

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**PROJETO SIMULTÂNEO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E
CONTROLE PARA REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES UTILIZANDO
MATERIAL PIEZELÉTRICO**

por

Otávio Augusto Alves da Silveira

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Abril de 2012

**PROJETO SIMULTÂNEO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E
CONTROLE PARA REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES UTILIZANDO
MATERIAL PIEZELÉTRICO**

por

Otávio Augusto Alves da Silveira
Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva (USP - São Paulo - Brasil)

Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso (UDESC - Joinville - Brasil)

Prof. Dr. Rogério José Marczak (PROMEC/UFRGS - Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 20 de abril de 2012

*Aos meus companheiros:
André Silveira, Christiano Todt,
Luciano Preza e Pedro Petracco.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço muito à minha família pelo apoio em todos os momentos da minha vida e, de forma especial, aos meus pais Moacir e Neiva. Aos meus avôs e avós, tios e tias, primos e primas.

Aos meus companheiros e amigos da banda Cartolas, fãs, roadies (de forma especial, à Aleksander Appel), técnicos, produtores e a todos que, de alguma forma, fizeram parte dessa história. Obrigado por todos os momentos que passamos juntos.

Agradeço aos meus amigos de sempre, Dé, Nil, Faleiro, Medeiros, Gil, Dida e Patrick por todas as coisas que fizemos e que ainda faremos juntos. Aos amigos Diego Canabarro e Leandro Minozzo, pelo apoio nesses últimos anos e pelas discussões sobre os mais diversos assuntos. Aos amores de ontem e de hoje, agradeço por alguns dos momentos mais felizes (e alguns tristes) da minha vida.

Aos amigos de faculdade, Carlos Uhlmann, Luciano Lopes, Daniel Thomazi e Daniel Gerhardt. Aos colegas de mestrado e doutorado, aos colegas do Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp) e do futebol das quintas, em especial, ao amigo Daniel De Leon. Ao professor e orientador Jun Fonseca pela confiança e apoio, e junto desse, aos professores Ignácio Iturrioz e Rogério Marczak pela minha formação profissional e pessoal. Aos colegas de pesquisa Alexandre Molter e Valdecir Bottega. Ao professor Ilmar Ferreira Santos, aos colegas da Universidade Técnica da Dinamarca, e, de forma muito especial, ao amigo Kennedy Taveras por todo apoio durante a minha estadia na Dinamarca.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelos mais de 12 anos que estamos juntos e por tudo que me ofereceu. À CAPES pelo suporte financeiro aqui e no exterior, e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários, docentes e discentes.

Agradeço a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho consiste no desenvolvimento de uma metodologia de projeto ótimo de estruturas ativamente controladas (inteligentes), com o objetivo de suprimir as vibrações induzidas por perturbações externas. O projeto é realizado simultaneamente para a topologia estrutural e a localização de atuadores. O problema de otimização topológica é formulado para três fases materiais (dois materiais sólidos e vazio), com dois grupos de variáveis de projeto. Um material não piezolétrico elástico isotrópico forma a parte puramente estrutural, enquanto um material piezolétrico compõe a parte ativa. Uma vez que não há método eficiente para tratar as variáveis de projeto estruturais e de controle em um mesmo ambiente de otimização, este trabalho propõe uma abordagem de solução aninhada. Nesta solução, o posicionamento dos atuadores e a síntese do sistema controlador são considerados em um laço de projeto paralelo ao processo de otimização que lida com a topologia estrutural. O laço de otimização principal está relacionado às variáveis de projeto estruturais, ou seja, é calculado onde deve haver material sólido e onde deve haver espaços vazios, através de um problema de minimização de flexibilidade. A localização de atuadores é determinada por uma otimização baseada em uma lei de controle que define onde o material deve ter propriedades piezolétricas, através da maximização de uma medida de controlabilidade. Os exemplos numéricos mostram que a abordagem utilizada neste trabalho pode produzir uma topologia estrutural bem definida com uma boa colocação para os atuadores. Além disso, as topologias ótimas encontradas são capazes de melhorar o amortecimento ativo da estrutura.

Palavras-chave: projeto simultâneo; otimização topológica; controle de vibrações; piezoeletricidade.

ABSTRACT

SIMULTANEOUS DESIGN OF STRUCTURAL TOPOLOGY AND CONTROL FOR VIBRATION REDUCTION USING PIEZOELECTRIC MATERIAL

This work develops an optimal design methodology for actively controlled structures, aiming to suppress vibrations induced by external disturbances. Design is conducted simultaneously for the structural topology and actuator placement. A topology optimization problem is formulated for three material phases (two solid materials and void) with two design variables groups. A non-piezoelectric elastic isotropic material forms the structural only part of the design, while a piezoelectric material composes the active part. Since there is no efficient method to treat structural and control design variables in the same optimization framework, this work proposes a nested solution approach, where the actuator locations and controller syntheses are regarded as a parallel design to the main optimization process dealing with the structural topology. The main optimization loop designs the structural variables, i.e., it is decided where there should be solid material and where there should be voids, through a minimum compliance design problem. The actuators are placed by considering a control law optimization that defines where the material should have piezoelectric properties, through the maximization of a measure of controllability. Numerical examples show that the approach used in this paper can produce a clear structural topology with a good actuator placement. Besides, the optimal topologies can improve the active damping.

Keywords: simultaneous design; topology optimization; vibration control; piezoelectricity.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação.....	1
1.2	Síntese histórica.....	2
1.3	Apresentação da proposta.....	5
1.4	Organização da tese.....	6
2	PIEZELETRICIDADE	8
2.1	Revisão histórica.....	8
2.2	Cerâmicas piezelétricas.....	10
2.3	Relações constitutivas.....	11
2.4	Princípio variacional.....	13
2.5	Método dos elementos finitos para piezeletricidade.....	16
2.6	Condensação estática.....	18
2.6.1	Análise estática.....	20
2.6.2	Análise modal e vibrações livres.....	21
3	MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	23
3.1	Introdução ao conceito de otimização estrutural.....	23
3.2	Revisão histórica.....	25
3.3	Conceitos teóricos.....	27
3.3.1	Domínio fixo estendido.....	27
3.3.2	Modelo material.....	28
3.3.3	Método das densidades.....	29
3.4	Aspectos numéricos e complicações.....	30
3.4.1	Refinamento de malha e existência de soluções.....	30

3.4.2	Instabilidade de tabuleiro	32
3.4.3	Mínimos locais e dependência de dados	33
4	CONTROLE ATIVO DE ESTRUTURAS	34
4.1	Introdução	34
4.2	Classificação do controle	35
4.3	Controle estrutural por variáveis de estado	36
4.3.1	Modelos nodais	36
4.3.2	Modelos modais	37
4.3.3	Modelos em espaço de estados	39
4.4	Controlabilidade e observabilidade	40
4.4.1	Matrizes de controlabilidade e observabilidade	41
4.4.2	Gramianos de controlabilidade e observabilidade	42
4.5	Localização ótima de atuadores	43
4.6	Controle LQR para o caso em estudo	45
5	PROJETO SIMULTÂNEO DE OTIMIZAÇÃO PARA TOPOLOGIA ESTRUTURAL E CONTROLE PARA REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES	51
5.1	Funções objetivo e restrições	53
5.1.1	Modelo material para o caso de otimização simultânea com localização ótima de material piezelétrico	55
5.1.2	Projeto de otimização estrutural	56
5.1.3	Projeto de controle para redução de vibrações	57
5.2	Resolução dos problemas de otimização via programação linear sequencial	58
5.2.1	Programação matemática	58
5.2.2	Programação linear (LP) e Programação linear sequencial (SLP)	59
5.2.3	Critério de convergência	62
5.3	Análise de sensibilidade	63
5.3.1	Sensibilidade do modelo material	63
5.3.2	Sensibilidade da flexibilidade	63
5.3.3	Sensibilidade do Gramiano de controlabilidade	66
5.3.4	Sensibilidade de autovalores e autovetores	68

5.4	Sumário da metodologia proposta	70
6	RESULTADOS	73
6.1	Problemas acoplados	77
6.2	Modos de vibração localizados	77
6.3	Topologias ótimas	79
6.4	Convergência das funções objetivo	83
6.5	Respostas das estruturas otimizadas a uma carga impulsiva	87
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	96
7.1	Aspectos conclusivos	96
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	97
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	98
APÊNDICE A	Modos de vibração para as estruturas otimizadas	110

LISTA DE FIGURAS

1.1	Estrutura tridimensional fina	5
2.1	Reação de uma cerâmica piezolétrica a diferentes estímulos (Fonte: Moheimani e Fleming, 2006)	11
3.1	Exemplos de otimização estrutural: a) otimização paramétrica; b) otimização de forma; c) otimização topológica	24
3.2	Exemplos de estruturas de treliça obtidas por Michell	25
3.3	Representação de um domínio desconhecido contido no domínio fixo estendido	27
3.4	Topologia com instabilidade de tabuleiro	32
5.1	Fluxograma do método implementado para o projeto simultâneo	72
6.1	Viga em balanço com 1800 elementos finitos sólidos isoparamétricos ($60 \times 15 \times 2$)	74
6.2	Configurações para eletrodos potenciais. (a) 1 eletrodo, (b) 2 eletrodos, (c) 6 eletrodos e (d) 10 eletrodos independentes	76
6.3	Topologias ótimas para os casos com um (1) modo de vibração. a) Distribuição de material sólido (ρ_e), b) Distribuição de material piezolétrico (ρ_c), c) Topologias sobrepostas	80
6.4	Topologias ótimas para os casos com dois modos de vibração. a) Distribuição de material sólido (ρ_e), b) Distribuição de material piezolétrico (ρ_c), c) Topologias sobrepostas	82
6.5	Topologias ótimas para os casos com quatro modos de vibração. a) Distribuição de material sólido (ρ_e), b) Distribuição de material piezolétrico (ρ_c), c) Topologias sobrepostas	83
6.6	Convergência das funções objetivo para o Caso 1	84

6.7	Convergência das funções objetivo para o Caso 4	84
6.8	Convergência das funções objetivo para o Caso 5	85
6.9	Convergência das funções objetivo para o Caso 8	85
6.10	Convergência das funções objetivo para o Caso 9	86
6.11	Convergência das funções objetivo para o Caso 12	87
6.12	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 1	88
6.13	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 2	88
6.14	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 3	89
6.15	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 4	90
6.16	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 5	90
6.17	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 6	91
6.18	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 7	92
6.19	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 8	92
6.20	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 9	93
6.21	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 10	93
6.22	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 11	94
6.23	Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 12	95
A.1	Primeiro modo de vibração para os Casos 1, 2, 3 e 4	110
A.2	Primeiro e segundo modos de vibração para os Casos 5, 6, 7 e 8	110
A.3	Quatro primeiros modos de vibração para os Casos 9, 10, 11 e 12	111

LISTA DE TABELAS

6.1	Propriedades materiais	75
-----	------------------------------	----

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

Abreviaturas

MEF	Método dos Elementos Finitos
LP	Programação Linear
SLP	Programação Linear Sequencial
LQR	Regulador Linear Quadrático
LQG	Controlador Linear Quadrático Gaussiano
IMSC	Controle no Espaço Modal Independente

LISTA DE SÍMBOLOS

Geral

A	grandeza física qualquer
$\dot{A} = dA/dt$	primeira derivada em relação ao tempo de uma grandeza A
$\ddot{A} = d^2A/dt^2$	derivada segunda em relação ao tempo de uma grandeza A
$\mathbf{0}$	matriz de zeros
\mathbf{I}	matriz identidade
t	tempo
t_0, t_f	instantes de tempo distintos
Δt	intervalo de tempo
x, y, z	direções do sistema de coordenadas global
i, j, k, l, m	índices diversos
V	volume
δ	operador variacional
δ_{ij}	operador delta de Kronecker
∂	operador de derivação parcial

Piezeletricidade

T_{ij}	tensor de tensões mecânicas de Cauchy
S_{kl}	tensor de deformações mecânicas infinitesimais
E_k	tensor campo elétrico
D_m	tensor deslocamento elétrico
c_{ijkl}^E	tensor de constantes elásticas
e_{mkl}	tensor de constantes piezelétricas
ϵ_{mk}^S	tensor de constantes dielétricas
\mathbf{T}	vetor de tensões mecânicas de Cauchy
\mathbf{S}	vetor de deformações mecânicas infinitesimais
\mathbf{E}	vetor campo elétrico
\mathbf{D}	vetor deslocamento elétrico
$[\mathbf{c}^E]$	matriz de constantes elásticas
$[\mathbf{c}_{elas}^E]$	matriz de constantes elásticas para o material elástico isotrópico comum

$[\mathbf{c}_{pzt}^E]$	matriz de constantes elásticas para o material piezelétrico
$[\mathbf{e}]$	matriz de constantes piezelétricas
$[\boldsymbol{\epsilon}^S]$	matriz de constantes dielétricas
E e S	índices superiores para campo elétrico constante e deformação mecânica constante
γ	peso específico do meio (densidade)
ν	coeficiente de Poisson
\mathcal{L}	lagrangiano
\mathcal{W}	trabalho virtual das forças externas mecânicas e elétricas
\mathcal{K}	densidade de energia cinética
\mathcal{H}	densidade de entalpia elétrica
Ω	domínio de um corpo
Γ	superfície de um corpo
$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$	regiões da superfície de um corpo com condições de contorno distintas
\mathbf{f}_Ω	vetor de forças de corpo
\mathbf{f}_Γ	vetor de forças de superfície
\mathbf{f}_P	vetor de forças pontuais
ζ	vetor de cargas elétricas superficiais
\mathbf{q}_P	vetor de cargas elétricas concentradas

Estruturas

\mathbf{M}	matriz massa de um modelo estrutural
\mathbf{D}	matriz de amortecimento de um modelo estrutural
\mathbf{K}	matriz de rigidez de um modelo estrutural
\mathbf{f}	vetor de carregamentos externos de um modelo estrutural
\mathbf{M}_m	matriz massa modal
\mathbf{D}_m	matriz de amortecimento modal
\mathbf{K}_m	matriz de rigidez modal
\mathbf{f}_m	vetor de carregamentos externos modal
\mathbf{u}	vetor de deslocamentos (graus de liberdade mecânicos)
$\dot{\mathbf{u}}$	vetor de velocidades

$\ddot{\mathbf{u}}$	vetor de acelerações
$\bar{\mathbf{u}}$	vetor de deslocamentos prescritos
$\tilde{\mathbf{u}}$	vetor qualquer arbitrário e fixo
ϕ	vetor de potenciais elétricos (graus de liberdade elétricos)
$\bar{\phi}$	vetor de potenciais elétricos prescritos
\mathbf{f}	vetor global de forças mecânicas
\mathbf{q}	vetor global de cargas elétricas
W	flexibilidade mecânica
Ψ	matriz de modos de vibração
Ω	matriz diagonal de frequências naturais
\mathbf{Z}	matriz diagonal de amortecimentos modais
ω_i	frequência natural do i -ésimo modo de vibração
ζ_i	amortecimento relativo ao i -ésimo modo de vibração
n_m	número de modos de vibração de uma estrutura
n_d	número de graus de liberdade de um modelo estrutural nodal
m	número de modos de vibração no modelo truncado

Método dos elementos finitos para piezeletricidade

N	número total de elementos finitos em uma malha
\mathbf{u}^e	vetor de deslocamentos nodais para um elemento finito
ϕ^e	vetor de potenciais elétricos nodais para um elemento finito
\mathcal{N}_u	funções de interpolação para deslocamentos
\mathcal{N}_ϕ	funções de interpolação para potenciais elétricos
\mathcal{B}_u	derivadas das funções de interpolação para deslocamentos
\mathcal{B}_ϕ	derivadas das funções de interpolação para potenciais elétricos
\mathcal{D}	operador de derivação para funções de interpolação (6×3)
∇	operador de derivação para funções de interpolação (3×1)
\mathbf{f}^e	vetor de forças mecânicas externas para um elemento finito
\mathbf{q}^e	vetor de cargas elétricas para um elemento finito
\mathbf{M}_{uu}^e	matriz massa de um elemento finito piezelétrico
\mathbf{K}_{uu}^e	matriz de rigidez mecânica de um elemento finito piezelétrico

$\mathbf{K}_{\phi u}^e = \mathbf{K}_{u\phi}^{eT}$	matriz de acoplamento piezolétrico de um elemento finito piezolétrico
$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e$	matriz de capacitância elétrica de um elemento finito piezolétrico
\mathbf{M}_{uu}	matriz global de massa
\mathbf{K}_{uu}	matriz global de rigidez
$\mathbf{K}_{\phi u} = \mathbf{K}_{u\phi}^T$	matriz global de acoplamento piezolétrico
$\mathbf{K}_{\phi\phi}$	matriz global de capacitância elétrica
p, g, i, e	subíndices para graus de liberdade elétricos: potenciais, aterrados, internos e em eletrodos, respectivamente
\mathbf{G}_{uu}	matriz condensada de rigidez
$\mathbf{G}_{up} = \mathbf{G}_{pu}^T$	matriz condensada de acoplamento piezolétrico
\mathbf{G}_{pp}	matriz condensada de capacitância elétrica
\mathbf{T}_0	vetor de transformação para mapeamento dos graus de liberdade potenciais
\mathbf{H}_{uu}	matriz condensada e mapeada de rigidez
$\mathbf{H}_{up} = \mathbf{H}_{pu}^T$	matriz condensada e mapeada de acoplamento piezolétrico
\mathbf{H}_{pp}	matriz condensada e mapeada de capacitância elétrica

Otimização topológica

Ω	domínio fixo estendido de projeto
Ω_D	região onde há presença de material em um domínio fixo estendido Ω
Y_0	propriedade do material base
$Y(x)$	propriedade material efetiva
$\chi(x)$	função discreta que caracteriza a estrutura a ser otimizada
x	região ou ponto do domínio Ω
p	expoente de penalização no método das densidades
$p1, p2$ e $p3$	expoentes de penalização para o modelo material com três fases
$\partial A/\partial\rho$	sensibilidade da grandeza A em relação à pseudodensidade ρ
$\widehat{\partial A}/\partial\rho$	sensibilidade obtida pelo filtro de sensibilidades
\hat{H}_i	fator de peso para o filtro de sensibilidades
$\text{dist}(k, i)$	distância ente o centro do elemento k e o centro de um elemento i
r_{\min}	raio de filtragem para o filtro de sensibilidades

Sistemas lineares

$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$	conjunto de três parâmetros em espaço de estados
\mathbf{A}	matriz do sistema em espaço de estados
\mathbf{B}	matriz de entradas em espaço de estados
\mathbf{B}_u	matriz de entradas mecânicas
\mathbf{B}_ϕ	matriz de entradas elétricas
\mathbf{C}	matriz de saídas em espaço de estados
\mathbf{B}_0	matriz de entradas de um sistema de controle
\mathbf{B}_m	matriz de entradas modais
\mathbf{C}_{0d}	matriz de saídas em deslocamentos
\mathbf{C}_{md}	matriz modal de saídas em deslocamentos
\mathbf{C}_{0v}	matriz de saída em velocidades
\mathbf{C}_{mv}	matriz modal de saídas em velocidades
\mathbf{u}^c	vetor de entradas de um sistema de controle
\mathbf{u}_u^c	vetor de entradas mecânica
\mathbf{u}_ϕ^c	vetor de entradas elétricas
\mathbf{y}	vetor de saídas de um sistema de controle
r	número de saídas de um sistema de controle
s	número de entradas de um sistema de controle
\mathbf{x}	vetor de estados de um sistema
$\boldsymbol{\eta}$	vetor de coordenadas modais
$\dot{\boldsymbol{\eta}}$	vetor de velocidades modais
$\ddot{\boldsymbol{\eta}}$	vetor de acelerações modais
\mathcal{C}	matriz de controlabilidade
\mathcal{O}	matriz de observabilidade
\mathbf{W}_c	Gramiano de controlabilidade
\mathbf{W}_o	Gramiano de observabilidade
E	Operador de covariância
J	índice quadrático de um sistema LQR
\mathbf{Q}	matriz positiva semidefinida de pesos para as variáveis de estado
\mathbf{R}	matriz positiva definida de pesos para as entradas de controle

\mathbf{P}^*	solução da equação de Riccati em estado transiente
\mathbf{G}^*	matriz de ganhos para a realimentação em estado transiente
\mathbf{P}	solução da equação de Riccati em estado permanente
\mathbf{G}	matriz de ganhos para a realimentação em estado permanente

Otimização e projeto simultâneo

$f(\rho)$	função objetivo qualquer a ser minimizada
$g(\rho) \leq 0$	restrição de projeto de desigualdade
$h(\rho) = 0$	restrição de projeto de igualdade
α e β	pesos ponderados para a função estrutural e de controle
ρ	pseudodensidades ou vetor de variáveis de projeto para uma função $f(\rho)$
ρ^*	vetor de variáveis de projeto em um ponto específico
ρ_i	variável de projeto de um elemento finito i
N	número de variáveis de projeto na programação linear sequencial (SLP)
ρ_i^l	limite móvel inferior para programação linear
ρ_i^u	limite móvel superior para programação linear
μ	valor percentual para atualização dos limites móveis
R	resíduo na expansão em séries de Taylor
∇f	vetor gradiente na expansão em séries de Taylor
\mathbf{H}	matriz Hessiana na expansão em séries de Taylor
ρ_e	variável de projeto da otimização estrutural
ρ_{ei}	pseudodensidade estrutural para o i -ésimo elemento
f_e	função objetivo estrutural
g_e, h_e	restrições de projeto estruturais
N_e	número de variáveis de projeto estruturais
V_e	volume total de material sólido (piezelétrico ou não piezelétrico)
V_e^{\max}	fração de volume máxima para material sólido
ρ_c	variável de projeto da otimização do sistema de controle
ρ_{ci}	pseudodensidade do sistema de controle para o i -ésimo elemento
f_c	função objetivo do sistema de controle
g_c, h_c	restrições de projeto do sistema de controle

N_c	número de variáveis de projeto do sistema de controle
V_c	volume total de material piezelétrico
V_c^{\max}	fração de volume máxima para material piezelétrico

1. INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

A crescente demanda por estruturas mais leves e adaptáveis a aplicações importantes, tais como, aeroespacial, automobilística e robótica, evidencia a necessidade de métodos avançados de otimização estrutural e de controle. Diversos trabalhos citam a utilização de estruturas inteligentes projetadas por esses métodos. Pela distribuição de sensores e atuadores altamente integrados através de um sistema controlador, essas estruturas têm uma grande capacidade de automonitoramento e autocontrole. Desse modo, tal sistema pode detectar modos de vibração induzidos e, assim, gerar forças de controle para reduzir as vibrações estruturais. A principal aplicação para tais estruturas inteligentes se dá na indústria espacial, podendo ainda ser utilizadas em manipuladores robóticos flexíveis e veículos leves para uso em terra.

O desenvolvimento de métodos eficientes para o projeto de estruturas inteligentes é ainda um campo de pesquisa muito promissor, apesar dos grandes feitos alcançados durante as últimas duas décadas. A grande possibilidade de aplicação supracitada sustenta essas pesquisas e desenvolvimentos.

No âmbito do projeto estrutural, o método de otimização topológica contribui de forma muito eficaz no projeto de estruturas mais leves, diminuindo diversos custos na indústria aeroespacial, como os altos custos de transporte. Além disso, a diminuição de gastos com matéria prima também se torna importante por questões de sustentabilidade ambiental, tão importante atualmente.

Outro argumento amplamente utilizado no desenvolvimento de estruturas inteligentes é o fato dessas estruturas geralmente apresentarem peso reduzido e baixo amortecimento, devido ao baixo amortecimento interno dos materiais utilizados [Wang et al., 1999]. Essas características estão diretamente ligadas ao aparecimento de vibrações de grande amplitude, que são especialmente indesejadas no funcionamento de mecanismos precisos, como, por

exemplo, algumas aplicações espaciais. Assim, é de grande valia a utilização de um sistema de controle ativo constituído por atuadores e sensores conectados por um sistema em laço retroalimentado. A principal virtude desse tipo de sistema é a capacidade de reduzir a sensibilidade da saída em relação a variações nos parâmetros, e atenuar efeitos indesejados dentro da capacidade do sistema de controle. Como dito anteriormente, esse sistema de controle necessita de atuadores que gerem forças, e entre os diversos tipos de atuadores, pode-se citar as cerâmicas piezelétricas.

O fenômeno da piezeletricidade é uma forma de acoplamento eletromecânico em que alguns cristais e polímeros geram uma carga elétrica quando deformados; ou sofrem deformação mecânica sob a atuação de um campo elétrico. A utilização de cerâmicas piezelétricas como geradores de força mecânica em sistemas de controle e/ou atuadores mecânicos já é bem conhecida [Moheimani e Fleming, 2006]. De uma forma geral, nessas aplicações, utilizam-se peças de tamanho e forma padrões; ainda, em projetos de otimização topológica, essas cerâmicas podem ter a posição já pré-definida. Uma alternativa para essas restrições de projeto é utilizar uma metodologia que distribua o material piezelétrico de forma a maximizar a atuação das cerâmicas.

Os diversos argumentos expostos acima justificam a proposta deste trabalho de desenvolver uma metodologia de projeto integrado de otimização estrutural e de controle para redução de vibrações utilizando material piezelétrico otimamente distribuído.

1.2 Síntese histórica

Os campos de otimização estrutural e controle tiveram significantes progressos durante as últimas décadas. Cada disciplina desenvolveu diversos métodos teóricos e computacionais para seus próprios propósitos. De forma geral, o projeto estrutural precede o projeto de controle, ou seja, engenheiros de estruturas definem um *layout* com a finalidade de suportar os carregamentos estáticos e dinâmicos; após isso, os engenheiros de controle definem o sistema controlador utilizando a estrutura pré-definida. Esse tipo de projeto pode ser definido como “projeto em sequência”. No campo da otimização estrutural, a otimização topológica tem se destacado como a ferramenta mais eficaz para esse tipo de projeto, onde o objetivo, em geral, é a minimização dos custos sob alguns requerimentos de resistência e/ou dinâmica ou a maximização da rigidez da estrutura, ambos pela ótima distribuição de

material. Em relação ao projeto de controle, várias teorias já foram propostas para reduzir vibrações estruturais. A mais utilizada atualmente é a teoria de controle ótimo, mas ainda podem-se citar as teorias de controle clássico e moderno [Anderson e Moore, 1990; Ogata, 2009].

Contrariando a prática comum, desde o início da década de 1990, diversos trabalhos teóricos apontam para a realização de projetos simultâneos de otimização estrutural e controle, os quais reduziriam os custos e aumentariam o desempenho em relação ao projeto em sequência.

Canfield e Meirovitch, 1994, trataram o projeto de uma estrutura e seu sistema de controle como um problema de otimização multiobjetivo. Projetos ótimos de Pareto [Haftka e Gürdal, 1992] gerados para uma viga simples demonstraram os benefícios de solucionar o problema integrado de otimização estrutural e controle. Uma função objetivo composta formada por partes estruturais e de controle foi desenvolvida por Ou e Kikuchi, 1996, a qual é extremada através do método de otimização topológica para a resposta em regime permanente. Em seguida, um algoritmo de Controle no Espaço Modal Independente, ou IMSC (*Independent Modal Space Control*), é realizado na estrutura com o intuito de reduzir a resposta transitória e, por fim, a localização ideal para atuadores, que são considerados como forças pontuais, é discutida. Wang et al., 1999, trataram as variáveis de dimensionamento estrutural e da matriz de ganhos de realimentação como variáveis de projeto independentes. Utilizando um método de otimização com objetivo principal [Shun Qingmin, 1985* *apud* Wang et al., 1999], o índice de desempenho de controle é utilizado como função objetivo principal, enquanto a massa da estrutura inteligente é restringida pela massa disponível. Além disso, restrições na parte real dos autovalores, parte imaginária dos autovalores em sistema de circuito fechado e forças de controle dos atuadores foram incluídas. Assim, de acordo com os autores, a otimização simultânea foi convertida em uma otimização multiobjetivo. Begg e Liu, [Begg e Liu, 2000; Liu e Begg, 2000] discutiram o controle ótimo, a análise de sensibilidade e a otimização integrada de uma estrutura inteligente. Algoritmos para um projeto de otimização simultâneo baseados em programação matemática sequencial e técnicas de busca guiada aleatória foram apresentados, sendo aplicados a uma otimização multidisciplinar em que ambos o *layout* estrutural e os parâmetros de controle

*Shun Qingmin, Optimization of mechanical structures, China: Harbin, 1985.

estão envolvidos. Todavia, este trabalho só analisou estruturas treliçadas. Zhu et al., 2002, investigaram a otimização simultânea em relação a topologia estrutural, localização de atuadores e parâmetros de controle de uma placa ativamente controlada. Na placa engastada com controle H_2 [Gawronski, 2004], quatro atuadores piezelétricos com forma fixa retangular foram utilizados para reduzir vibrações flexionais e torcionais. Propondo uma abordagem de solução aninhada, conseguiram tratar as variáveis estruturais e de controle separadamente. As variáveis de controle foram projetadas em um laço de otimização interno resolvendo as equações de Riccati. Raja e Narayanan, 2009, estudaram a otimização multidisciplinar de uma estrutura *tensegrity* utilizando algoritmos genéticos. Nesse tipo de estrutura a integridade é baseada em um balanço de componentes sob tração e sob compressão. Uma estratégia aninhada também foi utilizada, na qual foram consideradas as normas de controle robusto H_2 e H_∞ como funções objetivo do sistema de controle. Entre as variáveis de projeto, foram utilizados os ângulos de torção e a localização dos atuadores, os quais podem ser discretos ou contínuos. Além disso, a força gerada pelo acoplamento eletromecânico do atuador piezelétrico foi considerada na formulação.

Diversos trabalhos estudam a localização de atuadores e sensores em estruturas inteligentes. Em geral, alguns utilizam um índice de desempenho do controlador como função objetivo, enquanto outros fazem uso dos conceitos de controlabilidade e observabilidade. Recentemente, Kumar e Narayanan, 2008, consideraram a localização ótima de pares colocados sensor/atuador piezelétricos sobre vigas flexíveis utilizando um controlador baseado em um regulador linear quadrático (LQR). O índice de desempenho LQR foi utilizado como função objetivo do problema de otimização, o qual foi solucionado utilizando algoritmos genéticos. Apesar de não se tratar de um projeto de controle, Carbonari et al., 2007, estudaram o projeto de atuadores piezelétricos consistindo de uma estrutura flexível atuada por cerâmicas piezelétricas, onde tal estrutura é definida pelo método de otimização topológica. Nesse tipo de formulação de projeto, a posição da cerâmica piezelétrica é geralmente mantida fixa no domínio de projeto e apenas a parte flexível da estrutura é projetada através da distribuição de algum material não piezelétrico. No entanto, este trabalho apresentou uma formulação que permitia a distribuição simultânea de material não piezelétrico e piezelétrico no domínio de projeto para obter movimentos de atuação específicos, obtendo topologias bem definidas.

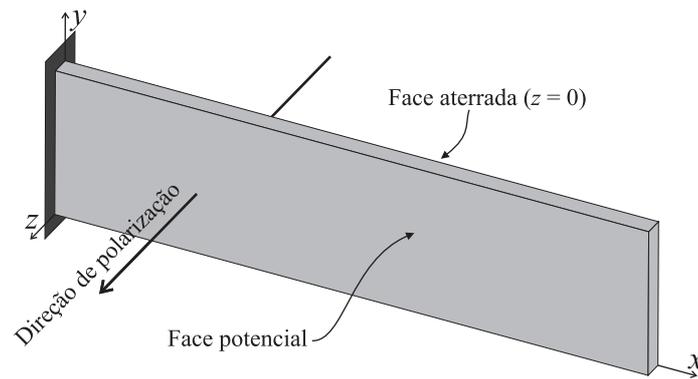


Figura 1.1 – Estrutura tridimensional fina

1.3 Apresentação da proposta

A partir do que foi apresentado na seção anterior, este trabalho tem por objetivo desenvolver uma nova metodologia de projeto simultâneo de otimização topológica estrutural e de controle de vibrações utilizando atuadores piezelétricos. Para isso, propõe a utilização de um método para definir a localização ótima de material piezelétrico.

Os trabalhos que consideram o projeto integrado de otimização estrutural e controle, em geral, trabalham com estruturas simples, como treliças, vigas ou até estruturas *tensegrity*. Diferentemente, a presente tese considera a otimização topológica de estruturas tridimensionais finas no projeto simultâneo (Figura 1.1). Além disso, propondo uma renovação do trabalho de Ou e Kikuchi, 1996, esta tese também considera a utilização de material piezelétrico na atuação do sistema de controle ao invés da definição de atuadores pontuais. Nas estruturas finas consideradas nesta tese, os atuadores cerâmicos piezelétricos do sistema de controle podem ser acionados pelas faces normais à dimensão mais fina da estrutura que, neste caso, é a direção de polarização das cerâmicas piezelétricas.

No controle ativo de vibrações de estruturas utilizando material piezelétrico, a localização de sensores e atuadores tem uma influência significativa no desempenho do sistema de controle [Kumar e Narayanan, 2008]. A utilização de material piezelétrico no controle de vibrações como atuadores ou sensores é realizada com peças de tamanho padrão (pré-definido), restringindo muito as formas de atuação ou a localização dessas na estrutura. A posição de atuadores, em muitos trabalhos, é considerada fixa no domínio de projeto e somente a parte flexível da estrutura é projetada pela distribuição de material não piezelétrico. Essa abordagem limita o conjunto de soluções possíveis. Assim, baseado no trabalho de Carbonari

et al., 2007, esta tese apresenta uma formulação que permite a distribuição de material não piezolétrico (elástico isotrópico) e piezolétrico no domínio de projeto. Essa formulação, que permite o posicionamento de atuadores, contribui para um maior poder de atuação no controle de vibrações por aumentar o conjunto de soluções.

1.4 Organização da tese

Devido ao caráter multidisciplinar desta tese, incluindo as áreas de piezeletricidade, otimização, controle e ainda subáreas dentro dessas disciplinas, decidiu-se realizar a revisão bibliográfica de forma dividida. Assim, referências clássicas e atuais de cada assunto são apresentadas ao longo dos capítulos referentes.

O capítulo 2 expõe uma revisão histórica sobre o fenômeno da piezeletricidade e o funcionamento das cerâmicas piezolétricas que são utilizadas como atuadores no sistema de controle proposto neste trabalho. A seguir, são apresentadas as relações constitutivas e o método de elementos finitos para a piezeletricidade, utilizados ao longo da tese.

O método de otimização topológica é revisto no capítulo 3 com uma introdução ao conceito de otimização estrutural e uma breve revisão histórica. Os conceitos teóricos como domínio fixo estendido e modelos materiais são revistos. Ao final do capítulo, os aspectos numéricos e complicações do método, como a não unicidade de soluções, instabilidade de tabuleiro e dependência de dados, são brevemente descritos.

O capítulo 4 aborda o controle ativo para redução de vibrações e os aspectos fundamentais da teoria de controle. Diversos modelos matemáticos para a teoria de controle são revistos, incluindo o modelo em espaço de estados. A seguir, índices de controlabilidade e observabilidade são apresentados e uma revisão bibliográfica que descreve alguns trabalhos sobre a localização ótima de atuadores é realizada. Ao final do capítulo, o modelo de controle utilizado nesta tese é descrito.

Baseado nos conceitos apresentados nos quatro primeiros capítulos, um projeto simultâneo de otimização para topologia estrutural e controle para redução de vibrações é proposto no capítulo 5. Uma vez que não é eficiente tratar, de forma igual, variáveis estruturais e de controle de forma conjunta [Zhu et al., 2002], uma abordagem aninhada com dois laços de otimização é utilizada, separando os dois problemas. Assim, as funções objetivo e restrições dos projetos de otimização estrutural e do projeto de controle de vibrações são

propostas. Por se tratar de um método iterativo, apesar dos dois problemas serem resolvidos separadamente, o processo de otimização geral é considerado simultâneo. Métodos de programação matemática e a resolução de problemas de otimização por meio da Programação linear sequencial (SLP) são descritos. Ao final do capítulo, diversos cálculos de sensibilidade utilizados na resolução dos problemas de otimização são desenvolvidos.

No capítulo 6, os resultados obtidos com a proposta discutida ao longo da tese são apresentados; e por fim, discutidos no capítulo 7, junto com algumas sugestões para a continuidade do trabalho.

2. PIEZELETRICIDADE

Este capítulo trata dos principais tópicos relacionados aos materiais piezelétricos e suas propriedades. A primeira seção apresenta uma breve revisão histórica, apontando o descobrimento do efeito piezelétrico, a invenção das cerâmicas de material piezelétrico e algumas utilizações. Importantes propriedades das cerâmicas piezelétricas são revistas e uma introdução detalhada das equações constitutivas é realizada. A seguir, o princípio variacional e o método dos elementos finitos para materiais piezelétricos são apresentados.

A principal hipótese feita neste capítulo é que transdutores feitos de material piezelétrico são dispositivos lineares cujas propriedades são governadas por um grupo de equações tensoriais. Isso é consistente com os padrões da norma *IEEE Standard on piezoelectricity* [IEEE, 1988].

Neste texto, transdutores piezelétricos são utilizados como atuadores para controlar as vibrações de estruturas. Com esta proposta, os transdutores são distribuídos topologicamente ao longo de estruturas e utilizados para aumentar o amortecimento ativo, ou seja, a capacidade de diminuir picos ressonantes e o tempo de resposta até uma posição de equilíbrio desejada. A fim de desenvolver modelos de controle capazes de adicionar um amortecimento suficiente a estrutura usando atuadores piezelétricos, é vital conhecer os modelos que descrevem a dinâmica de tal sistema com uma precisão adequada.

2.1 Revisão histórica

A primeira publicação citando a piezeletricidade se deve aos irmãos Pierre e Jacques Curie* em 1880 [*apud* Moheimani e Fleming, 2006]. Na realização de alguns experimentos com cristais como a turmalina, quartzo e o topázio, eles notaram que esses cristais apresentavam cargas elétricas superficiais quando carregados mecanicamente (efeito direto). O termo piezeletricidade, de origem grega, significa gerar eletricidade através de pressão, e foi escolhi-

*J. Curie and P. Curie. Development, par pression, de l'électricite polarise dans les cristaux hemiednes et fares inclines. *Comp. Rend.*, 91:294-297, 1880.

do para distinguir de outros efeitos como a eletricidade por contato e a piroeletricidade. No final de 1881, o efeito inverso, geração de deformação mecânica por aplicação de um campo elétrico, foi confirmado pelos irmãos Curie. Tal efeito já tinha sido previsto matematicamente, por Lippmann[†], a partir das leis fundamentais da termodinâmica pouco tempo antes [*apud* Lines e Glass, 2001].

O descobrimento do efeito piezelétrico gerou um significativo interesse dentro da comunidade científica europeia. Até a primeira guerra mundial, muitos assuntos relacionados à piezeletricidade foram estudados como, por exemplo, a troca reversível de energia elétrica e mecânica, a natureza assimétrica dos cristais piezelétricos e o uso da termodinâmica para descrever tais efeitos. A primeira grande aplicação para materiais piezelétricos foi vista na primeira guerra. Paul Langevin[‡], utilizando um mosaico de finos cristais de quartzo, construiu um detector ultrassônico de submarinos. Nessa época, se utilizavam principalmente o quartzo e o sal rochelle que possuem baixos coeficientes piezelétricos [Lines e Glass, 2001].

Após o sucesso no uso em transdutores de sonares, os cristais piezelétricos foram utilizados em muitas aplicações. Cristais de quartzo foram utilizados no desenvolvimento de estabilizadores de frequência; e transdutores ultrassônicos fabricados a partir de cristais piezelétricos foram utilizados na medição de propriedades materiais. Aplicações comuns nos dias atuais, como microfones, acelerômetros, transdutores ultrassônicos, entre outras, foram desenvolvidas e comercializadas nessa época.

Durante e depois da segunda guerra mundial, o desenvolvimento de materiais cerâmicos piezelétricos revolucionou esse campo de pesquisa. Trabalhos nos Estados Unidos, Japão e União Soviética buscavam materiais com altas constantes dielétricas para a construção de capacitores. Dessas pesquisas, surgiram os materiais cerâmicos piezelétricos, bem como métodos para a fabricação desses materiais em larga escala. Gray,[§] em 1946, descobriu que materiais ferroelétricos poderiam ser utilizados como piezelétricos se submetidos a um elevado campo elétrico, e isso acabou gerando um impulso nos estudos de projeto e

[†]G. J. Lippmann. Principe de la conservation de l'électricité ou second principe de la th'eorie des phenomenes electriques. Annales de chimie et de physique, 24:145-177, 1881.

[‡]P. Langevin Improvements relating to the emission and reception of submarine waves. French Patent No. 505,903 issued in 1918, also British Patent No. 145,691 issued in 1921.

[§]R.B.Gray, US Patent No. 2,486,560, Nov, 1949.

utilização de materiais piezelétricos. Em 1950, Jaffe[¶] descobriu o PZT (Titanato Zirconato de Chumbo) e, em 1969, Kawai [*apud* Ikeda, 1996] descobriu que materiais poliméricos podem ser utilizados como piezelétricos. A partir disso, a capacidade de construir novos dispositivos piezelétricos adaptando um material para uma aplicação específica resultou em uma série de desenvolvimentos e invenções, tais como: sonares potentes, sistemas de ignição por piezeletricidade, hidrofones, cápsulas fonocaptadoras, etc. [Moheimani e Fleming, 2006].

2.2 Cerâmicas piezelétricas

Uma cerâmica piezelétrica é uma massa de cristais, onde cada cristal é composto de um pequeno íon metálico tetravalente dentro de uma malha de íons metálicos bivalentes maiores e oxigênio [Damjanovic, 1998; Moheimani e Fleming, 2006]. Acima de uma temperatura crítica, conhecida como “temperatura de Curie”, cada cristal na cerâmica aquecida exibe uma simetria cúbica simples, sem um momento de dipolo. Abaixo da temperatura de Curie, essa mesma cerâmica apresenta simetria tetragonal e, neste caso, um momento de dipolo associado.

Dipolos próximos formam regiões de alinhamento local chamadas de domínios. Esse alinhamento gera um momento de dipolo para o domínio, e então uma polarização em rede. Entretanto, a direção de polarização entre diferentes vizinhos é aleatória, e assim, a cerâmica não apresenta uma polarização global.

No entanto, expondo a cerâmica a um forte campo elétrico contínuo (DC), os domínios em um elemento cerâmico se tornam alinhados. Esse processo, chamado de polarização, é geralmente realizado a uma temperatura logo abaixo da temperatura de Curie [Moheimani e Fleming, 2006]. Após o tratamento de polarização, devido aos domínios que não estão alinhados com o campo elétrico, os domínios quase alinhados com o campo expandem-se, e o elemento cerâmico dilata-se na direção do campo. Quando o campo elétrico é removido, a maioria dos dipolos fica presa em uma configuração de quase alinhamento e assim a cerâmica apresenta uma polarização permanente, a polarização remanescente. O elemento cerâmico também permanece alongado, no entanto, esse aumento no comprimento é muito pequeno, geralmente dentro da faixa de micrômetros.

As propriedades de uma cerâmica piezelétrica polarizada podem ser explicadas por

[¶]H. Jaffe, US Patent No. 2,708,244, May, 1955.

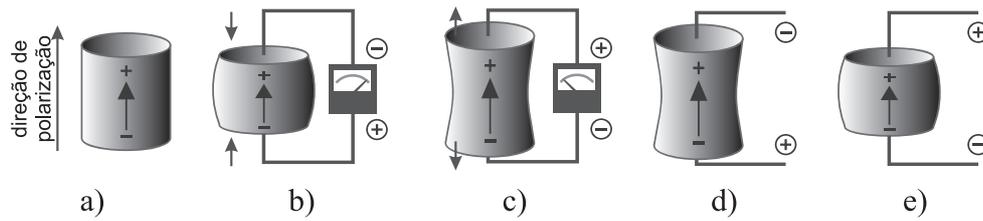


Figura 2.1 – Reação de uma cerâmica piezolétrica a diferentes estímulos
(Fonte: Moheimani e Fleming, 2006)

uma série de imagens (Figura 2.1). Quando o elemento cerâmico converte energia mecânica de compressão ou tração em energia elétrica, o dispositivo está sendo utilizado como um sensor. Assim, a compressão do material ao longo da direção de polarização gera diferença de potencial elétrico com a mesma polaridade que a tensão de polarização. Por outro lado, tração ao longo da direção de polarização gera uma diferença de potencial elétrico com sentido oposto ao da tensão de polarização. A cerâmica piezolétrica é usada como um atuador quando energia elétrica é convertida em energia mecânica. Ou seja, se uma diferença de potencial elétrico de mesma polaridade que a tensão de polarização é aplicada a um elemento cerâmico, na direção da tensão de polarização, o elemento irá alongar e seu diâmetro vai tornar-se menor. Se uma diferença de potencial elétrico de polaridade oposta à da tensão de polarização é aplicada, a cerâmica vai se tornar mais curta e mais larga. Por fim, se uma diferença de potencial elétrico alternada é aplicada ao dispositivo, o elemento irá expandir e contrair de forma cíclica, na mesma frequência da diferença de potencial aplicada.

2.3 Relações constitutivas

Nesta seção, apresentam-se as equações que descrevem as propriedades eletromecânicas dos materiais piezolétricos. A apresentação é baseada no padrão IEEE que é amplamente aceito como sendo uma boa representação das propriedades destes materiais. Como dito anteriormente, o padrão IEEE se aplica somente ao comportamento linear dos materiais piezolétricos. Esta hipótese é válida quando estes materiais estão sob campos elétricos não elevados e em baixos níveis de tensão mecânica. No entanto, podem apresentar não linearidades consideráveis se operam sob um campo elétrico de alta intensidade ou alto nível de tensão mecânica. Dessa forma, assume-se que os materiais piezolétricos utilizados nesta tese se comportam linearmente, ou seja, trabalham sob baixos níveis de campo elétrico e tensão

mecânica.

As equações constitutivas piezelétricas são baseadas na hipótese de que a deformação total no transdutor é a soma da deformação mecânica induzida por tensão mecânica e a deformação por atuação controlável causada pela aplicação de voltagem elétrica [Moheimani e Fleming, 2006].

Na formulação aqui apresentada, as propriedades tensão mecânica (T) e campo elétrico (E) são denominadas forças a serem aplicadas nas cerâmicas piezelétricas (variáveis intensivas), e a deformação mecânica (S) e o deslocamento elétrico (D) são os resultados diretos da aplicação dessas forças (variáveis extensivas). Assim, pode-se obter uma formulação mista (intensiva \times extensiva) onde as variáveis independentes são E e S e as variáveis dependentes são T e D [Ikeda, 1996]. Dessa forma, a equação tensorial de equilíbrio piezelétrico pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{ijk} E_k, \\ D_m &= e_{mkl} S_{kl} + \epsilon_{mk}^S E_k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde c_{ijkl}^E , e_{mkl} e ϵ_{mk}^S são os tensores de constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas, respectivamente. Além disso, os índices superiores E e S indicam que tais medidas devem ser tomadas sob campo elétrico constante e sob deformação mecânica constante, respectivamente.

Pode-se alterar a escolha das variáveis independentes obtendo formulações alternativas como, por exemplo, considerando T e E como variáveis independentes e intensivas, e S e D como variáveis dependentes.

Através da simetria dos tensores mecânicos é possível reescrever as equações constitutivas piezelétricas em notação de Voigt, reduzindo a notação tensorial. Além disso, assumindo a direção de polarização como o eixo 3 e o dispositivo como sendo transversalmente isotrópico – o que é válido para cerâmicas piezelétricas – muitos dos parâmetros dos tensores materiais terão valor nulo ou poderão ser expressados a partir de outros parâmetros

[Moheimani e Fleming, 2006]. Assim, pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2(c_{11}^E - c_{12}^E) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

e

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Por fim, os valores das constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas, utilizadas nesta tese, são obtidos dos trabalhos de Mecchi et al., 2004 e Rubio et al., 2009, e podem ser vistos na Tabela 6.1.

2.4 Princípio variacional

Como visto nas equações matriciais da seção anterior, as equações constitutivas piezelétricas podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= [\mathbf{c}^E]\mathbf{S} - [\mathbf{e}]^T\mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= [\mathbf{e}]\mathbf{S} + [\boldsymbol{\epsilon}^S]\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{T} e \mathbf{S} representam os vetores de tensão e deformação mecânica, \mathbf{E} e \mathbf{D} representam os vetores de campo e deslocamento elétrico, $[\mathbf{c}^E]$, $[\boldsymbol{\epsilon}^S]$ e $[\mathbf{e}]$ representam as matrizes dos coeficientes elásticos, dielétricos e de acoplamento piezelétrico, respectivamente.

A densidade de energia potencial de um material piezelétrico inclui contribuições da densidade de energia de deformação e da densidade de energia eletrostática [Tiersten, 1967].

Adaptando o Lagrangiano e o princípio dos trabalhos virtuais para incluir as contribuições elétricas no sistema eletromecânico, o princípio de Hamilton pode ser utilizado para desenvolver as equações dinâmicas de um contínuo piezolétrico [Allik e Hughes, 1995; Lerch, 1990; Tzou e Tseng, 1990]. Dessa forma:

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{L} + \mathcal{W}) dt = 0, \quad (2.5)$$

onde t_0 e t_f definem o intervalo de tempo (as variações devem zerar em $t = t_0$ e $t = t_f$), \mathcal{L} é o Lagrangiano e \mathcal{W} é o trabalho virtual das forças externas mecânicas e elétricas.

O Lagrangiano \mathcal{L} é definido pela energia disponível no meio piezolétrico [Lerch, 1990], ou seja, a diferença entre a energia cinética \mathcal{K} e da entalpia elétrica \mathcal{H} [Tiersten, 1967] (obtida do funcional de Gibbs para piezeletricidade linear)

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} (\mathcal{K} - \mathcal{H}) d\Omega. \quad (2.6)$$

De acordo com o padrão IEEE, na teoria de piezeletricidade linear, a forma de \mathcal{H} é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^S E_i E_j, \quad (2.7)$$

onde c_{ijkl}^E , ϵ_{ij}^S e e_{kij} são respectivamente as constantes elásticas, dielétricas e piezolétricas em notação tensorial. Substituindo a equação constitutiva piezolétrica na equação anterior, obtém-se, em notação matricial [Piefort, 2001]:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\mathbf{S}^T \mathbf{T} - \mathbf{E}^T \mathbf{D}]. \quad (2.8)$$

Aplicando o operador variacional à densidade de entalpia elétrica, pela regra da cadeia, obtém-se:

$$\delta \mathcal{H} = \delta \mathbf{S}^T ([\mathbf{c}^E] \mathbf{S} - [\mathbf{e}]^T \mathbf{E}) - \delta \mathbf{E}^T ([\mathbf{e}] \mathbf{S} + [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{E}). \quad (2.9)$$

A densidade de energia cinética é dada por:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \gamma \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.10)$$

onde $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor campo de velocidades e γ é a massa específica do meio (densidade). A

primeira variação da equação anterior é dada por

$$\delta\mathcal{K} = \gamma\delta\dot{\mathbf{u}}^T\dot{\mathbf{u}}. \quad (2.11)$$

Realizando uma integração por partes sobre o intervalo de tempo, obtém-se:

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta\mathcal{K} dt = \int_{t_0}^{t_f} \gamma\delta\dot{\mathbf{u}}^T\dot{\mathbf{u}} dt = \gamma\delta\mathbf{u}^T\dot{\mathbf{u}}\Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \gamma\delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}} dt, \quad (2.12)$$

no qual o primeiro termo vai a zero pois $\delta\mathbf{u}$ é igual a zero em $t = t_0$ e $t = t_f$ [Yang, 2005].

Assim, a variação da densidade de energia cinética pode ser escrita como

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta\mathcal{K} dt = - \int_{t_0}^{t_f} \gamma\delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}} dt \quad \therefore \quad \delta\mathcal{K} = -\gamma\delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.13)$$

Para esse problema, as condições de contorno essenciais são o campo de deslocamentos prescrito em Γ_3 ($\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$) e o potencial elétrico em Γ_4 ($\phi = \bar{\phi}$). O trabalho virtual devido às forças mecânicas externas e às cargas elétricas aplicadas, para uma variação arbitrária do campo de deslocamentos e do potencial elétrico - ambos compatíveis com as condições de contorno essenciais (i.e. $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Γ_3 e $\delta\phi = 0$ em Γ_4), é

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\phi \zeta d\Gamma \\ & + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\mathbf{P}} - \delta\phi \mathbf{q}_{\mathbf{P}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde \mathbf{f}_{Ω} são as forças de corpo, \mathbf{f}_{Γ} são as forças de superfície sobre Γ_1 , e $\mathbf{f}_{\mathbf{P}}$ são as forças pontuais, ϕ é o potencial elétrico, ζ a carga elétrica superficial sobre Γ_2 , e $\mathbf{q}_{\mathbf{P}}$ são as cargas elétricas concentradas. Substituindo o Lagrangiano obtido a partir das Equações 2.9 e 2.13, e o trabalho virtual dado pela Equação 2.14, no princípio de Hamilton (Equação 2.5) obtém-se

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\Omega} \left(\gamma\delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{S}^T[\mathbf{c}^E]\mathbf{S} - \delta\mathbf{S}^T[\mathbf{e}]^T\mathbf{E} \right. \\ & \left. - \delta\mathbf{E}^T[\mathbf{e}]\mathbf{S} + \delta\mathbf{E}^T[\boldsymbol{\epsilon}^S]\mathbf{E} + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\Omega} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_1} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\phi \zeta d\Gamma + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\mathbf{P}} - \delta\phi \mathbf{q}_{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.5 Método dos elementos finitos para piezeletricidade

Da mesma forma que em diversas outras formulações de elementos finitos, através de funções de interpolação \mathcal{N}_u e \mathcal{N}_ϕ , pode-se expressar o campo de deslocamentos e o potencial elétrico para cada elemento finito através dos valores nodais \mathbf{u}^e e ϕ^e , assim

$$\mathbf{u} = \mathcal{N}_u \mathbf{u}^e, \quad (2.16)$$

$$\phi = \mathcal{N}_\phi \phi^e, \quad (2.17)$$

Dessa forma, o campo de deformações mecânicas \mathbf{S} e o campo elétrico \mathbf{E} podem ser escritos em função dos deslocamentos e potenciais nodais e das derivadas das funções de interpolação \mathcal{B}_u e \mathcal{B}_ϕ , podendo-se escrever

$$\mathbf{S} = \mathcal{D} \mathcal{N}_u \mathbf{u}^e = \mathcal{B}_u \mathbf{u}^e, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathcal{N}_\phi \phi^e = -\mathcal{B}_\phi \phi^e, \quad (2.19)$$

onde \mathcal{D} e ∇ são operadores de derivação de tal forma que, para o elemento trilinear isoparamétrico utilizado nesta tese, são dados por:

$$\mathcal{B}_u = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{N}_u, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{B}_\phi = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} \mathcal{N}_\phi. \quad (2.21)$$

Assim, as Equações 2.16 a 2.21 podem ser substituídas no princípio variacional 2.15, resultando em

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = & -\delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega} \gamma \mathcal{N}_u^T \mathcal{N}_u d\Omega \ddot{\mathbf{u}}^e - \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega} \mathcal{B}_u^T [\mathbf{c}^E] \mathcal{B}_u d\Omega \mathbf{u}^e \\
& - \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega} \mathcal{B}_u^T [\mathbf{e}] \mathcal{B}_{\phi} d\Omega \phi^e - \delta \phi^{eT} \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\phi}^T [\mathbf{e}]^T \mathcal{B}_u d\Omega \mathbf{u}^e \\
& + \delta \phi^{eT} \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\phi}^T [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathcal{B}_{\phi} d\Omega \phi^e + \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega} \mathcal{N}_u^T \mathbf{f}_{\Omega} d\Omega \\
& + \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Gamma_1} \mathcal{N}_u^T \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma + \delta \mathbf{u}^{eT} \mathcal{N}_u^T \mathbf{f}_P \\
& - \delta \phi^{eT} \int_{\Gamma_2} \mathcal{N}_{\phi}^T \zeta d\Gamma - \delta \phi^{eT} \mathcal{N}_{\phi}^T \mathbf{q}_P,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

o qual deve ser verificado para qualquer variação arbitrária de deslocamentos mecânicos ou potenciais elétricos compatíveis com as condições de contorno essenciais.

Para cada elemento finito, a Equação 2.22 pode ser escrita em forma matricial como

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{uu}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{K}_{u\phi}^e \phi^e &= \mathbf{f}^e, \\
\mathbf{K}_{\phi u}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \phi^e &= \mathbf{q}^e,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

onde as matrizes massa, de rigidez, de acoplamento piezolétrico e de capacitância são dadas por

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \int_{\Omega_e} \gamma \mathcal{N}_u^T \mathcal{N}_u d\Omega, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega_e} \mathcal{B}_u^T [\mathbf{c}^E] \mathcal{B}_u d\Omega, \tag{2.25}$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \int_{\Omega_e} \mathcal{B}_u^T [\mathbf{e}]^T \mathcal{B}_{\phi} d\Omega, \tag{2.26}$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \int_{\Omega_e} \mathcal{B}_{\phi}^T [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathcal{B}_{\phi} d\Omega, \tag{2.27}$$

$$\mathbf{K}_{\phi u}^e = \mathbf{K}_{u\phi}^{eT}, \tag{2.28}$$

e as forças mecânicas externas e cargas elétricas são:

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega_e} \mathcal{N}_u^T \mathbf{f}_\Omega \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathcal{N}_u^T \mathbf{f}_\Gamma \, d\Gamma + \mathcal{N}_u^T \mathbf{f}_P, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{q}^e = - \int_{\Gamma_2} \mathcal{N}_\phi^T \zeta \, d\Gamma - \mathcal{N}_\phi^T \mathbf{q}_P, \quad (2.30)$$

Cada elemento da malha é conectado aos seus elementos vizinhos através dos nós e, assim, os deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos são contínuos de um elemento para outro. Dessa forma, o princípio de Hamilton deve ser verificado para a estrutura completa através da equação com as matrizes globais, obtidas a partir da contribuição de cada elemento finito.

2.6 Condensação estática

Seguindo o exposto na seção anterior, pode-se fazer a montagem das matrizes globais a partir da contribuição de cada elemento. Dessa forma, pode-se reescrever a equação de equilíbrio global como segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^T & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Os graus de liberdade elétricos ϕ podem ser divididos em graus de liberdade no eletrodo potencial ϕ_p , graus de liberdade no eletrodo aterrado ϕ_g e graus de liberdade elétricos internos ϕ_i . Os graus de liberdade internos não estão situados em eletrodos mas no interior da estrutura piezoeletrica. Dessa forma, a equação de movimento particionada pode ser escrita como [Becker et al., 2006]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\phi}_i \\ \ddot{\phi}_p \\ \ddot{\phi}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ui} & \mathbf{K}_{up} & \mathbf{K}_{ug} \\ \mathbf{K}_{ui}^T & \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ip} & \mathbf{K}_{ig} \\ \mathbf{K}_{up}^T & \mathbf{K}_{ip}^T & \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pg} \\ \mathbf{K}_{ug}^T & \mathbf{K}_{ig}^T & \mathbf{K}_{pg}^T & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi_i \\ \phi_p \\ \phi_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_g \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Porém, o uso de potenciais elétricos como variáveis do problema acarreta uma indeterminação devido aos valores escalados (diferença de potencial). Assim, os potenciais referentes ao eletrodo aterrado são definidos como zero, de tal forma que a quarta linha e a quarta coluna

das matrizes massa e de rigidez podem ser excluídas. Por fim, os graus de liberdade elétricos internos podem ser determinados pela seguinte equação:

$$\phi_i = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ui}^T\mathbf{u} - \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ip}\phi_p, \quad (2.33)$$

uma vez que as cargas elétricas internas sejam nulas ($\mathbf{q}_i = 0$). A partir da anulação dos graus de liberdade aterrados e da condensação dos graus de liberdade internos, pode-se reescrever a equação 2.31, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\phi}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uu} & \mathbf{G}_{up} \\ \mathbf{G}_{up}^T & \mathbf{G}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_p \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{uu} &= \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{ui}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ui}^T, \\ \mathbf{G}_{up} &= \mathbf{K}_{up} - \mathbf{K}_{ui}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ip}, \\ \mathbf{G}_{pp} &= \mathbf{K}_{pp} - \mathbf{K}_{ip}^T\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ip}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Na superfície de um eletrodo específico todos os nós j tem o mesmo potencial

$$\phi_{p,1} = \phi_{p,2} = \dots = \phi_{p,j}, \quad (2.36)$$

assim, pode-se utilizar uma matriz de transformação \mathbf{T}_0 [Becker et al., 2006] a fim de mapear os graus de liberdade elétricos na face potencial em função de um vetor com os valores de diferença de potencial elétrica nos eletrodos (ϕ_e), como:

$$\phi_p = \mathbf{T}_0\phi_e. \quad (2.37)$$

Dessa forma, pode-se reescrever a equação 2.34, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\phi}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} & \mathbf{H}_{up} \\ \mathbf{H}_{up}^T & \mathbf{H}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_e \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{uu} &= \mathbf{G}_{uu}, \\
\mathbf{H}_{up} &= \mathbf{G}_{up} \mathbf{T}_0, \\
\mathbf{H}_{pp} &= \mathbf{T}_0^T \mathbf{G}_{pp} \mathbf{T}_0, \\
\mathbf{q}_e &= \mathbf{T}_0^T \mathbf{q}_p,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

e o subscrito ‘e’ refere-se aos valores nos eletrodos potenciais.

2.6.1 Análise estática

No projeto desenvolvido nesta tese, é necessária as análises estática e modal da estrutura inteligente a ser otimizada. Com base na condensação estática apresentada acima, a análise da estrutura submetida a uma carga estática é realizada a partir da Equação 2.38. Desconsiderando os termos referentes à segunda derivada temporal, pode-se reescrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} & \mathbf{H}_{up} \\ \mathbf{H}_{up}^T & \mathbf{H}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_e \end{bmatrix}. \tag{2.40}$$

A partir desse ponto, há duas configurações possíveis. Na primeira delas, conhecida como circuito aberto ou configuração de sensor, os eletrodos estão desconectados. Entretanto, a diferença de potencial entre eletrodos depende do deslocamento da estrutura. Reescrevendo a segunda linha da Equação 2.40 para $\mathbf{q}_e = 0$, tem-se

$$\phi_e = -\mathbf{H}_{pp}^{-1} \mathbf{H}_{up}^T \mathbf{u}. \tag{2.41}$$

Por fim, substituindo a Equação 2.41 na primeira linha da Equação 2.40, obtém-se

$$(\mathbf{H}_{uu} - \mathbf{H}_{up} \mathbf{H}_{pp}^{-1} \mathbf{H}_{up}^T) \mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{2.42}$$

Na outra configuração possível, os eletrodos nas duas faces da estrutura estão aterrados, de forma que $\phi_e = \mathbf{0}$. Essa configuração é conhecida como curto circuito, e a primeira linha da Equação 2.40 pode ser simplificada para:

$$\mathbf{H}_{uu} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{2.43}$$

e, conseqüentemente, as cargas elétricas externas geradas pela deformação da estrutura são obtidas por

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{H}_{up}^T \mathbf{u}. \quad (2.44)$$

Em ambos os casos, os potenciais internos ϕ_i podem ser obtidos por meio da Equação 2.33.

2.6.2 Análise modal e vibrações livres

Da mesma forma que na análise estática, existem duas configurações possíveis para os eletrodos nas faces da estrutura com material piezolétrico em uma análise modal. As configurações de curto circuito e circuito aberto partem das mesma hipóteses, porém a equação inicial é diferente devido ao movimento harmônico. Na configuração em circuito aberto a diferença de potencial depende da dinâmica estrutural. Considerando uma excitação harmônica, com $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$ e $\phi_e = \phi_0 e^{j\omega t}$, o sistema de Equações 2.38 pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} - \Omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{H}_{up} \\ \mathbf{H}_{up}^T & \mathbf{H}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{bmatrix} e^{j\omega t}, \quad (2.45)$$

onde o subscrito '0' nas forças e cargas elétricas externas e ainda nos deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos, se refere a amplitude do movimento harmônico. A primeira linha da equação anterior pode ser escrita como

$$(\mathbf{H}_{uu} - \Omega^2 \mathbf{M}_{uu}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{H}_{up} \phi_0, \quad (2.46)$$

e considerando $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, a segunda linha da Equação 2.45 pode ser estaticamente condensada (assim como na Equação 2.41), de forma que

$$\phi_0 = -\mathbf{H}_{pp}^{-1} \mathbf{H}_{up}^T \mathbf{u}_0. \quad (2.47)$$

Substituindo a Equação 2.47 na primeira linha da Equação 2.45, obtém-se o problema generalizado de autovalores

$$(\mathbf{H}_{uu} - \mathbf{H}_{up} \mathbf{H}_{pp}^{-1} \mathbf{H}_{up}^T) \Psi = \Omega^2 \mathbf{M}_{uu} \Psi, \quad (2.48)$$

onde Ψ são os autovetores (modos de vibração) e Ω são as frequências modais correspondentes para a configuração de circuito aberto. Para a configuração com eletrodos aterrados ($\phi_0 = \mathbf{0}$), também conhecida como configuração de curto circuito, o problema generalizado de autovalores é dado por

$$\mathbf{H}_{uu} \Psi = \Omega^2 \mathbf{M}_{uu}, \quad (2.49)$$

onde, novamente, Ω são as frequências modais e Ψ os modos de vibração correspondentes, porém agora, para a configuração em curto circuito. É importante salientar mais uma vez que os potenciais internos ϕ_i podem ser obtidos por meio da Equação 2.33 para ambos os casos.

As configurações de curto circuito foram utilizadas, tanto na análise estática quanto na análise modal, para a resolução dos problemas de elementos finitos descritos nesta tese.

3. MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste capítulo serão apresentados os conceitos relacionados ao método de otimização topológica. No começo do capítulo, faz-se uma introdução aos métodos de otimização estrutural e uma breve revisão histórica. Após, os principais conceitos relacionados ao método são revistos, como domínio fixo estendido, modelos materiais e o método das densidades. Por fim, as complicações mais comuns relacionadas ao método são expostas.

3.1 Introdução ao conceito de otimização estrutural

A otimização de estruturas mecânicas busca a melhor configuração possível dentro de um espaço de soluções a fim de atender uma função objetivo específica, a exemplo da minimização da flexibilidade média com volume de material prescrito. Basicamente, existem três abordagens para a solução desse problema: a otimização paramétrica, a otimização de forma e a otimização topológica (Figura 3.1).

A otimização paramétrica consiste em assumir um domínio de projeto fixo previamente definido, como, por exemplo, uma estrutura treliçada formada por elementos de barra. Assim, um grupo de determinadas características geométricas, como as áreas das seções transversais, são utilizadas como variáveis de projeto, ou seja, os parâmetros que serão modificados com o intuito de obter a estrutura ótima. Utilizando um algoritmo de otimização geral, as áreas individuais de cada barra podem ser encontradas respeitando determinadas restrições, obtendo por fim a estrutura ótima.

A segunda abordagem consiste em definir os contornos externos e internos da estrutura em função de parâmetros que podem ser utilizados como variáveis de projeto. Uma das formas mais comuns para definir os contornos é utilizando curvas *B-splines*. Com um algoritmo de otimização, os parâmetros que definem essas curvas ou superfícies são encontrados a fim de satisfazer uma determinada função objetivo da melhor forma possível. Isso aumenta o espaço de soluções, fazendo este método mais geral que o anterior. Um problema comum na otimização de forma é a distorção da malha, que pode muitas vezes invalidar

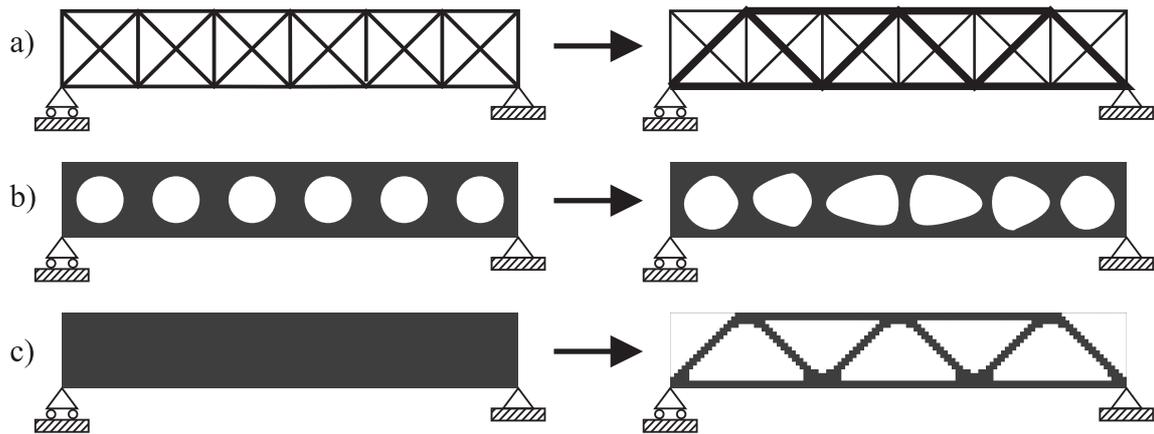


Figura 3.1 – Exemplos de otimização estrutural: a) otimização paramétrica;
b) otimização de forma; c) otimização topológica

os resultados devido a problemas de convergência da solução de elementos finitos. Alguns autores, destacando o trabalho de Salagame e Belegundu, 1995, aconselham a resolução do problema de otimização acompanhada de um processo adaptativo de malha e estimativa de erros. Uma alternativa para a resolução de problemas de otimização de forma é a utilização do método dos elementos de contorno que, em muitos casos, não necessita da discretização do domínio [Brebbia et al., 1984].

A última categoria, conhecida como otimização topológica, visa a determinação da distribuição ótima de material no domínio, permitindo a criação de furos e reforçando outros pontos da malha de elementos finitos. As variáveis de projeto estão relacionadas à distribuição de material no domínio, a qual está relacionada à malha de elementos finitos (elementos ou nós). Dessa forma, um problema típico de otimização topológica apresenta um número considerável de variáveis de projeto. O modo pelo qual se aproxima a distribuição do material no domínio pode tornar a formulação dependente da discretização [Cheng e Olhoff, 1982]. Neste tipo de otimização, o material em cada ponto do domínio fixo estendido pode alternar desde um material A (por exemplo, vazio) até um material B (por exemplo, sólido), assumindo materiais intermediários [Bendsøe e Kikuchi, 1988; Bendsøe, 1989]. Concluindo, a otimização topológica de estruturas, por envolver a determinação de diversos aspectos da topologia como número, localização e forma de furos, bem como, a conectividade do domínio, é a abordagem mais genérica.

3.2 Revisão histórica

De forma geral, os trabalhos de Maxwell e Michell são apontados como as primeiras referências na área de otimização topológica de estruturas. Maxwell*, em 1869, determinou que a melhor estrutura em um domínio infinito com uma força aplicada em um determinado ponto e sujeita a restrições de deslocamento em outros pontos seria formada por elementos submetidos somente a carregamentos uniaxiais, sendo que os elementos de barra estariam alinhados com as direções principais de tensões no domínio. Em 1904, Michell† aplicou os estudos de Maxwell no projeto de estruturas bi e tridimensionais com o menor volume de material, obtendo resultados surpreendentes com estruturas de treliças (Figura 3.2).

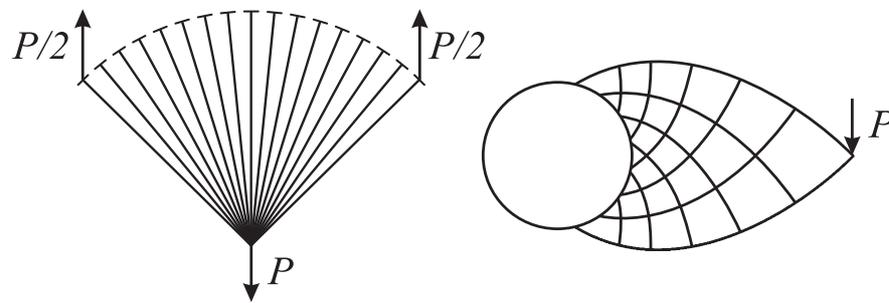


Figura 3.2 – Exemplos de estruturas de treliça obtidas por Michell

Os estudos de Maxwell e Michell ficaram praticamente esquecidos até a década de 1960 por serem considerados muito acadêmicos, sem aplicação prática. Nessa década, com o surgimento dos primeiros computadores e do método de elementos finitos, problemas práticos de otimização estrutural passaram a ser estudados usando a otimização paramétrica. Além disso, métodos de programação matemática foram desenvolvidos para a resolução de problemas lineares, como o método *simplex*. Na década seguinte, com o desenvolvimento das linguagens de programação, vários algoritmos de otimização para problemas não lineares de otimização, utilizados ainda hoje, foram implementados; bem como, alguns métodos probabilísticos e o método de otimização de forma. Na década de 1980, apareceram os primeiros softwares comerciais de otimização estrutural, e alguns softwares de elementos finitos passaram a incluir módulos de otimização no seu pacote. Ainda na década de 1980, vários

*Maxwell, J.C., Trans. Roy. Soc., Edinburgh, vol. 26, p. 01-40, 1869.

†Michell, A. The limits of economy of material in frame structures, Philosophical Magazine, vol. 8(47), pp. 589-597, 1904.

grupos de pesquisa começaram a desenvolver os primeiros passos da otimização de meios contínuos com a introdução de métodos de relaxação através da consideração de materiais compostos [Cheng, 1981; Cheng e Olhoff, 1982].

A partir desses trabalhos, Bendsøe e Kikuchi, 1988, desenvolveram um método de homogeneização aplicado para a relaxação do problema de otimização topológica de meios contínuos, dando início à popularização do método. Os conceitos de domínio fixo estendido de projeto e o de microestruturas subótimas, relacionadas à relaxação do variacional do problema de otimização topológica, permitiu obter topologias bem definidas e com menos regiões de densidade intermediária (ver também Guedes e Kikuchi, 1990 e Suzuki e Kikuchi, 1991). Hassani e Hinton, 1998a,b, apresentam uma boa revisão sobre os modelos materiais utilizados para conseguir a relaxação do variacional no problema de otimização topológica. Parametrizações mais simples como a SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*) [Bendsøe e Sigmund, 1999], são utilizadas até hoje em detrimento de parametrizações mais elaboradas.

Resumindo o método de otimização topológica nas últimas duas décadas, pode-se dizer que: Bendsøe e Kikuchi, 1988, e Suzuki e Kikuchi, 1991, implementaram o método para resolver diversos problemas de otimização estrutural, maximizando a rigidez (minimização da flexibilidade) com restrição de volume de material, considerando um carregamento único. Logo em seguida, Diaz e Bendsøe, 1992, consideraram mais de um carregamento não simultâneo. Thomsen, 1992, aplicou o método para otimizar estruturas com mais de um material. Diaz e Kikuchi, 1992, descreveram pela primeira vez o problema de otimização topológica considerando frequências naturais de ressonância, enquanto Neves et al., 1995, resolveram o problema de instabilidade estrutural (flambagem). A otimização de estruturas termoelásticas submetidas a cargas térmicas foi descrito pela primeira vez por Rodrigues e Fernandes, 1995. Min et al., 1999, resolveram o problema de otimização topológica em estruturas considerando a análise transiente.

A utilização do método de otimização topológica se expandiu para áreas não clássicas da engenharia de estruturas desde a metade da década de 1990. O trabalho de Ananthasuresh e Kota, 1995, no projeto mecanismos flexíveis, motivou várias pesquisas na mesma área [Sigmund, 1997; Larsen et al., 1997; Nishiwaki et al., 1998; Kikuchi et al., 1998; Cardoso e Fonseca, 2004]. Park, 1995, resolveu o problema de maximização da condutividade térmica

na transferência de calor. E nos últimos 10 anos a otimização topológica é utilizada nas mais diversas linhas de pesquisa como, por exemplo, o projeto de transdutores piezelétricos [Silva et al., 1998, 1999; Silva e Kikuchi, 1999], projeto de micromecanismos flexíveis com atuação térmica e eletrotérmica [Jonsmann, 1999; Sigmund, 2001a,b], projeto de atuadores flexionais piezelétricos [Silva et al., 2000; Canfield e Frecker, 2000], projeto simultâneo estrutural e de controle [Ou e Kikuchi, 1996; Zhu et al., 2002], entre outros. Para uma revisão mais completa do método de otimização topológica ver Eschenauer e Olhoff, 2001, e Bendsøe e Sigmund, 2003.

3.3 Conceitos teóricos

Alguns dos principais conceitos relacionados à otimização topológica serão estudados nesta seção como os conceitos de domínio fixo estendido e modelo material. Além disso, o modelo material baseado no método das densidades é apresentado.

3.3.1 Domínio fixo estendido

Domínio fixo estendido de projeto (Ω) é o espaço no qual o algoritmo de otimização topológica deve encontrar a estrutura ótima. Como pode ser visualizado na Figura 3.3, o domínio fixo estendido consiste em um domínio de forma fixa limitado pelos pontos de apoio da estrutura e pelos pontos de aplicação de carregamento, que contém a estrutura desconhecida.

O objetivo da otimização topológica é determinar os espaços sem material (vazios) e a conectividade da estrutura através da remoção de material no domínio fixo estendido. A

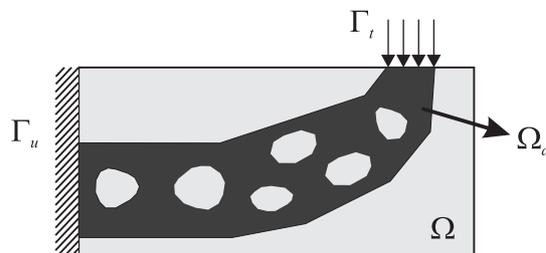


Figura 3.3 – Representação de um domínio desconhecido contido no domínio fixo estendido

obtenção da forma ótima final é influenciada pelas condições de contorno e pela quantidade de material utilizado. A grande vantagem em relação à otimização de forma é a não alteração da malha de elementos finitos do domínio durante o processo de otimização, sendo alterada somente a distribuição de material nos elementos.

3.3.2 Modelo material

O modelo material é uma equação que define a mistura em microescala de dois ou mais materiais (um deles pode ser vazio), permitindo obter propriedades intermediárias e assim interpolar da condição de um material A até um material B em cada ponto do domínio.

Para materiais isotrópicos e considerando um dos materiais como vazio (*void*), certa propriedade material efetiva (como, por exemplo, o módulo de elasticidade) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Y(x) = \chi(x)Y_0, \quad (3.1)$$

onde Y_0 é a mesma propriedade do material base a ser distribuído e $\chi(x)$ é uma função discreta que caracteriza a estrutura a ser otimizada, e é definida em cada ponto x do domínio Ω da seguinte maneira:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_D, \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_D, \end{cases} \quad (3.2)$$

sendo Ω_D a região onde há presença de material, inserida num domínio Ω .

Contudo, o problema discreto pode não possuir solução, sendo necessária uma relaxação para o problema contínuo [Bendsøe e Kikuchi, 1988]. Essa relaxação das variáveis de projeto consiste em permitir que elas assumam valores intermediários entre 0 e 1. A princípio, os estágios intermediários de materiais não têm significado físico, sendo apenas decorrentes de um recurso matemático para relaxação do problema. Com esse intuito, existem vários modelos materiais que podem ser utilizados, dos quais podemos citar o método das densidades apresentado a seguir.

3.3.3 Método das densidades

Neste método, o modelo material consiste numa lei matemática que define a mistura de material em cada ponto do domínio fixo estendido. A equação matemática define o valor das pseudodensidades (variável de projeto que varia de zero a um) em cada ponto do domínio Ω em função da propriedade efetiva do material base utilizado no projeto. Essencialmente, o método simula uma microestrutura, definindo o nível de relaxação do problema. Um modelo bastante utilizado é o já citado SIMP, que pode ser escrito da seguinte forma [Bendsøe, 1989; Bendsøe e Sigmund, 2003]:

$$\begin{aligned} c_{ijkl}(x) &= \rho(x)^p \bar{c}_{ijkl}, & p &\geq 1, \\ 0 < \rho(x) &\leq 1, & x &\in \Omega, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde a pseudodensidade ρ é uma variável de projeto, p é um expoente de penalização, \bar{c}_{ijkl} é o tensor de elasticidade do material base. No SIMP, o tensor de elasticidade do material $c_{ijkl}(x)$ em cada ponto do domínio varia com a pseudodensidade ρ , enquanto que o coeficiente de Poisson ν não depende de ρ .

Como já comentado, matematicamente, a ocorrência de valores intermediários para a variável de projeto estabelece a relaxação do problema, e permite obter um espaço de solução fechado, o que é importante para garantir a existência da solução [Bendsøe, 1989]. No entanto, a solução ótima apresentará um grande número de regiões com propriedades intermediárias denominadas de cinzas, o que não é interessante, pois dificulta a interpretação final da topologia. Dessa forma, é importante recuperar o caráter discreto da distribuição de material, o que é obtido através do expoente de penalização p . Um valor de p muito alto aproxima cada vez mais o problema contínuo do problema discreto, retornando ao problema da não existência de solução já discutido.

Finalizando, o método das densidades é de mais fácil implementação computacional do que o modelo material baseado no método de homogeneização [Bendsøe e Kikuchi, 1988], pois há uma variável de projeto por ponto do domínio, e os valores das propriedades são obtidos de forma direta.

3.4 Aspectos numéricos e complicações

Há duas questões importantes nas soluções numéricas obtidas com os procedimentos de otimização topológica baseados em distribuição de material. Elas são a dependência em relação ao refino da malha e o aparecimento de padrões de tabuleiro. O primeiro se refere às diferentes soluções qualitativas que são obtidas dependendo do refino da malha, e tem ligação direta a questão de existência de soluções no problema contínuo. A segunda se refere ao aparecimento de regiões alternando sólidos e vazios formando uma espécie de tabuleiro de xadrez. Essas duas questões e suas respectivas soluções serão discutidas a seguir. Ao final da seção, é feita uma discussão a respeito da multiplicidade de soluções ótimas e dependência de dados. Nesta tese, a técnica conhecida como Filtro de Sensibilidades [Sigmund, 1997] foi utilizada para solucionar os problemas de dependência em relação ao refino de malha e aparecimento de tabuleiros de xadrez.

3.4.1 Refinamento de malha e existência de soluções

A não existência de soluções no problema de otimização topológica tanto na versão discreta quanto na versão contínua (por exemplo, SIMP) é bem conhecida. Basicamente, isso se deve ao fato que a criação de reforços cada vez mais finos geralmente aumenta a eficiência da estrutura, ou seja, a criação de furos sem alterar o volume total de material é de grande valia. Assim, num determinado limite, haverá a criação de microestruturas que não podem ser consideradas isotrópicas e a solução não estará dentro da gama de soluções originais isotrópicas. Essa questão referente ao problema contínuo tem o seu paralelo no problema numérico discreto que é a dependência da solução em relação ao refino da malha. De forma ideal, espera-se que o refino da malha modifique a estrutura quantitativamente, ou seja, obtenha um modelo melhor de elementos finitos com os contornos melhor definidos. No entanto, isso não acontece, pois refinando a malha de elementos finitos surgirá cada vez mais um padrão microestrutural interno semelhante ao que a teoria prediz. Dessa forma, a não existência de soluções é também um problema para as soluções numéricas utilizando o método de otimização topológica.

Existem métodos eficientes para obter procedimentos independentes do refino da malha na busca por soluções 0-1. Esses métodos se baseiam em diminuir o espaço de soluções,

impedindo a formação de microestruturas e recaem em três classes genéricas: (1) métodos de filtragem com independência em relação a malha, como os filtros de sensibilidade e filtros de densidade; (2) métodos de restrição, como o método de controle de perímetro e os controles local e global de gradientes e (3) métodos alternativos, como parametrizações *wavelet*, abordagens *phase-field* e o método *level-set*. Os trabalhos de Guest [Guest et al., 2004; Guest, 2008] apresentam um método baseado em funções independentes da malha que projetam variáveis de projeto nodais em um espaço de elementos. O trabalho de Sigmund, 2007 apresenta uma revisão dos métodos de filtragem e introduz uma nova classe de métodos baseado em operadores de forma que diminuam o aparecimento de cinzas.

Filtro de sensibilidades O filtro se baseia em modificar a sensibilidade (taxa de variação da função objetivo ou restrições em relação a um variável de projeto) de um elemento finito específico baseado em uma média ponderada das sensibilidades de elementos vizinhos. A experiência computacional mostra que o filtro de sensibilidades é um meio muito eficiente de obter uma independência em relação à malha em otimização topológica [Sigmund, 1997; Sigmund e Petersson, 1998; Sigmund, 2007]. O método é puramente heurístico, mas obtém resultados semelhantes a, por exemplo, métodos de restrição de gradientes, apesar da simples implementação.

A técnica funciona mediante a modificação da sensibilidade de alguma grandeza A em relação à uma pseudodensidade ρ_k , da seguinte forma [Bendsøe e Sigmund, 2003]:

$$\widehat{\frac{\partial A}{\partial \rho_k}} = \frac{1}{\rho_k \sum_{i=1}^N \hat{H}_i} \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \rho_i \frac{\partial A}{\partial \rho_i}, \quad (3.4)$$

onde $\widehat{\partial A}/\partial \rho_k$ é a nova sensibilidade, N é o número total de elementos na malha e o fator de peso \hat{H}_i é escrito como

$$\hat{H}_i = r_{\min} - \text{dist}(k, i), \quad \{i \in N \mid \text{dist}(k, i) \leq r_{\min}\}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

Nesta expressão, o operador $\text{dist}(k, i)$ é definido como a distância ente o centro do elemento k e o centro de um elemento i . O fator de peso \hat{H}_i é zero fora da área de filtro do elemento k . Percebe-se facilmente que a sensibilidade converge para a sensibilidade original quando

o raio de filtragem r_{\min} vai a zero e que todas as sensibilidades são idênticas quando r_{\min} tende ao infinito.

A aplicação prática do filtro de sensibilidades numa variedade de problemas como, por exemplo, problemas bi e tridimensionais, problemas com muitas restrições e problemas que envolvem diferentes áreas físicas, mostram que essa é uma ferramenta extremamente útil.

Informações adicionais sobre o método do filtro de sensibilidades podem ser encontradas nos trabalhos de Sigmund, 1997, Sigmund e Petersson, 1998 e Sigmund, 2007.

3.4.2 Instabilidade de tabuleiro

A instabilidade de tabuleiro é um problema recorrente em soluções obtidas pela otimização topológica, se caracterizando pela formação de regiões onde elementos com material e sem material se encontram em forma de tabuleiro, como mostrado na Figura 3.4.

Atualmente, compreende-se bem que os padrões de tabuleiro estão relacionados às características das aproximações de elementos finitos, e mais especificamente devido à má modelagem numérica que superestima a rigidez dos tabuleiros.

A técnica de filtragem de sensibilidades apresentada na seção 3.4.1 pode também ser utilizada para restringir o aparecimento de padrões de tabuleiro. Isso se deve ao fato da sensibilidade de um elemento analisado depender da média ponderada do próprio elemento e dos seus vizinhos mais próximos.

Análises detalhadas do problema de instabilidade de tabuleiro podem ser encontradas nos trabalhos de Diaz e Sigmund, 1995, e Jog e Haber, 1996, bem como o controle direto do problema. Uma análise mais profunda do controle de tabuleiros em projetos topológicos foi primeiramente discutido por Bendsøe et al., 1993, Jog et al., 1993, e Rodrigues e Fernandes, 1993. Soluções modernas, incluindo elementos finitos fora dos padrões convencionais, podem ser encontradas em alguns trabalhos [Jang et al., 2003; Talischi et al., 2009].



Figura 3.4 – Topologia com instabilidade de tabuleiro

3.4.3 Mínimos locais e dependência de dados

Na grande área estrutural e mais especificamente na otimização topológica, a maioria dos problemas não são convexos. Assim, muitos problemas têm múltiplos ótimos, ou seja, uma solução não única. Em geral, a não convexidade de um problema significa que se podem encontrar diversos mínimos locais diferentes (encontrados pelos métodos baseados em gradientes). Dessa forma, diferentes soluções são encontradas para o mesmo problema quando parte-se de diferentes soluções iniciais ou escolhem-se diferentes parâmetros de otimização.

Com o intuito de assegurar uma convergência estável em direção a um projeto ótimo confiável, a experiência mostra que os métodos de continuação devem ser aplicados. A ideia geral desses métodos é gradualmente passar de um problema de otimização auxiliar (melhor comportado) para o problema original. Em cada passo desse problema gradual, um algoritmo de otimização baseado em gradientes é utilizado até a convergência. Um exemplo desse esquema, é o caso onde a estrutura é primeiramente otimizada permitindo regiões consistindo de compósitos, e após a convergência, gradualmente se introduz um esquema de penalização para se obter uma topologia 0-1.

Por fim, a dependência dos resultados de um projeto topológico em relação aos dados que são escolhidos antes de aplicar o procedimento de otimização é de extrema importância. Mudanças no domínio fixo estendido, mudanças nos carregamentos ou nas condições de contorno podem drasticamente alterar o projeto que um algoritmo pode alcançar.

4. CONTROLE ATIVO DE ESTRUTURAS

4.1 Introdução

O controle para redução de vibrações em estruturas envolve um grande número de áreas, entre as quais: a dinâmica, para o desenvolvimento das equações do movimento; a mecânica estrutural, para a modelagem e análise; e a teoria de controle, para o projeto do sistema de controle. Um projeto efetivo para redução de vibrações através de controle requer consideração de todas essas áreas.

A maior dificuldade em desenvolver um sistema de controle para uma estrutura contínua é a quantidade de graus de liberdade (teoricamente, infinitos). A teoria de controle, tanto clássica quanto moderna, foi desenvolvida para poucos graus de liberdade. Dessa forma, em geral, a análise modal é utilizada para reduzir a dimensão do problema. Entretanto, um controle por realimentação de uma estrutura, baseado em um modelo reduzido dessa, pode desestabilizar os modos residuais não incluídos [Preumont, 2002]. Esse fenômeno conhecido como *spillover* é devido a excitação dos modos residuais pelo sistema de controle (*control spillover*), e à contaminação da saída do sensor pelos modos residuais (*observation spillover*) [Alkhatib e Golnaraghi, 2003].

Nem sempre é possível definir, *a priori*, as vibrações a que uma estrutura está submetida. Dessa forma, a instalação de dispositivos que retirem energia mecânica do sistema é uma forma eficiente para controlar as respostas temporárias da estrutura. Entre esses dispositivos podemos citar, como exemplos, cabos, amortecedores e, principalmente, atuadores. A seleção criteriosa da localização desses elementos é de extrema importância para um controle eficiente. Entretanto, esse fato é ignorado em alguns projetos, e respostas estruturais totalmente indesejadas podem ser obtidas.

Este capítulo apresenta os aspectos básicos da teoria de controle para a redução de vibrações. As classificações básicas do controle estrutural serão apresentadas no começo do capítulo. Logo após, todo o desenvolvimento de modelos de estruturas para controle

e análise modal através de espaço de estados é apresentada. Em uma nova seção, índices de controlabilidade e observabilidade são apresentados e discutidos. Completando a seção anterior, é feita uma revisão de trabalhos sobre a localização de atuadores. Em seguida, a apresentação do modelo de controle utilizado nesta tese finaliza o capítulo.

4.2 Classificação do controle

A literatura apresenta diversas propostas para controlar vibrações estruturais indesejadas. Esses métodos podem ser classificados em três tipos amplos: controle ativo, controle semiativo e controle passivo. Um sistema de controle ativo necessita energia externa e informações do sistema, o sistema semiativo somente necessita de informações do sistema. Um sistema de controle puramente passivo não necessita de energia externa, tampouco de informações do sistema.

O controle passivo é o sistema mais simples que pode ser empregado para controlar um sistema. Não é necessária energia externa neste caso e, em geral, são utilizados dispositivos mais simples como cabos e amortecedores para absorver parte da energia de vibração.

Apesar do sistema de controle passivo ser o mais barato e fácil de ser implementado, a magnitude da força de controle é muito limitada e determinada somente pela resposta da estrutura. Num sistema semiativo uma pequena quantidade de energia pode ser utilizada para modificar certas propriedades da estrutura como rigidez e amortecimento; porém, não ocorre entrada de energia externa no sistema, evitando assim, um possível comportamento ressonante indesejado.

Um sistema de controle ativo básico consiste de sensores, atuadores e dispositivos para processar as informações. Por demandar energia externa e equipamentos mais modernos é o controlador mais eficaz e conseqüentemente o mais caro. Tais sistemas possuem a habilidade de se adaptar a diferentes condições de carregamento e de controlar alguns modos de vibração [Housner et al., 1997], minimizando assim, respostas indesejadas. Entretanto, se mal projetado, um sistema ativo pode gerar respostas extremamente prejudiciais à estrutura devido à entrada de energia externa.

4.3 Controle estrutural por variáveis de estado

Nesta seção, serão apresentados os modelos estruturais de segunda ordem, geralmente utilizados em dinâmica estrutural. Tais modelos são representados por equações diferenciais lineares de segunda ordem e dependem da escolha de coordenadas, podendo ser representados por coordenadas nodais (modelos nodais) ou em coordenadas modais (modelos modais). Além disso, também podem ser representados por variáveis de estados (espaço de estados).

4.3.1 Modelos nodais

Modelos de estruturas controladas ativamente podem ser descritos através de modelos nodais. Estes modelos são descritos em coordenadas nodais, em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações medidos nos nós. Essa representação tem uma longa tradição e muitos resultados foram obtidos utilizando a partir dela [Gawronski, 2004]. O modelo caracteriza-se pelas matrizes de massa, rigidez e amortecimento, bem como pela localização de sensores e atuadores (S/A). Frequentemente estes modelos são obtidos a partir de modelos de elementos finitos ou outros sistemas computacionais de projeto/engenharia auxiliados por computador. Adota-se neste trabalho a convenção de um ponto como a primeira derivada em relação ao tempo (i.e., $\dot{x} = dx/dt$), e dois pontos como a derivada segunda em relação ao tempo (i.e., $\ddot{x} = d^2x/dt^2$). Assume-se que n_d é o número de graus de liberdade do sistema, que r seja o número de saídas, e s o número de entradas. As equações de movimento desta estrutura controlada, em coordenadas nodais, podem ser escritas pelas seguintes equações diferenciais matriciais [Gawronski, 2004]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{B}_0\mathbf{u}^c + \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{0v}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{0d}\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nessas equações \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ são respectivamente os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações com dimensões $n_d \times 1$; \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} são respectivamente as matrizes massa, de amortecimento e de rigidez com dimensões $n_d \times n_d$; \mathbf{f} é um vetor de carregamentos externos com dimensão $n_d \times 1$. A matriz massa é positiva definida (todos os seus autovalores são positivos), e as matrizes de amortecimento e rigidez são positivas semidefinidas (todos os seus

autovalores são não negativos) [Gawronski, 2004]. \mathbf{u}^c é o vetor de entradas com dimensão $s \times 1$; e \mathbf{y} é o vetor de saídas com dimensão $r \times 1$. A matriz de entradas \mathbf{B}_0 apresenta dimensão $n_d \times s$, as matrizes de saídas em deslocamentos \mathbf{C}_{0d} e saídas em velocidades \mathbf{C}_{0v} tem dimensão $r \times n_d$. De forma bem simples, o vetor de entradas de controle pode ser entendido como um esforço para manter uma determinada característica do sistema (vetor de saídas) perto de um valor específico. A matriz de entradas redimensiona e localiza as variáveis físicas do vetor de entradas em relação as variáveis do problema (deslocamentos e suas derivadas). De forma inversa, as matrizes de saídas redimensionam e localizam as variáveis do problema de acordo com o vetor de saídas.

4.3.2 Modelos modais

Modelos modais de estruturas são modelos expressos a partir de variáveis modais [Gawronski, 2004; Vasques e Rodrigues, 2006]. Para fazer isso, deve-se introduzir uma nova variável $\boldsymbol{\eta}$, chamada deslocamento modal. Com essa nova variável, pode-se escrever:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\eta}, \quad (4.2)$$

onde $\boldsymbol{\Psi}$ é uma matriz de modos de vibração com dimensão $n_d \times n_m$, e n_m é o número de modos de vibração do modelo modal. A fim de obter as equações em coordenadas modais, insere-se a Equação 4.2 na Equação 4.1 e ainda multiplica-se pelo lado esquerdo a primeira linha da Equação 4.1 por $\boldsymbol{\Psi}^T$, obtendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Psi} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u}^c + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{0v} \boldsymbol{\Psi} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_{0d} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

a qual, pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}_m \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_m \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u}^c + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{0v} \boldsymbol{\Psi} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_{0d} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde

$$\mathbf{M}_m = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{D}_m = \Psi^T \mathbf{D} \Psi, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{K}_m = \Psi^T \mathbf{K} \Psi. \quad (4.7)$$

Pode-se obter um sistema normalizado em relação a massa pré-multiplicando a primeira linha da Equação 4.4 por \mathbf{M}_m^{-1} , assim

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_m \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_m \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{M}_m^{-1} \Psi^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u}^c + \mathbf{M}_m^{-1} \Psi^T \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{0v} \Psi \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_{0d} \Psi \boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pode-se utilizar outra notação a fim de simplificar as equações [Gawronski, 2004], na forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{B}_m \mathbf{u}^c + \mathbf{f}_m, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{mv} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_{md} \boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nas Equações 4.9, $\boldsymbol{\Omega}$ é uma matriz diagonal de frequências naturais que pode ser obtida a partir das matrizes modais de massa e rigidez por meio da solução de um problema generalizado de autovalores e considera-se que \mathbf{Z} é uma matriz diagonal de amortecimentos modais:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{n_m} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_{n_m} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

onde ω_i e ζ_i são respectivamente a frequência natural e o amortecimento relativos ao i -ésimo modo de vibração. A matriz de entradas modais \mathbf{B}_m na Equação 4.9 e as matrizes modais de saídas em deslocamentos \mathbf{C}_{md} e velocidades \mathbf{C}_{mv} são dadas por:

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{M}_m^{-1} \Psi^T \mathbf{B}_0, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{C}_{\text{md}} = \mathbf{C}_{0\text{d}}\Psi, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{C}_{\text{mv}} = \mathbf{C}_{0\text{v}}\Psi. \quad (4.14)$$

4.3.3 Modelos em espaço de estados

Para efeitos de simulações estruturais dinâmicas, análise de um sistema de controle e projeto, é conveniente representar as equações da estrutura em forma de espaço de estados. Um conjunto de três parâmetros de espaço de estados (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}) é chamado de representação em espaço de estados, enquanto \mathbf{x} é o vetor de estado, \mathbf{u}^c é o vetor de entradas (forças de controle) e \mathbf{y} é o vetor de saídas [Ogata, 2009]. A representação depende da escolha do vetor de estado, enquanto a entrada e saída permanecem invariáveis.

Em geral, a ordem de um modelo nodal é inaceitavelmente elevada. Por exemplo, não é incomum que o número de graus de liberdade de um modelo por elementos finitos seja da ordem de milhares. Portanto, a representação do estado nodal é raramente utilizada em dinâmica estrutural. Uma abordagem alternativa é obter a representação em espaço de estados utilizando coordenadas modais (Equações 4.9), onde o número de equações é significativamente menor para um modelo reduzido, enquanto a precisão da análise não é modificada.

Pode-se obter uma representação em espaço de estados definindo o vetor de estados em função dos deslocamentos e velocidades modais [Gawronski, 2004], como segue

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{Bmatrix}, \quad (4.15)$$

assim, a Equação 4.9 (desconsiderando a força externa) é reescrita como um conjunto de equações de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_m\mathbf{u}^c, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{\text{mv}}\mathbf{x}_2 + \mathbf{C}_{\text{md}}\mathbf{x}_1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

as quais são equivalentes ao conjunto de equações abaixo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}^c, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{4.17}$$

onde os parâmetros de estado são dados por:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -2\mathbf{Z}\Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{md} & \mathbf{C}_{mv} \end{bmatrix}.\tag{4.18}$$

A dimensão do modelo modal em espaço de estados é a vantagem mais óbvia sobre o modelo nodal. A dimensão da representação de espaço de estado modal é $2n_m$, enquanto que a representação de espaço de estado nodal é $2n_d$ e, normalmente, temos $n_d \gg n_m$, ou seja, a ordem do modelo em função das coordenadas modais é muito menor do que o modelo em coordenadas nodais.

Outra vantagem dos modelos em função das coordenadas modais é a sua definição de propriedades de amortecimento. Enquanto as matrizes de massa e rigidez são obtidas a partir das coordenadas nodais (por exemplo, de um modelo de elementos finitos), a matriz de amortecimento é geralmente desconhecida. Normalmente, a estimativa de amortecimento é mais precisa em função das coordenadas modais [Gawronski, 2004].

4.4 Controlabilidade e observabilidade

Controlabilidade e observabilidade são propriedades de um sistema formado por estrutura, sensores e atuadores, contendo informações muito úteis para o controle estrutural. A controlabilidade, pode ser definida como a capacidade de uma configuração do sistema atuador controlar todos os estados da estrutura. De forma similar, a observabilidade mede a capacidade de estimar todos os estados do sistema a partir das informações obtidas de uma configuração particular de sensores [Preumont, 2002].

De uma maneira geral e clássica, diz-se que um sistema é controlável se a matriz de controlabilidade apresenta posto completo, ou seja, se os vetores que formam tal matriz são linearmente independentes. Da mesma forma, o sistema é dito observável se a matriz de observabilidade apresenta posto completo [Ogata, 2009]. Essa informação é muito limitada, embora essencial em muitas aplicações como, por exemplo, o posicionamento de sensores e

atuadores. Uma informação mais quantitativa pode ser obtida pelos Gramianos de controlabilidade e observabilidade; os quais representam o grau de controlabilidade e observabilidade de cada modo.

4.4.1 Matrizes de controlabilidade e observabilidade

Como uma medida de interação entre as entradas do atuador e os estados, a controlabilidade relaciona a matriz do sistema \mathbf{A} e a matriz de entradas \mathbf{B} . Um sistema linear, ou o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , é completamente estado-controlável se, para qualquer que seja t_0 , todo estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ pode ser transferido para qualquer estado final $\mathbf{x}(t_f)$ num tempo finito, $t_f > t_0$, por intermédio de um vetor excitação $\mathbf{u}(t)$ não sujeito a restrições, isto é, que não apresente limitações quanto aos valores de $\mathbf{u}(t)$. Esta definição indica que $\mathbf{u}(t)$ é capaz de influenciar cada uma das variáveis de estado [Gawronski, 2004].

Observabilidade, como um conceito similar ao de controlabilidade, é a ideia que toda variável de estado do sistema tem algum efeito sobre a saída do sistema (resposta do sensor). Dessa forma, essa medida relaciona a matriz do sistema \mathbf{A} e a matriz de saídas \mathbf{C} . Um sistema linear, ou par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é dito completamente observável se todo estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ pode ser determinado exatamente a partir de medidas da resposta $\mathbf{y}(t)$, durante um intervalo de tempo finito $t_f > t_0$. Esta definição indica que todas as variáveis de $\mathbf{x}(t)$ influenciam a resposta $\mathbf{y}(t)$ [Gawronski, 2004].

Considere um sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}^c, \quad (4.19)$$

sendo, \mathbf{x} o vetor de estados $n \times 1$, \mathbf{A} a matriz do sistema $n \times n$, \mathbf{B} a matriz de entradas $n \times s$ e \mathbf{u}^c o vetor de entradas de controle $s \times 1$. A matriz de controlabilidade \mathcal{C} ($n \times ns$) é dada por:

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]. \quad (4.20)$$

Para que o sistema (\mathbf{A}, \mathbf{B}) seja completamente estado-controlável a matriz \mathcal{C} deve ter posto n , ou conter n vetores coluna linearmente independentes [Ogata, 2009; Preumont, 2002].

Para definir a matriz de observabilidade, considere um sistema não controlado dado

por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{4.21}$$

sendo, \mathbf{x} o vetor de estados $n \times 1$, \mathbf{A} a matriz do sistema $n \times n$, \mathbf{C} a matriz de saídas $r \times n$ e \mathbf{y} o vetor de saídas $r \times 1$. A matriz de observabilidade \mathcal{O} ($n \times nr$) é dada por:

$$\mathcal{O} = [\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \mid \dots \mid (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T],\tag{4.22}$$

Para que o sistema (\mathbf{A}, \mathbf{C}) seja completamente observável a matriz \mathcal{O} deve ter posto n , ou conter n vetores coluna linearmente independentes [Ogata, 2009; Preumont, 2002].

4.4.2 Gramianos de controlabilidade e observabilidade

As definições de controlabilidade e observabilidade clássicas dadas acima apresentam dois problemas. O primeiro problema está relacionado ao fato da definição ser qualitativa, ou seja, em termos de sim ou não. O segundo está relacionado as dificuldades numéricas de se calcular as matrizes de controlabilidade e observabilidade para sistemas de grande dimensão. Como alternativa definem-se os Gramianos que são matrizes não negativas que expressam as propriedades de controlabilidade e observabilidade do sistema de forma quantitativa e sem as dificuldades numéricas já mencionadas.

Considere um sistema linear invariante em relação ao tempo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}^c, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Para um sistema assintoticamente estável, isto é, se todos os pólos (autovalores) de \mathbf{A} têm a parte real negativa, a resposta do sistema é limitada e a matriz de covariância para regime permanente é finita [Preumont, 2002]. Assim, a resposta do sistema a um grupo de ruídos brancos independentes de intensidade unitária é dada por:

$$\mathbf{W}_c = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T\tau} d\tau,\tag{4.24}$$

o qual é chamado Gramiano de controlabilidade, e E é o operador de covariância. Para um

sistema não variante com o tempo, podemos obter o Gramiano de controlabilidade, e forma mais conveniente, a partir da seguinte equação de Lyapunov [Gawronski, 2004]:

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}. \quad (4.25)$$

Como supracitado, o sistema é controlável se todos os estados podem ser excitados pela entrada de controle. Essa condição é completamente satisfeita se, e somente se, \mathbf{W}_c é positiva definida [Preumont, 2002].

A partir das definições de controlabilidade e observabilidade, e, mais especificamente, da dualidade das Equações 4.20 e 4.22, pode-se notar que o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável se, e somente se, o par $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ é controlável. Dessa forma, o sistema é observável se, e somente se, o Gramiano de observabilidade

$$\mathbf{W}_o = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T\tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau, \quad (4.26)$$

é positivo definido [Preumont, 2002]. A equação de Lyapunov para observabilidade pode ser obtida substituindo o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) pelo par $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ na equação 4.25. Assim, se \mathbf{A} é assintoticamente estável \mathbf{W}_o pode ser obtida por

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (4.27)$$

O Gramiano de observabilidade está relacionada a habilidade de condições iniciais não nulas do vetor de estados afetar as saídas do sistema [Preumont, 2002].

4.5 Localização ótima de atuadores

Nas últimas três décadas, com a extensiva utilização de estruturas bastante flexíveis em diversas aplicações de engenharia, o controle de vibrações considerando a flexibilidade foi tema de muitas pesquisas. A fim de obter um controle de vibrações eficiente para uma estrutura flexível, um engenheiro de controle geralmente precisa resolver o problema de determinar o número apropriado e a localização de sensores e atuadores (S/A) utilizados no sistema de controle. No entanto, uma solução clara do problema de localização de S/A não foi obtida. Para uma estrutura que tem geometria simples, ou menor número de graus de liberdade, a experiência prática e/ou uma abordagem de tentativa e erro podem ser suficientes

para resolver o problema. Por outro lado, para uma estrutura complexa de grande escala, cujo modelo de elementos finitos pode ter dezenas de milhares de graus de liberdade, uma abordagem sistemática e eficiente é necessária para resolver esse problema computacionalmente árduo. Em geral, é impossível determinar tanto o modelo de controlador ótimo como a localização de S/A simultaneamente, uma vez que o controlador só pode ser calculado após a colocação fixa de S/A. Esse fato significa que temos de usar uma técnica de otimização numérica sequencial para obter o controlador ótimo e a colocação. Muitas vezes, em uma aplicação real, a hipótese de que o número de S/A é conhecido a priori, é de grande valia e praticidade.

O posicionamento de S/A foi investigado por um número de autores [Kim e Junkins, 1991; Hac e Liu, 1993; Gawronski e Lim, 1996; Kang et al., 2008]. Grande parte desses, considera o problema de transferir o sistema de um estado $\mathbf{x}(t_0)$ para um estado final $\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) \neq \mathbf{x}(t_0)$ dentro de um intervalo de tempo Δt (não necessariamente finito) de tal forma que a energia de controle, em geral, definida como uma integral temporal de uma forma quadrática das entradas, é minimizada. A solução ótima desse problema define a energia de controle ótima que explicitamente depende das condições iniciais e finais, e indiretamente é uma função do posicionamento de S/A.

Basseville et al., 1987, verificaram o problema de localização ótima de sensores de um ponto de vista de detecção de falha com testes estatísticos e ainda discutiram a influência da excitação nesse problema. A abordagem de Maghami e Joshi, 1990, para estruturas espaciais flexíveis transformou a natureza discreta do problema de posicionamento de S/A em uma programação de otimização não linear através da aproximação das forças de controle e medidas de saída por funções espacialmente contínuas. Para a localização de atuadores, Kim e Junkins, 1991, introduziram uma nova medida para a controlabilidade que considera uma análise de custos modais, ou seja, que leva em conta simultaneamente a importância física de cada modo e o seu grau de controlabilidade.

Um dos trabalhos mais citados nesse campo é o de Hac e Liu, 1993, no qual foi proposta uma abordagem fundamentada em certas medidas quantitativas de controlabilidade e observabilidade baseadas em Gramianos. Esses critérios são obtidos considerando as energias de entrada e saída sob condições de distúrbios transientes e permanentes. Além disso, fornecem um balanço entre as importâncias dos modos mais altos e mais baixos.

Em 1996, Gawronski e Lim mostraram que uma decomposição dos valores singulares de Hankel dos S/A individuais permite avaliar cada atuador e sensor em termos de suas próprias controlabilidade e observabilidade. Para sistemas multimodais, medidas de posicionamento tais como o traço e o determinante da matriz dos valores singulares de Hankel podem ser formulados e resolvidos.

Em outro grande trabalho, Hiramoto et al., 2000, desenvolveram duas soluções para a equação generalizada de Riccati de forma explícita, para estruturas não amortecidas com S/A instalados. Empregando essas soluções explícitas, obtiveram um controle estabilizado H_∞ com base em uma abordagem de fatoração normalizada, sem resolver qualquer equação algébrica de Riccati numericamente. Dessa forma, o controlador H_∞ pôde ser obtido simplesmente através da adição e multiplicação de matrizes diversas. Além disso, uma propriedade em circuito fechado da norma H_∞ é automaticamente vinculada para todos os candidatos a melhor posicionamento. Assim, pode-se formular o problema do ótimo posicionamento para otimizar outras propriedades em circuito fechado, com menos exigência computacional que o método baseado em modelos.

Mais recentemente, Liu et al., 2008, consideraram o problema de localização de sensores com o objetivo de maximizar a informação de dados para que o comportamento dinâmico da estrutura possa ser totalmente caracterizado. Com base nesse critério um algoritmo genético foi utilizado para encontrar o posicionamento ideal. No mesmo ano, Kang et al., 2008, apresentaram uma proposta que combina algoritmos evolucionários a fim de colocar sensores otimamente localizados sobre uma estrutura espacial para efeitos de identificação modal. Nesse trabalho, um índice de desempenho combinado revelou-se um excelente compromisso entre dois índices que visam à independência linear e a energia modal.

4.6 Controle LQR para o caso em estudo

Para o problema estudado nesta tese, o modelo de elementos finitos global que governa o movimento espacial e o equilíbrio de cargas elétricas é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{uu}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{up}\phi_e &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{H}_{up}^T\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{pp}\phi_e &= \mathbf{q}_e, \end{aligned} \tag{4.28}$$

onde \mathbf{u} e ϕ são os vetores globais dos graus de liberdade mecânicos e elétricos, \mathbf{M}_{uu} é a matriz global de massa, \mathbf{H}_{uu} é a matriz global de rigidez condensada, $\mathbf{H}_{up} = \mathbf{H}_{pu}^T$ são as matrizes globais condensadas de acoplamento piezoeletrico, \mathbf{H}_{pp} é a matriz global condensada de capacitância dielétrica, \mathbf{f} é o vetor global externo de forças mecânicas e \mathbf{q}_e é o vetor global condensado de cargas elétricas.

Como apresentado na Seção 2.6, os graus de liberdade no eletrodo aterrado foram desconsiderados por apresentar potencial elétrico nulo, além disso, os graus de liberdade elétricos internos foram condensados estaticamente. Dessa forma, neste trabalho, todos os graus de liberdade elétricos serão utilizados como atuantes e conhecidos. Ou seja, são utilizados como entradas para o atuador (material sólido piezoeletrico) no sistema de controle. Assim, a parte relativa ao acoplamento piezoeletrico, na primeira Equação de 4.28, pode ser considerada uma força externa e pode ser reescrita como

$$\mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{uu}\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{H}_{up}\phi_e + \mathbf{f}, \quad (4.29)$$

enquanto a segunda equação pode ser utilizada para encontrar a carga elétrica nos eletrodos.

Como dito anteriormente, no projeto de um sistema de controle ativo, pode-se utilizar um modelo completo do sistema (modelo nodal) ou um modelo modal. Além disso, podem-se considerar somente alguns modos de vibração (modelo modal truncado). Estruturas flexíveis são sistemas de parâmetros distribuídos quem tem um número infinito de graus de liberdade. Um controle por realimentação baseado em um modelo modal reduzido pode desestabilizar os modos residuais, acarretando problemas na observação e no controle (*spillover*). Esses problemas degradam o desempenho do sistema, além de poder torná-lo instável. Métodos para reduzir o efeito de *spillover* são discutidos por diversos autores, como Balas, 1978, e Meirovitch, 1990.

Uma estrutura em vibração apresenta preferencialmente modos de vibração dependentes do espectro da excitação. Pode-se assumir que os modos de ordem mais baixa, que tem a menor energia associada e conseqüentemente são excitados mais facilmente, são os mais significantes para a resposta global do sistema. Assim, uma matriz modal truncada pode ser utilizada na transformação de coordenadas generalizadas \mathbf{u} para coordenadas modais $\boldsymbol{\eta}$. Dessa forma, o vetor de deslocamentos pode ser aproximado pela superposição dos m

primeiros modos, como

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Psi}\boldsymbol{\eta} \cong \sum_{i=1}^m \Psi_i \eta_i, \quad (4.30)$$

onde, a partir desse ponto, $\mathbf{\Psi} = [\Psi_1, \dots, \Psi_m]$ é a matriz modal truncada e $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}^T$ é o vetor de coordenadas modais correspondente. Assim, a ordem do sistema não é mais o número total graus de liberdade do modelo de elementos finitos e sim o número de modos escolhidos para representar o modelo modal.

Assumindo um modelo de amortecimento viscoso simples para a estrutura flexível e os m primeiros modos de vibração, a Equação 4.29 pode ser transformada numa equação semelhante a Equação 4.9, obtendo

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{\eta} = -\mathbf{\Psi}^T\mathbf{H}_{up}\boldsymbol{\phi}_e + \mathbf{\Psi}^T\mathbf{f}, \quad (4.31)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ e \mathbf{Z} são respectivamente as matrizes diagonais de frequências naturais e de amortecimentos modais, porém, considerando só os primeiros m modos. Essa equação representa o modelo reduzido (truncado) modal de elementos finitos da estrutura com atuadores piezelétricos.

Como dito na Seção 4.3.3, o modelo em espaço de estados é uma grande ferramenta para se trabalhar com um sistema de controle e é base da teoria de controle moderna. Para o caso em estudo pode-se utilizar os deslocamentos e velocidades modais do modelo truncado como variáveis de estado, assim

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{Bmatrix}, \quad (4.32)$$

e o sistema em malha aberta (desconsiderando a observação \mathbf{y}) é representado por uma equação diferencial matricial de primeira ordem expressa em termos do vetor de variáveis de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\phi\mathbf{u}_\phi^c + \mathbf{B}_u\mathbf{u}_u^c, \quad (4.33)$$

onde \mathbf{A} é a matriz do sistema, \mathbf{B}_u e \mathbf{B}_ϕ são as matrizes de entradas mecânicas e elétricas, e

\mathbf{u}_u^c e \mathbf{u}_ϕ^c são os vetores de entradas mecânicas e elétricas, dados por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -2\mathbf{Z}\Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Psi^T \mathbf{H}_{up} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Psi^T \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{u}_\phi^c = \phi, \quad \mathbf{u}_u^c = \mathbf{f}.$$

No controle clássico, os ganhos de realimentação (*feedback*) são escolhidos para obter alguma mudança nas propriedades dinâmicas do sistema. O objetivo final é diminuir o movimento do sistema mecânico, e nesse caso o sistema de controle atua como um regulador [Vasques e Rodrigues, 2006]. Sistemas onde são usados métodos diretos para o projeto de sistema de controle por realimentação, que obtém a máxima redução possível na resposta dinâmica, são conhecidos como sistemas de controle ótimo [Burl, 1999].

Os sistemas de controle ótimos são projetados a fim de minimizar uma função custo ou índice de desempenho, o qual é proporcional à resposta do sistema e às entradas de controle necessárias para atenuar a resposta. No problema em estudo, foi utilizado um índice de desempenho quadrático dependente das variáveis de estado, que são diretamente responsáveis pela resposta mecânica do sistema, e das entradas de controle (elétricas), na forma

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}_\phi^{cT} \mathbf{R} \mathbf{u}_\phi^c) dt, \quad (4.35)$$

onde \mathbf{Q} é a matriz positiva semidefinida de pesos para as variáveis de estado e \mathbf{R} é a matriz positiva definida de pesos para as entradas de controle. Uma escolha conveniente para as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} é a matriz identidade, ou um múltiplo desta. Este múltiplo dará mais “peso”, no projeto de controle, para os estados ou para as entradas de controle, dependendo da escolha.

Assumindo que todos os modos (variáveis de estado) são observáveis e controláveis, a função custo da Equação 4.35 fornece um controle independente sobre as frequências naturais e coeficientes de amortecimento de cada modo de vibração [Vasques e Rodrigues, 2006]. Essa estratégia é o chamado Controle no Espaço Modal Independente, ou IMSC [Meirovitch, 1990].

O sistema de controle por realimentação que minimiza a função custo dada pela Equação 4.35, para o sistema linear invariante definido pela Equação 4.33, utiliza a realimentação de estados com uma matriz de ganhos de realimentação $\mathbf{G}^*(t)$ variável com o

tempo [Burl, 1999; Preumont, 2002]. Assim, a entrada de controle é dada por

$$\mathbf{u}_\phi^c(t) = -\mathbf{G}^*(t)\mathbf{x}(t). \quad (4.36)$$

O ótimo ganho de realimentação transiente é dado por $\mathbf{G}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_\phi^T\mathbf{P}^*(t)$, onde a matriz $\mathbf{P}^*(t)$ é a solução da equação algébrica de Riccati,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}^*(t) + \mathbf{P}^*(t)\mathbf{A} - \mathbf{P}^*(t)\mathbf{B}_\phi\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_\phi^T\mathbf{P}^*(t) + \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{P}}^*(t). \quad (4.37)$$

Esse tipo de controle é conhecido como Regulador Linear Quadrático (LQR). A consideração do problema de controle no estado transiente requer o conhecimento dos valores de estado e ganhos de controle em todo intervalo de tempo $[0, t_f]$. Entretanto, os valores da matriz de ganhos de um controle LQR alcançam os valores permanentes longe do tempo final [Vasques e Rodrigues, 2006]. Além disso, a utilização do controle LQR em estado permanente simplifica consideravelmente o projeto de controle e a implementação analógica ou digital. Dessa forma, este trabalho considera a teoria de controle LQR em estado permanente e a matriz de ganhos em estado permanente é então dada por

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_\phi^T\mathbf{P}, \quad (4.38)$$

onde \mathbf{P} é a solução em estado permanente ($\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^*(t)$ e também $\dot{\mathbf{P}}^*(t) = \mathbf{0}$) da equação de Riccati. Portanto, considerando a realimentação das variáveis de estado e a matriz de ganhos de realimentação em estado permanente na Equação 4.36, a equação de estados em malha fechada é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_\phi\mathbf{G})\mathbf{x} + \mathbf{B}_u\mathbf{u}_u^c, \quad (4.39)$$

Nessa equação assume-se que todos os estados são completamente observáveis e podem ser diretamente relacionados às saídas, e assim utilizados pelo sistema de controle. Entretanto esse caso não é sempre verdadeiro. Uma aproximação mais real consideraria que somente as saídas \mathbf{y} podem ser conhecidas e medidas (deslocamentos, velocidades e aceleração em pontos da estrutura). Dessa forma, para utilizar as variáveis de estado no sistema de controle seria necessário estimar os estados a partir de um modelo do sistema e de um número limitado de observações das saídas. Essa estimativa é feita geralmente por um estimador de estados ou

observador. Entretanto, tal questão estados não é do escopo deste trabalho, que considera todos os estados (do modelo truncado) como conhecidos em todos os momentos.

É importante ressaltar que, por ter uma banda de frequências limitada, a utilização desse modelo de controle reduzido em um sistema real pode amplificar distúrbios fora dessa largura de banda (*spillover*) [Vasques e Rodrigues, 2006]. Por outro lado, Gawronski, 2004 afirma que um modelo reduzido truncado de modelos estáveis sempre produz um modelo reduzido estável, desde que os polos do modelo reduzido sejam um subgrupo dos polos do modelo completo. Uma discussão aprofundada a respeito de modelos reduzidos pode ser encontrada no Capítulo 6 de Gawronski, 2004.

5. PROJETO SIMULTÂNEO DE OTIMIZAÇÃO PARA TOPOLOGIA ESTRUTURAL E CONTROLE PARA REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES

Como mencionado na introdução desta tese, os estudos em projeto estrutural e sistemas de controle tiveram grandes progressos nas últimas décadas, principalmente com a evolução da tecnologia computacional. A prática comum para o desenvolvimento de uma estrutura controlada aponta para um projeto em sequência, no qual a estrutura é definida segundo critérios de resistência mecânica e, em uma segunda etapa, o sistema de controle é projetado com base nessa estrutura pré-definida. Dessa forma, as metodologias de projeto desenvolvidas para cada campo, estrutural e de controle, são utilizadas separadamente. Entretanto, desde o final da década de 1980, alguns autores sugerem que os custos, bem como a resposta vibracional, podem ser melhorados realizando um projeto simultâneo de otimização para a topologia estrutural e controle para redução de vibrações.

Diversos autores [Hale et al., 1985; Miller e Shim, 1987; Salama et al., 1988; Milman et al., 1991] afirmam que o projeto de otimização estrutural e de controle combinados pode obter resultados melhores que o projeto sequencial tradicional. No projeto em duas etapas, as variáveis de projeto estruturais (ρ_e) são selecionadas a fim de minimizar o objetivo estrutural f_e sob determinadas restrições de comportamento, de desigualdade $g_e(\rho_e) \leq 0$ e/ou igualdade $h_e(\rho_e) = 0$. A formulação da primeira etapa de otimização para esse problema pode ser definida como

$$\begin{aligned} & \min_{\rho_e} f_e(\rho_e), \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} g_e(\rho_e) \leq 0, \\ h_e(\rho_e) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Tendo especificado completamente as variáveis de projeto estruturais, o projeto do sistema

de controle, realizado com ρ_e fixado, pode ser descrito como

$$\begin{aligned} & \min_{\rho_c} f_c(\rho_e, \rho_c), \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} g_c(\rho_e, \rho_c) \leq 0, \\ h_c(\rho_e, \rho_c) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde f_c é o critério de projeto para o controle e ρ_c são as variáveis de projeto de controle.

Por outro lado, um projeto de otimização simultâneo pode ser formulado como

$$\begin{aligned} & \min_{\rho_e, \rho_c} \alpha f_e(\rho_e, \rho_c) + \beta f_c(\rho_e, \rho_c), \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} g(\rho_e, \rho_c) \leq 0, \\ h(\rho_e, \rho_c) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde α e β são os pesos ponderados para a função estrutural e de controle respectivamente. O benefício desta formulação é que a minimização da soma de dois objetivos separados é sempre menor ou igual à soma da minimização dos dois individualmente [Ou e Kikuchi, 1996]. Isso faz a otimização simultânea atrativa para engenheiros.

É comum a diferentes trabalhos que o primeiro artigo investigando o projeto simultâneo para uma estrutura e um sistema de controle foi realizado por Hale et al., 1985. Neste trabalho, um problema de otimização foi desenvolvido para lidar com estruturas espaciais, onde as forças de controle ativo e os parâmetros estruturais são determinados com o intuito de minimizar uma determinada função custo. Miller e Shim, 1987, trabalharam com funções objetivo a fim de reduzir a massa estrutural e as energias de deformação, cinética e de controle. Salama et al., 1988, estabeleceram um precedente seguido por muitos outros. Eles eliminaram as variáveis de controle estrutural considerando ganhos permanentes (constantes) e selecionando matrizes peso particulares (identidade) para o índice de desempenho quadrático. Milman et al., 1991, introduziram o conceito de função objetivo combinada, e apresentaram as condições necessárias para o projeto ótimo de Pareto [Haftka e Gürdal, 1992].

Alguns trabalhos mais recentes sobre projeto simultâneo são citados na introdução desta tese. Além desses, Locatelli et al., 2000, apresentaram técnicas para otimizar a posição de atuadores e sensores, com uma combinação de métodos baseados em gradientes

e algoritmos genéticos multiobjetivo desenvolvidos pelos autores. Uma otimização integrada para treliças piezelétricas inteligentes usando algoritmos genéticos foi realizada por Xu et al., 2007. Nesse trabalho, diversas restrições foram consideradas como: tensões, deslocamentos, frequências naturais e valores de aplicação de voltagem nos atuadores piezelétricos. Além disso, várias funções objetivo foram consideradas, além do número e localização de atuadores e o número de modos controláveis como variáveis de projeto.

Com base nos diversos trabalhos já realizados para o projeto simultâneo estrutural e de controle, esta tese propõe um procedimento aninhado que utilize o método de otimização topológica para projetar a estrutura através da minimização da flexibilidade com restrições de volume. Em um segundo momento, o sistema de controle é projetado com uma função objetivo que maximiza o traço do Gramiano de controlabilidade do sistema de controle LQR e como consequência, encontra a localização ótima dos atuadores. Essas duas etapas são realizadas a cada passo de uma programação iterativa. Dessa forma, apesar de ser uma abordagem em que as duas etapas são resolvidas separadamente e em sequência, há interação entre os dois objetivos finais devido ao processo iterativo sequencial, fazendo deste um projeto simultâneo.

Na primeira seção, este capítulo apresenta as funções objetivo e restrições do projeto simultâneo aninhado utilizado nesta tese, na segunda seção, descreve o método de programação matemática utilizado para resolver os problemas de otimização, e por fim, apresenta diversos cálculos de sensibilidade necessários para a resolução dos problemas de otimização.

5.1 Funções objetivo e restrições

De forma geral, o projeto simultâneo de otimização estrutural e controle pode ser posto como um problema de programação não linear em que certa função custo, muitas vezes multiobjetivo, é minimizada em relação aos parâmetros estruturais ρ_e e de controle ρ_c , na forma

$$\min_{\rho_e, \rho_c} f(\rho_e, \rho_c). \quad (5.4)$$

Admitindo-se que todas as minimizações são capazes de encontrar os seus respectivos ótimos globais, ou seja, que detalhes das estratégias de procura, valores iniciais das variáveis de projeto, características da função objetivo e outros dados não sejam considerados, fica claro que a Equação 5.4 pode ser substituída pela seguinte minimização aninhada

$$\min_{\rho_e} \min_{\rho_c} f(\rho_e, \rho_c). \quad (5.5)$$

Dessa forma, a otimização simultânea original pode ser transformada em uma otimização estrutural aninhada com uma otimização de controle como um subprocesso [Zhu et al., 2002]. Assim, pode-se escrever:

$$\min_{\rho_e} f_1(\rho_e), \quad (5.6)$$

onde

$$f_1(\rho_e) \triangleq \min_{\rho_c} f_2(\rho_e, \rho_c), \quad (5.7)$$

refere-se ao subprocesso que considera uma certa lei de controle. Como mostrado nas equações acima a primeira otimização, Equação 5.6, é a otimização estrutural em relação às variáveis de projeto estrutural, enquanto a sub-otimização, Equação 5.7, é a otimização de controle em relação às variáveis de controle. Dessa forma, sempre que as variáveis estruturais são modificadas, o subprocesso é chamado e novas variáveis de controle são calculadas.

Uma vez que a otimização estrutural e de controle são tratadas separadamente nesse processo aninhado, as diversas técnicas para projeto estrutural e de controle podem ser combinadas e implementadas sem dificuldades. Todavia, é importante notar que a otimização original, representada pela Equação 5.4, e a nova otimização, representada pelas Equações 5.6 e 5.7, podem convergir para soluções ótimas distintas. Isso porque, a obtenção de soluções idênticas depende fortemente dos detalhes das estratégias de procura, valores iniciais das variáveis de projeto, características da função objetivo, etc.

Esta tese utilizará a abordagem aninhada supracitada. Assim, o problema global de projeto simultâneo é resolvido de forma iterativa, e os dois problemas específicos (estrutural e de controle) são resolvidos separadamente a cada iteração. Nessa metodologia, a otimização estrutural pode ser definida como a minimização da flexibilidade média dependente das

variáveis de projeto estrutural (ρ_e) que definirão onde, na estrutura, deve-se colocar material sólido (elástico isotrópico ou piezolétrico) e onde se devem colocar vazios. A otimização de controle se baseará na maximização do traço do Gramiano de controlabilidade do sistema de controle LQR ótimo, dependente das variáveis de projeto de controle (ρ_c) que definirão em quais regiões deve-se ter material comum e em quais regiões deve-se ter material piezolétrico (atuadores). Além disso, a otimização de controle é capaz de definir a matriz de ganhos de realimentação \mathbf{G} do sistema de controle LQR ótimo.

5.1.1 Modelo material para o caso de otimização simultânea com localização ótima de material piezolétrico

O modelo material para otimização topológica proposto neste trabalho inclui dois materiais sólidos, material elástico isotrópico e material piezolétrico, além de vazios. Dessa forma, o modelo material que define as propriedades elásticas $[\mathbf{c}^E]$, de acoplamento piezolétrico $[\boldsymbol{\epsilon}^S]$, dielétricas $[\mathbf{e}]$, e ainda o peso específico γ , é dado por:

$$\begin{aligned} [\mathbf{c}^E] &= \rho_e^{p1} (\rho_c^{p2} [\mathbf{c}_{pzt}^E] + (1 - \rho_c^{p2}) [\mathbf{c}_{elas}^E]), \\ [\boldsymbol{\epsilon}^S] &= \rho_e^{p1} \rho_c^{p3} [\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S], \\ [\mathbf{e}] &= \rho_e^{p1} \rho_c^{p3} [\mathbf{e}_{pzt}], \\ \gamma &= \rho_e (\rho_c \gamma_{pzt} + (1 - \rho_c) \gamma_{elas}), \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde $[\mathbf{c}^E]$, $[\boldsymbol{\epsilon}^S]$, $[\mathbf{e}]$, e γ definem as propriedades efetivas do material interpolado. $[\mathbf{c}_{elas}^E]$, $[\mathbf{c}_{pzt}^E]$ são as propriedades elásticas do material não piezolétrico e piezolétrico respectivamente; $[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S]$ e $[\mathbf{e}_{pzt}]$ definem as propriedades de acoplamento eletromecânico e dielétricas do material piezolétrico, sendo nulas para o material não piezolétrico; e γ se refere ao peso específico de cada material. ρ_e e ρ_c são as variáveis de projeto estrutural e de controle, respectivamente. Também conhecidas como pseudodensidades, as variáveis de projeto, nesta tese, são definidas em cada elemento finito. Observa-se, analisando as Equações 5.8, que material elástico isotrópico é obtido quando $\rho_e = 1$ e $\rho_c = 0$, material piezolétrico é obtido quando $\rho_e = 1$ e $\rho_c = 1$, e vazio é obtido quando $\rho_e = \rho_c = 0$. $p1$, $p2$ e $p3$ são os expoentes de penalização que tentam recuperar a presença ou ausência de material sólido (material piezolétrico ou não) e as propriedades piezolétricas, respectivamente.

Na etapa de projeto de controle, dentro do processo aninhado, esse modelo material

distribui o material piezelétrico de forma ótima, contribuindo efetivamente para a otimização do controle. Esse modelo material já foi utilizado em outros estudos [Carbonari et al., 2007], e um modelo muito semelhante é citado em Bendsøe e Sigmund, 2003. Porém, de acordo com a bibliografia pesquisada, ainda não foi utilizado em um projeto de otimização simultâneo para topologia estrutural e de controle.

5.1.2 Projeto de otimização estrutural

Como dito anteriormente, a função objetivo estrutural que utilizaremos neste trabalho é a minimização da flexibilidade mecânica (maximização da rigidez global). A flexibilidade é proporcional ao trabalho das forças externas, e pode ser dada pela expressão

$$W(\rho_e, \rho_c) = f_e = \mathbf{f}^T \mathbf{u}, \quad (5.9)$$

onde \mathbf{f} e \mathbf{u} são respectivamente um vetor de forças estáticas e o vetor de deslocamentos globais da estrutura gerados por esse carregamento. Apesar de a função flexibilidade depender da variável de projeto ρ_c , que define a quantificação do material piezelétrico, o projeto de otimização estrutural prevê somente a minimização da flexibilidade em relação à variável ρ_e , que define a presença ou não de material sólido (piezelétrico ou não piezelétrico). Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \min_{\rho_e} f_e(\rho_e, \rho_c), \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} 0 < \rho_{ei} \leq 1, & (i = 1, 2, \dots, N_e), \\ V_e = \frac{\int_{\Omega} \rho_{ei} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \leq V_e^{\max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde ρ_e é o vetor de variáveis de projeto estruturais, ρ_{ei} é a componente para o i -ésimo elemento e N_e é o número de variáveis de projeto estruturais (igual ao número de elementos finitos). A segunda restrição limita o volume total de material (piezelétrico ou elástico isotrópico) a uma fração de volume V_e^{\max} pré-estabelecida. O grupo de variáveis ρ_e , que minimiza a flexibilidade, é encontrado ao final dessa otimização estrutural. Definindo assim, a topologia estrutural, ou seja, onde se tem material sólido e onde se tem vazios.

5.1.3 Projeto de controle para redução de vibrações

Critérios de otimização para controle baseados na resposta do sistema ou energia estão geralmente ligados a condições iniciais, leis de controle e excitações. Entretanto, em geral, não se tem conhecimento das condições iniciais ou dos distúrbios excitadores [XiaoXiang e Jun, 2010]. O posicionamento de atuadores em um sistema estrutural controlado obviamente altera o comportamento desse. Nesta tese, a localização de atuadores é otimizada com a finalidade de reduzir, da melhor forma possível, vibrações estruturais. Nesse sentido, busca-se uma estratégia de posicionamento que seja adequada em diversas situações. Otimizações guiadas pelos graus de controlabilidade são independentes das condições iniciais e leis de controle e, portanto, parecem úteis na resolução deste problema.

Obviamente a matriz de entradas de controle \mathbf{B} , de uma representação em espaço de estados, contém informações sobre a localização dos atuadores e tem um grande impacto no cálculo do Gramiano de controlabilidade \mathbf{W}_c [Nguyen e Georges, 2006]. Dessa maneira, fica claro que para encontrar a melhor localização dos atuadores e, conseqüentemente, melhorar a controlabilidade do sistema deve-se maximizar \mathbf{W}_c de acordo com alguma escala de medida. Assim, a função objetivo de controle que utilizaremos neste trabalho é a maximização do traço do Gramiano de controlabilidade do sistema de controle LQR [Nguyen e Georges, 2006]. E esse índice ótimo é dado por:

$$f(\rho_e, \rho_c) = f_c = \text{tr}(\mathbf{W}_c), \quad (5.11)$$

onde \mathbf{W}_c é o Gramiano de controlabilidade definido na seção 4.4.2. Dessa forma, a otimização de controle pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \max_{\rho_c} f_c(\rho_e, \rho_c), \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} 0 < \rho_{ci} \leq 1, & (i = 1, 2, \dots, N_c), \\ V_c = \frac{\int_{\Omega} \rho_{ci} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \leq V_c^{\max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde ρ_c é o vetor de variáveis de projeto de controle, ρ_{ci} é i -ésima componente deste vetor, e N_c é o número de variáveis de projeto de controle (igual ao número de elementos finitos). A segunda restrição limita o volume total de material piezelétrico a uma fração de volume V_c^{\max} pré-estabelecida.

Um vetor de variáveis ρ_c que maximiza o traço do Gramiano de controlabilidade f_c é encontrado ao final desse problema de otimização. Dessa forma, a localização do material piezolétrico (atuadores) está definida, e a matriz de ganhos de realimentação \mathbf{G} pode ser calculada.

5.2 Resolução dos problemas de otimização via programação linear sequencial

Utilizar-se-á a programação linear sequencial (SLP) a fim de resolver os problemas de otimização descritos nesta tese. Na primeira parte desta seção, os métodos de programação matemática utilizados para resolver problemas de otimização são brevemente revistos; após, o método SLP usado nesta tese é descrito.

5.2.1 Programação matemática

A programação matemática é uma importante ferramenta do ramo da matemática relacionado a tomada de decisões. Sendo amplamente utilizada em economia, administração e outras disciplinas. O primeiro problema de otimização estrutural formulado e resolvido por programação matemática é devido a Schmit, L.A. 1960 [apud Cheng, 1992].

Um problema de programação matemática tem o objetivo de extremar uma função $f(\rho)$, definida em um espaço dimensional \mathbb{R}^N e circundada por um conjunto de restrições de igualdade $h(\rho) = 0$ e/ou desigualdade $g(\rho) \leq 0$, e pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \min_{\rho} f(\rho), \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} g(\rho) \leq 0, \\ h(\rho) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

A busca do vetor ρ que torna extremo o valor da função $f(\rho)$ é realizada através de um método iterativo. Uma procura sistemática é realizada no domínio de projeto, a partir de uma estimativa inicial, até que um novo projeto mais próximo do ótimo seja gerado. Esse “projeto intermediário” necessariamente deve satisfazer as condições de equilíbrio e as restrições. A busca termina quando um determinado critério, que de alguma forma indica a proximidade do ótimo, é satisfeito.

Dependendo dos tipos de funções que constituem as restrições e a função objetivo,

bem como, das variáveis de projeto, a programação matemática recebe diferentes denominações, destacando-se:

- Programação Linear (LP): função objetivo e restrições lineares;
- Programação Quadrática (QP): função objetivo quadrática e restrições lineares;
- Programação Não-Linear (NLP): função objetivo e/ou restrições não-lineares;
- Programação Inteira (IP): busca da solução ótima dentro de um conjunto de valores discretos.

É muito difícil encontrar o ótimo global em um problema de otimização estrutural. Muitos algoritmos dedicados a solução de problemas de otimização estrutural acabam em um mínimo local como solução, ou ainda, param devido ao alto custo computacional. Entretanto, há um classe de problemas, conhecidos como problemas convexos, em que pode-se provar que o mínimo local é também o mínimo global [Cheng, 1992; Haftka e Gürdal, 1992]. Um problema é dito convexo se a função objetivo e o domínio admissível formado pelas restrições do problema forem convexos [Luenberger, 1969; Arora, 2004]. Na prática, é difícil mostrar que muitos problemas de otimização sejam convexos. No entanto, esse resultado ainda é muito válido, desde que, muitos problemas são aproximados por uma série de aproximações convexas. A aproximação mais simples desse tipo é a aproximação linear da função objetivo e das restrições.

Um tipo de técnica de otimização que é muito utilizada em otimização estrutural é a programação aproximada sequencial. No método de aproximação sequencial, um problema original de programação não linear e com restrições é abordado como uma sequencia de programações aproximadas [Cheng, 1992]. Dependendo do tipo de aproximação, podemos ter a programação linear sequencial, programação quadrática sequencial, o método das assíntotas móveis, entre outras.

5.2.2 Programação linear (LP) e Programação linear sequencial (SLP)

Como dito acima, a programação linear é uma classe de métodos baseados na programação matemática, em que a função objetivo e as restrições são lineares. Muitos problemas práticos podem ser diretamente aplicados a essa técnica, que é relativamente simples

e robusta. Além disso, mesmo que as funções envolvidas no problema sejam não lineares, elas podem ser linearizadas pela aplicação de Séries de Taylor. Dessa forma, uma função $f(\rho) \in \mathbb{R}$ e $\rho \in \mathbb{R}^N$ pode ser expandida por séries de Taylor na vizinhança de ρ^* da seguinte forma:

$$f(\rho) = f(\rho^*) + \nabla^T f(\rho - \rho^*) + \frac{1}{2}(\rho - \rho^*)^T \mathbf{H}(\rho - \rho^*) + R, \quad (5.14)$$

onde $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$, $\rho^* = \{\rho_1^*, \rho_2^*, \dots, \rho_N^*\}$, ∇f e \mathbf{H} são respectivamente o vetor gradiente e a matriz Hessiana, e R é o resíduo, de magnitude inferior aos demais termos.

Por se tratar de um algoritmo que resolve apenas problemas lineares ou linearizados, a Série de Taylor é truncada após os termos lineares. Dessa forma, a informação proveniente da matriz Hessiana é desprezada. Com isso, o problema de minimização de uma função $f(\rho)$ qualquer, com restrições de desigualdade $g(\rho) \leq 0$ e igualdade $h(\rho) = 0$, é reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min f(\rho) &= f(\rho^*) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^*) \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \Big|_{\rho^*}, \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} g(\rho) = g(\rho^*) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^*) \frac{\partial g}{\partial \rho_i} \Big|_{\rho^*} \leq 0, \\ h(\rho) = h(\rho^*) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^*) \frac{\partial h}{\partial \rho_i} \Big|_{\rho^*} = 0, \\ \rho_i^l \leq \rho_i \leq \rho_i^u \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{cases} \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde N é o número de variáveis de projeto. Pode-se notar que, além da função objetivo, as restrições também foram linearizadas. Pelo fato da aproximação de 1ª ordem por séries de Taylor só ser válida na vizinhança de ρ^* , um novo conjunto de restrições deve ser adicionado ao problema original. Esse conjunto de restrições artificiais, conhecido como limites móveis, são as inequações presentes na última linha da Equação 5.15.

Como mencionado anteriormente, na programação linear sequencial (SLP), um problema original (na maioria das vezes não linear) é abordado como uma sequência de programações lineares. Basicamente, o método SLP é um algoritmo iterativo, que resolve um problema de otimização da seguinte forma: os valores da função objetivo e restrições, bem como, a sensibilidade do sistema são calculados a partir de uma estimativa inicial para as variáveis de projeto. Além disso, são definidos os valores dos limites móveis. Esses limites

móveis são geralmente expressos em função de uma porcentagem aplicada sobre o valor atual das variáveis de projeto. Dessa forma, pode-se estabelecer uma programação linear. Resolve-se o problema de programação linear (LP) e obtêm-se novos valores para as variáveis de projeto, que é uma solução aproximada do problema original. Verifica-se a convergência. Se a convergência não foi atingida, o novo conjunto de valores é reintroduzido, e todo o processo se repete até a convergência.

O método SLP é bastante competitivo em relação a outros métodos específicos para problemas não lineares, quando o problema apresenta grandes dimensões e não linearidades moderadas. Além disso, se a solução se encontrar em um dos vértices do poliedro convexo, a convergência pode ser bastante rápida [Cheng, 1992].

Apesar do bom desempenho do algoritmo SLP, um grande problema é a escolha adequada dos limites móveis. Uma escolha inadequada para o valor dos limites móveis pode dificultar muito a convergência do problema. De forma geral, os limites móveis devem ser ajustados ao longo do processo, e reduzidos quando perto do ótimo. Parte dessa necessidade, se deve ao fato que a precisão da aproximação deve aumentar a medida que chega-se mais perto do ótimo [Haftka e Gürdal, 1992]. Uma redução nos limites móveis antes do momento ideal pode tornar o processo de convergência demasiadamente lento, podendo inclusive causar uma parada prematura no processo de solução. Por outro lado, se o valor selecionado for muito elevado, o algoritmo pode sofrer oscilações e até divergir. Esse possível problema pode ocorrer porque os algoritmos de programação linear procuram soluções apenas nos vértices de um poliedro convexo gerado pelas restrições. Dessa forma, o algoritmo pode ficar “preso” em dois vértices, que representam duas soluções viáveis.

O artigo de Wujek e Renaud, 1998 apresenta uma boa revisão sobre estratégias de atualização dos limites móveis, e ainda propõe um método de atualização dos limites móveis baseado nos gradientes das funções envolvidas. Similarmente, uma comparação de estratégias de aproximação para limites móveis baseadas em gradientes é apresentada por Lamberti e Pappalè, 2000. Alguns autores preferem atualizar os limites móveis através de métodos heurísticos. Haftka e Gürdal, 1992, por exemplo, propõem um valor inicial para os limites, variando entre 10% e 30%. Além disso, é proposta uma redução dos limites de 10% à 50% do seu valor inicial até o final do processo.

Neste trabalho é proposta uma atualização baseada na história das iterações, aumentando ou reduzindo o valor dos limites móveis dependendo do comportamento das variáveis de projeto. A atualização é realizada a partir de um valor absoluto μ que deve ser subtraído (limite móvel inferior) ou adicionado (limite móvel superior) a uma determinada variável de projeto x_i . Ou seja, a cada iteração temos:

$$\begin{aligned}\rho_i^l &= \max(0.001, \rho_i - \mu_i) && \rightarrow \text{Define o limite inferior,} \\ \rho_i^u &= \min(1.00, \rho_i + \mu_i) && \rightarrow \text{Define o limite superior,}\end{aligned}\tag{5.16}$$

E o calibrador μ é atualizado da seguinte maneira: se o sinal da diferença de uma variável de projeto em questão, de uma iteração para outra, se manter o mesmo, o valor de μ é aumentado em 10% do seu valor atual; até um valor máximo de 0.20, ou seja, 20% do valor máximo de uma variável de projeto. Caso contrário, o valor de μ é diminuído em 10%; até um valor mínimo de 0.01, ou seja, 1% do valor máximo de uma variável de projeto. Assim, a cada iteração temos:

$$\begin{aligned}\text{Se o sinal se mantém} &&& \rightarrow \mu_i = \min(\mu_i * 1.10, 0.20), \\ \text{Se o sinal muda} &&& \rightarrow \mu_i = \max(\mu_i * 0.90, 0.01).\end{aligned}\tag{5.17}$$

Em outras palavras, se o valor de uma variável de projeto está aumentando (ou diminuindo) continuamente, os limites móveis devem se tornar maiores; de forma inversa, se o valor de uma variável de projeto aumenta e diminui alternadamente, os limites móveis devem se tornar menores.

5.2.3 Critério de convergência

Um critério de convergência ou parada é necessário para determinar o final das iterações de um algoritmo de otimização. O critério de convergência para o Método SLP implementado nesta tese foi baseado no número de iterações e na mudança do vetor de variáveis de projeto ao longo do processo de otimização. Decidiu-se que o algoritmo SLP não deveria parar antes de um determinado número mínimo de iterações. Além disso, definiu-se que após esse número mínimo de iterações o algoritmo deveria parar quando a máxima mudança em módulo das variáveis de projeto (tanto estruturais quanto de controle) fosse menor que um determinado percentual.

5.3 Análise de sensibilidade

Algoritmos de otimização de primeira ordem, como a programação linear sequencial, exigem as sensibilidades (derivadas) da função objetivo e restrições em relação às variáveis de projeto. Para os problemas em questão é possível calcular as sensibilidades analiticamente.

5.3.1 Sensibilidade do modelo material

As sensibilidades em relação às variáveis de projeto ρ_e e ρ_c , do modelo material descrito nas Equações 5.8, podem ser facilmente obtidas, como segue:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[\mathbf{c}^E]}{\partial\rho_e} &= p1\rho_e^{p1-1}(\rho_c^{p2}[\mathbf{c}_{pzt}^E] + (1 - \rho_c^{p2})[\mathbf{c}_{elas}^E]), \\
 \frac{\partial[\boldsymbol{\epsilon}^S]}{\partial\rho_e} &= p1\rho_e^{p1-1}\rho_c^{p3}[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S], \\
 \frac{\partial[\mathbf{e}]}{\partial\rho_e} &= p1\rho_e^{p1-1}\rho_c^{p3}[\mathbf{e}_{pzt}], \\
 \frac{\partial\gamma}{\partial\rho_e} &= \rho_c\gamma_{pzt} + (1 - \rho_c)\gamma_{elas},
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[\mathbf{c}^E]}{\partial\rho_c} &= p2\rho_e^{p1}\rho_c^{p2-1}([\mathbf{c}_{pzt}^E] - [\mathbf{c}_{elas}^E]), \\
 \frac{\partial[\boldsymbol{\epsilon}^S]}{\partial\rho_c} &= p3\rho_e^{p1}\rho_c^{p3-1}[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S], \\
 \frac{\partial[\mathbf{e}]}{\partial\rho_c} &= p3\rho_e^{p1}\rho_c^{p3-1}[\mathbf{e}_{pzt}], \\
 \frac{\partial\gamma}{\partial\rho_c} &= \rho_e(\gamma_{pzt} - \gamma_{elas}),
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

onde todos os termos foram apresentados na Seção 5.1.1.

5.3.2 Sensibilidade da flexibilidade

Como dito anteriormente, a flexibilidade é definida como o trabalho das forças externas, dado pela expressão

$$W(\rho_e, \rho_c) = \mathbf{f}^T \mathbf{u}, \tag{5.20}$$

onde \mathbf{f} e \mathbf{u} são respectivamente um vetor de forças e o vetor de deslocamentos globais da estrutura gerados por este carregamento.

Na otimização topológica, devido ao número considerado de variáveis de projeto, o método adjunto torna-se o mais eficiente por não calcular explicitamente as derivadas dos deslocamentos [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Para o problema de mínima flexibilidade, pode-se reescrever a função W adicionando a função zero:

$$W(\rho_e, \rho_c) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}), \quad (5.21)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor qualquer arbitrário e fixo (independente de ρ_e e ρ_c), e \mathbf{K} é a matriz de rigidez estrutural. Assim, após rearranjar os termos, a diferenciação da equação anterior em relação a uma variável de projeto estrutural ρ_e resulta em

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_e} = (\mathbf{f}^T - \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} - \tilde{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u}. \quad (5.22)$$

Simplificando esta equação, pode-se reescrever:

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_e} = -\tilde{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u}, \quad (5.23)$$

quando $\tilde{\mathbf{u}}$ satisfaz a equação adjunta

$$\mathbf{f}^T - \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} = \mathbf{0}. \quad (5.24)$$

Esta última equação está na forma de uma equação de equilíbrio e, para o caso de flexibilidade, pode-se obter diretamente que $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Lembrando que utilizaremos a configuração de curto circuito, o problema estático para um material piezelétrico pode ser resolvido de acordo com a Equação 2.43, dada por:

$$\mathbf{H}_{uu} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (5.25)$$

Dessa forma, a Equação 5.23 pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_e} = -\tilde{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{H}_{uu}}{\partial \rho_e} \mathbf{u}. \quad (5.26)$$

Relembrando as Equações 2.39 e 2.35, dadas por:

$$\mathbf{H}_{uu} = \mathbf{G}_{uu}, \quad (5.27)$$

e

$$\mathbf{G}_{uu} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{ui}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ui}^T, \quad (5.28)$$

pode-se obter

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{uu}}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_e} - \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{ui}}{\partial \rho_e} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ui}^T + \mathbf{K}_{ui} \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho_e} \mathbf{K}_{ui}^T + \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ui}^T}{\partial \rho_e} \right), \quad (5.29)$$

onde $\partial \mathbf{K}_{uu}/\partial \rho_e$ é obtido a partir das matrizes locais de rigidez mecânica

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}^e}{\partial \rho_e} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial [\mathbf{c}^E]}{\partial \rho_e} \mathbf{B}_u d\Omega, \quad (5.30)$$

e $\partial \mathbf{K}_{ui}/\partial \rho_e$ é obtido a partir das matrizes locais de acoplamento piezoelectrico

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}^e}{\partial \rho_e} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial [\mathbf{e}]}{\partial \rho_e} \mathbf{B}_\phi d\Omega. \quad (5.31)$$

Para calcular a derivada da inversa de \mathbf{K}_{ii} , faz-se

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho_e} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}}{\partial \rho_e} \mathbf{K}_{ii}^{-1}, \quad (5.32)$$

e, por fim, $\partial \mathbf{K}_{ii}/\partial \rho_e$ é obtido a partir das matrizes locais de capacitância elétrica

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}^e}{\partial \rho_e} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial [\epsilon^S]}{\partial \rho_e} \mathbf{B}_\phi d\Omega. \quad (5.33)$$

Assim as derivadas da flexibilidade são facilmente calculadas. É importante notar que essas derivadas são “localizadas”, ou seja, requerem informações somente em nível de elemento. Entretanto, dependem indiretamente das pseudodensidades de todos os elementos devido ao vetor de deslocamentos presente na Equação 5.26.

Por fim, observando as Equações 5.18, quando aplicadas às Equações 5.30, 5.31 e 5.33, nota-se que a sensibilidade da flexibilidade em relação às variáveis de projeto ρ_e serão sempre negativas, ou seja, a adição de material, piezoelectrico ou não, diminui a flexibilidade (aumenta a rigidez). Por outro lado, o sinal da sensibilidade em relação às variáveis de projeto ρ_c depende da diferença entre os valores das matrizes de propriedades elásticas dos dois materiais (elástico isotrópico e piezoelectrico).

5.3.3 Sensibilidade do Gramiano de controlabilidade

Como o comportamento do sistema de controle depende fortemente das variáveis de projeto bem como da lógica de realimentação, uma análise de sensibilidade sistemática é essencial para o desenvolvimento de um algoritmo bem comportado para a solução de um problema dessa complexidade. As sensibilidades de primeira ordem, para a fase de otimização do sistema de controle, são dadas a seguir. O Gramiano de controlabilidade \mathbf{W}_c , para um conjunto de parâmetros em espaço de estados $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, é obtido resolvendo a seguinte equação de Lyapunov [Gawronski, 2004]

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}. \quad (5.34)$$

As sensibilidades dessas matrizes em relação às variáveis de projeto ρ_c , podem ser facilmente obtidas derivando a expressão anterior. Para o Gramiano de controlabilidade, pode-se escrever:

$$\mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{W}_c}{\partial\rho_c} + \frac{\partial\mathbf{W}_c}{\partial\rho_c}\mathbf{A}^T + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\rho_c}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\frac{\partial\mathbf{A}^T}{\partial\rho_c} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\rho_c}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{B}^T}{\partial\rho_c} = \mathbf{0}. \quad (5.35)$$

Porém, para o controle LQR utilizado nesta tese, deve-se notar que a matriz de controle \mathbf{B} utilizada nessas operações é obtida pela multiplicação $\mathbf{B} = -\mathbf{B}_\phi\mathbf{G}$, de acordo com a Equação 4.39.

Desde que os últimos quatro termos da Equação 5.35 são conhecidos, pode-se obter a sensibilidade do Gramiano de controlabilidade $\partial\mathbf{W}_c/\partial\rho_c$, resolvendo uma nova equação de Lyapunov. As sensibilidades em relação às variáveis de projeto dos parâmetros em espaço de estados \mathbf{A} e \mathbf{B} podem ser obtidas subsequencialmente. Partindo das expressões dadas na Equação 4.34, e lembrando que no caso em estudo $\mathbf{B} = -\mathbf{B}_\phi\mathbf{G}$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\rho_c} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial\Omega^2}{\partial\rho_c} & -2\mathbf{Z}\frac{\partial\Omega}{\partial\rho_c} \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

e

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\rho_c} = -\frac{\partial\mathbf{B}_\phi}{\partial\rho_c}\mathbf{G} - \mathbf{B}_\phi\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\rho_c}. \quad (5.37)$$

As derivadas de \mathbf{B}_ϕ e \mathbf{G} podem ser obtidas por

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\phi}{\partial \rho_c} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \Psi^T}{\partial \rho_c} \mathbf{H}_{up} - \Psi^T \frac{\partial \mathbf{H}_{up}}{\partial \rho_c} \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

e, a partir da Equação 4.38,

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \rho_c} = \frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \rho_c} \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{P} + \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}_\phi^T}{\partial \rho_c} \mathbf{P} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_c}, \quad (5.39)$$

onde $\partial \mathbf{B}_\phi / \partial \rho_c$ já foi dada acima. Como \mathbf{R} é uma matriz de pesos constante $\partial \mathbf{R}^{-1} / \partial \rho_c = \mathbf{0}$. Partindo da equação de Riccati para estado permanente (Equação 4.37), a derivada parcial $\partial \mathbf{P} / \partial \rho_c$ é obtida resolvendo-se a seguinte equação de Lyapunov

$$\mathbf{A}_c^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_c} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_c} \mathbf{A}_c + \mathbf{P} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_c} + \frac{\partial \mathbf{B}_\phi}{\partial \rho_c} \mathbf{G} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \rho_c} + \mathbf{G}^T \frac{\partial \mathbf{B}_\phi^T}{\partial \rho_c} \right) \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (5.40)$$

onde $\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}_\phi \mathbf{G}$ é a matriz de controle em malha fechada.

Por fim, para calcular a Equação 5.38 necessita-se obter $\partial \mathbf{H}_{up} / \partial \rho_c$. Lembrando, a partir das equações dadas na Seção 2.6, que

$$\mathbf{H}_{up} = \mathbf{G}_{up} \mathbf{T}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_{up} = \mathbf{K}_{up} - \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ip}, \quad (5.41)$$

pode-se escrever

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{up}}{\partial \rho_c} = \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{up}}{\partial \rho_c} - \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{ui}}{\partial \rho_c} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ip} + \mathbf{K}_{ui} \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho_c} \mathbf{K}_{ip} + \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ip}}{\partial \rho_c} \right) \right) \mathbf{T}_0, \quad (5.42)$$

onde $\partial \mathbf{K}_{up} / \partial \rho_c$ e $\partial \mathbf{K}_{ui} / \partial \rho_c$ são obtidos a partir das matrizes locais de acoplamento piezolétrico

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}^e}{\partial \rho_c} = \int_{\Omega^e} \mathcal{B}_u^T \frac{\partial [\mathbf{e}]^T}{\partial \rho_c} \mathcal{B}_\phi d\Omega. \quad (5.43)$$

Para calcular a derivada da inversa de \mathbf{K}_{ii} , faz-se

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho_c} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}}{\partial \rho_c} \mathbf{K}_{ii}^{-1}, \quad (5.44)$$

e, por fim, $\partial \mathbf{K}_{ii} / \partial \rho_c$ e $\partial \mathbf{K}_{ip} / \partial \rho_c$ são obtidos a partir das matrizes locais de capacitância

elétrica

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}^e}{\partial \rho_c} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{\phi}^T \frac{\partial [\epsilon^S]}{\partial \rho_c} \mathbf{B}_{\phi} d\Omega. \quad (5.45)$$

Dessa forma, as únicas sensibilidades que ainda não foram desenvolvidas são as das matrizes de frequências naturais $\mathbf{\Omega}$ e de modos de vibração $\mathbf{\Psi}$. Por se tratarem da diferenciação de autovalores e autovetores, serão vistas na próxima seção.

5.3.4 Sensibilidade de autovalores e autovetores

As sensibilidades de autovalores e autovetores em relação a parâmetros estruturais são de grande importância no projeto e otimização de estruturas. Diversos são os trabalhos que tratam deste assunto. Como as Equações 5.36 e 5.38 requerem o conhecimento das derivadas dos modos de vibração e das frequências naturais em relação as variáveis de projeto, essa seção trata deste assunto.

Nelson, 1976, propôs um algoritmo eficiente para o cálculo da derivada de autovetores com autovalores distintos para um autossistema real ($\in \mathbb{R}$). O método apresentado por Nelson tem como principal vantagem o fato de necessitar apenas das informações do autovetor que está sendo diferenciado. Entretanto, o método não pode ser diretamente utilizado para casos com autovalores repetidos. Alguns autores tentaram desenvolver o trabalho de Nelson para o problema de sensibilidades com autovalores repetidos durante a década de 1980, mas as soluções podiam falhar em algumas circunstâncias. Na década seguinte, alguns outros trabalhos apresentavam em suas soluções matrizes mal condicionadas para o mesmo problema [Hou e Kenny, 1992*, Lee e Jung, 1997a[†], b[‡] *apud* Wu et al., 2007].

Mais recentemente, Irwanto et al., 2003, resolveram o problema de cálculo de derivadas de autovalores e autovetores em estruturas cíclicas. Esse trabalho utiliza-se das

*Hou, G.J.W., Kenny, S.P. Eigenvalue and eigenvector approximate analysis for repeated eigenvalue problems, AIAA Journal, vol. 30, pp. 2317-2324, 1992.

[†]Lee, I.W., Jung, G.H. An efficient algebraic method for the computation of natural frequencies and mode shape sensitivities - Part I. Distinct natural frequencies, Computers and Structures, vol. 62, pp. 429-435, 1997.

[‡]Lee, I.W., Jung, G.H. An efficient algebraic method for the computation of natural frequencies and mode shape sensitivities - Part II. Multiple natural frequencies, Computers and Structures, vol. 62, pp. 437-443, 1997.

propriedades simétricas dessas estruturas para reduzir os custos computacionais. van der Aa et al., 2007, investigaram as derivadas de primeira ordem para um autosistema geral complexo.

Esta tese utiliza a metodologia proposta por Wu et al., 2007. As derivadas de autovetores com autovalores distintos e/ou repetidos é realizada para autosistemas reais e simétricos. Esse método, apesar de preservar os méritos dos estudos anteriores, não requer o cancelamento de linhas e colunas, nem o reordenamento destas. Além disso, a matriz de coeficientes do sistema estendido é ajustada para reduzir o número de condicionamento.

Um problema de autovalores real e simétrico, pode ser dado por:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}_i &= \mathbf{0} , \\ \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_j &= \delta_{ij} , \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.46)$$

onde \mathbf{K} e \mathbf{M} são as matrizes de rigidez estrutural e de massa, respectivamente, cujos elementos dependem de um parâmetro ρ , λ_i é um autovalor, $\boldsymbol{\psi}_i$ o autovetor correspondente, n é o número total de graus de liberdade, e δ_{ij} é o operador de Kronecker.

Apesar do artigo original de Wu et al., 2007 considerar a ocorrência de autovalores repetidos, esse problema não foi considerado, por não ter sido necessário no problema analisado aqui. Dessa forma, a derivada de um autovalor λ_i em relação a uma variável de projeto ρ pode ser obtida resolvendo o seguinte subproblema de autovalores:

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \right) \boldsymbol{\psi}_i - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho} = 0. \quad (5.47)$$

Por conveniência, pode-se denotar que $\mathbf{F}_i \equiv \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}$. Pela regra da multiplicação, pode-se diferenciar a primeira linha da Equação 5.46 para obter a derivada de um autovetor $\partial \boldsymbol{\psi}_i / \partial \rho$.

Assim, pode-se escrever

$$\mathbf{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial \rho} = - \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i , \quad (5.48)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho} \mathbf{M} , \quad (5.49)$$

e $\partial \lambda_i / \partial \rho$ é dado pela Equação 5.47. Assume-se que as derivadas dos autovetores $\partial \boldsymbol{\psi}_i / \partial \rho$

tem a forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial \rho} = \mathbf{v}_i + c \boldsymbol{\psi}_i, \quad (5.50)$$

onde \mathbf{v}_i é uma solução particular da Equação 5.48 e satisfaz

$$\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i. \quad (5.51)$$

De acordo com Wu et al., 2007, \mathbf{v}_i pode ser obtido resolvendo a seguinte equação algébrica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i & l \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i \\ l (\mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.52)$$

onde

$$l = \max_{1 \leq j \leq n} (k_{jj}) / \|\mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i\|_\infty, \quad (5.53)$$

e, na solução, μ será igual a zero. Finalmente o coeficiente c pode ser determinado por

$$c = -\boldsymbol{\psi}_i^T \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i + \mathbf{M} \mathbf{v}_i \right). \quad (5.54)$$

É importante lembrar que o problema modal realizado nesta tese se baseia no que foi apresentado na Seção 2.6.2.

5.4 Sumário da metodologia proposta

Por razões de clareza, a metodologia proposta neste trabalho, incluindo a metodologia de otimização aninhada, os laços de programações lineares (SLP) e os cálculos de sensibilidade, pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Entrada de dados (otimização e MEF);
2. Montagem da tabela de elementos vizinhos para os filtros de sensibilidade;
3. Início do laço da programação linear sequencial (SLP);
4. Resolução do problema estático para as cargas externas;

5. Cálculo das sensibilidades do problema estrutural e aplicação do filtro a esses dados;
6. Resolução do problema de minimização da flexibilidade para as pseudodensidades estruturais;
7. Resolução do problema modal para o número de modos desejado;
8. Cálculo das sensibilidades do problema de controle e aplicação do filtro a esses dados;
9. Resolução do problema de maximização do traço do Gramiano de controlabilidade em relação as pseudodensidades de controle;
10. Verificação da convergência:
 - Se convergir, vá para a etapa 11;
 - Caso contrário, recalcular os limites e voltar para a etapa 4 com as novas pseudodensidades;
11. Saída e plotagem dos resultados.

O mesmo processo pode ser visto no fluxograma apresentado na Figura 5.1.

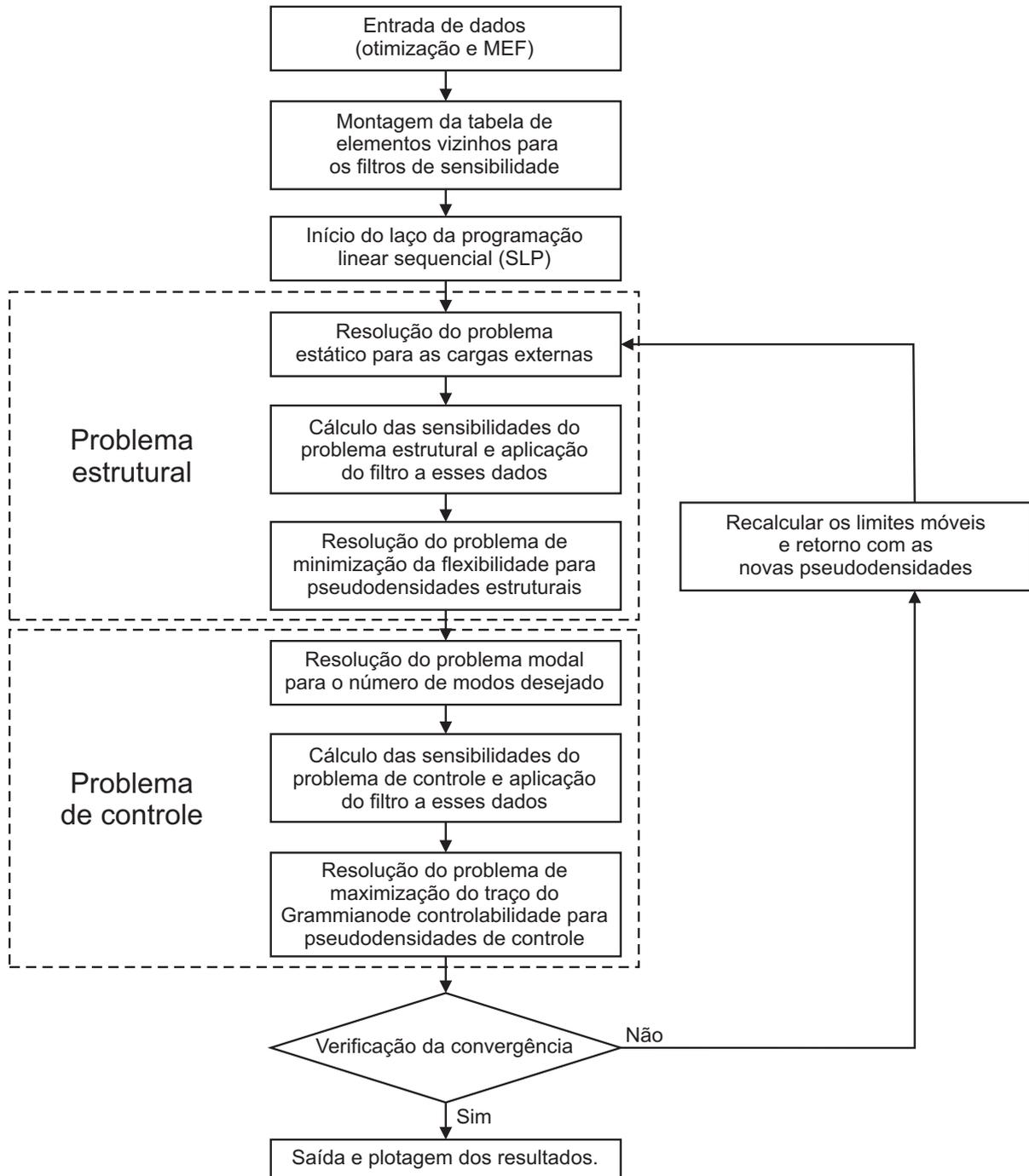


Figura 5.1 – Fluxograma do método implementado para o projeto simultâneo

6. RESULTADOS

A fim de verificar o desempenho da proposta de projeto simultâneo descrita neste trabalho, esta seção apresenta alguns resultados. Toda a metodologia aqui proposta foi implementada em MATLAB. Uma viga em balanço com medidas de 600 mm \times 150 mm \times 20 mm é analisada (Figura 6.1). Em todos os casos, as estruturas são discretizadas em 1800 ($60 \times 15 \times 2$) elementos finitos sólidos isoparamétricos de 8 nós, com três graus de liberdade mecânicos e um (1) grau de liberdade elétrico por nó. O projeto simultâneo busca a otimização estrutural via minimização da flexibilidade e a otimização do sistema de controle pela maximização do Gramiano de controlabilidade. Essas duas otimizações são baseadas na distribuição de material elástico isotrópico e material piezolétrico no domínio de projeto; de forma que, as variáveis de projeto estruturais definem a localização do material sólido/vazio (elástico isotrópico ou piezolétrico) e as variáveis de controle definem a localização do material piezolétrico (atuadores). As propriedades mecânicas do material elástico isotrópico (Alumínio) e do material piezolétrico (PZT5A), utilizados nestes resultados, são apresentadas na Tabela 6.1.

Na análise estrutural considerou-se a viga engastada com uma carga vertical estática na ponta (Figura 6.1). O valor da força estática é 1000 N e foi distribuída nos 3 nós presentes na ponta da viga. Devido, a configuração das condições de contorno, fica claro que a otimização estrutural busca maximizar a rigidez a flexão no plano xy .

Nas análises de controle, busca-se otimizar o sistema de controle pela ótima localização dos atuadores (material piezolétrico). Essa otimização busca maximizar o traço do Gramiano de controlabilidade. Como mostrarão os resultados, essa otimização diminui os picos de resposta do sistema e o tempo de amortecimento até uma posição desejada. Além de fixação na base da viga, considera-se que os graus de liberdade na direção z dos nós localizados no plano central xy são restringidos. Dessa forma, o controle atua nos movimentos de flexão no plano xy . Modelos modais truncados com um (1), dois e quatro modos de vibração flexionais no plano xy foram considerados. As correspondentes razões de

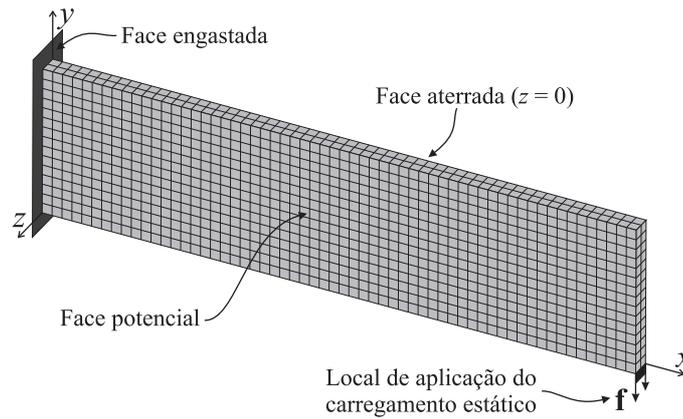


Figura 6.1 – Viga em balanço com 1800 elementos finitos sólidos isoparamétricos ($60 \times 15 \times 2$)

amortecimento modal consideradas têm os seguintes valores: 1.71%, 0.72%, 0.42% e 0.41% [Vasques e Rodrigues, 2006].

Utilizando material piezelétrico como atuadores, considerou-se modelos de controle com um (1), dois, seis e dez eletrodos independentes. As diferentes configurações para eletrodos podem ser vistas na Figura 6.2. Nessas figuras, a cor vermelha representa o posicionamento dos diferentes eletrodos. Além disso, pode-se ver nessa figura, elementos de cor amarela, nos quais as propriedades piezelétricas/elétricas foram desconsideradas para permitir a independência de cada eletrodo.

No total foram obtidas as topologias ótimas para 12 casos diferentes (3 modelos truncados \times 4 configurações de eletrodos).

Os parâmetros utilizados no projeto de otimização são os mesmos para todos os casos analisados. As restrições de volume são iguais a 50% e 5% para a restrição do volume total e restrição de volume piezelétrico, respectivamente. Os valores iniciais das pseudodensidades ρ_e e ρ_c são uniformes para todos os elementos e iguais a 0.40 e 0.04, respectivamente; desta forma, o problema de otimização se inicia logo abaixo do limite viável. Seguindo o critério de parada, o número mínimo de iterações é igual a 40, e o processo de otimização deve parar quando a modificação das variáveis de projeto de uma iteração para outra for menor que 4%.

Considerou-se um raio de filtragem $r_{\min}^e = 14.2$ mm para o filtro de sensibilidades utilizado na análise estrutural, que está relacionado a pseudodensidade ρ_e , e um raio de

Tabela 6.1 – Propriedades materiais

PZT5A		ALUMÍNIO	
constantes elásticas	(10^{10} N/m ²)	módulo de elasticidade	$71 \cdot 10^9$ N/m ²
c_{11}^E	12.1	densidade	2700 kg/m ³
c_{12}^E	7.54	coeficiente de Poisson	0.33
c_{13}^E	7.52		
c_{33}^E	11.1		
c_{44}^E	2.11		
c_{66}^E	2.26		
constantes piezelétricas	(C/m ²)		
e_{31}	-5.4		
e_{33}	15.8		
e_{51}	12.3		
constantes dielétricas	(F/m)		
ϵ_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$		
ϵ_{11}/ϵ_0	916		
ϵ_{33}/ϵ_0	830		
densidade	7750 kg/m ³		

filtragem $r_{\min}^c = 5$ mm para o filtro de sensibilidades que se refere a análise do sistema de controle, a qual está diretamente relacionada a pseudodensidade ρ_c . Comparando as medidas do elemento com o raio de filtragem para controle, nota-se que o filtro de sensibilidades para o problema de controle só considera a sensibilidade do próprio elemento. Essa medida para o raio de filtragem para controle foi escolhida devido ao fato de resultados preliminares não apresentarem grande influência do filtro de sensibilidades na distribuição de material piezelétrico. Os coeficientes de penalização do modelo material, p_1 , p_2 e p_3 , são iguais a 3 para todos os casos, e nenhuma técnica de continuação foi utilizada.

As matrizes de ponderação do índice de desempenho quadrático do sistema de controle são, para todos os casos, definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{17} \mathbf{I}(m) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}(m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{I}(s), \quad (6.1)$$

onde $\mathbf{I}(m)$ é uma matriz identidade de tamanho m , $\mathbf{I}(s)$ é uma matriz identidade de tamanho

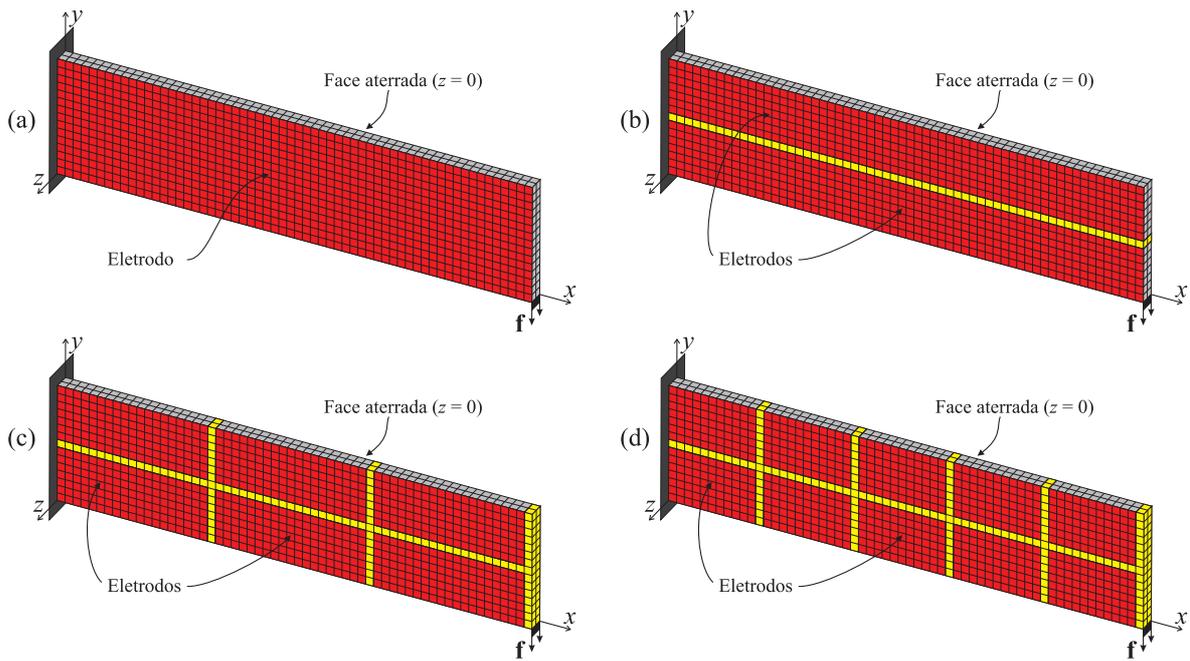


Figura 6.2 – Configurações para eletrodos potenciais. (a) 1 eletrodo, (b) 2 eletrodos, (c) 6 eletrodos e (d) 10 eletrodos independentes

s , m é o número de modos utilizados no modelo de controle, e s é o número de entradas do sistemas de controle, o qual é igual ao número de eletrodos utilizados. De acordo com Vasques e Rodrigues, 2006, o limite de resistência a um campo elétrico de uma cerâmica piezolétrica é 300 V/mm. Se a voltagem de controle ultrapassa esse limite pode ocorrer a despolarização do material, de forma que as propriedades piezolétricas tornam-se menos acentuadas ou desaparecem completamente. A modificação dos valores das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} controla o esforço de controle e conseqüentemente a voltagem de entrada nas cerâmicas piezolétricas. Porém, os resultados aqui apresentados não levaram em conta esse limite de resistência.

A fim de evitar problemas numéricos, duas técnicas adicionais foram utilizadas. Essas técnicas são apresentadas nas seções seguintes: Problemas acoplados (Seção 6.1) e Modos de vibração localizados (Seção 6.2). Os resultados principais foram divididos em três seções: Topologias ótimas (Seção 6.3), Convergência das funções objetivo (Seção 6.4), e Resposta das estruturas otimizadas a uma carga impulsiva (Seção 6.5).

6.1 Problemas acoplados

No problema piezométrico abordado neste trabalho, a magnitude dos graus de liberdade de deslocamento e de diferença de potencial são muito distintas. Além disso, a ordem de grandeza dos tensores constitutivos envolvidos é muito diferente, o que implica em uma grande diferença de magnitude dos termos da matriz de rigidez piezométrica (\mathbf{K}), consequentemente em um número de condicionamento elevado.

Visando apenas o problema de condicionamento, Qi et al., 1997 [*apud* Cardoso, 2005], propuseram o escalonamento da unidade básica de força. Este é um procedimento muito simples, onde pode-se utilizar um múltiplo da unidade de força, da seguinte forma:

$$1\bar{\mathbf{N}} = 1 \cdot 10^p \mathbf{N}, \quad (6.2)$$

onde p é um inteiro positivo. Com este escalonamento, os tensores constitutivos $[\mathbf{c}^E]$ N/m² e $[\boldsymbol{\epsilon}^S]$ C²/Nm² passam a ter magnitude $[\bar{\mathbf{c}}^E] \rightarrow [\mathbf{c}^E] * 1 \cdot 10^{-p}$ e $[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^S] \rightarrow [\boldsymbol{\epsilon}^S] * 1 \cdot 10^{-p}$, solucionando o problema de condicionamento. Ainda, o potencial elétrico ϕ Nm/C passa a ter unidade $\bar{\phi} \rightarrow \phi * 1 \cdot 10^{-p}$, o que aproxima a magnitude dos deslocamentos e potenciais elétricos.

O valor do expoente p depende da magnitude dos tensores constitutivos. Como exemplo, podemos considerar o material piezométrico PZT5A que tem propriedades elásticas da ordem de $1 \cdot 10^{10}$, dielétricas da ordem de $1 \cdot 10^{-9}$ e piezométricas da ordem de $1 \cdot 10^0$. Considerando que os blocos \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ e $\mathbf{K}_{u\phi}$ da matriz de rigidez acoplada mantenham a ordem de grandeza relativa de cada tensor constitutivo, teremos uma diferença da ordem de $1 \cdot 10^{19}$ entre os termos da matriz global, e podemos assumir que o número de condicionamento será de ordem igual. Utilizando a Equação 6.2, com $p = 9$, a diferença passa a ser $1 \cdot 10^{19-2p}$, tal que o número de condicionamento passa a ser da ordem de $1 \cdot 10^1$.

Geralmente trabalha-se com deslocamentos da ordem de $1 \cdot 10^{-6}$ para cerâmicos e diferenças de potencial da ordem de $1 \cdot 10^2$. Assim, para $p = 9$, os deslocamentos não seriam alterados, mas a diferença de potencial passaria a ser da ordem de $1 \cdot 10^{-7}$.

6.2 Modos de vibração localizados

Um problema comum em otimização topológica quando se trabalha com problemas de autovalores (análise de frequências e modos de vibração, flambagem, etc.) é a possibilidade

do aparecimento de modos localizados em áreas de baixa densidade [Neves et al., 1995, *apud* Pedersen, 2000]. Estas áreas de baixa densidade são muito flexíveis quando comparadas com áreas de alta densidade, controlando, portanto, as frequências mais baixas da estrutura. A forma mais simples de evitar esse problema é através da remoção de elementos de baixa densidade. Entretanto, no método de otimização topológica, isso não pode ser feito pois o algoritmo deve permitir a adição de material a estas áreas de baixa densidade em todos os momentos do processo de otimização.

Pedersen, 2000, apresenta um método numérico, baseado em duas propostas, que tenta remover a possibilidade de modos de vibração localizados em áreas de baixa densidade. A primeira proposta [Buhl et al., 1999, *apud* Pedersen, 2000], é ignorar alguns graus de liberdade nodais no problema de autovalores. Pedersen, 2000, propõe negligenciar os nós que estão cercados por elementos que tem um fator de densidade menor que 1% ($\rho < 0.01$). Nesta tese, ignora-se, no problema de controle, os graus de liberdade mecânicos circundados por elementos com $\rho_e < 0.01$ e, também, afim de diminuir o custo computacional, negligencia-se os graus de liberdade elétricos circundados por elementos com $\rho_c < 0.01$.

Além disso, é esperado que a razão entre a penalização da massa e a penalização dos coeficientes elásticos de rigidez seja um fator muito importante nos cálculos das frequências naturais/autovalores [Pedersen, 2000]. Portanto, a segunda proposta é alterar a penalização colocada na massa (peso específico) e na rigidez (matriz de coeficientes elásticos), para excluir completamente a possibilidade de modos localizados. Isso evitaria que a razão entre massa e rigidez tenham valores excessivamente altos para baixas densidades estruturais. Assim, em vez do modelo material proposto na Seção 5.1.1, faz-se uma pequena variação na penalização das propriedades elásticas para pseudodensidades estruturais menores que 10%. Dessa forma, as propriedades elásticas efetivas do material interpolado $[\mathbf{c}^E]$ são dadas por:

$$[\mathbf{c}^E] = \begin{cases} \rho_e^{p1}(\rho_c^{p2}[\mathbf{c}_{pzt}^E] + (1 - \rho_c^{p2})[\mathbf{c}_{elas}^E]) & \text{se } 0.1 \leq \rho_e \leq 1, \\ \frac{\rho_e}{100}(\rho_c^{p2}[\mathbf{c}_{pzt}^E] + (1 - \rho_c^{p2})[\mathbf{c}_{elas}^E]) & \text{se } \rho_e \leq 0.1. \end{cases} \quad (6.3)$$

Lembrando que $[\mathbf{c}_{elas}^E]$, $[\mathbf{c}_{pzt}^E]$ são as propriedades elásticas do material não piezoeletrico e piezoeletrico respectivamente; ρ_e e ρ_c são as variáveis de projeto estrutural e de controle, respectivamente; e $p1$ e $p2$ são coeficientes de penalização.

As sensibilidades dessa nova matriz de constantes elásticas, em relação às variáveis

de projeto de controle ρ_c , são agora descritas como:

$$\frac{\partial[\mathbf{c}^E]}{\partial\rho_c} = \begin{cases} p2\rho_e^{p1}\rho_c^{p2-1}([\mathbf{c}_{pzt}^E] - [\mathbf{c}_{elas}^E]) & \text{se } 0.1 \leq \rho_e \leq 1, \\ \frac{\rho_e}{100}p2\rho_c^{p2-1}([\mathbf{c}_{pzt}^E] - [\mathbf{c}_{elas}^E]) & \text{se } \rho_e \leq 0.1, \end{cases} \quad (6.4)$$

onde todos os termos já foram apresentados. É importante notar que embora a penalização descrita nas Equações 6.3 seja contínua, a derivada em relação a variável de projeto de controle (Equações 6.4) não é contínua. Mas isso não parece um problema, como indicam os resultados

De forma similar ao trabalho de Pedersen, 2000, nesta tese as ideias de uma nova penalização para elementos com baixa pseudodensidade estrutural e a retirada de alguns graus de liberdade foram combinadas. Pelo que se pode notar, a combinação dos dois métodos evitou o aparecimento de modos de vibração localizados.

6.3 Topologias ótimas

Como dito no começo desse capítulo, foram obtidas as topologias ótimas de 12 casos analisados. Para fins de visualização, o Apêndice A apresenta os modos de vibração para as estruturas otimizadas dos 12 casos analisados. Nos primeiros quatro casos o modelo truncado considera só um (1) modo de vibração flexional no plano xy . Além disso, o sistema de controle também só considera esse primeiro modo de vibração.

As topologias ótimas para a distribuição de material sólido (elástico isotrópico ou piezelétrico) e a distribuição de material piezelétrico para os quatro primeiros casos podem ser vistas na Figura 6.3. Além disso, imagens das topologias sobrepostas podem ser vistas na mesma figura. Na imagem com as topologias sobrepostas, só foram considerados os elementos com pseudodensidades superiores a 0.45.

Nessa primeira figura (Figura 6.3), o Caso 1 apresenta as topologias ótimas considerando 1 modo de vibração e 1 eletrodo; o Caso 2 considera 1 modo de vibração e 2 eletrodos; o Caso 3 utiliza 1 modo de vibração e 6 eletrodos independentes; e o Caso 4 apresenta as topologias ótimas considerando 1 modo de vibração e 10 eletrodos independentes no sistema de controle. A distribuição dos eletrodos é melhor vista na Figura 6.2.

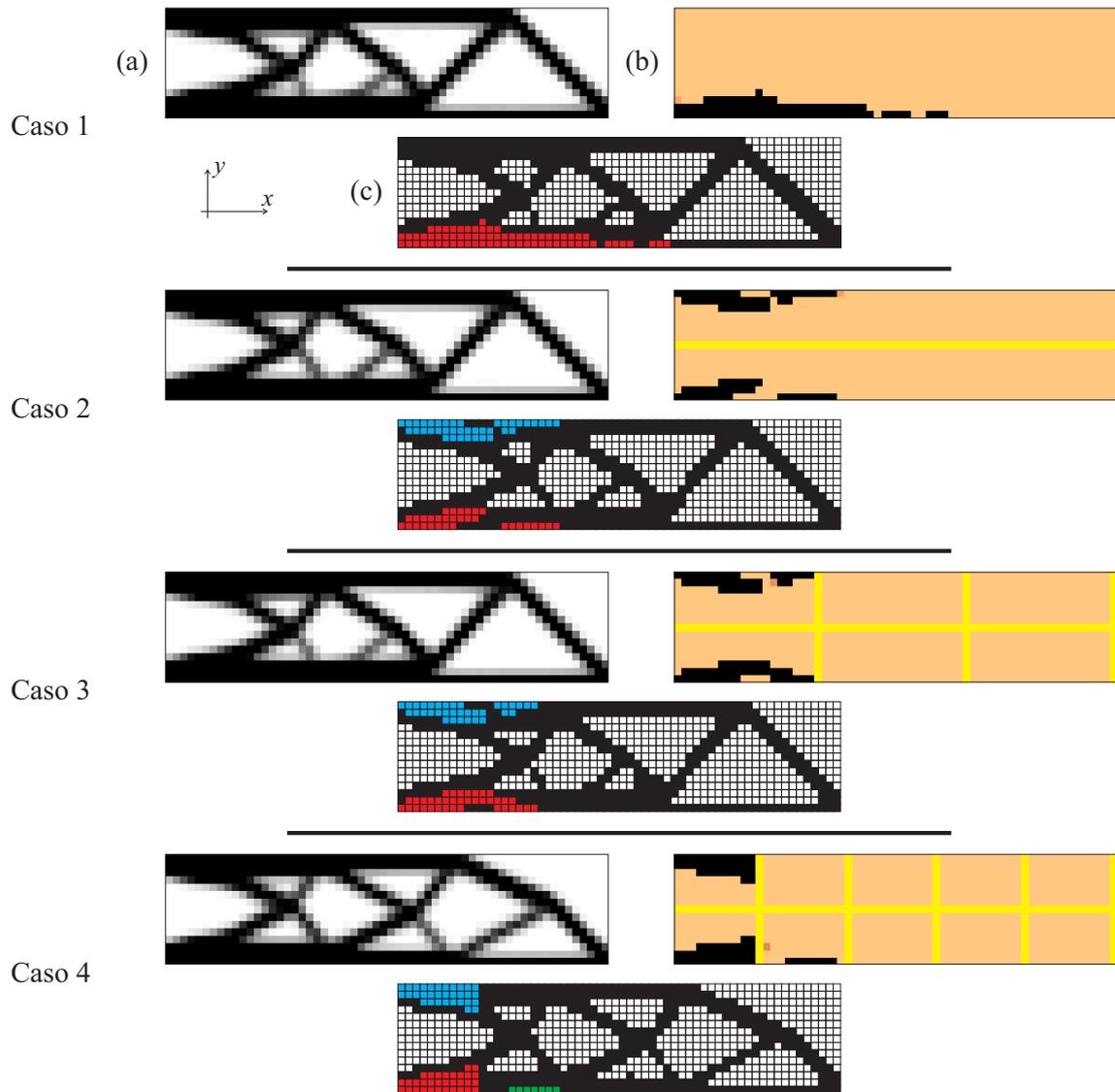


Figura 6.3 – Topologias ótimas para os casos com um (1) modo de vibração.

a) Distribuição de material sólido (ρ_e), b) Distribuição de material piezolétrico (ρ_c), c) Topologias sobrepostas

Pode-se notar que não há grandes diferenças entre as topologias que definem a distribuição de material sólido nos três primeiros casos. No entanto, a distribuição de material sólido já é bem distinta para o Caso 4. Em relação a distribuição de material piezolétrico, nota-se que o número de eletrodos utilizados altera consideravelmente a topologia. Para o Caso 1 (1 eletrodo), o resultado mostra material piezolétrico bem distribuído na parte inferior da viga. Para os casos considerando mais eletrodos, o material piezolétrico fica mais concentrado próximo à face engastada da viga. Apesar do Caso 3 considerar seis eletrodos

independentes, pode-se notar que somente dois eletrodos são realmente utilizados. Já no Caso 4, mais um eletrodo aparece na topologia ótima, totalizando três eletrodos.

Vale lembrar aqui, que não há mudança na topologia em relação a direção z desde que o problema é simétrico em relação ao plano médio. Conseqüentemente, as figuras que apresentam as topologias ótimas estão representadas em duas dimensões.

As topologias ótimas para a distribuição de material sólido (elástico isotrópico ou piezolétrico) e a distribuição de material piezolétrico para os casos considerando dois modos de vibração flexionais podem ser vistas na Figura 6.4. Da mesma forma que a figura anterior, imagens das topologias sobrepostas podem ser vistas nesta figura.

Na Figura 6.4, o Caso 5 apresenta as topologias ótimas considerando 2 modos de vibração e 1 eletrodo; o Caso 6 considera 2 modos de vibração e 2 eletrodos; o Caso 7 utiliza 2 modos de vibração e 6 eletrodos independentes; e o Caso 8 apresenta as topologias ótimas considerando 2 modos de vibração e 10 eletrodos independentes no sistema de controle.

Ao analisar a Figura 6.4, nota-se que não há grandes diferenças para a distribuição de material sólido. Em relação a distribuição de material piezolétricos (Figuras 6.4b), nota-se um deslocamento do material piezolétrico para o lado direito em relação aos quatro primeiros casos. Claramente isso se deve a influência do segundo modo de vibração.

Na Figura 6.4, também é possível verificar que o Caso 7 já utiliza quatro eletrodos de um possível total de seis eletrodos; e o Caso 8 utiliza seis eletrodos de um possível total de dez. Vale ressaltar que mesmo utilizando, para a otimização de controle, um filtro de sensibilidades que considera somente a sensibilidade do próprio elemento, as topologias ótimas para a distribuição de material piezolétrico não apresentam padrões de tabuleiro.

Para os casos que consideram quatro modos de vibração flexionais, as topologias ótimas para a distribuição de material sólido (elástico isotrópico ou piezolétrico) e a distribuição de material piezolétrico podem ser vistas na Figura 6.5.

Na Figura 6.5, o Caso 9 apresenta as topologias ótimas considerando 4 modos de vibração e 1 eletrodo; o Caso 10 considera 4 modos de vibração e 2 eletrodos; o Caso 11 utiliza 4 modos de vibração e 6 eletrodos independentes; e o Caso 12 apresenta as topologias ótimas considerando 4 modos de vibração e 10 eletrodos independentes no sistema de controle.

Observando as topologias ótimas para os Casos 9 e 10, nota-se que elementos com pseudodensidades intermediárias de material piezolétrico aparecem em regiões com pseudo-

densidade de material sólido baixa. Isso pode ser visto principalmente no canto superior direito das imagens para distribuição de material piezolétrico para esses dois casos.

Nos casos 11 e 12, pode-se notar que os atuadores (material piezolétrico) voltam a estar próximos da face engastada da viga. Além disso, nota-se uma boa distribuição de material piezolétrico entre os eletrodos mais próximos a base.

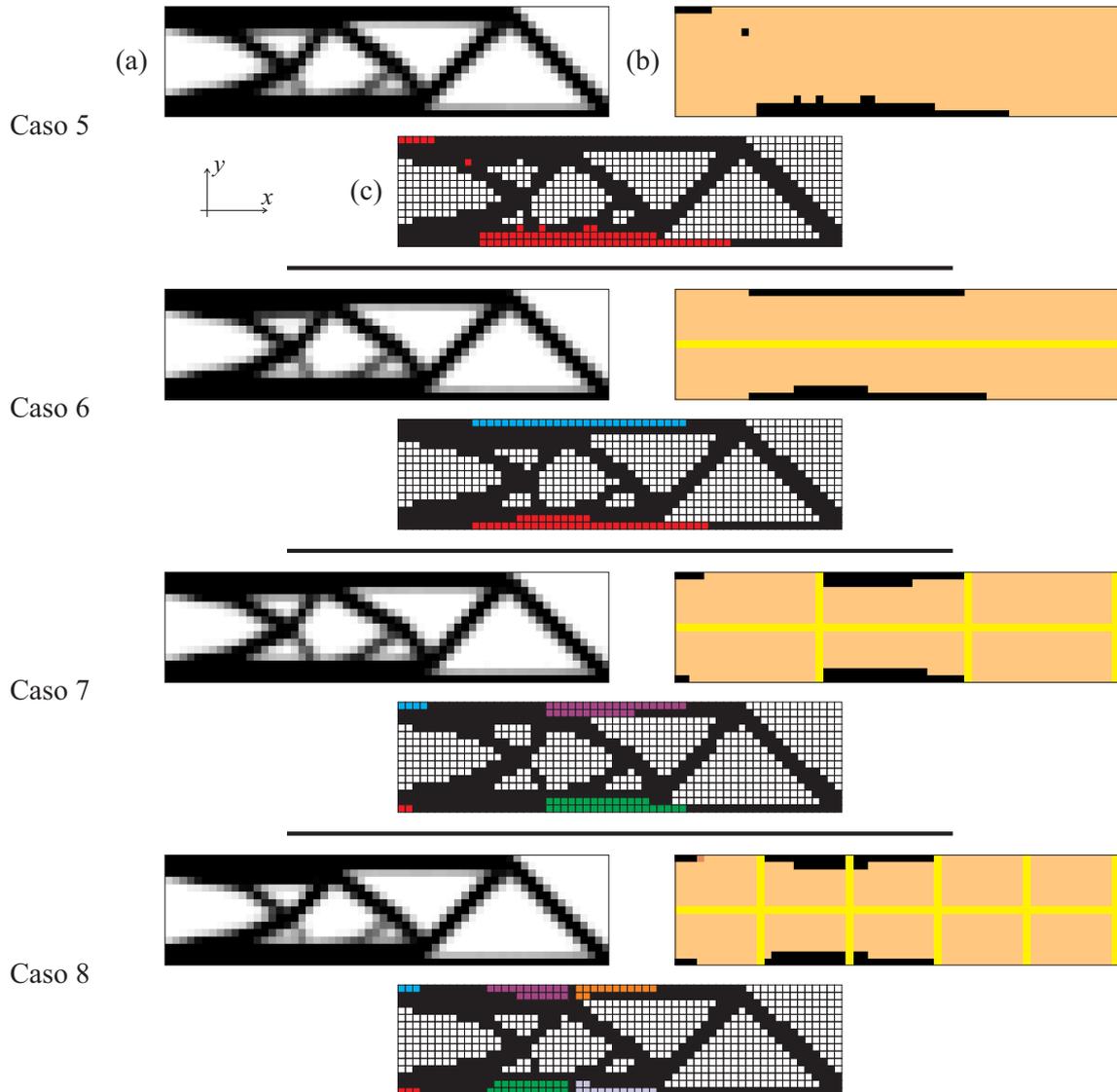


Figura 6.4 – Topologias ótimas para os casos com dois modos de vibração. a) Distribuição de material sólido (ρ_e), b) Distribuição de material piezolétrico (ρ_c), c) Topologias sobrepostas

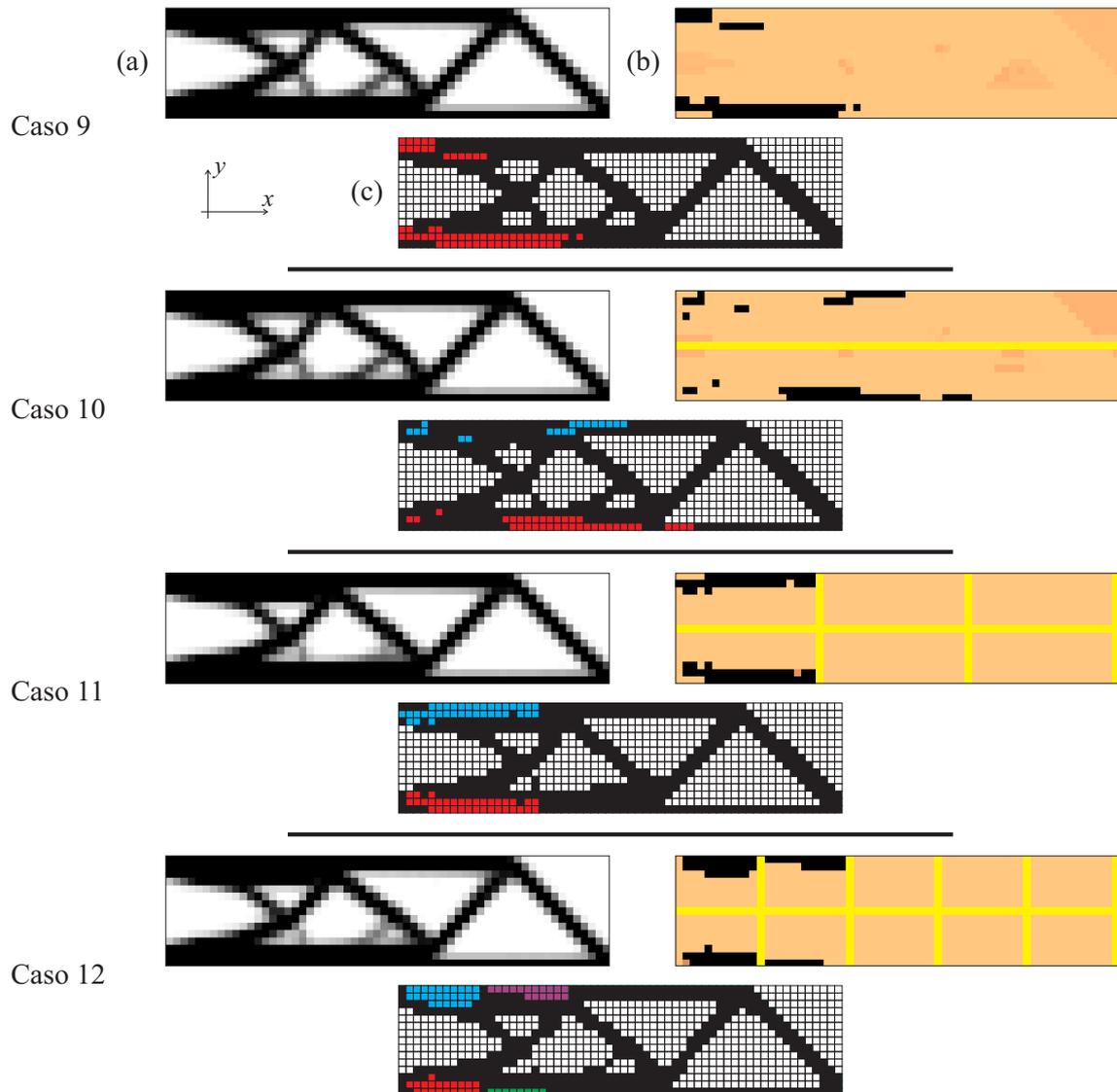


Figura 6.5 – Topologias ótimas para os casos com quatro modos de vibração.

a) Distribuição de material sólido (ρ_e), b) Distribuição de material piezolétrico (ρ_c), c) Topologias sobrepostas

6.4 Convergência das funções objetivo

As mudanças nos valores das funções objetivo ao longo do histórico de iterações são discutidas nesta seção. Deve ser mencionado aqui que, apesar dos valores iniciais das variáveis de projeto serem iguais para todos os casos, os valores iniciais das funções objetivo são diferentes, por considerar número de modos no modelo truncado e número de eletrodos diferentes.

Na Figura 6.6, podem ser vistos os históricos das funções objetivo estrutural e de controle para o Caso 1 (1 modo/1 eletrodo).

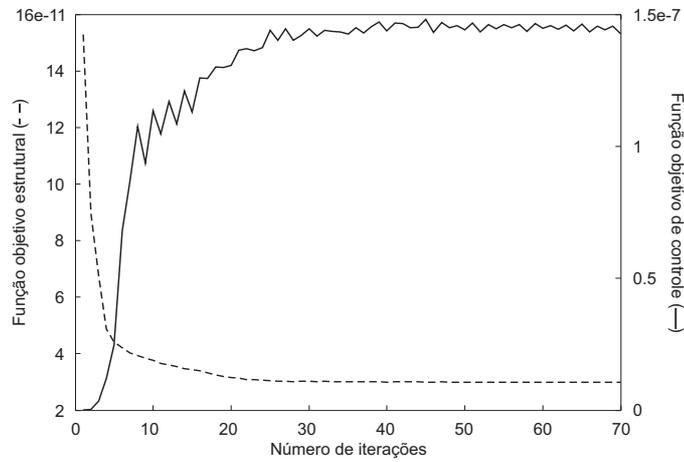


Figura 6.6 – Convergência das funções objetivo para o Caso 1

Já na iteração 40, valores próximos do ótimo para as duas funções objetivo podem ser vistos na Figura 6.6. Provavelmente o processo de otimização ainda continua até a iteração 70 por haver elementos com pseudodensidades intermediárias.

Na Figura 6.7, podem ser vistos os históricos das funções objetivo estrutural e de controle para o Caso 4 (1 modos/10 eletrodos). Nesta figura e nas próximas, deve-se notar que o número total de iterações pode ser diferente do caso anterior, e o mesmo pode ocorrer com as escalas de valores das funções objetivo.

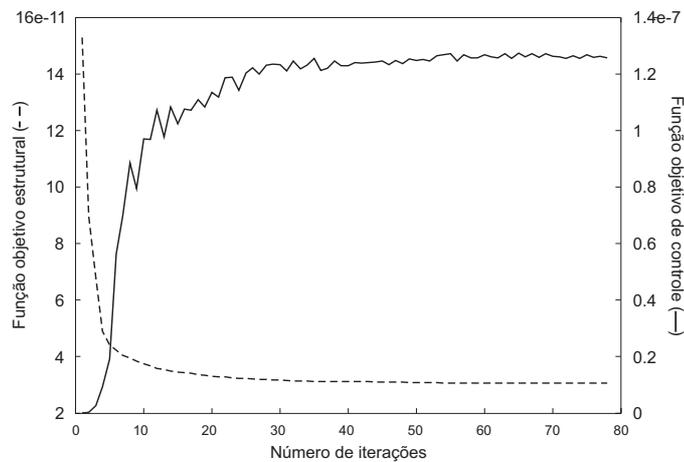


Figura 6.7 – Convergência das funções objetivo para o Caso 4

A Figura 6.8 apresenta os históricos das funções objetivo estrutural e de controle para o Caso 5 (2 modos/1 eletrodo).

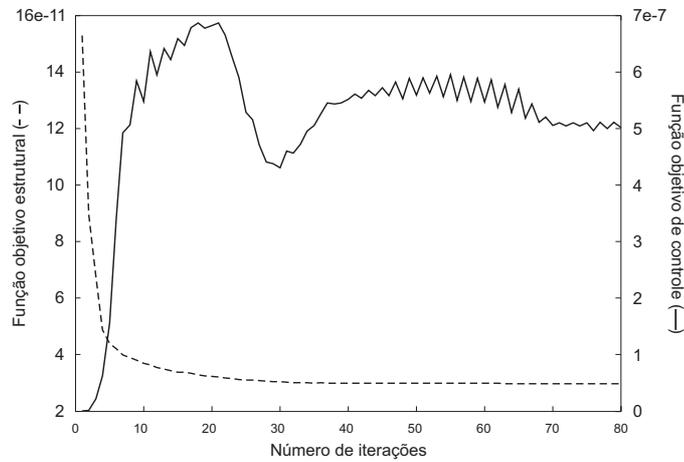


Figura 6.8 – Convergência das funções objetivo para o Caso 5

Na Figura 6.8, nota-se uma queda no valor da função objetivo de controle entre as iterações 20 e 30. O valor desta função objetivo volta a subir a partir da iteração 30. Vale notar que a escala de valores para a função objetivo de controle é bem diferente das duas figuras anteriores.

Na Figura 6.9, podem ser vistos os históricos das funções objetivo estrutural e de controle para o Caso 8 (2 modos/10 eletrodos).

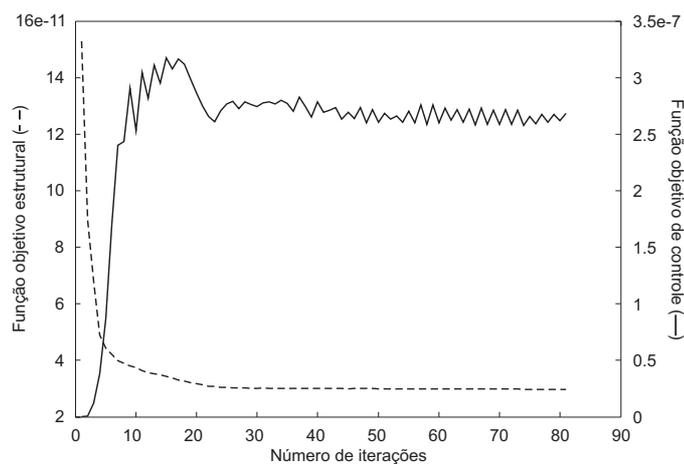


Figura 6.9 – Convergência das funções objetivo para o Caso 8

Pode-se notar uma queda no valor da função objetivo de controle próximo a iteração 20 (Figura 6.9); após essa queda, o valor da função objetivo mantém-se quase sem alteração. Acredita-se que essa queda é devido a mudanças na solução do problema de autovalores, que pode ter encontrado um novo modo de vibração nesta etapa da otimização.

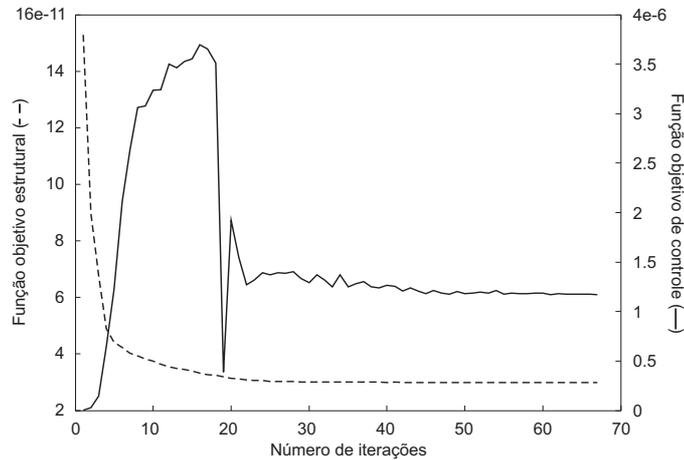


Figura 6.10 – Convergência das funções objetivo para o Caso 9

A Figura 6.10 apresenta os históricos das funções objetivo estrutural e de controle para o Caso 9 (4 modos/1 eletrodo). Da mesma forma que a figura anterior, a Figura 6.10 apresenta uma queda no valor da função objetivo de controle próximo a iteração 20. Entretanto, uma queda muito acentuada é verificada na iteração 19. Como visto em análises ao longo do desenvolvimento do trabalho, essa queda acentuada provavelmente é devido a um modo de vibração localizado.

Na Figura 6.11, podem ser vistos os históricos das funções objetivo estrutural e de controle para o Caso 12 (4 modos/10 eletrodos). Novamente aqui (Figura 6.11), nota-se uma queda entre as iteração 20 e 30, provavelmente devido a um novo modo de vibração no problema de autovalores.

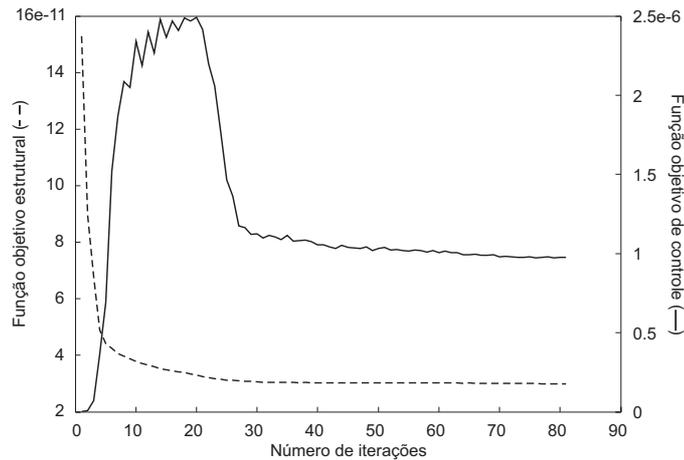


Figura 6.11 – Convergência das funções objetivo para o Caso 12

6.5 Respostas das estruturas otimizadas a uma carga impulsiva

Esta seção apresenta as respostas das estruturas otimizadas a uma carga impulsiva na ponta livre da viga (Figura 6.1). O histórico do deslocamento vertical da ponta livre da viga é avaliado com os sistemas em malha fechada e aberta. É muito importante ressaltar que os modelos de elementos finitos foram utilizados para encontrar as frequências naturais e modos de vibração da estrutura e, dessa forma, criar os modelos de controle em espaço de estados, ou seja, os modelos de elementos finitos não foram utilizados diretamente em análises ao longo do tempo. Além do deslocamento na ponta livre da viga, o histórico das voltagens de entrada em cada eletrodo, que são as entradas de controle, podem ser vistas nas próximas figuras.

A Figura 6.12 apresenta os resultados para deslocamento e voltagem para o modelo de controle do Caso 1 (1 modo/1 eletrodo). Como pode ser visto nesta figura, o sistema de controle LQR em malha fechada (linha cheia) contribui para atenuar de maneira muito boa o deslocamento na ponta livre da viga. Os picos ressonantes e o tempo de atenuação são significativamente diminuídos.

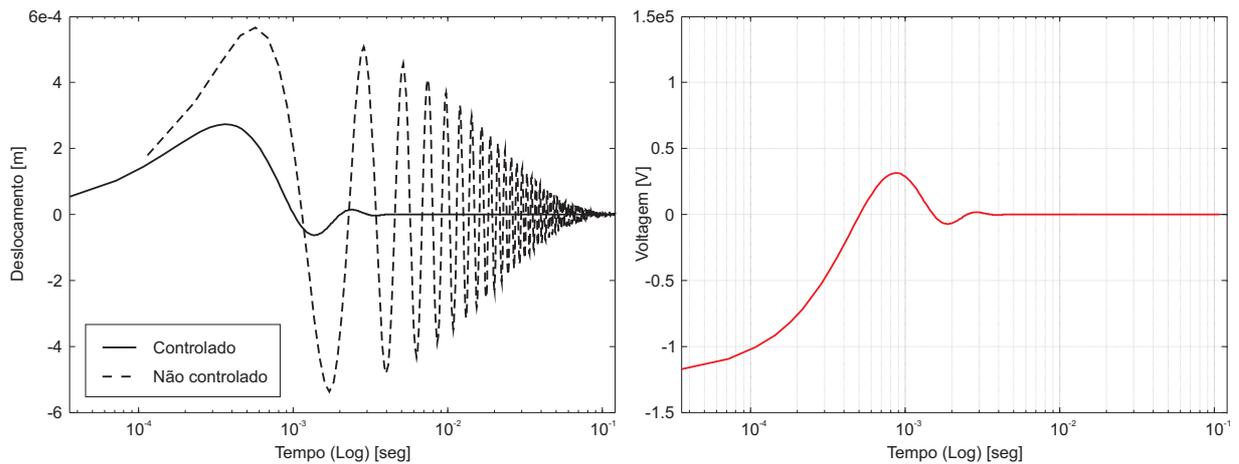


Figura 6.12 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 1

De forma semelhante, a Figura 6.13 mostra os históricos de deslocamento para o sistema em malha aberta (linha tracejada) e malha fechada (linha cheia), e também os históricos de voltagem (linhas vermelha e azul), porém agora, considerando um (1) modo de vibração e dois eletrodos (Caso 2). Verifica-se que a resposta do sistema em deslocamento pouco difere do caso anterior. Entretanto, os picos de voltagem (entrada de controle) já apresentam valores um tanto menores. As cores utilizadas para a resposta ao longo do tempo das voltagens de controle são as mesmas utilizadas para as topologias ótimas sobrepostas na Seção 6.3. A máxima voltagem de controle em módulo para o Caso 1 é $1.17e5$ V, enquanto a máxima voltagem para o Caso 2 é $0.91e5$ V, que é utilizada no atuador azul.

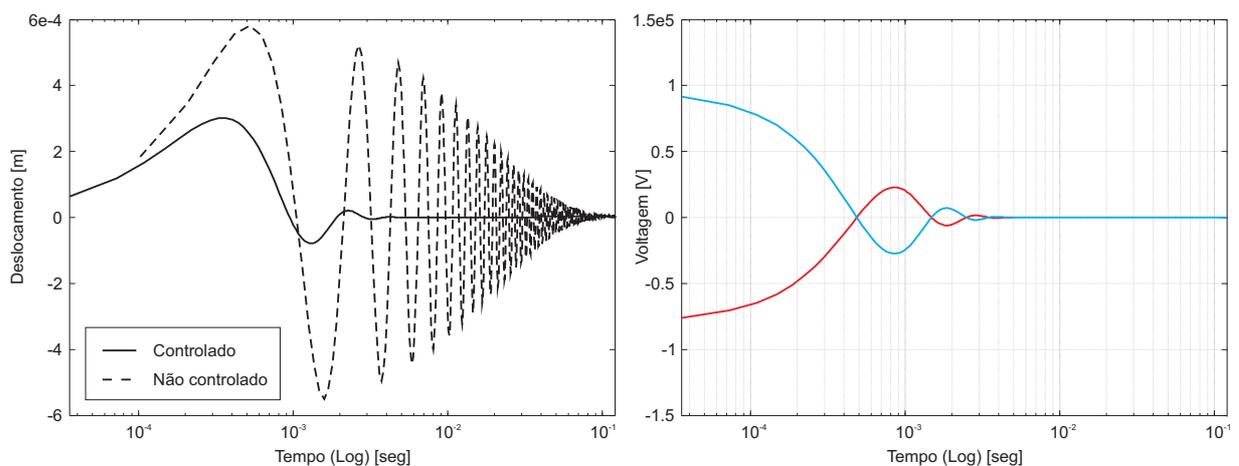


Figura 6.13 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 2

Como pôde ser visto nas figuras para topologia ótima, os resultados para o Caso 2 e 3 pouco diferem. Conseqüentemente, as respostas temporais para uma carga impulsiva também não são muito diferentes para os Casos 2 e 3. A Figura 6.14 apresenta as respostas ao longo do tempo para o deslocamento vertical e voltagens de controle para o Caso 3 (1 modo/6 eletrodos).

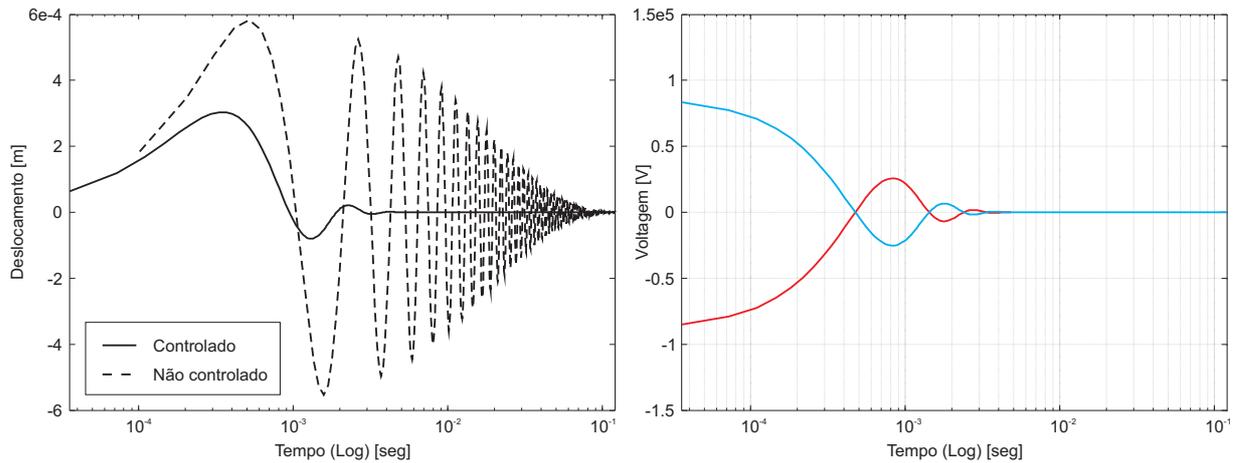


Figura 6.14 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 3

Na Figura 6.15, as respostas temporais para deslocamento e entradas controle das topologias ótimas do Caso 4 (1 modo/10 eletrodos) podem ser visualizadas. Como o processo de otimização distribuiu, para este caso, material piezolétrico em três eletrodos distintos, os históricos de voltagem ao longo do tempo também apresentam 3 curvas (vermelha, azul e verde). Entretanto, a voltagem para o atuador verde é aproximadamente cinco vezes menor que as voltagens para os outros dois atuadores. Além disso, ainda não é possível notar uma melhora na resposta em deslocamento quando comparada aos três casos anteriores.

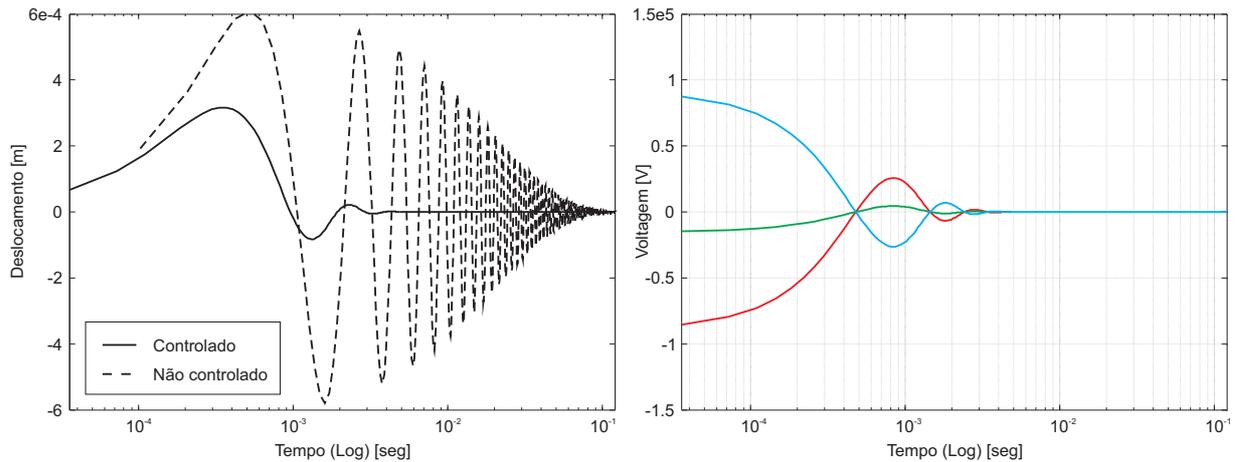


Figura 6.15 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 4

Obviamente, um modelo de controle com mais modos de vibração pode representar melhor o comportamento dinâmico de uma estrutura. Dessa forma, a Figura 6.16 apresenta os resultados para deslocamento e voltagem para o modelo de controle do Caso 5 (2 modos/1 eletrodo).

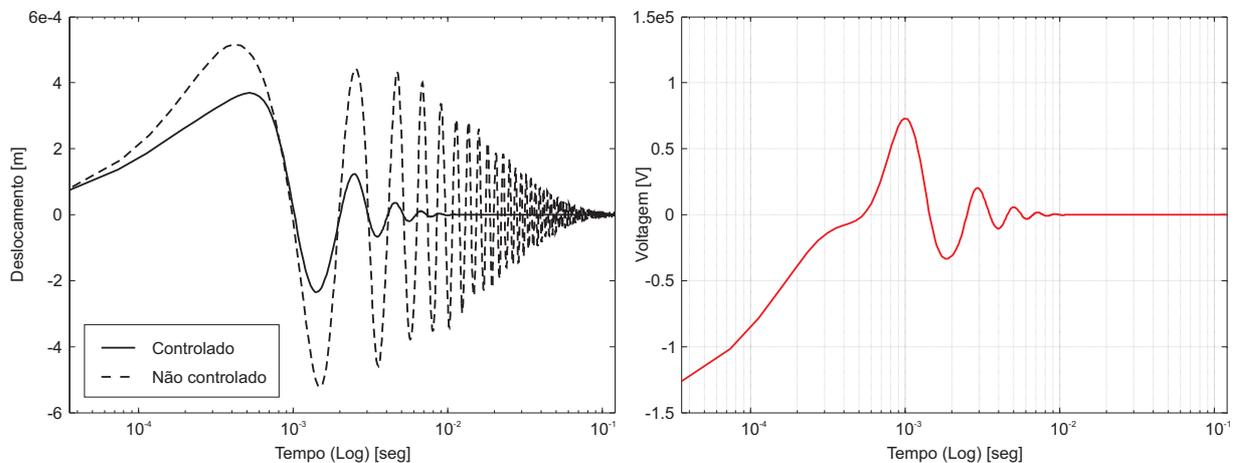


Figura 6.16 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 5

Como esperado para um sistema com mais graus de liberdade, as respostas ao longo do tempo do Caso 5 apresentam mais variações ao longo do tempo quando comparadas aos modelos com um (1) modo de vibração. Assim como a resposta do Caso 1, a Figura 6.16 mostra um valor alto para a voltagem de entrada no início do processo de controle. O tempo de estabilização em 5% para a resposta em deslocamento para o Caso 5 em malha fechada

é $6.54e-3$ seg.

Da mesma forma que a figura anterior, a Figura 6.17 apresenta os históricos de deslocamento para o sistema em malha aberta (linha tracejada) e malha fechada (linha cheia), e também os históricos de voltagem (linhas vermelha e azul) mas agora considerando dois modos de vibração e dois eletrodos (Caso 6). Os valores máximos para voltagem (entrada de controle) são um pouco menores do que o caso anterior, além disso, pode-se notar uma melhora na resposta em deslocamento principalmente no primeiro pico.

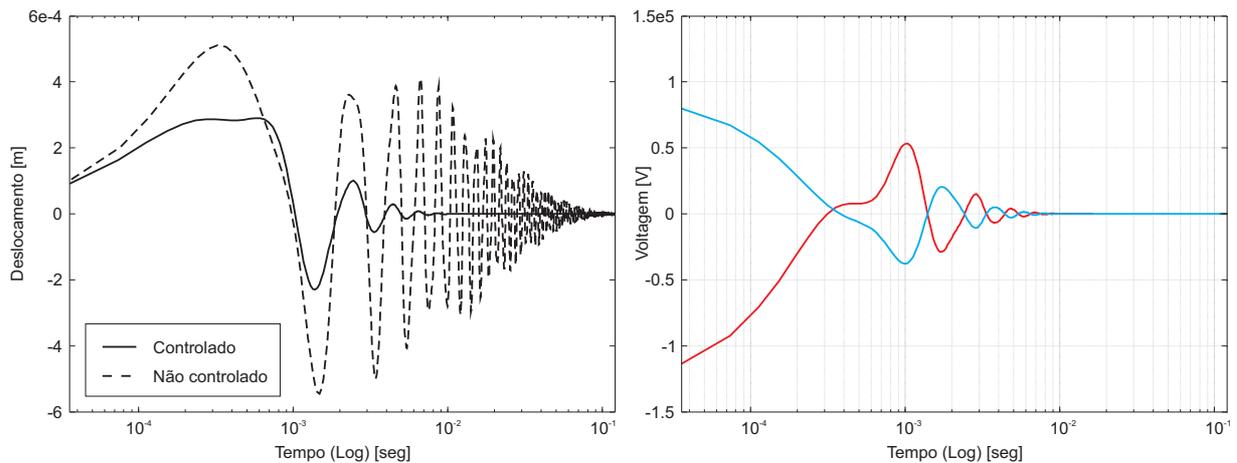


Figura 6.17 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 6

Na Figura 6.18, as respostas temporais para deslocamento e entradas controle das topologias ótimas do Caso 7 (2 modos/6 eletrodos) podem ser visualizadas. Revendo a Figura 6.4, nota-se que quatro eletrodos distintos apresentam material piezelétrico para o Caso 7. Assim, os históricos de voltagem ao longo do tempo também apresentam quatro curvas para esse caso. Quando comparadas as voltagens do caso anterior, nota-se uma diminuição nas máximas voltagens. Enquanto o Caso 6 apresenta uma voltagem máxima em módulo de $1.14e5$ V, o Caso 7 apresenta uma voltagem máxima em módulo de $0.93e5$ V.

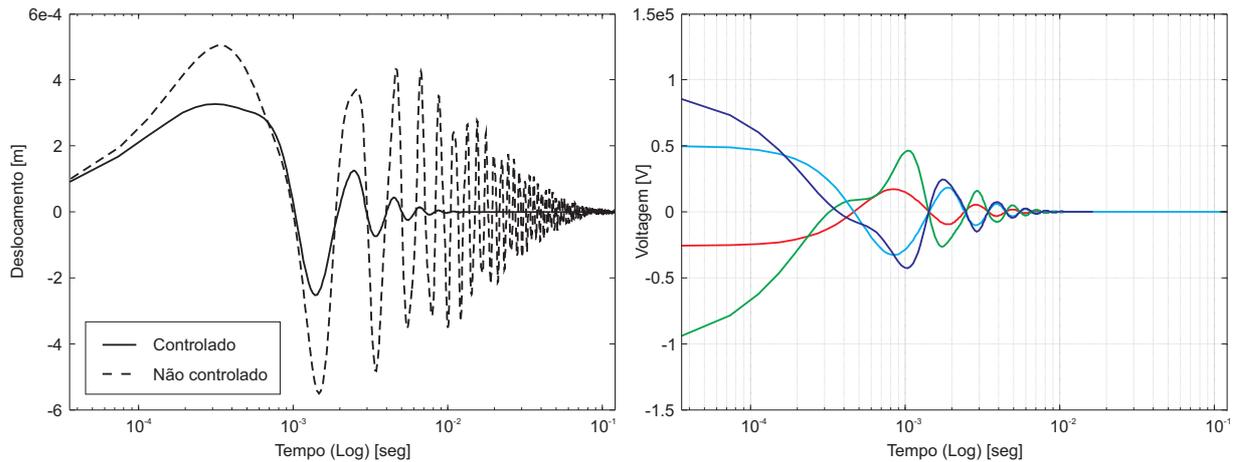


Figura 6.18 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 7

Entre os 12 casos analisados, o Caso 8 (2 modos/10 eletrodos) foi o que apresentou o maior número de eletrodos realmente utilizados na configuração ótima (ver Figura 6.4). Na Figura 6.19, podem ser visualizadas as respostas temporais para deslocamento e entradas controle das topologias ótimas do Caso 8. Verifica-se que o sistema em malha fechada contribui para atenuar de maneira significativa o deslocamento na ponta livre da viga. O tempo de estabilização em 5% para a resposta em deslocamento para o Caso 8 em malha fechada é de $6.11e-3$ seg, enquanto o sistema em malha aberta apresenta um tempo de estabilização de $66.90e-3$ seg.

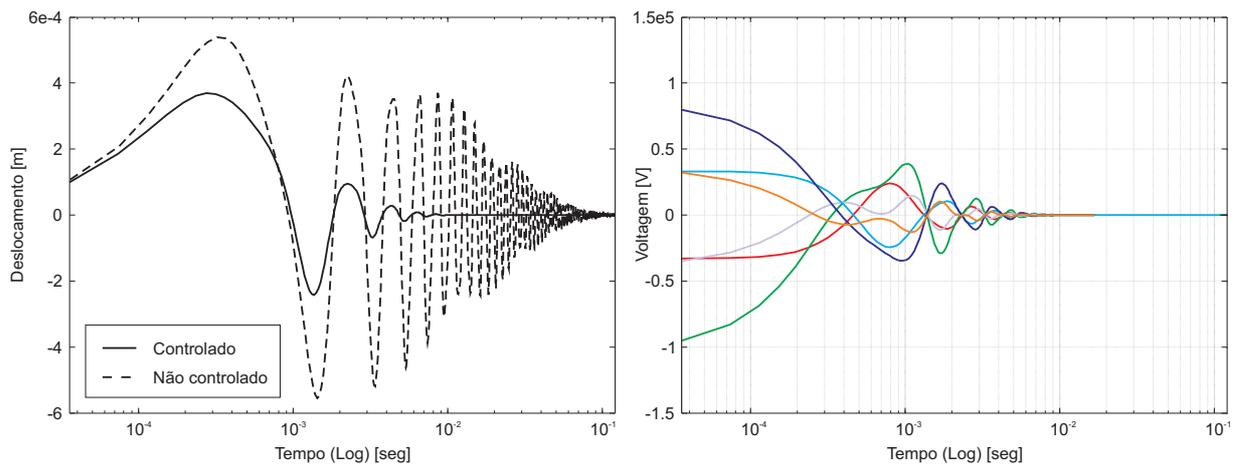


Figura 6.19 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 8

Como dito anteriormente, a utilização de mais modos de vibração em um modelo de controle melhora a representação do comportamento dinâmico de uma estrutura. Assim, as quatro figuras a seguir apresentam as respostas a uma carga impulsiva para modelos que tentam controlar os quatro primeiros modos de vibração da estrutura em forma de viga.

A Figura 6.20 apresenta os resultados para deslocamento e voltagem para o modelo de controle do Caso 9 (4 modos/1 eletrodo). Da mesma forma, na Figura 6.21, as respostas temporais para deslocamento e entradas controle das topologias ótimas do Caso 10 (4 modos/2 eletrodos) podem ser visualizadas.

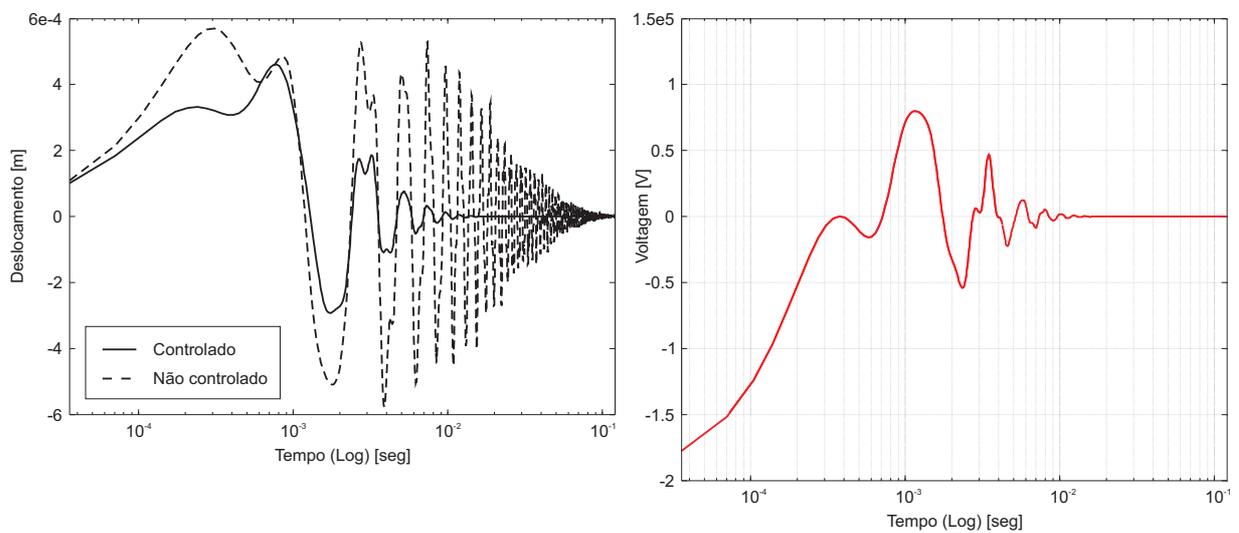


Figura 6.20 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 9

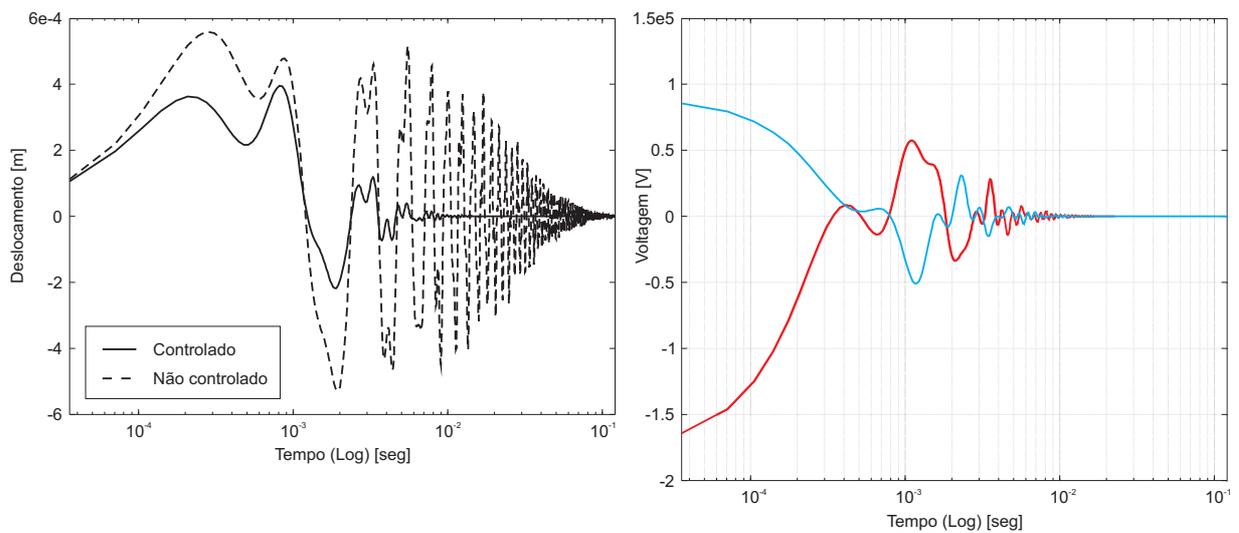


Figura 6.21 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 10

As respostas para os Casos 9 e 10 foram os que apresentaram o maior valor em módulo para voltagens. Dessa forma, é importante notar que o eixo das ordenadas para respostas em voltagens para esses dois casos é diferente dos outros casos.

Em relação ao histórico de deslocamentos, pode-se verificar uma melhora do Caso 9 para o Caso 10, devido a adição de mais um eletrodo. Os picos de deslocamento são consideravelmente diminuídos no Caso 10.

A Figura 6.22 mostra os históricos de deslocamento para o sistema em malha aberta (linha tracejada) e malha fechada (linha cheia), e também os históricos de voltagem considerando o Caso 11 (4 modos/6 eletrodos). Entretanto, só dois eletrodos são efetivamente utilizados (linhas vermelha e azul).

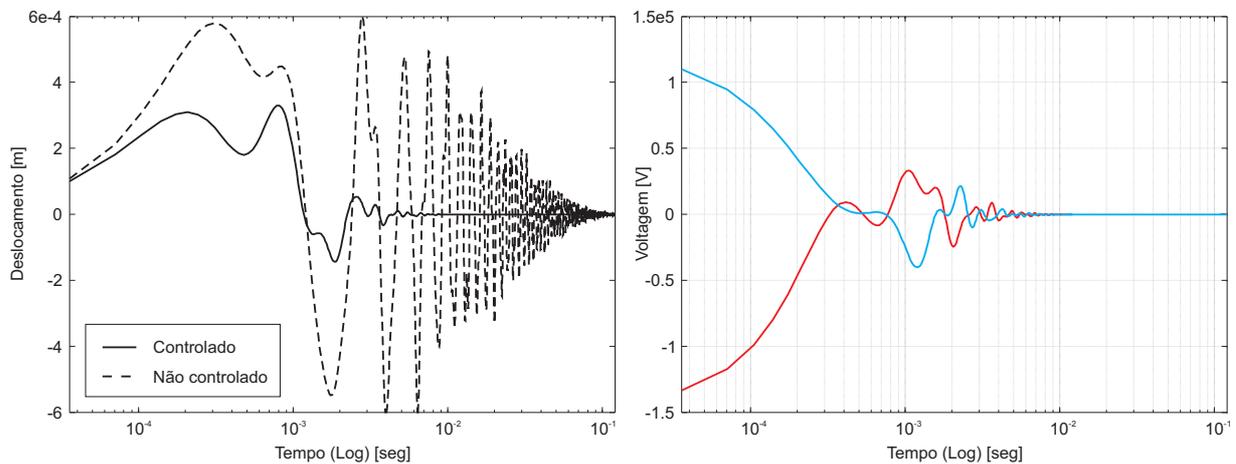


Figura 6.22 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 11

Apesar de efetivamente apresentar o mesmo número de eletrodos do caso anterior, a voltagem máxima de entrada em módulo é diminuída. Além disso, uma nova diminuição nos picos pode ser notada na resposta do deslocamento vertical da ponta da viga.

A Figura 6.23 apresenta os resultados para deslocamento e voltagem para o modelo de controle do Caso 12 (4 modos/10 eletrodos). Neste caso, apenas os quatro eletrodos mais próximos à face engastada são realmente utilizados no sistema de controle. Entre os quatro últimos casos, esse foi o que apresentou a melhor resposta na redução de vibrações (picos e tempo de estabilização menores). Além disso, foi o que apresentou os menores valores máximos para voltagem. A máxima voltagem em módulo para o Caso 9 foi de $1.80e5$ V, enquanto a máxima voltagem em módulo para o caso 12 foi de $0.95e5$ V.

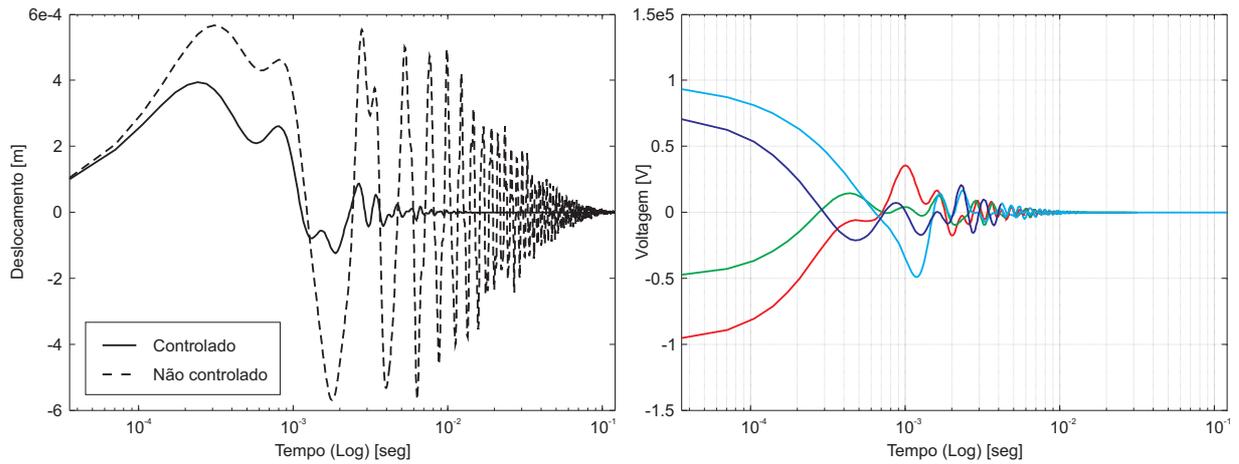


Figura 6.23 – Resposta a uma carga impulsiva para o Caso 12

Duas considerações básicas sobre esses resultados são: o número de modos e o número de eletrodos considerados no modelo de controle alteram significativamente as respostas ao longo do tempo (deslocamentos e voltagens) dos modelos de controle; e, em geral, um número maior de eletrodos melhora a resposta dinâmica em relação a redução de vibrações do sistema, além disso, diminui as máximas voltagens de entrada.

7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

7.1 Aspectos conclusivos

Este trabalho apresenta uma nova metodologia de projeto simultâneo de otimização topológica estrutural e de controle de vibrações utilizando material piezolétrico. A formulação desenvolvida permite projetar de forma ótima estruturas inteligentes com capacidade de autoamortecimento, ou seja, que suprimem de forma mais adequada as vibrações induzidas por perturbações externas. O amortecimento ativo é realizado através de um sistema de controle LQR que utiliza atuadores piezolétricos. Esses atuadores são distribuídos de forma ótima na estrutura, ou seja, não são utilizadas cerâmicas piezolétricas com localização e forma pré-definidos. Essa formulação contribui para um maior poder de atuação no controle de vibrações.

A otimização é baseada em uma abordagem aninhada que separa os dois procedimentos de projeto dentro de um laço da programação linear sequencial (SLP). Nesta solução, o posicionamento dos atuadores e a síntese do sistema controlador são consideradas um subprocesso incluído no processo de otimização principal que lida com a topologia estrutural. Enquanto o projeto estrutural é baseado na minimização da flexibilidade, o projeto de controle maximiza a controlabilidade através do traço do Gramiano de controlabilidade. É importante salientar que outros objetivos estruturais poderiam ser utilizados, como a otimização de comportamentos dinâmicos, otimização para vários carregamentos, restrições de tensão, etc., sem perda da generalidade do projeto simultâneo. Além disso, a utilização de Gramianos como medidas da efetividade de sistemas de controle parece uma inovadora e ótima escolha em projetos de otimização topológica.

Ao longo do trabalho foram deduzidos todos os cálculos de sensibilidade de primeira ordem para o traço do Gramiano de controlabilidade. De forma análoga, as sensibilidades do Gramiano de observabilidade podem ser facilmente derivadas para um novo projeto que envolva o posicionamento de sensores.

Foram apresentados resultados que mostram as topologias otimizadas, a variação das funções objetivo ao longo do processo de otimização e ainda resultados que demonstram a capacidade de melhorar o amortecimento ativo destas estruturas através da utilização de atuadores piezelétricos. Os exemplos buscaram expor a capacidade da formulação em projetar estruturas com topologias bem definidas. Além disso, os resultados destacam a influência do número de modos de vibração e número de eletrodos do modelo de controle no projeto para redução de vibrações. Os resultados obtidos para diferentes números de eletrodos demonstram que um maior número de atuadores, utilizando a mesma quantidade de material piezelétrico, melhora a atenuação de vibrações na estrutura. Um estudo mais aprofundado de modelos reduzidos parece ser uma boa alternativa para obter melhores conclusões a respeito da quantidade de modos considerados no projeto de otimização simultâneo. Os resultados validam os objetivos e a metodologia apresentada.

A presente tese considera a otimização topológica de estruturas tridimensionais finas. Dessa forma, o sistema de controle consegue aplicar voltagem elétrica nos eletrodos das cerâmicas piezelétricas de maneira fisicamente consistente, o que não ocorre no trabalho de Carbonari, 2008. Ainda que só esse tipo de estrutura tenha sido analisada, acredita-se que o projeto simultâneo aqui apresentado possa ser facilmente aplicado a outras geometrias. Para finalizar, essa abordagem tem grande potencial para aplicação no projeto de estruturas inteligentes, e merece estudos adicionais.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Utilizando como base o trabalho que foi desenvolvido até o momento, pode-se ter as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Estudo de um método para evitar que o material piezelétrico fique distribuído em pedaços muito pequenos ou definir um formato padrão (algum método de filtragem ou restrição de perímetro);
- Como continuação do item anterior, pode-se considerar restrições de manufatura para facilitar a fabricação;
- Aperfeiçoamento do controle ativo de estruturas para redução de vibrações;

- Estudos de outras formulações para a função objetivo de controle utilizando Gramianos;
- Estudos dos conceitos de observabilidade para inclusão de sensores no projeto simultâneo;
- Análise e comparação de outros modelos de controle como, CAVF (*Constant Amplitude Velocity Feedback*), CGVF (*Constant Gain Velocity Feedback*) e LQG (Controlador Linear Quadrático Gaussiano).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alkhatib, R. e Golnaraghi, M. F. Active Structural Vibration Control: A Review, **The Shock and Vibration Digest**, vol. 35(5), p. 367–383, 2003.

Allik, H. e Hughes, T. Finite element method for piezoelectric vibration, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 2, p. 151–157, 1995.

Ananthasuresh, G. e Kota, S. Designing compliant mechanisms, **ASME Mechanical Engineering**, vol. 2, p. 93–96, 1995.

Anderson, B. e Moore, J. **Optimal Control**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

Arora, J. **Introduction to Optimum Design**. McGraw-Hill, 2004.

Balas, M. Feedback control of flexible systems, **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. AC-23(4), p. 673–679, 1978.

Basseville, M.; Benveniste, A.; Moustakides, G.; e Rougee, A. Optimal sensor location for detecting changes in dynamical behavior, **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. AC-32, p. 1067–1075, 1987.

Becker, J.; Fein, O.; Maess, M.; e Gaul, L. Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping, **Computers and Structures**, vol. 84, p. 2340–2350, 2006.

Begg, D. e Liu, X. On simultaneous optimization of smart structures - Part II: Algorithms and Examples, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 184, p. 25–37, 2000.

Bendsøe, M. Optimal shape design as a material distribution problem, **Structural Optimization**, vol. 1, p. 193–202, 1989.

Bendsøe, M.; Diaz, A.; e Kikuchi, N., **Topology Design of Structures**, chapter Topology and generalized layout optimization of elastic structures, pages 159–206. Kluwer Academic Publishers, 1993.

Bendsøe, M. e Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71(2), p. 197–224, 1988.

Bendsøe, M. e Sigmund, O. Material interpolation schemes in topology optimization, **Archive of Applied Mechanics**, vol. 69, p. 635–654, 1999.

Bendsøe, M. e Sigmund, O. **Topology Optimization - Theory, Methods and Applications**. Springer, Berlin, 2003.

Brebbia, C.; Telles, J.; e Wrobel, L. **Boundary Element Technique**. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

Burl, J. **Linear Optimal Control**. Addison-Wesley, California, 1999.

Canfield, R. e Meirovitch, L. Integrated Structural Design and Vibration Supression Using Independent Modal Space Control, **AIAA Journal**, vol. 32(10), p. 2053–2060, 1994.

Canfield, S. e Frecker, M. Topology optimization of compliant mechanical amplifiers for piezoelectric actuators, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 20(4), p. 269–279, 2000.

Carbonari, R. **Projeto de multi-atuadores piezelétricos homogêneos e gradados utilizando o método de otimização topológica**. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, 2008.

Carbonari, R.; Silva, E.; e Nishiwaki, S. Optimum placement of piezoelectric material in piezoactuator design, **Smart Materials and Structures**, vol. 16, p. 207–220, 2007.

Cardoso, E. **Otimização topológica de transdutores piezelétricos considerando não-linearidade geométrica**. Tese de doutorado, PROMEC-UFRGS, 2005.

Cardoso, E. e Fonseca, J. Strain energy maximization approach to the design of fully compliant mechanisms using topology optimization, **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 1(3), p. 263–276, 2004.

Cheng, G. **Introduction to Structural Optimization: Theory, Methods and Solution**. Lecture notes, Dalian University of Technology, 1992.

Cheng, K. On non-smoothness in optimal design of solid, elastic plates, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 17, p. 795–810, 1981.

Cheng, K. e Olhoff, N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 18(2), p. 153–169, 1982.

Damjanovic, D. Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics, **Reports on Progress in Physics**, vol. 61(9), p. 1267–1324, 1998.

Diaz, A. e Bendsøe, M. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method, **Structural Optimization**, vol. 4(1), p. 17–22, 1992.

Diaz, A. e Kikuchi, N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 35(7), p. 1487–1502, 1992.

Diaz, A. e Sigmund, O. Checkerboard patterns in layout optimization, **Structural Optimization**, vol. 10(1), p. 40–45, 1995.

Eschenauer, H. e Olhoff, N. Topology Optimization of Continuum Structures: A review, **Applied Mechanics Reviews**, vol. 54(4), p. 331–390, 2001.

Gawronski, W. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. Springer, New York, 2004.

Gawronski, W. e Lim, K. Balanced Actuator and Sensor Placement for Flexible Structures, **International Journal of Control**, vol. 65, p. 131–145, 1996.

Guedes, J. e Kikuchi, N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite-element methods, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 83(2), p. 143–198, 1990.

Guest, J. K. Imposing maximum length scale in topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 37(5), p. 463–473, 2008.

Guest, J. K.; Prévost, J. H.; e Belytschko, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 61(2), p. 238–254, 2004.

Hac, A. e Liu, L. Sensor and actuator location in motion control of flexible structures, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 167(2), p. 239–261, 1993.

Haftka, R. e Gürdal, Z. **Elements of Structural Optimization**. Kluwer, Netherlands, 1992.

Hale, A.; Lisowski, R.; e Dahl, W. Optimal simultaneous structural and control design of maneuvering flexible spacecraft, **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, vol. 8(1), p. 86–93, 1985.

Hassani, B. e Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization I - Homogenization theory for media with periodic structure, **Computers and Structures**, vol. 69(6), p. 707–717, 1998a.

Hassani, B. e Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization II - Analytical and numerical solution of homogenization equations, **Computers and Structures**, vol. 69(6), p. 719–738, 1998b.

Hiramoto, K.; Doki, H.; e Obinata, G. Optimal sensor/actuator placement for active vibration control using explicit solution of algebraic Riccati equation, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 229(5), p. 1057–1075, 2000.

Housner, G.; Bergman, L.; Caughey, T.; Chassiakos, A.; Claus, R.; Masri, S.; Skelton, R.; Soong, T.; Spencer, B. F.; e Yao, J. Structural Control: Past, Present, and Future, **ASCE Journal of Engineering Mechanics**, vol. 123(9), p. 897–971, 1997.

IEEE. **ANSI/IEEE Std 176-1987, Standard on piezoelectricity**. Inc. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, New York, 1988.

Ikeda, T. **Fundamentals of Piezoelectricity**. Oxford University Press, Oxford, 1996.

Irwanto, B.; Hardtke, H.-J.; e Pawandenat, D. An efficient technique for the computation of eigenvalue and eigenvector derivatives of cyclic structures, **Computers and Structures**, vol. 81, p. 2395–2400, 2003.

Jang, G.; Jeong, J.; Kim, Y.; Sheen, D.; Park, C.; e Kim, M. Checkerboard-free topology optimization using non-conforming finite elements, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 57, p. 1717–1735, 2003.

Jog, C. e Haber, R. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 130(3-4), p. 203–226, 1996.

Jog, C.; Haber, R.; e Bendsøe, M.P., i. M. B. . C. M. S. e. A displacement based topology design with self-adaptive materials, **Topology Design of Structures**, vol. Kluwer Academic Publishers, p. 219–238, 1993.

Jonsmann, J. **Technology development for topology optimized thermal microactuators**. Ph.d. thesis, Technical University of Denmark, Denmark, 1999.

Kang, F.; Li, J.; e Xu, Q. Virus coevolution partheno-genetic algorithms for optimal sensor placement, **Advanced Engineering Informatics**, vol. 22, p. 362–370, 2008.

Kikuchi, N.; Nishiwaki, S.; Fonseca, J.; e Silva, E. Design optimization method for compliant mechanisms and material microstructure, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 151(3-4), p. 401–417, 1998.

Kim, Y. e Junkins, J. Measure of Controllability for Actuator Placement, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol. 14, p. 895–902, 1991.

Kumar, R. e Narayanan, S. Active vibration control of beams with optimal placement of piezoelectric sensor/actuator pairs, **Smart Materials and Structures**, vol. 17, p. 01–15, 2008.

Lamberti, L. e Pappalettere, C. Comparison of the Numerical Efficiency of Different Sequential Linear Programming Based Algorithms for Structural Optimisation Problems, **Computers and Structures**, vol. 76, p. 713–728, 2000.

Larsen, U.; Sigmund, O.; e Bouwstra, S. Design and fabrication of complicate micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio, **Journal of Microelectromechanical Systems**, vol. 6(2), p. 99–106, 1997.

Lerch, R. Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control**, vol. 37(3), p. 233–247, 1990.

Lines, M. e Glass, A. **Principles and applications of ferroelectrics and related materials**. Clarendon Press, Oxford, 2001.

Liu, W.; Gao, W.; Sun, Y.; e Xu, M. Optimal sensor placement for spatial lattice structure based on genetic algorithms, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 317, p. 175–189, 2008.

Liu, X. e Begg, D. On Simultaneous Optimisation of Smart Structures - Part I: Theory, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 184, p. 15–24, 2000.

Locatelli, G.; Langer, H.; Muller, M.; e Braier, H. Simultaneous optimization of actuator placement and structural parameters by mathematical and genetic optimization algorithms, **In: Proceedings of IUTAM Conference Smart Structures and Structronic Systems**, vol. Kluwer ed., Magdeburg, p. 01–09, 2000.

Luenberger, D. **Optimization by Vector Space Methods**. John Wiley & Sons, 1969.

Maghami, P. e Joshi, S. Sensor/Actuator Placement for Flexible Space Structures, **IEEE American Control Conference**, vol. a, p. 1941–1948, 1990.

Mecchi, A.; Nader, G.; Silva, E.; e Adamowski, J. Development and Characterization of a Unimorph-type Piezoelectric Actuator Applied to a Michelson Interferometer, **ABCM Symposium Series in Mechatronics**, vol. 01, p. 653–661, 2004.

Meirovitch, L. **Dynamics and Control of Structures**. John Wiley & Sons, New York, 1990.

Miller, D. e Shim, J. Gradient-based combined structural and control optimization, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol. 10(3), p. 291–298, 1987.

Milman, M.; Salaman, M.; Scheid, R.; Bruno, R.; e Gibson, J. Combined control-structural optimization, **Computational Mechanics**, vol. 8, p. 01–18, 1991.

Min, S.; Kikuchi, N.; Park, Y.; Kim, S.; e Chang, S. Optimal topology design of structures under dynamic loads, **Structural Optimization**, vol. 17(2-3), p. 208–218, 1999.

Moheimani, S. e Fleming, A. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping**. Springer, Germany, 2006.

Nelson, R. Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives, **AIAA Journal**, vol. 14, p. 1201–1205, 1976.

Neves, M.; Rodrigues, H.; e Guedes, J. Generalized topology design of structures with a buckling load criterion, **Structural Optimization**, vol. 10(2), p. 71–78, 1995.

Nguyen, D. T. e Georges, D. **Controllability Gramian for Optimal Placement of Power System Stabilizers in Power Systems**. In *APCCAS*, pages 1373–1378. IEEE, 2006.

Nishiwaki, S.; Frecker, M.; Min, S.; e Kikuchi, N. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 42, p. 535–559, 1998.

Ogata, K. **Modern Control Engineering**. Prentice Hall, 2009.

Ou, J. e Kikuchi, N. Integrated optimal structural and vibration control design, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 12, p. 209–216, 1996.

Park, Y. **Extensions of optimal layout design using the homogenization method**. Ph.d. thesis, University of Michigan, Michigan, 1995.

Pedersen, N. Maximization of eigenvalues using topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 20(1), p. 2–11, 2000.

Piefort, V. **Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures**. Thesis submitted in candidature for the degree of doctor in applied sciences, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Academic Year 2000-2001.

Preumont, A. **Vibration Control of Active Structures, An Introduction**. Kluwer, 2002.

Raja, M. e Narayanan, S. Simultaneous optimization of structure and control of smart tensegrity structures, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. 20(1), p. 109–117, 2009.

Rodrigues, H. e Fernandes, P. Topology optimization of linear elastic structures subjected to thermal loads, vol. in M.P. Bendsøe & C.A. Mota Soares (eds), *Topology Design of Structures*, Kluwer Academic Publishers, p. 437–450, 1993.

Rodrigues, H. e Fernandes, P. A material based model for topology optimization of thermoelastic structures, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 38(12), p. 1951–1965, 1995.

Rubio, W.; Silva, E.; e Paulino, G. Toward optimal design of piezoelectric transducers based on multifunctional and smoothly graded hybrid material systems, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. published online 31 July, 2009.

Salagame, R. e Belegundu, A. Shape optimization with p-adaptivity, **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, vol. 33(12), p. 2399–2405, 1995.

Salama, M.; Garba, J.; Demsetz, L.; e Udwadia, F. Simultaneous optimization of controlled structures, **Computational Mechanics**, vol. 3, p. 275–282, 1988.

Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization, **Mechanics of Structures and Machines**, vol. 25(4), p. 493–524, 1997.

Sigmund, O. Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part I: One-material structures, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190(49-50), p. 6577–6604, 2001a.

Sigmund, O. Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part II: Two-material structures, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190(49-50), p. 6605–6627, 2001b.

Sigmund, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 33(4-5), p. 401–424, 2007.

Sigmund, O. e Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local-minima, **Structural Optimization**, vol. 16(1), p. 68–75, 1998.

Silva, E.; Fonseca, J.; e Kikuchi, N. Optimal design of periodic piezocomposites, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 159(1-2), p. 49–77, 1998.

Silva, E. e Kikuchi, N. Design of piezoelectric transducers using topology optimization, **Smart Materials and Structures**, vol. 8(3), p. 350–364, 1999.

Silva, E.; Nishiwaki, S.; Fonseca, J.; e Kikuchi, N. Optimization methods applied to material and flextensional actuator design using the homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 172(1-4), p. 241–271, 1999.

Silva, E.; Nishiwaki, S.; e Kikuchi, N. Topology optimization design of flextensional actuators, **IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, vol. 47(3), p. 657–671, 2000.

Suzuki, K. e Kikuchi, N. A homogenization method for shape and topology optimization, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 93(3), p. 291–318, 1991.

Talischí, C.; Paulino, G.; e Le, C. Honeycomb Wachspress finite elements for structural topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 37, p. 569–583, 2009.

Thomsen, J. Topology optimization of structures composed of one or 2 materials, **Structural Optimization**, vol. 5(1-2), p. 108–115, 1992.

Tiersten, H. F. Hamilton's principle for linear piezoelectric media, in **Proceedings of the IEEE**, vol. , p. 1523–1524, 1967.

Tzou, H. e Tseng, C. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 138(1), p. 17–34, 1990.

van der Aa, N.; Ter Morsche, H.; e Mattheij, R. Computation of eigenvalue and eigenvector derivatives for a general complex-valued eigensystem, **Electronic Journal of Linear Algebra**, vol. 16, p. 300–314, 2007.

Vasques, C. e Rodrigues, J. Active Vibration Control of Smart Piezoelectric Beams: Comparasion of Classical and Optimal Feedback Control Strategies, **Computer and Structures**, vol. 84, p. 1402–1414, 2006.

Wang, Z.; Chen, S.; e Han, W. Integrated structural and control optimization of intelligent structures, **Engineering Structures**, vol. 21, p. 183–191, 1999.

Wu, B.; Xu, Z.; e Li, Z. A note on computing eigenvector derivatives with distinct and repeated eigenvalues, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, vol. 23, p. 241–251, 2007.

Wujek, B. e Renaud, J. New Adaptative Move-Limit Management Strategy for Approximate Optimization, Part I, **AIAA Journal**, vol. 36(10), p. 1911–1921, 1998.

XiaoXiang, L. e Jun, H. Science in China. Series E, Technological sciences, **On the placement of actuators and sensors for flexible structures with closely spaced modes**, vol. 53(7), p. 1973–1982, 2010.

Xu, B.; Jiang, J.; e Ou, J. Integrated optimization of structural topology and control for piezoelectric smart trusses using genetic algorithm, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 307, p. 393–427, 2007.

Yang, J. **An Introduction to the Theory of Piezoelectricity**. Springer, Boston, MA, 2005.

Zhu, Y.; Qiu, J.; Du, H.; e Tani, J. Simultaneous optimal design of structural topology, actuator locations and control parameters for a plate structure, **Computational Mechanics**, vol. 29, p. 89–97, 2002.

A. Modos de vibração para as estruturas otimizadas

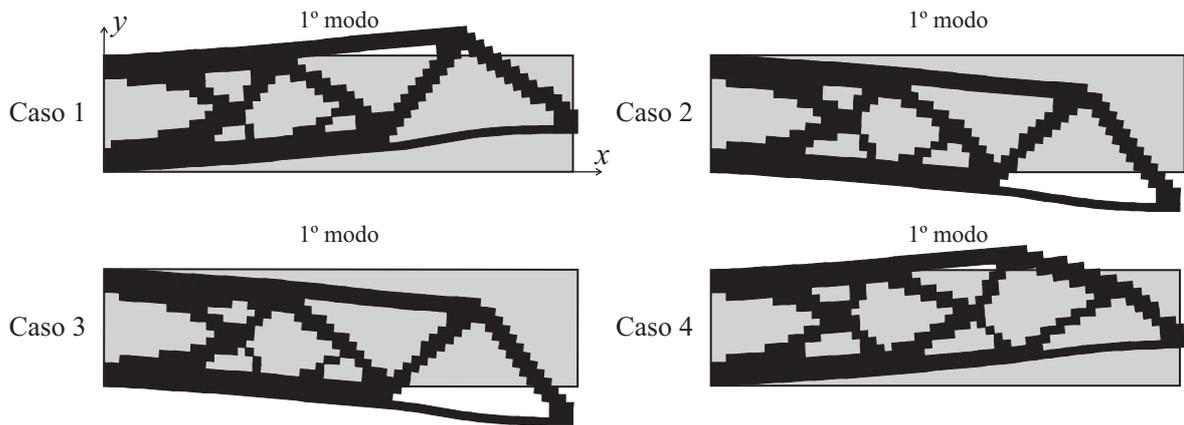


Figura A.1 – Primeiro modo de vibração para os Casos 1, 2, 3 e 4

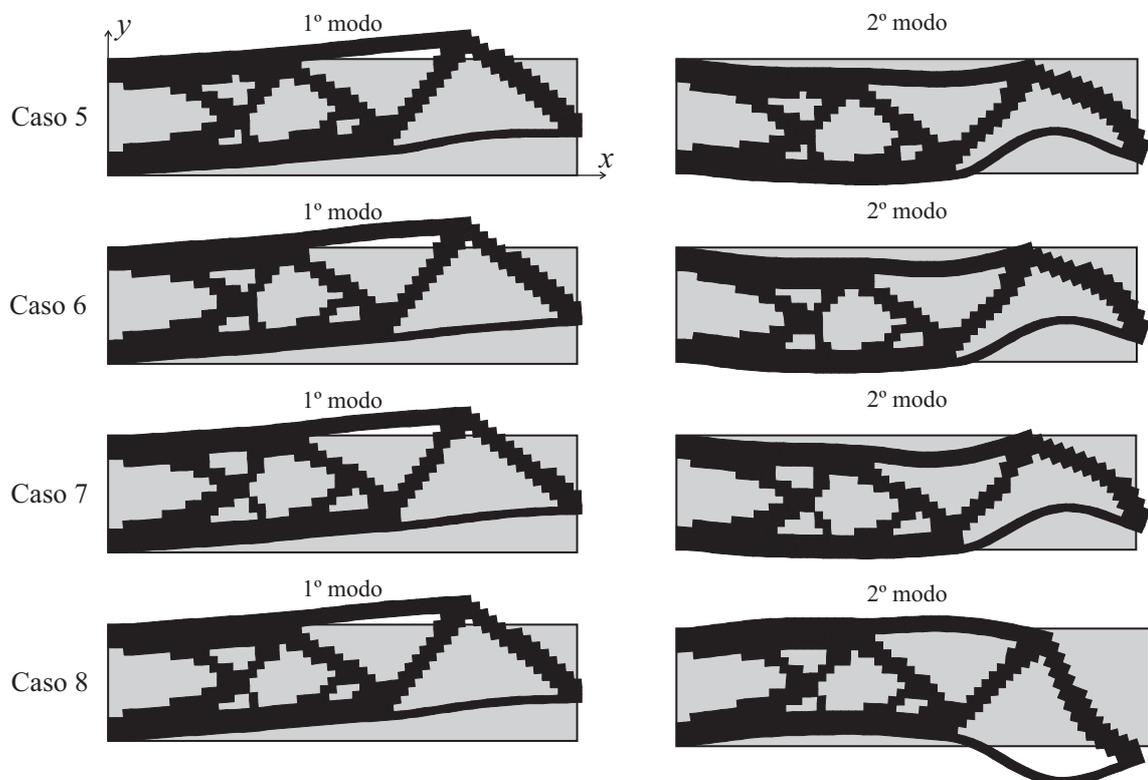


Figura A.2 – Primeiro e segundo modos de vibração para os Casos 5, 6, 7 e 8

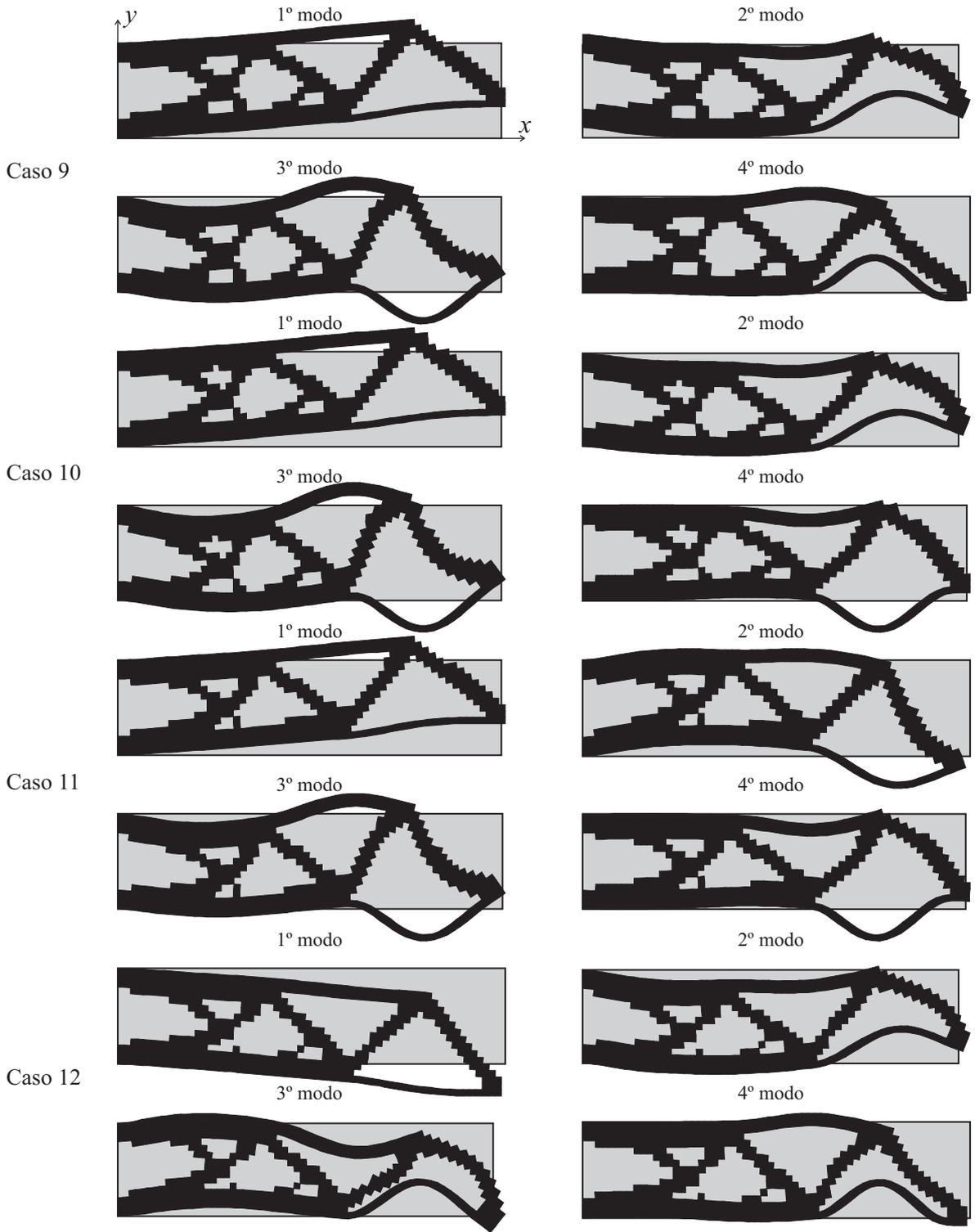


Figura A.3 – Quatro primeiros modos de vibração para os Casos 9, 10, 11 e