MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CARACTERIZAÇÃO CONSTITUTIVA DE ELASTÔMEROS UTILIZANDO TESTES DE COMPONENTES

por

Emmanuel Lancini

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Fevereiro de 2012.

CARACTERIZAÇÃO CONSTITUTIVA DE ELASTÔMEROS UTILIZANDO TESTES DE COMPONENTES

por

Emmanuel Lancini
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Prof. Dr. Leandro Luis Corso

Prof. Dr. Rafael Antônio Comparsi Laranja

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 28 de Fevereiro de 2012.

aos meus queridos pais, que me ensinaram a ser um homem honrado e fiel aos meus conceitos e valores; às minhas irmãs e, em especial, ao Prof. Dr. Rogério José Marczak.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de deixar registrado um agradecimento especial à pessoa mais importante de todas, por todo esforço, dedicação, finais de semana comprometidos e muitas noites sem dormir. Enfim, queria agradecer a mim mesmo!

Aos familiares e amigos, pelo apoio, incentivo, ajuda, compreensão e paciência;

À UFRGS e ao PROMEC, pela oportunidade de estudo;

Aos colegas e amigos da General Motors do Brasil Ltda, por toda ajuda, apoio e oportunidades;

Ao Luis Kosteski, por estar sempre disposto a me ajudar e por ter contribuído de forma significativa para os avanços deste trabalho;

À todas as pessoas que, de alguma forma ou de outra, contribuíram para que tudo isso se tornasse realidade;

Em especial ao meu amigo e orientador professor Dr. Rogério José Marczak, por ter me aturado nesses últimos anos e por ter contribuído de forma significativa para a minha formação acadêmica. Muitos foram os esforços e conhecimentos compartilhados, tanto na área da Engenharia, quanto na ciência dos *Tennessee Whiskey*. Mais uma vez, obrigado por tudo!

Far better it is to dare mighty things, to win glorious triumphs, even though checkered by failure, than to rank with those poor spirits who neither enjoy much nor suffer much, because they live in that grey twilight that knows neither victory nor defeat.

Theodore Roosevelt

RESUMO

Análises numéricas confiáveis do comportamento mecânico de materiais como borrachas, dependem muito de uma calibração precisa do modelo constitutivo hiperelástico utilizado. Estes modelos são calibrados ajustando as curvas teóricas aos dados experimentais, obtidos por meio de ensaios usuais. Em muitos casos as amostras de matéria prima desses elastômeros já não se encontram disponíveis ou é impossível fabricar os corpos de prova requeridos. O objetivo deste trabalho é verificar a possibilidade de encontrar constantes constitutivas testando o próprio componente, ao invés dos usuais ensaios de tração, compressão e cisalhamento.

A abordagem proposta consiste em criar uma rotina de programação associada a uma função custo onde, a partir de uma estimativa inicial de constantes constitutivas, sejam realizados processos iterativos de otimização buscando aproximar as curvas de força × deslocamento teórica e experimental. Um componente automotivo será utilizado nos estudos e dois modelos constitutivos hiperelásticos serão testados. As equações de tensões nominais dos modelos hiperelásticos serão utilizadas para predizer o comportamento teórico dos ensaios usuais, de forma a verificar a qualidade das constantes obtidas. Conclui-se que é possível utilizar o ensaio da própria peça para caracterizar o material hiperelástico, com resultados comparáveis aos que seriam obtidos com os ensaios típicos para esta aplicação.

Palavras-chave: Hiperelasticidade, Otimização, Constantes Constitutivas, Elastômeros, Calibração de modelos de elementos finitos.

ABSTRACT

"Constitutive elastomer characterization using actual component testing procedures"

The reliable numerical analysis of the mechanical behavior of rubber-like materials depends strongly on accurately calibrated hyperelastic constitutive models. Such models are calibrated by fitting theoretical curves against experimental data obtained in well known tests. In many cases samples of the original elastomer are no longer available or it is impossible to manufacture the specimens required by the standard tests. The aim of this work is verify the possibility of finding the constitutive constants by testing the actual component instead of the usual tensile, compression and shear tests.

The proposed approach consists in creating a programming routine with a cost function that, starting from an initial estimate of the constitutive constants, iterate through an optimization algorithm in order to fit the theoretical force × displacement curves to the experimental ones. An automotive component will be used during the studies and two hyperelastic constitutive models will be tested. The nominal stress equations for the hyperelastic models are used to predict the standard tests behavior, to assess the quality of the constants obtained. The results shown that is possible to characterize an hyperelastic material by testing the actual component, with results comparable to those which would be obtained with standard tests.

Keywords: Hyperelasticity, Optimization, Constitutive Parameters, Elastomers, Finite Element Updating.

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO 1

1.1 Introdução 1

1.2 Objetivos do Trabalho 2

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 4

2.1 Descrição do Movimento 4

2.2 Estado plano de deformação 5

2.3 Introdução a Problemas de Não-Linearidade 8

2.4 Equação Constitutiva Não-Linear para Material Isotrópico Hiperelástico 9

2.5 Particularização das Equações Constitutivas para Material Isotrópico Elástico Incompressível 10

3 AJUSTE DE CONSTANTES HIPERELÁSTICAS 12

3.1 Revisão dos Principais Modelos Hiperelásticos 12

3.1.1 Modelo Polinomial 14

3.1.2 Modelo de Mooney-Rivlin 14

3.1.3 Modelo de Yeoh 15

3.1.4 Modelo Neo-Hookeano 16

3.1.5 Modelo de Arruda-Boyce 16

3.1.6 Modelo de Gent 17

3.1.7 Modelo de Ogden 17

3.2 Ensaios Experimentais Usuais 18

3.2.1 Ensaio de Tração 18

3.2.2 Ensaio de Compressão 20

3.2.3 Ensaio de Cisalhamento Puro 22

3.3 Ensaio do Componente 24

3.4 Predição Teóricas 26

3.4.1 Particularização do Modelo de Yeoh de 2 termos 27

3.4.2 Particularização para o Modelo de Arruda-Boyce de 5 termos 29

4 AJUSTE DAS CONSTANTES HIPERELÁSTICAS UTILIZANDO ENSAIO DO COMPONENTE 31
4.1 Modelo Matemático do Componente 31
4.2 Validação do Modelo Matemático 34
4.3 Abordagem Proposta 38
4.3.1 Modelo de Yeoh com 2 termos 40
4.3.1.1 Resultados obtidos com $N = 10$ 42
4.3.1.2 Resultados obtidos com $N = 5$ 45
4.3.1.3 Resultados obtidos com $N = 1$ 48
4.3.1.4 Conclusões 50
4.3.2 Modelo de Arruda-Boyce com 5 termos 51
4.3.2.1 Resultados obtidos com $N = 10$ 53
4.3.2.2 Resultados obtidos com $N = 5$ 56
4.3.2.3 Resultados obtidos com $N = 1$ 58
4.3.2.4 Conclusões 60
4.3.3 Predições Teóricas 62

5 CONCLUSÕES 64
5.1 Sugestões para trabalhos futuros 66

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 67

APÊNDICE A 70
APÊNDICE B 73
APÊNDICE C 74

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Descrição do movimento de um corpo durante o processo de deformação 4
Figura 2.2 – Representação dos carregamentos em um estado plano de deformações..... 6
Figura 2.3 – (a) e (b) Componente elastomérico utilizado nas análises deste trabalho; (c) Sistema de coordenadas adotado 7
Figura 3.1 – Dispositivo utilizado para fixar e exercer esforços de tração sobre o corpo de prova..... 19
Figura 3.2 – Curva média e desvio padrão das três amostras submetidas ao ensaio de tração uniaxial 19
Figura 3.3 – (a) máquina de ensaios universais utilizada no ensaio de compressão; (b) corpo de prova sendo submetido ao ensaio de compressão 21
Figura 3.4 – Curva média e desvio padrão do 5º ciclo de carregamento das duas amostras submetidas ao ensaio de compressão 21
Figura 3.5 – Curvas de tensão-deformação de engenharia dos ensaios de tração uniaxial, compressão e cisalhamento 23
Figura 3.6 – Forma típica das curvas de tensão-deformação de engenharia obtidas em ensaios experimentais de borrachas [Marczak, *et al.*, 2006]..... 24
Figura 3.7 – Ilustração da aplicação do componente utilizado 25
Figura 3.8 – Ensaio de compressão do componente..... 25
Figura 3.9 – Curva média e desvio padrão do 5º ciclo de carregamento dos dois componentes submetidos ao ensaio de compressão..... 26
Figura 4.1 – Ilustração do ângulo de assentamento da borracha na peça plástica..... 32
Figura 4.2 – Malha de elementos finitos..... 32
Figura 4.3 – Representação do modelo matemático: componente, bloco de compressão, carregamento e restrições de movimento. 33
Figura 4.4 – Detalhamento das restrições de movimento impostas ao componente elastomérico..... 34
Figura 4.5 – Forma deformada do componente ao final da simulação numérica do ensaio de compressão simples 37
Figura 4.6 – Fluxograma da rotina de otimização 38
Figura 4.7 – Ilustração dos desvios e_i utilizados pela função ϕ 39

Figura 4.8 – Superfície de resposta de ϕ^* para o modelo de Yeoh..... 40
Figura 4.9 – Superfície de resposta de ϕ para o modelo de Yeoh..... 41
Figura 4.10 – Diagramas de força × deslocamento dos conjuntos de constantes que originaram as superfícies de resposta 42
Figura 4.11 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas 43
Figura 4.12 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas 46
Figura 4.13 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas 48
Figura 4.14 – Comparação dos melhores resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental 51
Figura 4.15 – Superfície de resposta de ϕ^* para o modelo de Arruda-Boyce 52
Figura 4.16 – Superfície de resposta de ϕ para o modelo de Arruda-Boyce 52
Figura 4.17 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas 54
Figura 4.18 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas 56
Figura 4.19 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas 59
Figura 4.20 – Comparação dos melhores resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental 61
Figura 4.21 – Predições teóricas de ensaios usuais, utilizando as constantes constitutivas obtidas por meio do ensaio de tração e da abordagem proposta (Yeoh)..... 63
Figura 4.22 – Predições teóricas de ensaios usuais, utilizando as constantes constitutivas obtidas por meio do ensaio de tração e da abordagem proposta (Arruda-Boyce)..... 63

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Constantes constitutivas obtidas pelo Hyperfit, com base nos dados dos ensaios usuais e o modelo de Yeoh 35
Tabela 4.2 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento experimental e teóricos 36
Tabela 4.3 – Constantes constitutivas obtidas pelo Hyperfit, com base nos dados dos ensaios usuais e o modelo de Arruda-Boyce 36
Tabela 4.4 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento experimental e teóricos 37
Tabela 4.5 – Valores de ϕ^* para as regiões 1 e 2 da Figura 4.8 41
Tabela 4.6 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 10$ 43
Tabela 4.7 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10}* e C_{20}* 44
Tabela 4.8 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10} e C_{20} 45
Tabela 4.9 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 5$ 46
Tabela 4.10 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10}* e C_{20}* 47
Tabela 4.11 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10} e C_{20} 47
Tabela 4.12 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 1$ 49
Tabela 4.13 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10}* e C_{20}* 49
Tabela 4.14 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10} e C_{20} 50
Tabela 4.15 – Constantes constitutivas utilizadas na obtenção das curvas apresentadas pela Figura 4.14 51
Tabela 4.16 – Valores de ϕ^* para as regiões 1, 2 e 3 da Figura 4.15 53
Tabela 4.17 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 10$ 54
Tabela 4.18 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ* e λ* 55

Tabela 4.19 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ e λ 55
Tabela 4.20 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 5$ 57
Tabela 4.21 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ^* e λ^* 58
Tabela 4.22 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ e λ 58
Tabela 4.23 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 1$ 59
Tabela 4.24 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ^* e λ^* 60
Tabela 4.25 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ e λ 60
Tabela 4.26 – Constantes constitutivas utilizadas na obtenção das curvas apresentadas pela Figura 4.20 62
Tabela A.1 – Dados experimentais do ensaio de tração uniaxial 70
Tabela A.2 – Dados experimentais do ensaio de compressão uniaxial 72

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres Romanos

a_i	Funções escalares.
A_0	Área de seção transversal de referência.
b_i	Funções escalares.
B	Tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda.
$\mathcal{C}^0$	Configuração de referência de um corpo fechado de partículas no espaço euclidiano tridimensional.
$\mathcal{C}$	Conjunto fechado de partículas que formam um corpo no espaço euclidiano tridimensional.
$\mathcal{C}^t$	Configuração de um determinado corpo no espaço euclidiano em um instante de tempo *t*.
C_{ij}, C_{ij}^*	Constantes constitutivas do material.
e	Deformação de engenharia.
e_i	Desvios.
E	Módulo de elasticidade.
E	Tensor de deformação.
F_i^T	Pontos de força da curva teórica.
F_i^E	Pontos de força da curva experimental.
F_y	Carregamento superficial distribuído na direção do eixo y.
I	Matriz identidade.
I_1	1º invariante de deformação.
I_2	2º invariante de deformação.
I_3	3º invariante de deformação.
J	Jacobiano da transformação.
K	Módulo de compressibilidade.
L_0	Comprimento inicial.
L	Comprimento final.
P	Posição inicial do corpo.
p	Posição final do corpo.

p	Pressão hidrostática.
$\boldsymbol{Q}$	Matriz de Rotação.
t	Constante de tempo
t_T	Tensão teórica para o ensaio de tração uniaxial.
t_C	Tensão teórica para o ensaio de compressão uniaxial.
t_P	Tensão teórica para o ensaio de cisalhamento puro.
t_B	Tensão teórica para o ensaio de tração biaxial.
$\mathbf{T}$	Tensor de tensão.
$\mathbf{u}$	Vetor deslocamento.
u	Deslocamento, mm
u_x	Deslocamento na direção do eixo x.
u_y	Deslocamento na direção do eixo y.
u_z	Deslocamento na direção do eixo z.
W	Função energia de deformação.
$\mathbf{x}$	Vetor posição de um ponto na configuração atual/deformada.
$\mathbf{X}$	Vetor posição de um ponto na configuração de referência/indeformada.

Caracteres Gregos

α	Constante constitutiva.
σ	Tensor de Cauchy-Green.
ϕ	Função custo.
ϕ^*	Menor valor da função custo encontrado durante o processo iterativo.
μ_e	Coeficiente de atrito estático.
μ, μ^*	Módulo de cisalhamento; Constante constitutiva.
λ_i	Alongamento nas direções principais.
λ, λ^*	Constante de Lamé; Constante constitutiva.
ν	Coeficiente de Poisson.

Operadores matemáticos

$(\cdot)^{-1}$	Matriz inversa.
$(\cdot)^{T}$	Matriz transposta.
∂	Operador de derivada parcial.
det $(\cdot)$	Determinante.

Sub-índices e super-índices

i, j	Índices.
N	Índice.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Introdução

Os elastômeros com aplicação destinada ao mercado automotivo tiveram um alto crescimento nas últimas décadas. Estes materiais têm sido aplicados em diversos produtos, incluindo autopeças, pneus e acessórios. A crescente venda de automóveis nos países em desenvolvimento, aliada a expectativa de um crescimento ainda maior nos próximos anos, somada ao elevado nível de tecnologia e pesquisas desenvolvidas por diversas empresas do setor automotivo, tem levado este mercado a uma constante busca por otimização de custos e aumento da qualidade dos produtos refletindo, por exemplo, na busca de elastômeros de alta resistência e durabilidade, associados a baixos custos de projeto e manufatura.

Todos os polímeros, em especial os elastômeros, variam muito a sua resistência dependendo do ambiente à que são expostos e da composição do seu material, sendo potencialmente sensíveis a variações de temperatura, ação de fluidos e às condições mecânicas aos quais são submetidos, podendo sofrer grandes alterações em suas propriedades e resultando na perda da função para o qual foram projetados.

Apesar do elastômero ser um material com algumas limitações conhecidas, dentre elas, sua baixa resistência a temperaturas extremas (que resulta em uma elevada degradação do material em altas temperaturas e elevada rigidez em baixas), outros aspectos positivos acabam justificando o aumento da utilização de elastômeros nos últimos anos. As propriedades físico-mecânicas únicas desses materiais resultam em, dentre outras características, baixo peso, alta resistência e durabilidade a cargas cíclicas, alta capacidade de absorção de energia sem deformação plástica e baixo desperdício de matéria prima no processo de manufatura de componentes.

A microestrutura do material elastômero depende da sua composição e do processo utilizado na fabricação do mesmo. Esse processo é muito diferente nos metais, onde componentes são geralmente formados a partir de materiais cuja estrutura interna não é substancialmente alterada pelo processo de fabricação. Diferentes elastômeros podem ter suas propriedades tão variadas quanto diferentes tipos de metais. Até hoje, não existe uma padronização aceitável dos compostos dos elastômeros, sendo que suas composições, usualmente são mantidas em segredo pelos fabricantes.

Em muitas situações onde a utilização de elastômeros se faz necessária, o projetista precisa utilizar componentes já desenvolvidos e disponíveis no mercado, de forma a reduzir

os custos com desenvolvimento e validação do seu projeto. No entanto, esses componentes já possuem design, dimensões e materiais definidos. Com o intuito de analisar o comportamento do componente frente às solicitações de trabalho às quais será submetido ao longo se sua vida útil, muitas vezes o projetista recorre ao auxilio dos softwares de simulação numérica. Ao criar um modelo matemático capaz de representar o componente e suas condições de trabalho, é possível verificar se o componente escolhido está apto ao desempenho de suas funções planejadas.

Para que se obtenha bons resultados com os modelos matemáticos, torna-se necessário alimentar o software com as propriedades do material utilizado no componente. Usualmente são utilizados os resultados dos ensaios de compressão, cisalhamento puro, tração uniaxial e biaxial para determinar as constantes constitutivas dos materiais, uma vez que estes ensaios usuais são capazes de excitar modos de deformações distintos.

Para análises de componentes elastoméricos relativamente pequenos e comercialmente disponíveis, nem sempre estarão ao alcance do projetista as amostras de matéria prima necessárias para a confecção dos corpos de prova requeridos pelos ensaios usuais. Em alguns casos, também não será possível a obtenção de corpos de prova a partir do próprio componente, devido às dimensões do mesmo. Outro fator importante neste caso é a diversidade de combinações químicas possíveis para elaboração de compostos elastoméricos, o que leva a uma variação nas curvas dos ensaios experimentais em situações onde os mesmos componentes são produzidos por diferentes fabricantes.

Segundo Marczak *et al.*, 2006, embora se encontre um razoável número de referências em língua portuguesa sobre os aspectos químicos e de processamento de borracha, praticamente inexistem textos abordando materiais elastoméricos do ponto de vista das relações constitutivas. E por ser um material de comportamento inerentemente não-linear, o entendimento dessas relações constitutivas é um aspecto fundamental para a correta utilização de programas de simulação na solução de problemas práticos. Esta lacuna tem permitido que engenheiros e técnicos cheguem ao mercado de trabalho com pouca ou nenhuma formação neste tópico. Como consequência, simulações incorretas ou mal interpretadas de problemas reais de engenharia tem se tornado práticas comuns.

1.2 Objetivos do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho consiste em verificar a possibilidade de calibrar modelos numéricos de elementos finitos – em simulações envolvendo componentes elastoméricos hiperelásticos – utilizando apenas a curva de força × deslocamento resultante

do ensaio de compressão simples do próprio componente de interesse, para a obtenção das constantes constitutivas necessárias para a caracterização do material. Situação esta que se torna necessária em casos onde as propriedades do material utilizado são desconhecidas e não é possível obter amostras de matéria prima para a confecção dos corpos de prova utilizados pelos principais ensaios usuais.

Um componente automotivo será utilizado nas simulações envolvendo a abordagem proposta por este trabalho. Um modelo em elementos finitos será gerado de forma a reproduzir o ensaio de compressão do componente. Amostras de matéria prima do componente foram obtidas com o intuito de realizar os ensaios usuais de tração, compressão e cisalhamento puro, para servirem de padrão de comparação dos resultados. Os dados experimentais desses ensaios fornecerão as constantes constitutivas que serão utilizadas para a calibração do modelo de elementos finitos.

A abordagem proposta por este trabalho consiste em criar uma rotina de programação associada a uma função custo onde, a partir de uma estimativa inicial de constantes constitutivas, sejam realizados processos iterativos de otimização buscando aproximar as curvas de força × deslocamento teórica e experimental. Dois modelos constitutivos hiperelásticos serão testados, sendo eles: Yeoh de 2 termos e Arruda-Boyce de 5 termos.

Para verificar a qualidade das constantes constitutivas obtidas por meio da abordagem proposta, as equações de tensões nominais dos modelos hiperelásticos serão utilizadas para predizer o comportamento teórico dos ensaios de tração uniaxial, biaxial e cisalhamento puro.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Descrição do Movimento

Em um corpo na mecânica do contínuo, não existe somente uma inumerável quantidade de partículas que o compõe, pois em torno de cada partícula, existe também uma inumerável quantidade de outras partículas. Portanto, não é possível identificar cada partícula isoladamente com um número, mas é possível identificá-las pela posição que elas ocupam em um determinado tempo *t*. Entende-se como corpo, um conjunto de partículas que formam um conjunto fechado C no espaço euclidiano tridimensional, do qual cada partícula pode ocupar apenas um único ponto desta região fechada para cada instante de tempo *t*, assim como, cada ponto da região fechada C é ocupado por apenas uma partícula. Define-se como C^t a configuração de um determinado corpo no tempo *t* [Fonseca, 2002].

O vetor deslocamento **u** é formado por uma linha reta entre a posição inicial P e a posição final p. Na teoria da elasticidade, o processo pelo qual um corpo contínuo vai de uma configuração para a outra é usualmente considerado irrelevante, sendo o conhecimento somente da posição inicial e final, suficientes para definir a deformação (Figura 2.1) [Malvern, 1969].

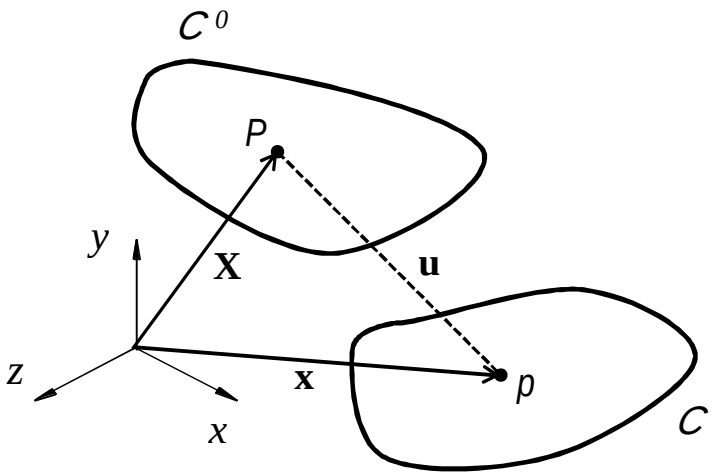


Figura 2.1 – Descrição do movimento de um corpo durante o processo de deformação

Para que se descreva o movimento de um corpo durante um processo de deformação, é necessário identificar a posição das partículas que compõe este corpo em qualquer instante de tempo *t*. Uma das formas conhecidas é chamada de descrição referencial, onde as variáveis

independentes são a posição **X** da partícula em uma configuração de referência escolhida arbitrariamente, e o tempo *t*. Em elasticidade, a configuração de referência é normalmente escolhida como o estado natural ou livre de tensões. Quando a configuração de referência é escolhida para ser a atual configuração inicial em $t = 0$, a descrição referencial é usualmente chamada de descrição Lagrangeana [Malvern, 1969].

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \tag{2.1}$$

A relação entre as coordenadas iniciais e finais pode ser vista como um mapeamento de coordenadas que se estuda em cálculo, permitindo a utilização de alguns conceitos, tais como, a matriz jacobiana e seu determinante – o Jacobiano. A hipótese do contínuo requer que o Jacobiano da transformação (Equação 2.2) exista em qualquer ponto de qualquer configuração e que a relação apresentada pela Equação 2.3 seja assegurada, pois em uma deformação fisicamente possível, esta relação não pode ser nula ou menor que zero.

$$J = \det\left(\frac{\partial \chi_i}{\partial X_j}\right) \quad i, j = 1,2,3 \tag{2.2}$$

$$J > 0 \tag{2.3}$$

Enfim, para se obter o deslocamento espacial **u** de qualquer ponto no corpo continuo $\mathcal{C}$ em um determinado instante de tempo *t*, deve-se subtrair a coordenada espacial inicial da coordenada espacial instantânea (Equação 2.4) [Marczak, *et al.*, 2006].

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X},t) - \mathbf{X} \tag{2.4}$$

2.2 Estado Plano de Deformações

Se a deformação de um corpo cilíndrico ocorre de forma que, não existam deslocamentos no eixo axial do componente e que os deslocamentos nos outros eixos não dependam das coordenadas axiais, então pode-se dizer que este corpo encontra-se em estado plano de deformações [Lai, *et al.*, 1993].

O estado plano de deformações se aplica quando uma dimensão do corpo é muito maior do que as outras duas. Nesse caso, pode-se considerar que não existe variação ao longo

do eixo *z* (deslocamentos nulos), assim como, os deslocamentos em *x* e *y* não variam ao longo da direção *z*. A Figura 2.2 apresenta um exemplo de um corpo em estado plano de deformações, onde F_y é o carregamento aplicado na direção do eixo *y*.

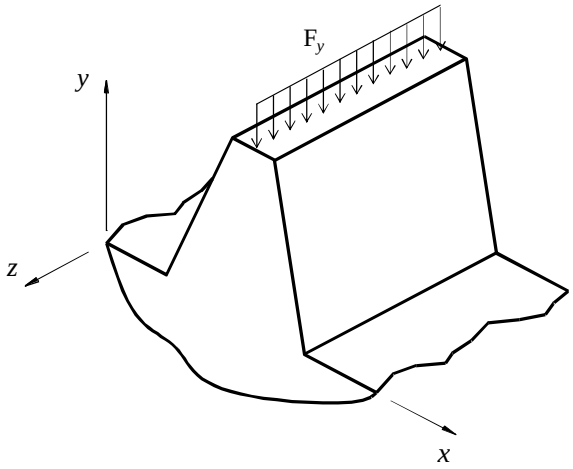


Figura 2.2 – Representação dos carregamentos em um estado plano de deformações

Considerando a direção do eixo z correspondente a direção do eixo axial, a hipótese de estado plano de deformações pode ser resumida da seguinte forma:

$$u_x = u_x(x, y) \tag{2.5}$$

$$u_y = u_y(x, y) \tag{2.6}$$

$$u_z = 0 \tag{2.7}$$

sendo u_x o deslocamento na direção do eixo *x*, u_y o deslocamento na direção do eixo *y* e u_z o deslocamento na direção do eixo *z* [Lai, *et al*., 1993].

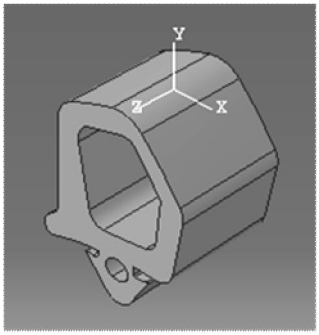
O processo de fabricação utilizado para a obtenção do componente em estudo foi a moldagem por extrusão. Pode-se definir a moldagem por extrusão, de forma sucinta, como o processo de obtenção de produtos com comprimentos limitados e seção transversal constante, obrigando o material a passar por dentro de uma matriz sob condições de pressão e temperatura controlada. Durante o deslocamento do material, o mesmo é progressivamente aquecido, homogeneizado, polimerizado, comprimido e forçado a sair através do orifício da matriz. A seção do produto obtido será o próprio formato da matriz. Por ser um processo

contínuo é utilizado largamente na manufatura de alguns tipos de produtos, tais como: mangueiras, tubos, fitas, barras, etc. A Figura 2.3 apresenta o componente utilizado por este trabalho, bem como, o sistema de coordenadas utilizado no modelamento por elementos finitos.

Devido a forma e as dimensões do componente, a dimensão na direção do eixo z foi considerada significativamente superior as demais, o que permitiu considerar a hipótese de que não há deslocamentos nesta direção, ou seja, que os deslocamentos nos eixos *x* e *y* não variam ao longo do eixo z, resultando na escolha por uma análise bidimensional e estado plano de deformações. Evidentemente, durante os ensaios foram observados efeitos de bordo, mas estes foram desconsiderados em prol da adoção da hipótese de deformações planas.

(a) Vista lateral

(b) Vista diagonal



(c) Sistema de coordenadas

Figura 2.3 – (a) e (b) Componente elastomérico utilizado nas análises deste trabalho; (c) Sistema de coordenadas adotado

2.3 Introdução a Problemas de Não-Linearidade

Diversos problemas não-lineares no contexto estrutural podem ser aproximados satisfatoriamente por equações lineares. Felizmente essas aproximações lineares são muito boas para muitos problemas de análises de tensões e transferência de calor. Aproximações não-lineares são mais difíceis de formular e a solução das equações podem custar de 10 a 100 vezes mais tempo do que uma aproximação linear com o mesmo número de graus de liberdade. No entanto, muitas situações físicas apresentam não-linearidades muito grandes para serem ignoradas. O analista precisa entender o problema físico e deve se familiarizar com as diversas estratégias de solução. Uma única estratégia nem sempre funcionará bem e pode não funcionar em alguns casos. Várias tentativas podem ser necessárias a fim de se obter um resultado satisfatório [Cook, *et al.*, 1989].

Na Mecânica dos Sólidos, para ilustrar a resposta mecânica de um corpo, normalmente se utiliza os gráficos de força × deslocamento ou tensão × deformação. Os dados obtidos com estes gráficos, além de serem válidos para pontos específicos de uma estrutura, também fornecem informações relevantes a respeito do comportamento global da mesma.

Em muitas aplicações de engenharia envolvendo geometrias simples, percebe-se que existe uma linearidade entre a carga e o deslocamento, porém, este comportamento normalmente ocorre apenas no trecho inicial da trajetória de equilíbrio – região onde a hipótese de pequenos deslocamentos costuma ser válida. Contudo, mesmo nos casos onde o material encontra-se em regime elástico, pode existir algum grau de não-linearidade presente.

Em mecânica estrutural, um problema é definido não-linear se a matriz de rigidez ou o vetor de carga dependem dos deslocamentos. Não-linearidade, em estruturas, pode ser classificada como não-linearidade material (associada a alterações nas propriedades do material, como em plasticidade) ou não-linearidade geométrica (associada a alterações de configuração, como em grandes deflexões de uma viga elástica esbelta) [Cook, *et al.*, 1989].

Materiais como as borrachas possuem uma relação não-linear entre tensão e deformação independentemente do nível de solicitação. Estes materiais são denominados hiperelásticos porque manifestam grandes deformações elásticas (normalmente acompanhadas de não-linearidade geométrica), bem maiores que as encontradas em materiais mais convencionais. Nestes casos a Lei de Hooke não é aplicável, ou seja, não é possível relacionar tensão com deformação de forma linear.

Green (1839, 1841) definiu como material elástico aquele para o qual a função energia de deformação existe; esta tem sido a notação básica da maioria dos trabalhos sobre “elasticidade perfeita” desde aquela época. Mais recentemente, o nome hiperelástico tem sido

usado para o material Green-elástico. Denomina-se um material Green-elástico ou hiperelástico se existe uma função energia de deformação W – função escalar de um dos tensores de deformação, cuja derivada em relação a uma componente de deformação, determina a componente de tensão correspondente (Equação 2.8) [Malvern, 1969].

$$T_{ij} = f\left(\frac{\partial W}{\partial E_{ij}}\right) \tag{2.8}$$

A forma geral de uma função W pode ser exemplificada pela Equação 2.9:

$$W = f(\mathbf{B}) \tag{2.9}$$

onde $\mathbf{B}$ é o tensor de Cauchy-Green à esquerda.

Considerando o material como isotrópico, assume-se que as propriedades sejam as mesmas em qualquer direção. Esta condição pode ser comprovada aplicando-se a matriz de rotação $\boldsymbol{Q}$ [Holzapfel, 2000]:

$$W = f(\mathbf{B}) = f(\boldsymbol{Q}\mathbf{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) \tag{2.10}$$

2.4 Equação Constitutiva Não-Linear para Material Isotrópico Hiperelástico

Quando se trata de materiais elastoméricos, o projetista deve estar ciente de que, além da existência de grandes deformações em regime elástico, esses materiais possuem relações complexas de tensão × deformação.

Uma relação constitutiva aceitável para um material elástico pressupõe que, a tensão em um ponto pode ser obtida tão somente a partir das deformações no ponto. Isto pode ser feito através da chamada elasticidade de Cauchy ou através da elasticidade de Green. A primeira trabalha com medidas de deformação *Eulerianas*, enquanto a segunda utiliza medidas de deformação *Lagrangeanas*. Generalizando uma equação constitutiva para elasticidade de Cauchy, tem-se [Marczak, *et al.*, 2006]:

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{B}) \tag{2.11}$$

onde f é uma função isotrópica do tensor deformação de Cauchy-Green à esquerda (**B**) [Lai *et al*., 1993].

O caso tridimensional, apresentado por Atkin e Fox [1980], é representado por uma função do tipo:

$$\boldsymbol{\sigma} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{B} + a_2\mathbf{B}^2 \tag{2.12}$$

onde a_i são funções escalares dos invariantes de $\mathbf{B}$. Uma forma alternativa pode ser obtida aplicando o teorema de Cayley-Hamilton:

$$\mathbf{B}^3 - I_1\mathbf{B}^2 + I_2\mathbf{B} - I_3\mathbf{I} = 0 \tag{2.13}$$

Multiplicando por $\mathbf{B^{-1}}$ e rearranjando os termos acima, obtêm-se:

$$\mathbf{B}^2 = I_1\mathbf{B} - I_2\mathbf{I} + I_3\mathbf{B}^{-1} \tag{2.14}$$

A substituição deste resultado na Equação 2.12, resulta em:

$$\boldsymbol{\sigma} = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{B} + b_2\mathbf{B}^{-1} \tag{2.15}$$

onde b_0, b_1, b_2, são funções escalares dos invariantes escalares de **B**. Essa é a forma alternativa da equação constitutiva para um material sólido elástico isotrópico sob grandes deformações [Lai *et al*., 1993].

2.5 Particularização das Equações Constitutivas para Material Isotrópico Elástico Incompressível

Grande parte dos materiais elastoméricos podem ser considerados incompressíveis, fato que resulta na simplificação das equações constitutivas demonstradas na seção anterior. Porém, o fato de um material ser incompressível incorre na desvantagem de que as tensões não podem ser determinadas unicamente a partir das deformações, devido ao aparecimento de uma pressão hidrostática p indeterminada [Atkin *et al*., 1980; Bonnet *et al*., 1997].

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + b_1\mathbf{B} + b_2\mathbf{B}^{-1} \tag{2.16}$$

É possível considerar algum grau de compressibilidade na Equação 2.16, desde que, o módulo de compressibilidade seja comparável ao dos metais ou sólidos de ligação covalente.

Se as funções b_i podem ser derivadas de uma função potencial W dos invariantes I_1 e I_2 do tensor $\mathbf{B}$ tal que:

$$b_1 = 2\frac{\partial W}{\partial I_1} \qquad b_2 = -2\frac{\partial W}{\partial I_2} \tag{2.17}$$

Substituindo b_1 e b_2 na Equação 2.16, obtêm-se uma relação constitutiva para um material sólido hiperelástico isotrópico:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} \tag{2.18}$$

O próximo passo para a obtenção das equações constitutivas, consiste em estabelecer uma função de energia de deformação W que represente o acúmulo de energia mecânica no corpo e que seja apropriada para cada tipo de material [Marczak, *et al.*, 2006].

3 AJUSTE DE CONSTANTES HIPERELÁSTICAS

As curvas de força × deslocamento, obtidas por meio de ensaios experimentais usuais, são fontes importantes de informações para a obtenção de outras diversas propriedades físicas e mecânicas envolvendo os elastômeros ensaiados, tais como: tensão de ruptura, dureza, módulo de elasticidade (E), módulo de cisalhamento (μ), módulo de compressibilidade (K), coeficiente de Poisson (ν), etc. Essas mesmas curvas também são utilizadas para encontrar as constantes constitutivas que, quando associadas aos modelos hiperelásticos, são capazes de caracterizar o comportamento dos materiais.

Neste capítulo será realizada uma breve revisão bibliográfica de alguns dos principais modelos hiperelásticos e os motivos que levaram à escolha dos modelos de Yeoh de 2 termos e Arruda-Boyce de 5 termos, além de uma revisão sobre predições teóricas e sua particularização para os modelos escolhidos.

Para obtenção das curvas de tensão × deformação e força × deslocamento, ensaios usuais de tração uniaxial, compressão e cisalhamento puro, bem como, o ensaio do próprio componente foram realizados e as curvas obtidas serão apresentadas.

3.1 Revisão dos Principais Modelos Hiperelásticos

A determinação de uma relação constitutiva apropriada é fundamental para que se obtenha resultados cofiáveis durante a simulação numérica de materiais elastômeros. Existem duas categorias principais de modelos hiperelásticos:

- Modelos Fenomenológicos: são baseados na observação do comportamento do material durante testes. Portanto, os modelos desta categoria ponderam o papel das diversas variáveis de acordo com sua importância durante o processo de deformação. Variáveis como deformações hidrostáticas ou distorcionais, incompressibilidade e forma das curvas obtidas em experimentos têm sua relevância majorada ou reduzida, de acordo com cada modelo. Por essa razão estes modelos possuem faixa de aplicação bem definida, em geral [Marczak *et al.*, 2006].

- Modelos Micromecânicos: modelos estatísticos desenvolvidos a partir de informações das reações químicas empregadas na fabricação do material.

> Comprimento de cadeias moleculares, número e/ou tipo de ligações químicas e variáveis termodinâmicas são dados tipicamente empregados na construção destes modelos [Marczak *et al.*, 2006].

No presente trabalho optou-se por testar um modelo fenomenológico e um modelo micromecânico.

Além da classificação por tipo de modelo hiperelástico, os modelos podem ser agrupados de acordo com a medida de deformação empregada, grau de compressibilidade permitido, ou ainda, densidade aparente do material.

Alguns materiais apresentam um comportamento incompressível, mantendo o mesmo volume durante todo o processo de deformação. Isto ocorre em materiais isótropos lineares elásticos com coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}5$ e em materiais hiperelásticos. O coeficiente de Poisson (ν) é definido como a razão entre a contração lateral relativa e a expansão longitudinal. Para ser considerado um sólido totalmente incompressível, o coeficiente de Poisson deve ser teoricamente igual a 0,5 [Bittencourt, 2000].

A caracterização de um material elastômero não-linear é muito difícil. Muitos modelos constitutivos têm sido propostos para materiais hiperelásticos. Esses modelos, juntamente com a análise por elementos finitos, podem ser utilizados por engenheiros para análises de produtos elastoméricos operando sobre grande estado de deformações. Estas teorias constitutivas estão separadas em duas categorias distintas. A primeira assume que a densidade de energia de deformação é uma função polinomial do principal invariante de deformação. No caso de materiais incompressíveis, este modelo é referenciado como Rivlin. Se somente termos de primeira ordem são utilizados, o modelo é referenciado como Mooney-Rivlin. Na segunda categoria é assumido que a densidade de energia de deformação é uma função separável de três principais alongamentos. Ogden, Peng e Peng-Landel encontram-se nessa categoria [Finney *et al.*, 1988].

Cada modelo constitutivo possui suas peculiaridades, tornando praticamente impossível recomendar a utilização de um ou outro modelo em específico, ou seja, cabe ao projetista avaliar cada caso e definir seus próprios critérios de escolha.

Uma revisão bibliográfica contemplando diversos modelos hiperelásticos pode ser encontrada no trabalho escrito por Hoss [2009]. Será apresentado aqui um breve resumo de alguns modelos constitutivos, apresentando suas principais características e as justificativas pela escolha de dois modelos que serão utilizados pela abordagem proposta neste trabalho.

3.1.1 Modelo Polinomial

O modelo polinomial é conhecido pela capacidade de ser ajustado a uma diversidade de curvas experimentais quando utilizado o número adequado de termos. A utilização de uma quantidade elevada de termos resulta em uma ocorrência excessiva de picos e depressões irreais nas predições. Uma grande desvantagem do modelo polinomial é que ele normalmente se ajusta bem somente aos dados experimentais de um único ensaio, sendo que suas predições para os demais carregamentos raramente são boas.

Considerando a hipótese de incompressibilidade, a equação de energia de deformação, fica [Marczak, *et al.*, 2006]:

$$W = \sum_{i+j=1}^{N} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \tag{3.1}$$

Para o componente em estudo foram realizados ensaios de tração, compressão e cisalhamento puro. Porém, o ensaio de cisalhamento apresentou problemas durante sua execução e os resultados obtidos foram desconsiderados. A falta de bons resultados de cisalhamento levou a desconsideração do modelo polinomial, visto que, somente com os dados dos ensaios de tração e compressão, não seria possível a obtenção de boas predições para os demais ensaios.

3.1.2 Modelo de Mooney-Rivlin

O modelo de Mooney-Rivlin, em sua versão de 2 e 3 termos, apresenta resultados válidos até deformações da ordem de 30% a 50% [Marczak, *et al.*, 2006]. No entanto, os efeitos de enrijecimento, comuns em grandes deformações, não são levados em conta. O modelo de 2 termos não apresenta um bom desempenho em problemas dominados por compressão. As versões de 5 ou 9 termos podem ser utilizadas para deformações de 100% a 200%, porém, devido à elevada quantidade de termos, podem gerar curvas com oscilações que não condizem com o físico. A desvantagem de utilizar esse modelo no presente trabalho é que o componente em estudo sofre esforços de compressão e Mooney-Rivlin não apresenta bom comportamento à compressão, exceto se as constantes forem definidas utilizando dados de um ensaio de compressão – fato que não elimina a má predição dos demais modos de deformação.

Modelo de 2 termos, considerando que o material seja incompressível (polinomial de 1ª ordem):

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \tag{3.2}$$

Modelo de 3 termos, considerando que o material seja incompressível (polinomial de 2ª ordem com $C_{20} = 0$ e $C_{02} = 0$) [Hoss, 2009]:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \tag{3.3}$$

3.1.3 Modelo de Yeoh

O modelo de Yeoh apresenta bom comportamento em casos de grandes deformações, principalmente quando é utilizada a versão de três termos, porém, esta versão pode apresentar desvios significativos para pequenas deformações. Já a utilização da versão de dois termos é recomendada para deformações não superiores a 20%, contudo, deve-se verificar como as predições para os outros modos de deformação se apresentam.

No presente trabalho será testado o modelo de Yeoh de 2 termos para o cálculo das constantes constitutivas da borracha em estudo. Optou-se pelo modelo com 2 termos ao invés de 3 termos, pois em estudos preliminares, o modelo de 2 termos foi o que apresentou melhores resultados.

O modelo de Yeoh é similar ao modelo polinomial, porém, baseado apenas no 1º invariante de deformação.

Considerando a hipótese de incompressibilidade, a equação de energia de deformação, fica:

$$W = \sum_{i=1}^{N} C_{i0}(I_1 - 3)^i \tag{3.4}$$

Considerando:

2 termos (polinomial reduzido de 2ª ordem):

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \tag{3.5}$$

3 termos:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \tag{3.6}$$

De acordo com Yeoh [1993], a justificativa para reduzir a expansão da série polinomial, omitindo a dependência do segundo invariante é que, a sensibilidade da função energia de deformação à mudanças no segundo invariante é geralmente muito menor do que a sensibilidade à mudanças no primeiro invariante. Além disso, a dependência do segundo invariante é difícil de mensurar, sendo preferível negligenciá-lo ao invés de calculá-lo com base em medições potencialmente imprecisas. Concluiu-se então que, mantendo apenas um modo particular de deformação uniaxial, pode-se melhorar a previsão dos outros estados de deformação.

3.1.4 Modelo Neo-Hookeano

O modelo Neo-Hookeano é um caso particular do modelo de Mooney-Rivlin de dois termos considerando $C_{01} = 0$ e $C_{10} = \mu/20$, sendo μ o módulo de cisalhamento. Sua função de energia de deformação é baseada no primeiro invariante. Deve-se limitar seu emprego a casos onde as deformações extensionais não ultrapassem 30-40%. O modelo Neo-Hookeano não captura efeitos de enrijecimento e não deve ser utilizado em casos onde as deformações são superiores a 100% [Marczak, *et al*., 2006]. Este modelo poderia ter sido utilizado neste trabalho, porém optou-se por utilizar o modelo de Arruda-Boyce.

Considerando a hipótese de incompressibilidade, a equação de energia de deformação fica [Boyce e Arruda, 2000]:

$$W = C_{10}\left(I_1 - 3\right) \tag{3.7}$$

3.1.5 Modelo de Arruda-Boyce

Este modelo é o mais indicado nos casos onde somente um teste experimental encontra-se disponível, desde que as predições teóricas das demais curvas não apresentem enrijecimento muito acentuado. Pode ser utilizado para deformação de até 300%, porém, pode produzir erros significativos em pequenas deformações. Possui baixo custo operacional, tornando-se uma boa escolha quando não se conhece o comportamento do elastômero analisado. Por esses motivos, este foi um dos modelos escolhidos para ser testado neste trabalho.

Considerando a hipótese de incompressibilidade, a equação de energia de deformação, fica:

$$W = \mu \sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{\lambda_L^{2i-2}} \left(I_1^{\,i} - 3^i\right) \tag{3.8}$$

Sua versão mais conhecida é a de 5 termos, que é escrita da seguinte forma:

$$W = \mu\left\{\frac{(I_1 - 3)}{2} + \frac{(I_1^2 - 9)}{20\lambda_L^2} + \frac{11(I_1^3 - 27)}{1050\lambda_L^4} + \frac{19(I_1^4 - 81)}{7000\lambda_L^6} + \frac{519(I_1^5 - 243)}{673750\lambda_L^8}\right\} \tag{3.9}$$

sendo μ e λ_L, constantes relacionadas com as propriedades do material [Arruda e Boyce, 1993].

3.1.6 Modelo de Gent

Apresenta as mesmas recomendações do modelo de Arruda-Boyce e suas predições são boas para toda faixa ajustada. Apesar deste modelo também ser uma boa opção à ser utilizada por este trabalho, teve que ser desconsiderado, pois o *software* comercial de elementos finitos utilizado não trabalha com o mesmo.

Considerando a hipótese de incompressibilidade, a equação de energia de deformação, fica [Gent, 1996]:

$$W = -\frac{\mu}{2}(I_L - 3)\ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3}\right) \tag{3.10}$$

onde μ é o módulo de cisalhamento inicial e I_L é o valor limite (máximo possível) de I_1.

3.1.7 Modelo de Ogden

Ajusta-se facilmente aos dados experimentais pois utiliza os valores de λ_i como parâmetros, permitindo que ajustes não-lineares mais complexos sejam obtidos. Apesar de ter um custo computacional maior do que os demais, é um dos poucos modelos capazes de se ajustar corretamente para tração e compressão axial. Pode ser aplicado em deformações de até 700%, sendo que o modelo de 2 termos é mais estável que o de 3 termos. Ogden também é o modelo que melhor prediz o comportamento à compressão a partir do ajuste com outros ensaios [Marczak, *et al*., 2006]. Considerando a hipótese de incompressibilidade, a equação de energia de deformação fica [Ogden, *et al*., 2004]:

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3\right) \tag{3.11}$$

e a seguinte restrição teórica deve ser respeitada:

$$\mu = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \mu_i \alpha_i \tag{3.12}$$

Este modelo é bastante geral e permite a obtenção de outros por simplificação. Por exemplo, o modelo Neo-Hookeano é obtido com $N = 1$, $\mu_1 = \mu$ e $\alpha_1 = 2$, enquanto o modelo de Mooney-Rivlin de 2 termos é obtido com $N = 2$, $\mu_1 = 2C_{10}$, $\mu_2 = -2C_{01}$ e $\alpha_1 = -\alpha_2 = 2$. Os coeficientes α_i e μ_i não precisam ser inteiros ou positivos, mas valores muito particulares podem gerar instabilidades numéricas [Marczak, *et al.*, 2006].

Apesar do modelo de Ogden ser um bom candidato para utilização neste trabalho, em estudos preliminares não foram obtidos bons resultados e por isso, optou-se por utilizar somente o modelo Yeoh de 2 termos e Arruda-Boyce de 5 termos.

3.2 Ensaios Experimentais Usuais

3.2.1 Ensaio de Tração

Os corpos de prova utilizados no ensaio de tração seguiram a norma ASTM D412-06 – tipo C [2006]. Para a realização deste ensaio foi utilizada a máquina universal EMIC DL 2000 – contendo uma célula de carga com capacidade de 1 kN. As deformações foram medidas através de um extensômetro específico para a medição de grandes deformações. A velocidade do ensaio foi de 500 mm/min.

Para obter a curva média de tensão-deformação de engenharia, foram utilizados três corpos de prova. Antes de iniciar os ensaios, os corpos de prova permaneceram acondicionados durante 16 horas a uma temperatura de 23°C ± 2°C e umidade relativa de 50% ± 5%. A Figura 3.1 mostra o dispositivo utilizado pela máquina universal de ensaios para fixar e exercer esforços de tração sobre o corpo de prova. A Tabela 3.1 apresenta as dimensões dos corpos de prova utilizados no ensaio e a Figura 3.2 ilustra a média dos resultados da curva de tensão-deformação de engenharia.

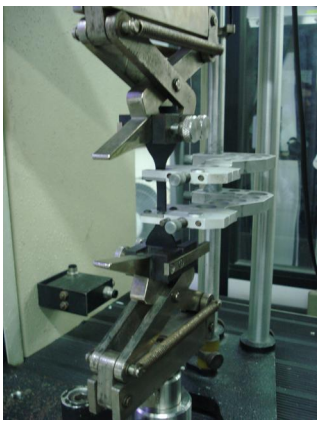


Figura 3.1 – Dispositivo utilizado para fixar e exercer esforços de tração sobre o corpo de prova

Tabela 3.1 – Dimensões dos corpos de prova do ensaio de tração

Espessura = 2,34 mm
Largura = 6,02 mm
Comprimento Inicial (L_0) = 25 mm
Área da Seção (A_0) = 14,1 mm^2

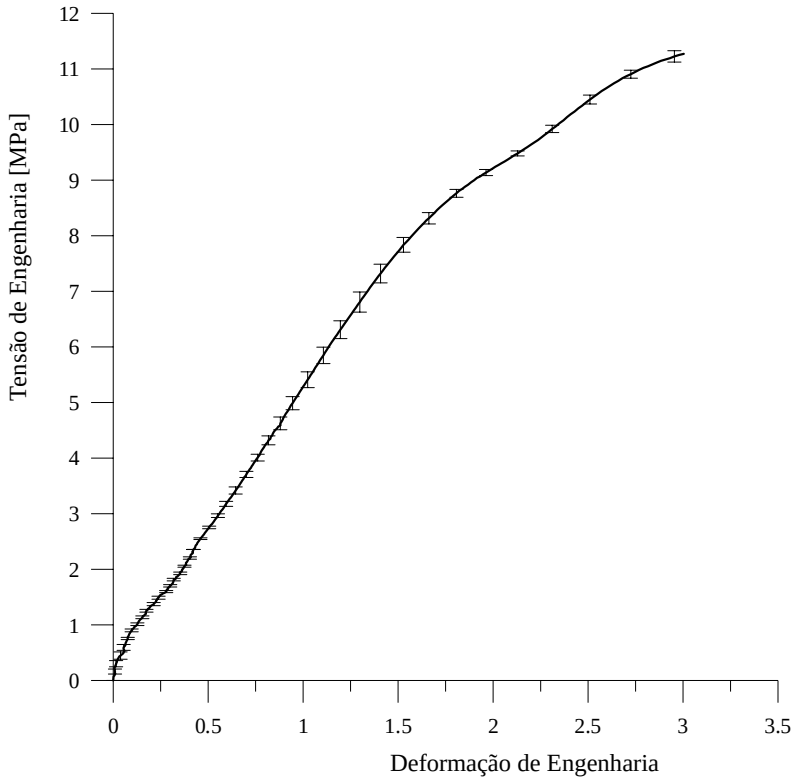


Figura 3.2 – Curva média e desvio padrão das três amostras submetidas ao ensaio de tração uniaxial

3.2.2 Ensaio de Compressão

O ensaio de compressão uniaxial é mais simples de ser realizado do que o de tração. No entanto, o ensaio de compressão não é alternativo ao de tração, pois normalmente os elastômeros possuem comportamentos bastante distintos quando solicitados por cada uma dessas forças [Marczak, *et al.*, 2006].

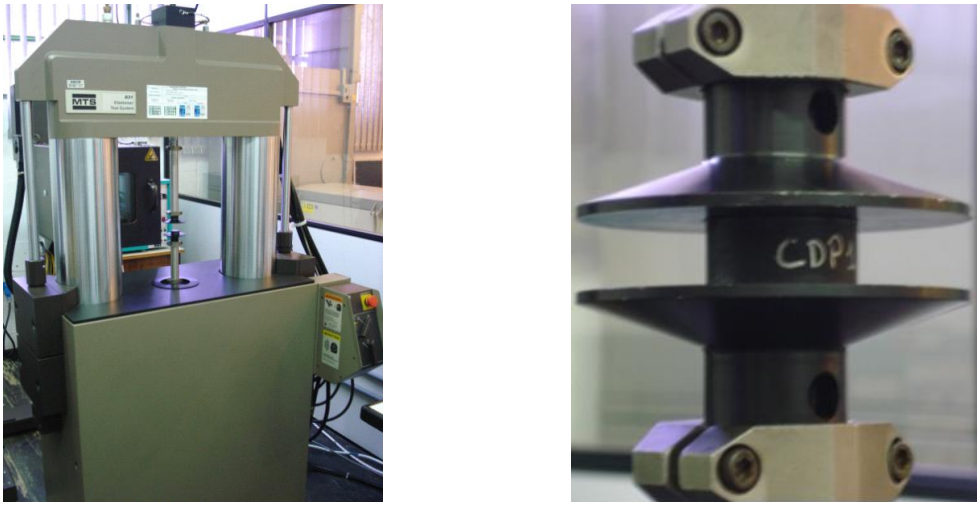
O ensaio de compressão foi realizado com base na norma ASTM D575-91 [2007]. Utilizou-se uma máquina universal de ensaios MTS 831.50 (Figura 3.3(a)) – contendo uma célula de carga com capacidade de 10 kN. As deformações foram medidas através de um extensômetro. Para o ensaio de compressão, duas amostras da matéria prima foram ensaiadas.

Antes de iniciar os ensaios, os corpos de prova permaneceram acondicionados durante 16 horas a uma temperatura de 23°C ± 2°C e umidade relativa de 50% ± 5%. Foram aplicados 5 ciclos de compressão e descompressão com velocidade controlada em 5 mm/min e somente os resultados do quinto ciclo foram utilizados para a obtenção da curva média de tensão-deformação de engenharia – procedimento necessário para minimizar o *Efeito de Mullins* [Mullins, 1969]. De forma resumida, o efeito de Mullins consiste na diminuição consecutiva da força necessária para deformar um material, sujeito a um determinado nível de deformação durante repetidos ciclos de carga e descarga sobre velocidade constante. Diferentes velocidades podem alterar de forma significava a curva de força × deslocamento durante o processo de carga e descarga. É importante ressaltar que após sucessivos ciclos de carga e descarga, o material tende a um estado de equilíbrio.

A Figura 3.3(b), mostra o corpo de prova sendo submetido ao ensaio de compressão. A Tabela 3.2 apresenta as dimensões dos corpos de prova utilizados no ensaio e a Figura 3.4, ilustra a curva média dos resultados de tensão-deformação de engenharia.

Tabela 3.2 – Dimensões dos corpos de prova do ensaio de compressão

Diâmetro = 29,25 mm
Altura = 12,55 mm
Área da Seção (A_0) = 671,96 mm^2



(a) (b)

Figura 3.3 – (a) máquina de ensaios universais utilizada no ensaio de compressão; (b) corpo de prova sendo submetido ao ensaio de compressão

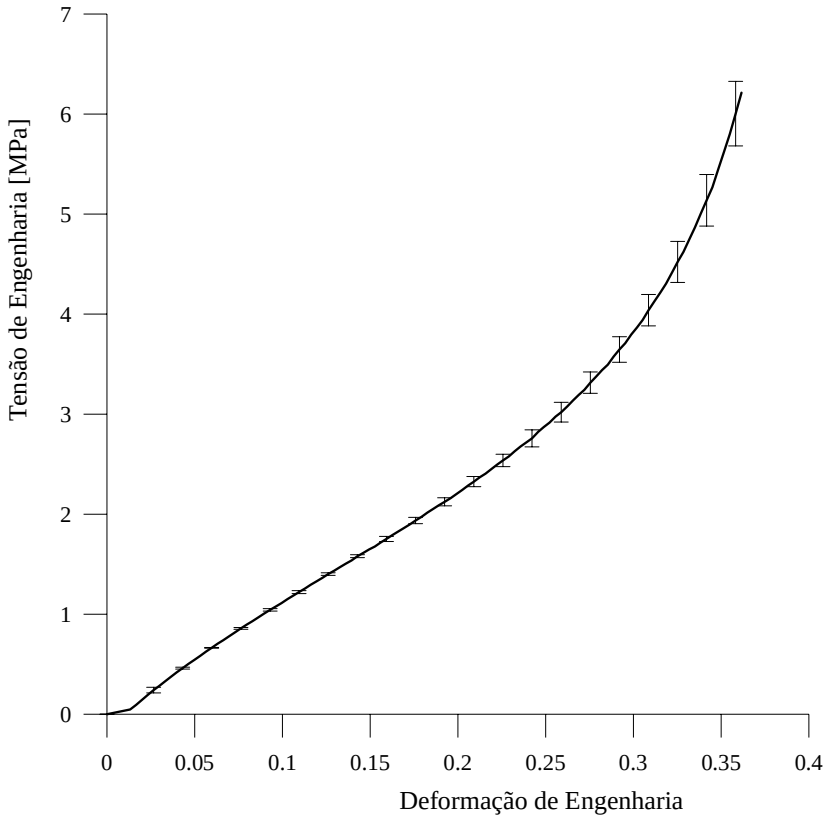


Figura 3.4 – Curva média e desvio padrão do 5º ciclo de carregamento das duas amostras submetidas ao ensaio de compressão

3.2.3 Ensaio de Cisalhamento Puro

Os ensaios de tração biaxial e de cisalhamento normalmente produzem constantes muito diferentes daquelas que são obtidas por meio de um ensaio de tração uniaxial, visto que este não excita suficientemente o invariante I_2. Dessa forma, quando se obtém constantes constitutivas somente através de ensaios simples – como é o caso do ensaio de tração uniaxial e compressão – é provável que se obtenha resultados satisfatórios somente em aplicações onde as tensões uniaxiais sejam predominantes, dificultando a obtenção de bons resultados em problemas mais generalizados. Portanto, em situações onde o projetista desconhece os invariantes de deformação característicos da aplicação é recomendável a utilização de constantes constitutivas geradas com base em ensaios de tração biaxial. Neste trabalho o ensaio de tração biaxial não foi realizado devido à indisponibilidade de aparato experimental apropriado.

Para o ensaio de cisalhamento puro foi utilizada a máquina universal de ensaios mecânicos EMIC DL 2000 – contendo uma célula de carga com capacidade de 5 kN (tração e compressão). As deformações foram medidas através de um transdutor de deslocamento embutido no equipamento. A velocidade do ensaio foi controlada e mantida constante em 5 mm/min.

Para obter a curva média de tensão-deformação de engenharia foram utilizados quatro corpos de prova. Antes de iniciar os ensaios, os corpos de prova permaneceram acondicionados durante 16 horas a uma temperatura de 23°C ± 2°C e umidade relativa de 50% ± 5%. A Tabela 3.3 contém as dimensões dos corpos de prova utilizados no ensaio de cisalhamento e a Figura 3.5, apresenta a compilação de todos os ensaios realizados.

Tabela 3.3 – Dimensões dos corpos de prova do ensaio de cisalhamento puro

Espessura = 2,34 mm
Largura dos Corpos de Prova = 73,5 mm
Comprimento dos Corpos de Prova = 45,0 mm
Comprimento Inicial (L_0) = 25,4 mm
Área da Seção (A_0) = 172,0 mm^2

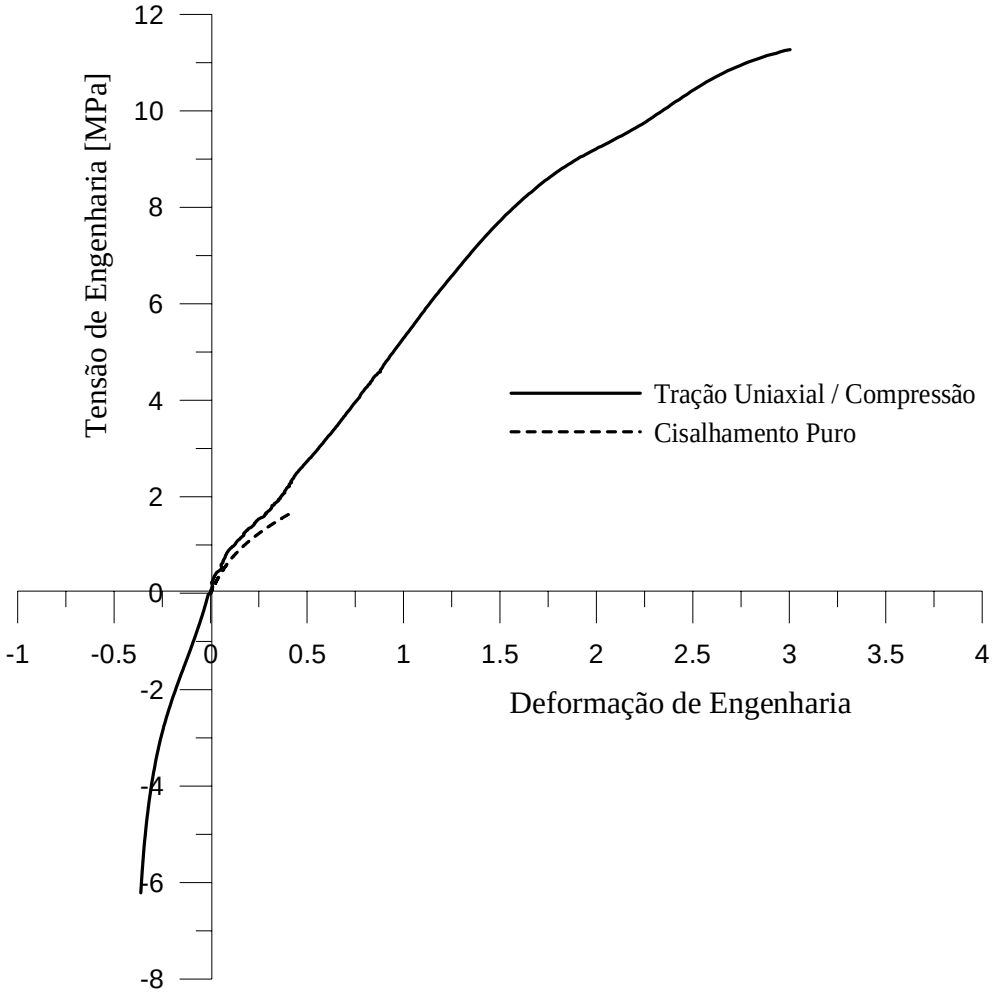


Figura 3.5 – Curvas de tensão-deformação de engenharia dos ensaios de tração uniaxial, compressão e cisalhamento

O ensaio de cisalhamento puro deveria ter sido realizado conforme a norma BS 903-5 [2004], onde a mesma sugere a utilização de corpos de prova com a seguinte dimensão: 20 mm x 2 mm x 200 mm. Caso não seja possível a utilização do corpo de prova nas dimensões sugeridas, dever-se-ia garantir que o comprimento inicial entre garras (L_0) não ultrapassasse 1/5 da maior dimensão do corpo de prova. No entanto, essa proporção não foi seguida pelo laboratório que realizou os ensaios, onde o L_0 utilizado foi de 25,4 mm. Infelizmente, não foi possível repetir os ensaios de cisalhamento puro devido à dificuldade em se obter novas amostras do material para a confecção de novos corpos de prova.

Comparando os resultados apresentados pela Figura 3.5 com a forma típica das curvas ilustradas pela Figura 3.6, observa-se que as tensões obtidas com o ensaio de cisalhamento puro são inferiores às do ensaio de tração. Segundo Marczak [2006], quando os resultados

obtidos não fornecem curvas similares às da Figura 3.6 ou não aparecem na mesma sequência, muito provavelmente as constantes obtidas são inadequadas ou então, os dados experimentais não são confiáveis. Portanto, os resultados obtidos com o ensaio de cisalhamento puro foram descartados e não serão utilizados na obtenção das constantes constitutivas hiperelásticas.

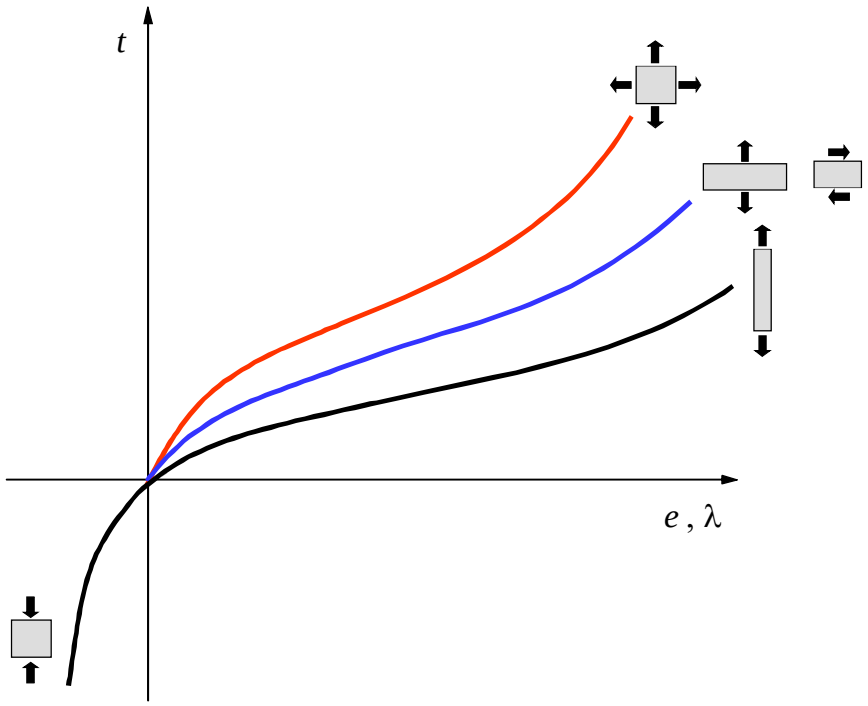


Figura 3.6 – Forma típica das curvas de tensão-deformação de engenharia obtidas em ensaios experimentais de borrachas [Marczak, *et al.*, 2006]

3.3 Esaio do Componente

O componente elastomérico escolhido para servir de objeto de estudo, foi a peça automotiva ilustrada na Figura 3.7. A função dessa peça é exercer uma força de compressão na tampa plástica que cobre o porta-malas do veículo, de forma a evitar a trepidação da mesma.

O objetivo desta seção é realizar o ensaio de compressão simples do próprio componente elastomérico e obter a curva média de força × deslocamento – que será utilizada no Capítulo 4 como referência para o cálculo do erro entre as curvas teóricas e experimental.

(a) (b)

Figura 3.7 – Ilustração da aplicação do componente utilizado

Para a realização do ensaio de compressão do próprio componente (Figura 3.8), foi utilizada uma máquina universal de ensaios do modelo MTS 831.50 (Figura 3.3(a)), com uma célula de carga de 10 kN. As deformações foram medidas com o extensômetro do próprio equipamento. Dois componentes foram submetidos a ciclos de compressão e descompressão com velocidade controlada em 5 mm/min. Somente os resultados do quinto ciclo de carregamento foram utilizados para a gerar a curva média de força × deslocamento – procedimento necessário para minimizar o efeito de Mullins [Mullins, 1969]. A curva média com o desvio padrão é apresentada pela Figura 3.9.

Figura 3.8 – Ensaio de compressão do componente

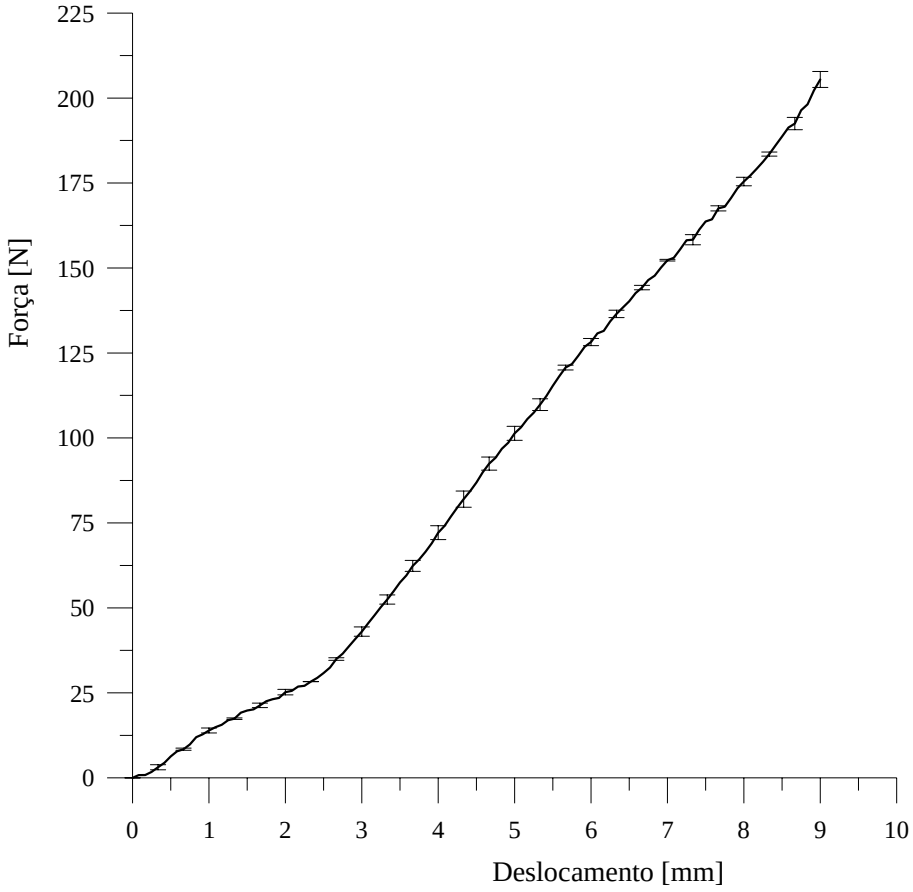


Figura 3.9 – Curva média e desvio padrão do 5º ciclo de carregamento dos dois componentes submetidos ao ensaio de compressão

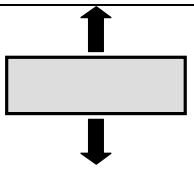
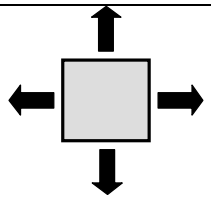
Os dados da curva de força × deslocamento da Figura 3.9 foram utilizados como referência para a validação do modelo de elementos finitos, bem como, da abordagem adotada (Capítulo 4).

3.4 Predições Teóricas

Nem sempre estarão ao alcance do projetista os resultados de todos os ensaios usuais e em muitos casos, somente os resultados relativos a um único ensaio estarão disponíveis. Em casos onde se deseja estudar o comportamento de uma peça de pequenas proporções, onde amostras de matéria prima não encontram-se disponíveis para serem analisadas, resta ao projetista extrair, por exemplo, pequenos corpos de prova cilíndricos e realizar ensaios de compressão. Mas como saber se é possível extrair boas constantes constitutivas a partir de um único ensaio? Um modo de analisar a qualidade de um determinado ensaio, bem como de suas respectivas constantes constitutivas, consiste em utilizar as equações de tensões nominais de

um determinado modelo hiperelástico, de forma a predizer as curvas teóricas para os demais ensaios e verificar se o conjunto de curvas apresenta um comportamento coerente, conforme a Figura 3.6. A Tabela 3.4 apresenta as relações teóricas de tensão × deformação para alguns modos de deformação típicos.

Tabela 3.4 – Relações teóricas para alguns dos principais ensaios usuais [Hyperfit, 2010]

Ensaio	Carregamento	Relações Teóricas
Tração / compressão uniaxial		$t_{T,C} = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)$ (3.13)
Cisalhamento puro		$t_P = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)$ (3.14)
Tração biaxial		$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)$ (3.15)

3.4.1 Particularização do Modelo de Yeoh de 2 termos

Com base na função *W*, representada pela Equação 3.5, verifica-se que o modelo de Yeoh utiliza duas constantes, C_{10} e C_{20}.

A Equação 3.16 apresenta a expressão do alongamento:

$$\lambda = \frac{L}{L_0} = \frac{u + L_0}{L_0} = 1 + e \tag{3.16}$$

sendo L o comprimento final, L_o o comprimento inicial, u o deslocamento e e a deformação de engenharia.

O primeiro e o segundo invariantes de deformação, considerando tração uniaxial, são dados por:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} = (e+1)^2 + \frac{2}{(e+1)} \tag{3.17}$$

$$I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} = 2(e+1) + \frac{1}{(e+1)^2} \tag{3.18}$$

Derivando W em relação à I_1 e I_2:

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3)$$
$$\frac{dW}{dI_2} = 0 \tag{3.19}$$

substituindo as Equações 3.16, 3.17 e 3.19 na Equação 3.13, obtém-se a expressão utilizada para a predição da curva do ensaio de tração:

$$t_T = 2\left((e+1) - \frac{1}{(e+1)^2}\right) \times \left(C_{10} + 2C_{20}\left(\left((e+1)^2 + \frac{2}{(e+1)}\right) - 3\right)\right) \tag{3.20}$$

Seguindo um procedimento análogo, pode-se encontrar também as equações necessárias para a predição do ensaio de cisalhamento puro e tração biaxial.

O primeiro e o segundo invariantes de deformação, considerando cisalhamento puro, são dados por:

$$I_1 = I_2 = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 1 = (e+1)^2 + \frac{1}{(e+1)^2} + 1 \tag{3.21}$$

substituindo as Equações 3.16, 3.19 e 3.21 na Equação 3.14, obtêm-se a expressão para a predição do ensaio de cisalhamento puro:

$$t_P = 2\left((e+1) - \frac{1}{(e+1)^3}\right) \times \left(C_{10} + 2C_{20}\left(\left((e+1)^2 + \frac{1}{(e+1)^2} + 1\right) - 3\right)\right) \tag{3.22}$$

No caso de tração biaxial, o primeiro e segundo invariantes de deformação são dados por:

$$I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} = 2(e+1)^2 + \frac{1}{(e+1)^4} \tag{3.23}$$

$$I_2 = \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2} = (e+1)^4 + \frac{2}{(e+1)^2} \tag{3.24}$$

substituindo as Equações 3.16, 3.19 e 3.23 na Equação 3.15, obtém-se a expressão para a predição do ensaio de tração biaxial:

$$t_B = 2\left((e+1) - \frac{1}{(e+1)^5}\right) \times \left(C_{10} + 2C_{20}\left(\left(2(e+1)^2 + \frac{1}{(e+1)^4}\right) - 3\right)\right) \tag{3.25}$$

3.4.2 Particularização para o Modelo de Arruda-Boyce de 5 termos

Seguindo um procedimento análogo ao que foi utilizado na Seção 3.4.1 é possível obter as equações necessárias para a predição do ensaio de cisalhamento puro, tração uniaxial e biaxial para o modelo de Arruda-Boyce. Os invariantes de deformação apresentados na Seção 3.4.1, também são aplicáveis neste caso.

Com base na função *W*, representada pela Equação 3.9, verifica-se que o modelo de Arruda-Boyce utiliza duas constantes, μ e λ_L.

Derivando *W* em relação à I_1 e I_2:

$$\frac{dW}{dI_1} = \mu\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\frac{I_1}{\lambda_L^2} + \frac{11}{350}\frac{I_1^2}{\lambda_L^4} + \frac{19}{1750}\frac{I_1^3}{\lambda_L^6} + \frac{519}{134750}\frac{I_1^4}{\lambda_L^8}\right)$$
$$\frac{dW}{dI_2} = 0 \tag{3.26}$$

substituindo as Equações 3.16, 3.17 e 3.26 na Equação 3.13, obtém-se a expressão utilizada para a predição da curva do ensaio de tração:

$$t_T = 2\mu\left((e+1)-\frac{1}{(e+1)^2}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10\lambda_L^2}\left((e+1)^2+\frac{2}{(e+1)}\right)+\frac{11}{350\lambda_L^4}\left((e+1)^2+\frac{2}{(e+1)}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{38}{3523\lambda_L^6}\left((e+1)^2+\frac{2}{(e+1)}\right)^3+\frac{519}{134750\lambda_L^8}\left((e+1)^2+\frac{2}{(e+1)}\right)^4\right) \quad (3.27)$$

substituindo as Equações 3.16, 3.21 e 3.26 na Equação 3.14, obtêm-se a expressão para a predição do ensaio de cisalhamento puro:

$$t_P = 2\mu\left((e+1)-\frac{1}{(e+1)^3}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10\lambda_L^2}\left((e+1)^2+\frac{1}{(e+1)^2}+1\right)+\frac{11}{350\lambda_L^4}\left((e+1)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{(e+1)^2}+1\right)^2+\frac{38}{3523\lambda_L^6}\left((e+1)^2+\frac{1}{(e+1)^2}+1\right)^3+\frac{519}{134750\lambda_L^8}\left((e+1)^2+\frac{1}{(e+1)^2}+1\right)^4\right) \quad (3.28)$$

substituindo as Equações 3.16, 3.23 e 3.26 na Equação 3.15, obtém-se a expressão para a predição do ensaio de tração biaxial:

$$t_B = 2\mu\left((e+1)-\frac{1}{(e+1)^5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10\lambda_L^2}\left(2(e+1)^2+\frac{1}{(e+1)^4}\right)+\frac{11}{350\lambda_L^4}\left(2(e+1)^2+\frac{1}{(e+1)^4}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{38}{3523\lambda_L^6}\left(2(e+1)^2+\frac{1}{(e+1)^4}\right)^3+\frac{519}{134750\lambda_L^8}\left(2(e+1)^2+\frac{1}{(e+1)^4}\right)^4\right) \quad (3.29)$$

4 AJUSTE DAS CONSTANTES HIPERELÁSTICAS UTILIZANDO O ENSAIO DO COMPONENTE

O objetivo principal deste trabalho consiste em verificar se é possível a obtenção de boas constantes constitutivas, que possam ser utilizadas com fidelidade na calibração de modelos de elementos finitos, com base única e exclusivamente nas informações fornecidas pela curva de força × deslocamento do ensaio de compressão do próprio componente em estudo, ao invés de utilizar as dados obtidos por meio dos principais ensaios usuais. Esse recurso torna-se muito oportuno em situações onde se pretende utilizar pequenos componentes comercialmente disponíveis, de tal forma que não seja possível a obtenção de amostras suficientes de matéria prima – necessárias para a confecção dos corpos de prova requeridos pelos ensaios usuais.

Neste capítulo, será apresentado o modelo de elementos finitos gerado para representar o ensaio de compressão simples do componente elastomérico. Os resultados obtidos com os ensaios usuais de tração uniaxial, compressão e cisalhamento puro, serão utilizados na validação do modelo. A abordagem proposta por este trabalho será apresentada, assim como, os resultados obtidos com os modelos de Yeoh e Arruda-Boyce. As constantes constitutivas obtidas com a abordagem proposta serão inseridas nas equações de tensões nominais dos modelos hiperelásticos utilizados, de forma a predizer o comportamento teórico dos ensaios de tração uniaxial, cisalhamento puro e tração biaxial.

4.1 Modelo Matemático do Componente

O primeiro passo consistiu em transformar o componente apresentado na Figura 2.3, em um modelo matemático de elementos finitos. De forma a facilitar o modelamento e reduzir variáveis não controladas durante as análises, a parte plástica – que serve como suporte para fixação do componente – foi excluída do modelamento. Contudo, a inclinação do suporte (Figura 4.1) foi preservada e as condições de contorno foram definidas de forma a representar, da melhor forma possível, as restrições impostas pela peça plástica (Figura 4.4).

O modelo de elementos finitos foi criado em duas dimensões visando minimizar o custo computacional dos processos iterativos, requeridos pela abordagem proposta (que será apresentada na Seção 4.3). Para representar a profundidade do componente, foi definida uma seção com espessura de 19,60 mm.

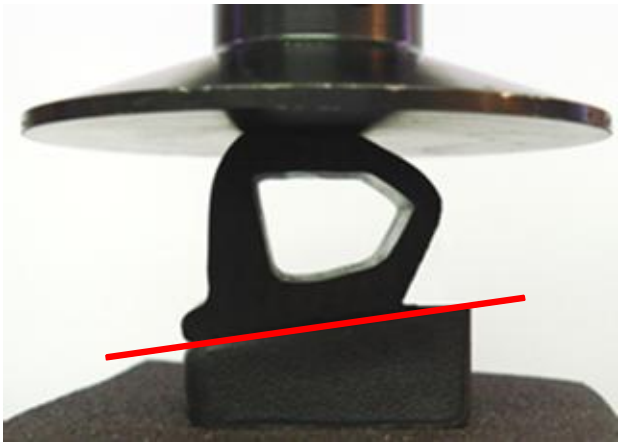


Figura 4.1 – Ilustração do ângulo de assentamento da borracha na peça plástica

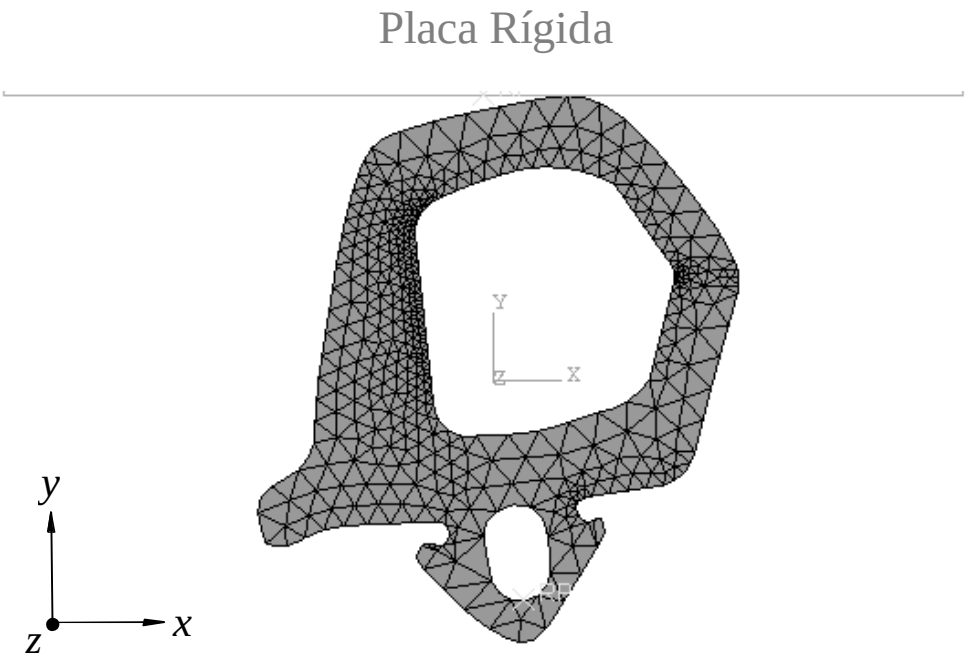


Figura 4.2 – Malha de elementos finitos

Para simular o pistão da máquina de ensaios universais, criou-se uma placa rígida e aplicou-se um deslocamento prescrito de 9 mm com velocidade constante em 5 mm/min no sentido do eixo *y* (Figura 4.3).

A malha de elementos finitos foi elaborada utilizando o elemento de seis nós CPEG6H do tipo quadrático triangular [Abaqus, 2009]. O grande deslocamento do elastômero provoca,

nas duas regiões internas de maior dobra, pontos de concentração de tensões e contato entre as superfícies. Dessa forma, foi necessário realizar um refinamento da malha de elementos finitos em alguns pontos específicos do modelo. A malha de elementos finitos é ilustrada pela Figura 4.2. As análises numéricas quase-estática foram realizadas com o auxilio do *software* Abaqus *Standard* 6.9 [Abaqus, 2009], considerando estado plano de deformações. Para simular a fricção entre o pistão da máquina de ensaios e o elastômero, foi considerado um coeficiente de atrito estático $\mu_e = 0{,}6$. Para o contato elastômero-elastômero foi considerado $\mu_e = 1{,}0$ [Kato *et al.*, 1972; Juvinall *et al.*, 2003].

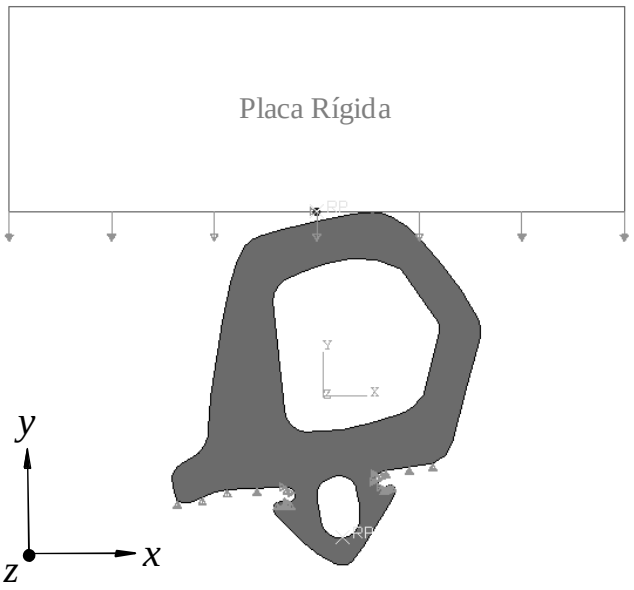


Figura 4.3 – Representação do modelo matemático: componente, bloco de compressão, carregamento e restrições de movimento.

Para todos os tipos de análises por elementos finitos, as condições de contorno devem ser aplicadas com atenção. A condição de contorno mais comum é chamada de “engaste” e ocorre quando uma superfície do componente está firmemente ligada à superfície de outro componente. Quando uma superfície (ou nó) encontra-se engastada, todos os graus de liberdade são restringidos e os nós ficam impedidos de se moverem em qualquer direção. Outra condição ocorre quando o componente encontra-se em contato com uma superfície, mas podendo se mover em paralelo com a mesma. Neste caso, somente o grau de liberdade normal a superfície deve ser restringido [Gent, 1992].

As condições de contorno aplicadas ao modelo são ilustradas pela Figura 4.4. A região com formato triangular tem a função de fixar o componente elastomérico à peça plástica. Caso a peça plástica fizesse parte do modelo, a situação ideal de condição de contorno seria impor restrições de contato entre as superfícies. Uma vez que a peça plástica não foi considerada – de forma a simplificar as análises por elementos finitos – as restrições de movimento foram impostas aos nós das superfícies do componente elastomérico em contato com a peça plástica. Os nós das superfícies pintadas em vermelho tiveram os movimentos restringidos no sentido do eixo *y*, enquanto os nós das superfícies pintadas de azul tiveram os movimentos restringidos no sentido do eixo *x*. É importante ressaltar que a simplificação imposta às condições de contorno não representa fielmente o ensaio experimental.

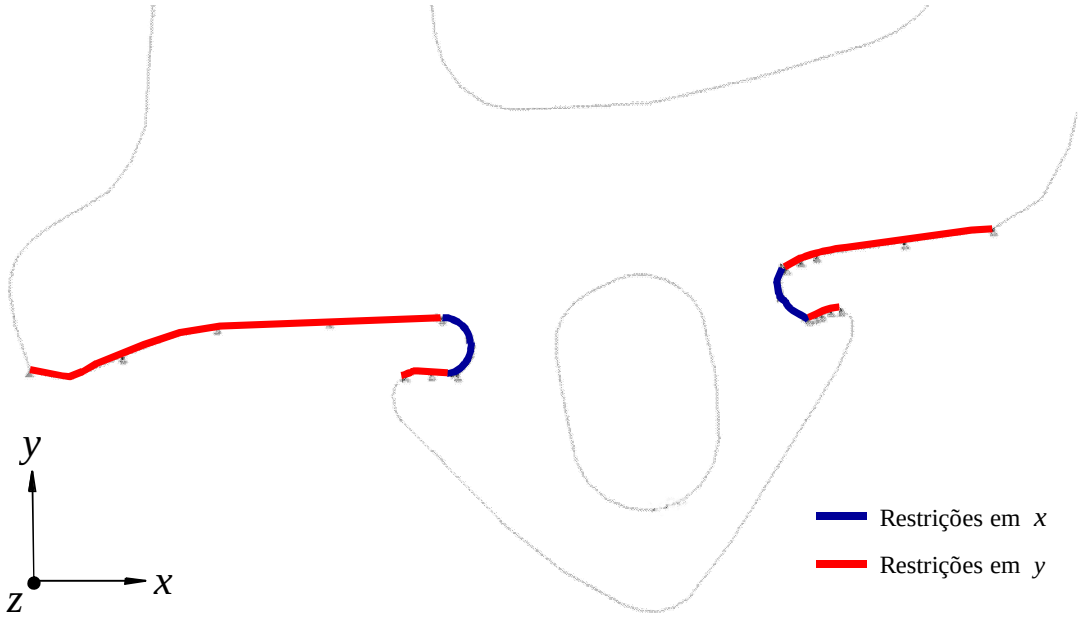


Figura 4.4 – Detalhamento das restrições de movimento impostas ao componente elastomérico

4.2 Validação do Modelo Matemático

Após finalizar o modelo matemático, torna-se fundamental a realização de alguns testes, com o intuito de verificar a qualidade dos resultados obtidos numericamente. Para isso, os resultados obtidos com o modelo matemático devem ser comparados aos obtidos experimentalmente. Para que se obtenha resultados numéricos representativos durante a simulação de materiais hiperelásticos incompressíveis, torna-se necessário a obtenção de

constantes constitutivas que representem, da melhor forma possível, as propriedades mecânicas do material em estudo.

A forma mais tradicional utilizada para a obtenção de constantes constitutivas consiste em substituir, nas relações teóricas de tensão × deformação, a expressão para a energia de deformação (função *W*) do modelo escolhido. A função *W* contemplará algumas constantes que devem ser ajustadas, de forma a se obter uma minimização do erro total entre as curvas teórica e experimental. Uma das técnicas utilizadas para a minimização do erro é o método dos mínimos quadrados.

Para encontrar as constantes constitutivas necessárias para validar o modelo matemático do componente em estudo, optou-se por utilizar o *software* Hyperfit 1.0 [Hyperfit, 2010] – desenvolvido pelo Grupo de Mecânica Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Tendo como base os dados experimentais de um ou mais ensaios usuais, o *software* faz justamente o ajuste por mínimos quadrados e mostra graficamente as predições das curvas para os ensaios não conhecidos, permitindo uma análise visual da qualidade dessas curvas.

Conforme já foi comentando anteriormente, não foi possível a obtenção de resultados válidos para o ensaio de cisalhamento puro. Dessa forma, optou-se por utilizar somente os ensaios de tração e compressão para encontrar as constantes constitutivas ótimas para cada um dos modelos hiperelásticos previamente selecionados, sendo eles: Yeoh de 2 termos e Arruda-Boyce de 5 termos. As tabelas com os resultados dos ensaios usuais de tração e compressão são apresentadas no APÊNDICE A.

Os conjuntos de constantes constitutivas obtidas para o modelo de Yeoh de 2 termos são apresentados pela Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Constantes constitutivas obtidas pelo Hyperfit, com base nos dados dos ensaios usuais e o modelo de Yeoh

Constantes Constitutivas	Hyperfit (compressão+tração)	Hyperfit (compressão)	Hyperfit (tração)
C_{10}	1,27884	1,4366	1,26717
C_{20}	0,0546887	0,0556748	0,051638

As constantes constitutivas apresentadas pela Tabela 4.1 foram inseridas no modelo de elementos finitos. Os resultados obtidos teoricamente são comparados ao experimental e

apresentados na Tabela 4.2. O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Verifica-se que o melhor resultado foi obtido somando os dados dos dois ensaios (tração+compressão); o que já era esperado visto que o componente analisado sofre a ação de ambos os esforços quando submetido à compressão.

Tabela 4.2 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento experimental e teóricos

		C_{10} e C_{20} - Ensaios Usuais					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Compressão + Tração [N]	Erro |%|	Compressão [N]	Erro |%|	Tração [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	12,8	10,3	20	11,6	9,4	10,2	20
1,8	22,8	20,1	12	22,6	0,88	19,9	13
2,7	35,3	34,0	3,7	38,2	8,2	33,7	4,5
3,6	60,3	53,8	11	60,4	0,17	53,3	12
4,5	86,9	83,1	4,4	93,3	7,4	82,3	5,3
5,4	112	111	0,89	124	11	110	1,8
6,3	136	131	3,7	147	8,1	130	4,4
7,2	157	150	4,5	167	6,4	148	5,7
8,1	178	168	5,6	188	5,6	166	6,7
9	206	196	4,9	219	6,3	194	5,8

Os conjuntos de constantes constitutivas obtidas para o modelo de Arruda de 5 termos são apresentados pela Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Constantes constitutivas obtidas pelo Hyperfit, com base nos dados dos ensaios usuais e o modelo de Arruda-Boyce

Constantes Constitutivas	Hyperfit (compressão+tração)	Hyperfit (compressão)	Hyperfit (tração)
μ	2,19289	2,34839	2,26569
λ	2,08563	1,91521	2,24107

As constantes constitutivas apresentadas pela Tabela 4.3 foram inseridas no modelo de elementos finitos. Os resultados obtidos teoricamente são comparados ao experimental e apresentados na Tabela 4.4. O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Diferente do que ocorreu para o modelo de Yeoh, o melhor resultado foi obtido utilizando somente os dados do ensaio de tração.

Tabela 4.4 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento experimental e teóricos

		μ e λ - Ensaios Usuais					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Compressão + Tração [N]	Erro |%|	Compressão [N]	Erro |%|	Tração [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	12,8	10,4	19	11,6	9,4	10,5	18
1,8	22,8	20,3	11	22,5	1,3	20,4	11
2,7	35,3	34,3	2,8	38,2	8,2	34,6	2,0
3,6	60,3	54,2	10	60,3	0	54,6	9,5
4,5	86,9	83,8	3,6	93,2	7,2	84,4	2,9
5,4	112	111	0,89	124	11	112	0
6,3	136	132	2,9	147	8,1	133	2,2
7,2	157	150	4,5	168	7,0	151	3,8
8,1	178	169	5,1	188	5,6	169	5,1
9	206	197	4,4	219	6,3	197	4,4

A Figura 4.5 ilustra a forma deformada do componente ao término da simulação numérica do ensaio de compressão simples, bem como, os resultados de deformação nominal nas máximas direções principais. Neste caso, foi utilizado o modelo hiperelástico de Yeoh e o conjunto de constantes constitutivas Hyperfit (tração+compressão) da Tabela 4.1. Observa-se que a maior parte do componente não sofre deformações superiores à 20%. Somente nas regiões de maior dobra foram identificadas pequenas regiões com deformações próximas à 95%. Resultados semelhantes foram obtidos para o modelo de Arryda-Boyce e não serão aqui apresentados.

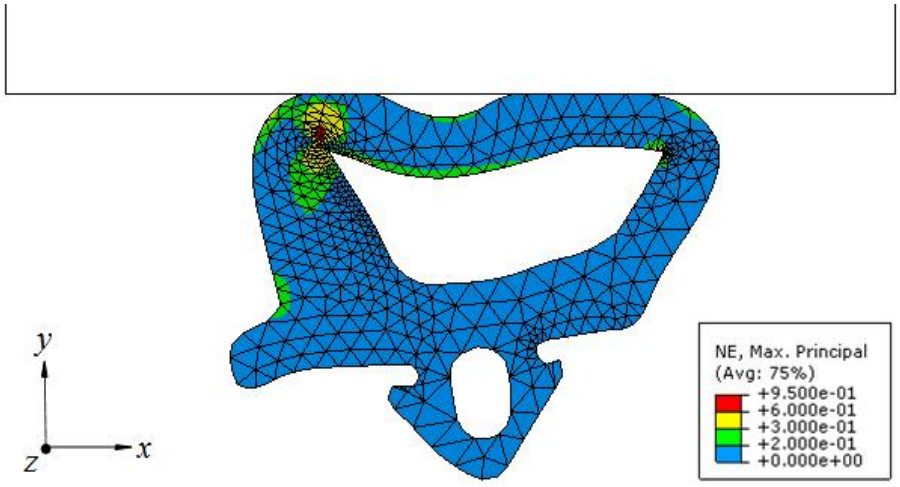


Figura 4.5 – Forma deformada do componente ao final da simulação numérica do ensaio de compressão simples

4.3 Abordagem Proposta

A abordagem proposta por este trabalho consiste em criar uma rotina de programação com o auxilio do *software* comercialmente disponível Matlab [2005], onde a partir de uma estimativa inicial de constantes constitutivas e utilizando um otimizador da própria biblioteca Matlab, o `fminsearch`, busca-se uma otimização dessas constantes de forma a minimizar a função custo escolhida. A rotina `fminsearch` utiliza o método de otimização de Nelder-Mead [Nelder e Mead, 1965].

Foram criadas duas rotinas que chamam a função `fminsearch` (APÊNDICE B e C.) A Figura 4.6 apresenta o fluxograma que envolve essas rotinas.

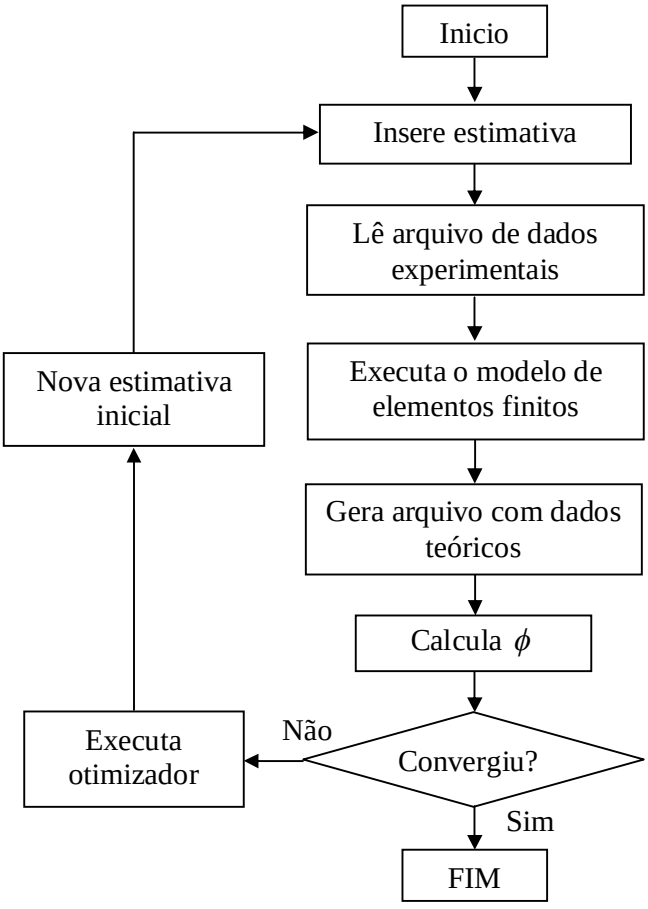


Figura 4.6 – Fluxograma da rotina de otimização

Foi considerada como função custo, a expressão demonstrada na Equação 4.1.

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} \left(F_i^T - F_i^E \right)^2 \tag{4.1}$$

onde N é o número de pontos utilizados no cálculo da função custo, F_i^T os pontos de força da curva teórica e F_i^E, os pontos de força da curva experimental (Figura 4.7). Os desvios e_i são representados por:

$$e_i = F_i^T - F_i^E \tag{4.2}$$

logo:

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 \tag{4.3}$$

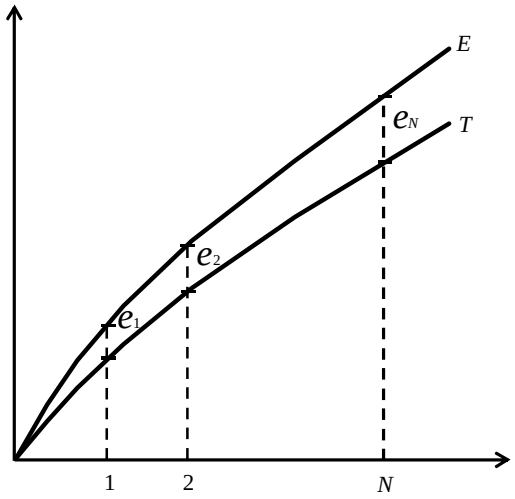


Figura 4.7 – Ilustração dos desvios e_i utilizados pela função ϕ

É importante ressaltar que as forças comparadas são sempre relativas ao mesmo deslocamento prescrito imposto durante o processo de deformação do componente avaliado. Para este trabalho, os desvios foram avaliados utilizando N = 10, 5 e 1. Para N = 1 foi considerado o desvio relativo ao ponto de máximo deslocamento do componente.

Em uma situação prática, onde o projetista disponha de uma curva experimental e dependa de um modelo constitutivo para gerar uma curva analítica, torna-se necessário encontrar as constantes constitutivas que melhor aproximem essas duas curvas. Nem sempre será possível estimar valores iniciais que estejam próximos dos valores ótimos. Caso isso ocorra, pode-se reduzir consideravelmente o tempo de processamento durante o ajuste. Agora, caso não seja possível estimar bons valores iniciais, o otimizador pode ter dificuldade de convergir para os valores ótimos e levar a obtenção de resultados não confiáveis [Marczak, *et al.* 2006].

Para cada estimativa inicial, o otimizador obteve um valor convergido da função ϕ. No entanto, nem sempre os valores convergidos ficaram próximos do menor valor encontrado durante o processo iterativo (ϕ*). Duas superfícies de resposta foram geradas para cada modelo hiperelástico, uma para ϕ e a outra para ϕ*. As constantes C_{10}*, C_{20}*, μ* e λ* foram responsáveis por gerar os valores de ϕ*; as constantes C_{10}, C_{20}, μ e λ foram responsáveis pelos valores de ϕ.

4.3.1 Modelo de Yeoh de 2 termos

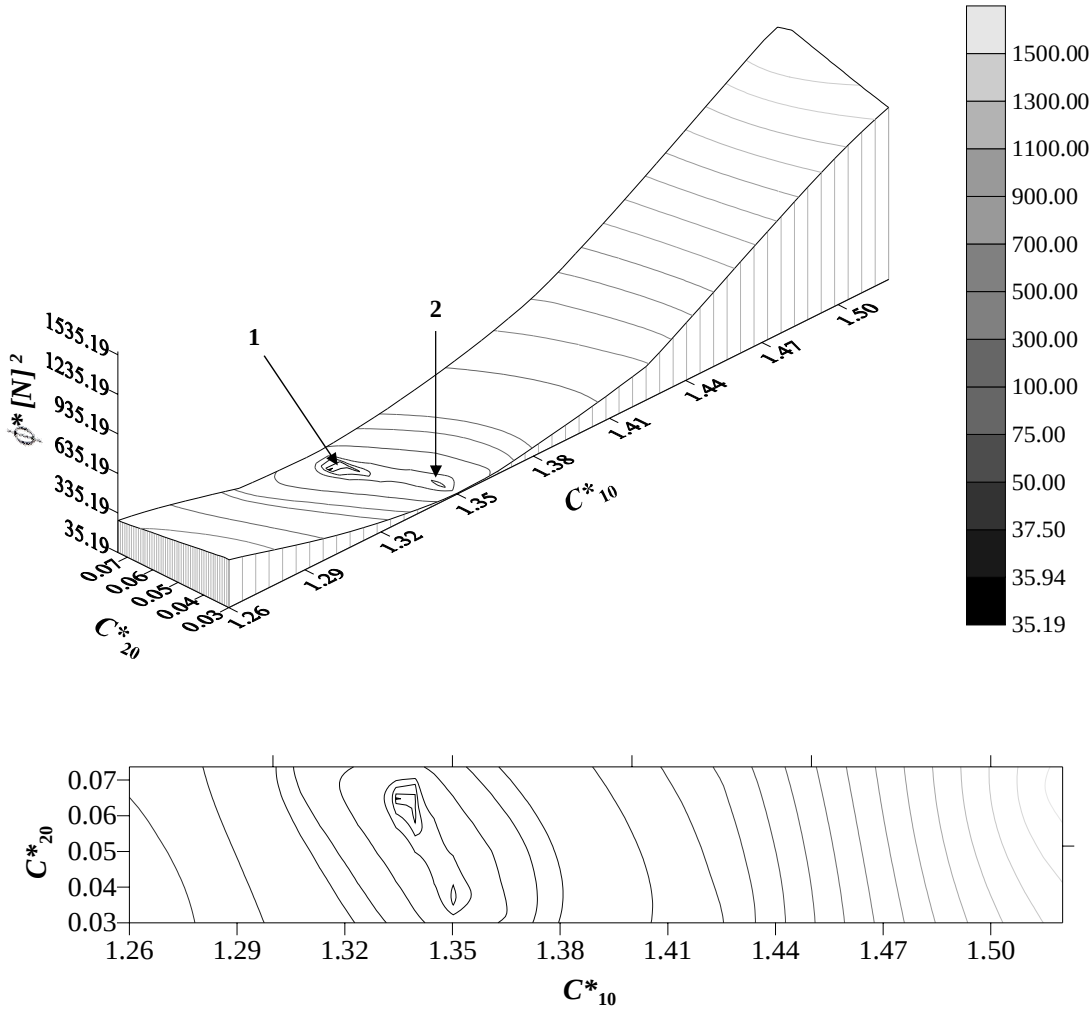


Figura 4.8 – Superfície de resposta de ϕ* para o modelo de Yeoh

A Figura 4.8 ilustra a superfície de resposta de ϕ^* e a Figura 4.9, a superfície gerada por ϕ. O critério utilizado para escolher as estimativas iniciais a serem testadas durante as análises envolvendo o modelo de Yeoh, levou em consideração os conjuntos de constantes que geraram valores de ϕ^* próximos às regiões 1 e 2.

Observa-se pela Figura 4.8 que, durante o processo de convergência da função ϕ, o otimizador encontrou duas regiões com combinações de constantes constitutivas capazes de gerar valores mínimos (ϕ^*). Os valores da função custo encontrados para cada região da Figura 4.8, são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Valores de ϕ^* para as regiões 1 e 2 da Figura 4.8

Região	ϕ^* [N^2]
1	35,2
2	35,9

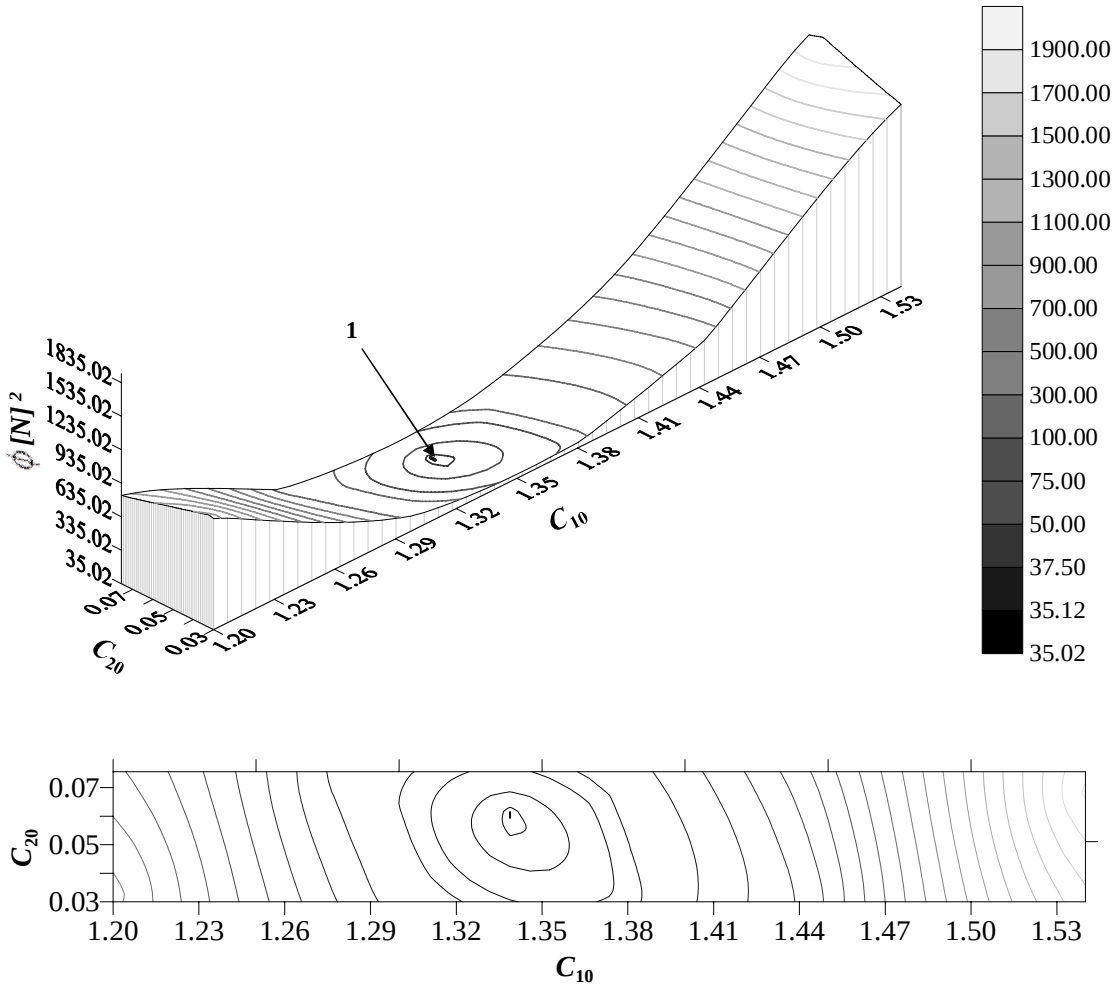


Figura 4.9 – Superfície de resposta de ϕ para o modelo de Yeoh

Para este caso, observa-se que o otimizador convergiu a função ϕ para a região 1 (Figura 4.9), no entanto, a formação de varias regiões próximas de valores mínimos pode confundir o otimizador e levar a resultados não desejáveis.

Com o objetivo de avaliar o comportamento das constantes constitutivas que originaram as superfícies de resposta apresentadas, executou-se o modelo de elementos finitos para cada conjunto de constantes. Os diagramas de força × deslocamento obtidos são comparados com o resultado experimental e ilustrados na Figura 4.10. Nota-se que nenhum diagrama apresentou comportamento absurdamente distante do resultado experimental.

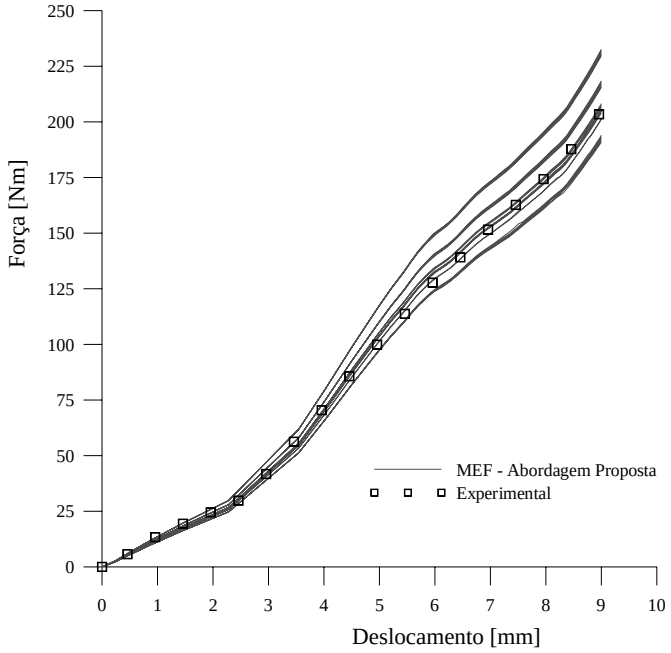


Figura 4.10 – Diagramas de força × deslocamento dos conjuntos de constantes que originaram as superfícies de resposta

Com o objetivo de avaliar a qualidade do processo de convergência da abordagem proposta, optou-se por testar três diferentes estimativas inicias para N = 10, 5 e 1.

4.3.1.1 Resultados obtidos com N = 10

O gráfico apresentado pela Figura 4.11 mostra que todas as três estimativas iniciais resultaram em uma boa convergência de ϕ. Dentre as três estimativas inicias, a estimativa inicial 2 se destacou por convergir para um valor menor do que as demais, além disso, precisou de uma quantidade menor de iterações. Observa-se também que as três linhas do gráfico apresentam comportamento semelhante até a iteração de número dez.

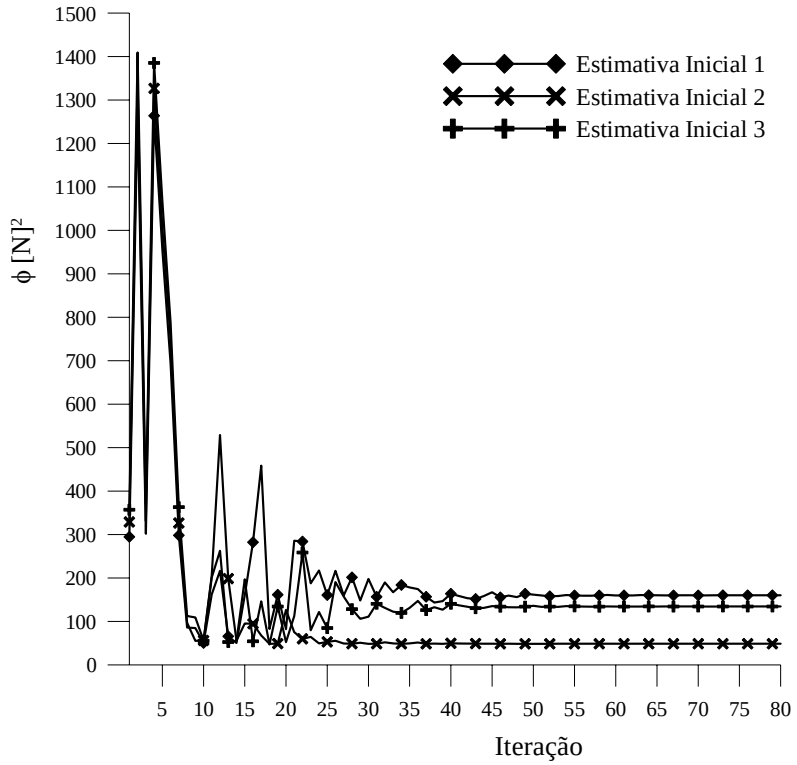


Figura 4.11 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas

Durante o processo de convergência foi observado que nem sempre as constantes constitutivas relacionadas ao valor convergido de ϕ, resultaram no melhor conjunto de constantes encontrado ao longo do processo iterativo. A Tabela 4.6 apresenta as constantes constitutivas encontradas para cada estimativa inicial e os seus respectivos valores de ϕ e ϕ^*. Observa-se que somente a estimativa inicial 2 apresentou um valor final de ϕ, muito próximo do menor valor encontrado durante o processo iterativo (ϕ^*). Para os demais casos, observa-se que o valor final de ϕ se distanciou de ϕ^*.

Tabela 4.6 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para N = 10

N = 10	C_{10}^*	C_{20}^*	ϕ^* [N]^2	C_{10}	C_{20}	ϕ [N]^2
Estimativa Inicial 1	1,3475	0,0481	50,4	1,3825	0,0469	160
Estimativa Inicial 2	1,3398	0,0608	48,4	1,3382	0,0609	48,7
Estimativa Inicial 3	1,3387	0,0687	46,9	1,3716	0,0664	134

Observou-se que mesmo utilizando estimativas iniciais próximas, o otimizador apresenta desvios durante o processo de convergência. Nota-se que a estimativa inicial 1 iniciou o processo iterativo com o menor valor de ϕ e terminou com o maior valor.

Na Tabela 4.7, os resultados obtidos teoricamente são comparados ao experimental. O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o menor valor de ϕ durante o processo iterativo (C_{10}* e C_{20}*). Neste caso, verifica-se que a estimativa inicial 3 gerou resultados mais próximos ao experimental do que as demais. Contudo, todas as estimativas iniciais apresentaram erros pequenos e menores do que aqueles gerados pelas constantes constitutivas oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.2).

Tabela 4.7 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10}* e C_{20}*

		C_{10}* e C_{20}* - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	12,8	10,9	15	10,8	16	10,8	16
1,8	22,8	21,2	7,0	21,1	7,5	21,0	7,9
2,7	35,3	35,9	1,7	35,7	1,1	35,7	1,1
3,6	60,3	56,7	6,0	56,4	6,5	56,3	6,6
4,5	86,9	87,5	0,69	87,1	0,23	87,1	0,23
5,4	112	116	3,6	116	3,6	116	3,6
6,3	136	138	1,5	138	1,5	138	1,5
7,2	157	157	0	156	0,64	157	0
8,1	178	176	1,1	176	1,1	176	1,1
9	206	205	0,49	205	0,49	206	0

A Tabela 4.8 também apresenta a comparação entre os resultados obtidos teoricamente com o experimental, porém, os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o valor convergido de ϕ (C_{10} e C_{20}). O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Neste caso, observa-se que a estimativa inicial 2 resultou em erros comparáveis aos apresentados pela Tabela 4.7. No entanto, é importante salientar que as demais estimativas, apesar de não terem convergido tão bem quanto a estimativa inicial 2, apresentaram resultados melhores do que aqueles obtidos pelas constantes oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.2).

Tabela 4.8 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10} e C_{20}

		C_{10} e C_{20} - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	12,8	11,2	13	10,8	16	11,1	13
1,8	22,8	21,7	4,8	21,0	7,9	21,6	5,3
2,7	35,3	36,8	4,2	35,6	0,85	36,5	3,4
3,6	60,3	58,1	3,6	56,3	6,6	57,7	4,3
4,5	86,9	89,8	3,3	87,0	0,12	89,2	2,6
5,4	112	119	6,3	116	3,6	119	6,3
6,3	136	142	4,4	137	0,74	141	3,7
7,2	157	161	2,5	156	0,64	160	1,9
8,1	178	181	1,7	176	1,1	180	1,1
9	206	211	2,4	205	0,49	210	1,9

4.3.1.2 Resultados obtidos com $N = 5$

Observa-se pelo gráfico apresentado na Figura 4.12, que todas as três estimativas iniciais resultaram em uma boa convergência de ϕ. Da mesma forma como ocorreu para N = 10, a estimativa inicial 2 se destacou por convergir para um valor menor do que as outras duas e, além disso, precisou de uma quantidade menor de iterações. Novamente, verifica-se que as três linhas do gráfico apresentaram comportamento semelhante até a iteração de número dez.

Assim como ocorreu para N = 10, durante o processo de convergência foi observado que nem sempre as constantes constitutivas relacionadas ao valor convergido de ϕ resultaram no melhor conjunto de constantes encontrado ao longo do processo iterativo. A Tabela 4.9 apresenta as constantes constitutivas encontradas para cada estimativa inicial e os seus respectivos valores de ϕ e ϕ^*. Observando a Tabela 4.9, verifica-se que somente a estimativa inicial 2 apresentou um valor final de ϕ, muito próximo do menor valor encontrado durante o processo iterativo (ϕ^*). Para os demais casos, observa-se que o valor final de ϕ se distanciou de ϕ^*.

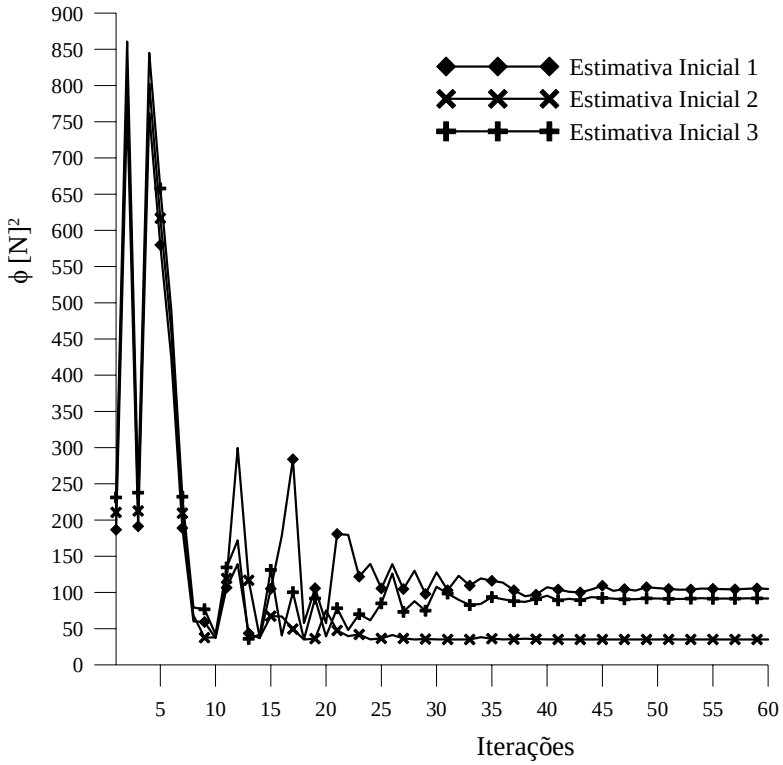


Figura 4.12 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas

Tabela 4.9 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 5$

$N = 5$	C_{10}*	C_{20}*	ϕ* [N]^2	C_{10}	C_{20}	ϕ [N]^2
Estimativa Inicial 1	1,3475	0,0481	36,9	1,3824	0,0469	105
Estimativa Inicial 2	1,3382	0,0609	35,1	1,3386	0,0609	35,1
Estimativa Inicial 3	1,3387	0,0687	35,4	1,3716	0,0664	91,7

Verificou-se que com a utilização de $N = 5$, o otimizador apresentou os mesmos desvios observados durante o processo de convergência com $N = 10$. Para este caso, a estimativa inicial 1 também iniciou o processo iterativo com o menor valor de ϕ e terminou com o maior valor.

Comparando os resultados apresentados nas Tabelas 4.6 e 4.9, nota-se que os valores de ϕ da primeira tabela são ligeiramente maiores que os da segunda. Esta situação ocorre porque ϕ considera mais pontos no primeiro somatório do que no segundo.

Na Tabela 4.10, os resultados obtidos teoricamente são comparados ao experimental. O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o menor valor de ϕ durante

o processo iterativo (C_{10}* e C_{20}*). Assim como ocorreu para N = 10, verifica-se que a estimativa inicial 3 gerou resultados mais próximos aos experimentais do que as demais. Contudo, todas as estimativas iniciais apresentaram erros pequenos e menores do que aqueles gerados pelas constantes constitutivas oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.2).

Tabela 4.10 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10}* e C_{20}*

		C_{10}* e C_{20}* - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
1,8	22,8	21,2	7,0	21,0	7,9	21,0	7,9
3,6	60,3	56,7	6,0	56,3	6,6	56,3	6,6
5,4	112	116	3,6	116	3,6	116	3,6
7,2	157	157	0	156	0,64	157	0
9	206	205	0,49	205	0,49	206	0

A Tabela 4.11 também apresenta a comparação entre os resultados obtidos teoricamente com o experimental, porém, neste caso os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o valor convergido de ϕ. O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Neste caso, observa-se que os erros da estimativa inicial 2 foram os mesmos da Tabela 4.10. No entanto, é importante salientar que apesar das demais estimativas não terem convergido tão bem quanto a estimativa inicial 2, apresentaram resultados melhores do que aqueles obtidos pelas constantes oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.2).

Tabela 4.11 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10} e C_{20}

		C_{10} e C_{20} - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
1,8	22,8	21,7	4,8	21,0	7,9	21,6	5,3
3,6	60,3	58,1	3,6	56,3	6,6	57,7	4,3
5,4	112	119	6,3	116	3,6	119	6,3
7,2	157	161	2,5	156	0,64	160	1,9
9	206	211	2,4	205	0,49	210	1,9

4.3.1.3 Resultados obtidos com $N = 1$

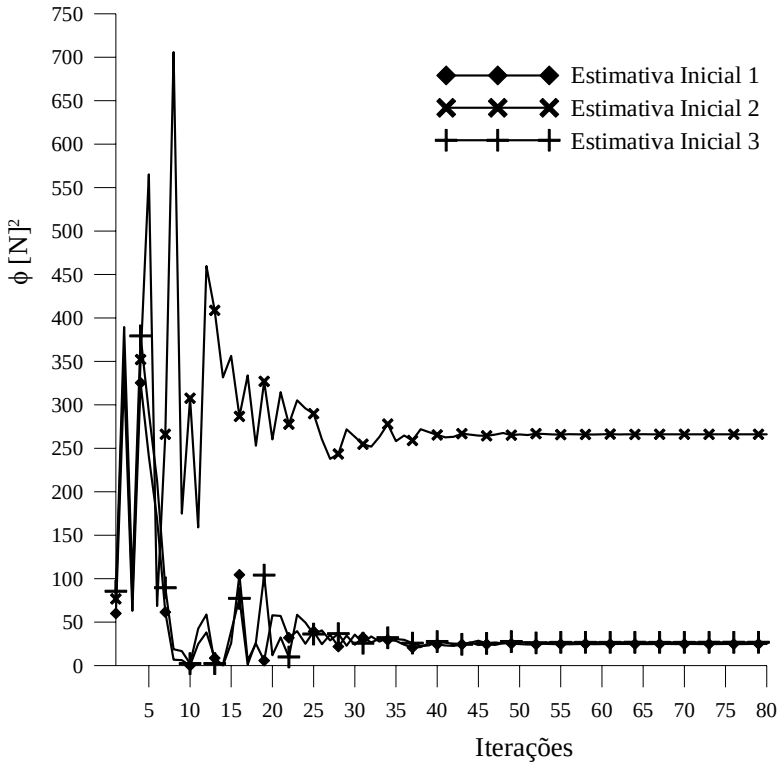


Figura 4.13 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas

Observa-se pelo gráfico apresentado na Figura 4.13, que as estimativas iniciais 1 e 3 apresentaram resultados muito próximos e com boa convergência de ϕ. Diferente do que ocorreu para $N = 10$ e $N = 5$, a estimativa inicial 2 não apresentou um bom resultado.

Assim como ocorreu para $N = 10$ e $N = 5$, durante o processo de convergência foi observado que nem sempre as constantes constitutivas relacionadas ao valor convergido de ϕ, resultaram no melhor conjunto de constantes encontrado ao longo do processo iterativo. A Tabela 4.12 apresenta as constantes constitutivas encontradas para cada estimativa inicial e os seus respectivos valores de ϕ e ϕ^*. Observando a Tabela 4.12, verifica-se que nenhuma estimativa inicial apresentou um valor final de ϕ próximo do menor valor encontrado durante o processo iterativo (ϕ^*).

Observa-se que a utilização de $N = 1$ fez o otimizador apresentar desvios distintos daqueles obtidos com $N = 10$ e $N = 5$. Para este caso, as estimativas iniciais 1 e 3 iniciaram o processo iterativo respectivamente com o menor e o maior valor de ϕ; e terminaram com o menor valor.

Tabela 4.12 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 1$

$N = 1$	C_{10}*	C_{20}*	ϕ* [N]^2	C_{10}	C_{20}	ϕ [N]^2
Estimativa Inicial 1	1,3475	0,0494	0,0268	1,3825	0,0481	24,8
Estimativa Inicial 2	1,4	0,057	68,6	1,4525	0,0593	266
Estimativa Inicial 3	1,3475	0,0656	1,30	1,3737	0,0669	26,8

Na Tabela 4.13, os resultados obtidos teoricamente são comparados ao experimental. Os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o menor valor de ϕ durante o processo iterativo (C_{10}* e C_{20}*). O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Diferente do ocorreu para $N = 10$ e $N = 5$, a estimativa inicial 1 gerou resultados mais próximos aos experimentais do que as demais. Mesmo assim, para o ponto de deslocamento máximo, todas as estimativas iniciais apresentaram erros menores do que aqueles gerados pelas constantes constitutivas oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.2).

Tabela 4.13 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10}* e C_{20}*

		C_{10}* e C_{20}* - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
9	206	206	0	214	3,9	207	0,49

A Tabela 4.14 também apresenta uma comparação entre os resultados obtidos teoricamente com o experimental, porém, neste caso os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o valor convergido de ϕ. O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Neste caso, diferente do que ocorreu para $N = 10$ e $N = 5$, observa-se que o erro absoluto gerado pela estimativa inicial 2 no ponto de máximo deslocamento, foi o maior de todos os erros encontrados durante as simulações envolvendo o modelo de Yeoh.

Tabela 4.14 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando C_{10} e C_{20}

		C_{10} e C_{20} - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
9	206	211	2,4	222	7,8	211	2,4

4.3.1.4 Conclusões

Analisando todos os resultados obtidos com a utilização do modelo hiperelástico de Yeoh, observa-se que a abordagem proposta gerou bons resultados quando utilizado $N = 10$ ou $N = 5$ na Equação 4.1. Para estes casos, a abordagem proposta foi capaz de encontrar constantes constitutivas que resultaram em uma melhor calibração do modelo de elementos finitos, do que se fossem utilizadas as constantes provenientes dos ensaios usuais.

Mesmo obtendo bons resultados com todos os valores de N testados, verificou-se que a utilização de $N = 5$ foi suficiente para se obter bons resultados e garantir um comportamento uniforme ao longo de toda a curva. As constantes constitutivas encontradas utilizando $N = 10$ e $N = 5$ foram muito semelhantes e até mesmo iguais, em alguns casos. Porém, apesar de $N = 1$ também ter gerado resultados satisfatórios, estes não são totalmente confiáveis, pois a minimização dos desvios (Equação 4.2) em um único ponto pode acarretar erros maiores em outros pontos da curva que não são monitorados.

A Figura 4.14 ilustra os melhores resultados de força × deslocamento obtidos para cada N, comparando-os com o resultado experimental e com a curva teórica gerada com as constantes constitutivas obtidas pelo Hyperfit (tração+compressão). Observa-se que as constantes constitutivas obtidas pela abordagem proposta geraram resultados mais próximos ao experimental, do que as constantes obtidas com o Hyperfit. Nota-se também, que as três curvas da abordagem proposta encontram-se praticamente sobrepostas na figura. A Tabela 4.15 apresenta as constantes constitutivas utilizadas na obtenção das curvas apresentadas pela Figura 4.14.

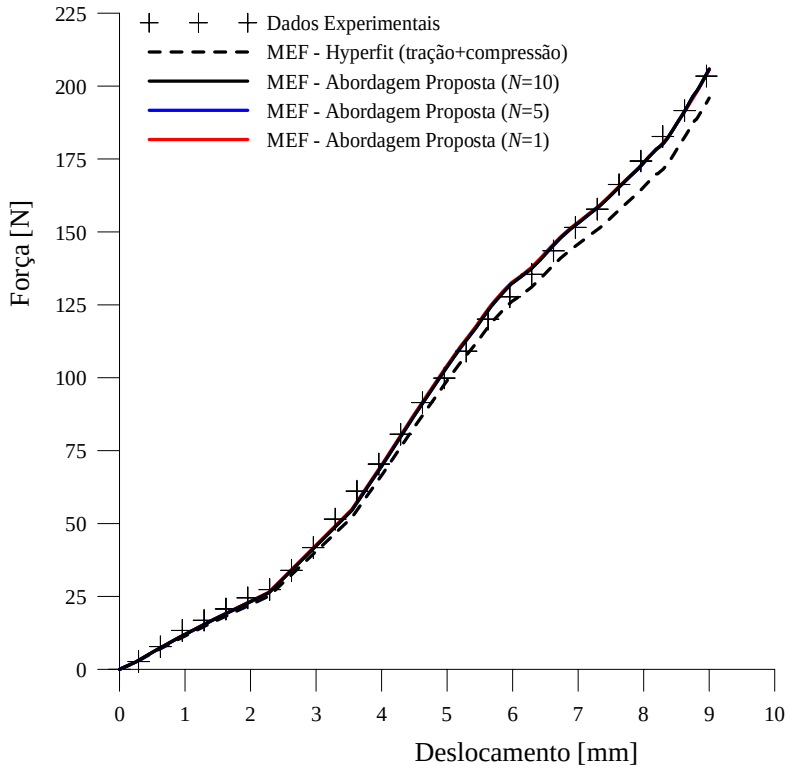


Figura 4.14 – Comparação dos melhores resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental

Tabela 4.15 – Constantes constitutivas utilizadas na obtenção das curvas apresentadas pela Figura 4.14

Constantes Constitutivas	Hyperfit (tração+compressão)	ϕ^* ($N=10$)	ϕ^* ($N=5$)	ϕ^* ($N=1$)
C_{10}^*	1,27884	1,3387	1,3387	1,3475
C_{20}^*	0,0546887	0,0687	0,0687	0,0494

4.3.2 Modelo de Arruda-Boyce de 5 termos

A Figura 4.15 ilustra a superfície de resposta de ϕ^* e a Figura 4.16, a superfície gerada por ϕ. O critério utilizado para escolher as estimativas iniciais a serem testadas pelo modelo de Arruda-Boyce foi diferente daquele utilizado para o modelo de Yeoh. Para este caso, optou-se por escolher aleatoriamente um conjunto de constantes iniciais (estimativa inicial 1). Como estimativa inicial 2, utilizou-se o conjunto de constantes que gerou o menor valor da função custo (ϕ^*) durante a otimização da estimativa inicial 1. Por sua vez, o

conjunto de constantes constitutivas que gerou o menor valor da função custo (ϕ^*) ao longo da otimização da estimativa inicial 2, deu origem à estimativa inicial 3.

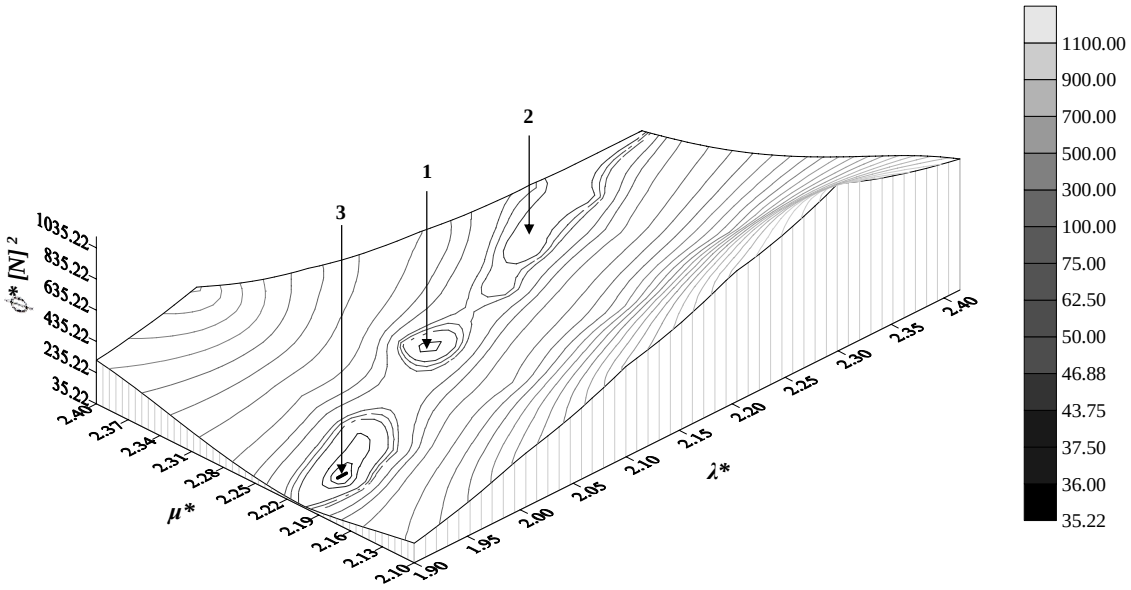


Figura 4.15 – Superfície de resposta de ϕ^* para o modelo de Arruda-Boyce

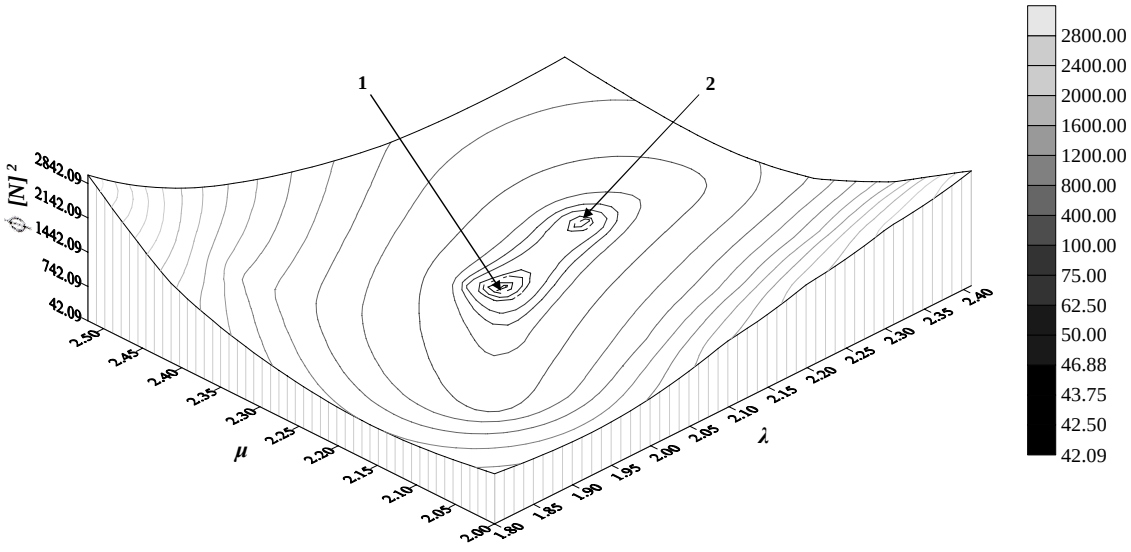


Figura 4.16 – Superfície de resposta de ϕ para o modelo de Arruda-Boyce

Observa-se pela Figura 4.15 que, durante o processo de convergência da função ϕ, o otimizador encontrou três regiões com combinações de constantes constitutivas tendendo a valores mínimos (ϕ*). No entanto, a existência de várias regiões de valores mínimos pode confundir o otimizador e levar a resultados não desejáveis. Neste caso, observa-se pela Figura 4.16 que o otimizador convergiu a função ϕ para as regiões 1 e 2, ignorando a existência da região 3 – região responsável pelo menor valor de ϕ*.

Os valores da função custo encontrados para cada região da Figura 4.15, são apresentados na Tabela 4.16.

Tabela 4.16 – Valores de ϕ* para as regiões 1, 2 e 3 da Figura 4.15

Região	ϕ^* [N^2]
1	42,1
2	46,9
3	35,2

Diferente do que ocorreu com o modelo de Yeoh, os valores convergidos de ϕ (Figura 4.16) se afastaram da região detentora do menor valor de ϕ*, demonstrando que o otimizador utilizado nem sempre garantirá a convergência de ϕ para a região de valores mínimos.

Para o modelo de Arruda-Boyce, a qualidade do processo de convergência da abordagem proposta também será testada considerando três estimativas iniciais em N = 10, 5 e 1.

4.3.2.1 Resultados obtidos com N = 10

Observa-se no gráfico apresentado pela Figura 4.17, que apenas a estimativa inicial 3 resultou em uma boa convergência de ϕ. Este comportamento já era esperado em função do processo utilizado na determinação das estimativas iniciais. Porém, nota-se que as estimativas iniciais 1 e 2 apresentaram valores finais de ϕ muito maiores que os iniciais.

Durante o processo de convergência foi observado que nem sempre as constantes constitutivas relacionadas ao valor convergido de ϕ, resultaram no melhor conjunto de constantes encontrado ao longo do processo iterativo. A Tabela 4.17 apresenta as constantes constitutivas encontradas para cada estimativa inicial e os seus respectivos valores de ϕ e ϕ*.

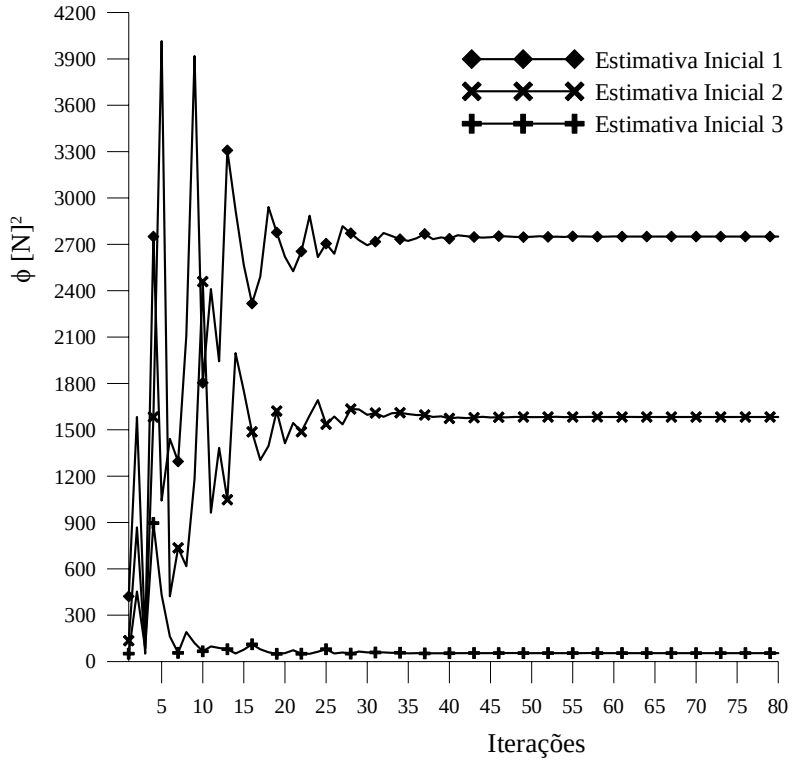


Figura 4.17 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas

Tabela 4.17 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 10$

$N = 10$	μ^*	λ^*	ϕ^* [N]^2	μ	λ	ϕ [N]^2
Estimativa Inicial 1	2,3	1,995	144	2,415	1,805	2751
Estimativa Inicial 2	2,3	2,1	51,3	2,415	1,9	1583
Estimativa Inicial 3	2,2964	2,1098	50,2	2,2856	2,1131	54,9

Observando a Tabela 4.17, verifica-se que somente a estimativa inicial 3 apresentou um valor final de ϕ, muito próximo do menor valor encontrado durante o processo iterativo (ϕ^*). Para os demais casos, o valor final de ϕ se distanciou do menor valor encontrado ao longo do processo iterativo. Nota-se também, que as estimativas iniciais 2 e 3 iniciaram o processo de otimização com valores iniciais de ϕ menores do que os finais.

Na Tabela 4.18, os resultados obtidos teoricamente são comparados ao experimental. Os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o menor valor de ϕ durante o processo iterativo (μ^* e λ^*). O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Novamente, observa-se que durante o processo de convergência

de ϕ, o otimizador encontrou constantes capazes de gerar bons resultados (μ* e λ*), mas nem sempre foi capaz de convergir ϕ para uma região próxima dos valores de ϕ*. É importante ressaltar que as constantes (μ* e λ*) apresentaram erros pequenos e menores do que aqueles gerados pelas constantes constitutivas obtidas com os ensaios usuais (Tabela 4.4).

Tabela 4.18 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ* e λ*

		μ* e λ* - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	12,8	11,1	13	10,9	15	10,9	15
1,8	22,8	21,7	4,8	21,2	7,0	21,1	7,5
2,7	35,3	36,7	4,0	35,9	1,7	35,8	1,4
3,6	60,3	58,0	3,8	56,7	6,0	56,6	6,1
4,5	86,9	89,5	3,0	87,6	0,81	87,3	0,46
5,4	112	119	6,3	117	4,5	116	3,6
6,3	136	141	3,7	138	1,5	138	1,5
7,2	157	161	2,5	157	0	156	0,64
8,1	178	180	1,1	176	1,1	176	1,1
9	206	210	1,9	206	0	205	0,49

Tabela 4.19 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ e λ

		μ e λ - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	12,8	12,3	3,9	11,9	7,0	10,8	16
1,8	22,8	23,9	4,8	23,3	2,2	21,0	7,9
2,7	35,3	40,5	15	39,4	12	35,6	0,85
3,6	60,3	64,0	6,1	62,3	3,3	56,3	6,6
4,5	86,9	98,9	14	96,2	11	86,9	0
5,4	112	132	18	128	14	116	3,6
6,3	136	156	15	152	12	137	0,74
7,2	157	178	13	173	10	156	0,64
8,1	178	200	12	194	9,0	175	1,7
9	206	234	14	227	10	204	0,97

A Tabela 4.19 também apresenta a comparação entre os resultados obtidos teoricamente com o experimental, porém, os resultados teóricos foram obtidos utilizando os

conjuntos de constantes que geraram o valor convergido de ϕ (μ e λ). O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Observa-se que apenas a estimativa inicial 3 resultou em um erro pequeno, com resultados comparáveis aos obtidos com as estimativas iniciais 2 e 3 da Tabela 4.18. Nota-se que somente a estimativa inicial 3 resultou em um erro absoluto menor do que aqueles obtidos através das constantes oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.4).

4.3.2.2 Resultados obtidos com $N = 5$

Observa-se pelo gráfico apresentado na Figura 4.18, que apenas a estimativa inicial 3 resultou em uma boa convergência de ϕ. Esse comportamento já era esperado em função do processo utilizado na determinação das estimativas iniciais. Da mesma forma como ocorreu para N = 10, observa-se que as estimativas iniciais 1 e 2 apresentaram valores finais de ϕ maiores que os iniciais.

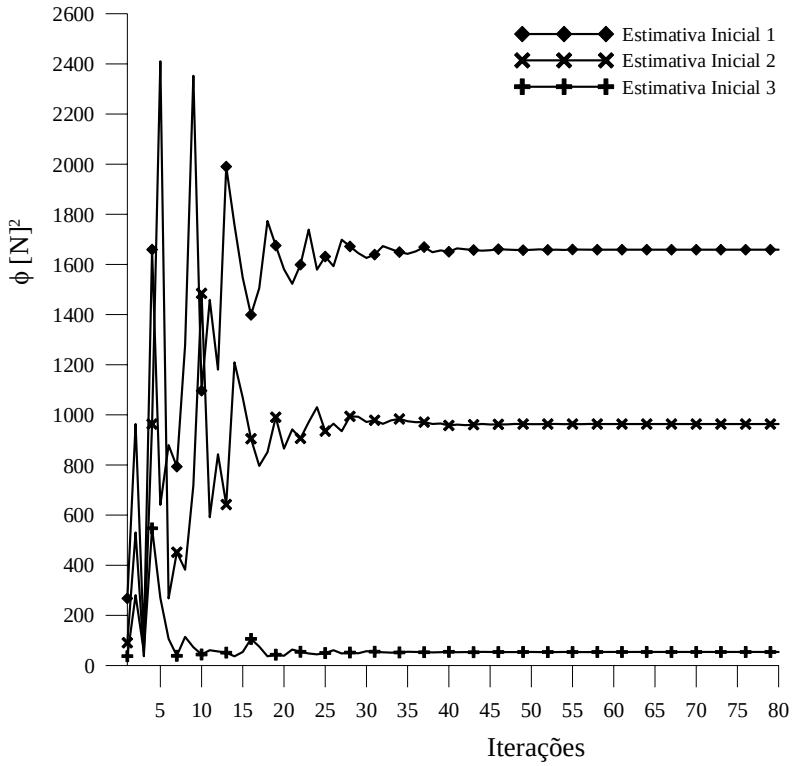


Figura 4.18 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas

Comparando as Figuras 4.17 e 4.18, observa-se um comportamento semelhante, mas com amplitudes distintas. Essa diferença ocorre porque ϕ utiliza $N = 10$ no primeiro caso e $N = 5$ no segundo.

Durante o processo de convergência foi observado que nem sempre as constantes constitutivas relacionadas ao valor convergido de ϕ, resultaram no melhor conjunto de constantes encontrado ao longo do processo iterativo. A Tabela 4.20 apresenta as constantes encontradas para cada estimativa inicial e os seus respectivos valores de ϕ e ϕ^*.

Observando a Tabela 4.20, nota-se que somente a estimativa inicial 3 apresentou um valor final de ϕ próximo do menor valor encontrado durante o processo iterativo (ϕ^*). Para os demais casos, observa-se que o valor final de ϕ se distanciou muito do menor valor encontrado ao longo do processo iterativo. Assim como ocorreu para $N = 10$, as estimativas 2 e 3 iniciaram o processo de otimização com valores iniciais de ϕ menores do que os finais.

Apesar do sucesso obtido com o critério utilizado na escolha das estimativas iniciais, é importante ressaltar que deveria ser função do otimizador identificar os pontos mínimos de ϕ e convergir automaticamente para ϕ^*.

Tabela 4.20 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 5$

$N = 5$	μ^*	λ^*	ϕ^* [N]^2	μ	λ	ϕ [N]^2
Estimativa Inicial 1	2,3	1,995	96,2	2,415	1,805	1659
Estimativa Inicial 2	2,3	2,1	37,4	2,415	1,9	963
Estimativa Inicial 3	2,2928	2,1197	36,9	2,3216	2,0935	54,0

Na Tabela 4.21, os resultados obtidos teoricamente são comparados ao experimental. Os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o menor valor de ϕ durante o processo iterativo (μ^* e λ^*). O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Observa-se que durante o processo de convergência de ϕ, exceto para a estimativa inicial 3, o otimizador encontrou constantes capazes de gerar bons resultados (μ^* e λ^*), mas não foi capaz de convergir ϕ para uma região próxima dos valores de ϕ^*. É importante ressaltar que as constantes (μ^* e λ^*) apresentaram erros pequenos e menores do que aqueles gerados pelas constantes constitutivas oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.4).

Tabela 4.21 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ^* e λ^*

		μ^* e λ^* - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
1,8	22,8	21,7	4,8	21,2	7,0	21,1	7,5
3,6	60,3	58,0	3,8	56,7	6,0	56,4	6,5
5,4	112	119	6,3	117	4,5	116	3,6
7,2	157	161	2,5	157	0	156	0,64
9	206	210	1,9	206	0	204	0,97

A Tabela 4.22 também apresenta uma comparação entre os resultados obtidos teoricamente com o experimental, porém, os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o valor convergido de ϕ (μ e λ). O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Observa-se que apenas a estimativa inicial 3 resultou em um erro pequeno, comparável aos resultados apresentados pelas estimativas iniciais 2 e 3 da Tabela 4.21. Nota-se que somente a estimativa inicial 3 resultou em um erro absoluto menor do que aqueles obtidos através das constantes oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.4).

Tabela 4.22 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ e λ

		μ e λ - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
1,8	22,8	23,9	4,8	23,3	2,2	21,4	6,1
3,6	60,3	64,0	6,1	62,3	3,3	57,3	5,0
5,4	112	132	18	128	14	118	5,4
7,2	157	178	13	173	10	159	1,3
9	206	234	14	227	10	208	0,97

4.3.2.3 Resultados obtidos com $N = 1$

Após observar o comportamento da Figura 4.19 e Tabela 4.23, verifica-se um comportamento semelhante ao encontrado nas duas últimas seções, diferenciando-se somente pela grandeza dos resultados (conseqüência da quantidade de pontos considerados na Equação

4.1). Da mesma forma, apenas a estimativa inicial 3 resultou em uma boa convergência de ϕ e as estimativas iniciais 1 e 2 apresentaram valores finais de ϕ maiores que os iniciais.

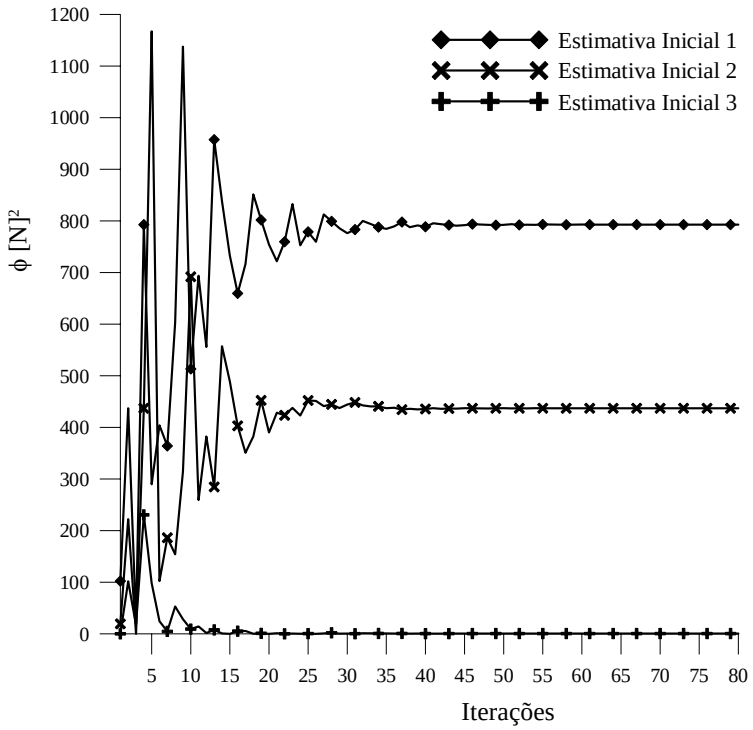


Figura 4.19 – Histórico de iterações partindo de três estimativas iniciais distintas

Tabela 4.23 – Constantes constitutivas encontradas pela abordagem proposta para $N = 1$

$N = 1$	μ^*	λ^*	ϕ^* [N]^2	μ	λ	ϕ [N]^2
Estimativa Inicial 1	2,3	1,995	21,7	2,415	1,805	793
Estimativa Inicial 2	2,3	2,1	0,0368	2,415	1,9	437
Estimativa Inicial 3	2,3036	2,1066	0,0201	2,309	2,0967	0,552

Na Tabela 4.24, os resultados obtidos teoricamente são comparados ao experimental. Os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o menor valor de ϕ durante o processo iterativo (μ^* e λ^*). O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Observa-se que durante o processo de convergência de ϕ o otimizador encontrou constantes capazes de gerar bons resultados (μ^* e λ^*), mas nem sempre foi capaz de convergir ϕ para uma região próxima dos valores de ϕ^*. É importante ressaltar que as constantes (μ^* e λ^*) apresentaram erros pequenos e menores do que aqueles gerados pelas constantes constitutivas oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.4).

Tabela 4.24 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ^* e λ^*

		μ^* e λ^* - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
9	206	210	1,9	206	0	206	0

A Tabela 4.25 também apresenta uma comparação entre os resultados obtidos teoricamente com o experimental, porém, nesse caso os resultados teóricos foram obtidos utilizando os conjuntos de constantes que geraram o valor convergido de ϕ (μ e λ). O erro absoluto entre os resultados é apresentado em porcentagem. Observa-se que apenas a estimativa inicial 3 resultou em um erro absoluto pequeno, comparável aos resultados apresentados pelas estimativas iniciais 2 e 3 da Tabela 4.24. Da mesma forma, somente a estimativa inicial 3 resultou em um erro absoluto menor do que aqueles obtidos através das constantes oriundas dos ensaios usuais (Tabela 4.4).

Tabela 4.25 – Comparação entre os resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental, utilizando μ e λ

		μ e λ - Abordagem Proposta					
Deslocamento [mm]	Experimental [N]	Estimativa Inicial 1 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 2 [N]	Erro |%|	Estimativa Inicial 3 [N]	Erro |%|
0	0	0	0	0	0	0	0
9	206	234	14	227	10	206	0

4.3.2.4 Conclusões

Analisando todos os resultados obtidos com a utilização do modelo hiperelástico de Arruda-Boyce, observa-se que a abordagem proposta gerou bons resultados quando utilizadas as constantes constitutivas μ^* e λ^*. Os resultados teóricos obtidos com estas constantes se mostraram melhores do que aqueles obtidos com as constantes oriundas dos ensaios usuais. Para Arruda-Boyce, não foi possível observar uma influência significativa nos resultados devido à variação do *N*. Para os três valores de *N* testados, observou-se que as constantes constitutivas obtidas com as estimativas iniciais 1 e 2 não sofreram nenhuma alteração e as diferenças encontradas nas constantes oriundas da estimativa inicial 3, apresentaram-se pouco

expressivas. De qualquer forma, a minimização dos desvios (Equação 4.2) em um único ponto pode acarretar erros maiores em outros pontos da curva que não são monitorados, devendo ser evitada.

O critério utilizado para definir as estimativas iniciais demonstrou ser capaz de fornecer ao projetista, que não tem acesso as propriedades do material, um modo de calibrar o modelo de elementos finitos através de um simples ensaio de compressão do componente.

A Figura 4.20 ilustra os melhores resultados de força × deslocamento obtidos para cada *N*, comparando-os com o resultado experimental e com a curva teórica gerada com as constantes constitutivas obtidas pelo Hyperfit (tração). Observa-se que as constantes constitutivas obtidas pela abordagem proposta geraram resultados mais próximos ao experimental, do que as constantes obtidas com o Hyperfit. Nota-se também, que as três curvas da abordagem proposta encontram-se praticamente sobrepostas na figura. A Tabela 4.26 apresenta as constantes constitutivas utilizadas na obtenção das curvas apresentadas na Figura 4.20.

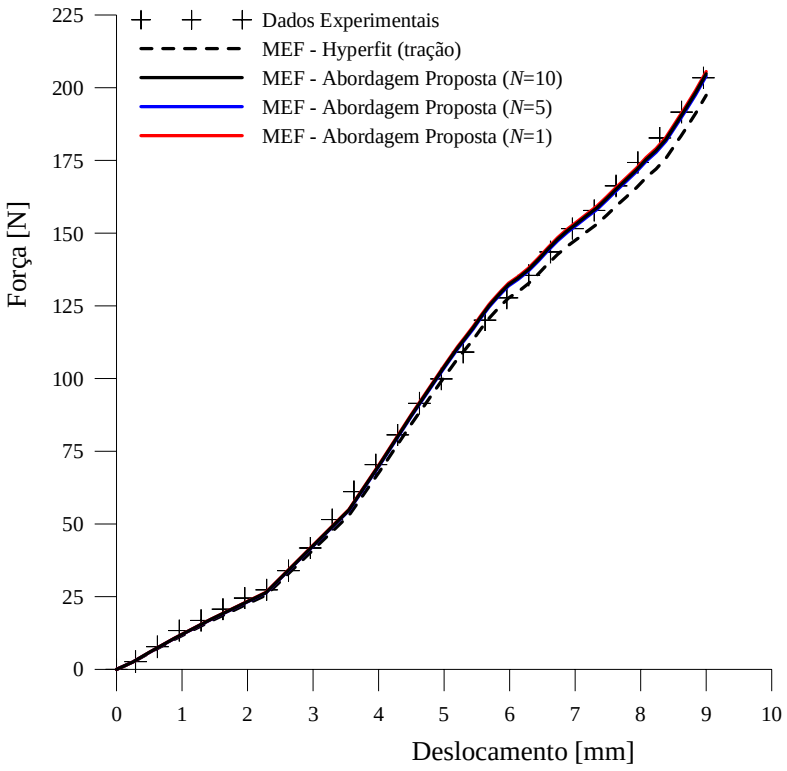


Figura 4.20 – Comparação dos melhores resultados de força × deslocamento teóricos com o experimental

Tabela 4.26 – Constantes constitutivas utilizadas na obtenção das curvas apresentadas pela Figura 4.20

Constantes Constitutivas	Hyperfit (tração)	ϕ^* ($N=10$)	ϕ^* ($N=5$)	ϕ^* ($N=1$)
μ^*	2,26569	2,2964	2,2928	2,3036
λ^*	2,24107	2,1098	2,1197	2,1066

4.3.3 Predições Teóricas

Utilizando a abordagem proposta por este trabalho foi possível obter constantes constitutivas para a calibração do modelo de elementos finitos – tanto para o modelo hiperelástico de Yeoh, quanto para o de Arruda-Boyce – apresentando erros menores do que aqueles obtidos por meio dos ensaios usuais de compressão e tração uniaxial. O próximo passo é verificar se essas constantes constitutivas, obtidas por meio de um método de aproximação de curvas e um simples ensaio de compressão do próprio componente, são realmente representativas a ponto de substituírem as constantes obtidas utilizando os dados dos ensaios de tração e compressão.

Conforme citado no Capítulo 3, quando o projetista dispõe dos resultados de um único ensaio, um modo de analisar a qualidade das respectivas constantes constitutivas obtidas consiste em utilizá-las nas equações de tensões nominais do modelo hiperelástico, de forma a predizer as curvas teóricas para os demais ensaios e verificar se o conjunto de curvas obtidas apresenta um comportamento coerente. Em geral, para os elastômeros isotrópicos espera-se um comportamento semelhante ao ilustrado pela Figura 3.6.

Para gerar as predições teóricas dos ensaios de tração uniaxial, cisalhamento puro e tração biaxial, as constantes constitutivas obtidas pela abordagem proposta foram inseridas nas Equações 3.20, 3.22 e 3.25 (para o modelo de Yeoh) e Equações 3.27, 3.28 e 3.29 (para o modelo de Arruda-Boyce). As constantes constitutivas obtidas pelo *software* Hyperfit – alimentado com os dados do ensaio de tração uniaxial – foram inseridas nessas mesmas equações para gerar um conjunto de curvas usadas para comparação.

Na Figura 4.21, é possível verificar os resultados obtidos para Yeoh. Já na Figura 4.22, os resultados obtidos para Arruda-Boyce. Observa-se que para ambos os modelos, as curvas teóricas obtidas através da abordagem proposta apresentaram a mesma sequência das curvas ilustradas pela Figura 3.6, ou seja, a curva do cisalhamento puro ficou acima da curva de tração uniaxial e a curva de tração biaxial ficou acima das demais. Pontos de rigidez nula ou

excessiva não foram detectados e as curvas obtidas pela abordagem proposta apresentaram relativa proximidade em relação as curvas utilizadas como padrão de comparação. Com base no que foi exposto, conclui-se que as constantes constitutivas obtidas pela abordagem proposta foram capazes de gerar resultados válidos.

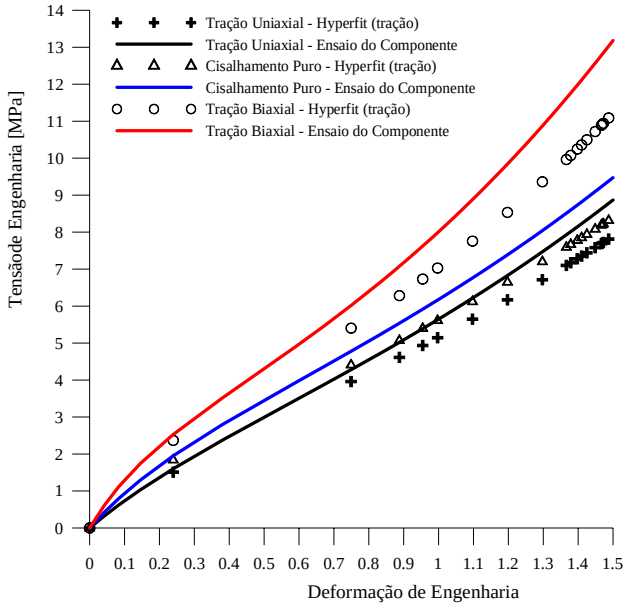


Figura 4.21 – Predições teóricas de ensaios usuais, utilizando as constantes constitutivas obtidas por meio do ensaio de tração e da abordagem proposta (Yeoh)

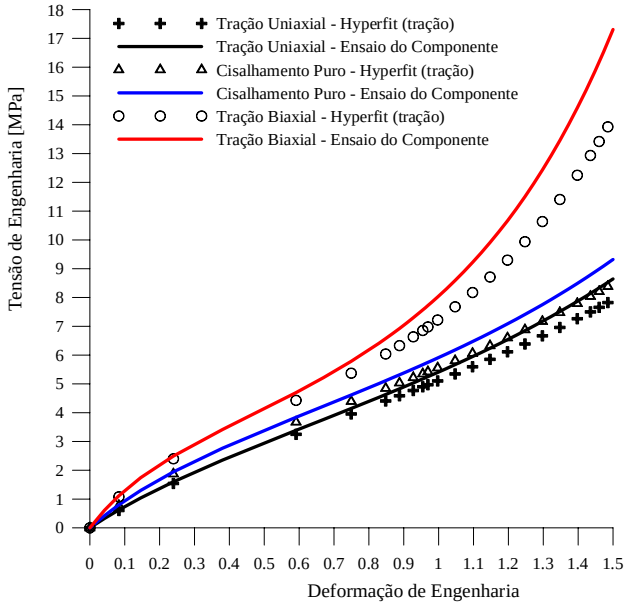


Figura 4.22 – Predições teóricas de ensaios usuais, utilizando as constantes constitutivas obtidas por meio do ensaio de tração e da abordagem proposta (Arruda-Boyce)

5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou essencialmente uma abordagem para estimação dos parâmetros constitutivos de componentes elastoméricos onde o componente manufaturado é empregado para realização dos ensaios, em lugar dos ensaios usuais. Tal procedimento não é comum, mas encontra aplicação nas situações onde se dispõe apenas dos componentes, isto é, a confecção de corpos de prova como previstos em normas não é possível. Evidentemente, o trabalho encontra paralelo com outras técnicas de estimação de constantes constitutivas como métodos de indentação e métodos óticos (DIC – *digital image correlation*), onde também pode se empregar o próprio componente.

Tendo em vista que os métodos baseados em indentação de uma amostra ainda produzem resultados muito variáveis para elastômeros e que os métodos DIC, em alguns casos, ainda implicam em um alto custo computacional, o presente trabalho propõe uma resposta ao questionamento da possibilidade de se empregar o próprio componente e um método de estimação de parâmetros para se obter as constantes constitutivas do material, com resultados confiáveis.

Analisando os resultados obtidos pela abordagem proposta, pode-se afirmar que caso o projetista não disponha de matéria prima para a realização dos ensaios usuais necessários para a obtenção das constantes constitutivas, é possível obter-se boas constantes capazes de representar com fidelidade o comportamento do material ao longo do processo de deformação, utilizando para isso, somente o próprio componente em estudo e uma abordagem igual ou semelhante à sugerida por este trabalho. Embora essa pareça uma conclusão óbvia, deve-se ressaltar que os ensaios de tração e compressão uniaxial, cisalhamento e tração biaxial são particularmente adaptados para esta tarefa por excitarem modos de deformação distintos. Se estes não são disponíveis, o ensaio do próprio componente não garante, em princípio, que todos os modos de deformação importantes serão excitados, o que resultaria em constantes constitutivas incorretas. Portanto, quaisquer abordagens derivadas da aqui apresentada devem incluir um planejamento adequado do ensaio do componente, ainda que este não corresponda ao modo predominante do mesmo durante operação.

Se esta premissa não for garantida, os resultados ainda serão úteis, mas válidos somente para o caso estudado, visto que o método de aproximação de curvas leva em consideração o processo de deformação do componente – que está diretamente relacionado ao *design* da peça. Dessa forma, mesmo que se pretenda utilizar essas mesmas constantes em um

componente semelhante, cuja matéria prima seja a mesma do componente original, os resultados obtidos podem conter erros não conhecidos. Recomenda-se que as alterações no *design* sejam acompanhadas de uma nova aplicação da abordagem proposta. Outra alternativa seria recorrer à busca por resultados generalizados do comportamento do material, obtendo corpos de prova e realizando os ensaios usuais.

Com base no que foi visto durante o desenvolvimento deste trabalho, percebe-se que o otimizador empregado na estimação de parâmetros apresentou dificuldades em encontrar mínimos globais da função custo. De qualquer forma, mesmo encontrando mínimos locais para todos os casos testados por este trabalho, o otimizador se mostrou capaz de encontrar constantes constitutivas melhores do que as fornecidas pelos ensaios usuais – com corpos de prova. Concluiu-se, portanto, que a estimativa inicial das constantes exerce uma grande influência sobre o resultado da convergência.

Os dois modelos hiperelásticos utilizados no modelo de elementos finitos apresentaram bons resultados (conforme pode-se verificar nas Figuras 4.14 e 4.20). Observa-se que as pequenas variações obtidas nos resultados, provavelmente são decorrentes da utilização de diferentes estimativas iniciais e erros experimentais.

Por outro lado, os resultados obtidos através da abordagem proposta se mostraram melhores do que os obtidos por meio dos ensaios usuais, quando se ajusta as constantes para um único ensaio. Isto era esperado, já que a geometria e condições de contorno mais complexas do componente provocam modos de deformação mais complexos. Em teoria, constantes obtidas através de um ajuste com dados experimentais mais completos devem prevalecer. Mas é relevante lembrar que, se o componente em operação sabidamente é submetido a um tipo de deformação preferencial, e este puder ser reproduzido dos ensaios usuais (mais esforços de tração do que compressão, por exemplo), a obtenção de constantes constitutivas através do ensaio de tração resultaria em uma calibração mais confiável. No entanto, essas constantes teriam validade associada ao componente e seu emprego, e não ao material.

Conclui-se portanto que, mesmo considerando diversas hipóteses simplificativas durante o modelamento matemático e desconsiderando a existência de alguns efeitos dissipativos, é possível utilizar o ensaio da própria peça para caracterizar um material hiperelástico, com resultados comparáveis aos que seriam obtidos com os ensaios típicos para esta aplicação.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

O presente trabalho apresenta uma série de limitações e aspectos que não foram explorados. Como sugestões para continuidade deste, sugere-se:

- Testar outros otimizadores, ou até mesmo, desenvolver algum que seja capaz de encontrar os mínimos globais e que não apresente resultados distintos para diferentes estimativas iniciais, uma vez que, embora o otimizador utilizado neste trabalho tenha encontrado conjuntos de constantes constitutivas melhores do que os fornecidos por ensaios usuais com corpos de prova, verificou-se que o mesmo não foi capaz de encontrar os mínimos globais da função custo e que a estimativa inicial das constantes exerce uma grande influência sobre o resultado da convergência.
- Testar a abordagem proposta utilizando outros modelos hiperelásticos conhecidos, a fim de verificar se os bons resultados obtidos para Arruda Boyce e Yeoh, serão reproduzidos.
- Repetir os casos testados por este trabalho utilizando os métodos de estimação de constantes constitutivas baseados em indentação e DIC, de forma a comparar os resultados obtidos por cada um dos métodos em relação aos obtidos pela abordagem proposta.
- Uma vez que o presente trabalho propõe uma resposta ao questionamento da possibilidade de se empregar o próprio componente e um método de estimação de parâmetros para se obter as constantes constitutivas do material, com resultados confiáveis, seria interessante avaliar a capacidade da abordagem proposta em componentes com diferentes *designs* e condições de operação mais complexas, buscando diferentes modos de deformação.
- Verificar a possibilidade de adequar a abordagem proposta para aplicação em situações onde os materiais apresentem efeitos de histerese ou Mullins, uma vez que no presente trabalho as constantes constitutivas foram obtidas com base nas curva de força × deslocamento resultantes somente do carregamento do componente.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS, 2009. **Abaqus Theory Manual Version 6.9**. Dassault Systèmes.

ASTM D412-06, 2006. Standard Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers – Tension. **American Society for Testing Materials**.

ASTM D575-91, 2007. Standard Test Methods for Rubber Properties in Compression. **American Society for Testing Materials**.

ATKIN, R., FOX, N., 1980. **An Introduction to the Theory of Elasticity**. Longman.

ARRUDA, E.M., BOYCE, M.C., 1993. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 41, pp. 389-412.

BITTENCOURT, E., 2000. **Tratamento de Problemas Não-Lineares na Mecânica dos Sólidos.** PPGEC, UFRGS, Porto Alegre.

BONNET, J., WOOD, R., 1997. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis.** Cambridge University Press.

BOYCE, M.C., ARRUDA, E.M., 2000. Constitutive models of rubber elasticity: a review. **Rubber Chemistry and Technology**, vol. 73, n.3, pp. 504-523.

BS 903-5, 2004. Physical Testing of Rubber – Part 5. Guide to the Application of Rubber Testing to Finite Element Analysis. **British Standard**.

COOK, R.D., MALKUS, D.S, PLESHA, M.E., 1989. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis.** 3rd ed., pp.501-541.

FINNEY, R.H., KUMAR, A., 1988. Development of material constants for nonlinear finite-element analysis. **Rubber chemistry and technology**, vol. 61, pp. 879-891.

FONSECA, J. S. O., 2002. **Mecânica dos Sólidos para a Engenharia Mecânica.** UFRGS, Porto Alegre.

GENT, A. N., 1992. Finite Element Analysis. **Engineering with Rubber: How to Design Rubber Components,** pp. 237-277.

GENT, A. N., 1996. A New Constitutive Relation for Rubber, **Rubber Chemistry and Technology,** vol.69, pp.59-61.

HOLZAPFEL, G.A., 2000. **Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering**, pp. 205-304.

HOSS, L., 2009. **Modelos Constitutivos Hiperelásticos para Elastômeros Incompressíveis: Ajuste, Comparação de Desempenho e Proposta de um Novo Modelo.** Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre.

HYPERFIT, 2010. **Manual Versão 2.0**. GMAp, UFRGS, Porto Alegre.

JUVINALL, R.C. e MARSHEK, K.M., 2003. **Fundamentals of Machine Component Design**. John Wiley & Sons.

KATO, S., SATO, N., MATSUBAYASHI, T., 1972. Some consideration on characteristics of the static friction of machine tool slideway. **Journal of Lubrication Technology**, vol. 94, pp. 234-247.

LAI, W. M, RUBIN, D., KREMPL, E., 1993. **Introduction to Continuum Mechanics.** Pergamon Press.

MALVER, L.E., 1969. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.** Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall.

MARCZAK, R. J., GHELLER, J.J., HOSS, L., 2006. **Caracterização de Elastômeros para Simulação Numérica.** Centro Tecnológico de Polímeros SENAI, São Leopoldo.

MATLAB, 2005. **Matlab Help Files (version 7.1.0.246 R14)**.

MULLINS, L., 1969. Softening of Rubber by Deformation. **Rubber Chemistry and Technology**, vol.42, pp.339-362.

NELDER, J. A., MEAD, R., 1965. A Simplex Method for Function Minimization. **Computer Journal**, vol.7, pp.308-313.

OGDEN, R W., SACCOMANDI, G., SGURA, I., 2004. Fitting hyperelastic models to experimental data. **Computational Mechanics**, vol.34, number 6, pp.484-502.

YEOH, O.H., 1993. "Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber". **Rubber Chemistry and Technology**, vol.66, pp.754-771.

APÊNDICE A

Tabela A.1 – Dados experimentais do ensaio de tração uniaxial

Ensaio de Tração							
Tensão [MPa]	**Deformação**	**Tensão [MPa]**	**Deformação**	**Tensão [MPa]**	**Deformação**	**Tensão [MPa]**	**Deformação**
0,00	0,000	8,01E-01	8,061E-02	1,44E+00	2,274E-01	2,04E+00	3,746E-01
6,75E-02	1,849E-03	8,14E-01	8,246E-02	1,45E+00	2,311E-01	2,06E+00	3,753E-01
7,86E-02	3,451E-03	8,29E-01	8,357E-02	1,46E+00	2,310E-01	2,07E+00	3,800E-01
8,96E-02	6,533E-03	8,45E-01	8,628E-02	1,48E+00	2,346E-01	2,08E+00	3,847E-01
9,72E-02	7,765E-03	8,59E-01	8,924E-02	1,49E+00	2,384E-01	2,10E+00	3,832E-01
1,04E-01	7,395E-03	8,73E-01	9,084E-02	1,50E+00	2,384E-01	2,12E+00	3,829E-01
1,15E-01	7,026E-03	8,86E-01	9,367E-02	1,51E+00	2,422E-01	2,13E+00	3,873E-01
1,24E-01	1,171E-02	9,00E-01	9,688E-02	1,52E+00	2,454E-01	2,14E+00	3,900E-01
1,35E-01	8,381E-03	9,10E-01	9,947E-02	1,53E+00	2,466E-01	2,16E+00	3,920E-01
1,48E-01	8,874E-03	9,24E-01	1,021E-01	1,54E+00	2,517E-01	2,17E+00	3,937E-01
1,61E-01	9,121E-03	9,37E-01	1,058E-01	1,55E+00	2,576E-01	2,19E+00	3,965E-01
1,73E-01	8,381E-03	9,48E-01	1,090E-01	1,57E+00	2,615E-01	2,20E+00	4,035E-01
1,88E-01	7,765E-03	9,62E-01	1,107E-01	1,57E+00	2,681E-01	2,22E+00	4,088E-01
2,00E-01	8,381E-03	9,71E-01	1,152E-01	1,58E+00	2,737E-01	2,23E+00	4,074E-01
2,13E-01	5,547E-03	9,81E-01	1,188E-01	1,60E+00	2,787E-01	2,25E+00	4,066E-01
2,28E-01	5,300E-03	9,93E-01	1,226E-01	1,61E+00	2,808E-01	2,26E+00	4,090E-01
2,43E-01	9,244E-03	1,00E+00	1,253E-01	1,62E+00	2,808E-01	2,28E+00	4,149E-01
2,57E-01	1,035E-02	1,01E+00	1,274E-01	1,63E+00	2,824E-01	2,29E+00	4,192E-01
2,73E-01	1,171E-02	1,02E+00	1,288E-01	1,64E+00	2,873E-01	2,30E+00	4,197E-01
2,87E-01	1,454E-02	1,04E+00	1,308E-01	1,65E+00	2,893E-01	2,32E+00	4,162E-01
3,02E-01	1,528E-02	1,05E+00	1,330E-01	1,66E+00	2,869E-01	2,33E+00	4,208E-01
3,17E-01	1,676E-02	1,07E+00	1,356E-01	1,67E+00	2,927E-01	2,36E+00	4,221E-01
3,33E-01	1,910E-02	1,08E+00	1,384E-01	1,69E+00	2,948E-01	2,37E+00	4,260E-01
3,49E-01	1,849E-02	1,09E+00	1,404E-01	1,70E+00	2,977E-01	2,39E+00	4,309E-01
3,64E-01	2,231E-02	1,10E+00	1,440E-01	1,70E+00	3,000E-01	2,41E+00	4,323E-01
3,75E-01	2,403E-02	1,11E+00	1,483E-01	1,71E+00	3,038E-01	2,43E+00	4,347E-01
3,88E-01	2,453E-02	1,12E+00	1,521E-01	1,72E+00	3,069E-01	2,45E+00	4,403E-01
4,07E-01	2,798E-02	1,14E+00	1,532E-01	1,74E+00	3,099E-01	2,47E+00	4,427E-01
4,20E-01	2,995E-02	1,15E+00	1,559E-01	1,75E+00	3,121E-01	2,49E+00	4,469E-01
4,34E-01	3,291E-02	1,16E+00	1,591E-01	1,76E+00	3,153E-01	2,51E+00	4,517E-01
4,47E-01	3,870E-02	1,17E+00	1,622E-01	1,77E+00	3,150E-01	2,53E+00	4,557E-01
4,63E-01	4,302E-02	1,18E+00	1,666E-01	1,78E+00	3,170E-01	2,55E+00	4,594E-01
4,78E-01	4,918E-02	1,19E+00	1,711E-01	1,79E+00	3,171E-01	2,57E+00	4,642E-01
4,93E-01	5,362E-02	1,21E+00	1,729E-01	1,80E+00	3,189E-01	2,59E+00	4,683E-01
5,10E-01	5,485E-02	1,22E+00	1,710E-01	1,82E+00	3,186E-01	2,61E+00	4,729E-01
5,25E-01	5,867E-02	1,23E+00	1,714E-01	1,83E+00	3,274E-01	2,63E+00	4,776E-01
5,36E-01	5,805E-02	1,24E+00	1,729E-01	1,84E+00	3,309E-01	2,65E+00	4,818E-01
5,51E-01	5,744E-02	1,25E+00	1,753E-01	1,85E+00	3,309E-01	2,67E+00	4,867E-01
5,62E-01	5,509E-02	1,27E+00	1,801E-01	1,86E+00	3,306E-01	2,69E+00	4,911E-01
5,77E-01	5,411E-02	1,28E+00	1,816E-01	1,87E+00	3,375E-01	2,71E+00	4,954E-01
5,95E-01	5,460E-02	1,29E+00	1,834E-01	1,89E+00	3,423E-01	2,73E+00	5,000E-01
6,12E-01	5,867E-02	1,30E+00	1,902E-01	1,90E+00	3,441E-01	2,75E+00	5,051E-01
6,30E-01	6,298E-02	1,32E+00	1,922E-01	1,91E+00	3,481E-01	2,78E+00	5,095E-01
6,43E-01	6,471E-02	1,33E+00	1,956E-01	1,92E+00	3,520E-01	2,80E+00	5,145E-01
6,56E-01	6,434E-02	1,34E+00	1,962E-01	1,93E+00	3,531E-01	2,82E+00	5,205E-01
6,73E-01	6,533E-02	1,35E+00	2,016E-01	1,94E+00	3,508E-01	2,84E+00	5,248E-01
6,88E-01	6,742E-02	1,36E+00	2,084E-01	1,95E+00	3,541E-01	2,86E+00	5,295E-01
7,04E-01	6,927E-02	1,37E+00	2,129E-01	1,96E+00	3,605E-01	2,88E+00	5,341E-01
7,22E-01	7,211E-02	1,39E+00	2,159E-01	1,98E+00	3,620E-01	2,90E+00	5,384E-01
7,39E-01	7,494E-02	1,40E+00	2,190E-01	1,99E+00	3,622E-01	2,92E+00	5,436E-01
7,56E-01	7,666E-02	1,41E+00	2,237E-01	2,01E+00	3,663E-01	2,94E+00	5,479E-01
7,69E-01	7,630E-02	1,42E+00	2,260E-01	2,02E+00	3,693E-01	2,96E+00	5,515E-01
7,85E-01	7,728E-02	1,43E+00	2,256E-01	2,03E+00	3,695E-01	2,99E+00	5,559E-01

Tabela A.1 – (Continuação) Dados experimentais do ensaio de tração uniaxial

Ensaio de Tração (Continuação)							
Tensão [MPa]	**Deformação**	**Tensão [MPa]**	**Deformação**	**Tensão [MPa]**	**Deformação**	**Tensão [MPa]**	**Deformação**
3,00E+00	5,598E-01	4,48E+00	8,464E-01	6,71E+00	1,278E+00	9,17E+00	1,980E+00
3,03E+00	5,635E-01	4,51E+00	8,549E-01	6,76E+00	1,287E+00	9,20E+00	1,995E+00
3,05E+00	5,685E-01	4,53E+00	8,617E-01	6,81E+00	1,298E+00	9,24E+00	2,012E+00
3,07E+00	5,736E-01	4,57E+00	8,685E-01	6,86E+00	1,308E+00	9,27E+00	2,028E+00
3,09E+00	5,778E-01	4,59E+00	8,809E-01	6,91E+00	1,320E+00	9,30E+00	2,044E+00
3,11E+00	5,821E-01	4,62E+00	8,794E-01	6,96E+00	1,330E+00	9,34E+00	2,061E+00
3,13E+00	5,858E-01	4,65E+00	8,856E-01	7,01E+00	1,341E+00	9,37E+00	2,078E+00
3,15E+00	5,898E-01	4,69E+00	8,925E-01	7,07E+00	1,352E+00	9,41E+00	2,094E+00
3,18E+00	5,945E-01	4,73E+00	8,968E-01	7,12E+00	1,363E+00	9,45E+00	2,112E+00
3,20E+00	5,991E-01	4,76E+00	9,026E-01	7,17E+00	1,374E+00	9,48E+00	2,129E+00
3,22E+00	6,046E-01	4,80E+00	9,090E-01	7,22E+00	1,385E+00	9,52E+00	2,147E+00
3,25E+00	6,091E-01	4,83E+00	9,164E-01	7,27E+00	1,396E+00	9,56E+00	2,164E+00
3,27E+00	6,136E-01	4,87E+00	9,242E-01	7,32E+00	1,408E+00	9,60E+00	2,182E+00
3,29E+00	6,189E-01	4,91E+00	9,291E-01	7,37E+00	1,419E+00	9,64E+00	2,200E+00
3,31E+00	6,239E-01	4,95E+00	9,364E-01	7,42E+00	1,430E+00	9,68E+00	2,218E+00
3,34E+00	6,290E-01	4,99E+00	9,446E-01	7,47E+00	1,442E+00	9,72E+00	2,236E+00
3,37E+00	6,339E-01	5,03E+00	9,513E-01	7,52E+00	1,453E+00	9,77E+00	2,254E+00
3,39E+00	6,395E-01	5,06E+00	9,582E-01	7,57E+00	1,465E+00	9,82E+00	2,273E+00
3,42E+00	6,446E-01	5,10E+00	9,662E-01	7,63E+00	1,478E+00	9,87E+00	2,292E+00
3,45E+00	6,502E-01	5,15E+00	9,748E-01	7,68E+00	1,490E+00	9,92E+00	2,311E+00
3,47E+00	6,565E-01	5,19E+00	9,825E-01	7,73E+00	1,503E+00	9,97E+00	2,331E+00
3,51E+00	6,629E-01	5,24E+00	9,910E-01	7,78E+00	1,516E+00	1,00E+01	2,350E+00
3,53E+00	6,676E-01	5,28E+00	9,992E-01	7,84E+00	1,528E+00	1,01E+01	2,370E+00
3,57E+00	6,740E-01	5,32E+00	1,008E+00	7,88E+00	1,542E+00	1,01E+01	2,390E+00
3,60E+00	6,790E-01	5,37E+00	1,015E+00	7,93E+00	1,554E+00	1,02E+01	2,409E+00
3,63E+00	6,860E-01	5,41E+00	1,024E+00	7,98E+00	1,567E+00	1,02E+01	2,429E+00
3,66E+00	6,908E-01	5,45E+00	1,032E+00	8,03E+00	1,581E+00	1,03E+01	2,449E+00
3,68E+00	6,964E-01	5,49E+00	1,039E+00	8,08E+00	1,595E+00	1,03E+01	2,469E+00
3,71E+00	7,011E-01	5,54E+00	1,048E+00	8,13E+00	1,609E+00	1,04E+01	2,490E+00
3,74E+00	7,061E-01	5,58E+00	1,056E+00	8,18E+00	1,622E+00	1,05E+01	2,510E+00
3,77E+00	7,128E-01	5,63E+00	1,064E+00	8,23E+00	1,635E+00	1,05E+01	2,530E+00
3,80E+00	7,189E-01	5,67E+00	1,073E+00	8,28E+00	1,649E+00	1,05E+01	2,551E+00
3,83E+00	7,254E-01	5,71E+00	1,081E+00	8,31E+00	1,662E+00	1,06E+01	2,572E+00
3,85E+00	7,294E-01	5,76E+00	1,089E+00	8,36E+00	1,676E+00	1,06E+01	2,594E+00
3,88E+00	7,345E-01	5,81E+00	1,098E+00	8,41E+00	1,690E+00	1,07E+01	2,615E+00
3,91E+00	7,401E-01	5,85E+00	1,106E+00	8,46E+00	1,704E+00	1,07E+01	2,637E+00
3,94E+00	7,466E-01	5,90E+00	1,114E+00	8,51E+00	1,719E+00	1,08E+01	2,659E+00
3,98E+00	7,530E-01	5,95E+00	1,124E+00	8,55E+00	1,734E+00	1,08E+01	2,681E+00
4,01E+00	7,607E-01	5,99E+00	1,133E+00	8,59E+00	1,748E+00	1,09E+01	2,703E+00
4,04E+00	7,667E-01	6,04E+00	1,142E+00	8,63E+00	1,762E+00	1,09E+01	2,725E+00
4,06E+00	7,722E-01	6,09E+00	1,150E+00	8,68E+00	1,776E+00	1,09E+01	2,747E+00
4,10E+00	7,759E-01	6,13E+00	1,160E+00	8,72E+00	1,792E+00	1,10E+01	2,769E+00
4,13E+00	7,812E-01	6,18E+00	1,168E+00	8,76E+00	1,807E+00	1,10E+01	2,792E+00
4,16E+00	7,870E-01	6,22E+00	1,178E+00	8,81E+00	1,821E+00	1,10E+01	2,815E+00
4,19E+00	7,934E-01	6,27E+00	1,187E+00	8,84E+00	1,837E+00	1,11E+01	2,837E+00
4,23E+00	7,992E-01	6,31E+00	1,196E+00	8,88E+00	1,852E+00	1,11E+01	2,861E+00
4,26E+00	8,052E-01	6,36E+00	1,206E+00	8,92E+00	1,869E+00	1,11E+01	2,884E+00
4,29E+00	8,135E-01	6,41E+00	1,216E+00	8,96E+00	1,884E+00	1,12E+01	2,907E+00
4,32E+00	8,174E-01	6,46E+00	1,226E+00	9,00E+00	1,900E+00	1,12E+01	2,931E+00
4,35E+00	8,279E-01	6,51E+00	1,236E+00	9,04E+00	1,916E+00	1,12E+01	2,955E+00
4,38E+00	8,285E-01	6,56E+00	1,247E+00	9,07E+00	1,931E+00	1,13E+01	2,979E+00
4,41E+00	8,369E-01	6,60E+00	1,256E+00	9,10E+00	1,947E+00	1,13E+01	3,004E+00
4,44E+00	8,405E-01	6,66E+00	1,267E+00	9,14E+00	1,963E+00		

Tabela A.2 – Dados experimentais do ensaio de compressão uniaxial

Ensaio de Compressão							
Tensão [MPa]	**Deformação**	**Tensão [MPa]**	**Deformação**	**Tensão [MPa]**	**Deformação**	**Tensão [MPa]**	**Deformação**
0,00	0,000	1,90E+00	1,725E-01	5,27E+00	3,450E-01	6,20E-01	2,095E-01
1,01E-03	3,337E-03	1,94E+00	1,759E-01	5,45E+00	3,484E-01	5,95E-01	2,062E-01
7,06E-03	6,681E-03	1,97E+00	1,792E-01	5,62E+00	3,517E-01	5,75E-01	2,028E-01
1,88E-02	9,921E-03	2,02E+00	1,826E-01	5,80E+00	3,549E-01	5,60E-01	1,997E-01
4,79E-02	1,322E-02	2,05E+00	1,859E-01	6,00E+00	3,583E-01	5,34E-01	1,963E-01
9,18E-02	1,657E-02	2,09E+00	1,892E-01	6,21E+00	3,616E-01	5,13E-01	1,929E-01
1,42E-01	1,985E-02	2,12E+00	1,924E-01	5,87E+00	3,621E-01	4,95E-01	1,896E-01
1,92E-01	2,317E-02	2,16E+00	1,958E-01	5,16E+00	3,594E-01	4,75E-01	1,862E-01
2,42E-01	2,659E-02	2,20E+00	1,991E-01	4,61E+00	3,561E-01	4,58E-01	1,830E-01
2,83E-01	2,980E-02	2,24E+00	2,024E-01	4,19E+00	3,530E-01	4,32E-01	1,797E-01
3,28E-01	3,310E-02	2,29E+00	2,058E-01	3,81E+00	3,496E-01	4,10E-01	1,763E-01
3,76E-01	3,653E-02	2,33E+00	2,091E-01	3,53E+00	3,463E-01	3,93E-01	1,729E-01
4,20E-01	3,978E-02	2,37E+00	2,125E-01	3,26E+00	3,429E-01	3,78E-01	1,697E-01
4,61E-01	4,313E-02	2,41E+00	2,157E-01	3,05E+00	3,396E-01	3,59E-01	1,664E-01
5,04E-01	4,649E-02	2,45E+00	2,190E-01	2,83E+00	3,361E-01	3,42E-01	1,630E-01
5,43E-01	4,975E-02	2,50E+00	2,224E-01	2,68E+00	3,329E-01	3,26E-01	1,598E-01
5,83E-01	5,310E-02	2,54E+00	2,257E-01	2,52E+00	3,295E-01	3,04E-01	1,563E-01
6,28E-01	5,651E-02	2,58E+00	2,290E-01	2,38E+00	3,261E-01	2,93E-01	1,530E-01
6,64E-01	5,968E-02	2,63E+00	2,324E-01	2,27E+00	3,228E-01	2,74E-01	1,497E-01
7,04E-01	6,303E-02	2,68E+00	2,357E-01	2,16E+00	3,194E-01	2,63E-01	1,464E-01
7,41E-01	6,635E-02	2,72E+00	2,390E-01	2,06E+00	3,161E-01	2,49E-01	1,431E-01
7,79E-01	6,961E-02	2,76E+00	2,422E-01	1,95E+00	3,126E-01	2,40E-01	1,399E-01
8,19E-01	7,298E-02	2,82E+00	2,457E-01	1,87E+00	3,093E-01	2,26E-01	1,365E-01
8,59E-01	7,634E-02	2,87E+00	2,489E-01	1,80E+00	3,060E-01	2,17E-01	1,333E-01
8,98E-01	7,973E-02	2,92E+00	2,522E-01	1,71E+00	3,026E-01	2,04E-01	1,299E-01
9,30E-01	8,285E-02	2,97E+00	2,556E-01	1,64E+00	2,992E-01	1,95E-01	1,265E-01
9,70E-01	8,632E-02	3,02E+00	2,589E-01	1,57E+00	2,960E-01	1,83E-01	1,232E-01
1,01E+00	8,960E-02	3,08E+00	2,623E-01	1,52E+00	2,926E-01	1,72E-01	1,198E-01
1,04E+00	9,298E-02	3,14E+00	2,656E-01	1,46E+00	2,893E-01	1,65E-01	1,166E-01
1,08E+00	9,622E-02	3,19E+00	2,688E-01	1,40E+00	2,860E-01	1,57E-01	1,132E-01
1,11E+00	9,951E-02	3,24E+00	2,721E-01	1,34E+00	2,826E-01	1,41E-01	1,098E-01
1,15E+00	1,029E-01	3,31E+00	2,755E-01	1,30E+00	2,794E-01	1,38E-01	1,066E-01
1,19E+00	1,062E-01	3,38E+00	2,789E-01	1,25E+00	2,761E-01	1,27E-01	1,032E-01
1,22E+00	1,095E-01	3,44E+00	2,822E-01	1,20E+00	2,727E-01	1,20E-01	9,994E-02
1,26E+00	1,128E-01	3,49E+00	2,854E-01	1,15E+00	2,693E-01	1,15E-01	9,663E-02
1,29E+00	1,161E-01	3,58E+00	2,887E-01	1,11E+00	2,659E-01	1,05E-01	9,333E-02
1,33E+00	1,195E-01	3,65E+00	2,921E-01	1,08E+00	2,627E-01	9,85E-02	9,001E-02
1,36E+00	1,228E-01	3,71E+00	2,954E-01	1,04E+00	2,593E-01	8,74E-02	8,657E-02
1,40E+00	1,261E-01	3,79E+00	2,987E-01	1,00E+00	2,561E-01	8,29E-02	8,344E-02
1,43E+00	1,294E-01	3,86E+00	3,020E-01	9,62E-01	2,527E-01	7,35E-02	8,003E-02
1,47E+00	1,328E-01	3,94E+00	3,053E-01	9,25E-01	2,494E-01	6,54E-02	7,675E-02
1,51E+00	1,361E-01	4,04E+00	3,086E-01	8,93E-01	2,461E-01	5,80E-02	7,341E-02
1,54E+00	1,394E-01	4,13E+00	3,120E-01	8,68E-01	2,428E-01	4,96E-02	7,005E-02
1,58E+00	1,427E-01	4,22E+00	3,153E-01	8,35E-01	2,394E-01	4,43E-02	6,678E-02
1,61E+00	1,461E-01	4,31E+00	3,186E-01	8,08E-01	2,361E-01	3,73E-02	6,352E-02
1,65E+00	1,493E-01	4,41E+00	3,220E-01	7,79E-01	2,327E-01	3,01E-02	6,009E-02
1,68E+00	1,526E-01	4,52E+00	3,252E-01	7,56E-01	2,295E-01	2,15E-02	5,674E-02
1,72E+00	1,560E-01	4,62E+00	3,285E-01	7,37E-01	2,262E-01	1,86E-02	5,349E-02
1,75E+00	1,593E-01	4,75E+00	3,318E-01	7,06E-01	2,228E-01	1,25E-02	5,022E-02
1,79E+00	1,626E-01	4,87E+00	3,351E-01	6,83E-01	2,195E-01	6,08E-03	4,684E-02
1,83E+00	1,660E-01	5,01E+00	3,384E-01	6,67E-01	2,162E-01	4,54E-04	2,337E-02
1,86E+00	1,693E-01	5,14E+00	3,418E-01	6,43E-01	2,129E-01		

APÊNDICE B

Apresentação de um exemplo da rotina “otimiza_c” escrita em Matlab, contendo a função de otimização `fminsearch` [Matlab, 2005]. A função “otimiza_c” pode variar em função do modelo hiperelástico utilizado, bem como, diferentes considerações de constantes iniciais.

```
diary historico
disp('### Rotina de otimização otimiza_c.')

        %Rodando a função fminsearch
        options = optimset('Display','final','MaxFunEvals',
                  100,'MaxIter',100000);
        [C,fval] = fminsearch(@fun_erro,[1.4;0.05],options);

        disp('Monstrando "C" final e fval:')
        C
        fval

disp('FIM')
diary off
```

Estimativa Inicial

APÊNDICE C

Apresentação da sub-rotina “fun_erro” escrita em Matlab e utilizada pela rotina “otimiza_c”.

```
function F = fun_erro(C)

%Lendo as constantes do arquivo ctes.rpt
fid4=fopen('ctes.rpt','r');
s=fscanf(fid4,'%f%f');
fclose(fid4);
C10=s(1);
C20=s(2);

%Imprimindo as constantes no arquivo de entrada do Abaqus
arquivo1='Copy of abaqusMacros.py';
A=importdata(arquivo1);
arquivo2='abaqusMacros.py';
fid2 = fopen(arquivo2,'w');
i=1;
while i<=30;
    fprintf(fid2,'%s\n',A{i});
    i=i+1;
end
fprintf(fid2,'        (%g, %g, %g, %g), ))\n',C10,C20,0.0,0.0);
i=32;
while i<=50;
    fprintf(fid2,'%s\n',A{i});
    i=i+1;
end
fclose(fid2);

%%%%%%%%%%%%%%%   Rodando ABAQUS   %%%%%%%%%%%%%%%
istatus = dos('abaqus cae noGUI="abaqus.py"');

%Contando o numero de linhas do arquivo saida.rpt
fid3 = fopen('saida.rpt');
count = 0;
```

```
while ~feof(fid3)
    line = fgetl(fid3);
    if isempty(line) | strncmp(line, '%', 1)
        continue
    end
    count = count + 1;
end
nptos = count-2;

%Lendo arquivo de saida do Abaqus (saida.rpt)
forca=0.0;
desloc=0.0;
file='saida.rpt';
fid=fopen(file,'r');
B=textscan(fid,'%f%f',nptos,'HeaderLines',4);
desloc=B{1,1};
forca=B{1,2};
fclose(fid);

%Interpolando pontos do arquivo saida.rpt, para ter os mesmos pontos de
%comparação com o arquivo experimental.rpt
desloc1 = [0.0; 1.8; 3.6; 5.4; 7.2; 9.0];
forca1 = interp1(desloc,forca,desloc1);

%Lendo os pontos do ensaio experimental no arquivo experimental.rpt
file2='experimental.rpt';
fid1=fopen(file2,'r');
B2=textscan(fid1,'%f%f',10,'HeaderLines',4);
desloc2=B2{1,1};
forca2=B2{1,2};
fclose(fid1);

%Calculando a Função Custo (Teórico - Experimental)^2
F = 0.0;
for i=1:6
    F = F + (forca1(i) - forca2(i))^2;
end

%Escrevendo as novas constantes no arquivo ctes.rpt
C10=C(1);
```

```
C20=C(2);
fid5 = fopen('ctes.rpt','w');
fprintf(fid5,'%g   %g \n',C10,C20);
fclose(fid5);

disp('### Terminou fun_erro.');
```