas com certeza teria sido muito difícil.

Resumo

Nesta tese nós estudamos e provamos diversos teoremas de existência, unicidade e caracterização, dos pontos e dos valores críticos da conexão riemanniana de uma variedade riemanniana compacta, orientável, agindo nos espaços dos campos diferenciáveis da variedade com norma L^2 um e com norma pontual um.

Abstract

In this thesis, we study and prove several theorems about the existence, uniqueness and characteriztion of the critical points and critical values of the Riemannian connection of a compact orientable Riemannian manifold acting on the space of smooth vector fields of the manifold with unit L^2 norm and on the space of smooth vector fields with unit pointwise norm.

Índice

1 Introdução

Sejam M uma variedade (de classe C^∞) riemanniana compacta orientável, n-dimensional, sem bordo, e ∇ a conexão riemanniana de M. Em nosso trabalho iremos estudar os pontos críticos de ∇ no subespaço de campos diferenciáveis de norma L^2 igual a um e no subespaço dos campos diferenciáveis de norma pontual igual a um. Ou seja, denotando por $\Xi(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis de M, vamos estudar os pontos críticos do funcional

$$F(X) = \int_M \|\nabla X\|^2 \, dM, \tag{1}$$

no subespaço $\mathcal{L}(M)$ dos campos $X \in \Xi(M)$ tais que

$$\int_M \|X\|^2 \, dM = 1,$$

e também no subespaço $\mathcal{P}(M)$ onde $X \in \Xi(M)$ é tal que $\|X(p)\| = 1$, para todo $p \in M$. Estamos mais interessados em encontrar e descrever os ínfimos de F em $\mathcal{L}(M)$ e em $\mathcal{P}(M)$, que denotamos por λ_0 e δ_0, respectivamente, ou seja,

$$\lambda_0 = \inf_{\mathcal{L}(M)} F, \ \delta_0 = \inf_{\mathcal{P}(M)} F.$$

A determinação/estimativa do valor de δ_0 e a existência ou não de minimizantes de F em $\mathcal{P}(M)$ é assunto que vem sendo bastante pesquisado há uns 20 anos. Com algumas mudanças na definição (1), irrelevantes para a parte interessante da teoria, F tem sido denominado "*funcional energia de campos*" ou "*total bending*" (ver [W],[CW]). A determinação das constantes $\lambda_{\ 0}$ e δ_0 é de interesse uma vez que, $\lambda_0, \delta_0 > 0$, implica nas desigualdades tipo Sobolev

$$\int_M \|X\|^2 \, dM \leq \frac{1}{\lambda_0} \int_M \|\nabla X\|^2 \, dM, \ X \in \Xi(M)$$

e

$$\mathrm{Vol}(M) \leq \frac{1}{\delta_0} \int_M \|\nabla X\|^2 \, dM, \ X \in \Xi(M), \ \ \|X\| = 1.$$

Iniciamos a tese provando alguns resultados conhecidos mas não facilmente encontrados em livros ou artigos, a saber: os pontos críticos de F em

$\mathcal{L}(M)$ coincidem com o espectro do operador $-\operatorname{div}\nabla$ (Proposição 2.11) e que, em $\mathcal{P}(M)$, são soluções da equação

$$-\operatorname{div}\nabla X = \|\nabla X\|^2 X \tag{2}$$

(Proposição 2.12). Usando técnicas e resultados bem conhecidas de Análise, provamos o resultado, também conhecido, que λ_0 é assumido por um campo em $\mathcal{L}(M)$ (Teorema 2.2). Decorre que se M não possui um campo paralelizável, então $\lambda_0 > 0$.

No que se refere aos pontos críticos de F em $\mathcal{P}(M)$, Fabiano Brito, Vicente Borrelli e Olga Gil [BBG] provaram que no caso em que $M = \mathbb{S}^{2n+1}$, com $n \geq 2$, o ínfimo δ_0 **não** é necessariamente assumido em $\mathcal{P}(M)$, respondendo negativamente a uma questão colocada por Wiegmink em [W]. Usando a mesma técnica usada para provar a existência do minimizante para F em $\mathcal{L}(M)$ provamos, contudo, que o ínfimo de F em $\mathcal{P}(M)$ é assumido por um campo de norma pontual 1 com derivada fraca em M (Teorema 2.5). Por esta razão, o natural ao minimizarmos F entre os campos de norma pontual 1, é trocarmos $\mathcal{P}(M)$ pelo espaço dos campos unitários fracamente diferenciáveis, que denotamos por $\mathcal{F}(M)$. Além disso provamos que, ao contrário do que acontece com $\mathcal{P}(M)$ que é vazio quando a característica de Euler $\chi(M)$ de M é diferente de zero, para $n \geq 3$ tem-se sempre $\mathcal{F}(M) \neq \emptyset$ (Teorema 2.5), de modo que o funcional F está sempre bem definido em $\mathcal{F}(M)$ para $n \geq 3$, mesmo nos casos em que $\chi(M) \neq 0$.

Provamos que $\delta_0 \geq \operatorname{Vol}(M)\lambda_0$ (Proposição 2.13), o que implica, no caso de M não possuir um campo paralelizável, que o ínfimo de F em $\mathcal{P}(M)$ é sempre positivo, respondendo a outra questão colocada por Wiegmink em [W].

É de se esperar que as simetrias de M se reflitam nos campos críticos de F, tanto em $\mathcal{L}(M)$ quanto em $\mathcal{P}(M)$. Precisamente, dado um subgrupo de Lie G de $\operatorname{ISO}(M)$ é de se esperar que os pontos críticos de F sejam assumidos por campos $G-$ invariantes (veja Definição 3.1). A grande vantagem destes campos é que, além de serem grandes candidatos a pontos críticos, a edp associada a campos invariantes tem o número de variáveis reduzida à cohomogeneidade da ação do grupo (ver Definição 3.4). Por exemplo, nos casos em que G age em cohomogeneidade 1, a determinação do espectro de $\operatorname{div}\nabla$ aos campos $G-$invariantes se reduz à determinação do espectro de um operador associado a uma E. D.O. (Teorema 5.1).

Trabalhamos então na seguinte questão: quando os pontos críticos são assumidos por campos invariantes?

Fabiano Britto, Vicente Borrelli e Olga Gil, provaram em [BBG] que, em $\mathbb{S}^n$, o campo unitário "norte-sul" é um mínimo absoluto de F em $\mathcal{F}(M)$. Note que este campo é ortogonal às esferas centradas nos polos norte e sul de $\mathbb{S}^n$ e que estas esferas são órbitas do subgrupo $O(n-1)$ de $\mathrm{ISO}(\mathbb{S}^n)$ que deixa fixo este polos, sendo este campo um campo invariante por $O(n-1)$. Em nosso trabalho obtemos uma generalização parcial deste resultado considerando a ação por isometrias de um grupo G em M com cohomogeneidade 1 e tomando o campo unitário ortogonal às órbitas desta ação. É fácil de ver que este campo é G-invariante só que, em geral, não está em $\mathcal{F}(M)$. Contudo, provamos que quando as órbitas singulares de G têm codimensão maior ou igual a 3 então este campo está em $\mathcal{F}(M)$ (Teorema 3.12) e é um ponto crítico de F em $\mathcal{F}(M)$ (Teorema 5.5). É natural se conjecturar que estes campos são mínimos absolutos de F em $\mathcal{F}(M)$.

Tratamos também da questão acima mencionada, a saber, dos pontos críticos serem ou não assumidos por campos invariantes, no caso dos pontos críticos de F em $\mathcal{L}(M)$. Com o objetivo de respondê-la, introduzimos um processo de *simetrização* de um campo por um subgrupo G de isometrias. Este processo consiste em tomar, em cada ponto da variedade, a média do campo, neste ponto, pela ação de G, o que é feito através de uma integração sobre G (veja Definição 4.1). Assim, dado um campo V obtem-se o G-simetrizado V_G de V por G. Provamos então que V_G é sempre $G-$invariante (Proposição 4.2). Além disso, provamos que se V satisfaz a equação $-\operatorname{div}\nabla V = \lambda V$ então o simetrizado V_G também satisfaz, ou seja, tem-se $-\operatorname{div}\nabla V_G = \lambda V_G$ (Teorema 4.3). Este processo, portanto, mostra que se V é um ponto crítico de $-\operatorname{div}\nabla$ associado a um autovalor λ e se o $G-$simetrizado de V é não nulo, então o ponto crítico associado a λ é assumido por um campo $G-$invariante.

Como conseqüência disto provamos que, dado um autovalor λ para $-\operatorname{div}\nabla$, então ou todo campo que é um autovetor de $-\operatorname{div}\nabla$ associado a λ tem $G-$média zero (veja Definição 4.6), ou existe um campo $G-$invariante que é um autovetor associado a λ (Corolário 4.7).

Provamos que se M é um espaço simétrico compacto de posto 1 e se um subgrupo $G \subset \mathrm{ISO}(M)$ tem um ponto fixo cujo subgrupo de isotropia também deixa um ponto fixo, então todo valor crítico de F em $\mathcal{L}(M)$ é assumido por um campo $G-$invariante (Teorema 4.8).

Como um dos resultados principais desta tese provamos, ao final deste trabalho, que é igual a 1 o mínimo absoluto da conexão na esfera unitária $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, entre os campos de norma L^2 igual a um, sendo este mínimo atingido por um campo colinear ao campo norte-sul (Teorema 6.5). Este resultado é a versão para o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{S}^n)$ de um resultado já mencionado de F. Brito, V. Borrelli e O. Gil para o espaço $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{2n+1})$ dos campos de norma pontual 1 nas esferas unitárias de dimensão ímpar.

2 Preliminares

Seja $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ uma variedade (de classe C^∞) riemanniana orientada compacta n-dimensional. Denote por $\Xi(M)$ o espaço de todos os campos de vetores C^∞ de M. Dado $X \in \Xi(M)$, ∇X denota a aplicação tensorial

$$E \to \nabla_E X, E \in \Xi(M).$$

Define-se o produto interno $\langle \nabla X, \nabla Y\rangle$, para $X, Y \in \Xi(M)$ por

$$\langle \nabla X, \nabla Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} Y\rangle\,,$$

onde E_i é um base ortonormal local de TM. A norma de ∇X é dada por

$$|\nabla X| = \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X\rangle\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vamos considerar em $\Xi(M)$ os produtos internos

$$\langle X, Y\rangle_{L^2} = \int_M \langle X, Y\rangle\, dM$$

e

$$\langle X, Y\rangle_{H^1} = \int_M \langle X, Y\rangle\, dM + \int_M \langle \nabla X, \nabla Y\rangle\, dM.$$

Nós entenderemos por $L^2(TM)$ o completamento de $\Xi(M)$ em relação a norma L^2 determinada pelo produto interno $\langle\ ,\ \rangle_{L^2}$ e por $H^1(TM)$ o completamento de $\Xi(M)$ em relação a norma H^1 determinada pelo produto interno $\langle\ ,\ \rangle_{H^1}$. Os espaços $(L^2(TM), \langle\ ,\ \rangle_{L^2})$ e $(H^1(TM), \langle\ ,\ \rangle_{H^1})$ são espaços de Hilbert. Usaremos também as notações

$$\mathcal{F}(M) = \left\{X \in H^1(TM) \mid |X(p)| = 1, q.t.p,\ p \in M\right\}$$

e

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ X \in H^1(TM) \mid |X|_{L^2} = 1 \right\}.$$

Observe que a conexão Riemanniana em M estende-se naturalmente para uma conexão riemanniana fraca, também denotada por ∇,

$$\nabla : H^1(TM) \times H^1(TM) \to L^2(TM).$$

Usaremos várias vezes a fórmula da coárea (conforme [Fe]):

Teorema 2.1 *Sejam $\overline{M}^l$ e M^q, $(l \geq q)$ variedades Riemannianas. Sejam dx e dy as formas volumes de $\overline{M}$ e M associadas a suas métricas. Seja $\phi : \overline{M} \to M$ uma aplicação diferenciável e $h : \overline{M} \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então*

$$\int_{\overline{M}} h(x) || \operatorname{Jac} \phi(x) || dx = \int_M \left(\int_{\phi^{-1}(y)} h(x) dH^{l-q}(x) \right) dH$$

onde a integral interna no segundo membro é calculada com respeito à medida $(l-q)-$dimensional de Hausdorff induzida por $\overline{M}$ em $\phi^{-1}(y)$ e $|| \operatorname{Jac} \phi ||$ é a derivada de Radon-Nikodym da medida de M com relação à imagem sob $d\phi$ da medida de $\overline{M}$.

Definindo $g : \overline{M} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{h(x)}{|| \operatorname{Jac} \phi(x) ||}$$

decorre deste teorema que

$$\int_{\overline{M}} g(x) dx = \int_M \left(\int_{\phi^{-1}(y)} \frac{h(x)}{|| \operatorname{Jac} \phi(x) ||} dx \right) dy. \tag{3}$$

Nos casos que estaremos considerando teremos

$$q = \dim M = \operatorname{posto}(\phi) := \max\{\dim d\phi_y(T_y \overline{M}) \mid y \in \overline{M}\}.$$

Nestes casos, observamos que $|| \operatorname{Jac} \phi ||$, nos pontos regulares de ϕ, pode ser calculada da seguinte forma. Seja $x \in \overline{M}$ um ponto regular de ϕ (ou seja, $q = \dim d\phi_x(T_x \overline{M})$) e $y = \phi(x)$. Sejam $\{e_1, ..., e_q\}$ uma base ortonormal de $(T_x \phi^{-1}(y))^{\perp}$ e $\{f_1, ..., f_q\}$ uma base ortonormal de $T_y M$. Então

$$|| \operatorname{Jac} \phi(x) || = | \det(\langle d\phi_x(e_i), f_j \rangle_{i,j \in \{1,...,q\}})|.$$

Os resultados usados aqui sobre espaços de Sobolev de campos de vetores podem ser provados usando a teoria de espaços de Sobolev para funções, a qual pode ser vista em [H].

Teorema 2.2 *Seja M uma variedade riemanniana compacta, orientável e*

$$\lambda_0 = \inf_{X \in H^1(TM)\backslash\{0\}} \frac{\int_M |\nabla X|^2 dM}{\int_M |X|^2 dM}.$$

Então existe $V \in H^1(TM)\backslash\{0\}$ tal que

$$\lambda_0 = \frac{\int_M |\nabla V|^2 dM}{\int_M |V|^2 dM}.$$

Para provarmos o Teorema 2.2, precisaremos de dois resultados, um de Análise Funcional, a saber:

Teorema 2.3 *Toda sequência limitada em um espaço de Hilbert $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ contém um subsequência convergindo fracamente a um elemento de H, ou seja, se $\{x_n\} \subset H$ é limitada, então existe $x_0 \in H$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_{n_k}, x \rangle = \langle x_0, x \rangle$$

para todo $x \in H$.

Precisamos também de uma extensão do Teorema de Rellich-Kondrachov:

Teorema 2.4 *(Extensão do Teorema da compacidade de Rellich-Kondrachov) $H^1(TM) \subset\subset L^2(TM)$, ou seja, toda sequência limitada em $H^1(TM)$ contém uma subsequência convergindo em $L^2(TM)$ a um elemento de $L^2(TM)$*

A prova deste teorema é feita através da redução ao teorema usual de Rellich-Kondrachov, ou seja, o que se aplica a funções.

Prova do Teorema 2.2. Definindo

$$F(X) = \frac{\int_M |\nabla X|^2 dM}{\int_M |X|^2 dM}, X \in H^1(TM)\backslash\{0\},$$

podemos tomar uma sequência $V_n \subset H^1(TM)\backslash\{0\}$ tal que

$$\lim_n F(V_n) = \lambda_0.$$

Considerando

$$W_n = \frac{V_n}{\left(\int_M |V_n|^2 dM\right)^{\frac{1}{2}}}$$

vemos que

$$F(W_n) = \int_M |\nabla W_n|^2 dM = F(V_n)$$

e então

$$\lim_n F(W_n) = \lambda_0.$$

Segue-se que W_n é limitada em $H^1(TM)$ e, portanto, pelo Teorema 2.3, W_n contém uma subsequência convergindo fracamente a $V' \in H^1(TM)$. Por outro lado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov W_n converge a V em $L^2(TM)$. Temos

$$\langle V - V', V - V' \rangle_{L^2} = 0$$

o que nos dá $V = V'$. Segue-se que

$$\int_M |V|^2 dM = \lim_n \int_M |W_n|^2 dM = 1$$

e, assim, em particular, $V \in H^1(TM) \backslash \{0\}$. Por outro lado, denotando, para $U, V \in H^1(TM)$,

$$g(U, V) = \int_M \langle \nabla U, \nabla V \rangle \, dM$$

temos, que, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(W_n - V, W_n - V) \\ &= g(W_n, W_n) - 2g(W_n, V) + g(V, V). \end{aligned}$$

Tomando o limite para $n \to \infty$ e lembrando que W_n converge fracamente a V, obtemos

$$0 \leq \lambda_0 - 2g(V, V) + g(V, V)$$

e, então,

$$g(V, V) \leq \lambda_0.$$

Decorre daí que

$$\frac{\int_M |\nabla V|^2 dM}{\int_M |V|^2 dM} = \int_M |\nabla V|^2 dM \leq \lambda_0$$

o que nos dá, pelo fato de λ_0 ser o mínimo de F,

$$\frac{\int_M |\nabla V|^2 dM}{\int_M |V|^2 dM} = \lambda_0,$$

provando o teorema. ■

Teorema 2.5 *Seja M uma variedade riemanniana compacta , orientável de dimensão maior ou igual a 3, e*

$$\delta_0 = \inf_{X \in \mathcal{F}(M)} \int_M |\nabla X|^2 dM.$$

Então $\mathcal{F}(M) \neq \emptyset$ e existe $N \in \mathcal{F}(M)$ tal que

$$\delta_0 = \int_M |\nabla N|^2 dM.$$

Prova. Primeiro iremos provar que $\mathcal{F}(M) \neq \emptyset$ para $n \geq 3$. De fato, seja Z um campo diferenciável com singularidades isoladas, isto é, Z se anula apenas em um número finito de pontos, os quais denotaremos $p_1, ..., p_k$. Seja $r > 0$ tal que as bolas geodésicas $B_r(p_i)$ são normais e $B_r(p_i) \cap B_r(p_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Denote por $V_i = \dfrac{grad(f_i)}{|grad(f_i)|}$ o campo de vetores definido em $B_{\frac{r}{2}}(p_i) \backslash \{p_i\}$, onde $f_i : M \to [0, \infty)$, é dada por

$$f_i(x) = d(x, p_i),$$

sendo d a distância riemanniana em M, (na verdade, provaremos adiante que $|grad(f_i)| = 1$). Considere um campo de vetores diferenciável, unitário, N, em $M \backslash \{p_1, ...p_k\}$, o qual coincide com $\dfrac{Z}{|Z|}$ em $M \backslash \cup B_r(p_i)$ e com V_i em $B_{\frac{r}{2}}(p_i)$. Afirmação: $N \in \mathcal{F}(M)$. Note que para garantir a veracidade da afirmação, basta provarmos que V_i é fracamente diferenciável para $n \geq 3$. Para tal, vamos estimar $\langle \nabla_v V_i, \nabla_v V_i \rangle$ em um ponto $q \in B_r(p_i) \backslash \{p_i\}$, $v \in T_q M$, $|v| = 1$, em termos da distância t entre q e p_i. Denotaremos, por simplicidade, $V = V_i$ $f = f_i$ e $p = p_i$. Note que $\nabla_V V = 0$, e que podemos assumir que $\langle V, v \rangle = 0$. Então $A(v) = -\nabla_v V$ é a segunda forma forma fundamental da esfera geodésica centrada em p e com raio t. Além disso, nós podemos assumir que v é um auto vetor de A e então $\langle \nabla_v V, \nabla_v V \rangle = \langle \nabla_v V, v \rangle^2$. Seja

$K = \max |K_M| + 1$, onde K_M é a curvatura seccional de M. Seja $\overline{M}$ um espaço simplesmente conexo de curvatura seccional constante $-K$. Usando o teorema da comparação do Hessiano, obtemos

$$\langle \nabla_v V, v \rangle^2 = |H_{fM}(v,v)|^2 \leq K \coth^2(t\sqrt{K}).$$

Denotando por $S_t(p)$ a esfera geodésica centrada em p com raio t segue que

$$\int_{B_r(p)} \langle \nabla V, \nabla V \rangle = \int_0^r \int_{S_t(p)} \langle \nabla V, \nabla V \rangle \, dS_t(p) \leq K \int_0^r \left[\coth^2(t\sqrt{K}) \operatorname{Vol} S_t(p) \right] dt$$

A mostrar: $K\int_0^r \left[\coth^2(t\sqrt{K}) \operatorname{Vol} S_t(p) \right] dt$ é finita se $n \geq 3$. Para tal basta provarmos que, para algum $r \in (0, \max f)$, pondo

$$S_r = f^{-1}([0,r]),$$

tem-se

$$\int_{S_r} \langle \nabla V, \nabla V \rangle < \infty.$$

Primeiro mostraremos que

$$|\nabla f(p)| = 1,$$

para todo $x \in M \backslash \{p_1, ..p_k\}$. Seja $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_x S_t(p)$. Então o gradiente de f em x pode ser escrito como

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} df_x(e_i) e_i, \tag{4}$$

onde $e_n = V(x)$. Como a função distância, f, é constante ao longo das esferas $S_t(p_i)$, a igualdade (4), se resume a

$$\nabla f(x) = df_x(e_n) e_n.$$

Calculemos então

$$|df_x(e_n)| \, .$$

Para este cálculo, tomemos q_0 e t_0, tal que $x = \exp_{q_0} t_0 N(q_0)$. Seja $\alpha : (0, \varepsilon) \to M$, dada por

$$\alpha(t) = \exp_{q_0} (t_0 + t) \, V(q_0).$$

Temos que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = V(x) = e_n$. Logo

$$df_x(e_n) = \frac{d}{dt}\left(f \circ \alpha\right)(t)|_{t=0}.$$

Mas

$$f\left(\alpha(t)\right) = f\left(\exp_{q_0}\left(t_0 + t\right)V(q_0)\right) = t_0 + t,$$

o que implica

$$df_x(e_n) = 1,$$

e portanto

$$|\nabla f(x)| = |df_x(e_n)| = 1. \tag{5}$$

Vamos agora usar a fórmula da coárea, Teorema 2.1, para $\overline{M} = B_r(p)$, $M = \mathbb{R}$ e $\phi = f$. Neste caso $||\,\mathrm{Jac}\, f|| = |\nabla f|$, e usando (5), obtemos

$$\int_{B_r(p)} \langle \nabla V, \nabla V \rangle = \int_0^r \int_{f^{-1}(t)} \langle \nabla V, \nabla V \rangle\, \omega_t dt, \tag{6}$$

onde ω_t é a fórma volume de $f^{-1}(t) = S_t(p)$.
Como já vimos, para cada $t \in (0, r]$ tem-se, em qualquer ponto de $f^{-1}(t)$,

$$\langle \nabla V, \nabla V \rangle \leq K \coth^2(t\sqrt{K}),$$

onde $\sqrt{K}\coth(t\sqrt{K})$ é o Hessiano da função distância de um espaço simplesmente conexo de curvatura seccional constante $-K$. Assim, de (6), vem

$$\int_{B_r(p)} \langle \nabla V, \nabla V \rangle \leq (n-1)K \int_0^r \left[\coth^2(t\sqrt{K}) \int_{f^{-1}(t)} \omega_t\right] dt.$$

Seja $S = f^{-1}(r)$. Dado $t \in (0, r]$, seja $\phi_t : S \to f^{-1}(t)$ dada por

$$\phi_t(x) = \exp_x(r-t)V(x),\ x \in S.$$

Então o teorema de Fubini nos dá

$$\int_{f^{-1}(t)} \omega_t = \int_S \left(\phi_t\right)^* \omega_t.$$

Podemos escrever $(\phi_t)^* \omega_t = \delta\omega$ para alguma função $\delta : M \to \mathbb{R}$, sendo ω a forma volume em S, e assim obter

$$\int_{f^{-1}(t)} \omega_t = \int_S \delta\omega.$$

Dado $x \in S$, sendo $E_1, ..., E_{n-1}$ uma base ortonormal de $T_x S$ vem

$$\begin{aligned}
\delta(p) = \delta(p) \cdot 1 = \delta(p)\omega_x (E_1, ..., E_{n-1}) &= (\phi_t)^* (\omega_t)_x (E_1, ..., E_{n-1}) \\
&= (\omega_t)_{\phi_t(x)} (d(\phi_t)_x(E_1), ..., d(\phi_t)_x(E_{n-1})) \\
&\leq |d(\phi_t)_x(E_1)| \cdot ... \cdot |d(\phi_t)_x(E_{n-1})| \\
&= |J_1(t)| \cdot ... \cdot |J_{n-1}(t)|
\end{aligned}$$

onde cada $J_i(t) = d(\phi_t)_x(E_i)$ é um campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma(u) = \exp_x(uV(x))$. Observamos agora que $\{p\}$ é o conjunto focal de S, logo temos que

$$J_1(s) = J_2(s) = ...J_{n-1}(s) = 0.$$

Podemos então comparar J_i com os campos de Jacobi em um espaço de curvatura constante $-K$ para concluir, através do Teorema de Rauch (página 215 de [M]), que

$$|J_i(t)| \leq \frac{\sinh(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}, \ i = 1, 2, ..., n-1.$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(p)} \langle \nabla V, \nabla V \rangle &\leq (n-1)K \int_0^r \left[\coth^2(t\sqrt{K}) \int_{f^{-1}(t)} \omega_t \right] dt \\
&\leq (n-1)K \int_0^r \coth^2(t\sqrt{K}) \left(\frac{\sinh(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} \right)^{n-1} \mathrm{Vol}(S) dt,
\end{aligned}$$

que deixa claro que se $n \geq 3$, a integral acima é finita. Agora vamos provar que existe um campo de $\mathcal{F}(M)$ que atinge o ínfimo da conexão. Pondo

$$F(X) = \int_M |\nabla X|^2 dM, X \in \mathcal{F}(M),$$

podemos tomar uma sequência $W_n \subset H^1(TM)$, tal que

$$\lim_n F(W_n) = \delta_0.$$

Temos ainda que

$$\int_M |W_n|^2 dM = \mathrm{Vol}(M).$$

Segue-se que W_n é limitada em $H^1(TM)$ e, como no teorema anterior, temos, pelo Teorema 2.3, que W_n contém uma subsequência convergindo fracamente a $N' \in H^1(TM)$. Por outro lado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov W_n converge a N em $L^2(TM)$. Temos

$$\langle N - N', N - N' \rangle_{L^2} = 0$$

o que nos dá $N = N'$. Assim, W_n converge em L^2 para N. Portanto, a menos de uma subsequência, W_n converge qtp a N. Como $|W_n| = 1$ qtp, segue-se que $|N| = 1$ qtp. O fato de que $F(N) = \delta_0$ é provado como no Teorema 2.2. ■

Os Teoremas 2.2 e 2.5, implicam nas seguintes desigualdades de Sobolev para campos de vetores:

Corolário 2.6 *Seja M uma variedade riemanniana compacta orientável não admitindo um campo paralelo de vetores (isto é, não existe $X \in H^1(TM)$ tal que $\nabla X = 0$, sendo ∇ a conexão riemanniana de M). Então existe uma constante $\lambda_0 > 0$, dependendo apenas de M e da métrica de M tal que*

$$\int_M |X|^2 dM \leq \frac{1}{\lambda_0} \int_M |\nabla X|^2 dM$$

para todo $X \in H^1(TM)$.

Corolário 2.7 *Seja M uma variedade riemanniana compacta orientável de dimensão maior ou igual a 3, não admitindo um campo paralelo de vetores. Então existe uma constante $\delta_0 > 0$ dependendo apenas de M e da métrica de M tal que*

$$\mathrm{Vol}(M) \leq \frac{1}{\delta_0} \int_M |\nabla X|^2 dM$$

para todo $X \in \mathcal{F}(M)$.

Iremos mostrar a relação entre pontos críticos da conexão e o operdador Laplaciano aproximado. Para tal faremos uso de algumas definições e proposições como segue.

Definição 2.8 *Seja M uma variedade riemanniana, e seja T um tensor em M tal que, a cada $p \in M$, T_p é uma transformação linear de T_pM em T_pM. Definimos o divergente de T em $p \in M$ por*

$$\operatorname{div} T = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} T)(E_i)$$

sendo E_i um referencial ortonormal em uma vizinhança de p.

Lembramos que

$$(\nabla_X T)(Y) = \nabla_X(T(Y)) - T(\nabla_X Y)$$

Para mostramos que $\operatorname{div} T$ não depende da base escolhida, tomamos uma base ortonormal $\{F_j\}$ e escrevemos

$$E_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_j.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} T)(E_i) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(a_{ij} a_{ik} \nabla_{F_j} T\right)(F_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_i a_{ij} a_{ik} \right) \nabla_{F_j} T(F_k).\end{aligned}$$

Sendo (a_{ij}) uma matriz ortogonal temos $(a_{ij})^{-1} = (a_{lk})^t = (a_{kl})$ de modo que

$$(a_{ij})(a_{kl}) = id \tag{7}$$

ou seja

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \tag{8}$$

e assim
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\nabla_{E_i} T\right)(E_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(\nabla_{F_j} T\right)(F_j).$$

Note que para cada $p \in M$,

$$\begin{array}{rccc} \nabla V : & T_pM & \rightarrow & T_pM \\ & v & \mapsto & \nabla_v V \end{array}$$

é linear de modo que $-\operatorname{div} \nabla V$ está bem definido e vale a

Proposição 2.9 *Seja M uma variedade riemanniana compacta, orientável, sem bordo. Então*

$$-\int_M \langle \operatorname{div} \nabla V, W \rangle \, dM = \int_M \langle \nabla W, \nabla V \rangle \, dM$$

para todos $V, W \in \Xi(M)$.

Prova. Dados $V, W \in \Xi(M)$ definimos o campo $G_V(W) \in \Xi(M)$ como segue. Dado $p \in M$, seja E_i um referencial ortonormal em uma vizinhança de p. Então, nesta vizinhança,

$$G_V(W) := \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} V, W \rangle \, E_i.$$

Vamos mostrar que $G_V(W)$ está bem definido, ou seja, não depende do referencial escolhido. De maneira análoga a Definição 2.8, façamos

$$E_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_j.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} V, W \rangle \, E_i &= \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij} a_{ik} \left\langle \nabla_{F_j} V, W \right\rangle F_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_i a_{ij} a_{ik} \right) \left\langle \nabla_{F_j} V, W \right\rangle F_k. \end{aligned}$$

Como vimos anteriormente o fato de (a_{ij}) ser uma matriz ortogonal, implica por (7) e (8) que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} V, W \rangle E_i = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{F_j} V, W \right\rangle F_j.$$

Agora temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(G_V(W)) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle \nabla_{E_i} V, W \rangle \operatorname{div}(E_i) + E_i grad \langle \nabla_{E_i} V, W \rangle \right) \\
&= \sum_{j,i=1}^{n} \left(\langle \nabla_{E_i} V, W \rangle \left\langle \nabla_{E_j} E_i, E_j \right\rangle + \langle E_i, E_j \langle \nabla_{E_i} V, W \rangle E_j \rangle \right) \\
&= \sum_{j,i=1}^{n} \left(- \langle \nabla_{E_i} V, W \rangle \left\langle \nabla_{E_j} E_j, E_i \right\rangle + E_i \langle \nabla_{E_i} V, W \rangle \delta_{ij} \right) \\
&= \sum_{j,i=1}^{n} \left(- \left\langle \nabla_{\left\langle \nabla_{E_j} E_j, E_i \right\rangle E_i} V, W \right\rangle + E_i \langle \nabla_{E_i} V, W \rangle \delta_{ij} \right) \\
&= \sum_{j,i=1}^{n} \left(- \left\langle \nabla_{\nabla_{E_i} E_i} V, W \right\rangle + \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} V, W \rangle + \langle \nabla_{E_i} V, \nabla_{E_i} W \rangle \right) \\
&= \langle div \nabla V, W \rangle + \langle \nabla V, \nabla W \rangle,
\end{aligned}$$

portanto

$$\int_M \operatorname{div}(G_V(W))\, dM = \int_M \left(\langle \operatorname{div} \nabla V, W \rangle + \langle \nabla V, \nabla W \rangle \right) dM.$$

Aplicando Stokes

$$-\int_M \langle \operatorname{div} \nabla V, W \rangle\, dM = \int_M \langle \nabla W, \nabla V \rangle\, dM.$$

■

Observe que o resultado acima prova que $\operatorname{div} \nabla$ é auto-adjunto:

Corolário 2.10 *Seja M uma variedade riemanniana compacta, orientável, sem bordo. Então*

$$\int_M \langle \operatorname{div} \nabla V, W \rangle\, dM = \int_M \langle \operatorname{div} \nabla W, V \rangle\, dM.$$

Proposição 2.11 *Seja M uma variedade riemanniana compacta. Um campo de vetores V_0 é um ponto crítico do funcional*

$$F(V) = \frac{\int_M |\nabla V|^2}{\int_M |V|^2}, V \in H^1(TM)\backslash\{0\}$$

se e somente se $V_0 \in \Xi(M)$ e satisfaz a equação

$$-\operatorname{div} \nabla V_0 = \lambda V_0, \tag{9}$$

onde $\lambda = \dfrac{\int_M |\nabla V_0|^2}{\int_M |V_0|^2}$.

Prova. Provaremos primeiro que (9) é satisfeita fracamente, ou seja, que

$$\int_M \langle \nabla V_0, \nabla W \rangle = \lambda \int_M \langle V_0, W \rangle$$

para todo $W \in H^1(TM)$. Definindo

$$f(t) = \frac{\int_M |\nabla(V_0 + tW)|^2}{\int_M |(V_0 + tW)|^2}$$

temos que f possui um ponto crítico em $t = 0$. Portanto $f'(0) = 0$. Mas

$$f'(t) = \frac{g(t) - h(t)}{\left(\int_M \langle V_0 + tW, V_0 + tW \rangle\right)^2}$$

onde

$$g(t) = 2 \int_M \langle \nabla W, \nabla V_0 + t\nabla W \rangle \int_M \langle V_0 + tW, V_0 + tW \rangle$$

e

$$h(t) = 2 \int_M \langle \nabla V_0 + t\nabla W, \nabla V_0 + t\nabla W \rangle \int_M \langle W, V_0 + tW \rangle .$$

Daí

$$f'(0) = \frac{2\int_M \langle \nabla W, \nabla V_0 \rangle \int_M \langle V_0, V_0 \rangle - 2\int_M \langle \nabla V_0, \nabla V_0 \rangle \int_M \langle W, V_0 \rangle}{\left(\int_M \langle V_0, V_0 \rangle\right)^2}$$

de modo que

$$\frac{2\int_M \langle \nabla W, \nabla V_0 \rangle \int_M \langle V_0, V_0 \rangle - 2\int_M \langle \nabla V_0, \nabla V_0 \rangle \int_M \langle W, V_0 \rangle}{\left(\int_M \langle V_0, V_0 \rangle\right)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\int_M \langle \nabla W, \nabla V_0\rangle \int_M \langle V_0, V_0\rangle - 2\int_M \langle \nabla V_0, \nabla V_0\rangle \int_M \langle W, V_0\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_M \langle \nabla W, \nabla V_0\rangle \int_M \langle V_0, V_0\rangle = \int_M \langle \nabla V_0, \nabla V_0\rangle \int_M \langle W, V_0\rangle$$

$$\Leftrightarrow \int_M \langle \nabla W, \nabla V_0\rangle = \frac{\int_M \langle \nabla V_0, \nabla V_0\rangle}{\int_M \langle V_0, V_0\rangle} \int_M \langle W, V_0\rangle$$

ou seja

$$\int_M \langle \nabla W, \nabla V_0\rangle = \lambda \int_M \langle W, V_0\rangle . \tag{10}$$

Usando técnicas conhecidas da teoria de EDP linear elíptica para regularizar V_0, temos $V_0 \in \Xi(M)$ e portanto pela Proposição 2.9

$$-\operatorname{div} \nabla V_0 = \lambda V_0.$$

■

Proposição 2.12 *Seja M uma variedade riemanniana compacta. Um campo de vetores unitário $N \in \mathcal{F}(M)$ é um ponto crítico do funcional*

$$F(X) = \int_M |\nabla X|^2, \; X \in \mathcal{F}(M)$$

se e somente se N satisfaz fracamente a equação

$$-\operatorname{div} \nabla N = |\nabla N|^2 N.$$

Prova. Faremos um raciocínio análogo ao da proposição anterior, definindo neste caso $f(t)$ da forma

$$f(t) = \int_M \left| \nabla \frac{(N + tX)}{|N + tX|} \right|^2$$

com $X \in \mathcal{F}(M)$. Como anteriormente, esta função possui um ponto crítico em $t = 0$ e, portanto, $f'(0) = 0$. No entanto

$$f(t) = \int_M \langle g(t), g(t)\rangle$$

onde

$$g(t) = \nabla \frac{1}{\langle N+tX, N+tX\rangle^{\frac{1}{2}}} N + \nabla \frac{t}{\langle N+tX, N+tX\rangle^{\frac{1}{2}}} X$$

Daí

$$f'(0) = 2\int_M \langle g'(0), g(0)\rangle = 0.$$

Tendo-se

$$g(0) = \nabla N,$$

e

$$g'(0) = -\nabla \langle N, X\rangle N + \nabla X,$$

obtemos

$$\begin{aligned} &2\int_M \langle -\nabla \langle N, X\rangle N + \nabla X, \nabla N\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_M \langle \nabla X, \nabla N\rangle = \int_M \langle \nabla \langle N, X\rangle N, \nabla N\rangle \end{aligned}$$

Observe que dado um ponto $p \in M$, e uma base ortonormal $\{e_i\}$, na vizinhança de p, temos, para cada i,

$$\langle \nabla_{e_i} N, N\rangle = \frac{1}{2} e_i \langle N, N\rangle = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \langle N, X\rangle N, \nabla N\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \{\langle e_i (\langle N, X\rangle) N, \nabla_{e_i} N\rangle + \langle N, X\rangle \langle \nabla_{e_i} N, \nabla_{e_i} N\rangle\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle N, X\rangle \langle \nabla_{e_i} N, \nabla_{e_i} N\rangle \\ &= \langle N, X\rangle \langle \nabla N, \nabla N\rangle \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} &\int_M \langle \nabla X, \nabla N\rangle = \int_M \langle \nabla \langle N, X\rangle N, \nabla N\rangle \\ \Leftrightarrow &\int_M \langle \nabla X, \nabla N\rangle = \int_M \langle \nabla N, \nabla N\rangle \langle N, X\rangle \end{aligned}$$

e portanto, pela Proposição 2.9, temos $-\operatorname{div} \nabla N = |\nabla N|^2 N$ fracamente. ■

Proposição 2.13 *Seja M uma variedade riemanniana compacta orientável de dimensão maior ou igual a 3. Sejam*

$$\delta_0 = \inf_{X \in \mathcal{F}(M)} \int_M |\nabla X|^2 dM$$

e

$$\lambda_0 = \inf_{X \in H^1(TM)\setminus\{0\}} \frac{\int_M |\nabla X|^2 dM}{\int_M |X|^2 dM},$$

então

$$\delta_0 \geq \lambda_0 \operatorname{Vol}(M).$$

Prova. Denotamos por $H^1_V(TM)$ o conjunto dos campos $X \in H^1(TM)$ de norma L^2 igual a V, onde $V = \operatorname{Vol}(M)$, isto é

$$\int_M \langle X, X \rangle = \operatorname{Vol}(M).$$

Seja δ_V dado por

$$\delta_V = \inf \left\{ E(X) := \int_M \langle \nabla X, \nabla X \rangle \ \mid X \in H^1_V(TM) \right\}.$$

Claramente temos $\delta_V \leq \delta_0$, e pelos mesmos argumentos usados para demonstrar o Teorema 2.2, sabemos que existe $X_0 \in H^1_V(TM)$ tal que

$$\delta_V = \int_M \langle \nabla X_0, \nabla X_0 \rangle .$$

Usando os resultados das Proposições 2.9 e 2.11, temos que

$$\delta_0 \geq \delta_V = \int_M \langle -\operatorname{div} \nabla X_0, X_0 \rangle = \lambda_0 \int_M \langle X_0, X_0 \rangle \geq \lambda_0 \operatorname{Vol}(M).$$

O que demostra a proposição. ■

3 Campos G-invariantes

Definição 3.1 *Seja M uma variedade riemanniana e $G \subset ISO(M)$ um subgrupo de Lie compacto, conexo. Dizemos que um campo de vetores V de M, é G-invariante se, $\forall x \in M$,*

$$V(g(x)) = dg_x(V(x)), \forall g \in G.$$

Sendo G um grupo de Lie compacto, podemos considerar em G uma métrica riemanniana bi-invariante, ou seja, uma métrica na qual as translações à esquerda $L_g(h) = gh$ e à direita $R_g(h) = hg$ são isometrias. Esta métrica em G estará sempre sendo tacitamente assumida no texto. Na integração em G estaremos usando a medida dada por esta métrica.

Vamos no que segue mencionar alguns poucos fatos básicos sobre ações de grupos que utilizaremos à frente.

Definição 3.2 *Sejam M uma variedade riemanniana e G um grupo agindo em M. Dado $p \in M$, a órbita de G passando por p é*

$$G(p) = \{g(p) \mid g \in G\}$$

e o subgrupo de isotropia de G em p é

$$G_p = \{g \in G \mid g(p) = p\}.$$

Duas órbitas $G(p)$ e $G(q)$ são ditas do mesmo tipo se G_p e G_q são conjugados em G, ou seja, se existe $g \in G$ tal que $G_p = gG_qg^{-1}$. Nós ordenamos, parcialmente, os tipos de órbitas, da forma como segue:

$$(H) \succeq (K) \Leftrightarrow \exists g \in G \mid K \supseteq gHg^{-1},$$

onde (H) denota a classe de conjugação de H, grupo de isotropia.

Um fato conhecido que a seguir utilizaremos é o teorema abaixo, que pode ser visto em [HL]

Teorema 3.3 *(órbita tipo principal) Seja M uma variedade conexa, e G um grupo agindo diferenciavelmente em M. Então existe um único tipo de órbita (H) tal que $(H) \succeq (K)$ para todo tipo de órbita (K) da ação. E ainda, a união de todas as órbitas do tipo (H), a saber*

$$M^* = \{x \in M \mid G_x \in (H)\},$$

é uma variedade aberta densa e conexa de M.

As órbitas do tipo (H), citadas no Teorema 3.3, são chamadas de órbitas principais. As demais órbitas nos referiremos como singulares (inclusive as excepcionais, ou seja, aquelas que têm a mesma dimensão de uma principal mas o subgrupo de isotropia não é conjugado ao subgrupo de isotropia de uma principal).

Definição 3.4 *Sejam M uma variedade riemanniana e G um grupo agindo em M. Dizemos que G age em cohomogeneidade k, se a codimensão das órbitas principais de G é k.*

Vamos considerar na maioria da vezes o caso em que G age em M com cohomogeneidade 1. Por isso é conveniente observar alguns fatos básicos, bem como introduzir algumas notações, relacionadas a este tipo de ação, que deverão ser usadas daqui para frente. Fazemos isto na seção que segue.

3.1 Ações em cohomogeneidade 1.

Suponha que M é uma variedade riemanniana compacta, sem bordo, e que $G \subset ISO(M)$, compacto, age com cohomogeneidade 1 em M. Então, decorre do Teorema 3.3 que o espaço quociente

$$\frac{M}{G} = \{G(p) \mid p \in M\}$$

é difeomorfo a um círculo ou a um intervalo fechado. No primeiro caso G não tem órbitas singulares e podemos considerar uma curva *fechada* $\gamma_1 : [0, l_1] \to M$ parametrizada por comprimento de arco, ortogonal às órbitas de G. No segundo caso, ou seja, M/G é difeomorfo a um intervalo fechado, G tem duas órbitas singulares, digamos O_1 e O_2 e podemos considerar uma curva $\gamma_2 : [0, l_1] \to M$ parametrizada por comprimento de arco, ortogonal às órbitas de G, tal que $\gamma_2(0) \in O_1$ e $\gamma_2(l_1) \in O_2$. Denotamos por

$$\gamma : [0, l] \to M$$

tanto γ_1 quanto γ_2, indistintamente. Note que a norma da segunda forma fundamental e a curvatura média de cada órbita de G são constantes ao longo da órbita, ou seja, dependem apenas de s, parâmetro da curva.

Proposição 3.5 *Sejam M uma variedade riemanniana compacta, sem bordo, e $G \subset ISO(M)$, compacto, conexo, agindo com cohomogeneidade 1 em M. Se $\gamma : [0, l] \to M$, é uma curva ortogonal às órbitas de G, então γ é uma geodésica.*

Prova. De acordo com o que vimos anteriormente, podemos tratar, indistintamente, os casos em que γ é fechada ou não. Vamos supor γ parametrizada pelo comprimento de arco. Seja N, campo unitário ortogonal às órbitas de G. Logo $N(\gamma(s)) = \pm\gamma'(s)$. Suponhamos $N(\gamma(s)) = \gamma'(s)$. Sejam $p \in M$ e $s_0 \in [0, l]$, tal que $\gamma(s_0) = p$. A mostrar:

$$\frac{D\gamma'}{ds}|_{s=s_0} = 0.$$

Primeiro observe que

$$\langle \nabla_{\gamma'} N, N \rangle = \frac{1}{2} N(p)(\langle N, N \rangle) = 0. \tag{11}$$

Por outro lado seja $z \in T_pG(p)$. Mostremos que

$$\langle \nabla_{\gamma'} N, z \rangle = 0.$$

Existe $X \in \Xi(G)$ tal que X é Killing e $X(p) = z$. Portanto

$$\langle \nabla_{\gamma'} N, z \rangle = \langle \nabla_N N, X \rangle (p) = N(p)(\langle N, X \rangle) - \langle N, \nabla_N X \rangle (p).$$

Como N é ortogonal às órbitas de G, temos

$$\langle N, X \rangle = 0.$$

Consequentemente

$$\langle \nabla_N N, X \rangle = - \langle N, \nabla_N X \rangle .$$

Como X é Killing temos

$$\langle \nabla_N X, N \rangle = 0,$$

o que implica

$$\langle N, \nabla_N X \rangle = 0.$$

Portanto

$$\langle \nabla_{\gamma'} N, z \rangle = \langle \nabla_N N, X \rangle (p) = 0. \tag{12}$$

Por (11) e (12), temos

$$\left(\nabla_{\gamma'} N\right)(p) = 0,$$

como

$$\frac{D\gamma'}{ds}|_{s=s_0} = \left(\nabla_{\gamma'} N\right)(p),$$

concluímos nossa demonstração. ■

Definição 3.6 *Nas mesmas condições acima, definimos $B(s)$, para cada $s \in (0, l)$, como a segunda forma fundamental da órbita $G(\gamma(s))$ no ponto $\gamma(s)$, ou seja*

$$B(s)(u, v) = (\nabla_v u)^{\perp}, \ u, v \in T_{\gamma(s)}G(\gamma(s)).$$

Definição 3.7 *Definimos a norma de $B(s)$, e a denotamos por $|B|(s)$, a aplicação*

$$|B| : (0, l) \to \mathbb{R},$$

dada por

$$|B|^2(s) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} e_j, \gamma' \rangle^2 (s),$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(s)}G(\gamma(s))$.

Definição 3.8 *Definimos a curvatura média ao longo das órbitas de um grupo $G \subset ISO(M)$ agindo em cohomogeneidade 1 como a aplicação $H : (0, l) \to \mathbb{R}$ que leva $s \in [0, l]$ na curvatura média de $G(\gamma(s))$ na direção do vetor $\gamma'(s)$, normal a $G(\gamma(s))$ no ponto $\gamma(s)$. Ou seja:*

$$(n-1)H(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle B(s)(e_i, e_i), \gamma' \rangle,$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(s)}G(\gamma(s))$.

Iremos agora ver um exemplo de campo $G-$invariante na

Proposição 3.9 *Sejam M uma variedade riemanniana e $G \subset ISO(M)$, um subgrupo de Lie conexo, agindo em cohomogeneidade 1. Se N é um campo unitário ortogonal as órbitas de G, então N é um campo $G-$invariante.*

Prova. Sejam $x \in M$, N como na hipótese. A mostrar:

$$N(g(x)) = dg_x(N(x)), \ \forall g \in G.$$

Dado $Z \in T_{g(x)}G(x) \subset T_{g(x)}M$ temos

$$\langle N(g(x)), Z \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle dg_x^{-1}(N(g(x))), dg_x^{-1}(Z) \right\rangle = 0.$$

Como $dg_x^{-1}(Z) \in T_xG(x)$, temos $dg_x^{-1}(N(g(x)))\perp T_xG(x)$. Além disso, usando o fato de que a cohomogeneidade de G é um, temos

$$dg_x^{-1}N(g(x)) = \pm N(x),$$

ou seja

$$N(g(x)) = \pm dg_x(N(x)). \tag{13}$$

Agora, suponha que $g = \exp X$, com $X \in T_eG$, onde $\exp : T_eG \to G$ é a exponencial em G. Seja $g_t = \exp(tX)$. Então, de acordo com (13), tem-se

$$N(g_t(x)) = \pm d(g_t)_x(N(x))$$

para todo $t \geq 0$. Mas $g_0 = id$, de modo que

$$N(x) = N(g_0(x)) = d(g_0)_x(N(x)),$$

logo por continuidade, temos

$$N(g(x)) = dg_xN(x).$$

■

Proposição 3.10 *Sejam M uma variedade riemanniana compacta orientável de dimensão maior ou igual a 2, e $G \subset ISO(M)$, um subgrupo de Lie conexo compacto agindo em cohomogeneidade 1. Se G deixa um ponto fixo, p_0, então as órbitas de G são esferas geodésicas centradas em p_0.*

Prova. Seja $p \in M$, e seja $r = d(p, p_0)$. A mostrar $G(p) = S_r(p_0)$. Tomando $q \in G(p)$ temos $g \in G$ tal que $q = g(p)$. Daí

$$d(g(p), p_0) = d(g(p), g(p_0)) = d(p, p_0) = r \Rightarrow G(p) \subset S_r(p_0).$$

Por outro lado $G(p)$ é uma variedade fechada sem bordo e por ser G de cohomogeneidade 1, $G(p)$ possui a mesma dimensão de $S_r(p_0)$. Logo,

$$G(p) = S_r(p_0).$$

■

Vamos apresentar a seguir condições que garantam que o campo N é de Sobolev. Para isso precisamos do

Lema 3.11 *Seja M uma variedade riemanianna compacta, orientável, N um campo unitário, ortogonal às órbitas de um grupo $G \subset ISO(M)$, agindo em cohomogeneidade 1. Então*

$$\langle \nabla N, \nabla N \rangle (p) = |B(s)|^2$$

para todo $p \in G(\gamma(s))$.

Prova. Observamos primeiro que pela Proposição 3.5 $\nabla_N N = 0$. Seja agora $p \in M$, e seja $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ uma base ortonormal na vizinhança de p, tal que $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ diagonaliza a segunda forma fundamental da órbita $G(p)$, e seja γ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, ortogonal as órbitas de G, tal que $\gamma(0) = p$. Então

$$\langle \nabla N, \nabla N \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} N, \nabla_{e_i} N \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \lambda_i e_i, \lambda_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 = |B|^2 .$$

■

Teorema 3.12 *Seja M uma variedade riemanianna compacta, orientável, de dimensão n, maior ou igual a três, e seja G um grupo conexo, compacto agindo por isometrias em M com cohomogeneidade 1. Suponha que ou G não tem órbita singular ou que as órbitas singulares de G têm dimensão no máximo $n - 3$. Seja N um campo unitário normal as órbitas de G. Então*

$$\int_M \langle \nabla N, \nabla N \rangle < \infty, \tag{14}$$

ou seja, $N \in \mathcal{F}(M)$.

Prova. Como mencionamos antes,

$$M/G = \{G(p) | p \in M\}$$

é difeomorfo a um círculo ou a um intervalo fechado. Se M/G é difeomorfa a um círculo é porque G não têm órbitas singulares e, nesse caso, N é um campo diferenciável definido globalmente em toda variedade. Portanto, neste caso, (14) é trivialmente verdadeiro. Como já foi posto anteriormente, se M/G é difeomorfo a um intervalo fechado, então G tem duas órbitas singulares, a saber O_1 e O_2. Definimos $f : M \to [0, \infty)$ por

$$f(p) = d(G(p), O_1)$$

sendo d a distância riemanniana em M. Vamos mostrar que $d(G(p), O_1) = d(p, O_1)$. De fato, sejam $r \in G(p)$ e $s \in O_1$ tal que

$$d(r, s) = d(G(p), O_1).$$

Como $r \in G(p)$, $\exists g \in G$ tal que $r = g(p)$. Portanto,

$$d(G(p), O_1) = d(r, s) = d(g(p), s) \Rightarrow d(p, g^{-1}(s)) \geq d(p, O_1) \geq d(G(p), O_1).$$

Logo

$$d(p, O_1) = d(G(p), O_1),$$

e podemos redefinir $f : M \to [0, \infty)$ por

$$f(p) = d(p, O_1).$$

Basta então provarmos que, para algum $s \in (0, \max f)$, pondo

$$U_s = f^{-1}([0, s]),$$

tem-se

$$\int_{U_s} \langle \nabla N, \nabla N \rangle < \infty,$$

já que o mesmo raciocínio se aplicaria tomando O_2 no lugar de O_1 e, na parte restante de M que não se integrou, N é diferenciável. Primeiro mostraremos que

$$|\nabla f(p)| = 1,$$

para todo $p \in M \backslash (O_1 \cup O_2)$. Para tal, seja $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_pG(p)$. Então o gradiente de f em p pode ser escrito como

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{n} df_p(e_i)e_i, \tag{15}$$

onde $e_n = N(p)$. Pela forma como foi definida, a funçaõ f é constante ao longo das órbitas e portanto a igualdade (15), se resume a

$$\nabla f(p) = df_p(e_n)e_n.$$

Calculemos então

$$|df_p(e_n)|.$$

Para este cálculo, tomemos q_0 e t_0, tal que $p = \exp_{q_0} t_0 N(q_0)$. Seja $\alpha : (0, \varepsilon) \to M$, dada por

$$\alpha(t) = \exp_{q_0} (t_0 + t)\, N(q_0).$$

Temos que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = N(p) = e_n$. Logo

$$df_p(e_n) = \frac{d}{dt} (f \circ \alpha)(t)|_{t=0}.$$

Mas

$$f(\alpha(t)) = f\left(\exp_{q_0} (t_0 + t)\, N(q_0)\right) = t_0 + t,$$

o que implica

$$df_p(e_n) = 1,$$

e portanto

$$|\nabla f(p)| = |df_p(e_n)| = 1. \tag{16}$$

Vamos agora usar a fórmula da coárea, Teorema 2.1, para $\overline{M} = U$, $M = \mathbb{R}$ e $\phi = f$. Neste caso $||\,\mathrm{Jac}\, f|| = |\nabla f|$, e usando (16), obtemos

$$\int_{U_s} \langle \nabla N, \nabla N \rangle = \int_0^s \int_{f^{-1}(t)} \langle \nabla N, \nabla N \rangle\, \omega_t dt, \tag{17}$$

onde ω_t é a fórma volume da órbita $f^{-1}(t)$.
Como já vimos, para cada $t \in (0, s]$ tem-se, em qualquer ponto de $f^{-1}(t)$,

$$\langle \nabla N, \nabla N \rangle = |B_t|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2(t),$$

onde $\lambda_i(t)$ são as curvaturas principais de $f^{-1}(t)$, que são constantes ao longo de $f^{-1}(t)$. Assim, de (17), vem

$$\int_{U_s} \langle \nabla N, \nabla N \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^s \int_{f^{-1}(t)} \lambda_i^2(t) \omega_t dt \leq (n-1) \int_0^s \left[\lambda^2(t) \int_{f^{-1}(t)} \omega_t \right] dt$$

onde $\lambda^2(t) = \max \lambda_i^2(t)$. Suponhamos que λ_i sejam calculadas com relação a normal apontado para a componente conexa de $M \backslash f^{-1}(t)$ que contém O_1, e que N seja tal normal. Assim, em particular, ocorre que se s é suficientemente pequeno, então $\lambda(t) > 0$ para $t \in (0, s]$. Suponhamos então que s seja escolhido desta forma. Sejam $t \in (0,s]$, $q \in f^{-1}(t)$ e $e \in T_q f^{-1}(t)$ o autovetor associado a $\lambda(t)$. Seja $p \in O_1$ tal que

$$d(p,q) = d(O_1, f^{-1}(t)).$$

Seja $K = \max|K_M| + 1$. Usando o Teorema da Comparação do Hessiano, (conforme [Y]) entre M e um espaço simplesmente conexo de curvatura seccional constante $-K$.obtemos para cada $t \in (0,r]$, em qualquer ponto de $f^{-1}(t)$,

$$\lambda^2(t) \leq K \coth^2(t\sqrt{K}),$$

onde $\sqrt{K}\coth(t\sqrt{K})$ é o Hessiano da função distância de M, de modo que

$$\int_U \langle \nabla N, \nabla N \rangle \leq (n-1)K \int_0^s \left[\coth^2(t\sqrt{K}) \int_{f^{-1}(t)} \omega_t \right] dt.$$

Seja $S = f^{-1}(s)$. Dado $t \in (0,s]$, seja $\phi_t : S \to f^{-1}(t)$ dada por

$$\phi_t(p) = \exp_p(s-t)N(p), \;\; p \in S.$$

Então o teorema de Fubini nos dá

$$\int_{f^{-1}(t)} \omega_t = \int_S (\phi_t)^* \, \omega_t.$$

Podemos escrever $(\phi_t)^* \, \omega_t = \delta\omega$ para alguma função $\delta : M \to \mathbb{R}$, sendo ω a forma volume em S, e assim obter

$$\int_{f^{-1}(t)} \omega_t = \int_S \delta\omega.$$

Dado $p \in S$, sendo $E_1, ..., E_{n-1}$ uma base ortonormal de T_pS vem

$$\begin{aligned}
\delta(p) = \delta(p) \cdot 1 = \delta(p)\omega_p\left(E_1, ..., E_{n-1}\right) &= (\phi_t)^* \left(\omega_t\right)_p \left(E_1, ..., E_{n-1}\right) \\
&= \left(\omega_t\right)_{\phi_t(p)} \left(d(\phi_t)_p(E_1), ..., d(\phi_t)_p(E_{n-1})\right) \\
&\leq |d(\phi_t)_p(E_1)| \cdot ... \cdot |d(\phi_t)_p(E_{n-1})| \\
&= |J_1(t)| \cdot ... \cdot |J_{n-1}(t)|
\end{aligned}$$

onde cada $J_i(t) = d(\phi_t)_p(E_i)$ é um campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma(u) = \exp_p(uN(p))$. Observamos agora que O_1 é o conjunto focal de S. Como $\dim O_1 \leq \dim S - 2$ podemos supor que

$$|d(\phi_0)_p(E_1)| = 0 = |d(\phi_0)_p(E_2)|.$$

Segue-se que

$$J_1(s) = 0 = J_2(s).$$

Podemos então comparar J_1 e J_2 com os campos de Jacobi em um espaço de curvatura constante $-K$ para concluir, através do Teorema de Rauch (páigina 215 de [M]), que

$$|J_i(t)| \leq \frac{\sinh(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}, \ i = 1, 2$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int_U \langle \nabla N, \nabla N \rangle &\leq (n-1)K \int_0^s \left[\coth^2(t\sqrt{K}) \int_{f^{-1}(t)} \omega_t \right] dt \\
&\leq (n-1)K \int_0^s \coth^2(t\sqrt{K}) \left(\frac{\sinh(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} \right)^2 |J_3(t)| \cdot ... \cdot |J_{n-1}(t)| \operatorname{Vol}(S) dt \\
&= (n-1) \operatorname{Vol}(S) \int_0^s \cosh^2(t\sqrt{K}) \, |J_3(t)| \cdot ... \cdot |J_{n-1}(t)| < \infty.
\end{aligned}$$

■

4 A G-simetrização de um campo

Nesta seção iremos introduzir o processo de simetrização de um campo por um subgrupo de isometrias em uma variedade e provar diversas propriedades.

Definição 4.1 *Sejam M variedade riemanniana compacta, $G \subset ISO(M)$ um subgrupo de Lie compacto, e V um campo de vetores em M. Introduzimos o campo $G-$simetrizado de V, que denotamos por V_G, da seguinte forma. Dado $p \in M$, definimos*

$$V_G(p) = \frac{1}{\operatorname{Vol}(G)} \int_G (dg_p)^{-1} V(g(p)) \omega,$$

sendo ω a forma volume em G. Esta integral significa que, para todo u de T_pM,

$$\langle V_G(p), u \rangle = \frac{1}{\operatorname{Vol}(G)} \int_G f\omega,$$

onde $f : G \to \mathbb{R}$ é dada (para p e u fixados) por

$$f(g) = \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), u \right\rangle .$$

Proposição 4.2 *Sejam M uma variedade riemanniana compacta, orientável, $G \subset ISO(M)$ subgrupo compacto, e V um campo de vetores em M. Se V_G é o $G-$simetrizado de V, então V_G é $G-$invariante.*

Prova. Seja V_G, como já definimos, o campo $G-$simetrizado de V. Então em cada $p \in M$, V_G é dado por

$$\langle V_G(p), u \rangle = \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G f\omega$$

onde u é um vetor qualquer de T_pM e ω a forma volume em G, e $f : G \to \mathbb{R}$ dada (para p e u fixados) por

$$f(g) = \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), u \right\rangle .$$

Seja $h \in G$. Temos que provar que $V_G(h(p)) = dh_p(V_G(p))$. Para isso, dado $u \in T_{h(p)}M$ qualquer, temos que mostrar que

$$\langle V_G(h(p)), u \rangle = \langle dh_p(V_G(p)), u \rangle$$

ou seja, que

$$\langle V_G(h(p)), u \rangle = \left\langle V_G(p), (dh_p)^{-1}(u) \right\rangle .$$

Temos

$$\left\langle V_G(p), (dh_p)^{-1}(u) \right\rangle = \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G f\omega$$

onde

$$f(g) = \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), (dh_p)^{-1}(u) \right\rangle$$

e

$$\langle V_G(h(p)), u \rangle = \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G \widetilde{f}\omega$$

onde

$$\widetilde{f}(g) = \left\langle (dg_{h(p)})^{-1} V(g(h(p))), u \right\rangle .$$

Vamos agora verificar que $\widetilde{f} = f \circ \phi$, onde $\phi : G \to G$ é dada por $\phi(g) = gh = g \circ h$. Temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(g) &= \left\langle (dg_{h(p)})^{-1} V(g(h(p))), u \right\rangle \\
&= \left\langle (dh_p)^{-1} (dg_{h(p)})^{-1} V(g(h(p))), (dh_p)^{-1}(u) \right\rangle \\
&= \left\langle d(g \circ h)_p{}^{-1} V((g \circ h)(p)), (dh_p)^{-1}(u) \right\rangle \\
&= \left\langle d(\phi(g))_p{}^{-1} V(\phi(g)(p)), (dh_p)^{-1}(u) \right\rangle \\
&= (f \circ \phi)(g).
\end{aligned}$$

Por outro lado, como ϕ é uma isometria de G (ϕ nada mais é do que a translação à direita por h, e a métrica de G é bi-invariante) é fácil de ver que $|\operatorname{Jac}\phi| \equiv 1$. Assim, através de uma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle (dh_p) V_G(p), (u) \rangle = \left\langle V_G(p), (dh_p)^{-1}(u) \right\rangle &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G f\omega \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G \widetilde{f} |\operatorname{Jac}\phi| \omega \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G \widetilde{f}\omega = \langle (V_G(h(p))), u \rangle .
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.3 *Sejam M variedade riemanniana compacta orientada, $G \subset ISO(M)$ subgrupo compacto e V_G a G-simetrização de $V \in \Xi(M)$. Se V satisfaz*

$$-\operatorname{div} \nabla V = \lambda V,$$

então V_G satisfaz

$$-\operatorname{div} \nabla V_G = \lambda V_G.$$

Para demonstrar esta proposição faremos uso dos seguintes lemas:

Lema 4.4 *Seja X um campo de vetores de M. Seja $g : M \to M$ uma isometria. Seja $p \in M$. Então*

$$\langle \nabla_y X_g, z \rangle (p) = \left\langle \nabla_{dg_p(y)} X, dg_p(z) \right\rangle (g(p))$$

para todos os $y, z \in T_pM$, onde

$$X_g(q) = (dg_q)^{-1}(X(g(q))), \; q \in M.$$

O campo X_g definido acima é dito o campo $g-$relacionado ao campo X.

Prova. Fixemos $y, z \in T_pM$. Sejam Y e Z campos de vetores de M tais que

$$Y(g(p)) = dg_p(y),\ Z(g(p)) = dg_p(z). \tag{18}$$

Portanto Y_g e Z_g são campos de vetores em M que estendem y e z. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_y X_g, z\rangle (p) &= \left\langle \nabla_{Y_g} X_g, Z_g \right\rangle (p) \\
&= \frac{1}{2}\{X_g \langle Y_g, Z_g\rangle + Y_g \langle Z_g, X_g\rangle - Z_g \langle X_g, Y_g\rangle \\
&- \langle [X_g, Z_g], Y_g\rangle - \langle [Y_g, Z_g], X_g\rangle - \langle [X_g, Y_g], Z_g\rangle\}(p).
\end{aligned}$$

Por outro lado, decorre de (18) que Y e Z são campos de vetores que estendem $dg_p(y)$ e $dg_p(z)$ de modo que

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{dg_p(y)} X, dg_p(z)\right\rangle (g(p)) &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle (g(p)) \\
&= \frac{1}{2}\{X \langle Y, Z\rangle + Y \langle Z, X\rangle - Z \langle X, Y\rangle \\
&- \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}(g(p)).
\end{aligned}$$

Temos

$$X_g \langle Y_g, Z_g\rangle (p) = \frac{d}{dt} \langle Y_g(\alpha(t)), Z_g(\alpha(t))\rangle |_{t=0},$$

onde $\alpha : I \to M$ é tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X_g$. Daí

$$\begin{aligned}
X_g \langle Y_g, Z_g\rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle (dg_{\alpha(t)})^{-1}(Y(g(\alpha(t)))), (dg_{\alpha(t)})^{-1}(Z(g(\alpha(t))))\right\rangle |_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \langle Y(g(\alpha(t))), Z(g(\alpha(t))\rangle |_{t=0},
\end{aligned}$$

fazendo $\beta = g \circ \alpha$, temos $\beta(0) = g(\alpha(0)) = g(p)$ e $\beta'(0) = dg_p(X_g(p)) = X(g(p))$ e então

$$\begin{aligned}
X_g \langle Y_g, Z_g\rangle (p) &= \frac{d}{dt} \langle Y(g(\alpha(t))), Z(g(\alpha(t)))\rangle |_{t=0} \\
&= X \langle Y, Z\rangle (g(p)).
\end{aligned}$$

De maneira análoga provamos as igualdades $Y_g \langle Z_g, X_g\rangle (p) = Y \langle Z, X\rangle (g(p))$ e $Z_g \langle X_g, Y_g\rangle (p) = Z \langle X, Y\rangle (g(p))$. Quando às igualdades dos termos que envolvem colchetes temos, pelo fato de ser g um difeomorfismo,

$$\begin{aligned}\langle [U,V], W\rangle (g(p)) &= \langle (dg_x)[U,V], (dg_x)W\rangle (p)\\ &= \langle [(dg_x)U, (dg_x)V], (dg_x)W\rangle (p)\\ &= \langle [U_g, V_g], W_g\rangle (p).\end{aligned}$$

■

Lema 4.5 *Sejam M uma variedade riemanniana compacta orientável. Sejam V um autovetor de $-\operatorname{div}\nabla$ de autovalor λ e $g : M \to M$ uma isometria. Então*

$$\operatorname{div}\nabla V_g = -\lambda V_g.$$

Prova. Para facilitar a redação, dado $p \in M$ denotamos por dp a forma volume de M em p. Para provar o lema, basta mostrar que

$$\lambda \int_M \langle V_g(p), W(p)\rangle\, dp = \int_M \langle \nabla V_g(p), \nabla W(p)\rangle\, dp$$

para todo $W \in \Xi(M)$. Temos

$$\begin{aligned}&\lambda \int_M \langle V_g, W\rangle\, dp =\\ &\qquad = \lambda \int_M \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), W(p)\right\rangle dp =\\ &\qquad = \lambda \int_M \langle V(g(p)), dg_p(W(p))\rangle\, dp =\\ &= \int_M \langle \nabla V(g(p)), \nabla dg_p(W)(p)\rangle\, dp. \qquad (19)\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema 4.4,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla (dg_p)^{-1} V(g(p)), \nabla W \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} (dg_p)^{-1} V(g(p)), \nabla_{e_i} W \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{dg_p(e_i)} V(g(p)), dg_p(\nabla_{e_i} W) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle (dg_p)^{-1} \nabla_{dg_p(e_i)} V(g(p)), \nabla_{e_i} W \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle (dg_p)^{-1} \nabla_{dg_p(e_i)} V(g(p)), \nabla_{e_i} (dg_p)^{-1} \circ (dg_p) W \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle (dg_p)^{-1} \nabla_{dg_p(e_i)} V(g(p)), (dg_p)^{-1} \nabla_{dg_p(e_i)} (dg_p) W \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{dg_p(e_i)} V(g(p)), \nabla_{dg_p(e_i)} dg_p(W) \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla V(g(p)), \nabla dg_p(W) \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Portanto por (19),

$$
\begin{aligned}
\lambda \int_M \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), W \right\rangle dp &= \int_M \left\langle \nabla (dg_p)^{-1} V(g(p)), \nabla W \right\rangle dp \\
&= \int_M \left\langle \nabla V_g, \nabla W \right\rangle dp.
\end{aligned}
$$

■

Prova do Teorema 4.3.

$$\begin{aligned}
\lambda \int_M \langle V_G, W\rangle \, dp &= \frac{\lambda}{\mathrm{Vol}(G)} \int_M \int_G \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), W \right\rangle \omega dp \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_M \int_G \lambda \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), W \right\rangle \omega dp \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G \int_M \lambda \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), W \right\rangle dp\omega \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G \int_M \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), -\operatorname{div} \nabla W \right\rangle dp\omega \\
&= \int_M \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G \left\langle (dg_p)^{-1} V(g(p)), -\operatorname{div} \nabla W \right\rangle \omega dp \\
&= \int_M \langle V_G, -\operatorname{div} \nabla W\rangle \, dp,
\end{aligned}$$

onde, para as terceira e quarta igualdades, usamos o Lema 4.5 e a Proposição 2.9. A prova do resultado decorre então do Corolário 2.10. ■

De acordo com o Teorema 4.3, dado um auto-vetor V, do operador $-\operatorname{div} \nabla$, associado a um auto valor λ, é possível encontrar um auto vetor V_G , do operador $-\operatorname{div} \nabla$, também associado ao auto valor λ, sendo que V_G traz a vantagem de ser $G-$invariante. O processo de $G-$simetrização estaria à princípio reduzindo o problema de encontrar auto vetores do operador $-\operatorname{div} \nabla$ aos campos $G-$invariantes, salvo a possibilidade de V_G ser o campo nulo. Trataremos disto no que segue.

Definição 4.6 *Seja M uma variedade riemanniana compacta e orientável. Seja $G \subset ISO(M)$ um subgrupo de Lie compacto. Seja V um campo de vetores de M. Dizemos que V tem $G-$média zero em $p \in M$ se*

$$\int_{g \in \phi G \phi^{-1}} dg^{-1} \left(V(g(p)) \right) \omega_\phi = 0,$$

para todo $\phi \in ISO(M)$, onde ω_ϕ é a forma volume em $\phi G \phi^{-1}$.

Observamos que a igualdade acima significa que, para cada $u \in T_pM$, vale zero a integral sobre $\phi G \phi^{-1}$ da função $f : \phi G \phi^{-1} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(g) = \left\langle dg^{-1} \left(V(g(p)) \right), u \right\rangle.$$

Corolário 4.7 *Seja M uma variedade riemanniana compacta e orientável. Seja $G \subset ISO(M)$ um subgrupo de Lie compacto. Seja μ valor crítico da conexão. Então, uma das duas alternativas abaixo ocorre:*
a) existe um campo $G-$ invariante V em $\mathcal{L}(M)$ tal que $F(V) = \mu$;
b) todo ponto crítico da conexão de M com valor crítico μ tem $G-$média zero em todos os pontos de M.

Prova. Decorre diretamente da Proposição 4.2 e do Teorema 4.3. ∎

O teorema que iremos enunciar fornece condições suficientes para garantir a existencia de campos $G-$simetrizados não nulos para todo campo V, em espaços simétricos de posto 1:

Teorema 4.8 *Sejam M espaço simétrico compacto de posto 1 e $G \subset ISO(M)$ tal que $G(p) = \{p\}$ para algum $p \in M$. Suponha que a ação pela derivada do grupo de isotropias G_p de G em T_pM deixa um vetor não nulo invariante, ou seja existe $v \in T_pM$ $v \neq 0$ tal que*

$$dg_p(v) = v, \; \forall g \in G_p.$$

Então o espectro do operador $-\operatorname{div}\nabla$ nos espaços dos campos de norma L^2 igual a um é igual ao espectro deste operador nos campos G-invariantes de norma L^2 igual a um.

Para provar o Teorema 4.8 faremos uso do seguinte

Lema 4.9 *Sejam M, $p \in M$, $v \in T_pM$ e $G \subset ISO(M)$, como acima. Sejam x_n uma sequência em M tal que $x_n \to p$ e $V \in \mathcal{L}(M)$ um ponto crítico de F. Se existe $h \in ISO(M)$ tal que $h(p) = q$ e $dh_q^{-1}(V(q)) = v$, então o campo $h-$relacionado a V, V_h, definido por*

$$V_h(x) = (dh_x)^{-1}(V(h(x))),$$

é dado em p por

$$V_h(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_G dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n)))\omega}{\operatorname{Vol}(G(x_n))}.$$

Prova. Basta mostrar que

$$\langle V_h(p), Z(p)\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \frac{\int_G dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n)))\omega}{\operatorname{Vol}(G(x_n))}, Z(p)\right\rangle \; \forall Z \in \Xi(M).$$

Dado $Z \in \Xi(M)$, fixado n, tem-se

$$\left\langle \frac{\int_G dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n)))\omega}{\mathrm{Vol}(G(x_n))}, Z(x_n) \right\rangle = \frac{\int_G \left\langle dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n))), Z(x_n) \right\rangle \omega}{\mathrm{Vol}(G(x_n))}$$

de modo que

$$\inf_{g\in G} \left\langle dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n))), Z(x_n) \right\rangle \le \frac{\int_G \left\langle dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n))), Z(x_n) \right\rangle \omega}{\mathrm{Vol}(G(x_n))} \le \sup_{g\in G} \left\langle dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n))), Z(x_n) \right\rangle .$$

Ao tomarmos $n \to \infty$, obtem-se

$$\inf_{g\in G} \left\langle dg_p^{-1}(V_h(g(p))), Z(p) \right\rangle \le \left\langle \lim_{n\to\infty} \frac{\int_G dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n))dg}{\mathrm{Vol}(G(x_n))}, Z(p) \right\rangle \le \sup_{g\in G} \left\langle dg_p^{-1}(V_h(g(p))), Z(p) \right\rangle ,$$

como $g(p) = p$, temos

$$\inf_{g\in G} \left\langle dg_p^{-1}(V_h(p)), Z(p) \right\rangle \le \left\langle \lim_{n\to\infty} \frac{\int_G dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n)))dg}{\mathrm{Vol}(G(x_n))}, Z(p) \right\rangle \le \sup_{g\in G} \left\langle dg_p^{-1}(V_h(p)), Z(p) \right\rangle .$$

Mas

$$V_h(p) = (dh)_p^{-1}(V(h(p)) = (dh)_p^{-1}(V(q)) = v$$

de modo que, como $dg_p^{-1}(v) = v$ para todo $g \in G$, obtemos $dg_p^{-1}(V_h(p)) = V_h(p)$ para todo $g \in G$, donde segue

$$\langle V_h(p), Z(p) \rangle \le \left\langle \lim_{n\to\infty} \frac{\int_G dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n)))dg}{\mathrm{Vol}(G(x_n))}, Z(p) \right\rangle \le \langle V_h(p), Z(p) \rangle$$

Assim,

$$V_h(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_G dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n)))dg}{\mathrm{Vol}(G(x_n))}.$$

■

Prova do Teorema 4.8. Seja V um campo de norma L^2 igual a 1 um ponto crítico da conexão. Como V é não nulo, existe $q \in N$ tal que $V(q) \neq 0$. Sendo M espaço simétrico compacto de posto 1, existe uma isometria h de M tal que $h(p) = q$ e $dh_p^{-1}(V(q)) = v$. Seja V_h o campo $h-$relacionado a V. Então $V_h(p) \neq 0$. Seja V_G^h o G-simetrizado de V_h, ou seja, para $x \in M$, temos

$$V_G^h(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G dg_x^{-1}(V_h(g(x)))\omega.$$

Vemos que V_G^h é não nulo. De fato: tomando uma sequência $x_n \in M$ com $x_n \to p$, temos, pelo Lema 4.9

$$V_h(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_G dg_{x_n}^{-1}(V_h(g(x_n)))\omega}{\mathrm{Vol}(G(x_n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{V_G^h(g(x_n))}{\mathrm{Vol}(G(x_n))}.$$

Portanto, se $V_G^h \equiv 0$ então $V_h(p) = 0$, absurdo. ■

Podemos dar exemplos de grupos agindo como no enunciado do Teorema 4.8 na esfera, só que estes exemplos não são interessantes em vista do Teorema 6.5 que adiante vamos provar. Um exemplo interessante é $U(n-1)$ agindo no espaço projetivo complexo

$$\mathbb{CP}^n = \frac{U(n+1)}{U(n) \oplus U(1)}$$

para $n \geq 2$. Consideramos aqui as "inclusões" naturais $U(n-1) \hookrightarrow U(n) \hookrightarrow U(n+1)$. Decorre então do Teorema 4.8 que o espectro de $\operatorname{div} \nabla$ em $\mathbb{CP}^n$ sobre $\Xi(\mathbb{CP}^n)$ coincide com o espectro de $\operatorname{div} \nabla$ sobre os campos de $\mathbb{CP}^n$ que são $U(n-1)$ invariantes.

5 Campos G-invariantes e pontos críticos do funcional F.

5.1 Norma L^2 igual a um

Sejam M uma variedade riemanniana, $G \subset ISO(M)$ um subgrupo de Lie compacto agindo com cohomogeneidade 1 em M. No teorema que segue usamos as notações da Subseção 3.1: a geodésica $\gamma : [0, l] \to M$, a aplicação $|B| : (0, l) \to \mathbb{R}$ e a aplicação $H : (0, l) \to \mathbb{R}$.

Teorema 5.1 *Seja L o operador em $C^2([0, l])$ dado por*

$$L(f) = -f''(s) + |B|^2(s)f(s) + (n-1)H(s)f'(s), \;\; f \in C^2([0, l]). \tag{20}$$

Suponha que ou G não tem órbita singular ou que as órbitas singulares de G têm dimensão no máximo $n-3$. Se existe $f \in C^2([0, l])$, tal que $L(f) = \lambda f$ em $(0, l)$ então existe $V \in \Xi(M)$ não nulo, $G-$invariante, tal que $-\operatorname{div} \nabla V = \lambda V$.

Prova. Seja $f \in C^2([0,l])$ tal que $L(f) = \lambda f$ em $(0,l)$. Definimos $V = gN$ onde N é o normal unitário ortogonal às órbitas de G e

$$g : M \to \mathbb{R}$$

é definida da seguinte forma: dado $p \in M$ $\exists! s \in [0,l]$ tal que $p \in G(\gamma(s))$; então

$$g\,(p) = f(s).$$

Decorre do Teorema 3.12 que $V \in H^1(TM)$. Além disso, é claro que V é diferenciável no aberto denso

$$U = M \backslash \{\text{órbitas singulares de } G\}$$

(veja Teorema 3.3). Vamos provar que V satisfaz a equação $-\operatorname{div} \nabla V = \lambda V$ em U. Como $V \in H^1(TM)$, temos para todo $W \in \Xi(M)$,

$$\begin{aligned}
\int\limits_M \langle \nabla V, \nabla W \rangle &= \int\limits_U \langle \nabla V, \nabla W \rangle \\
&= \int\limits_U \langle -\operatorname{div} \nabla V, \nabla W \rangle \\
&= \int\limits_U \lambda \langle V, W \rangle \\
&= \int\limits_M \lambda \langle V, W \rangle .
\end{aligned}$$

Decorre que V satisfaz $-\operatorname{div} \nabla V = \lambda V$ fracamente em M e, portanto, por teorema de regularização, V é C^∞ e satisfaz fortemente $-\operatorname{div} \nabla V = \lambda V$ em todo M.

Dado $p \in M$, seja $s \in (0,l)$, tal que $p \in G(\gamma(s))$. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$, uma base ortonormal de $T_pG(\gamma(s))$ na vizinhança de p tal que $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ diagonaliza a segunda forma fundamental de $G(\gamma(s))$ em uma vizinhança de p. Então

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div} \nabla V &= -\sum_{i=1}^{n-1} \left(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} V - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} V \right) - \nabla_N \nabla_N V + \nabla_{\nabla_N N} V = \\
&= -\sum_{i=1}^{n-1} \left(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} V - \lambda_i \nabla_N V \right) - \nabla_N \nabla_N V + \nabla_{\nabla_N N} V.
\end{aligned}$$

Como já visto anteriormente $\nabla_N N = 0$. Logo a expressão div ∇V se resume a

$$-\operatorname{div}\nabla V = -\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}V - \lambda_i\nabla_N V) - \nabla_N\nabla_N V.$$

Analisando separadamente cada parcela, temos:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}V = \sum_{i=1}^{n-1}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}(gN).$$

Observe que

$$e_i(g)(p) = \frac{d}{dt}(g(\alpha(t)))\mid_{t=0},$$

onde

$$\alpha : I \to M,$$

é uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = e_i$. Observe que, neste caso, $i \neq n$, logo temos $\alpha(t) \in G(p)$. Então

$$\frac{d}{dt}(g(\alpha(t)))\mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(g(p)) = 0.$$

Logo

$$e_i(g)(p) = 0 \ \forall i < n.$$

Por outro lado, como $p \in G(\gamma(s))$, existe $h \in G$ tal que $h(\gamma(s)) = p$. Tome a curva $\widetilde{\gamma} = h \circ \gamma$. Claramente temos que $\widetilde{\gamma}$ é uma geodésica, normal às órbitas de G passando por p e, portanto,

$$N(g)(p) = \frac{d}{dt}(g(\widetilde{\gamma}(t)))\mid_{t=s}.$$

Observamos que para todo $t \in (0, l)$, $\widetilde{\gamma}(t) = h \circ \gamma(t) \in G(\gamma(t))$, e isto implica que, pela forma como foi definida $g(\widetilde{\gamma}(s)) = f(s)$. Logo,

$$N(g)(p) = f'(s)$$

Da mesma forma temos

$$N(N(g)) = f''(s).$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}gN &= g\sum_{i=1}^{n-1}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}N = \\ &= -g\sum_{i=1}^{n-1}\nabla_{e_i}\lambda_i e_i = \\ &= -g\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i)^2N \\ &= -|B|^2(s)fN\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\nabla_N V &= \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\nabla_N(gN) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i N(g)N.\end{aligned}$$

$$\nabla_N\nabla_N V = \nabla_N\nabla_N(gN) = N(N(g))N.$$

Donde temos

$$\begin{aligned}-\operatorname{div}\nabla V &= \sum_{i=1}^{n-1}\big(g(\lambda_i)^2N + \lambda_i(N(g))N\big) - N(N(g))N = \\ &= \left(|B(s)|^2 f + (n-1)H(s)f' - f''\right)N. \\ &= \lambda f N = \lambda V.\end{aligned}$$

Como f é $C^2\left[(0,l)\right]$, temos $g \in C^2(M)$, e acrescido do fato de que $N \in \mathcal{F}(M)$, temos $V \in H^1(TM)$. ■

Corolário 5.2 *Seja M um espaço simétrico compacto de posto 1 e dimensão n. Seja*

$$\gamma : [0,l] \to M$$

uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. Seja L o operador em $C^2([0,l])$ dado por

$$L(f) = -f''(s) + |B(s)|^2 f(s) + (n-1)H(s)f'(s),\ \ f \in C^2([0,l]),$$

onde $s \in (0,l)$, $H(s)$ = curvatura média da esfera geodésica centrada em $\gamma(0)$ e raio $s = d(\gamma(0), \gamma(s))$ com respeito à $\gamma'(s)$, $|B(s)|$ =norma da 2ª forma fundamental de $S_{\gamma(0)}(s)$. Se existe $f \in C^2([0,l])$, tal que $L(f) = \lambda f$ em $(0,l)$ então existe $V \in H^1(TM)$, tal que $-\operatorname{div} \nabla V = \lambda V$.

Prova. Seja G o grupo de isotropia de $ISO(M)$ no ponto $\gamma(0)$. Então por ser M um espaço simétrico de posto um, G age transitivamente nas esferas geodésicas centradas em $\gamma(0)$. O resultado decorre do Teorema 5.1 ■

5.1.1 O Operador L nas hipersuperfícies de rotação em $\mathbb{R}^{n+1}$

No começo da Seção 5 nós consideramos uma variedade riemanniana M, $G \subset ISO(M)$ um subgrupo de Lie compacto agindo com cohomogeneidade 1 em M e as notações da Subseção 3.1: a geodésica $\gamma : [0,l] \to M$, a aplicação $|B| : (0,l) \to \mathbb{R}$ e a aplicação $H : (0,l) \to \mathbb{R}$. No que segue, iremos considerar o caso particular em que M é uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{R}^{n+1}$, gerada por uma curva γ, e G é o grupo rotacional que deixa fixo e_{n+1}, ou seja, $G = O(n)$, que deixa fixo e_{n+1}. Observe que neste caso γ é uma geodésica ortogonal as órbitas de $O(n)$. Nestas condições podemos enunciar a

Proposição 5.3 *Sejam M uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{R}^{n+1}$, gerada pela curva*

$$\gamma : [0,l] \to M,$$

dada por $\gamma(s) = (x(s), 0, ..., z(s))$, onde s é o parâmetro comprimento de arco, $G = O(n)$, deixando fixo e_{n+1}. Então o operador dado em (20) se escreve como

$$L(f) = -f''(s) + (n-1)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 f(s) + (n-1)\left(-\frac{x'(s)}{x(s)}\right) f'(s), \;\; f \in C^2([0,l]).$$

Prova. Seja, de acordo com a hipótese, $\gamma(s) = (x(s), 0, ..., z(s))$, a curva geradora de M. Dado $p = \gamma(s_0)$, fixo, seja $e_1, ..., e_n$ uma base ortonormal de $T_{\gamma(s_0)}M$. Vamos mostrar que, para cada i, tem-se

$$\langle \nabla e_i N, e_i \rangle = -\frac{x'(s)}{x(s)}, \tag{21}$$

onde N é um campo de vetores tal que $N(\gamma(s)) = \gamma'(s)$. De fato, tomando a curva

$$c(t) = \cos\left(\frac{t}{x(s)}\right)(x(s), ..., 0) + \operatorname{sen}\left(\frac{t}{x(s)}\right) x(s) e_i + (0, ..., z(s)), \tag{22}$$

temos,

$$c(0) = (x(s), ..., 0) + (0, ..., z(s)) = \gamma(s),$$

e

$$c'(0) = e_i.$$

Tem-se

$$\langle \gamma', c' \rangle = 0,$$

o que implica

$$\langle \nabla e_i N, c' \rangle + \left\langle \gamma', c'' \right\rangle = 0.$$

Portanto o cálculo de $\langle \nabla e_i N, c' \rangle$ se resume ao cálculo de $- \left\langle \gamma', c'' \right\rangle$. Segue-se de (22), que

$$c'(t) = -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{x(s)}\right)(1, ..., 0) + \cos\left(\frac{t}{x(s)}\right) e_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c''(t) = -\frac{1}{x(s)} \cos\left(\frac{t}{x(s)}\right)(1, ..., 0) - \frac{1}{x(s)} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{x(s)}\right) e_i.$$

Temos também que

$$\gamma'(t) = (x'(s), 0, ..., z'(s)).$$

De onde obtemos

$$\langle \nabla e_i N, e_i \rangle = \langle c''(0), \gamma'(0) \rangle = -\frac{x'(s)}{x(s)}.$$

O que conclui nossa proposição. ■

Corolário 5.4 *Nas condições anteriores, se $M = \mathbb{S}^n$ então o operador L é da forma*

$$L(f) = -f''(s) + (n-1)\left(\frac{\cos(s)}{\operatorname{sen}(s)}\right)^2 f(s) + (n-1)\left(-\frac{\cos(s)}{\operatorname{sen}(s)}\right) f'(s), \;\; f \in C^2([0, \pi])$$

5.2 Norma pontual igual a um

Teorema 5.5 *Sejam M uma variedade riemanniana compacta, $G \subset ISO(M)$ com cohomogeneidade 1, N vetor unitário ortogonal as órbitas do grupo G. Suponha que ou G não tem órbita singular ou que as órbitas singulares de G têm dimensão no máximo $n-3$. Então N é um ponto crítico da conexão.*

Prova. Sabemos pelo Teorema 3.12 que N é de Sobolev. Usando o fato de que $V = N$ é um caso particular do Teorema 5.1 onde $f \equiv 1$, temos

$$-\operatorname{div} \nabla N = |B(s)|^2 N.$$

Portanto, pelo Lema 3.11, temos

$$-\operatorname{div} \nabla N = |\nabla N|^2 N,$$

de forma que o resultado decorre da Proposição 2.12. ■

6 Os pontos críticos da conexão sobre os campos de norma L^2 igual a um na esfera $\mathbb{S}^n$

Nesta seção iremos exibir o ínfimo da conexão em $\mathbb{S}^n$ sobre os campos de norma L^2 igual a um. Para tal precisaremos de alguns resultados de interesse próprio.

Teorema 6.1 *Seja M uma variedade riemanniana compacta, orientável. Seja $G \subset \mathrm{ISO}(M)$ um subrupo de Lie compacto agindo em M com cohomogeneidade 1 e suponha que o subgrupo de isotropia de G em cada ponto p de uma órbita principal de G age, pela derivada, transitivamente nas esferas centradas na origem de T_pG. Seja X um campo $G-$ invariante. Então $X(p) \perp T_pG$ para todo p pertencente a uma órbita principal de G.*

Prova. Sejam $p \in M$ tal que $G(p)$ é uma órbita principal e $v \in T_pG$. Mostremos que $\langle X(p), v\rangle = 0$. Como X é $G-$invariante, temos

$$\langle X(p), v\rangle = \left\langle dg_p^{-1}(X(g(p))), v\right\rangle = \langle X(g(p)), dg_p v\rangle$$

para todo $g \in G$, de modo que

$$\langle X(p), v\rangle = \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G \left\langle dg_p^{-1}(X(g(p))), v\right\rangle \omega,$$

onde ω é a forma volume de G. Seja H o subgrupo de isotropia de G em p e seja $\phi : G \to G/H$ a projeção, onde

$$\frac{G}{H} = \{gH \mid g \in G\}.$$

Então, para $f : G \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(g) = \langle X(g(p)), dg_p v\rangle ,$$

usando o Teorema 2.1 com $\overline{M} = G$ e $M = G/H$ obtemos

$$\int_G \left\langle dg_p^{-1}(X(g(p))), v\right\rangle \omega = \int_{G/H} \left(\int_{gH} \frac{\langle X((gh)(p)), d(gh)_p v\rangle}{||\operatorname{Jac}\phi(gh)||} \omega_g \right) \sigma_g,$$

onde ω_g é a forma volume de gH, e σ_g é a forma volume de G/H. Como observamos antes, estamos considerando em G a medida proveniente de uma métrica bi-invariante em G. Neste caso, $||\operatorname{Jac}\phi||$ de $\phi : G \to G/H$ é simplesmente dado como segue: Sejam $x \in G$ e $e_1, ..., e_k$ uma base ortonormal de $T_x(xH)^{\perp}$. Observe que se $y = \phi(x)$, então $xH = \phi^{-1}(y)$. Tem-se

$$k = \dim \frac{G}{H} = \dim G - \dim H.$$

Seja $f_1, ..., f_k$ uma base ortonormal de $T_{\phi(x)}(G/H)$. Então

$$\begin{aligned} ||\operatorname{Jac}\phi(x)|| &= \operatorname{Vol}[d\phi_x(e_1), ..., d\phi_x(e_k)] \\ &= |\det\left(\langle d\phi_x(e_i), f_j\rangle_{i,j=1,...,k}\right)| = 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Sendo assim, dado $h \in H$

$$\int_G \left\langle dg_p^{-1}(X(g(p))), v\right\rangle \omega = \int_{G/H} \left(\int_{gH} \langle X((gh)(p)), d(gh)_p v\rangle \,\omega_g \right) \sigma_g.$$

Mas notamos que

$$\begin{aligned} \int_{gH} \langle X((gh)(p)), d(gh)_p v\rangle \,\omega_g &= \int_{gH} \left\langle X(g(h(p))), dg_{h(p)}(dh_p(v))\right\rangle \omega_g \\ &= \int_{gH} \langle X(g(p)), dg_p(dh_p(v))\rangle \,\omega_g \\ &= \int_{gH} \left\langle dg_p^{-1} X(g(p)), dh_p(v)\right\rangle \omega_g \\ &= \int_{gH} \langle X(p), dh_p(v)\rangle \,\omega_g. \end{aligned}$$

Como H age transitivamente nas esferas de T_pG, a parte positiva da função $h \mapsto \langle X(p), dh_p v\rangle$ é menos sua parte negativa, de modo que

$$\int_{gH} \langle X(p), dh_p v\rangle \, \omega_g = 0,$$

o que prova o teorema. ■

Proposição 6.2 *Seja M uma variedade riemanniana compacta, orientável, n-dimensional. Seja $G \subset \mathrm{ISO}(M)$ um subrupo de Lie compacto agindo em M com cohomogeneidade 1. Seja N, vetor unitário, ortogonal às órbitas do grupo G. Suponha que ou G não tem órbita singular ou que as órbitas singulares de G têm dimensão no máximo $n-3$. Seja W um campo $G-$invariante, tal que*

$$\operatorname{div} \nabla W = -\lambda W.$$

Então

$$\operatorname{div} \nabla V = -\lambda V$$

onde V é a projeção ortogonal de W sobre N.

Prova. Seja V a projeção ortogonal de W sobre N, ou seja, $V = \langle W, N\rangle N$. Sejam $p \in M$ e $\{e_i\}$ a base que diagonaliza a segunda forma fundamental das órbitas de G em p com relação a $N(p)$. Usando as notações $|B|(s)$ e $H(s)$ de maneira inteiramente análoga ao caso do Teorema 5.1 temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \nabla V &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\nabla_{e_i} \nabla e_i \langle W, N\rangle N - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} \langle W, N\rangle N \right) + \nabla_N \nabla_N \langle W, N\rangle N \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\langle W, N\rangle \nabla_{e_i} \nabla e_i N - \lambda_i \nabla_N \langle W, N\rangle N \right) + \langle \nabla_N \nabla_N W, N\rangle N \\
&= \langle W, N\rangle \sum_{i=1}^{n-1} \nabla_{e_i} \nabla e_i N - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i \langle \nabla_N W, N\rangle N \right) + \langle \nabla_N \nabla_N W, N\rangle N \\
&= \langle W, N\rangle \sum_{i=1}^{n-1} - \lambda_i \nabla_{e_i} e_i - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i \langle \nabla_N W, N\rangle N \right) + \langle \nabla_N \nabla_N W, N\rangle N \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} - \lambda_i^2 \langle W, N\rangle N - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i \langle \nabla_N W, N\rangle N \right) + \langle \nabla_N \nabla_N W, N\rangle N \\
&= - |B(s)|^2 \langle W, N\rangle N - (n-1) H(s) \langle \nabla_N W, N\rangle N + \langle \nabla_N \nabla_N W, N\rangle N.
\end{aligned}$$

Logo

$$\langle \operatorname{div} \nabla V, N\rangle = -\left|B(s)\right|^2 \langle W, N\rangle - (n-1)H(s)\langle \nabla_N W, N\rangle + \langle \nabla_N \nabla_N W, N\rangle . \tag{24}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \nabla W &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\nabla_{e_i}\nabla e_i W - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i} W\right) + \nabla_N \nabla_N W \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\nabla_{e_i}\nabla e_i W\right) - (n-1)H(s)\nabla_N W + \nabla_N \nabla_N W,
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div} \nabla W, N\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1}\left(\nabla_{e_i}\nabla e_i W\right) - (n-1)H(s)\nabla_N W + \nabla_N \nabla_N W, N\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1}\nabla_{e_i}\nabla e_i W, N\right\rangle - (n-1)H(s)\langle \nabla_N W, N\rangle + \langle \nabla_N \nabla_N W, N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(\langle \nabla_{e_i}\nabla e_i W, N\rangle) - (n-1)H(s)\langle \nabla_N W, N\rangle + \langle \nabla_N \nabla_N W, N\rangle .
\end{aligned}$$

Observamos que, escrevendo W em p como $\sum\limits_{j=1}^{n-1}\langle W, e_j\rangle e_j + \langle W, N\rangle N$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(\langle \nabla_{e_i}\nabla e_i W, N\rangle) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(\langle \nabla_{e_i}\nabla e_i \langle W, e_j\rangle e_j, N\rangle) + \sum_{i=1}^{n-1}\langle \nabla_{e_i}\nabla e_i \langle W, N\rangle N, N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(\langle W, e_j\rangle \langle \nabla_{e_i}\nabla e_i e_j, N\rangle) + \sum_{i=1}^{n-1}\langle W, N\rangle \langle \nabla_{e_i}\nabla e_i N, N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(\langle W, e_i\rangle \langle \nabla_{e_i}\nabla e_i e_i, N\rangle) + \sum_{i=1}^{n-1}\langle W, N\rangle \langle \nabla_{e_i}(-\lambda_i e_i), N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(\langle W, e_i\rangle \langle \lambda_i \nabla_{e_i} N, N\rangle) + \sum_{i=1}^{n-1}\langle W, N\rangle \left\langle (-\lambda_i^2) N, N\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(\langle W, e_i\rangle \left\langle -\lambda_i^2 e_i, N\right\rangle) - \left|B(s)\right|^2 \langle W, N\rangle \\
&= -\left|B(s)\right|^2 \langle W, N\rangle .
\end{aligned}$$

Logo

$$\langle \operatorname{div} \nabla W, N\rangle = -|B(s)|^2 \langle W, N\rangle - (n-1)H(s)\langle \nabla_N W, N\rangle + \langle \nabla_N \nabla_N W, N\rangle .$$

Por (24), temos

$$\langle \operatorname{div} \nabla W, N\rangle = \langle \operatorname{div} \nabla V, N\rangle ,$$

ou seja,

$$\operatorname{div} \nabla V = \langle \operatorname{div} \nabla V, N\rangle N = \langle \operatorname{div} \nabla W, N\rangle N = -\lambda \langle W, N\rangle N = -\lambda V.$$

O que demonstra nossa proposição. ■

Como já mencionamos anteriormente, na introdução, Fabiano Britto, Vicente Borrelli e Olga Gil, exibiram em [BBG], o mínimo absoluto de F no espaço $\mathcal{F}(M)$, nas esferas $\mathbb{S}^{2n+1}$ $n \geq 2$. Iremos apresentar aqui, uma versão deste resultado para campos de $\mathcal{L}(M)$.

6.1 O ínfimo da conexão sobre os campos de norma L^2 igual a um na esfera $\mathbb{S}^n$

Lema 6.3 *Seja X um campo qualquer da esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $G-$média zero, onde G é um subgrupo ortogonal de isometrias cujas as órbitas são esferas $(n-1)-$ dimensionais em $\mathbb{S}^n$. Seja $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor unitário qualquer. Então a função*

$$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$$

dada por $f(p) = \langle X(p), v\rangle$ tem média zero em $\mathbb{S}^n$.

Prova. A provar: a função $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \langle X(p), v\rangle$ tem média zero em $\mathbb{S}^n$.
Usando a fórmula da coárea com a função $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $h(p) = d(p, v)$, sendo d a distância em $\mathbb{S}^n$, $\overline{M} = \mathbb{S}^n$, e $M = \mathbb{R}$, temos

$$\int_{\mathbb{S}^n} f = \int_0^{\pi} \int_{h^{-1}(t)} f,$$

uma vez que $||\operatorname{Jac} h|| = \|\nabla h\| = 1$. Na integração sobre $h^{-1}(t)$, $t \in [0, \pi]$,observamos que $h^{-1}(t)$ são esferas $\mathbb{S}_t^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ com *centro esférico* no ponto v e raio t e que estas esferas são as órbitas do grupo

$$G = \{g \in \operatorname{ISO}(\mathbb{S}^n) \mid g(v) = v\}.$$

Dado $t \in [0,\pi]$, escolhemos $p \in h^{-1}(t)$, e denotamos por H o subgrupo de isotropia de G em p. Seja
$$\psi : \frac{G}{H} \to \mathbb{S}_t^{n-1},$$
dada por $\psi(gH) = g(p)$. Observamos que ψ é uma isometria. Definimos então
$$\widetilde{f} = f \circ \psi : \frac{G}{H} \to \mathbb{R}.$$
Temos agora
$$\int_{h^{-1}(t)} f = \int_{S_t^{n-1}} f = \int_{\frac{G}{H}} \widetilde{f}.$$
Sejam
$$\phi : G \to \frac{G}{H},$$
a projeção de G em $\frac{G}{H}$, e $\overline{f} = \widetilde{f} \circ \phi$. Usando a fórmula da coárea, com $\overline{f}$, $\overline{M} = G$, $M = \frac{G}{H}$, temos
$$\int_G \overline{f} = \int_{\frac{G}{H}} \int_{gH} \frac{1}{||\operatorname{Jac}\phi||} \widetilde{f} = \int_{\frac{G}{H}} \int_{gH} \widetilde{f}$$
Mas $\widetilde{f}(gh) = f \circ \psi\,(gh) = f\,(g(p)) = \widetilde{f}(g)$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Logo
$$\begin{aligned} \int_G \overline{f} &= \operatorname{Vol}(H) \int_{\frac{G}{H}} \widetilde{f} \\ &= \operatorname{Vol}(H) \int_{S_t^{n-1}} f, \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
\int_G \overline{f}(g) &= \int_G \widetilde{f} \circ \phi\,(g(p)) = \int_G \widetilde{f}\,(gH) \\
&= \int_G f \circ \psi\,(gH) \\
&= \int_G f\,(g(p)) \\
&= \int_G \langle X(g(p), v\rangle \\
&= \int_G \left\langle dg_p^{-1} X(g(p), dg_p^{-1} v\right\rangle \\
&= \int_G \left\langle dg_p^{-1} X(g(p), v\right\rangle,
\end{aligned}$$

e por hipótese,

$$\int_G \left\langle dg_p^{-1} X(g(p), v\right\rangle = 0.$$

Portanto,

$$\mathrm{Vol}(H) \int_{S_t^{n-1}} f = 0,$$

o que implica

$$\int_{S_t^{n-1}} f = 0,$$

Logo

$$\int_{\mathbb{S}^n} f = \int_0^\pi \int_{h^{-1}(t)} f = 0.$$

■

Lema 6.4 *Seja $V \in \mathcal{L}(\mathbb{S}^n)$, $n \geq 2$. Seja G um grupo ortogonal de isometrias de $\mathbb{S}^n$ cujas órbitas são esferas $(n-1)-$ dimensionais em $\mathbb{S}^n$. Se V possui $G-$média zero, então $F(V) \geq n-1$.*

Prova. Escrevemos V da forma

$$V = \sum_{k=1}^{n+1} a_k e_k,$$

onde $\{e_k\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $p \in \mathbb{S}^n$. Seja $\{E_j\}$, referencial geodésico de $\mathbb{S}^n$ em p. Então, para cada i, temos

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_{E_i} V\right)^T &= \overline{\nabla}_{E_i} V - \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} V, p \right\rangle p \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(E_i(a_k) e_k - \langle V, E_i \rangle p\right).
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i} V, \nabla_{E_i} V \rangle &= \left\langle \left(\overline{\nabla}_{E_i} V\right)^T, \left(\overline{\nabla}_{E_i} V\right)^T \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} V - \langle V, E_i \rangle p, \overline{\nabla}_{E_i} V - \langle V, E_i \rangle p \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} V, \overline{\nabla}_{E_i} V \right\rangle - 2 \left\langle \langle V, E_i \rangle p, \overline{\nabla}_{E_i} V \right\rangle + \langle V, E_i \rangle \langle V, E_i \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\langle E_i(a_k) e_k, E_i(a_k) e_k \rangle - 2 \langle V, E_i \rangle \left\langle p, \overline{\nabla}_{E_i} V \right\rangle + \langle V, E_i \rangle^2 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\langle E_i(a_k) e_k, E_i(a_k) e_k \rangle - \langle V, E_i \rangle^2 \right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} V, \nabla_{E_i} V \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \langle E_i(a_k) e_k, E_i(a_k) e_k \rangle - \langle V, E_i \rangle^2 \right) \Rightarrow \\
\langle \nabla V, \nabla V \rangle &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(|grad(a_k)|^2 \right) - |V|^2 \Rightarrow \\
F(V) &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\int_M |grad(a_k)|^2 \right) - \int_M |V|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\int_M |grad(a_k)|^2 \right) - 1.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 6.3 temos que as funções a_k possuem média zero em $\mathbb{S}^n$. Por outro lado, o primeiro auto valor não nulo de uma função na esfera n-dimensional é igual a sua dimensão. Podemos, com isso, usar a desigualdade de Sobolev para funções, obtendo

$$F(V) \geq n \left[\sum_k \int_M |(a_k)|^2 \right] - 1.$$

Como $V \in \mathcal{L}(\mathbb{S}^n)$, temos

$$\begin{aligned}\sum_k \int_M |(a_k)|^2 &= \int_M \sum_k |(a_k)|^2 \\ &= \int_M \langle V, V \rangle = 1.\end{aligned}$$

Portanto

$$F(V) \geq n - 1.$$

■

Teorema 6.5 *O menor autovalor de $-\operatorname{div} \nabla$ na esfera $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, é um, e tem como autovetor a projeção ortogonal sobre $\mathbb{S}^n$ de um campo constante do $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Prova. Sejam $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|v| = 1$, e X a projeção ortogonal sobre $\mathbb{S}^n$ do campo constante v, ou seja

$$X(x) = v - \langle x, v \rangle\, x, \;\; x \in \mathbb{S}^n.$$

Podemos com alguns cálculos ver que X satisfaz

$$-\operatorname{div} \nabla X = X,$$

ou seja, X é um autovetor de autovalor 1 de $-\operatorname{div} \nabla$. Temos então que mostrar que 1 é o menor autovalor de $-\operatorname{div} \nabla$.

Seja $W \in \mathcal{L}(\mathbb{S}^n)$ um campo que minimiza F em $\mathcal{L}(\mathbb{S}^n)$, ou seja, W é um autovetor associado ao menor autovalor, digamos λ, de $-\operatorname{div} \nabla$. Temos então que mostrar que $\lambda \geq 1$. Seja G o subgrupo de isotropia de $\operatorname{Iso}(\mathbb{S}^n)$ em v.

Se W possui $G-$média zero então decorre do Lema 6.4 que $\lambda = F(W) \geq 1$, provando o teorema neste caso. Suponha então que W não possua $G-$média zero. Então o $G-$simetrizado de W é não nulo e, pela Proposição 2.11, temos

$$-\operatorname{div} \nabla W_G = \lambda W_G. \tag{25}$$

Pelo Teorema 6.1, temos que W_G é um múltiplo do vetor N unitário, normal às órbitas de G, digamos $W_G = hN$, sendo $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ uma função

$G-$invariante. Seja agora $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{S}^n$ uma geodésica minimizante parametrizada pelo comprimento de arco, ortogonal às órbitas de G tal que $\gamma(0) = v$. Definindo $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = h(\gamma(s))$$

temos, pelo Corolário 5.4, que

$$L(f) = (n-1)\frac{\cos^2 s}{\operatorname{sen}^2 s} f - (n-1)\frac{\cos s}{\operatorname{sen} s} f' - f'' = \lambda f.$$

Notamos então

$$L(\operatorname{sen} s) = (n-1)\frac{\cos^2 s}{\operatorname{sen}^2 s} \operatorname{sen} s - (n-1)\frac{\cos s}{\operatorname{sen} s} \cos s + \operatorname{sen} s = \operatorname{sen} s,$$

ou seja, a função $\operatorname{sen} s$ para $s \in (0, \pi)$ é uma autofunção para L com autovalor 1. Como ela não troca de sinal no intervalo $(0, \pi)$ segue-se que $\operatorname{sen} s$, neste intervalo, é a primeira auto-função não nula asssociada a este operador. Segue daí que $\lambda \geq 1$, concluindo a prova do Teorema 6.5. ■

Observação 6.6 *O campo X, acima, é invariante por G, grupo de rotação que deixa v fixo. De fato. Dados $x \in \mathbb{S}^n$ e $g \in G$, temos*

$$\begin{aligned} dg_x(X(x)) &= dg_x\left(v - \langle x, v\rangle x\right) \\ &= dg_x(v) - dg_x\left(\langle x, v\rangle x\right) \\ &= v - \langle x, v\rangle\, dg_x x \\ &= v - \langle x, v\rangle\, g(x) \\ &= v - \left\langle x, g^{-1}(v)\right\rangle g(x) \\ &= v - \langle g(x), v\rangle\, g(x) \\ &= X(g(x)). \end{aligned}$$

7 Referências

[BBG] V. Borrely, F. Brito, O. Gil-Medrano: *"The infimum of the energy of unit vector fields on odd-dimensional spheres",* Annals of Global Analysis and Geometry, **23** (2003), 129 - 140

[H] E. Hebey, *"Sobolev spaces on Riemannian manifolds",* Lecture Notes in Mathematics 1635 (1996)

[W] G. Wiegmink: *"Total bending of vector fields on Riemannian manifolds",* Mathematische Annalen, Band 303, Heft 2 (1995), 325 - 344

[CW] C.M. Wood: *"The energy of Hopf vector fields",* Manuscripta math. 101, (2000), 71 - 88

[HL] Wu-Yi Hsiang & H. Blaine Lawson, Jr.: *"Minimal submanifolds of low cohomogeneity",* Journal of Differential Geometry, Vol. 5. números 1 & 2, (1971), 1 - 38.

[Fe] Federer, *Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, New York, 1969.*

[Y] R.Schoen, S.T. Yau: *Lectures on Differential Geometry,* Conferences Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, Edited by N. Hitchin, R. Kirby, J. Wolf.

[M] Carmo, Manfredo Perdigão do: *Geometria Riemanniana,* Rio de Janeiro: Intituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.