

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SOLUÇÃO $\mathcal{L}TS_N$ PARA PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA
COM POLARIZAÇÃO EM GEOMETRIA PLANA**

por

Márcia Rosales Ribeiro Simch

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Julho de 2004

**SOLUÇÃO $\mathcal{L}TS_N$ PARA PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA
COM POLARIZAÇÃO EM GEOMETRIA PLANA**

por

Márcia Rosales Ribeiro Simch

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto

Aprovada por:

Prof. Dr. Gilberto Orengo de Oliveira (Física Médica-UNIFRA/RS)

Profa. Dra. Liliane Basso Barichello (DMPA/PROMEC-UFRGS/RS)

Prof. Dr. Roberto David Martinez Garcia (IEAv-CTA/SP)

Prof. Dr. Rubén Panta Pazos (DMAT-UNISC/RS)

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 22 de Julho de 2004

Para

Frederico e Paulo,

que incansavelmente compartilharam sacrifícios.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à professora Cynthia Feijó Segatto pela oportunidade de realização deste trabalho e pela forma tranqüila e segura de sua orientação. Além do trabalho científico, fica um grande exemplo de comportamento.

Aos demais professores do PROMEC que enriqueceram-me na formação acadêmica. Em particular ao professor Marco Tullio M. B. de Vilhena.

A todos os colegas que de forma direta ou indireta contribuíram na execução deste trabalho. Em especial aos colegas Marcelo Antônio dos Santos, pela consultoria em Fortran, e Sérgio Luiz Cardoso de Oliveira, pela consultoria em LATEX.

Ao PICDT-CAPES/UFPel pelo suporte financeiro.

E, com todo o meu amor, à minha família: meu filho Frederico, que é o presente mais precioso em minha vida e representa minha força interior e meus sonhos; meu marido Paulo, que me encorajou, apoiou e sempre acredita em todas as minhas vitórias; minha irmã Fabiane, que esteve ao meu lado em muitos momentos importantes; meus pais Edgar e Ione, que representam o início dessa trajetória.

24 de Agosto de 2004

RESUMO

SOLUÇÃO \mathcal{LTS}_N PARA PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA COM POLARIZAÇÃO EM GEOMETRIA PLANA

O método \mathcal{LTS}_N tem sido utilizado na resolução de uma classe abrangente de problemas de transporte de partículas neutras que são reduzidos a um sistema linear algébrico depois da aplicação da transformada de Laplace. Na maioria dos casos estudados os autovalores associados são reais e simétricos. Para o problema de criticalidade os autovalores associados são reais ou imaginários puros e simétricos, e para o problema de multigrupo podem aparecer autovalores complexos. O objetivo deste trabalho consiste na generalização da formulação \mathcal{LTS}_N para problemas de transporte com autovalores complexos. Por esse motivo é focada a solução de um problema radiativo de transporte com polarização em uma placa plana. A solução apresentada fundamenta-se na aplicação da transformada de Laplace ao conjunto de equações S_N dos problemas resultantes da decomposição da equação de transferência radiativa com polarização em série de Fourier, seguindo o procedimento de Chandrasekhar. Esse procedimento gera $2L + 2$ sistemas lineares de ordem $4N$ dependentes do parâmetro complexo " s ". Aqui, L é o grau de anisotropia e N a ordem de quadratura. A solução desse sistema simbólico é obtida através da aplicação da transformada inversa de Laplace depois da inversão da matriz simbólica pelo método da diagonalização. Para a obtenção das constantes de integração é assumido que os componentes do vetor de Stokes são reais e as matrizes dos autovalores e autovetores são separadas em suas partes real e imaginária. A solução \mathcal{LTS}_N para autovalores complexos é validada através da comparação da solução para uma placa com espessura unitária, grau de anisotropia $L = 13$, albedo de espalhamento simples $\varpi = 0.99$, coeficiente de reflexão de Lambert $\lambda_0 = 0.1$ e $N = 150$, segundo dados da literatura consultada.

ABSTRACT

\mathcal{LTS}_N SOLUTION FOR THE RADIATIVE-TRANSFER PROBLEMS WITH POLARIZATION IN SLAB-GEOMETRY

The \mathcal{LTS}_N method has been used in the solution of a large class of neutral particle transport problems which are reduced to an algebraic linear system by the Laplace transform technique application. For the most cases studied the associated eigenvalues are symmetric real. For the criticality problem the associated eigenvalues are real or symmetric pure imaginary, and for the multigroup problem could appear complex eigenvalues. The purpose of this work relies in the generalization of the \mathcal{LTS}_N approach to solve transport problems with complex eigenvalues. To this end this work focused in the solution of the radiative transport problem with polarization in a slab. The solution reported is based on the application of the Laplace transform technique to the set of S_N equations resulting from the radiative transfer equation with polarization decomposition in Fourier series, following the Chandrasekhar procedure. This procedure leads to a linear system $(2L+2)$ with $4N$ order depending on the complex parameter "s". Here, L denotes the anisotropy degree and N the order of the quadrature. The solution of this symbolic system is obtained performing the inverse Laplace transform after the inversion of the symbolic matrix by the diagonalization method. To attain the integration constants it is assumed that the components of the Stokes vector are real and the eigenvectors and eigenvalues matrix are split into real and imaginary matrices. The \mathcal{LTS}_N solution for complex eigenvalues is tested by the comparison of the solution in a slab with unitary thickness, anisotropy degree $L = 13$, single scattering albedo $\varpi = 0.99$, coefficient for Lambert reflection $\lambda_0 = 0.1$ and $N = 150$, with the solutions for the bibliography.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	O MÉTODO \mathcal{LTS}_N	11
2.1	Problemas de transporte sem simetria azimutal	11
2.2	Uma revisão da solução \mathcal{LTS}_N para problemas de transporte sem simetria azimutal	15
3	SOLUÇÃO \mathcal{LTS}_N DA EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA PARA LUZ POLARIZADA	26
3.1	Descrição do modelo	26
3.2	Aproximação S_N com enfoque matricial	33
3.3	O método \mathcal{LTS}_N no formalismo de Stokes	36
3.3.1	Solução \mathcal{LTS}_N vetorial homogênea	37
3.3.2	Solução \mathcal{LTS}_N vetorial particular	39
3.3.3	Cálculo das condições de contorno desconhecidas	41
3.4	Dependência angular contínua	44
3.5	Implementação da matriz associada à matriz simbólica	48
3.6	Aspectos computacionais da solução	51
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	53
4.1	Problema-teste	53
4.2	Tabulação e análise de resultados numéricos	54
5	CONCLUSÃO	60
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62

APÊNDICES	84
I NOÇÕES SOBRE POLARIZAÇÃO	84
II MATRIZ DE ESPALHAMENTO	89
III REPRESENTAÇÃO MATRICIAL ALTERNATIVA PARA A APROXI- MAÇÃO S_N	97

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres Arábicos

- a_ℓ^m : Coeficiente real presente nas fórmulas recursivas para implementação da matriz associada à matriz simbólica.
- \mathbf{A} : Matriz dependente da aproximação considerada, independente do parâmetro s .
- $\mathbf{A}^m(\mu, \mu')$: Função matricial presente na definição analítica da matriz de fase.
- $A_{m,\rho}^\ell$: Coeficiente complexo na definição das funções esféricas generalizadas.
- $\mathcal{A}_{\iota j}^m$: Sub-matrizes da matriz proveniente da aproximação S_N para o problema vetorial, com ordem 4 , $\iota, j = 1, \dots, N$.
- \mathbb{A} : Matriz diagonal, com ordem $4N$, presente nas soluções particulares do problema vetorial, quando determinadas através do método dos coeficientes a determinar.
- \mathbf{B} : Matriz dependente da aproximação considerada, independente do parâmetro s .
- $\mathbf{B}^m(s)$: Matriz inversa da matriz simbólica associada à solução escalar.
- $\mathbf{B}^m(\tau)$: Matriz transformada inversa de $\mathbf{B}^m(s)$.
- $\mathbf{B}_{\iota j}^m(\tau)$: Sub-matrizes de $\mathbf{B}^m(\tau)$, com ordem $\frac{N}{2}$, $\iota, j = 1, 2$.
- $\mathbf{B}_+^m(\tau)$: Matriz resultante da decomposição da matriz $\mathbf{B}^m(\tau)$ nos autovalores positivos.
- $\mathbf{B}_-^m(\tau)$: Matriz resultante da decomposição da matriz $\mathbf{B}^m(\tau)$ nos autovalores negativos.
- $\mathbf{B}_{+\iota j}^m(\tau)$: Sub-matrizes de $\mathbf{B}_+^m(\tau)$, com ordem $\frac{N}{2}$, $\iota, j = 1, 2$.
- $\mathbf{B}_{-\iota j}^m(\tau)$: Sub-matrizes de $\mathbf{B}_-^m(\tau)$, com ordem $\frac{N}{2}$, $\iota, j = 1, 2$.
- \mathbf{B}_ℓ : Matriz dos coeficientes de espalhamento do problema vetorial.
- $\mathcal{B}^t(\tau)$: Matrizes auxiliares, $t = 1, 2, 3, 4$, com ordem $4N$, na determinação das condições de contorno do problema vetorial.
- $\mathcal{B}_{\iota j}^t(\tau)$: Sub-matrizes de $\mathcal{B}^t(\tau)$, com ordem $2N$, $\iota, j = 1, 2$.
- \mathbb{B} : Matriz diagonal, com ordem $4N$, presente nas soluções particulares do

problema vetorial, quando determinadas através do método dos coeficientes a determinar.

- \mathbf{c}^m : Vetor constante presente na solução particular do problema escalar obtida com o uso do método dos coeficientes a determinar.
- $c_t(\iota, \iota)$: Coeficientes reais, $t = 1, 2$, nas soluções analíticas das convoluções no problema vetorial.
- $\mathbf{C}^m(\tau)$: Vetor resultante do produto $\mathbf{H}^m(\tau)\mathbf{Q}^m$.
- $\mathbf{C}_\iota^m(\tau)$: Sub-vetores de $\mathbf{C}^m(\tau)$, com ordem $\frac{N}{2}$, $\iota = 1, 2$.
- $\mathbf{C}^m(\mu, \mu')$: Componente de Fourier na representação analítica da matriz de fase.
- d_ι^m : Autovalores de \mathbf{M}^m , $\iota = 1, \dots, N$.
- $d_+^m(\iota, j)$: Elementos da matriz diagonal \mathbf{D}_+^m .
- $d_-^m(\iota, j)$: Elementos da matriz diagonal \mathbf{D}_-^m .
- $\mathbf{d}^m(\iota, j)$: Elementos da matriz diagonal \mathbf{D}^m .
- $\mathbf{d}_1(\iota, \iota)$: Parte real dos autovalores de \mathcal{M}^m .
- $\mathbf{d}_2(\iota, \iota)$: Parte imaginária dos autovalores de \mathcal{M}^m .
- \mathbf{D}^m : Matriz diagonal formada pelos autovalores de \mathbf{M}^m .
- \mathbf{D}_+^m : Matriz diagonal com os autovalores positivos de \mathbf{M}^m .
- \mathbf{D}_-^m : Matriz diagonal com os autovalores negativos de \mathbf{M}^m .
- \mathcal{D} : Matriz diagonal de ordem 4 presente nas definições dos componentes $\mathbf{C}^m(\mu, \mu')$ e $\mathbf{S}^m(\mu, \mu')$.
- \mathcal{D}_k : Matrizes diagonais \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 na decomposição analítica da matriz de fase.
- \mathbb{D} : Matriz diagonal dos autovalores de \mathcal{M} .
- \mathbb{D}_1 : Matriz diagonal formada pela parte real dos autovalores de \mathcal{M} .
- \mathbb{D}_2 : Matriz diagonal formada pela parte imaginária dos autovalores de \mathcal{M} .
- $\mathbb{E}(\tau)$: Função que define a mudança de variáveis no problema vetorial.
- f_ℓ : Constantes definidas pela lei de espalhamento no problema escalar.
- f_ℓ^m : Coeficientes da expansão da função de fase em polinômios de Legendre.
- $F(\mu, \varphi)$: Intensidade de radiação incidente em $\tau = 0$, problema escalar.
- \mathbf{F} : Vetor fluxo, com ordem 4.
- $F_{\mathcal{J}}$: Componente do vetor fluxo, relativa ao parâmetro de Stokes \mathcal{J} .
- $F_{\mathcal{Q}}$: Componente do vetor fluxo, relativa ao parâmetro de Stokes \mathcal{Q} .

$F_U :$	Componente do vetor fluxo, relativa ao parâmetro de Stokes \mathcal{U} .
$F_V :$	Componente do vetor fluxo, relativa ao parâmetro de Stokes \mathcal{V} .
$\mathcal{F}_k^m(\tau, \mu) :$	Fonte no problema com dependência contínua.
$g(\iota, \iota)(\tau) :$	Função real nas soluções analíticas das convoluções no problema vetorial.
$\mathbf{G}_1(\mu, \varphi) :$	Função real, não-generalizada, na definição da luz incidente em $\tau = \tau_a$.
$\mathbf{G}_2(\mu, \varphi) :$	Função real, não-generalizada, na definição da luz incidente em $\tau = \tau_b$.
$G(\mu, \varphi) :$	Intensidade de radiação incidente em $\tau = \tau_0$, problema escalar.
$\mathcal{G}_k^m(\tau_0, \mu) :$	Condição de contorno no problema com dependência contínua.
$\mathbf{H}^m(\tau) :$	Convolução de $\mathbf{B}^m(\tau)$ com $e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}$.
$\mathcal{H}_k^m(\tau) :$	Vetores, com ordem $4N$, soluções particulares do problema vetorial.
$\mathcal{H}(\tau) :$	Notação simplificada de $\mathcal{H}_k^m(\tau)$.
$\mathcal{H}_\iota(\tau) :$	Sub-vetores de $\mathcal{H}(\tau)$, $\iota = 1, 2$.
$i :$	Unidade imaginária.
$\mathbf{I} :$	Matriz identidade.
$\mathbf{I} :$	Matriz bloco quadrada, com ordem $2N$, contendo matrizes nulas e matrizes identidades de ordem 4.
$I(\tau, \mu, \varphi) :$	Intensidade de radiação em τ e na direção (μ, φ) .
$I_c^m(\tau, \mu) :$	Coefficiente dos cossenos da decomposição de Chandrasekhar da intensidade de radiação sem simetria azimutal.
$I_s^m(\tau, \mu) :$	Coefficiente dos senos da decomposição de Chandrasekhar da intensidade de radiação sem simetria azimutal.
$I^m(\tau, \mu) :$	Notação para as intensidades de radiação com simetria azimutal $I_c^m(\tau, \mu)$ e $I_s^m(\tau, \mu)$.
$I_*^m(\tau, \mu) :$	Termo não-generalizado na decomposição de $I^m(\tau, \mu)$.
$I_{n^*}^m(\tau) :$	Intensidade de radiação difusa em τ e na direção discreta μ_n .
$\mathbf{I}^m(\tau) :$	Vetor intensidade de radiação difusa, ordem N .
$\bar{\mathbf{I}}^m(s) :$	Vetor intensidade de radiação difusa transformado.
$\mathbf{I}_\iota^m(\tau) :$	Sub-vetores do vetor $\mathbf{I}^m(\tau)$, com ordem $\frac{N}{2}$, $\iota = 1, 2$.
$\mathbf{I}_P^m(\tau) :$	Vetor solução particular do problema escalar, determinado com o uso do método dos coeficientes a determinar.
$\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi) :$	Vetor de Stokes, usado na representação do vetor densidade ótica.

$\mathbf{I}^*(\tau, \mu, \varphi) :$	Componente de campo difuso do vetor de Stokes.
$\mathbf{I}_k^m(\tau, \mu) :$	Componente de Fourier do vetor campo difuso $\mathbf{I}^*(\tau, \mu, \varphi)$.
$\mathbf{I}_{k,n}^m(\tau) :$	Componente de Fourier do vetor campo difuso na direção discreta μ_n .
$\mathcal{I}_k^m(\tau) :$	Vetor de ordem $4N$ contendo os N componentes $\mathbf{I}_{k,n}^m(\tau)$.
$\mathcal{I}(\tau) :$	Notação simplificada para $\mathcal{I}_k^m(\tau)$.
$\overline{\mathcal{I}}_k^m(s) :$	Vetor $\mathcal{I}_k^m(\tau)$ transformado.
$\mathcal{I}_\nu(\tau) :$	Sub-vetores do $4N$ -vetor $\mathcal{I}(\tau)$, com ordem $2N$, $\nu = 1, 2$.
$\mathcal{J}(\tau, \mu, \varphi) :$	Parâmetro de Stokes, primeiro componente do vetor densidade.
$\mathcal{J}_{k,n}^m(\tau) :$	Componente de Fourier do parâmetro \mathcal{J} na direção discreta μ_n .
$\mathbb{I}_1(\tau) :$	Matriz diagonal das convoluções $\mathbb{I}_1^+(i, \nu)(\tau)$ e $\mathbb{I}_1^-(i, \nu)(\tau)$.
$\mathbb{I}_2(\tau) :$	Matriz diagonal das convoluções $\mathbb{I}_2^+(i, \nu)(\tau)$ e $\mathbb{I}_2^-(i, \nu)(\tau)$.
$\mathbb{I}_1^+(i, \nu)(\tau) :$	Convoluções de $\cos(\tau \mathbf{d}_2(i, \nu)) e^{(\tau \mathbf{d}_1(i, \nu))}$ com $e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}$ para os autovalores positivos.
$\mathbb{I}_1^-(i, \nu)(\tau) :$	Convoluções de $\cos(\tau \mathbf{d}_2(i, \nu)) e^{(\tau \mathbf{d}_1(i, \nu))}$ com $e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}$ para os autovalores negativos.
$\mathbb{I}_2^+(i, \nu)(\tau) :$	Convoluções de $\sin(\tau \mathbf{d}_2(i, \nu)) e^{(\tau \mathbf{d}_1(i, \nu))}$ com $e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}$ para os autovalores positivos.
$\mathbb{I}_2^-(i, \nu)(\tau) :$	Convoluções de $\sin(\tau \mathbf{d}_2(i, \nu)) e^{(\tau \mathbf{d}_1(i, \nu))}$ com $e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}$ para os autovalores negativos.
$\mathcal{K}^m(\mu' \rightarrow \mu) :$	Núcleo do espalhamento.
$L :$	Grau de espalhamento ou anisotropia.
$\mathbf{L} :$	Matriz diagonal na definição das condições de contorno do problema vetorial, ordem 4.
$\mathbf{M}^m :$	Matriz, não-degenerada, associada a aproximação S_N no problema escalar.
$M^m(i, j) :$	Termo geral de \mathbf{M}^m .
$\mathcal{M}^m :$	Matriz associada a aproximação S_N no problema vetorial.
$\mathcal{M} :$	Notação simplificada para \mathcal{M}^m .
$\mathcal{M}_{i,j}^m :$	Componente genérico de \mathcal{M}^m .
$N :$	Ordem de quadratura.
$\mathcal{N}^m :$	Matriz bloco, de ordem $4N \times 4$, na definição do vetor fonte $\mathcal{S}_k^m(\tau)$.
$\mathcal{N} :$	Notação simplificada para \mathcal{N}^m .

\mathcal{N}_i^m :	Sub-matrizes de \mathcal{N}^m , com ordem 4, $i = 1, \dots, N$.
$p(\cos \Theta)$:	Função de fase.
$p_\ell(\mu)$:	Polinômio de Legendre de ℓ -ésima ordem.
P :	Grau de polarização.
$P_\ell^m(\mu)$:	Funções associadas de Legendre.
$\mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi - \varphi')$:	Matriz de fase.
$\mathcal{P}_{m,\rho}^\ell(\mu)$:	Funções esféricas generalizadas.
$Q^m(\mu)$:	Função presente no termo de fonte $(Q^m(\mu)e^{-\frac{\tau}{\mu_0}})$ do problema escalar.
Q_n^m :	Função $Q^m(\mu)$ para a direção μ_n .
\mathbf{Q}^m :	Vetor de ordem N com componentes $\frac{Q_n^m}{\mu_n}$.
$\mathcal{Q}(\tau, \mu, \varphi)$:	Parâmetro de Stokes, segundo componente do vetor densidade.
$\mathcal{Q}_{k,n}^m(\tau)$:	Componente de Fourier do parâmetro \mathcal{Q} na direção discreta μ_n .
\mathbf{r}_m :	Coefficiente real nas fórmulas recursivas para implementação da matriz associada à matriz simbólica.
$R(\mu, \varphi)$:	Termo resultante da decomposição de Chandrasekhar no problema escalar.
$R_\ell^m(\mu)$:	Função definida como combinação das funções esféricas generalizadas.
s :	Variável complexa.
\mathbf{s}_m :	Coefficiente real nas fórmulas recursivas para implementação da matriz associada à matriz simbólica.
$\mathbf{S}^m(\mu, \mu')$:	Componente de Fourier na representação analítica da matriz de fase.
$\mathbf{S}(\tau, \mu, \varphi)$:	Termo de fonte do problema vetorial.
$\mathbf{S}_k^m(\tau, \mu)$:	Componente de Fourier do vetor fonte $\mathbf{S}(\tau, \mu, \varphi)$.
$\mathbf{S}_{k,n}^m(\tau)$:	Componente de Fourier $\mathbf{S}_k^m(\tau, \mu)$ para μ_n .
$\mathcal{S}_k^m(\tau)$:	Vetor fonte na representação matricial da aproximação S_N para o problema vetorial, ordem $4N$.
$\overline{\mathcal{S}}_k^m(s)$:	Vetor fonte $\mathcal{S}_k^m(\tau)$ transformado.
\mathbf{S} :	Matriz de ordem 4 usada na implementação da matriz simbólica.
T :	Símbolo sobrescrito representando a operação transposição de matrizes.
$T_\ell^m(\mu)$:	Função definida por uma combinação das funções esféricas generalizadas.
$\mathcal{U}(\tau, \mu, \varphi)$:	Parâmetro de Stokes, terceiro componente do vetor densidade.
$\mathcal{U}_{k,n}^m(\tau)$:	Componente de Fourier do parâmetro \mathcal{U} na direção discreta μ_n .

\mathbf{U} :	Matriz bloco de ordem $2N$, na determinação das condições de contorno.
$\mathbf{U}_{\iota j}$:	Sub-matrizes de \mathbf{U} , com ordem 4, $\iota, j = 1, \dots, \frac{N}{2}$.
$\mathcal{V}(\tau, \mu, \varphi)$:	Parâmetro de Stokes, quarto componente do vetor densidade.
$\mathcal{V}_{k,n}^m(\tau)$:	Componente de Fourier do parâmetro \mathcal{V} na direção discreta μ_n .
\mathbf{V} :	Vetor de ordem $2N$, na determinação das condições de contorno.
\mathbf{V}_ι :	Sub-vetores de \mathbf{V} , com ordem 4, $\iota = 1, \dots, \frac{N}{2}$.
\mathbf{X}^m :	Matriz das autofunções associadas aos autovalores de \mathbf{M}^m .
\mathcal{X} :	Matriz das autofunções associadas aos autovalores de \mathcal{M} .
\mathcal{X}_1 :	Parte real de \mathcal{X} .
\mathcal{X}_2 :	Parte real de \mathcal{X}^{-1} .
$\mathbf{x}_\ell^m(\mu)$:	Funções associadas de Legendre normalizadas.
\mathbf{Y}^m :	Vetor auxiliar determinado com as condições de contorno, problema escalar homogêneo.
\mathcal{Y}_1 :	Parte imaginária de \mathcal{X} .
\mathcal{Y}_2 :	Parte imaginária de \mathcal{X}^{-1} .
$\mathbf{Y}_\ell^m(\mu)$:	Combinação das funções $R_\ell^m(\mu)$ e $T_\ell^m(\mu)$ normalizadas.
$\mathbf{Z}_\ell^m(\mu)$:	Combinação das funções $R_\ell^m(\mu)$ e $T_\ell^m(\mu)$ normalizadas.
\mathbf{W} :	Matriz bloco diagonal na decomposição para implementação de \mathcal{M}^m .

Caracteres Gregos

α_ℓ :	Coefficiente de espalhamento, problema vetorial.
β_ℓ :	Coefficiente de espalhamento, problema vetorial.
γ_ℓ :	Coefficiente de espalhamento, problema vetorial.
δ_ℓ :	Coefficiente de espalhamento, problema vetorial.
$\delta_{a,b}$:	Delta de Kronecker.
$\delta(x)$:	Função delta de Dirac.
Δ :	Matriz bloco diagonal na decomposição para implementação de \mathcal{M}^m .
ϵ_ℓ :	Coefficiente de espalhamento, problema vetorial.
ζ_ℓ :	Coefficiente de espalhamento, problema vetorial.

Θ :	Ângulo de espalhamento.
λ_0 :	Coefficiente de reflexão da Lambert.
μ :	Direção de propagação das partículas espalhadas, cosseno do ângulo polar.
μ' :	Direção de incidência das partículas espalhadas.
μ_n :	Direções discretas, raízes do polinômio de Legendre de grau N .
μ_0 :	Direção da radiação incidente ao contorno $\tau = 0$.
$\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu)$:	Matriz de ordem 4, na definição dos componentes de Fourier da matriz de fase.
τ :	Variável ótica.
τ_0 :	Espessura ótica.
φ :	Ângulo azimutal.
φ' :	Ângulo azimutal de incidência das partículas espalhadas.
φ_r :	Ângulo de referência azimutal.
φ_0 :	Ângulo azimutal da radiação incidente ao contorno $\tau = 0$.
$\Phi_k^m(\varphi)$:	Matrizes diagonais $\Phi_1^m(\varphi)$ e $\Phi_2^m(\varphi)$, com ordem 4, na expansão em Fourier para o problema vetorial.
Ψ^t :	Vetores, $t = 1, 2$, modificados em consequência da mudança de base no problema vetorial.
Ψ_ι^t :	Sub-vetores de Ψ^t com ordem $2N$, $\iota = 1, 2$.
ϖ :	Albedo de espalhamento simples.
ω_ι :	Pesos da quadratura Gaussiana.
Ω_k :	Vetores Ω_1 e Ω_2 , com ordem 4, resultantes do produto $\mathcal{D}_k \mathbf{F}$.
Ω :	Notação simplificada de Ω_k .

ÍNDICE DE FIGURAS

I.1	Polarização linear	85
I.2	Polarização circular	85
I.3	Polarização elíptica	85
I.4	Esboço de uma rede de fios condutores, com luz incidente não-polarizada, usado na exemplificação da polarização por absorção	86
I.5	Esboço de um átomo representativo de um meio isotrópico, usado na exemplificação da polarização por espalhamento	87
I.6	Esboço do padrão de radiação de um dipolo elétrico oscilante, usado na exemplificação da polarização por espalhamento	88
II.1	Geometria do espalhamento	91

ÍNDICE DE TABELAS

4.1	Problema-teste	53
4.2	Parâmetro de Stokes $\mathcal{J}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = 0$	55
4.3	Parâmetro de Stokes $\mathcal{Q}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = 0$	55
4.4	Parâmetro de Stokes $\mathcal{J}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$	56
4.5	Parâmetro de Stokes $\mathcal{Q}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$	56
4.6	Parâmetro de Stokes $\mathcal{U}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$	57
4.7	Parâmetro de Stokes $\mathcal{V}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$	57
4.8	Parâmetro de Stokes $\mathcal{J}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \pi$	58
4.9	Parâmetro de Stokes $\mathcal{Q}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \pi$	58
4.10	Grau de precisão dos resultados obtidos	59
II.1	Matriz de espalhamento [Vestrucci e Siewert, 1984].	95
II.2	Coefficientes de espalhamento [Vestrucci e Siewert, 1984].	96

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A equação de transporte, aqui considerada na forma íntegro-diferencial, é uma equação que descreve a distribuição de partículas que fluem num meio, levando em conta o movimento das mesmas e suas interações com o meio [Chandrasekhar, 1950] [Duderstadt e Hamilton, 1976] [Duderstadt e Martin, 1979]. Cabe enfatizar, essa equação é uma versão linear da equação originalmente desenvolvida por Boltzmann [Boltzmann, 1964] [Lewis e W. F. Miller, 1984] [Bell e Glasstone, 1985], em 1872, para a teoria cinética dos gases, que representa um balanço de partículas num elemento de volume do espaço de fase.

Soluções exatas da equação de transporte só podem ser obtidas, para problemas específicos, pelo método de Case [Case, 1960] [Case e Zweifel, 1967] e pela técnica de "*Wiener-Hopf*". No entanto, como decorrência da enorme aplicabilidade da teoria de transporte em algumas áreas de engenharia e física, surge o interesse no desenvolvimento de técnicas computacionais eficientes de solução dessa equação. Dentre a grande variedade de métodos determinísticos, propostos para essa finalidade, encontram-se métodos como: ordenadas discretas (S_N), obtido por Wick em 1943, harmônicos esféricos (P_N) [Davison, 1957], "*invariant imbedding*" [Adams e Kattawar, 1970] [Bellmann e Wing, 1992] e F_N [Garcia, 1985]. No caso do método S_N essa equação é aproximada por um sistema de equações diferenciais lineares ordinárias. Esse método é centrado no tratamento discreto da variável angular e consiste, fundamentalmente, na substituição do termo integral (referente à transformação angular) por uma fórmula de quadratura. A precisão dos resultados está intrinsecamente relacionada com o nível de discretização das variáveis espacial e angular. É importante mencionar que Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1950] resolveu esse conjunto de equações, analiticamente na variável espacial, cuja solução é da forma exponencial. Por outro lado, essas equações também foram resolvidas através de métodos como: SGF- S_N [Barros e Larsen, 1990] [Barros

e Larsen, 1992] e \mathcal{LTS}_N [Vilhena e Barichello, 1991b] [Barichello e Vilhena, 1991] [Barichello, 1992] [Barichello e Vilhena, 1993a].

O método \mathcal{LTS}_N , desenvolvido no início da década passada, incorporou uma importante contribuição ao estudo de fenômenos de transporte. Esse método resolve de forma analítica a aproximação S_N da equação de transporte, aplicando a transformada de Laplace na variável espacial do sistema de equações diferenciais gerado por essa aproximação, sobre um domínio finito. Até então, a transformada de Laplace vinha sendo aplicada, na solução da equação de transporte, na variável tempo [Kuščer e Zweifel, 1965] [Ito, 1972] [Davies e Martin, 1979].

A idéia básica desse método pode, então, ser resumida na aplicação da transformada de Laplace nas equações de ordenadas discretas, inversão analítica da matriz simbólica, e inversão do vetor intensidade de radiação transformado (ou do vetor fluxo transformado, no caso de transporte de nêutrons), também de forma analítica. O esquema de quadratura utilizado é o de Gauss-Legendre.

A partir da abordagem do método \mathcal{LTS}_N derivou-se um método genérico [Cardona, 1996] [Vilhena et al., 1998], onde prevalece o caráter analítico da solução para as aproximações que transformam a equação de transporte num conjunto de equações diferenciais ordinárias. Essas versões são conhecidas como \mathcal{LTP}_N [Vilhena e Streck, 1992] [Streck, 1993], \mathcal{LTw}_N [Cardona e Vilhena, 1993] [Cardona e Vilhena, 1994a], \mathcal{LTCh}_N [Cardona e Vilhena, 1994b] [Cardona et al., 1996], \mathcal{LTA}_N [Cardona e Vilhena, 1995] [Cardona e Vilhena, 1997] e \mathcal{LTLd}_N [Barros et al., 1996].

Com o propósito de obter uma formulação analítica para a inversão da matriz associada ao método genérico, vários estudos foram desenvolvidos. Primeiramente, foi proposto um algoritmo utilizando a estrutura da matriz \mathcal{LTS}_N linearmente anisotrópica e o conceito de matriz inversa [Barichello, 1992]. A seguir, essa formulação foi estendida para o caso anisotrópico [Oliveira, 1993] [Oliveira et al., 1993]. Uma aproximação alternativa para esse procedimento, utilizando o algoritmo de Trzaska [Trzaska, 1987], que inverte uma matriz do tipo $(s\mathbf{A} + \mathbf{B})$, foi aplicada na resolução do método P_N [Streck, 1993]. Esse algoritmo também foi usado para a solução de outras aproximações [Cardona e Vilhena, 1998]. Porém, todos esses métodos não mostraram-se eficazes para problemas com ordem de aproximação $N > 22$. Essa limitação ocorreu em consequência do uso, no primeiro caso, da definição de

matriz inversa, e no caso do algoritmo de Trzaska, de potências de matrizes para o cálculo da inversa. Para contornar essa dificuldade, inicialmente, foi usado o método de particionamento [Demidovich e Maron, 1987] para inversão da matriz \mathcal{LTS}_N associada a um problema isotrópico [Brancher et al., 1998]. Mais tarde, surgiu a idéia de um método recursivo para inverter uma matriz simbólica do tipo $(sI + \mathbf{A})$ [Segatto et al., 1999a], combinando a decomposição de Schur [Golub e van Loan, 1989] e o método do particionamento. A implementação desse método recursivo, num supercomputador Cray YMP/2E e/ou J9/32, permitiu o uso de quadratura de ordem $N = 400$ [Brancher et al., 1999].

Ainda, com o objetivo de melhorar o desempenho computacional do método \mathcal{LTS}_N , e considerando a matriz \mathbf{A} , associada à matriz simbólica $(sI + \mathbf{A})$, não degenerada, foi desenvolvido o esquema da diagonalização [Segatto et al., 1999b] para calcular a exponencial da matriz associada à solução \mathcal{LTS}_N . Esse procedimento permitiu a resolução de problemas com ordem de quadratura $N > 1000$ em um microcomputador tipo PC. Usando esse esquema da diagonalização, também foi feita uma reformulação do método \mathcal{LTP}_N para grandes espessuras ou altos graus de anisotropia [Simch, 2000]. Um estudo comparativo dos métodos de inversão matricial, para matrizes do tipo $(s\mathbf{A} + \mathbf{B})$, em problemas de transporte, foi realizado nas referências [Brancher, 1998] e [Gomes, 1999].

Para eliminar o problema de "*overflow*" em placas de grande espessura, gerado pelo caráter exponencial da solução \mathcal{LTS}_N , num primeiro momento, foi proposta uma mudança de base na solução do problema homogêneo [Barichello, 1995]. Essa mudança de variáveis não é apropriada para problemas não-homogêneos porque há uma transferência do "*overflow*" para o termo de fonte. Então, a extensão da mudança de variável para o caso não-homogêneo, quando a fonte considerada é exponencial, foi contornada com o cálculo da solução particular pelo método dos coeficientes a determinar [Brancher, 1998] [Segatto et al., 1999a]. Recentemente, com o uso concomitante da propriedade de invariância das direções discretas [Duderstadt e Martin, 1979] e da mudança de variáveis sugerida por Barichello, foi desenvolvido um procedimento que elimina o "*overflow*" da solução particular \mathcal{LTS}_N para uma fonte arbitrária [Gonçalves, 1999] [Gonçalves et al., 2000]. Fisicamente significa que são consideradas, com o uso dessa propriedade, equivalentes partículas deslocando-se da direita para a esquerda e partículas deslocando-se da esquerda para a direita. Com essa nova formulação \mathcal{LTS}_N , o problema de "*overflow*" foi completamente eliminado.

Também de grande importância foi a prova da convergência do método \mathcal{LTS}_N , usando o Teorema da Aproximação da teoria de semigrupo fortemente contínuo [Pazos, 1999] [Pazos e Vilhena, 1999a] [Pazos e Vilhena, 1999b] [Pazos e Vilhena, 1999c]; o que permite confiabilidade nos resultados obtidos, com uma precisão controlada. Desta forma é possível afirmar, na medida em que a ordem de quadratura cresce, o resultado encontrado, com a utilização do método, se aproxima do valor exato, a menos do erro inerente ao problema de arredondamento. Além disso, foi demonstrada a existência de um isomorfismo entre os espaços funcionais P_N e S_{N+1} , proporcionando a prova da convergência do método dos harmônicos esféricos (P_N) à solução exata [Segatto et al., 2000].

O método \mathcal{LTS}_N já foi aplicado, com eficiência, a problemas de transporte: unidimensionais, com meio homogêneo [Barichello e Vilhena, 1993a] e heterogêneo [Tavares, 2000]; espalhamento anisotrópico [Oliveira et al., 1993] [Vilhena et al., 1995] [Segatto et al., 1999a]; para modelos de um grupo [Barichello, 1992] e com multigrupos de energia [Vilhena e Barichello, 1991a] [Vilhena e Barichello, 1995] [Barroso, 2000]; com ou sem simetria azimutal, como transferência radiativa em nuvens [Segatto e Vilhena, 1994a] [Segatto, 1995] [Vilhena e Segatto, 1996] [Brancher et al., 1999]. Da mesma forma, já foram realizados estudos para a equação de transporte dependente do tempo [Vilhena e Segatto, 1993] [Segatto e Vilhena, 1994b] [Renz, 1999] [Oliveira et al., 2002] e para modelos com variável angular contínua [Segatto e Vilhena, 1997] [Hoffmann, 2003]. Também, já foram resolvidos problemas lineares e não lineares [Vargas e Vilhena, 1997] [Vargas e Vilhena, 1998] [Vilhena e Barichello, 1999], além de problemas inversos [Barichello e Vilhena, 1993b], com aplicação em ótica hidrológica [Retamoso, 2000] [Retamoso et al., 2001] [Retamoso et al., 2002] [Velho et al., 2003]. Alguns trabalhos igualmente comprovaram a eficiência do método na resolução de problemas de engenharia nuclear [Chies, 1996] [Kruse, 1998] [Borges e Vilhena, 2002], na determinação de criticalidade [Lorenzi, 1996] [Batistela et al., 1996] [Batistela et al., 1997b] [Batistela et al., 1997a] [Batistela et al., 1999] e no cálculo de parâmetros radiantes [Vilhena e Souza, 1992] [Souza, 1993] [Tavares, 2000] [Segatto et al., 2001]. Ainda é importante citar a utilização do método, tanto na solução da equação adjunta de transporte de nêutrons [Gonçalves et al., 2002], com a determinação da função importância e o cálculo de fluxo adjunto, bem como na solução da equação de transferência radiativa condutiva [Lemos, 2000]. Além disso, a formulação \mathcal{LTS}_N foi estendida a problemas de transporte estacionário em duas e três di-

mensões [Zabadal et al., 1993] [Zabadal, 1994] [Vilhena et al., 1994] [Zabadal et al., 1995] [Pazos et al., 2002] [Hauser, 2002] [Pazos et al., 2003] e em domínios convexos bidimensionais [Zabadal et al., 1997].

Para uma melhor compreensão da "*performance*" da formulação \mathcal{LTS}_N , na resolução de problemas de ordenadas discretas unidimensionais, foi feito um estudo comparativo entre métodos que resolvem as equações S_N de maneira exata [Segatto et al., 1994], e, uma revisão atualizada e detalhada sobre o método \mathcal{LTS}_N foi desenvolvida num recente trabalho de Segatto e Vilhena [Segatto e Vilhena, 1999].

O estágio atual de desenvolvimento do método \mathcal{LTS}_N motivou, há pouco, a construção de um código computacional [Orengo, 2002] para cálculo de transporte unidimensional utilizando a formulação \mathcal{LTS}_N . Nesse trabalho foram reunidas todas as vantagens proporcionadas pelo método, dentre as quais foi ressaltado o caráter semi-analítico, que propicia cálculos com controle de erro. Além do método da diagonalização, para inversão da matriz simbólica associada à solução \mathcal{LTS}_N , foi utilizado um algoritmo iterativo para o cálculo das constantes de integração, o que reduziu em aproximadamente 30% o tempo computacional quando a ordem de quadratura é elevada. Mesmo assim, foi mantido no código o método da decomposição de Schur associado com o método do particionamento, podendo ser usado em substituição ao método da diagonalização quando este não é aplicável.

Afora essas vantagens já explanadas do método \mathcal{LTS}_N , como estimativa de erro, aplicabilidade a qualquer fonte e elevada ordem de quadratura, outros estudos também determinantes à realização do presente trabalho são [Souto et al., 2003] e [Chalhoub et al., 2003]. Em [Chalhoub et al., 2003] foi realizada uma comparação de métodos de resolução da equação de transferência radiativa. Os métodos S_N analítico, na forma considerada por Chandrasekhar, e \mathcal{LTS}_N mostraram-se os mais eficazes, com ligeira superioridade do método S_N "*standard*". Porém, na ocasião desses estudos, o esquema da diagonalização encontrava-se apenas no começo da pesquisa. Além disso, atualmente, com o código computacional desenvolvido na tese [Orengo, 2002], o tempo computacional do método \mathcal{LTS}_N apresenta significativa redução em relação ao que foi considerado nesse estudo comparativo. Em adição, recentemente Souto et al. [Souto et al., 2003] mostraram a excelente "*performance*" computacional da versão \mathcal{LTS}_N paralelizada.

Então, com o objetivo primeiro de aumentar a abrangência do método \mathcal{LTS}_N ,

estendendo-o ao caso de autovalores complexos, neste trabalho é desenvolvida uma solução do problema de ordenada discreta para a equação de transferência radiativa com polarização, em geometria plana. A principal motivação reside na possibilidade de ser mantido o sucesso na resolução analítica de sistemas de equações diferenciais ordinárias através da aplicação da transformada de Laplace associada com a diagonalização de matrizes.

Como polarização é definido o estado, ou produção de um estado (por refração, dispersão etc.) [Halliday e Resnick, 1984] [Nussenzveig, 1996] [Halliday et al., 1997], em que a vibração de uma onda de luz ou outra radiação vibratória efetua-se em um só plano ou descreve círculos ou elipses.

O fato de não serem desprezados os efeitos da polarização, no estudo de transferência de uma radiação, implica que seja concedido tratamento vetorial à equação de transporte de radiação. A distribuição espacial e angular da radiação deve ser descrita por uma função vetorial, e, a função de fase substituída por uma matriz de fase (a probabilidade de espalhamento nas várias direções passa a ser descrita por uma matriz). Assim, a solução aqui proposta é identificada por solução \mathcal{LTS}_N vetorial. A vasta bibliografia consultada sugere o uso do vetor de Stokes para expressar o campo de radiação, como é possível verificar a seguir.

O problema de transferência radiativa incluindo efeitos de polarização, em termos dos parâmetros clássicos de Stokes, foi inicialmente equacionado por Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1950]. Na ocasião, também foram estabelecidas soluções trabalhando com atmosferas planas paralelas com espalhamento de Rayleigh e radiação incidente não-polarizada.

Grande parte dos trabalhos relativos à polarização, subseqüentes a Chandrasekhar, concentraram-se na obtenção de uma matriz geral de espalhamento, constituindo portanto uma extensão desse pioneiro trabalho. Muitos desses estudos tratam da derivação da equação de transferência sem apresentarem resultados numéricos. Esse fato é decorrente da complexidade matemática envolvida na resolução da equação vetorial de transporte. Porém, outros apresentam resultados numéricos, mas com simplificações do efeito de polarização. Essas simplificações nos processos, por vezes, foram obtidas pela consideração da radiação incidente não-polarizada, linearmente polarizada ou circularmente polarizada.

Uma lei razoavelmente geral de espalhamento foi permitida com a formulação matricial obtida por Kuščer e Ribarič, em 1959, para descrever o problema de difusão da luz

polarizada em geometria plana [Kuščer e Ribarič, 1959]. Entretanto, esse trabalho foi informado em termos de parâmetros complexos. Essa formulação, correspondente a um campo de radiação circularmente polarizada, foi obtida com a expansão dos componentes da matriz de fase nas funções esféricas generalizadas [Gel'fand e Šapiro, 1956]. Também foi observada a possibilidade do vetor solução da equação desenvolvida, para um meio de planos paralelos, ser convenientemente expresso em série de Fourier no ângulo azimutal. Utilizando essa decomposição no ângulo azimutal, mais tarde, foi proposto o uso das funções esféricas generalizadas para resolução desse problema [Lenoble, 1961].

Nessa linha analítica, igual apreço deve ser dado às contribuições de Siewert. Em 1981, considerando a formulação original de Kuščer e Ribarič como o melhor modelo para o caso geral de espalhamento da luz polarizada, essa teoria foi reformulada e informada em termos de parâmetros reais [Siewert, 1981]. Foi focado o problema de difusão da luz em planos paralelos finitos, iluminados por radiação arbitrariamente polarizada. O problema foi reduzido para um grupo de equações de transferência radiativa por uma decomposição do vetor de Stokes no ângulo azimutal. Essa decomposição, que possibilitou a matriz de fase introduzida por Kuščer e Ribarič ser expressa analiticamente, satisfaz condições de contorno envolvendo inclusive funções que não tem a representação em Fourier para um número finito de termos. Essa decomposição de Fourier também foi usada, mais tarde, em problemas inversos de transferência radiativa com polarização [Siewert, 1983] [McCormick e Sanchez, 1983]; a resolução desse tipo de problema também é facilitada, na abordagem de Siewert, pela separação dos campos, difuso e colimado, da solução.

Após serem reafirmados os resultados finais do prévio trabalho de Siewert [Siewert, 1981], foi obtida uma representação analítica para a matriz de fase [Siewert e Pinheiro, 1982] adequada à matriz de espalhamento simples [van de Hulst, 1948] [van de Hulst, 1957], na forma considerada por [Hovenier, 1969] [Hovenier, 1971], para conjuntos de partículas que têm um plano de simetria. Posteriormente, foram desenvolvidas expressões explícitas para os coeficientes dessa representação analítica da matriz de fase [Siewert, 1982]. Nesse artigo foram apresentadas relações recursivas e de ortogonalidade para o cálculo das constantes fundamentais da matriz de espalhamento. Além de relações de recorrência para as matrizes envolvidas no formalismo estabelecido, também foram fornecidas relações de simetria satisfeitas pela matriz de fase, a partir de relações derivadas por [Hovenier, 1969]. E assim,

esse feito foi consideravelmente mais conveniente para o desenvolvimento de trabalhos computacionais e analíticos, ou pelo menos semi-analíticos, para achar o vetor de Stokes nesse contexto de formalismo de matriz.

Como as partículas de atmosferas planetárias são freqüentemente não-esféricas (poeira semelhante a aerossol, cristais de gelo), o que está exposto sugere que esta modelagem, proposta por Siewert e colaboradores, tem um vasto campo de aplicações atmosféricas, desde que é considerada uma matriz de fase não restrita ao espalhamento de partículas esféricas ou no limite de Rayleigh.

Usando essa proposta, foram obtidas em [Garcia e Siewert, 1986], [Garcia e Siewert, 1989] e [Siewert, 2000] soluções para todos os componentes na representação em Fourier do vetor de Stokes. Por [Garcia e Siewert, 1986] foi desenvolvida uma solução em harmônicos esféricos generalizados (GSH) com uma generalização das condições de contorno de Mark [Mark, 1945]. Os aspectos computacionais da solução foram discutidos em detalhes. Foram apresentados resultados numéricos, para os quatro parâmetros de Stokes, em dois problemas de teste inicialmente resolvidos em [Benassi et al., 1984b] e [Benassi et al., 1985] com a suposição de simetria azimutal; esses testes foram realizados para atmosferas de partículas esféricas. Por [Garcia e Siewert, 1989] foi utilizado o método F_N . O espectro discreto foi previamente definido e analisado [Garcia e Siewert, 1987]. Os aspectos computacionais da solução obtida também foram relatados em pormenores. Foi observado que embora o método F_N seja considerado conceitualmente mais complicado, e mais difícil para ser implementado computacionalmente, do que o GSH, os resultados obtidos são mais precisos. Além dessa, foi salientada a vantagem da solução F_N obtida não apresentar uma dificuldade computacional, existente na solução GSH, acarretada pelos autovalores quase repetidos, no intervalo de integração, em qualquer um dos limites: $albedo \rightarrow 0$ ou $m \rightarrow grau \ de \ anisotropia$. No método GSH essa complicação é solucionada computacionalmente. Para demonstrar que a solução F_N e as técnicas numéricas desenvolvidas constituem um método computacionalmente preciso, foram informados resultados numéricos para os mesmos problemas de teste resolvidos na literatura [Garcia e Siewert, 1986]. Em [Siewert, 2000] a solução foi obtida em ordenadas discretas. Foram determinados resultados numéricos, com o usual esquema de quadratura de Gauss-Legendre mapeado no intervalo $[0, 1]$, para um caso de teste numa atmosfera contendo partículas não-esféricas. Porém, foi salientado o fato da solução obtida,

assim como no caso escalar, ser essencialmente independente do esquema de quadratura a ser utilizado. A única restrição imposta é a exclusão do *zero* do conjunto de pontos da quadratura, por causa da maneira como foi formulado o problema de autovalor. Também foi sugerido aos pesquisadores outro esquema de quadratura de "*half-range*" [Chalhoub e Garcia, 1997] [Chalhoub e Garcia, 1998]. O caso conservativo foi resumidamente discutido, em separado, usando alguns resultados do trabalho de Hovenier e van der Mee [Hovenier e van der Mee, 1990] relativo à expansão da matriz de espalhamento em termos das funções esféricas generalizadas.

Em face da significância desses fatos históricos expostos, no presente trabalho é considerada essa mesma classe de problemas de polarização solucionados por [Garcia e Siewert, 1986], [Garcia e Siewert, 1989] e [Siewert, 2000]. Motivo pelo qual os resultados informados nessas referências são tidos como os mais próximos dos "*benchmarks*", a fim de comparar e nortear o desenvolvimento e a implementação da solução \mathcal{LTS}_N vetorial. Mesmo assim, outros estudos que também merecem destaque, enfocados em análises matemáticas, modelagens e efeitos de polarização em meios plano-paralelos, foram consultados nesta revisão teórica: [Barichello e Siewert, 1999a], [Barichello e Siewert, 1999b], [Bastos et al., 2000], [Braak et al., 2001], [Chowdhary et al., 2001], [Collins et al., 1972], [Dave, 1970], [de Haan et al., 1987], [de Haan et al., 1991], [Deuzé et al., 1993], [Dittmann, 1997], [Domke, 1975a], [Domke, 1975b], [Domke, 1976], [Domke e Yanovitskij, 1986], [Fouquart et al., 1991], [Hansen e Hovenier, 1974], [Herman e Lenoble, 1968], [Herman et al., 1995], [Hovenier e van der Mee, 1983], [Hovenier et al., 1986], [Hovenier e van der Mee, 1988b], [Hovenier e van der Mee, 1988a], [Hovenier e van der Mee, 1995], [Hovenier e van der Mee, 1996], [Hovenier e van der Mee, 1999], [Hovenier e van der Mee, 2002], [Kuik et al., 1992], [Landi Degl'Innocenti, 1983], [Liou e Takano, 1994], [Liu e Dougherty, 1999], [Mishchenko, 1990], [Mishchenko, 1991b], [Mishchenko, 1991a], [Mishchenko, 1993], [Mishchenko e Travis, 1994], [Mishchenko et al., 1994], [Mishchenko, 1994], [Mishchenko, 1996], [Mishchenko e Travis, 1997], [Mueller Jr. e Crosbie, 1997], [Prigent et al., 2001], [Reguigui et al., 1995], [Schulz et al., 1999], [Siewert, 1999], [Siewert e McCormick, 1993], [van der Mee, 1986a], [van der Mee, 1986b], [van der Mee, 1986c], [van der Mee e Hovenier, 1992], [van der Mee, 1993], [Wauben e Hovenier, 1992], [Wauben et al., 1993], [Weng, 1992a], [Weng, 1992b], [Zege e Chaikovskaya, 1996]. Portanto, foi constatado que o interesse na interpretação de radiações polarizadas, assim

como o tratamento formal dessa teoria, para meios expostos à variação unidimensional de radiação, é bem documentado na literatura pública. Todavia, essa revisão bibliográfica também aponta, a boa precisão de dados experimentais só é devidamente explorada em virtude da disponibilidade dos métodos que resolvem os problemas que descrevem esse conjunto de princípios.

Neste trabalho tem início o estudo da aptidão do método \mathcal{LTS}_N , sob o ponto de vista matemático e computacional, na resolução de problemas de transferência radiativa incluindo polarização. É pretendido que a extensão do método para a teoria vetorial constitua-se numa formulação simples e junte-se aos demais métodos precisos, disponíveis na literatura, para resolução desta classe de problemas.

Para cumprir o objetivo proposto, o conteúdo deste trabalho está organizado em cinco capítulos. O capítulo 2 tem o caráter didático de informar os procedimentos necessários à obtenção da solução \mathcal{LTS}_N , incluindo avanços recentes conseguidos para o método. É examinada a resolução, de forma detalhada, de problemas S_N unidimensionais sem simetria azimutal. No capítulo 3 é deduzida a solução \mathcal{LTS}_N vetorial, com a utilização da propriedade de invariância para evitar o problema de "*overflow*". Ainda nesse capítulo, é obtida uma extensão do método da diagonalização ao caso de autovalores complexos, de modo a atender as necessidades dessa nova formulação. Esse capítulo termina com seções que contêm explicações de processos adaptativos para melhorar o desempenho do código computacional e fornecem subsídios para implementação da solução obtida. Simulações numéricas e comparações com resultados disponíveis na literatura são apresentadas no capítulo 4, comprovando a eficiência desejada, para validação da metodologia desenvolvida. E finalmente, no capítulo 5, são apresentadas tanto as conclusões do presente trabalho como sugestões de trabalhos futuros. No Apêndice I são introduzidas algumas noções matemáticas e físicas sobre polarização. A matriz de espalhamento para o modelo testado e uma maneira alternativa de implementação da solução proposta, compõem, respectivamente, os Apêndices II e III deste trabalho.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO \mathcal{LTS}_N

Este capítulo, para fundamentação do presente trabalho, é dedicado a uma revisão do método \mathcal{LTS}_N no estudo de problemas de transferência radiativa da teoria escalar. Nesta revisão, inicialmente, é considerado o método de Chandrasekhar para a decomposição de problemas de transporte sem simetria azimutal em problemas com simetria azimutal. A seguir, é apresentada a formulação \mathcal{LTS}_N aplicada a problemas de transporte sem simetria azimutal, como transferência radiativa em nuvens (caracterizados por alto grau de anisotropia). Para a inversão analítica da matriz simbólica, associada à solução \mathcal{LTS}_N , é utilizado o esquema de diagonalização. Também é exposto o procedimento que elimina o “*overflow*”, das soluções homogênea e particular, para elevadas ordens de quadratura. A solução particular do problema revisado, que é determinada através do cálculo de uma convolução, ainda é obtida, num segundo momento, pelo método dos coeficientes a determinar.

2.1 Problemas de transporte sem simetria azimutal

Seja a equação de transferência radiativa, em geometria plana, que para cada comprimento de onda é escrita como [Chandrasekhar, 1950] [Liou, 1980]:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu, \varphi) + I(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\varpi}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} p(\cos \Theta) I(\tau, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu', \quad (2.1)$$

com condições de contorno incidentes,

$$I(0, \mu, \varphi) = F(\mu, \varphi), \text{ se } \mu > 0 \quad (2.1a)$$

e

$$I(\tau_0, \mu, \varphi) = G(\mu, \varphi), \text{ se } \mu < 0, \quad (2.1b)$$

em que $I(\tau, \mu, \varphi)$ é a intensidade de radiação, que depende da variável ótica $\tau \in [0, \tau_0]$ e das variáveis angulares $\mu \in [-1, +1]$ cosseno do ângulo polar, medido a partir do eixo positivo τ , e $\varphi \in [0, 2\pi]$ ângulo azimutal, medido a partir de um ângulo de referência φ_r . Essas variáveis angulares indicam a direção de propagação da radiação. Além disto, $\varpi \in (0, 1]$ é o albedo de espalhamento simples e Θ é o ângulo de espalhamento. A função de fase $p(\cos \Theta)$, presente na equação (2.1), depois de expandida em polinômios de Legendre

$$p(\cos \Theta) = \sum_{\ell=0}^L (2\ell + 1) f_{\ell} p_{\ell}(\cos \Theta), \quad (2.2)$$

e após o uso da geometria esférica e do teorema da adição para os harmônicos esféricos, como relatado na referência [Segatto, 1995], é expressada por :

$$p(\cos \Theta) = \sum_{m=0}^L (2 - \delta_{0,m}) \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_{\ell}^m P_{\ell}^m(\mu) P_{\ell}^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (2.3)$$

sendo

$$f_{\ell}^m = f_{\ell} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}, \quad (2.4)$$

com f_{ℓ} os coeficientes da expansão, tais que $f_0 = 1$ e $|f_{\ell}| < 1$ para $0 < \ell \leq L$; L é o grau de anisotropia ou de espalhamento. As funções $P_{\ell}^m(\mu)$ indicam as funções associadas de Legendre,

$$P_{\ell}^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} p_{\ell}(\mu), \quad (2.5)$$

com $p_{\ell}(\mu)$ os polinômios de Legendre de ordem ℓ ,

$$p_{\ell}(\mu) = \frac{1}{(2^{\ell} \ell!)} \frac{d^{\ell}}{d\mu^{\ell}} (\mu^2 - 1)^{\ell}. \quad (2.6)$$

Para a decomposição do problema sem simetria azimutal (2.1) em problemas com simetria azimutal é utilizada a decomposição de Chandrasekhar [Devaux e Siewert, 1980]. Desta forma, é considerada a expansão de $I(\tau, \mu, \varphi)$ em série de Fourier truncada:

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^L \left(I_c^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi - \varphi_r) + I_s^m(\tau, \mu) \sin m(\varphi - \varphi_r) \right) + R(\mu, \varphi) e^{-\frac{\tau}{\mu}}, \quad (2.7)$$

onde, $I_c^m(\tau, \mu)$ e $I_s^m(\tau, \mu)$ são, respectivamente, os coeficientes dos cossenos e dos senos da decomposição da intensidade de radiação sem simetria azimutal em τ , na direção μ , e

$$\int_0^{2\pi} R(\mu', \varphi') p(\cos \Theta) d\varphi' = 0, \quad (2.8)$$

para $\mu \in [-1, 1]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Pelas condições de contorno (2.1a) e (2.1b) em (2.7), a função $R(\mu, \varphi)$ é determinada por:

$$R(\mu, \varphi) = \begin{cases} F(\mu, \varphi) - \sum_{m=0}^L \left(I_c^m(0, \mu) \cos m(\varphi - \varphi_r) + I_s^m(0, \mu) \sin m(\varphi - \varphi_r) \right), & \mu > 0 \\ \left[G(\mu, \varphi) - \sum_{m=0}^L \left(I_c^m(\tau_0, \mu) \cos m(\varphi - \varphi_r) + I_s^m(\tau_0, \mu) \sin m(\varphi - \varphi_r) \right) \right] e^{\frac{\tau_0}{\mu}}, & \mu < 0 \end{cases}. \quad (2.9)$$

Com a substituição da intensidade de radiação, expandida conforme (2.7), e da função de fase, descrita por sua expansão finita (2.3) em polinômios de Legendre, na equação (2.1), e, após o uso de propriedades trigonométricas e de ortogonalidade das funções seno e cosseno, é obtida a equação:

$$\begin{aligned} & \left[\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_c^m(\tau, \mu) + I_c^m(\tau, \mu) \right] \cos m(\varphi - \varphi_r) + \left[\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_s^m(\tau, \mu) + I_s^m(\tau, \mu) \right] \sin m(\varphi - \varphi_r) \\ &= \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_\ell^m P_\ell^m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell^m(\mu') \left[I_c^m(\tau, \mu') \cos m(\varphi - \varphi_r) + I_s^m(\tau, \mu') \sin m(\varphi - \varphi_r) \right] d\mu'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

O resultado expresso em (2.10) mostra que $I_c^m(\tau, \mu)$ e $I_s^m(\tau, \mu)$ são soluções da equação

de transporte com simetria azimutal

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma^m(\tau, \mu) + \Gamma^m(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_\ell^m P_\ell^m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell^m(\mu') \Gamma^m(\tau, \mu') d\mu', \quad (2.11)$$

para cada m , onde a notação $\Gamma^m(\tau, \mu)$ é utilizada para expressar, tanto $\Gamma_c^m(\tau, \mu)$, quanto $\Gamma_s^m(\tau, \mu)$.

Agora, com a aplicação da condição de contorno (2.1a) em (2.7), seguida pela multiplicação da equação obtida, primeiramente por $\cos m(\varphi - \varphi_r)$ e depois por $\sin m(\varphi - \varphi_r)$, e com a integração dessas equações resultantes no intervalo $[0, 2\pi]$, são determinadas as condições de contorno associadas a (2.11), em $\tau = 0$,

$$\Gamma_c^m(0, \mu) = \frac{2 - \delta_{0,m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\mu, \varphi) \cos m(\varphi - \varphi_r) d\varphi, \quad \mu > 0 \quad (2.11a)$$

e

$$\Gamma_s^m(0, \mu) = \frac{2 - \delta_{0,m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\mu, \varphi) \sin m(\varphi - \varphi_r) d\varphi, \quad \mu > 0; \quad (2.11b)$$

com procedimento análogo para a condição de contorno (2.1b), são obtidos resultados semelhantes em $\tau = \tau_0$. Decorre daí que $\Gamma_c^m(\tau, \mu)$ e $\Gamma_s^m(\tau, \mu)$ são soluções dos problemas de contorno dados por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma^m(\tau, \mu) + \Gamma^m(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_\ell^m P_\ell^m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell^m(\mu') \Gamma^m(\tau, \mu') d\mu', \quad (2.12)$$

com as condições de contorno

$$\Gamma^m(0, \mu) = \frac{2 - \delta_{0,m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\mu, \varphi) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} m(\varphi - \varphi_r) d\varphi, \quad \mu > 0 \quad (2.12a)$$

e

$$\Gamma^m(\tau_0, \mu) = \frac{2 - \delta_{0,m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\mu, \varphi) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} m(\varphi - \varphi_r) d\varphi, \quad \mu < 0. \quad (2.12b)$$

Estabelecidas as intensidades de radiação com simetria azimutal, soluções dos problemas (2.12) resultantes da decomposição de Chandrasekhar, a intensidade de radiação sem simetria azimutal, solução do problema(2.1), fica completamente determinada por (2.7) e (2.9). Portanto, a solução completa do problema (2.1) é obtida com a resolução de $2L + 1$ problemas definidos pelas equações (2.12).

2.2 Uma revisão da solução \mathcal{LTS}_N para problemas de transporte sem simetria azimutal

Para a descrição da formulação \mathcal{LTS}_N aplicada a problemas sem simetria azimutal, aqui, é considerado o mesmo modelo que consta nos registros da evolução da aplicação do método à equação de transporte de radiação monocromática [Segatto e Vilhena, 1994a] [Segatto, 1995] [Vilhena e Segatto, 1996] [Brancher et al., 1999]. Até então, a utilização do método, como é possível observar no Capítulo 1, dava-se mais extensivamente na resolução de problemas que envolvem fluxo de nêutrons. Na maioria dos problemas unidimensionais envolvendo transporte de nêutrons a dependência do ângulo azimutal pode ser desprezada, sem perda ou prejuízo de significado físico.

Então, seja o seguinte problema de radiação unidimensional, homogêneo, com um grupo de energia [Benassi et al., 1984a], dado pela equação:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu, \varphi) + I(\tau, \mu, \varphi) &= \frac{\varpi}{4\pi} \sum_{m=0}^L (2 - \delta_{0,m}) \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_{\ell}^m P_{\ell}^m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_{\ell}^m(\mu') \\ &\times \int_0^{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi') I(\tau, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu', \end{aligned} \quad (2.13)$$

sujeita às condições de contorno

$$I(0, \mu, \varphi) = \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad \text{se } \mu > 0 \quad (2.13a)$$

e

$$I(\tau_0, \mu, \varphi) = 0, \quad \text{se } \mu < 0. \quad (2.13b)$$

Escolhido o ângulo de referência azimutal como sendo o ângulo de incidência da radiação em $\tau = 0$, isto é, $\varphi_r = \varphi_0$, a intensidade de radiação sem simetria azimutal, por (2.7) e (2.9), pode ser escrita como

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^L \left[I^m(\tau, \mu) - I^m(0, \mu) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \right] \cos m(\varphi - \varphi_0) + \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{-\frac{\tau}{\mu}}, & se \ \mu > 0 \\ \sum_{m=0}^L I^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi - \varphi_0), & se \ \mu < 0 \end{cases} ; \quad (2.14)$$

e, por (2.12), (2.12a) e (2.12b), a intensidade de radiação com simetria azimutal $I^m(\tau, \mu)$, para cada $m = 0, 1, \dots, L$, é solução da seguinte equação:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I^m(\tau, \mu) + I^m(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_\ell^m P_\ell^m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu', \quad (2.15)$$

com condições de contorno,

$$I^m(0, \mu) = \frac{1}{2} (2 - \delta_{0,m}) \delta(\mu - \mu_0), \quad \mu > 0 \quad (2.15a)$$

e

$$I^m(\tau_0, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (2.15b)$$

Como nos problemas (2.15) estão envolvidas funções generalizadas, é feita a decomposição da solução $I^m(\tau, \mu)$ [Devaux e Siewert, 1980] [Benassi et al., 1984a] [Segatto e Vilhena, 1994a] como segue:

$$I^m(\tau, \mu) = I_*^m(\tau, \mu) + \frac{1}{2} (2 - \delta_{0,m}) \delta(\mu - \mu_0) e^{-\frac{\tau}{\mu}}. \quad (2.16)$$

Com a substituição de (2.16) em (2.15), $I_*^m(\tau, \mu)$ satisfaz a equação

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_*^m(\tau, \mu) + I_*^m(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_\ell^m P_\ell^m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell^m(\mu') I_*^m(\tau, \mu') d\mu' + Q^m(\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (2.17)$$

com condições de contorno homogêneas; no termo de fonte ($Q^m(\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}$) a função $Q^m(\mu)$ é dada por:

$$Q^m(\mu) = \frac{1}{2} (2 - \delta_{0,m}) \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_\ell^m P_\ell^m(\mu) P_\ell^m(\mu_0). \quad (2.18)$$

A aproximação S_N [Chandrasekhar, 1950], obtida pela aproximação do termo integral por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N e pela aplicação do método da colocação na variável angular, quando é considerada como função teste a Delta de Dirac e usados como pontos de colocação as raízes μ_n da N -ésima ordem dos polinômios de Legendre, é dada, para cada problema (2.17)-(2.18), pelo seguinte conjunto de equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\mu_n \frac{d}{d\tau} I_{n^*}^m(\tau) + I_{n^*}^m(\tau) = \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^{L \leq N+m} (2\ell + 1) f_\ell^m P_\ell^m(\mu_n) \left[\sum_{i=1}^N \omega_i P_\ell^m(\mu_i) I_{i^*}^m(\tau) + \frac{1}{2} (2 - \delta_{0,m}) P_\ell^m(\mu_0) e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} \right], \quad (2.19)$$

com as condições de contorno

$$I_{n^*}^m(0) = 0, \quad \mu_n > 0 \quad (2.19a)$$

e

$$I_{n^*}^m(\tau_0) = 0, \quad \mu_n < 0; \quad (2.19b)$$

ω_i são os pesos da quadratura Gaussiana [Burden e Faires, 1985],

$$\omega_i = \int_{-1}^{+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{(\mu - \mu_j)}{(\mu_i - \mu_j)} d\mu, \quad (2.20)$$

e $I_{n^*}^m(\tau)$ é usado para denotar a função intensidade de radiação difusa na direção discreta μ_n ,

$$I_{n^*}^m(\tau) = I_*^m(\tau, \mu_n). \quad (2.21)$$

As direções μ_n , simétricas em relação à origem $\mu = 0$, são ordenadas de forma decrescente,

$$-1 < \mu_N < \cdots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \cdots < \mu_2 < \mu_1 < 1. \quad (2.22)$$

Após a divisão de (2.19) por μ_n , cada sistema de equações S_N pode ser escrito, matricialmente, na forma:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}^m(\tau) - \mathbf{M}^m \mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{Q}^m e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (2.23)$$

onde

$$\mathbf{I}^m(\tau) = \left[I_{1^*}^m(\tau) \quad I_{2^*}^m(\tau) \quad \cdots \quad I_{N^*}^m(\tau) \right]^T \quad (2.24)$$

e

$$\mathbf{Q}^m = \left[\begin{array}{cccc} \frac{Q_1^m}{\mu_1} & \frac{Q_2^m}{\mu_2} & \cdots & \frac{Q_N^m}{\mu_N} \end{array} \right]^T, \quad (2.25)$$

com

$$Q_n^m = Q^m(\mu_n). \quad (2.26)$$

Em (2.23), \mathbf{M}^m representa a matriz, de ordem $N \times N$ (N par), definida por:

$$M^m(i, j) = \begin{cases} -\frac{1}{\mu_i} + \frac{\varpi}{2\mu_i} \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_\ell^m P_\ell^m(\mu_i) \omega_i P_\ell^m(\mu_i), & \text{se } i = j \\ \frac{\varpi}{2\mu_i} \sum_{\ell=m}^L (2\ell + 1) f_\ell^m P_\ell^m(\mu_i) \omega_j P_\ell^m(\mu_j), & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (2.27)$$

Conhecida a formulação S_N , a seguir é utilizado o método \mathcal{LTS}_N na determinação de uma solução analítica desses sistemas de ordenadas discretas. Assim, com a aplicação da transformada de Laplace na variável espacial τ de (2.23), resulta a seguinte equação matricial:

$$(s \mathbf{I} - \mathbf{M}^m) \bar{\mathbf{I}}^m(s) = \mathbf{I}^m(0) + \left(\frac{\mu_0}{1 + s\mu_0} \right) \mathbf{Q}^m, \quad (2.28)$$

em que a barra denota a transformação de Laplace, s é uma variável complexa, \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N e

$$\mathbf{I}^m(0) = \left[\mathbf{I}_{1^*}^m(0) \quad \mathbf{I}_{2^*}^m(0) \quad \cdots \quad \mathbf{I}_{N^*}^m(0) \right]^T. \quad (2.29)$$

Através da resolução da equação (2.28) é obtido o vetor intensidade de radiação difusa transformado:

$$\bar{\mathbf{I}}^m(s) = \mathbf{B}^m(s) \left[\mathbf{I}^m(0) + \left(\frac{\mu_0}{1 + s\mu_0} \right) \mathbf{Q}^m \right], \quad (2.30)$$

com

$$\mathbf{B}^m(s) = \left(s \mathbf{I} - \mathbf{M}^m \right)^{-1}. \quad (2.31)$$

O vetor $\mathbf{I}^m(\tau)$, a partir de (2.30), é escrito como:

$$\mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{B}^m(\tau) \mathbf{I}^m(0) + \mathbf{C}^m(\tau), \quad (2.32)$$

onde,

$$\mathbf{B}^m(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{B}^m(s)] \quad (2.33)$$

é a transformação inversa de Laplace, e $\mathbf{C}^m(\tau) = \mathbf{H}^m(\tau)\mathbf{Q}^m$, com $\mathbf{H}^m(\tau)$ a convolução

$$\mathbf{H}^m(\tau) = \int_0^\tau \mathbf{B}^m(\tau - \xi) e^{-\frac{\xi}{\mu_0}} d\xi. \quad (2.34)$$

Como cada elemento da matriz $\mathbf{B}^m(s)$ é uma função racional, cujo denominador é dado pelo determinante da matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{M}^m)$, que possui N raízes d_i^m , $i = 1, 2, \dots, N$, distintas e simétricas em relação à origem, a inversão da transformada de Laplace pode ser feita analiticamente através da técnica de expansão de Heaviside [Streck, 1993].

Agora, como a matriz \mathbf{M}^m não possui autovalores degenerados, o cálculo de $\mathbf{B}^m(s)$ é efetuado pelo método da diagonalização [Segatto et al., 1999b], pois, devido ao número reduzido de operações matemáticas, esse método propicia considerável redução no esforço computacional. Em transferência radiativa esse método já foi utilizado com sucesso, por exemplo, na determinação de parâmetros superficiais de radiação (transmissividade e refletividade) numa placa heterogênea [Segatto et al., 2001].

Inicialmente, é feita a decomposição da matriz \mathbf{M}^m através da relação :

$$\mathbf{M}^m = \mathbf{X}^m \mathbf{D}^m (\mathbf{X}^m)^{-1}, \quad (2.35)$$

onde \mathbf{D}^m é uma matriz diagonal, de ordem N , formada pelos autovalores de \mathbf{M}^m , e \mathbf{X}^m é a matriz das autofunções associadas a esses autovalores. Com o uso de (2.35), a matriz (2.33) é reescrita na forma

$$\mathbf{B}^m(\tau) = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(s \mathbf{X}^m (\mathbf{X}^m)^{-1} - \mathbf{X}^m \mathbf{D}^m (\mathbf{X}^m)^{-1} \right)^{-1} \right], \quad (2.36)$$

e, então,

$$\mathbf{B}^m(\tau) = \mathbf{X}^m \mathcal{L}^{-1} \left[\left(s \mathbf{I} - \mathbf{D}^m \right)^{-1} \right] (\mathbf{X}^m)^{-1}. \quad (2.37)$$

Como

$$\left(s \mathbf{I} - \mathbf{D}^m \right) = \begin{bmatrix} s - d_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s - d_2^m & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s - d_N^m \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

a inversa dessa matriz é dada por

$$\left(s \mathbf{I} - \mathbf{D}^m \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s - d_1^m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s - d_2^m} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{s - d_N^m} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

de onde:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\left(s \mathbf{I} - \mathbf{D}^m \right)^{-1} \right] = \begin{bmatrix} e^{\tau d_1^m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\tau d_2^m} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\tau d_N^m} \end{bmatrix} = e^{\mathbf{D}^m \tau}. \quad (2.40)$$

Logo, a solução (2.32), pelo uso de (2.37), depois da substituição do resultado (2.40), é expressa como segue:

$$\mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{X}^m e^{\mathbf{D}^m \tau} (\mathbf{X}^m)^{-1} \mathbf{I}^m(0) + \mathbf{C}^m(\tau). \quad (2.41)$$

Porém, o vetor $\mathbf{I}^m(0)$ não está completamente determinado, tendo em vista que só $\frac{N}{2}$ componentes, referentes a $\mu > 0$, são conhecidos. Para o cálculo das condições de contorno desconhecidas, a solução (2.41) é, então, reescrita através da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^m(\tau) \\ \mathbf{I}_2^m(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^m(\tau) & \mathbf{B}_{12}^m(\tau) \\ \mathbf{B}_{21}^m(\tau) & \mathbf{B}_{22}^m(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^m(0) \\ \mathbf{I}_2^m(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^m(\tau) \\ \mathbf{C}_2^m(\tau) \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

onde, $\mathbf{I}_i^m(\tau)$, $\mathbf{I}_i^m(0)$ e $\mathbf{C}_i^m(\tau)$, com $i = 1, 2$, são vetores de $\frac{N}{2}$ componentes, e $\mathbf{B}_{ij}^m(\tau)$, com $i, j = 1, 2$, matrizes quadradas de ordem $\frac{N}{2}$. Nos vetores, os índices 1 e 2 fazem referência às $\frac{N}{2}$ direções positivas e $\frac{N}{2}$ direções negativas, respectivamente. Após a substituição de $\tau = \tau_0$ em (2.42), e o uso das condições de contorno, é determinado

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^m(\tau_0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^m(\tau_0) & \mathbf{B}_{12}^m(\tau_0) \\ \mathbf{B}_{21}^m(\tau_0) & \mathbf{B}_{22}^m(\tau_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2^m(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^m(\tau_0) \\ \mathbf{C}_2^m(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

e, a partir da segunda equação de (2.43), é obtido $\mathbf{I}_2^m(0)$:

$$\mathbf{I}_2^m(0) = -\left[\mathbf{B}_{22}^m(\tau_0)\right]^{-1} \mathbf{C}_2^m(\tau_0). \quad (2.44)$$

Desta forma, cada m -ésimo vetor solução (2.41) fica completamente determinado. Entretanto, a solução apresentada tem um comportamento exponencial. Então, pelo fato dos autovalores d_i^m aumentarem em magnitude com a ordem da quadratura N , essa formulação não é apropriada para a resolução computacional de problemas envolvendo grandes espessuras ou altas ordens de anisotropia. Para a eliminação do “*overflow*” originado na exponencial com argumento positivo, em tais situações, primeiramente é feita a decomposição da matriz $\mathbf{B}^m(\tau)$ de modo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^m(\tau) &= \mathbf{X}^m e^{\mathbf{D}^m \tau} (\mathbf{X}^m)^{-1} = \mathbf{X}^m e^{\mathbf{D}_+^m \tau} (\mathbf{X}^m)^{-1} + \mathbf{X}^m e^{\mathbf{D}_-^m \tau} (\mathbf{X}^m)^{-1} \\ &= \mathbf{B}_+^m(\tau) + \mathbf{B}_-^m(\tau), \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde, os elementos das matrizes \mathbf{D}_+^m e \mathbf{D}_-^m são

$$d_+^m(i, j) = \begin{cases} d^m(i, j) & \text{se } d^m(i, j) > 0 \\ 0 & \text{se } d^m(i, j) \leq 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

e

$$d_-^m(i, j) = \begin{cases} d^m(i, j) & \text{se } d^m(i, j) < 0 \\ 0 & \text{se } d^m(i, j) \geq 0 \end{cases}, \quad (2.47)$$

respectivamente, para $\mathbf{d}^m(i, j)$ elementos da matriz diagonal \mathbf{D}^m .

A seguir, sendo consideradas a propriedade de invariância na solução da equação de transporte [Duderstadt e Martin, 1979] e a decomposição (2.45) da matriz $\mathbf{B}^m(\tau)$ em componentes relativos às raízes positivas ($\mathbf{B}_+^m(\tau)$) e negativas ($\mathbf{B}_-^m(\tau)$) [Barichello, 1995], a solução $\mathcal{L}\mathbf{TS}_N$ é reescrita [Gonçalves, 1999] [Gonçalves et al., 2000] de forma que:

$$\mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{B}_+^m(\tau - \tau_0)\mathbf{I}^m(\tau_0) + \mathbf{B}_-^m(\tau)\mathbf{I}^m(0) + \mathbf{C}^m(\tau), \quad (2.48)$$

onde

$$\mathbf{H}^m(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{B}_+^m(\tau - \xi)e^{-\frac{\xi}{\mu_0}} d\xi + \int_0^{\tau} \mathbf{B}_-^m(\tau - \xi)e^{-\frac{\xi}{\mu_0}} d\xi \quad (2.49)$$

em $\mathbf{C}^m(\tau) = \mathbf{H}^m(\tau)\mathbf{Q}^m$.

Assim, a mudança de variáveis dos argumentos relativos às raízes positivas, proposta por Barichello para o problema homogêneo, é considerada como parte efetiva da solução, e como tal, extensiva aos demais termos relacionados a $\mathbf{B}_+^m(\tau)$. Isto é plenamente justificado pela invariância de projeção e passa pela identificação, através da simetria imposta pela invariância, do par $(\tau_0 - \tau, -\mu)$ com a parte da solução que compreende a $\mathbf{B}_+^m(\tau)$ e (τ, μ) com a que compreende a $\mathbf{B}_-^m(\tau)$.

Fisicamente, conforme anteriormente mencionado, corresponde tratar a radiação que desloca-se da direita para a esquerda ($\mu_n < 0$) igualmente a que desloca-se da esquerda para a direita ($\mu_n > 0$). Então, a solução $\mathcal{L}\mathbf{TS}_N$ está apresentada explicitamente como uma superposição linear da intensidade de radiação (ou do fluxo angular, no caso neutrônico), referente a direções negativas e positivas.

Agora, para a determinação dos componentes desconhecidos dos vetores $\mathbf{I}^m(0)$ e $\mathbf{I}^m(\tau_0)$, a equação (2.48) é posta, na forma de matriz bloco, como segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^m(\tau) \\ \mathbf{I}_2^m(\tau) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{+11}^m(\tau - \tau_0) & \mathbf{B}_{+12}^m(\tau - \tau_0) \\ \mathbf{B}_{+21}^m(\tau - \tau_0) & \mathbf{B}_{+22}^m(\tau - \tau_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^m(\tau_0) \\ \mathbf{I}_2^m(\tau_0) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{-11}^m(\tau) & \mathbf{B}_{-12}^m(\tau) \\ \mathbf{B}_{-21}^m(\tau) & \mathbf{B}_{-22}^m(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^m(0) \\ \mathbf{I}_2^m(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^m(\tau) \\ \mathbf{C}_2^m(\tau) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

sendo mantida a mesma nomenclatura, usada em (2.42), para os índices dos sub-vetores e das sub-matrizes.

E, a partir de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^m(\tau_0) \\ \mathbf{I}_2^m(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{+11}^m(-\tau_0) & \mathbf{B}_{-12}^m(0) \\ \mathbf{B}_{+21}^m(0) & \mathbf{B}_{-22}^m(\tau_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{-11}^m(0))\mathbf{I}_1^m(0) - \mathbf{B}_{+12}^m(-\tau_0)\mathbf{I}_2^m(\tau_0) - \mathbf{C}_1^m(0) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{+22}^m(0))\mathbf{I}_2^m(\tau_0) - \mathbf{B}_{-21}^m(\tau_0)\mathbf{I}_1^m(0) - \mathbf{C}_2^m(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

onde \mathbf{I} denota a matriz identidade de ordem $\frac{N}{2}$, são aplicadas as condições de contorno do problema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^m(\tau_0) \\ \mathbf{I}_2^m(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{+11}^m(-\tau_0) & \mathbf{B}_{-12}^m(0) \\ \mathbf{B}_{+21}^m(0) & \mathbf{B}_{-22}^m(\tau_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1^m(0) \\ -\mathbf{C}_2^m(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

e determinados os sub-vetores $\mathbf{I}_2^m(0)$ e $\mathbf{I}_1^m(\tau_0)$, que contêm os componentes procurados dos vetores $\mathbf{I}^m(0)$ e $\mathbf{I}^m(\tau_0)$, respectivamente.

Depois do procedimento acima, todas as exponenciais na solução \mathcal{LTS}_N têm argumentos negativos e, portanto, é possível a avaliação dessa solução para elevadas ordens de quadratura. Além do que, a forma funcional da fonte não está mais sujeita às dificuldades e restrições impostas pelo uso de algum método para o cálculo do componente particular da solução. Essa formulação é aplicável a problemas com quaisquer tipos de fontes, apenas com limitações comuns à integração analítica ou numérica.

Um outro aspecto importante a observar é que para problemas homogêneos, sem termo fonte, a solução \mathcal{LTS}_N é simplificada em:

$$\mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{X}^m \left(e^{\mathbf{D}_+^m(\tau-\tau_0)} + e^{\mathbf{D}_-^m\tau} \right) \mathbf{Y}^m; \quad (2.53)$$

o vetor \mathbf{Y}^m é determinado pela aplicação das condições de contorno e utilizado para a determinação de $(\mathbf{X}^m)^{-1} \mathbf{I}^m(0)$, sem a necessidade de inversão da matriz \mathbf{X}^m .

Para concluir esta revisão, como nesse problema considerado a fonte é exponencial, e o problema a ser examinado no próximo capítulo tem esse tipo de fonte, agora é retomada a equação (2.23) e determinada a sua solução particular também pelo método dos coeficientes

a determinar [Brancher, 1998] [Segatto et al., 1999a].

Então, para a equação (2.23), é considerada a relação [Kreider et al., 1972]:

$$\mathbf{I}_P^m(\tau) = \mathbf{c}^m e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (2.54)$$

onde, \mathbf{c}^m é um vetor a ser determinado e $\mathbf{I}_P^m(\tau)$ é a solução particular procurada.

Pela substituição de $\mathbf{I}_P^m(\tau)$ em (2.23) resulta:

$$\left[-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{I} - \mathbf{M}^m \right] \mathbf{c}^m e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} = \mathbf{Q}^m e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (2.55)$$

cuja solução, \mathbf{c}^m , é dada por

$$\mathbf{c}^m = \left[-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{I} - \mathbf{M}^m \right]^{-1} \mathbf{Q}^m. \quad (2.56)$$

Com o uso da decomposição (2.35), o vetor (2.56) pode ser escrito como

$$\mathbf{c}^m = \mathbf{X}^m \left[-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{I} - \mathbf{D}^m \right]^{-1} (\mathbf{X}^m)^{-1} \mathbf{Q}^m; \quad (2.57)$$

e assim, a solução particular de (2.23), antes obtida através do produto $\mathbf{C}^m(\tau) = \mathbf{H}^m(\tau) \mathbf{Q}^m$, pode ser expressada por:

$$\mathbf{I}_P^m(\tau) = \mathbf{X}^m \begin{bmatrix} \frac{\mu_0}{-1 - \mu_0 d_1^m} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\mu_0}{-1 - \mu_0 d_N^m} & \\ & & & \end{bmatrix} (\mathbf{X}^m)^{-1} \mathbf{Q}^m e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (2.58)$$

para $(\mu_0 d_i^m) \neq -1$, $i = 1, \dots, N$.

Finalmente, é oportuno ressaltar que a dada solução \mathcal{LTS}_N revisada, para um grupo de energia, é válida para anisotropia qualquer.

Assim, para melhor tirar proveito desses recursos, no próximo capítulo, é disponibilizada uma formulação analítica para resolução, pelo método \mathcal{LTS}_N , de modelos mais abrangentes de transferência radiativa na atmosfera, no formalismo de Stokes.

CAPÍTULO 3

SOLUÇÃO \mathcal{LTS}_N DA EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA PARA LUZ POLARIZADA

Neste capítulo, o método \mathcal{LTS}_N é usado, pela primeira vez, na resolução da equação de transferência radiativa com polarização. É considerada a formulação final, em termos de quantidades reais, obtida por C. E. Siewert no início da década de 80, para o estudo pertinente ao espalhamento simples da luz polarizada em atmosferas de planos paralelos finitos. Após a exposição dessa modelagem e aquisição da aproximação S_N com enfoque matricial, para os problemas resultantes da representação em Fourier, é feita a análise teórica da aplicação direta do método \mathcal{LTS}_N às equações S_N . É eliminado o "overflow" da solução para altas ordens de quadratura. As soluções particulares, obtidas pelo método dos coeficientes a determinar, também são construídas por convoluções, visando generalização da fonte e conseqüente adaptação da implementação computacional. A solução proposta permite radiação (incidente e espalhada) polarizada. São criados procedimentos que permitem uma melhora na precisão dos resultados e dadas fórmulas de recorrência para as matrizes envolvidas na formulação estabelecida.

3.1 Descrição do modelo

Para a formulação das equações de transferência radiativa em um meio gasoso, a mais conveniente representação para a luz polarizada é por um conjunto de quatro parâmetros, introduzido por Sir George Stokes em 1852, chamado de vetor de Stokes [Chandrasekhar, 1950] [Hansen e Travis, 1974] [van de Hulst, 1983] [Hovenier e van der Mee, 1983]. Representando por \mathbf{I} um vetor coluna com componentes os quatro parâmetros de Stokes \mathcal{J} , \mathcal{Q} , \mathcal{U} e \mathcal{V} , esse vetor é usado para descrever completamente um campo geral de radiação. A intensidade de radiação é especificada por \mathcal{J} , enquanto o estado de polarização é caracterizado por \mathcal{Q} , \mathcal{U}

e \mathcal{V} . Os parâmetros \mathcal{Q} e \mathcal{U} são relacionados à polarização linear e \mathcal{V} à polarização circular. Cada um destes parâmetros é uma função da posição τ e da direção (μ, φ) .

A transferência radiativa, para os parâmetros clássicos de Stokes, é descrita pela equação vetorial [Chandrasekhar, 1950] [Siewert, 1981] [Hovenier e van der Mee, 1983]:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi) + \mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\varpi}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi - \varphi') \mathbf{I}(\tau, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu', \quad (3.1)$$

com, o vetor de Stokes $\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi)$ representando o vetor densidade, ϖ indicando o albedo de espalhamento simples (excluído o caso conservativo), $\mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi - \varphi')$ a matriz de fase, τ a variável ótica, φ o ângulo azimutal e μ o cosseno diretor da propagação da radiação (cosseno do ângulo polar, medido a partir do eixo τ positivo); juntos, os ângulos polar e azimutal, definem a direção de propagação da radiação.

Para o estudo do espalhamento da luz em atmosferas não-homogêneas, estratificadas em camadas planas paralelas finitas, a solução dada pela equação (3.1) é apropriada para $\tau \in [\tau_a, \tau_b]$; e nesse caso, seguindo a referência [Siewert, 1981], são impostas condições de contorno, para $\mu > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$, na forma:

$$\mathbf{I}(\tau_a, \mu, \varphi) = \mathbf{G}_1(\mu, \varphi) + \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \mathbf{F} \quad (3.1a)$$

e

$$\mathbf{I}(\tau_b, -\mu, \varphi) = \mathbf{G}_2(\mu, \varphi) + \frac{\lambda_0}{\pi} \mathbf{L} \int_0^{+1} \int_0^{2\pi} \mathbf{I}(\tau_b, \mu', \varphi') \mu' d\varphi' d\mu'. \quad (3.1b)$$

Em (3.1a) e (3.1b), $\lambda_0 \in [0, 1]$ é o coeficiente de reflexão de Lambert, \mathbf{L} a matriz diagonal

$$\mathbf{L} = \text{diag}\{1, 0, 0, 0\}, \quad (3.2)$$

$\mathbf{G}_1(\mu, \varphi)$ e $\mathbf{G}_2(\mu, \varphi)$ são funções reais (não generalizadas), e \mathbf{F} , com elementos constantes, é o vetor fluxo

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{\mathcal{J}} & F_{\mathcal{Q}} & F_{\mathcal{U}} & F_{\mathcal{V}} \end{bmatrix}^T; \quad (3.3)$$

esse vetor, presumidamente determinado, especifica o estado de polarização da radiação incidente ao contorno superior, uniformemente alinhada. A variação angular dessa radiação colimada é descrita matematicamente pelas deltas de Dirac.

No presente trabalho, da mesma forma que nas referências [Garcia e Siewert, 1986], [Garcia e Siewert, 1989] e [Siewert, 2000], é considerada a situação de uma única camada plana homogênea, com espessura ótica τ_0 , iluminada por um feixe de raios solares incidindo a uma direção $\{\mu_0, \varphi_0\}$. Assim, a seguir é avaliada a equação de transferência na forma vetorial (3.1), para todo $\mu \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ e $\tau \in (\tau_a = 0, \tau_b = \tau_0)$, sujeita às condições de contorno (3.1a) e (3.1b), para $\mu \in (0, 1]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$, quando:

$$\mathbf{G}_1(\mu, \varphi) = \mathbf{G}_2(\mu, \varphi) = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

A matriz de fase $\mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi - \varphi')$, presente na equação (3.1), pode ser representada como [Siewert, 1982]:

$$\mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi - \varphi') = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^L (2 - \delta_{0,m}) \left[\mathbf{C}^m(\mu, \mu') \cos m(\varphi - \varphi') + \mathbf{S}^m(\mu, \mu') \sin m(\varphi - \varphi') \right], \quad (3.5)$$

com L o grau de anisotropia, e os componentes $\mathbf{C}^m(\mu, \mu')$ e $\mathbf{S}^m(\mu, \mu')$ dados por

$$\mathbf{C}^m(\mu, \mu') = \mathbf{A}^m(\mu, \mu') + \mathcal{D} \mathbf{A}^m(\mu, \mu') \mathcal{D} \quad (3.6)$$

e

$$\mathbf{S}^m(\mu, \mu') = \mathbf{A}^m(\mu, \mu') \mathcal{D} - \mathcal{D} \mathbf{A}^m(\mu, \mu'), \quad (3.7)$$

onde

$$\mathcal{D} = \text{diag}\{1, 1, -1, -1\}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A}^m(\mu, \mu') = \sum_{\ell=m}^L \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu) \mathbf{B}_\ell \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu'). \quad (3.9)$$

Além disto,

$$\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu) = \left[\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} P_\ell^m(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_\ell^m(\mu) & -T_\ell^m(\mu) & 0 \\ 0 & -T_\ell^m(\mu) & R_\ell^m(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\ell^m(\mu) \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

quando, $P_\ell^m(\mu)$ denota as funções associadas de Legendre, como em (2.5), e as funções $R_\ell^m(\mu)$ e $T_\ell^m(\mu)$ são definidas [Siewert, 1981] [Siewert, 1982] por

$$R_\ell^m(\mu) = -\frac{1}{2}(i)^m \left[\mathcal{P}_{m,2}^\ell(\mu) + \mathcal{P}_{m,-2}^\ell(\mu) \right] \quad (3.11)$$

e

$$T_\ell^m(\mu) = -\frac{1}{2}(i)^m \left[\mathcal{P}_{m,2}^\ell(\mu) - \mathcal{P}_{m,-2}^\ell(\mu) \right], \quad (3.12)$$

respectivamente, sendo $i = \sqrt{-1}$, e

$$\mathcal{P}_{m,\rho}^\ell(\mu) = (A_{m,\rho}^\ell) (1 - \mu)^{\frac{-(\rho-m)}{2}} (1 + \mu)^{\frac{-(\rho+m)}{2}} \frac{d^{\ell-\rho}}{d\mu^{\ell-\rho}} \left[(1 - \mu)^{\ell-m} (1 + \mu)^{\ell+m} \right], \quad (3.13)$$

para $\ell \geq \sup(|m|, |\rho|)$, com

$$A_{m,\rho}^\ell = \frac{(-1)^{\ell-m} (i)^{\rho-m}}{2^\ell (\ell - m)!} \left[\frac{(\ell - m)! (\ell + \rho)!}{(\ell + m)! (\ell - \rho)!} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (3.14)$$

as funções $\mathcal{P}_{m,\rho}^\ell(\mu)$, em (3.13), são as funções esféricas generalizadas discutidas por Gel'fand e Šapiro em 1956 [Gel'fand e Šapiro, 1956].

Por conveniência computacional, e em concordância com as referências [Garcia e Siewert, 1986] e [Garcia e Siewert, 1989], está incluído o fator $\left[(\ell - m)! / (\ell + m)! \right]^{1/2}$ na definição (3.10).

A lei de espalhamento é definida pela coleção de constantes $\{\alpha_\ell, \beta_\ell, \gamma_\ell, \delta_\ell, \epsilon_\ell, \zeta_\ell\}$,

tais que

$$\mathbf{B}_\ell = \begin{bmatrix} \beta_\ell & \gamma_\ell & 0 & 0 \\ \gamma_\ell & \alpha_\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_\ell & -\epsilon_\ell \\ 0 & 0 & \epsilon_\ell & \delta_\ell \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

para $0 \leq \ell \leq L$. Essas constantes, calculadas em função das propriedades do meio e da variação do tamanho e/ou forma das partículas espalhadas, estão tabeladas no Apêndice II para partículas esféricas com $L = 13$.

Neste problema em questão, da mesma forma que no caso escalar revisado, a condição de fronteira, dada pelas condições de contorno consideradas, introduz na solução $\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi)$ um componente que é uma função generalizada. Então, neste momento, a solução completa do problema (3.1) é decomposta em uma parte de campo difuso e outra de campo colimado:

$$\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi) = \mathbf{I}^*(\tau, \mu, \varphi) + \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \mathbf{F} e^{\frac{-\tau}{\mu}}. \quad (3.16)$$

O componente $\mathbf{I}^*(\tau, \mu, \varphi)$ satisfaz, para $\mu \in [0, 1]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$, a equação de transferência

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{I}^*(\tau, \mu, \varphi) + \mathbf{I}^*(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\overline{\omega}}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi - \varphi') \mathbf{I}^*(\tau, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu' + \mathbf{S}(\tau, \mu, \varphi), \quad (3.17)$$

onde

$$\mathbf{S}(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\overline{\omega}}{4} \mathbf{P}(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0) \mathbf{F} e^{\frac{-\tau}{\mu_0}}, \quad (3.18)$$

com as condições de contorno

$$\mathbf{I}^*(0, \mu, \varphi) = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{I}^*(\tau_0, -\mu, \varphi) = \lambda_0 \mathbf{L} \left[\mu_0 \mathbf{F} e^{\frac{-\tau_0}{\mu_0}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+1} \int_0^{2\pi} \mathbf{I}^*(\tau_0, \mu', \varphi') \mu' d\varphi' d\mu' \right], \quad (3.20)$$

para $\mu \in (0, 1]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

As equações (3.17)-(3.20) definem o campo de radiação difusa a ser determinado. Agora, para reduzir o problema (3.17)-(3.20) a um conjunto de equações de transferência radiativa sem dependência da variável φ , é utilizada uma decomposição no ângulo azimutal (φ) [Siewert, 1981]. Para tal, inicialmente, são definidas [Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989] [Siewert, 2000] as matrizes $\Phi_k^m(\varphi)$, para $k = 1, 2$, por

$$\Phi_1^m(\varphi) = (2 - \delta_{0,m}) \text{diag}\{\cos m\varphi, \cos m\varphi, \sin m\varphi, \sin m\varphi\} \quad (3.21)$$

e

$$\Phi_2^m(\varphi) = (2 - \delta_{0,m}) \text{diag}\{-\sin m\varphi, -\sin m\varphi, \cos m\varphi, \cos m\varphi\}, \quad (3.22)$$

e a matriz de fase (3.5) é escrita analiticamente como:

$$\mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi - \varphi') = \sum_{m=0}^L \sum_{k=1}^2 \Phi_k^m(\varphi - \varphi') \mathbf{A}^m(\mu, \mu') \mathcal{D}_k; \quad (3.23)$$

a função matricial $\mathbf{A}^m(\mu, \mu')$ está definida em (3.9) e \mathcal{D}_k é usado para indicar as matrizes diagonais

$$\mathcal{D}_1 = \text{diag}\{1, 1, 0, 0\}, \quad (3.24)$$

e

$$\mathcal{D}_2 = \text{diag}\{0, 0, 1, 1\}, \quad (3.25)$$

para $k = 1, 2$.

A seguir, considerando o ângulo azimutal de referência como sendo o ângulo de

incidência da luz, é feita a decomposição do componente de campo difuso $\mathbf{I}^*(\tau, \mu, \varphi)$ em Fourier, de forma que:

$$\mathbf{I}^*(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^L \sum_{k=1}^2 \Phi_k^m(\varphi - \varphi_0) \mathbf{I}_k^m(\tau, \mu), \quad (3.26)$$

para $\mu \in [-1, 1]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Com a substituição da decomposição (3.26) nas equações (3.17)-(3.20) e o uso da condição

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi - \varphi') \Phi_k^m(\varphi' - \varphi_0) d\varphi' = 2\pi \Phi_k^m(\varphi - \varphi_0) \mathcal{K}^m(\mu' \rightarrow \mu), \quad (3.27)$$

onde $\mathcal{K}^m(\mu' \rightarrow \mu)$ é o núcleo de espalhamento

$$\mathcal{K}^m(\mu' \rightarrow \mu) = \sum_{\ell=m}^L \Pi_\ell^m(\mu) \mathbf{B}_\ell \Pi_\ell^m(\mu'), \quad (3.28)$$

são obtidos os problemas de transferência satisfeitos pelos coeficientes de Fourier $\mathbf{I}_k^m(\tau, \mu)$, $m = 0, \dots, L$ e $k = 1, 2$. Desta forma, cada m, k -ésimo problema resultante é dado por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{I}_k^m(\tau, \mu) + \mathbf{I}_k^m(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \Pi_\ell^m(\mu) \mathbf{B}_\ell \int_{-1}^{+1} \Pi_\ell^m(\mu') \mathbf{I}_k^m(\tau, \mu') d\mu' + \mathbf{S}_k^m(\tau, \mu), \quad (3.29)$$

para $\tau \in (0, \tau_0)$ e $\mu \in [-1, 1]$, onde

$$\mathbf{S}_k^m(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{4} \sum_{\ell=m}^L \Pi_\ell^m(\mu) \mathbf{B}_\ell \Pi_\ell^m(\mu_0) \mathcal{D}_k \mathbf{F} e^{\frac{-\tau}{\mu_0}}, \quad (3.30)$$

com condições de contorno

$$\mathbf{I}_k^m(0, \mu) = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{I}_k^m(\tau_0, -\mu) = \lambda_0 \delta_{0,m} \delta_{1,k} \mathbf{L} \left[\mu_0 \mathbf{F} e^{\frac{-\tau_0}{\mu_0}} + 2 \int_0^{+1} \mathbf{I}_k^m(\tau_0, \mu') \mu' d\mu' \right], \quad (3.32)$$

para $\mu \in (0, 1]$.

É oportuno observar, a solução para o componente azimutalmente simétrico ($m = 0$) pode ser obtida com a decomposição do problema em outros dois problemas envolvendo vetores com dois componentes [Benassi et al., 1985]. Nesse caso específico, tratado em [Benassi et al., 1985], o formalismo requer apenas os polinômios de Legendre e as funções associadas de Legendre. Entretanto, aqui é desenvolvida a solução \mathcal{LTS}_N para todos os componentes ($m \geq 0$) na representação em Fourier do vetor de Stokes. Então, em ordem de manter a mesma notação para todos os componentes da solução, neste trabalho não é usada essa referida decomposição para $m = 0$. O caso geral, porém, requer o uso, tanto das funções associadas de Legendre $P_\ell^m(\mu)$, como das combinações $R_\ell^m(\mu)$ e $T_\ell^m(\mu)$ das funções esféricas generalizadas.

Assim, a solução completa, determinada a seguir, é obtida pela resolução de $2L + 2$ problemas definidos pelas equações simultâneas (3.29)-(3.32).

3.2 Aproximação S_N com enfoque matricial

O sistema de equações de ordenadas discretas para cada problema (3.29)-(3.32), com $n = 1, \dots, N$ e $\mu \in [-1, 1]$, é dado por:

$$\mu_n \frac{d}{d\tau} \mathbf{I}_{k,n}^m(\tau) + \mathbf{I}_{k,n}^m(\tau) = \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_n) \mathbf{B}_\ell \sum_{\nu=1}^N \omega_\nu \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_\nu) \mathbf{I}_{k,\nu}^m(\tau) + \mathbf{S}_{k,n}^m(\tau), \quad (3.33)$$

onde

$$\mathbf{S}_{k,n}^m(\tau) = \frac{\varpi}{4} \sum_{\ell=m}^L \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_n) \mathbf{B}_\ell \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_0) \mathcal{D}_k \mathbf{F} e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (3.34)$$

com as condições de contorno

$$\mathbf{I}_{k,n}^m(0) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \quad m \geq 0, \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{I}_{k,\vartheta}^m(\tau_0) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \quad m \geq 1, \quad (3.34b)$$

$$\mathbf{I}_{1,\vartheta}^0(\tau_0) = \lambda_0 \begin{bmatrix} \left(\mu_0 (F_{\mathcal{J}}) e^{-\frac{\tau_0}{\mu_0}} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \omega_i \mathcal{J}_{1,i}^0(\tau_0) \mu_i \right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.34c)$$

e

$$\mathbf{I}_{2,\vartheta}^0(\tau_0) = \mathbf{0}, \quad (3.34d)$$

para $\vartheta = N + 1 - n$, $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$ e $\mu \in (0, 1]$.

Aqui, $\mathbf{I}_{k,n}^m(\tau) = \mathbf{I}_k^m(\tau, \mu_n)$ e $\mathbf{S}_{k,n}^m(\tau) = \mathbf{S}_k^m(\tau, \mu_n)$ representam, respectivamente, os componentes de Fourier do vetor campo difuso e do vetor fonte em τ e nas direções discretas μ_n ; para $\mathbf{I}_{k,n}^m(\tau)$ correspondem: $\mathcal{J}_{k,n}^m(\tau)$, $\mathcal{Q}_{k,n}^m(\tau)$, $\mathcal{U}_{k,n}^m(\tau)$ e $\mathcal{V}_{k,n}^m(\tau)$. A notação ω_i continua sendo usada para os pesos gerados pela quadratura de Gauss, assim como $\mu_n \in (0, 1]$, para $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$, e $\mu_n \in [-1, 0)$, para $n = (\frac{N}{2} + 1), \dots, N$, são as direções discretas. A integral presente em (3.32) está sendo aproximada em (3.34c) por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N , com $\frac{N}{2}$ pontos.

Após a divisão de (3.33) pelas direções discretas μ_n , raízes do N -ésimo polinômio de Legendre,

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}_{k,n}^m(\tau) - \frac{1}{\mu_n} \left[\frac{\varpi}{2} \sum_{i=1}^N \left(\omega_i \sum_{\ell=m}^L \mathbf{\Pi}_{\ell}^m(\mu_n) \mathbf{B}_{\ell} \mathbf{\Pi}_{\ell}^m(\mu_i) - 1 \right) \mathbf{I}_{k,i}^m(\tau) \right] = \frac{1}{\mu_n} \mathbf{S}_{k,n}^m(\tau), \quad (3.35)$$

cada sistema \mathbf{S}_N pode ser escrito, matricialmente, na forma:

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{I}_k^m(\tau) - \mathcal{M}^m \mathcal{I}_k^m(\tau) = \mathcal{S}_k^m(\tau), \quad (3.36)$$

com \mathcal{M}^m uma matriz bloco quadrada de ordem $4N$. Os elementos dessa matriz \mathcal{M}^m , denotados como \mathcal{M}_{ij}^m , são dados por

$$\mathcal{M}_{ij}^m = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varpi}{2\mu_i} \omega_j \mathcal{A}_{ij}^m - \frac{1}{\mu_i} \mathbf{I}, \quad \text{se } i = j \\ \frac{\varpi}{2\mu_i} \omega_j \mathcal{A}_{ij}^m, \quad \text{se } i \neq j \end{array} \right\} \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (3.37)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade de ordem 4 e as N^2 sub-matrizes quadradas \mathcal{A}_{ij}^m , também com

ordem 4, descritas como

$$\mathcal{A}_{\nu_j}^m = \sum_{\ell=m}^L \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_\nu) \mathbf{B}_\ell \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_j); \quad (3.38)$$

as matrizes $\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu)$ e \mathbf{B}_ℓ , presentes em (3.38), estão definidas em (3.10) e (3.15), respectivamente.

Ainda em (3.36), o n -ésimo componente do vetor

$$\mathcal{I}_k^m(\tau) = \left[\mathbf{I}_{k,1}^m(\tau) \quad \cdots \quad \mathbf{I}_{k,n}^m(\tau) \quad \cdots \quad \mathbf{I}_{k,N}^m(\tau) \right]^T \quad (3.39)$$

de ordem $4N$, é dada pelo sub-vetor $\mathbf{I}_{k,n}^m(\tau)$, de ordem 4, contendo os parâmetros de Stokes do vetor campo difuso para os índices de Fourier m e k :

$$\mathbf{I}_{k,n}^m(\tau) = \left[\mathcal{J}_{k,n}^m(\tau) \quad \mathcal{Q}_{k,n}^m(\tau) \quad \mathcal{U}_{k,n}^m(\tau) \quad \mathcal{V}_{k,n}^m(\tau) \right]^T. \quad (3.40)$$

O vetor fonte $\mathcal{S}_k^m(\tau)$, também de ordem $4N$, pode ser representado pelo produto

$$\mathcal{S}_k^m(\tau) = \mathcal{N}^m \mathbf{\Omega}_k e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} \quad (3.41)$$

quando são definidos os vetores $\mathbf{\Omega}_k$, para $k = 1, 2$, por

$$\mathbf{\Omega}_1 = \mathcal{D}_1 \mathbf{F} = \left[F_{\mathcal{J}} \quad F_{\mathcal{Q}} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (3.42)$$

e

$$\mathbf{\Omega}_2 = \mathcal{D}_2 \mathbf{F} = \left[0 \quad 0 \quad F_{\mathcal{U}} \quad F_{\mathcal{V}} \right]^T, \quad (3.43)$$

e \mathcal{N}^m é usado para indicar a matriz bloco, de ordem $4N \times 4$, com elementos as seguintes N sub-matrizes de ordem 4:

$$\mathcal{N}_\nu^m = \frac{\overline{\omega}}{4\mu_\nu} \sum_{\ell=m}^L \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_\nu) \mathbf{B}_\ell \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_0), \quad \text{com } \nu = 1, \dots, N. \quad (3.44)$$

3.3 O método \mathcal{LTS}_N no formalismo de Stokes

A seguir, é obtida a solução \mathcal{LTS}_N vetorial, com mudança de variáveis, para os problemas de ordenadas discretas que constam na seção anterior. Desta feita, é aplicada à equação matricial (3.36) a transformada de Laplace na variável espacial τ , resultando a equação algébrica dependente da variável complexa "s":

$$\left(s \mathbf{I} - \mathcal{M}^m\right) \bar{\mathcal{I}}_k^m(s) = \mathcal{I}_k^m(0) + \bar{\mathcal{S}}_k^m(s), \quad (3.45)$$

onde a barra denota a transformação de Laplace.

Com a resolução analítica dessa equação simbólica (3.45), é obtida:

$$\bar{\mathcal{I}}_k^m(s) = \left(s \mathbf{I} - \mathcal{M}^m\right)^{-1} \left[\mathcal{I}_k^m(0) + \bar{\mathcal{S}}_k^m(s) \right], \quad (3.46)$$

com

$$\mathcal{I}_k^m(0) = \left[\mathbf{I}_{k,1}^m(0) \quad \cdots \quad \mathbf{I}_{k,n}^m(0) \quad \cdots \quad \mathbf{I}_{k,N}^m(0) \right]^T. \quad (3.47)$$

Assim como no caso escalar, o vetor $\mathcal{I}_k^m(\tau)$, com a inversão da transformada de Laplace em (3.46), também de forma analítica, é escrito como:

$$\mathcal{I}_k^m(\tau) = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(s \mathbf{I} - \mathcal{M}^m\right)^{-1} \right] \mathcal{I}_k^m(0) + \mathcal{H}_k^m(\tau), \quad (3.48)$$

onde $\mathcal{H}_k^m(\tau)$ é a solução particular de (3.36).

Como está claro em (3.48) que a matriz associada a solução \mathcal{LTS}_N vetorial não depende de k , agora os índices de Fourier são suprimidos da notação explícita, a fim de obter uma notação mais concisa.

Na inversão analítica da matriz simbólica $(s I - \mathcal{M})$ é utilizado o método da diagonalização. Esse método, com vantagens computacionais anteriormente enfatizadas, é apropriado para a resolução de problemas que demandam elevada ordem de quadratura.

Aqui, os autovalores da matriz \mathcal{M} podem ser números complexos. Sendo assim,

para a diagonalização dessa matriz, é necessária uma generalização do método original da diagonalização [Segatto et al., 1999b], de forma a obter a abrangência desses autovalores.

Então, sejam \mathbb{D} a matriz, de ordem $4N$, que contém os autovalores de \mathcal{M} e \mathcal{X} a matriz dos autovetores associados a esses autovalores. Inicialmente, por analogia ao caso escalar, é considerado que a matriz \mathcal{M} pode ser decomposta de modo que:

$$\mathcal{M} = \mathcal{X} \mathbb{D} \mathcal{X}^{-1}, \quad (3.49)$$

de onde,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\left(s \mathbf{I} - \mathcal{M} \right)^{-1} \right] = \mathcal{X} \mathcal{L}^{-1} \left[\left(s \mathbf{I} - \mathbb{D} \right)^{-1} \right] \mathcal{X}^{-1}. \quad (3.50)$$

Agora, com a simbologia

$$\mathbb{D}_1 = \Re e(\mathbb{D}) \quad e \quad \mathbb{D}_2 = \Im m(\mathbb{D}), \quad (3.51)$$

é obtida a expressão:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\left(s \mathbf{I} - \mathbb{D} \right)^{-1} \right] = e^{(\tau \mathbb{D}_1)} \cos(\tau \mathbb{D}_2) + i e^{(\tau \mathbb{D}_1)} \sin(\tau \mathbb{D}_2). \quad (3.52)$$

3.3.1 Solução \mathcal{LTS}_N vetorial homogênea

A solução da versão homogênea de (3.36), com o uso de (3.50) e (3.52), é escrita inicialmente na forma:

$$\mathcal{I}(\tau) = \left[\mathcal{X}_1 + i \mathcal{Y}_1 \right] \left[e^{(\tau \mathbb{D}_1)} \cos(\tau \mathbb{D}_2) + i e^{(\tau \mathbb{D}_1)} \sin(\tau \mathbb{D}_2) \right] \left[\mathcal{X}_2 + i \mathcal{Y}_2 \right] \mathcal{I}(0), \quad (3.53)$$

para

$$\mathcal{X}_1 = \Re e(\mathcal{X}) \quad e \quad \mathcal{Y}_1 = \Im m(\mathcal{X}), \quad (3.54)$$

$$\mathcal{X}_2 = \Re e(\mathcal{X}^{-1}) \quad e \quad \mathcal{Y}_2 = \Im m(\mathcal{X}^{-1}). \quad (3.55)$$

Considerando que $\mathcal{I}(\tau) \in \mathbb{R}^{4N}$ e as matrizes $(e^{(\tau \mathbb{D}_1)})$, $(\cos(\tau \mathbb{D}_2))$ e $(\sin(\tau \mathbb{D}_2))$ comutam, são determinadas

$$\left[\begin{aligned} & \left(\mathcal{X}_1 \sin(\tau \mathbb{D}_2) + \mathcal{Y}_1 \cos(\tau \mathbb{D}_2) \right) e^{(\tau \mathbb{D}_1)} \mathcal{X}_2 \\ & + \left(\mathcal{X}_1 \cos(\tau \mathbb{D}_2) - \mathcal{Y}_1 \sin(\tau \mathbb{D}_2) \right) e^{(\tau \mathbb{D}_1)} \mathcal{Y}_2 \end{aligned} \right] \mathcal{I}(0) = \mathbf{0} \quad (3.56)$$

e

$$\left[\begin{aligned} & \left(\mathcal{X}_1 \cos(\tau \mathbb{D}_2) - \mathcal{Y}_1 \sin(\tau \mathbb{D}_2) \right) e^{(\tau \mathbb{D}_1)} \mathcal{X}_2 \\ & - \left(\mathcal{X}_1 \sin(\tau \mathbb{D}_2) + \mathcal{Y}_1 \cos(\tau \mathbb{D}_2) \right) e^{(\tau \mathbb{D}_1)} \mathcal{Y}_2 \end{aligned} \right] \mathcal{I}(0) = \mathcal{I}(\tau). \quad (3.57)$$

E, então, procedendo a mudança de variáveis, usual no método \mathcal{LTS}_N , na parte real de \mathbb{D} , a solução \mathcal{LTS}_N vetorial homogênea, a partir de (3.57), fica reduzida a:

$$\mathcal{I}(\tau) = \left(\mathcal{X}_1 \cos(\tau \mathbb{D}_2) - \mathcal{Y}_1 \sin(\tau \mathbb{D}_2) \right) e^{\mathbb{E}(\tau)} \Psi^1 - \left(\mathcal{X}_1 \sin(\tau \mathbb{D}_2) + \mathcal{Y}_1 \cos(\tau \mathbb{D}_2) \right) e^{\mathbb{E}(\tau)} \Psi^2, \quad (3.58)$$

com

$$\mathbb{E}(\tau) = \begin{cases} \tau \mathbf{d}_1(i, i), & \text{se } \mathbf{d}_1(i, i) < 0 \\ (\tau - \tau_0) \mathbf{d}_1(i, i), & \text{se } \mathbf{d}_1(i, i) \geq 0 \end{cases}, \quad (3.59)$$

para $\mathbf{d}_1(i, i)$ elementos da diagonal de \mathbb{D}_1 e

$$\Psi^1 = e^{-\mathbb{E}(0)} \mathcal{X}_2 \mathcal{I}(0), \quad (3.60)$$

$$\Psi^2 = e^{-\mathbb{E}(0)} \mathcal{Y}_2 \mathcal{I}(0) \quad (3.61)$$

vetores modificados em consequência da mudança de base.

3.3.2 Solução \mathcal{LTS}_N vetorial particular

Primeiramente, através do mesmo procedimento tratado na teoria escalar para o método dos coeficientes a determinar, as soluções particulares ($k = 1, 2$) da equação (3.36) são escrita como:

$$\mathcal{H}(\tau) = \left[\mathcal{X}_1 + i \mathcal{Y}_1 \right] \left[-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{I} - \mathbb{D} \right]^{-1} \left[\mathcal{X}_2 + i \mathcal{Y}_2 \right] \mathcal{N} \boldsymbol{\Omega} e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} \in \mathbb{R}^{4N}; \quad (3.62)$$

os cálculos dessas soluções, para um mesmo m , diferem estritamente na atribuição de $\boldsymbol{\Omega}_1$ ou $\boldsymbol{\Omega}_2$ ao vetor $\boldsymbol{\Omega}$.

A seguir, supondo as matrizes diagonais

$$\mathbb{A} = \Re e \left[-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{I} - \mathbb{D} \right]^{-1} \quad e \quad \mathbb{B} = \Im m \left[-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{I} - \mathbb{D} \right]^{-1}, \quad (3.63)$$

são obtidos os respectivos termos gerais

$$\mathbb{A}(\iota, \iota) = \frac{-\mu_0 (1 + \mu_0 \mathbf{d}_1(\iota, \iota))}{(1 + \mu_0 \mathbf{d}_1(\iota, \iota))^2 + (\mu_0 \mathbf{d}_2(\iota, \iota))^2} \quad (3.64)$$

e

$$\mathbb{B}(\iota, \iota) = \frac{(\mu_0)^2 \mathbf{d}_2(\iota, \iota)}{(1 + \mu_0 \mathbf{d}_1(\iota, \iota))^2 + (\mu_0 \mathbf{d}_2(\iota, \iota))^2}, \quad \iota = 1, \dots, 4N, \quad (3.65)$$

para $\mu_0 (\mathbf{d}_1(\iota, \iota) \pm i \mathbf{d}_2(\iota, \iota)) \neq -1$, e onde $\mathbf{d}_1(\iota, \iota)$, $\mathbf{d}_2(\iota, \iota)$ são elementos das matrizes diagonais \mathbb{D}_1 , \mathbb{D}_2 , respectivamente.

E assim, as soluções particulares procuradas são dadas por:

$$\mathcal{H}(\tau) = \left\{ \left(\mathcal{X}_1 \mathbb{A} - \mathcal{Y}_1 \mathbb{B} \right) \mathcal{X}_2 - \left(\mathcal{X}_1 \mathbb{B} + \mathcal{Y}_1 \mathbb{A} \right) \mathcal{Y}_2 \right\} \mathcal{N} \boldsymbol{\Omega} e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}. \quad (3.66)$$

Essas mesmas soluções podem ser determinadas como segue, sendo importante, neste momento, salientar novamente a simetria das direções μ_n em relação à origem (critério sa-

tisfeito com a escolha da fórmula de Gauss para o conjunto de quadratura $\{\mu_n, \omega_n\}$:

$$\mathcal{H}(\tau) = \left\{ \left[\mathcal{X}_1 \mathbb{I}_1(\tau) - \mathcal{Y}_1 \mathbb{I}_2(\tau) \right] \mathcal{X}_2 - \left[\mathcal{X}_1 \mathbb{I}_2(\tau) + \mathcal{Y}_1 \mathbb{I}_1(\tau) \right] \mathcal{Y}_2 \right\} \mathcal{N} \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.67)$$

com

$$\mathbb{I}_1(\tau) = \begin{cases} \mathbb{I}_1^+(i, i)(\tau), & \text{se } \mathbf{d}_1(i, i) \geq 0 \\ \mathbb{I}_1^-(i, i)(\tau), & \text{se } \mathbf{d}_1(i, i) < 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

e

$$\mathbb{I}_2(\tau) = \begin{cases} \mathbb{I}_2^+(i, i)(\tau), & \text{se } \mathbf{d}_1(i, i) \geq 0 \\ \mathbb{I}_2^-(i, i)(\tau), & \text{se } \mathbf{d}_1(i, i) < 0 \end{cases}, \quad (3.69)$$

onde, $\mathbb{I}_1^+(i, i)(\tau)$, $\mathbb{I}_1^-(i, i)(\tau)$, $\mathbb{I}_2^+(i, i)(\tau)$ e $\mathbb{I}_2^-(i, i)(\tau)$ são as convoluções

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1^+(i, i)(\tau) &= \int_{\tau_0}^{\tau} \cos[(\tau - \xi) \mathbf{d}_2(i, i)] e^{[(\tau - \xi) \mathbf{d}_1(i, i)]} e^{-\frac{\xi}{\mu_0}} d\xi \\ &= \mathbf{c}_2(i, i) \left\{ \mathbf{c}_1(i, i) \left[-e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} + \cos[(\tau - \tau_0) \mathbf{d}_2(i, i)] e^{\mathbf{g}(i, i)(\tau)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{d}_2(i, i) \sin[(\tau - \tau_0) \mathbf{d}_2(i, i)] e^{\mathbf{g}(i, i)(\tau)} \right\}, \quad (3.70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1^-(i, i)(\tau) &= \int_0^{\tau} \cos[(\tau - \xi) \mathbf{d}_2(i, i)] e^{[(\tau - \xi) \mathbf{d}_1(i, i)]} e^{-\frac{\xi}{\mu_0}} d\xi \\ &= \mathbf{c}_2(i, i) \left\{ \mathbf{c}_1(i, i) \left[-e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} + \cos[\tau \mathbf{d}_2(i, i)] e^{\tau \mathbf{d}_1(i, i)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{d}_2(i, i) \sin[\tau \mathbf{d}_2(i, i)] e^{\tau \mathbf{d}_1(i, i)} \right\}, \quad (3.71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_2^+(\iota, \iota)(\tau) &= \int_{\tau_0}^{\tau} \sin[(\tau - \xi)\mathbf{d}_2(\iota, \iota)] e^{[(\tau - \xi)\mathbf{d}_1(\iota, \iota)]} e^{-\frac{\xi}{\mu_0}} d\xi \\
&= \mathbf{c}_2(\iota, \iota) \left\{ \mathbf{d}_2(\iota, \iota) \left[e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} - \cos[(\tau - \tau_0)\mathbf{d}_2(\iota, \iota)] e^{\mathbf{g}(\iota, \iota)(\tau)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{c}_1(\iota, \iota) \sin[(\tau - \tau_0)\mathbf{d}_2(\iota, \iota)] e^{\mathbf{g}(\iota, \iota)(\tau)} \right\} \quad (3.72)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_2^-(\iota, \iota)(\tau) &= \int_0^{\tau} \sin[(\tau - \xi)\mathbf{d}_2(\iota, \iota)] e^{[(\tau - \xi)\mathbf{d}_1(\iota, \iota)]} e^{-\frac{\xi}{\mu_0}} d\xi \\
&= \mathbf{c}_2(\iota, \iota) \left\{ \mathbf{d}_2(\iota, \iota) \left[e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} - \cos[\tau\mathbf{d}_2(\iota, \iota)] e^{\tau\mathbf{d}_1(\iota, \iota)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{c}_1(\iota, \iota) \sin[\tau\mathbf{d}_2(\iota, \iota)] e^{\tau\mathbf{d}_1(\iota, \iota)} \right\}; \quad (3.73)
\end{aligned}$$

as notações

$$\mathbf{g}(\iota, \iota)(\tau) = -\tau_0 \mathbf{c}_1(\iota, \iota) + \tau \mathbf{d}_1(\iota, \iota), \quad (3.74)$$

$$\mathbf{c}_1(\iota, \iota) = \mathbf{d}_1(\iota, \iota) + \frac{1}{\mu_0}, \quad (3.75)$$

$$\mathbf{c}_2(\iota, \iota) = \frac{1}{(\mathbf{d}_1(\iota, \iota))^2 + \frac{2}{\mu_0}\mathbf{d}_1(\iota, \iota) + \frac{1}{(\mu_0)^2} + (\mathbf{d}_2(\iota, \iota))^2}, \quad (3.76)$$

para $\mathbf{d}_2(\iota, \iota) \neq \pm \frac{i(1 + \mu_0 \mathbf{d}_1(\iota, \iota))}{\mu_0}$, são indicadas somente para facilitação computacional, já que essas expressões repetem-se nos resultados das integrais (3.70)-(3.73). Neste trabalho as convoluções não foram implementadas.

3.3.3 Cálculo das condições de contorno desconhecidas

O cálculo das condições de contorno em $\tau = 0$, desconhecidas para $\mu < 0$, deve ser feito através da resolução de sistemas algébricos de equações lineares a partir das condições de contorno do problema.

Para tal, primeiro é designada uma notação matricial em blocos, tanto para a solução geral, como para a equação (3.56), agora representadas por

$$\mathcal{I}(\tau) = \mathcal{B}^1(\tau)\Psi^1 + \mathcal{B}^2(\tau)\Psi^2 + \mathcal{H}(\tau) \quad (3.77)$$

e

$$\mathbf{0} = \mathcal{B}^3(\tau)\Psi^1 + \mathcal{B}^4(\tau)\Psi^2, \quad (3.78)$$

de maneira que:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_1(\tau) \\ \mathcal{I}_2(\tau) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11}^1(\tau) & \mathcal{B}_{12}^1(\tau) & \mathcal{B}_{11}^2(\tau) & \mathcal{B}_{12}^2(\tau) \\ \mathcal{B}_{21}^1(\tau) & \mathcal{B}_{22}^1(\tau) & \mathcal{B}_{21}^2(\tau) & \mathcal{B}_{22}^2(\tau) \\ \mathcal{B}_{11}^3(\tau) & \mathcal{B}_{12}^3(\tau) & \mathcal{B}_{11}^4(\tau) & \mathcal{B}_{12}^4(\tau) \\ \mathcal{B}_{21}^3(\tau) & \mathcal{B}_{22}^3(\tau) & \mathcal{B}_{21}^4(\tau) & \mathcal{B}_{22}^4(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^1 \\ \Psi_2^1 \\ \Psi_1^2 \\ \Psi_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1(\tau) \\ \mathcal{H}_2(\tau) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad (3.79)$$

os sub-vetores têm $2N$ elementos e as sub-matrizes são quadradas de ordem $2N$.

E, então, são aplicadas à (3.79) as condições de contorno do problema, tanto para $k = 1$, como para $k = 2$, obedecendo a forma continuada

$$\mathcal{I}(\tau) = \mathcal{B}^1(\tau)\Psi^1 + \mathcal{B}^2(\tau)\Psi^2 + i \left(\mathcal{B}^3(\tau)\Psi^1 + \mathcal{B}^4(\tau)\Psi^2 \right) + \mathcal{H}(\tau). \quad (3.80)$$

Das equações (3.34a)-(3.34d), somente o caso $m = 0$ com $k = 1$ requer que sejam consideradas condições de contorno não-homogêneas. Nesse caso, por (3.79) em $\tau = 0$ e $\tau = \tau_0$, é escrito

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}(\mathbf{V} + \mathbf{U} \mathcal{I}_1(\tau_0)) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11}^1(0) & \mathcal{B}_{12}^1(0) & \mathcal{B}_{11}^2(0) & \mathcal{B}_{12}^2(0) \\ \mathcal{B}_{21}^1(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^1(\tau_0) & \mathcal{B}_{21}^2(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^2(\tau_0) \\ \mathcal{B}_{11}^3(0) & \mathcal{B}_{12}^3(0) & \mathcal{B}_{11}^4(0) & \mathcal{B}_{12}^4(0) \\ \mathcal{B}_{21}^3(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^3(\tau_0) & \mathcal{B}_{21}^4(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^4(\tau_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^1 \\ \Psi_2^1 \\ \Psi_1^2 \\ \Psi_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1(0) \\ \mathcal{H}_2(\tau_0) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

com \mathbf{V} , o vetor coluna de ordem $2N$, e \mathbf{U} , a matriz quadrada também com ordem $2N$, tendo

por elementos

$$\mathbf{v}_i = \lambda_0 \mu_0 (F_{\mathcal{J}}) e^{-\frac{\tau_0}{\mu_0}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.82)$$

e

$$\mathbf{U}_{ij} = 2\lambda_0 \begin{bmatrix} \mu_j \omega_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

$i, j = 1, \dots, \frac{N}{2}$, respectivamente; a matriz $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{-1}$ é a matriz quadrada

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} & & & \mathbf{I} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ \mathbf{I} & & & \end{bmatrix}_{(2N)}, \quad (3.84)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade de ordem 4.

De (3.81) resulta:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11}^1(0) & \mathcal{B}_{12}^1(0) & \mathcal{B}_{11}^2(0) & \mathcal{B}_{12}^2(0) \\ \mathbf{I}\mathcal{B}_{21}^1(\tau_0) - \mathbf{U}\mathcal{B}_{11}^1(\tau_0) & \mathbf{I}\mathcal{B}_{22}^1(\tau_0) - \mathbf{U}\mathcal{B}_{12}^1(\tau_0) & \mathbf{I}\mathcal{B}_{21}^2(\tau_0) - \mathbf{U}\mathcal{B}_{11}^2(\tau_0) & \mathbf{I}\mathcal{B}_{22}^2(\tau_0) - \mathbf{U}\mathcal{B}_{12}^2(\tau_0) \\ \mathcal{B}_{11}^3(0) & \mathcal{B}_{12}^3(0) & \mathcal{B}_{11}^4(0) & \mathcal{B}_{12}^4(0) \\ \mathcal{B}_{21}^3(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^3(\tau_0) & \mathcal{B}_{21}^4(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^4(\tau_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi_1^1 \\ \Psi_2^1 \\ \Psi_1^2 \\ \Psi_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{H}_1(0) \\ \mathbf{V} + \mathbf{U}\mathcal{H}_1(\tau_0) - \mathbf{I}\mathcal{H}_2(\tau_0) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Para $m = 0$ com $k = 2$ e todo $m \geq 1$ com $k = 1, 2$, são verdadeiros:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11}^1(0) & \mathcal{B}_{12}^1(0) & \mathcal{B}_{11}^2(0) & \mathcal{B}_{12}^2(0) \\ \mathcal{B}_{21}^1(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^1(\tau_0) & \mathcal{B}_{21}^2(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^2(\tau_0) \\ \mathcal{B}_{11}^3(0) & \mathcal{B}_{12}^3(0) & \mathcal{B}_{11}^4(0) & \mathcal{B}_{12}^4(0) \\ \mathcal{B}_{21}^3(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^3(\tau_0) & \mathcal{B}_{21}^4(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^4(\tau_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^1 \\ \Psi_2^1 \\ \Psi_1^2 \\ \Psi_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1(0) \\ \mathcal{H}_2(\tau_0) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11}^1(0) & \mathcal{B}_{12}^1(0) & \mathcal{B}_{11}^2(0) & \mathcal{B}_{12}^2(0) \\ \mathcal{B}_{21}^1(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^1(\tau_0) & \mathcal{B}_{21}^2(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^2(\tau_0) \\ \mathcal{B}_{11}^3(0) & \mathcal{B}_{12}^3(0) & \mathcal{B}_{11}^4(0) & \mathcal{B}_{12}^4(0) \\ \mathcal{B}_{21}^3(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^3(\tau_0) & \mathcal{B}_{21}^4(\tau_0) & \mathcal{B}_{22}^4(\tau_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^1 \\ \Psi_2^1 \\ \Psi_1^2 \\ \Psi_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{H}_1(0) \\ -\mathcal{H}_2(\tau_0) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

É interessante distinguir que nos problemas com luz incidente não-polarizada, para $m = 0, \dots, L$ e $k = 2$, a equação (3.77) é uma equação homogênea e as condições de contorno do problema também são homogêneas. Portanto, nessa situação específica, em (3.87) é obtida a solução trivial.

Finalmente, convém destacar duas características relevantes na solução \mathcal{LTS}_N vetorial, agora completamente determinada com o cálculo das constantes arbitrárias:

(1) As soluções homogênea e particulares estão divididas, em (3.58) e (3.67), em componentes que apresentam somente direções positivas ($\mu_n > 0$) ou direções negativas ($\mu_n < 0$), assim como no caso escalar. Então, essa solução proposta também é adequada para elevadas ordens de N , sem risco de "overflow".

(2) Por (3.1a) e (3.3), fica claro que essa solução é válida até mesmo para luz incidente que já é polarizada (circularmente).

3.4 Dependência angular contínua

Na formulação \mathcal{LTS}_N vetorial apresentada, o vetor $\mathbf{I}_k^m(\tau, \mu)$ é obtido nas direções discretas μ_n . O cálculo de $\mathbf{I}_k^m(\tau, \mu)$ em uma direção distinta das N direções μ_n pode ser efetuado através de interpolações polinomiais. Porém, a precisão dos resultados pode ser influenciada pela escolha do grau do polinômio interpolador. Então, para o aperfeiçoamento

da solução obtida, agora é desenvolvida a formulação $\mathcal{L}\mathbf{TS}_N$ vetorial com dependência contínua na variável angular. O termo integral da equação de transferência é calculado com a formulação da seção anterior, e, após a substituição do valor encontrado, a equação diferencial resultante é resolvida analiticamente.

Assim, na equação

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}_k^m(\tau, \mu) + \frac{1}{\mu} \mathbf{I}_k^m(\tau, \mu) = \mathcal{F}_k^m(\tau, \mu), \quad (3.88)$$

com condições de contorno

$$\mathbf{I}_k^m(0, \mu) = \mathbf{0}, \quad \mu > 0 \quad (3.89)$$

e

$$\mathbf{I}_k^m(\tau_0, \mu) = \mathcal{G}_k^m(\tau_0, \mu), \quad \mu < 0, \quad (3.90)$$

a função $\mathcal{F}_k^m(\tau, \mu)$ é definida por

$$\mathcal{F}_k^m(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2\mu} \sum_{\ell=m}^L \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu) \mathbf{B}_\ell \left[\sum_{n=1}^N \omega_n \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_n) \mathbf{I}_{k,n}^m(\tau) + \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_0) \mathcal{D}_k \mathbf{F} e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} \right], \quad (3.91)$$

onde $\mathbf{I}_{k,n}^m(\tau)$ é a solução do problema em ordenadas discretas.

A solução da equação diferencial ordinária (3.88) é da forma:

$$\mathbf{I}_k^m(\tau, \mu) = e^{-\frac{\tau}{\mu}} \left[\mathbf{I}_k^m(0, \mu) + \int_0^\tau \mathcal{F}_k^m(\eta, \mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right]. \quad (3.92)$$

Pela condição de contorno em $\tau = 0$, a função $\mathbf{I}_k^m(0, \mu)$ é nula se $\mu > 0$. Para determinar $\mathbf{I}_k^m(0, \mu)$, para $\mu < 0$, é considerado $\tau = \tau_0$ em (3.92) e são usados os resultados de $\mathbf{I}_k^m(\tau_0, \mu) = \mathcal{G}_k^m(\tau_0, \mu)$, para $\mu < 0$. Então, a solução (3.92), com o uso de propriedades de

integrals, é dada por

$$\mathbf{I}_k^m(\tau, \mu) = \begin{cases} e^{-\frac{\tau}{\mu}} \int_0^\tau \mathcal{F}_k^m(\eta, \mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta, & \text{se } \mu > 0 \\ e^{-\frac{\tau}{\mu}} \left[e^{\frac{\tau_0}{\mu}} \mathcal{G}_k^m(\tau_0, \mu) - \int_\tau^{\tau_0} \mathcal{F}_k^m(\eta, \mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], & \text{se } \mu < 0 \end{cases}. \quad (3.93)$$

Agora, as integrais que aparecem em (3.93) são calculadas de forma analítica. Para $\mu > 0$ são encontrados:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\tau}{\mu}} \int_0^\tau \mathcal{F}_k^m(\eta, \mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta &= \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu) \mathbf{B}_\ell \left[\sum_{n=1}^N \omega_n \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_n) \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \int_0^\tau \mathbf{I}_{k,n}^m(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_0) \mathcal{D}_k \mathbf{F} \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \int_0^\tau e^{-\frac{\eta}{\mu_0}} e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], \end{aligned} \quad (3.94)$$

com

$$\frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \int_0^\tau e^{-\frac{\eta}{\mu_0}} e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta = \begin{cases} -\frac{\mu_0 \left(e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} - e^{-\frac{\tau}{\mu}} \right)}{\mu - \mu_0}, & \text{se } \mu \neq \mu_0 \\ \frac{\tau e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu}, & \text{se } \mu = \mu_0 \end{cases} \quad (3.95)$$

e $\frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \int_0^\tau \mathbf{I}_{k,n}^m(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta$ calculado matricialmente em

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \int_0^\tau \mathcal{I}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta &= \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \left[\int_0^\tau \mathcal{B}^1(\eta) \mathbf{\Psi}^1 e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \int_0^\tau \mathcal{B}^2(\eta) \mathbf{\Psi}^2 e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\tau \mathcal{H}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right]. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Quando $\mu < 0$ em (3.93):

$$e^{-\frac{\tau}{\mu}} \int_{\tau}^{\tau_0} \mathcal{F}_k^m(\eta, \mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta = \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \mathbf{\Pi}_{\ell}^m(\mu) \mathbf{B}_{\ell} \left[\sum_{n=1}^N \omega_n \mathbf{\Pi}_{\ell}^m(\mu_n) \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \int_{\tau}^{\tau_0} \mathbf{I}_{k,n}^m(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_{\ell}^m(\mu_0) \mathcal{D}_k \mathbf{F} \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-\frac{\eta}{\mu_0}} e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], \quad (3.97)$$

onde

$$\frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-\frac{\eta}{\mu_0}} e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta = \begin{cases} -\frac{\mu_0 \left(e^{\left(\frac{\tau_0(-\mu+\mu_0)}{\mu_0\mu} - \frac{\tau}{\mu} \right)} - e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} \right)}{\mu - \mu_0}, & \text{se } \mu \neq \mu_0 \\ \frac{(\tau_0 - \tau) e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu}, & \text{se } \mu = \mu_0 \end{cases} \quad (3.98)$$

e, por analogia ao caso anterior,

$$\frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \int_{\tau}^{\tau_0} \mathcal{I}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta = \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \left[\int_{\tau}^{\tau_0} \mathcal{B}^1(\eta) \mathbf{\Psi}^1 e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \int_{\tau}^{\tau_0} \mathcal{B}^2(\eta) \mathbf{\Psi}^2 e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right. \\ \left. + \int_{\tau}^{\tau_0} \mathcal{H}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right]. \quad (3.99)$$

E, finalmente, para $\mu = 0$, a solução (3.92) é obtida de:

$$\mathbf{I}_k^m(\tau, \mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu \mathcal{F}_k^m(\tau, \mu), \quad \tau \neq 0, \tau_0, \quad (3.100)$$

$$\mathbf{I}_k^m(0, \mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \mu \mathcal{F}_k^m(0, \mu) \quad (3.101)$$

e

$$\mathbf{I}_k^m(\tau_0, \mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \mu \mathcal{F}_k^m(\tau_0, \mu). \quad (3.102)$$

Agora o cálculo de $\mathbf{I}_k^m(\tau, \mu)$ pode ser realizado em qualquer direção μ , sem a ne-

cessidade de procederem-se interpolações. Cabe ressaltar que no presente trabalho não foi implementada a versão para μ contínuo.

3.5 Implementação da matriz associada à matriz simbólica

O cálculo computacional de \mathcal{M}^m pode ser realizado a partir da decomposição:

$$\mathcal{M}^m = \frac{\varpi}{2} \Delta \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}^m & \cdots & \mathcal{A}_{1N}^m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{N1}^m & \cdots & \mathcal{A}_{NN}^m \end{bmatrix} \mathbf{W} - \Delta, \quad (3.103)$$

com

$$\Delta = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{I}, \frac{1}{\mu_2} \mathbf{I}, \dots, \frac{1}{\mu_N} \mathbf{I} \right\} \quad (3.104)$$

e

$$\mathbf{W} = \text{diag} \left\{ \omega_1 \mathbf{I}, \omega_1 \mathbf{I}, \dots, \omega_N \mathbf{I} \right\}, \quad (3.105)$$

onde \mathbf{I} representa a matriz identidade de ordem 4. As matrizes \mathcal{A}_{ij}^m , anteriormente definidas, são dadas em termos das matrizes $\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu)$. Para a implementação computacional das matrizes $\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu)$ foram informadas fórmulas recursivas na referência [Garcia e Siewert, 1989] que perfeitamente atendem ao interesse (3.103).

Então, seguindo essa referência, inicialmente são definidas

$$\mathbf{x}_\ell^m(\mu) = \left[\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_\ell^m(\mu), \quad \ell \geq m, \quad (3.106)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_0^0(\mu) = 0, & \mathbf{Y}_1^0(\mu) = 0, & \mathbf{Y}_1^1(\mu) = 0, \\ \mathbf{Y}_\ell^m(\mu) = \left[\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left[R_\ell^m(\mu) - T_\ell^m(\mu) \right], & \ell \geq \max\{2, m\} \end{cases} \quad (3.107)$$

e

$$\begin{cases} z_0^0(\mu) = 0, & z_1^0(\mu) = 0, & z_1^1(\mu) = 0, \\ z_\ell^m(\mu) = \left[\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left[R_\ell^m(\mu) + T_\ell^m(\mu) \right], & \ell \geq \max\{2, m\}. \end{cases} \quad (3.108)$$

A seguir, as matrizes $\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu)$ são descritas por

$$\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu) = \mathbf{S}^{-1} \text{diag} \left\{ \mathbf{x}_\ell^m(\mu), \mathbf{Y}_\ell^m(\mu), \mathbf{Z}_\ell^m(\mu), \mathbf{x}_\ell^m(\mu) \right\} \mathbf{S}, \quad (3.109)$$

onde \mathbf{S} é dada como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

Para o cálculo das funções $\mathbf{x}_\ell^m(\mu)$, $\mathbf{Y}_\ell^m(\mu)$ e $\mathbf{Z}_\ell^m(\mu)$, para $\mu \in (0, 1]$, são dadas as fórmulas recursivas:

$$\left[(\ell + 1)^2 - m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\ell+1}^m(\mu) = (2\ell + 1)\mu \mathbf{x}_\ell^m(\mu) - (\ell^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\ell-1}^m(\mu), \quad \ell \geq m, \quad (3.111)$$

$$\mathbf{a}_{\ell+1}^m \mathbf{Y}_{\ell+1}^m(\mu) = (2\ell + 1) \left[\mu + \frac{2m}{\ell(\ell + 1)} \right] \mathbf{Y}_\ell^m(\mu) - \mathbf{a}_\ell^m \mathbf{Y}_{\ell-1}^m, \quad \ell \geq \max\{2, m\} \quad (3.112)$$

e

$$\mathbf{a}_{\ell+1}^m \mathbf{Z}_{\ell+1}^m(\mu) = (2\ell + 1) \left[\mu - \frac{2m}{\ell(\ell + 1)} \right] \mathbf{Z}_\ell^m(\mu) - \mathbf{a}_\ell^m \mathbf{Z}_{\ell-1}^m, \quad \ell \geq \max\{2, m\}, \quad (3.113)$$

onde

$$\mathbf{a}_\ell^m = \frac{[(\ell^2 - m^2)(\ell^2 - 4)]^{\frac{1}{2}}}{\ell}, \quad (3.114)$$

juntamente com os valores iniciais

$$\mathbf{x}_m^m(\mu) = \mathbf{s}_m(1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}}, \quad (3.115)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_2^0(\mu) = \frac{\sqrt{6}}{4}(1 - \mu^2), & \mathbf{Y}_2^1(\mu) = \frac{1}{2}(1 - \mu)(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{Y}_m^m(\mu) = \mathbf{s}_m \mathbf{r}_m (1 - \mu)^2 (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2} - 1}, \end{cases} \quad (3.116)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_2^0(\mu) = \mathbf{Y}_2^0(\mu), & \mathbf{Z}_2^1(\mu) = -\frac{1}{2}(1 + \mu)(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{Z}_m^m(\mu) = \mathbf{s}_m \mathbf{r}_m (1 + \mu)^2 (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2} - 1}; \end{cases} \quad (3.117)$$

os coeficientes \mathbf{s}_m e \mathbf{r}_m são determinados por

$$\mathbf{s}_m = (2m - 1)!! [(2m)!]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.118)$$

e

$$\mathbf{r}_m = \left[\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.119)$$

respectivamente, sendo

$$(2m - 1)!! = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0 \\ (2m - 1)(2m - 3) \cdots 1, & \text{se } m > 0 \end{cases}. \quad (3.120)$$

Agora, as matrizes $\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu)$ podem ser obtidas, para $\mu \in [-1, 0)$, a partir dos valores

já calculados para $\mu \in (0, 1]$, usando

$$\mathbf{\Pi}_\ell^m(-\mu) = (-1)^{\ell-m} \mathcal{D} \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu) \mathcal{D}, \quad (3.121)$$

com \mathcal{D} a matriz diagonal (3.8).

Com vistas a obtenção de economia computacional no algoritmo da solução desenvolvida e considerando (3.121), aqui, é observado que por

$$\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_{-i}) \mathbf{B}_\ell \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_{-j}) = \mathcal{D} \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_i) \mathbf{B}_\ell \mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu_j) \mathcal{D}, \quad (3.122)$$

resulta

$$\mathcal{A}_{ij}^m = \mathcal{D} \mathcal{A}_{i^*j^*}^m \mathcal{D}, \quad (3.123)$$

quando $i^* = N + 1 - i$ e $j^* = N + 1 - j$.

As considerações desta seção também são válidas na implementação das matrizes \mathcal{N}_i^m , usadas na construção do vetor fonte. Pois, ambas matrizes \mathcal{A}_{ij}^m e \mathcal{N}_i^m são definidas em função de $\mathbf{\Pi}_\ell^m(\mu)$.

3.6 Aspectos computacionais da solução

Na solução \mathcal{LTS}_N , para encontrar as constantes de integração, tem de ser resolvido um sistema linear. Para evitar erros de aritmética computacional com o crescimento do sistema e melhoria da "*performance*" computacional da solução \mathcal{LTS}_N , foi usado por [Orengo, 2002], no caso escalar, um método iterativo [da Cunha, 1997] para cálculo dessas constantes de integração. A justificativa dessa investigação decorreu do fato dos métodos iterativos serem praticamente insensíveis ao crescimento dos erros de truncamento ou arredondamento, tornando mais confiáveis ainda os resultados para N grande. Além disso, não há transformações lineares, ou seja, o sistema original é mantido durante todo o processo.

É importante salientar que o código desenvolvido para a solução \mathcal{LTS}_N vetorial, primeiramente, com o método de eliminação de Gauss, gerou bons resultados interpolados para $N \leq 30$. Entretanto, para $N > 30$ os resultados só apresentaram-se precisos quando

foi usado o método iterativo [da Cunha, 1997].

Um segundo aspecto computacional a ser observado, na solução desenvolvida, diz respeito aos autovalores da matriz associada a essa solução. Os autovalores quase repetidos que ocorrem na solução \mathcal{LTS}_N vetorial, em quantidades crescentes nos limites $albedo \rightarrow 0$ ou $m \rightarrow grau\ de\ anisotropia$, não chegam a acarretar problemas computacionais a essa solução, pois a matriz \mathcal{LTS}_N continua sendo diagonalizável.

Outro aspecto relevante diz respeito à ordem do sistema linear: os testes realizados na implementação do código evidenciaram a possibilidade de redução na ordem desse sistema, de $8N$ para $4N$, supondo a solução homogênea da forma

$$\mathcal{I}(\tau) = \mathcal{B}(\tau)\Upsilon e^{\mathbb{E}(\tau)}, \quad (3.124)$$

com

$$\mathcal{B}(\tau) = \mathcal{X}_1 \left(\cos(\tau\mathbb{D}_2) - \sin(\tau\mathbb{D}_2) \right) - \mathcal{Y}_1 \left(\sin(\tau\mathbb{D}_2) + \cos(\tau\mathbb{D}_2) \right) \quad (3.125)$$

e Υ determinado sem a necessidade de inversão da matriz dos autovetores, assim como no caso escalar; a determinação das soluções particulares pelo método dos coeficientes a determinar, também sem efetuar a inversão da matriz dos autovetores, pode ser feita com a resolução de

$$\left[-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{I} - \mathcal{M} \right] \mathbf{C} = \mathcal{N} \Omega \quad (3.126)$$

pelo método de eliminação de Gauss.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta um exemplo do uso da técnica exposta no presente trabalho. Os resultados numéricos obtidos são comparados com referências da literatura para validação do método e do código computacional desenvolvidos.

4.1 Problema-teste

Para ilustrar a aplicação do método, os algoritmos são testados para o modelo que está resumido na tabela a seguir. Nesse problema, é considerado que o raio de luz incidente é definido tendo $F_{\mathcal{J}} = 1$ como o único componente não-nulo de \mathbf{F} .

Tipos de partículas	L	λ_0	ϖ	τ_0	μ_0
esféricas	13	0.1	0.99	1	0.2

Tabela 4.1 – Problema-teste

São consideradas partículas com raio efetivo $0.2\mu m$, variância efetiva 0.07, índice de refração 1.44 e luz com comprimento de onda $0.951\mu m$. Os coeficientes de espalhamento, calculados por [de Rooij e van der Stap, 1984], foram tabelados na referência [Vestrucci e Siewert, 1984]. Essas constantes foram calculadas para o caso $\varpi = 1$; entretanto, seguindo novamente as sugestões de [Garcia e Siewert, 1986] e [Garcia e Siewert, 1989], para permitir um pouco de absorção e evitar que essas constantes da teoria básica de Mie sejam recalculadas, aqui são usados $\varpi = 0.99$ e as mesmas constantes informadas em [Vestrucci e Siewert, 1984]. Os valores desses coeficientes de espalhamento estão anexados, a este trabalho, no Apêndice II.

4.2 Tabulação e análise de resultados numéricos

Os resultados numéricos para o problema-teste foram obtidos com a implementação dos algoritmos em Fortran 90 [Ellis et al., 1998] [Chapman, 1998], utilizando-se precisão dupla, em um computador tipo Pentium III, 1 GHz e 256 Mbytes de memória RAM. Esses resultados foram determinados com o auxílio de rotinas numéricas do pacote IMSL [IMSL Library, 1995]. O uso de rotinas de outros pacotes, como LAPACK [Anderson et al., 1992] ou EISPACK [Smith et al., 1976], pode influenciar na precisão dos resultados; porém, aqui, ainda não foi verificada a preponderância dessa escolha.

Os algoritmos foram testados, com ordem de quadratura $N = 50, 100$ e 150 , para o mesmo problema resolvido por [Garcia e Siewert, 1986] pelo método GSH, com $N \leq 449$, e [Garcia e Siewert, 1989] pelo método F_N , com $N \leq 400$. Assim, os valores informados por esses autores são considerados, aqui, como valores referenciais.

Os valores tabelados a seguir, com sete dígitos significativos, dizem respeito ao campo difuso

$$\mathbf{I}^*(\tau, \mu, \varphi) = \mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi) - \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \mathbf{F} e^{\frac{-\tau}{\mu}}, \quad (4.1)$$

para o azimute entre o raio de luz incidente e a direção de observação $\varphi - \varphi_0 = 0, \frac{\pi}{2}$ e π . Esses resultados foram obtidos pelo método \mathcal{LTS}_N , com $N = 150$, e interpolados através de "spline" cúbico para encontrar a solução nos pontos $\mu \in [-1, 1]$ com $\mu_1 = -1$, $\mu_{i+1} = \mu_i + 0.1$, $i = 1, \dots, 20$. Nos extremos desse intervalo a precisão dos resultados decresce, pois os resultados são extrapolados.

A análise desses resultados é inicialmente apresentada para cada conjunto dos quatro parâmetros de Stokes tabelados. Ao final deste capítulo a avaliação dos resultados é feita separadamente para cada parâmetro de Stokes.

É interessante destacar que os parâmetros \mathcal{Q} , \mathcal{U} e \mathcal{V} , em contraste com a teoria escalar onde somente a intensidade de radiação é procurada, podem ser positivos, negativos e, de fato, nulos.

Nas situações em que $\varphi - \varphi_0 = 0$ e $\varphi - \varphi_0 = \pi$, para evitar excessivas tabulações no corpo do presente trabalho, são omitidos os parâmetros $\mathcal{U} = \mathcal{V} = 0$.

μ	$\tau = 0$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.75$	$\tau = 1$
-1.0	5.624547(-02)	4.977640(-02)	4.418495(-02)	3.529074(-02)	1.973032(-02)	1.285600(-02)	8.746604(-03)
-0.9	9.048554(-02)	7.818099(-02)	6.772202(-02)	5.152775(-02)	2.524119(-02)	1.477990(-02)	8.746604(-03)
-0.8	1.255926(-01)	1.075091(-01)	9.221187(-02)	6.872397(-02)	3.150419(-02)	1.713122(-02)	8.746604(-03)
-0.7	1.677989(-01)	1.428048(-01)	1.217246(-01)	8.952996(-02)	3.928035(-02)	2.016869(-02)	8.746604(-03)
-0.6	2.193283(-01)	1.859193(-01)	1.578019(-01)	1.150342(-01)	4.904559(-02)	2.414699(-02)	8.746604(-03)
-0.5	2.829248(-01)	2.391466(-01)	2.023611(-01)	1.466048(-01)	6.145553(-02)	2.946499(-02)	8.746604(-03)
-0.4	3.626568(-01)	3.058748(-01)	2.582159(-01)	1.862232(-01)	7.748634(-02)	3.680002(-02)	8.746604(-03)
-0.3	4.651974(-01)	3.916189(-01)	3.298883(-01)	2.369688(-01)	9.861600(-02)	4.738996(-02)	8.746604(-03)
-0.2	6.028249(-01)	5.064644(-01)	4.255099(-01)	3.040716(-01)	1.269290(-01)	6.363331(-02)	8.746604(-03)
-0.1	8.021380(-01)	6.726377(-01)	5.629964(-01)	3.985984(-01)	1.644469(-01)	8.945688(-02)	8.746604(-03)
0.0	1.080239	9.629764(-01)	7.950220(-01)	5.541088(-01)	2.166804(-01)	1.198682(-01)	8.746604(-03)
0.1		4.125440(-01)	5.966132(-01)	6.373199(-01)	3.099156(-01)	1.633607(-01)	9.578007(-02)
0.2		2.328935(-01)	3.771691(-01)	4.936331(-01)	3.641733(-01)	2.205538(-01)	1.335006(-01)
0.3		1.586281(-01)	2.678238(-01)	3.806567(-01)	3.534085(-01)	2.487960(-01)	1.667897(-01)
0.4		1.164212(-01)	2.009440(-01)	2.987768(-01)	3.183145(-01)	2.493582(-01)	1.832167(-01)
0.5		8.808290(-02)	1.541926(-01)	2.360922(-01)	2.760847(-01)	2.336234(-01)	1.844537(-01)
0.6		6.702181(-02)	1.185437(-01)	1.854870(-01)	2.326499(-01)	2.089701(-01)	1.747576(-01)
0.7		5.028962(-02)	8.971269(-02)	1.429204(-01)	1.900233(-01)	1.794346(-01)	1.575545(-01)
0.8		3.634597(-02)	6.536547(-02)	1.059121(-01)	1.487002(-01)	1.470642(-01)	1.350574(-01)
0.9		2.415499(-02)	4.384830(-02)	7.242885(-02)	1.080058(-01)	1.122580(-01)	1.080588(-01)
1.0		1.016841(-02)	1.888838(-02)	3.264071(-02)	5.536772(-02)	6.333951(-02)	6.629493(-02)

Tabela 4.2 – Parâmetro de Stokes $\mathcal{J}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = 0$

μ	$\tau = 0$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.75$	$\tau = 1$
-1.0	-2.261250(-02)	-1.846489(-02)	-1.508853(-02)	-1.014143(-02)	-3.205281(-03)	-1.072626(-03)	
-0.9	-3.258035(-02)	-2.648636(-02)	-2.156785(-02)	-1.442698(-02)	-4.592892(-03)	-1.600600(-03)	
-0.8	-3.504741(-02)	-2.825643(-02)	-2.283726(-02)	-1.507353(-02)	-4.711955(-03)	-1.688873(-03)	
-0.7	-3.495010(-02)	-2.786011(-02)	-2.228105(-02)	-1.442047(-02)	-4.357865(-03)	-1.610742(-03)	
-0.6	-3.276879(-02)	-2.568004(-02)	-2.020447(-02)	-1.266185(-02)	-3.575044(-03)	-1.374195(-03)	
-0.5	-2.866602(-02)	-2.182520(-02)	-1.667813(-02)	-9.818396(-03)	-2.333590(-03)	-9.552819(-04)	
-0.4	-2.275801(-02)	-1.634947(-02)	-1.171521(-02)	-5.854691(-03)	-5.588178(-04)	-3.010069(-04)	
-0.3	-1.524660(-02)	-9.347041(-03)	-5.342852(-03)	-7.197337(-04)	1.874999(-03)	6.927324(-04)	
-0.2	-6.652175(-03)	-1.107935(-03)	2.284660(-03)	5.586049(-03)	5.149288(-03)	2.242390(-03)	
-0.1	1.416238(-03)	7.419768(-03)	1.056779(-02)	1.281684(-02)	9.384422(-03)	4.792407(-03)	
-0.0	1.674401(-03)	1.179350(-02)	1.691964(-02)	1.991255(-02)	1.428624(-02)	8.337309(-03)	
0.0		1.179350(-02)	1.691964(-02)	1.991255(-02)	1.428624(-02)	8.337309(-03)	2.596323(-03)
0.1		6.116580(-03)	1.229974(-02)	1.997595(-02)	1.892005(-02)	1.210527(-02)	6.007807(-03)
0.2		3.769465(-03)	8.057935(-03)	1.494221(-02)	1.930129(-02)	1.458552(-02)	8.820524(-03)
0.3		1.787881(-03)	4.365076(-03)	9.403325(-03)	1.578575(-02)	1.394985(-02)	9.849225(-03)
0.4		-9.063905(-05)	8.607662(-04)	3.784082(-03)	1.013621(-02)	1.060568(-02)	8.540050(-03)
0.5		-1.875801(-03)	-2.474187(-03)	-1.736185(-03)	3.377219(-03)	5.388513(-03)	5.179172(-03)
0.6		-3.521385(-03)	-5.562327(-03)	-6.967000(-03)	-3.832143(-03)	-9.808854(-04)	2.769939(-03)
0.7		-4.955319(-03)	-8.278661(-03)	-1.168212(-02)	-1.096984(-02)	-7.893936(-03)	-5.633165(-03)
0.8		-6.078638(-03)	-1.044991(-02)	-1.559510(-02)	-1.753352(-02)	-1.478716(-02)	-1.202449(-02)
0.9		-6.728237(-03)	-1.179141(-02)	-1.825919(-02)	-2.289823(-02)	-2.103584(-02)	-1.833554(-02)
1.0		-5.976186(-03)	-1.071321(-02)	-1.733050(-02)	-2.464111(-02)	-2.487744(-02)	-2.346516(-02)

Tabela 4.3 – Parâmetro de Stokes $\mathcal{Q}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = 0$

Os resultados apresentados nas tabelas (4.2) e (4.3) são concordantes com os resultados da literatura [Garcia e Siewert, 1986] e [Garcia e Siewert, 1989] em até cinco dígitos significativos.

μ	$\tau = 0$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.75$	$\tau = 1$
-1.0	5.499871(-02)	4.877322(-02)	4.338102(-02)	3.477738(-02)	1.960390(-02)	1.282508(-02)	8.746604(-03)
-0.9	6.220615(-02)	5.530050(-02)	4.924931(-02)	3.948749(-02)	2.190567(-02)	1.379632(-02)	8.746604(-03)
-0.8	7.054804(-02)	6.290145(-02)	5.612101(-02)	4.506377(-02)	2.473502(-02)	1.504011(-02)	8.746604(-03)
-0.7	8.019494(-02)	7.174463(-02)	6.415984(-02)	5.165966(-02)	2.821762(-02)	1.664020(-02)	8.746604(-03)
-0.6	9.142621(-02)	8.210249(-02)	7.362716(-02)	5.951553(-02)	3.255003(-02)	1.873284(-02)	8.746604(-03)
-0.5	1.046007(-01)	9.432775(-02)	8.486223(-02)	6.894628(-02)	3.801432(-02)	2.153626(-02)	8.746604(-03)
-0.4	1.201681(-01)	1.088671(-01)	9.829455(-02)	8.035194(-02)	4.501757(-02)	2.542155(-02)	8.746604(-03)
-0.3	1.386608(-01)	1.262587(-01)	1.144338(-01)	9.419261(-02)	5.412025(-02)	3.106267(-02)	8.746604(-03)
-0.2	1.606753(-01)	1.471344(-01)	1.338417(-01)	1.108746(-01)	6.589814(-02)	3.974051(-02)	8.746604(-03)
-0.1	1.869642(-01)	1.726046(-01)	1.575085(-01)	1.308529(-01)	7.995613(-02)	5.335837(-02)	8.746604(-03)
0.0	2.103118(-01)	2.061651(-01)	1.885577(-01)	1.568367(-01)	9.510209(-02)	6.732629(-02)	8.746604(-03)
0.0		2.061651(-01)	1.885577(-01)	1.568367(-01)	9.510209(-02)	6.732629(-02)	4.458957(-02)
0.1		8.189106(-02)	1.266922(-01)	1.545573(-01)	1.139328(-01)	8.096061(-02)	5.737465(-02)
0.2		4.589478(-02)	7.905010(-02)	1.158025(-01)	1.185105(-01)	9.315260(-02)	6.964080(-02)
0.3		3.169923(-02)	5.678107(-02)	8.963392(-02)	1.105648(-01)	9.673183(-02)	7.806833(-02)
0.4		2.412760(-02)	4.407755(-02)	7.239618(-02)	9.989659(-02)	9.455212(-02)	8.159507(-02)
0.5		1.942992(-02)	3.589108(-02)	6.036729(-02)	8.963055(-02)	8.980832(-02)	8.170555(-02)
0.6		1.624218(-02)	3.019081(-02)	5.153809(-02)	8.048609(-02)	8.414281(-02)	7.979593(-02)
0.7		1.395005(-02)	2.601013(-02)	4.480321(-02)	7.250820(-02)	7.830725(-02)	7.676749(-02)
0.8		1.223613(-02)	2.283179(-02)	3.951704(-02)	6.557239(-02)	7.263427(-02)	7.315619(-02)
0.9		1.091977(-02)	2.035414(-02)	3.528052(-02)	5.953026(-02)	6.726450(-02)	6.927652(-02)
1.0		9.891508(-03)	1.839158(-02)	3.183861(-02)	5.425539(-02)	6.225662(-02)	6.531960(-02)

Tabela 4.4 – Parâmetro de Stokes $\mathcal{J}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

μ	$\tau = 0$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.75$	$\tau = 1$
-1.0	2.163370(-02)	1.765615(-02)	1.441922(-02)	9.679033(-03)	3.045966(-03)	1.016201(-03)	
-0.9	2.570319(-02)	2.119422(-02)	1.747192(-02)	1.193063(-02)	3.879317(-03)	1.280518(-03)	
-0.8	3.046760(-02)	2.536740(-02)	2.109815(-02)	1.464470(-02)	4.943200(-03)	1.646286(-03)	
-0.7	3.604395(-02)	3.028444(-02)	2.539796(-02)	1.790593(-02)	6.291143(-03)	2.143797(-03)	
-0.6	4.262896(-02)	3.612565(-02)	3.053486(-02)	2.184943(-02)	8.005970(-03)	2.820923(-03)	
-0.5	5.050040(-02)	4.314535(-02)	3.673881(-02)	2.666442(-02)	1.020884(-02)	3.754015(-03)	
-0.4	6.005985(-02)	5.171129(-02)	4.434052(-02)	3.262051(-02)	1.308173(-02)	5.073225(-03)	
-0.3	7.190506(-02)	6.237122(-02)	5.382719(-02)	4.010426(-02)	1.689837(-02)	7.017801(-03)	
-0.2	8.697301(-02)	7.599229(-02)	6.595454(-02)	4.967319(-02)	2.203106(-02)	1.005779(-02)	
-0.1	1.068721(-01)	9.419902(-02)	8.214481(-02)	6.228195(-02)	2.874148(-02)	1.500682(-02)	
-0.0	1.289115(-01)	1.214092(-01)	1.059648(-01)	8.061325(-02)	3.730184(-02)	2.105429(-02)	
0.0		1.214092(-01)	1.059648(-01)	8.061325(-02)	3.730184(-02)	2.105429(-02)	1.038407(-02)
0.1		4.929182(-02)	7.407025(-02)	8.488703(-02)	4.974259(-02)	2.850243(-02)	1.602868(-02)
0.2		2.762516(-02)	4.632832(-02)	6.436736(-02)	5.514476(-02)	3.646456(-02)	2.252267(-02)
0.3		1.905754(-02)	3.324716(-02)	4.990349(-02)	5.266729(-02)	3.996130(-02)	2.767001(-02)
0.4		1.448135(-02)	2.575483(-02)	4.023342(-02)	4.793619(-02)	3.999932(-02)	3.032158(-02)
0.5		1.164094(-02)	2.091553(-02)	3.342765(-02)	4.297860(-02)	3.829354(-02)	3.103518(-02)
0.6		9.715089(-03)	1.754335(-02)	2.840505(-02)	3.837079(-02)	3.581263(-02)	3.050529(-02)
0.7		8.333763(-03)	1.507268(-02)	2.456246(-02)	3.424085(-02)	3.303868(-02)	2.922293(-02)
0.8		7.305636(-03)	1.320040(-02)	2.154513(-02)	3.058250(-02)	3.020936(-02)	2.749980(-02)
0.9		6.521680(-03)	1.174952(-02)	1.913278(-02)	2.735361(-02)	2.744338(-02)	2.553070(-02)
1.0		5.915699(-03)	1.061087(-02)	1.718419(-02)	2.451104(-02)	2.480407(-02)	2.344188(-02)

Tabela 4.5 – Parâmetro de Stokes $\mathcal{Q}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

μ	$\tau = 0$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.75$	$\tau = 1$
-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
-0.9	-5.989079(-03)	-5.284941(-03)	-4.650425(-03)	-3.596120(-03)	-1.603998(-03)	-6.428755(-04)	
-0.8	-9.136256(-03)	-8.089223(-03)	-7.141968(-03)	-5.561547(-03)	-2.541733(-03)	-1.044796(-03)	
-0.7	-1.210789(-02)	-1.075628(-02)	-9.528812(-03)	-7.473316(-03)	-3.504589(-03)	-1.481037(-03)	
-0.6	-1.518591(-02)	-1.353597(-02)	-1.203210(-02)	-9.506003(-03)	-4.583888(-03)	-1.998963(-03)	
-0.5	-1.852523(-02)	-1.656774(-02)	-1.477732(-02)	-1.176340(-02)	-5.850795(-03)	-2.648282(-03)	
-0.4	-2.225950(-02)	-1.997277(-02)	-1.787408(-02)	-1.433864(-02)	-7.387692(-03)	-3.504108(-03)	
-0.3	-2.653242(-02)	-2.387925(-02)	-2.143498(-02)	-1.732312(-02)	-9.296681(-03)	-4.697317(-03)	
-0.2	-3.153109(-02)	-2.844681(-02)	-2.558677(-02)	-2.079237(-02)	-1.166791(-02)	-6.469552(-03)	
-0.1	-3.762575(-02)	-3.401281(-02)	-3.059223(-02)	-2.485328(-02)	-1.438185(-02)	-9.148437(-03)	
-0.0	-4.428966(-02)	-4.196080(-02)	-3.743093(-02)	-3.017620(-02)	-1.721724(-02)	-1.169109(-02)	
0.0		-4.196080(-02)	-3.743093(-02)	-3.017620(-02)	-1.721724(-02)	-1.169109(-02)	-7.599560(-03)
0.1		-1.692891(-02)	-2.562950(-02)	-3.026456(-02)	-2.080350(-02)	-1.410552(-02)	-9.663228(-03)
0.2		-9.400196(-03)	-1.584685(-02)	-2.251159(-02)	-2.161840(-02)	-1.624569(-02)	-1.168672(-02)
0.3		-6.364510(-03)	-1.115195(-02)	-1.706947(-02)	-1.981489(-02)	-1.663258(-02)	-1.293287(-02)
0.4		-4.689408(-03)	-8.376951(-03)	-1.333730(-02)	-1.733976(-02)	-1.577947(-02)	-1.313935(-02)
0.5		-3.596503(-03)	-6.496215(-03)	-1.059240(-02)	-1.483123(-02)	-1.430496(-02)	-1.256841(-02)
0.6		-2.798768(-03)	-5.089476(-03)	-8.428204(-03)	-1.242898(-02)	-1.251813(-02)	-1.146858(-02)
0.7		-2.161063(-03)	-3.945982(-03)	-6.602908(-03)	-1.011327(-02)	-1.053095(-02)	-9.974177(-03)
0.8		-1.602043(-03)	-2.932087(-03)	-4.940786(-03)	-7.786117(-03)	-8.324632(-03)	-8.100285(-03)
0.9		-1.043098(-03)	-1.911135(-03)	-3.235087(-03)	-5.210147(-03)	-5.690976(-03)	-5.662908(-03)
1.0		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 4.6 – Parâmetro de Stokes $\mathcal{U}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

μ	$\tau = 0$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.75$	$\tau = 1$
-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
-0.9	-5.686318(-05)	-5.546198(-05)	-5.243844(-05)	-4.501349(-05)	-2.399596(-05)	-1.020288(-05)	
-0.8	-6.804632(-05)	-6.819193(-05)	-6.582690(-05)	-5.832373(-05)	-3.320377(-05)	-1.495649(-05)	
-0.7	-6.747537(-05)	-7.023788(-05)	-6.970081(-05)	-6.426076(-05)	-3.941606(-05)	-1.882751(-05)	
-0.6	-5.864124(-05)	-6.480080(-05)	-6.693924(-05)	-6.509869(-05)	-4.362407(-05)	-2.217624(-05)	
-0.5	-4.269122(-05)	-5.290332(-05)	-5.844177(-05)	-6.151680(-05)	-4.608555(-05)	-2.511721(-05)	
-0.4	-1.977840(-05)	-3.465127(-05)	-4.428396(-05)	-5.353848(-05)	-4.675051(-05)	-2.769154(-05)	
-0.3	1.075424(-05)	-9.394449(-06)	-2.386570(-05)	-4.064774(-05)	-4.525688(-05)	-2.988059(-05)	
-0.2	5.056465(-05)	2.449689(-05)	4.278597(-06)	-2.165271(-05)	-4.067042(-05)	-3.146130(-05)	
-0.1	1.026971(-04)	7.034057(-05)	4.305791(-05)	5.518363(-06)	-3.104368(-05)	-3.093557(-05)	
-0.0	1.573775(-04)	1.363868(-04)	1.001299(-04)	4.593425(-05)	-1.550890(-05)	-2.204526(-05)	
0.0		1.363868(-04)	1.001299(-04)	4.593425(-05)	-1.550890(-05)	-2.204526(-05)	-2.788256(-05)
0.1		5.391672(-05)	7.660642(-05)	7.231285(-05)	8.035971(-06)	-8.577757(-06)	-1.262277(-05)
0.2		2.555739(-05)	4.168195(-05)	5.148971(-05)	2.330730(-05)	6.637685(-06)	1.080905(-05)
0.3		1.306814(-05)	2.271322(-05)	3.163992(-05)	2.309990(-05)	1.438805(-05)	1.174623(-05)
0.4		5.632481(-06)	1.035027(-05)	1.571112(-05)	1.563508(-05)	1.443526(-05)	1.670555(-05)
0.5		6.427574(-07)	1.570724(-06)	3.011520(-06)	5.515452(-06)	9.597480(-06)	1.651169(-05)
0.6		-2.796004(-06)	-4.744031(-06)	-6.870369(-06)	-4.862443(-06)	2.307302(-06)	1.266817(-05)
0.7		-5.004313(-06)	-8.968145(-06)	-1.393443(-05)	-1.388319(-05)	-5.487211(-06)	6.767162(-06)
0.8		-6.011041(-06)	-1.103759(-05)	-1.774025(-05)	-1.996664(-05)	-1.192774(-05)	4.325694(-07)
0.9		-5.516443(-06)	-1.030155(-05)	-1.696555(-05)	-2.063420(-05)	-1.447855(-05)	-4.307953(-06)
1.0		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 4.7 – Parâmetro de Stokes $\mathcal{V}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

Os resultados apresentados nas tabelas (4.4) a (4.7) concordam com os resultados da literatura [Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989] em até cinco dígitos significativos,

exceto no parâmetro \mathcal{V} onde é observada uma concordância máxima de quatro algarismos significativos.

μ	$\tau = 0$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.75$	$\tau = 1$
-1.0	5.386627(-02)	4.786305(-02)	4.265283(-02)	3.431460(-02)	1.949340(-02)	1.279962(-02)	8.746604(-03)
-0.9	5.308138(-02)	4.798069(-02)	4.342617(-02)	3.586644(-02)	2.119759(-02)	1.371484(-02)	8.746604(-03)
-0.8	5.868359(-02)	5.332469(-02)	4.846788(-02)	4.027764(-02)	2.382025(-02)	1.496494(-02)	8.746604(-03)
-0.7	6.564848(-02)	5.988479(-02)	5.459560(-02)	4.557102(-02)	2.697242(-02)	1.651223(-02)	8.746604(-03)
-0.6	7.367208(-02)	6.744975(-02)	6.167156(-02)	5.171545(-02)	3.076333(-02)	1.846285(-02)	8.746604(-03)
-0.5	8.274647(-02)	7.605234(-02)	6.975858(-02)	5.881979(-02)	3.538526(-02)	2.099470(-02)	8.746604(-03)
-0.4	9.292410(-02)	8.577956(-02)	7.896620(-02)	6.703308(-02)	4.111695(-02)	2.441154(-02)	8.746604(-03)
-0.3	1.042018(-01)	9.667109(-02)	8.935454(-02)	7.645591(-02)	4.831679(-02)	2.926237(-02)	8.746604(-03)
-0.2	1.163899(-01)	1.086008(-01)	1.007958(-01)	8.694547(-02)	5.723899(-02)	3.657333(-02)	8.746604(-03)
-0.1	1.290988(-01)	1.214329(-01)	1.131146(-01)	9.804677(-02)	6.705064(-02)	4.773350(-02)	8.746604(-03)
-0.0	1.377023(-01)	1.362991(-01)	1.272329(-01)	1.105645(-01)	7.593140(-02)	5.797431(-02)	8.746604(-03)
0.0		1.362991(-01)	1.272329(-01)	1.105645(-01)	7.593140(-02)	5.797431(-02)	4.051765(-02)
0.1		5.200046(-02)	8.149058(-02)	1.025979(-01)	8.506498(-02)	6.602035(-02)	4.981675(-02)
0.2		2.806611(-02)	4.899723(-02)	7.391804(-02)	8.365381(-02)	7.144680(-02)	5.716689(-02)
0.3		1.859537(-02)	3.382476(-02)	5.508367(-02)	7.483245(-02)	7.069652(-02)	6.090090(-02)
0.4		1.353585(-02)	2.517562(-02)	4.280009(-02)	6.519366(-02)	6.648342(-02)	6.109762(-02)
0.5		1.041674(-02)	1.964852(-02)	3.435211(-02)	5.662338(-02)	6.115689(-02)	5.920928(-02)
0.6		8.354686(-03)	1.590575(-02)	2.835211(-02)	4.950687(-02)	5.588986(-02)	5.641993(-02)
0.7		6.979622(-03)	1.336098(-02)	2.412289(-02)	4.392422(-02)	5.130837(-02)	5.355372(-02)
0.8		6.162903(-03)	1.181310(-02)	2.145202(-02)	4.008463(-02)	4.796646(-02)	5.134302(-02)
0.9		6.031335(-03)	1.150489(-02)	2.079209(-02)	3.891930(-02)	4.702030(-02)	5.103049(-02)
1.0		9.624489(-03)	1.791216(-02)	3.106362(-02)	5.317728(-02)	6.120485(-02)	6.437073(-02)

Tabela 4.8 – Parâmetro de Stokes $\mathcal{J}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \pi$

μ	$\tau = 0$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.75$	$\tau = 1$
-1.0	-2.059651(-02)	-1.679415(-02)	-1.370216(-02)	-9.179327(-03)	-2.872013(-03)	-9.555631(-04)	
-0.9	-8.901905(-03)	-6.880420(-03)	-5.306076(-03)	-3.141620(-03)	-6.601163(-04)	-2.031975(-04)	
-0.8	-3.308491(-03)	-2.004089(-03)	-1.074291(-03)	2.964160(-05)	5.877050(-04)	2.183859(-04)	
-0.7	1.214328(-03)	2.009233(-03)	2.460429(-03)	2.744250(-03)	1.708490(-03)	6.028467(-04)	
-0.6	5.215054(-03)	5.620902(-03)	5.685639(-03)	5.277291(-03)	2.804330(-03)	9.874522(-04)	
-0.5	8.872851(-03)	8.988853(-03)	8.738853(-03)	7.732745(-03)	3.922204(-03)	1.391794(-03)	
-0.4	1.222699(-02)	1.216068(-02)	1.166940(-02)	1.015769(-02)	5.096704(-03)	1.834565(-03)	
-0.3	1.519785(-02)	1.509733(-02)	1.446112(-02)	1.256102(-02)	6.362954(-03)	2.343578(-03)	
-0.2	1.749318(-02)	1.761370(-02)	1.699027(-02)	1.488863(-02)	7.757583(-03)	2.974445(-03)	
-0.1	1.821218(-02)	1.913987(-02)	1.885977(-02)	1.692180(-02)	9.267129(-03)	3.856586(-03)	
-0.0	1.202748(-02)	1.737084(-02)	1.860496(-02)	1.795153(-02)	1.062781(-02)	5.014048(-03)	
0.0		1.737084(-02)	1.860496(-02)	1.795153(-02)	1.062781(-02)	5.014048(-03)	-3.394028(-04)
0.1		4.966851(-03)	9.037514(-03)	1.337171(-02)	1.109101(-02)	5.833452(-03)	1.010384(-03)
0.2		1.827526(-03)	3.906725(-03)	7.197990(-03)	8.634126(-03)	5.332809(-03)	1.349109(-03)
0.3		4.075496(-04)	1.253253(-03)	3.033113(-03)	4.829844(-03)	3.148460(-03)	4.118206(-04)
0.4		-5.059169(-04)	-5.253464(-04)	-4.042431(-05)	9.187588(-04)	8.453148(-05)	-1.602129(-03)
0.5		-1.215161(-03)	-1.921807(-03)	-2.549744(-03)	-2.835239(-03)	-3.348095(-03)	-4.298384(-03)
0.6		-1.840163(-03)	-3.148095(-03)	-4.776841(-03)	-6.443034(-03)	-6.942543(-03)	-7.413020(-03)
0.7		-2.451650(-03)	-4.332650(-03)	-6.911371(-03)	-9.998158(-03)	-1.064924(-02)	-1.081235(-02)
0.8		-3.117776(-03)	-5.597870(-03)	-9.140208(-03)	-1.365730(-02)	-1.451998(-02)	-1.446156(-02)
0.9		-3.958409(-03)	-7.153627(-03)	-1.178019(-02)	-1.773689(-02)	-1.875001(-02)	-1.843763(-02)
1.0		-5.852631(-03)	-1.050347(-02)	-1.702855(-02)	-2.436424(-02)	-2.471218(-02)	-2.340056(-02)

Tabela 4.9 – Parâmetro de Stokes $\mathcal{Q}(\tau, \mu, \varphi)$ para $\varphi - \varphi_0 = \pi$

Comparando os resultados apresentados nas tabelas (4.8) e (4.9) com os resultados

tabulados nas referências [Garcia e Siewert, 1986] e [Garcia e Siewert, 1989] consideradas, é verificada uma concordância de até quatro dígitos significativos.

Com respeito ao grau de polarização

$$P = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{J}, \quad (4.2)$$

considerando, por exemplo, $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ e a localização ótica $\tau = 1$, os resultados concordam com os valores referenciais dentro de ± 5 no penúltimo dígito.

A tabela abaixo resume o desempenho do código desenvolvido. A máxima diferença percentual verificada em relação aos resultados da literatura é indicada por ε , sem considerar os extremos $\mu = \pm 1$ e $\mu = 0$ extrapolados.

Referências	tabela	$ \varepsilon $
[Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989]	(4.2)	1.47%
[Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989]	(4.3)	0.49%
[Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989]	(4.4)	1.18%
[Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989]	(4.5)	1.28%
[Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989]	(4.6)	1.28%
[Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989]	(4.7)	2.20%
[Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989]	(4.8)	1.14%
[Garcia e Siewert, 1986] [Garcia e Siewert, 1989]	(4.9)	1.29%

Tabela 4.10 – Grau de precisão dos resultados obtidos

Com essa análise de resultados fica claro que a solução desenvolvida foi testada com sucesso.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

A comparação entre os valores encontrados, utilizando o método \mathcal{LTS}_N com quadratura de ordem $N = 150$, e os valores da literatura, usados neste trabalho como referenciais, mostra uma concordância cujo erro relativo é inferior a 2.5%. Essa acuidade dos resultados apresentados permite afirmar que a versão presente do código tem precisão e confiabilidade necessárias para fazer desta formulação uma ferramenta útil para uma variedade de aplicações que requerem a resolução de problemas que envolvem radiação polarizada. É esperada uma melhora nos resultados quando for implementada a versão para μ contínuo, da mesma forma que ocorreu no caso escalar.

A formulação apresentada tem a vantagem adicional de possuir o mesmo comportamento de diagonalização apresentado pela matriz \mathcal{LTS}_N no caso escalar. No caso com polarização a matriz associada à solução possui autovalores complexos quase repetidos mas não-degenerados, desta forma o método da diagonalização também mostra-se efetivo na inversão dessa matriz.

Assim, as principais contribuições originadas durante o desenvolvimento deste trabalho podem ser resumidas em:

- Manutenção das características focalizadas desde a origem do método, isto é, uma formulação simples com aplicabilidade a uma classe abrangente de problemas.
- Manutenção das mesmas vantagens adicionais do método \mathcal{LTS}_N escalar, ou seja, aplicabilidade a qualquer fonte, através do cálculo de convoluções, e favorecimento ao processamento paralelo.

- Obtenção do esquema da diagonalização para autovalores complexos. O caso escalar é um caso particular deste aqui desenvolvido.

- Obtenção do avanço proposto para o método \mathcal{LTS}_N e fechamento do ciclo de aplicações unidimensionais do método em placa plana e geometria esférica.

Pelo exposto, é entendido que os objetivos deste trabalho tenham sido alcançados a contento.

A formulação foi generalizada mantendo-se que a solução da aproximação de ordenadas discretas da equação de transferência radiativa com polarização é feita de forma analítica.

Finalmente, outras abordagens podem ser pensadas como sugestões de futuros trabalhos:

- Aperfeiçoamento do código computacional.
- Resolução de problemas de multicamadas planas com condições contínuas de interface.
- Extensão da prova da convergência, da teoria escalar para a teoria vetorial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, C. N. and Kattawar, G. W., 1970. "Solutions of the equations of radiative transfer by an invariant imbedding approach", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 10(5), pp. 341–356.

Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Demmel, J., Dongarra, J., Croz, J. D., Greenbaum, A., Hammarling, S., McKenney, A., Ostrouchov, S., and Sorenson, D., 1992. "LAPACK User's guide", **Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia**.

Barichello, L. B., 1992. "**Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Barichello, L. B., 1995, "**Comunicação Pessoal**".

Barichello, L. B. and Siewert, C. E., 1999a. "A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 62(6), pp. 665–675.

Barichello, L. B. and Siewert, C. E., 1999b. "A Discrete-Ordinates Solution For A Polarization Model With Complete Frequency Redistribution", **The Astrophysical Journal**, vol. 513(1), pp. 370–382.

Barichello, L. B. and Vilhena, M. T. M. B., 1991. "An Analytical Solution for the One-Dimensional Discrete Problem Using Laplace Transform", **XIV CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional–Nova Friburgo, RJ**.

Barichello, L. B. and Vilhena, M. T. M. B., 1993a. "A General Approach to the One Group One Dimensional Transport Equation", **Kerntechnik**, vol. 58(3), pp. 182–184.

Barichello, L. B. and Vilhena, M. T. M. B., 1993b. "Um Problema Inverso em Transporte de Nêutrons e Radiação", **Anais do IX ENFIR- Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica—Caxambu, MG**, pages 22–24.

Barros, R. C., Cardona, A. V., and Vilhena, M. T. M. B., 1996. "Analytical numerical methods applied to linear discontinuous angular approximations of the transport equation in slab geometry", **Kerntechnik**, vol. 61(2-3), pp. 111–116.

Barros, R. C. and Larsen, E. W., 1990. "A Numerical Method for One-Group Slab Geometry Discrete Ordinates Problems With no Spatial Truncation Error", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 104, pp. 199–208.

Barros, R. C. and Larsen, E. W., 1992. "A spectral nodal method for one-group, x,y-geometry discrete ordinates problems", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 111, pp. 34–45.

Barroso, P., 2000. "**Cálculo do Problema de Multigrupo pelo Método LTS_N** ", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Bastos, E. J. B., Souza, R. A. F., and Avala, R. C. S., 2000. "Emissividade da superfície sobre Brasil a partir de observações do SSM/I em 19GHz e 85GHz", **Revista Brasileira de Geofísica**, vol. 18(2), pp. 147–160.

Batistela, C. H. F., Vilhena, M. T. M. B., and Borges, V., 1996. "Cálculo do Fator de Multiplicação K_{eff} pelo Método LTS_N ", **EGATEA-Revista da Escola de Engenharia/UFRGS**, vol. 24(01), pp. 101–111.

Batistela, C. H. F., Vilhena, M. T. M. B., and Borges, V., 1997a. "Cálculo de Criticidade pelo Método LTS_N ", **Anais do XI ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica—Poços de Caldas, MG**, vol. 1, pp. 226–231.

Batistela, C. H. F., Vilhena, M. T. M. B., and Borges, V., 1997b. "Criticality by the LTS_N Method", **Journal of Nuclear Science and Technology**, vol. 34(6), pp. 603–606.

Batistela, C. H. F., Vilhena, M. T. M. B., and Borges, V., 1999. "Determination of the Effective Multiplication Factor in a Slab by the LTS_N Method", **Annals of Nuclear Science**, vol. 26, pp. 761–767.

Bell, G. I. and Glasstone, S., 1985. "**Nuclear Reactor Theory**". Krieger Publishing Company, Malabar, Florida.

Bellmann, R. and Wing, G. M., 1992. "An Introduction to Invariant Inbedding Classic in Applied Mathematics", **Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)**.

Benassi, M., Garcia, R. D. M., Karp, A. H., and Siewert, C. E., 1984a. "A High-Order Spherical Harmonics Solution to the Standart Problem in Radiative Transfer", **The Astrophysical Journal**, vol. 280, pp. 853–864.

Benassi, M., Garcia, R. D. M., and Siewert, C. E., 1984b. "On Eigenvalue Calculations for Radiative Transfer Models that Include Polarization Effects", **Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)**, vol. 35, pp. 308–320.

Benassi, M., Garcia, R. D. M., and Siewert, C. E., 1985. "A Generalized Spherical Harmonics Solution Basic to the Scattering of Polarized Light", **Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)**, vol. 36, pp. 70–88.

Boltzmann, L., 1964. "**Lectures on Gas Theory**". University of California Press, Berkeley. Translated by S. G. Brush.

Borges, V. and Vilhena, M. T. M. B., 2002. "Uso do Método LTS_N Aplicado a Problemas de Engenharia Nuclear", **INAC: International Nuclear Atlantic Conference/ XIII ENFIR**.

Braak, J., de Haan, J. F., van der Mee, C. V. M., Hovenier, J. W., and Travis, L. D., 2001. "Parameterized scattering matrices for small particles in planetary atmospheres", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 69(5), pp. 585–604.

Brancher, J. D., 1998. **"Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenadas Discretas pelo Método LTS_N , para Valores de N Grandes"**, Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Brancher, J. D., Cardona, A. V., and Vilhena, M. T. M. B., 1998. "A Recursive Method to Invert the LTS_N Matrix", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 33(4), pp. 393–401.

Brancher, J. D., Vilhena, M. T. M. B., and Segatto, C. F., 1999. "The LTS_N Solution for Radiative Transfer Problem Without Azimuthal Symmetry With Severe Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 62(6), pp. 743–753.

Burden, R. L. and Faires, D. J., 1985. **"Numerical Analysis"**. PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Cardona, A. V., 1996. **"Método Genérico de Solução Analítica para as Aproximações da Equação Linear de Transporte"**, Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Cardona, A. V., Segatto, C. F., and Vilhena, M. T. M. B., 1996. "Solução da Equação Bidimensional de Transporte pelo Método $LTCh_N$ ", **VI CEGEN - VI Congresso Nacional de Energia Nuclear—Rio de Janeiro, RJ**.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1993. "As funções de Walsh e sua Aplicação na Solução da Equação de Transporte de Nêutrons", **Anais do IX ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica—Caxambu, MG**, pages 37–41.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1994b. "A Solution of Linear Transport Equation Using Chebyshev Polynomials and Laplace Transform", **Kerntechnik**, vol. 59(6), pp. 278–281.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1994a. "A Solution of Linear Transport Equation Using Walsh Function and Laplace Transform", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21(8), pp. 495–505.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1995. "Solução Analítica da Aproximação A_N da Equação de Transporte Linear com Simetria Planar", **Anais do X ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica—Águas de Lindóia, SP**, pages 528–531.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1997. "Analytical Solution for A_N Approximation", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 31(3), pp. 219–223.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1998. "A Comparative Study of Analytical Solutions for Some One-Dimensional Transport Equation Approximations", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 33(3), pp. 289–300.

Case, K. M., 1960. "Elementary Solutions of the Transport Equation and Their Applications", **Annals of Physics**, vol. 9, pp. 1–23.

Case, K. M. and Zweifel, P. F., 1967. "**Linear Transport Theory**". Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Chalhoub, E. S. and Garcia, R. D. M., 1997. "On the solution of azimuthally dependent transport problems with the ANISN code", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 24, pp. 1069–1084.

Chalhoub, E. S. and Garcia, R. D. M., 1998. "A new quadrature scheme for solving azimuthally dependent transport problems", **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 27, pp. 607–624.

Chalhoub, E. S., Velho, H. F. C., Vilhena, M. T. M. B., and Garcia, R. D. M., 2003. "A Comparison of Radiances Generated by Selected Methods of Solving the Radiative-transfer Equation", **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 32(5-6), pp. 469–499.

Chandrasekhar, S., 1950. "**Radiative Transfer**". Oxford University Press, London.

Chapman, S. J., 1998. "**Fortran 90/95 for Scientists and Engineers**". WCB McGraw-Hill, Boston, Massachusetts.

Chies, R. P., 1996. "**Cálculo da espessura de blindagem pela combinação do método LTS_N e decomposição**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Chowdhary, J., Cairns, B., Mishchenko, M., and Travis, L., 2001. "Retrieval of aerosol properties over the ocean using multispectral and multiangle photopolarimetric measurements from the Research Scanning Polarimeter", **Geophysical Research Letters**, vol. 28, pp. 243–246.

Collins, D. G., Blattner, W. G., Wells, M. B., and Horak, H. G., 1972. "Backward Monte Carlo calculations of the polarization characteristics of the radiation emerging from spherical-shell atmospheres", **Applied Optics**, vol. 11, pp. 2684–2696.

da Cunha, R. D., 1997, "**Comunicação Pessoal**".

Dave, J. V., 1970. "Intensity and polarization of the radiation emerging from a plane-parallel atmosphere containing monodispersed aerosols", **Applied Optics**, vol. 9.

Davies, B. and Martin, B., 1979. "Numerical inversion of the Laplace transform: A survey and comparison of methods", **Journal of Computational Physics**, vol. 33, pp. 1–32.

Davison, B., 1957. "**Neutron Transport Theory**". Oxford University Press, Oxford.

de Haan, J., Bosma, P. B., and Hovenier, J. W., 1987. "The adding method for multiple scattering calculations of polarized light", **Astronomy and Astrophysics**, vol. 183, pp. 371–391.

de Haan, J. F., Hovenier, J. W., Kokke, J. M. M., and van Stokkom, H. T. C., 1991. "Removal of atmospheric influences on satellite-borne imagery: A radiative transfer approach", **Remote Sensing of Environment**, vol. 37(1), pp. 1–21.

de Rooij, W. A. and van der Stap, C. C. A. H., 1984. "Expansion of Mie Scattering Matrices in Generalized Spherical Functions", **Astronomy and Astrophysics**, vol. 131, pp. 237–248.

Demidovich, B. P. and Maron, J. A., 1987. "**Computational Mathematics**". MIR, Moscow.

Deuzé, J. L., Bréon, F. M., Deschamps, P. Y., Devaux, C., Herman, M., Podaire, A., and Roujean, J. L., 1993. "Analysis of the POLDER (polarization and directionality of earth's reflectance) airborne instrument observations over land surfaces", **Remote Sensing of Environment**, vol. 45(2), pp. 137–154.

Devaux, C. and Siewert, C. E., 1980. "The F_N Method for Radiative Transfer Problems Without Azimutal Symmetry", **Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)**, vol. 31, pp. 592–604.

Dittmann, O. J., 1997. "Matrix Exponential Solution of the Equation of Polarized Radiative Transfer", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 58(2), pp. 279–286.

Domke, H., 1975a. "Transfer of polarized light in an isotropic medium: Biorthogonality and the solution of transfer problems in semi infinite media", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 15(7-8), pp. 681–694.

Domke, H., 1975b. "Transfer of polarized light in an isotropic medium: Singular eigensolutions of the transfer equation", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 15(7-8), pp. 669–679.

Domke, H., 1976. "Reduction of radiative transfer problems in semi-infinite media to linear Fredholm integral equations", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 16(11), pp. 973–982.

Domke, H. and Yanovitskij, E. G., 1986. "Principles of invariance applied to the computation of internal polarized radiation in multilayered atmospheres", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 36(3), pp. 175–186.

Duderstadt, J. J. and Hamilton, L. J., 1976. "**Nuclear Reactor Analysis**". John Wiley & Sons, Inc., New York.

Duderstadt, J. J. and Martin, W. R., 1979. "**Transport Theory**". John Wiley & Sons, Inc., New York.

Ellis, T. M. R., Philips, I. R., and Lahey, T. M., 1998. "**Fortran 90 Programming**". Addison-Wesley, Harlow, England.

Fouquart, Y., Bonnel, B., and Ramaswamy, V., 1991. "Intercomparing shortwave radiation codes for climate studies", **Journal of Geophysical Research**, vol. 96(D5), pp. 8955–8968.

Garcia, R. D. M., 1985. "A Review of the facile (F_N) Method in Particle Transport Theory", **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 14(4), pp. 391–435.

Garcia, R. D. M. and Siewert, C. E., 1986. "A Generalized Spherical Harmonics Solution For Radiative Transfer Models That Include Polarization Effects", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 36(5), pp. 401–423.

Garcia, R. D. M. and Siewert, C. E., 1987. "The Discrete Spectrum for Radiative Transfer with Polarization", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 38(4), pp. 295–301.

Garcia, R. D. M. and Siewert, C. E., 1989. "The F_N Method For Radiative Transfer Models That Include Polarization Effects", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 41(2), pp. 117–145.

Gel'fand, I. M. and Šapiro, Z. Y., 1956. "Representations of the Group of Rotations of 3-dimensional Space and their Applications", **Amer. Math. Soc. Translations**, vol. 2(s.2), pp. 207.

Golub, G. H. and van Loan, C. F., 1989. "**Matrix Computations**". Johns Hopkins University Press, London.

Gomes, M. G., 1999. "**Métodos de Inversão Matricial para $(sA + B)$ em Problemas de Transporte de Nêutrons**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-

Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Gonçalves, G. A., 1999. "**Solução LTS_N da Equação Adjunta de Transporte de Nêutrons com Fonte Arbitrária para Elevada Ordem de Quadratura numa Placa Homogênea**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Gonçalves, G. A., Orengo, G., Vilhena, M. T. M. B., and Graça, C. O., 2002. " LTS_N solution of the adjoint neutron transport equation with arbitrary source for high order of quadrature in a homogeneous slab", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 29(5), pp. 561–569.

Gonçalves, G. A., Segatto, C. F., and Vilhena, M. T. M. B., 2000. "The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 66(3), pp. 271–276.

Halliday, D. and Resnick, R., 1984. "**Física 4**". Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., ed. 4, Rio de Janeiro, RJ.

Halliday, D., Resnick, R., and Walker, J., 1997. "**Fundamentos de Física 4: Ótica e Física Moderna**". Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., ed. 4, Rio de Janeiro, RJ.

Hansen, J. E. and Hovenier, J. W., 1974. "Interpretation of the polarization of Venus", **Journal of the Atmospheric Sciences**, vol. 31, pp. 1137–1160.

Hansen, J. E. and Travis, L. D., 1974. "Light scattering in planetary atmosphere", **Space Sci. Rev.**, vol. 16, pp. 527–610.

Hauser, E. B., 2002. "**Estudo de Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Bidimensional pelo Método LTS_N para Elevadas Ordens de Quadraturas Angulares: LTS_N 2D-Diag e LTS_N 2D-DiagExp**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Herman, M., 1965. **Comptes Rendus de L'Académie des Sciences Paris**, vol. 260, pp. 468.

Herman, M., Caudill, T., Flittner, D., Thome, K., and Ben-David, A., 1995. "Comparison of the Gauss-Seidel spherical polarized radiative transfer code with other radiative transfer codes", **Applied Optics**, vol. 34(21), pp. 4563–4572.

Herman, M. and Lenoble, J., 1968. "Asymptotic radiation in a scattering and absorbing medium", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 8(1), pp. 355–367.

Hoffmann, R. K., 2003. "**Solução LTS_N em uma placa plana com dependência angular contínua, fonte arbitrária e elevadas ordens de quadratura**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Hovenier, J. W., 1969. **Journal of the Atmospheric Sciences**, vol. 26, pp. 488.

Hovenier, J. W., 1971. "Multiple scattering of polarized light in planetary atmospheres", **Astronomy and Astrophysics**, vol. 13, pp. 7–29.

Hovenier, J. W., van de Hulst, H. C., and van der Mee, C. V. M., 1986. **Astronomy and Astrophysics**, vol. 157, pp. 301.

Hovenier, J. W. and van der Mee, C. V. M., 1983. "Fundamental relationships relevant to the transfer of polarized light in a scattering atmosphere", **Astronomy and Astrophysics**, vol. 128, pp. 1–16.

Hovenier, J. W. and van der Mee, C. V. M., 1988a. "Relations for the elements of matrices appearing in polarized light transfer", **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 17, pp. 209–224.

Hovenier, J. W. and van der Mee, C. V. M., 1988b. "Scattering of polarized light: Properties of the elements of the phase matrix", **Astronomy and Astrophysics**, vol. 196, pp. 287–295.

Hovenier, J. W. and van der Mee, C. V. M., 1990. "Expansion coefficients in polarized light transfer", **Astronomy and Astrophysics**, vol. 228, pp. 559–568.

Hovenier, J. W. and van der Mee, C. V. M., 1995. "Bounds for the degree of polarization", **Optics Letters**, vol. 20, pp. 2454–2456.

Hovenier, J. W. and van der Mee, C. V. M., 1996. "Testing Scattering matrices: A compendium of recipes", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 55(5), pp. 649–661.

Hovenier, J. W. and van der Mee, C. V. M., 1999. "In: **Light Scattering by Non-spherical Particles: Theory, Measurements, and Applications. Chapter 3: Basic relationships for matrices describing scattering by small particles**". Addison-Wesley, M.I. Mishchenko, J.W. Hovenier, and L.D. Travis (Eds.), New York.

Hovenier, J. W. and van der Mee, C. V. M., 2002. "In: **Encyclopaedia of Mathematics, M. Hazewinkel (managing editor), Supplement III: Stokes parameters**". Kluwer Academic Publishers.

IMSL Library, 1995. "Fortran Powerstation Issue". Microsoft.

Ito, S., 1972. "A new method for analysis of pulsed fast Newton experiments", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 49, pp. 548–567.

Kreider, D. L., Kuller, R. G., Ostberg, D. R., and Perkins, F. W., 1972. "Introdução à Análise Linear: 1-Equações Diferenciais Lineares. 2-Séries de Fourier. 3-Problemas de Valores de Contorno". Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro.

Kruse, F., 1998. "Cálculo do Fator de Utilização Térmica de um Reator Nuclear Através do Método LTS_N ", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Kuik, F., de Haan, J. F., and Hovenier, J. W., 1992. "Benchmark Results For Single Scattering By Spheroids", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 47(6), pp. 477–489.

Kuščer, I. and Ribarič, M., 1959. "Matrix Formalism in the Theory of Diffusion of Light", **Optica Acta**, vol. 6, pp. 42–51.

Kuščer, I. and Zweifel, P. F., 1965. "Time dependent one-speed albedo problem for a semi-infinite medium", **Journal of Mathematical Physics**, vol. 6, pp. 1125–1130.

Landi Degl'Innocenti, E., 1983. "Polarization in spectral lines. I- A unifying theoretical approach. II- A classification scheme for solar observations", **Solar Physics**, vol. 85, pp. 3–31.

Lemos, R. M., 2000. "**Solução da Equação de Transferência Radiativa Conduativa em Placa Plana pelo Método da Decomposição e LTS_2** ", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Lenoble, J., 1961. **Comptes Rendus de L'Académie des Sciences Paris**, vol. 52, pp. 3562.

Lewis, E. E. and W. F. Miller, J., 1984. "**Computational Methods of Neutron Transport**". John Wiley & Sons, Inc., New York.

Liou, K. N., 1980. "**An Introduction to Atmospheric Radiation**". Academic Press, Inc., New York.

Liou, K. N. and Takano, Y., 1994. "Light scattering by nonspherical particles: remote sensing and climatic implications", **Atmospheric Research**, vol. 31(4), pp. 271–298.

Liu, C. C. and Dougherty, R. L., 1999. "Development of Radiative Transfer Equations for the Scattering of polarized Light in a Plane-Parallel Medium", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 61(1), pp. 1–18.

Lorenzi, R. M. P., 1996. "**Estudo da criticalidade em uma placa plana pelo método LTS_N** ", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Mark, J. C., 1945. "**The spherical harmonic method II**". Report MT97, National Research Council of Canada, Atomic Energy Project, Ottawa, Canada.

McCormick, N. J. and Sanchez, R., 1983. "Solutions to an inverse problem in radiative transfer with polarization - II", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 30(6), pp. 527–535.

Mishchenko, M. I., 1990. "The fast invariant imbedding method for polarized light: Computational aspects and numerical results for Rayleigh scattering", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 43(2), pp. 163–171.

Mishchenko, M. I., 1991a. "Infrared absorption by shape distributions of NH_3 ice particles: An application to the Jovian atmosphere", **Earth Moon and Planets**, vol. 53, pp. 149–156.

Mishchenko, M. I., 1991b. "Reflection of polarized light by plane-parallel slabs containing randomly-oriented, nonspherical particles", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 46(3), pp. 171–181.

Mishchenko, M. I., 1993. "Light scattering by size-shape distributions of randomly oriented axially symmetric particles of a size comparable to a wavelength", **Applied Optics**, vol. 32, pp. 4652–4665.

Mishchenko, M. I., 1994. "Transfer of polarized infrared radiation in optically anisotropic media: Application to horizontally oriented ice crystals: Comment", **J. Opt. Soc. Amer.**, vol. A11, pp. 1376–1377.

Mishchenko, M. I., 1996. "Diffuse and coherent backscattering by discrete random media - I: Radar reflectivity, polarization ratios, and enhancement factors for a half-space of polydisperse, nonabsorbing and absorbing spherical particles", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 56(5), pp. 673–702.

Mishchenko, M. I., Lacis, A. A., and Travis, L. D., 1994. "Errors induced by the neglect of polarization in radiance calculations for Rayleigh-scattering atmospheres", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 51(3), pp. 491–510.

Mishchenko, M. I. and Travis, L. D., 1994. "Light scattering by polydisperse rotationally symmetric nonspherical particles: Linear polarization", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 51, pp. 759–778.

Mishchenko, M. I. and Travis, L. D., 1997. "Satellite retrieval of aerosol properties over the ocean using polarization as well as intensity of reflected sunlight", **Journal of Geophysical Research**, vol. 102, pp. 16989–17013.

Mueller Jr., D. W. and Crosbie, A. L., 1997. "Three-Dimensional Radiative Transfer With Polarization In A Multiple Scattering Medium Exposed To Spatially Varying Radiation", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 57(1), pp. 81–105.

Nussenzveig, H. M., 1996. "**Curso de Física Básica 4: Ótica, Relatividade e Física Quântica**". Editora Edgar Blücher, ed. 1, São Paulo, SP.

Oliveira, J. V. P., 1993. "**Formulação LTS_N para o Problema de Ordenada Discreta com Anisotropia**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Oliveira, J. V. P., Agostini, M. N., Barichello, L. B., and Vilhena, M. T. M. B., 1993. "Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional de Transporte de Nêutrons com Espalhamento Anisotrópico", **Anais do IX ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica—Caxambu, MG**, pages 72–77.

Oliveira, J. V. P., Cardona, A. V., Vilhena, M. T. M. B., and Barros, R. C., 2002. "A Semi-Analytical Numerical Method for Time-Dependent Radiative Transfer Problems in a Slab Geometry with Coherent Isotropic Scattering", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 73(1), pp. 55–62.

Orengo, G., 2002. "**Recentes Avanços e Desenvolvimento de um Código Computacional para o Método LTS_N em uma Placa Plana**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Pazos, R. P., 1999. "**Estudo de Convergência em Teoria de Transporte de Partículas Neutras**", Tese de doutorado, Engenharia Metalúrgica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Pazos, R. P., Hauser, E. B., and Vilhena, M. T. M. B., 2003. "Advances in the solution of three-dimensional nodal neutron transport equation", **11th International Conference on Nuclear Engineering, Tokyo**.

Pazos, R. P. and Vilhena, M. T. M. B., 1999a. "Convergence in Transport Theory", **Applied Numerical Mathematics**, vol. 30(1), pp. 79–92.

Pazos, R. P. and Vilhena, M. T. M. B., 1999b. "Convergence of the Spectral Approximations for Steady-State Two-dimensional Transport Problem", **Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications—International Conference, Madrid, Spain**, vol. 2, pp. 1965–1976.

Pazos, R. P. and Vilhena, M. T. M. B., 1999c. "Convergence of the LTS_N Method: Approach of C_0 Semigroups", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 34(1), pp. 77–86.

Pazos, R. P., Vilhena, M. T. M. B., and Hauser, E. B., 2002. "Solution and Study of Two-Dimensional Nodal Neutron Transport Equation", **10th International Conference on Nuclear Engineering - Proceedings of ICONE 10—Arlington, EUA**, vol. 1.

Prigent, C., Pardo, J. R., Mishchenko, M. I., and Rossow, W. B., 2001. "Microwave polarized scattering signatures in clouds: Special Sensor Microwave/Imager (SSM/I) observations interpreted with radiative transfer simulations", **Journal of Geophysical Research**, vol. 106, pp. 28243–28258.

Reguigui, N. M., Dorri-Nowkooorani, F., Nobbmann, U., Ackerson, B. J., and Dougherty, R. L., 1995. "Correlation Transfer: A Preliminary Investigation of the Polarization Effects", **29th Thermophysics Conference - Proceedings AIAA 95-2025—San Diego, CA**.

Renz, S. P., 1999. "**Solução da Equação de Transferência Radiativa Dependente do Tempo pelos Métodos Espectral e LTS_N** ", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Retamoso, M. R., 2000. "**Reconstrução de condições de fronteira e termo de fonte em ótica hidrológica**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Enge-

nharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Retamoso, M. R., Velho, H. F. C., and Vilhena, M. T. M. B., 2001. "Determining Source Term and Boundary Conditions in Hydrological Optics", **2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, Rio de Janeiro**.

Retamoso, M. R., Vilhena, M. T. M. B., Velho, H. F. C., and Ramos, F. M., 2002. "Estimation of Boundary Conditions in Hydrological Optics", **Applied Numerical Mathematics**, vol. 40(1-2), pp. 87–100.

Schulz, F. M., Stamnes, K., and Weng, F., 1999. "VDISORT: An Improved and Generalized Discrete Ordinate Method for Polarized (VECTOR) Radiative Transfer", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 61(1), pp. 105–122.

Segatto, C. F., 1995. "**Formulação LTS_N para Problemas de Transporte Sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Segatto, C. F., Barichello, L. B., and Vilhena, M. T. M. B., 1994. "Estudo Comparativo de Métodos de Solução da Aproximação S_N da Equação de Transporte Linear", **Anais XVI CNMAC - XVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional—Viória, ES**.

Segatto, C. F. and Vilhena, M. T. M. B., 1994a. "Extension of the LTS_N Formula-tion for Discrete Ordinates Problem Without Azimuthal Symmetry", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21(11), pp. 701–710.

Segatto, C. F. and Vilhena, M. T. M. B., 1994b. "Solução da Equação de Ordenadas Discretas Dependentes do Tempo pelo Método LTS_N ", **Anais VI CGEN—Congresso Geral de Energia Nuclear**.

Segatto, C. F. and Vilhena, M. T. M. B., 1997. "Solução Genérica da Equação de Transporte Unidimensional para Elevadas Ordens de Quadraturas", **Anais do XI ENFIR**

- **Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica—Poços de Caldas, MG**, vol. 1, pp. 238–242.

Segatto, C. F. and Vilhena, M. T. M. B., 1999. "The State-of-the-art of the LTS_N Method", **Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications—International Conference, Proceedings of MC'99, Madrid, Spain**, vol. 2, pp. 1618–1631.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. M. B., and Brancher, J. D., 1999a. "The One-Dimensional LTS_N Formulation for High Degree of Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 61(1), pp. 39–43.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. M. B., and Gomes, M. G., 1999b. "The One-Dimensional LTS_N Solution in a Slab With High Degree of Quadrature", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 26, pp. 925–934.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. M. B., and Pazos, R. P., 2000. "On the Convergence of the Spherical Harmonics Approximations", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 134(1), pp. 114–119.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. M. B., and Tavares, L. S. S., 2001. "The Determination of Radiant Parameters by the LTS_N Method", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 70(2), pp. 227–236.

Siewert, C. E., 1981. "On the Equation of Transfer Relevant to the Scattering of Polarized Light", **The Astrophysical Journal**, vol. 245(3), pp. 1080–1086.

Siewert, C. E., 1982. "On the Phase Matrix Basic to the Scattering of Polarized Light", **Astronomy and Astrophysics**, vol. 109, pp. 195–200.

Siewert, C. E., 1983. "Solutions to an inverse problem in radiative transfer with polarization - I", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 30(6), pp. 523–526.

Siewert, C. E., 1999. "A concise and accurate solution for a polarization model in radiative transfer", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 62, pp. 677–684.

Siewert, C. E., 2000. "A discrete-ordinates solution for radiative-transfer models that include polarization effects", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 64, pp. 227–254.

Siewert, C. E. and McCormick, N. J., 1993. "A particular solution for polarization calculations in radiative transfer", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 50(5), pp. 531–540.

Siewert, C. E. and Pinheiro, F. J. V., 1982. "On the Scattering of Polarized Light", **Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)**, vol. 33, pp. 807–818.

Simch, M. R. R., 2000. "**Solução LTP_N para Problemas de Transporte de Partículas Neutras**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Smith, B. T., Boyle, J. M., Dongarra, J. J., Garbow, B. S., Ikebe, Y., Klema, V. C., and Moler, C. B., 1976. "**Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide**". Springer, Berlin.

Souto, R. P., Velho, H. F. C., Stephany, S., Preto, A. J., Segatto, C. F., and Vilhena, M. T. M. B., 2003. "A Parallel Implementation of the LTS_N Method for a Radiative Transfer Problem", **The 15th Symposium on Computer Architecture and High Performance Computing (SBAC-PAD 2003)** published by IEEE Computer Society, Editors Liria M. Sato, Phillipe O. A. Navaux, Edson T. Midorikawa.

Souza, S. I. S., 1993. "**Determinação de Parâmetros Radiantes pelos Métodos LTS_N e LTP_N para Geometria Planar**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Streck, E. E., 1993. "**Solução Analítica para a Aproximação P_N da Equação de Transporte Linear Unidimensional**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Tavares, L. S. S., 2000. "**Cálculo dos Parâmetros Superficiais de Radiação pelo método LTS_N** ", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Trzaska, Z., 1987. "An Efficient Algorithm for Partial Fraction Expansion of the Linear Matrix Pencil Inverse", **Journal of the Franklin Institute**, vol. 324, pp. 465.

van de Hulst, H. C., 1948. "Scattering in a planetary atmosphere", **Astrophysical Journal**, vol. 107(1), pp. 220–246.

van de Hulst, H. C., 1957. "**Light Scattering by Small Particles**". John Wiley & Sons, Inc., New York.

van de Hulst, H. C., 1983. "**Multiple Light Scattering and Radiative Transfer**", volume 1,2. Academic Press, Inc., New York.

van der Mee, C. V. M., 1986a. "Polarized light transfer above a reflecting surface", **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, vol. 8, pp. 311–327.

van der Mee, C. V. M., 1986b. "Polarized light transfer: Existence and uniqueness of solutions and spectral properties of transfer operators", **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 15, pp. 897–916.

van der Mee, C. V. M., 1986c. "Reflection and transmission of polarized light: The adding method for homogeneous atmospheres", **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, vol. 116, pp. 574–593.

van der Mee, C. V. M., 1993. "An eigenvalue criterion for matrices transforming Stokes parameters", **Journal of Mathematical Physics**, vol. 34, pp. 5072–5088.

van der Mee, C. V. M. and Hovenier, J. W., 1992. "Structure of matrices transforming Stokes parameters", **Journal of Mathematical Physics**, vol. 33, pp. 3574–3584.

Vargas, R. M. F. and Vilhena, M. T. M. B., 1997. "Analytical Solution of the Discrete Ordinates Problem by the Decomposition Method", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 24(10), pp. 785–791.

Vargas, R. M. F. and Vilhena, M. T. M. B., 1998. "A Closed-form Solution for the One-dimensional Radiative Conductive Problem by the Decomposition and LTS_N Methods", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 61(3), pp. 303–308.

Velho, H. F. C., Vilhena, M. T. M. B., Retamoso, M. R., and Pazos, R. P., 2003. "An Application of the LTS_N Method on an Inverse Problem in Hydrologic Optics", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 42(4), pp. 457–468.

Vestrucci, P. and Siewert, C. E., 1984. "A Numerical Evaluation of an Analytical Representation of the Components in a Fourier Decomposition of the Phase Matrix for the Scattering of Polarized Light", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 31(2), pp. 177–183.

Vilhena, M. T. M. B. and Barichello, L. B., 1991a. "Solução Analítica do Problema de Multigrupo de Ordenada Discreta Unidimensional", **XIV CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional–Nova Friburgo, RJ**.

Vilhena, M. T. M. B. and Barichello, L. B., 1991b. "The LTS_N Method: A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation", **Kerntechnik**, vol. 56(5), pp. 334–336.

Vilhena, M. T. M. B. and Barichello, L. B., 1995. "An Analytical Solution for the Multigroup Slab Geometry Discrete Ordinates Problem", **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 24(9), pp. 1337–1352.

Vilhena, M. T. M. B. and Barichello, L. B., 1999. "A Closed-form Solution to the One-dimensional Linear and Nonlinear Radiative Transfer Problem", **Hybrid Methods In Engineering**, vol. 1(1), pp. 1–17.

Vilhena, M. T. M. B., Barichello, L. B., and Segatto, C. F., 1995. "A Particular Solution for the S_N Radiative Transfer Problems", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 53(4), pp. 467–469.

Vilhena, M. T. M. B., Barichello, L. B., and Zabadal, J., 1994. "Solução da Equação tridimensional de Transporte pelo Método LTS_N ", **Anais VI CGEN—Congresso Geral de Energia Nuclear**.

Vilhena, M. T. M. B., Barichello, L. B., Zabadal, J., Segatto, C. F., and Cardona, A. V., 1998. "General Solution of One-dimensional Approximations To the Transport Equation", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 33(1-2), pp. 99–115.

Vilhena, M. T. M. B. and Segatto, C. F., 1993. "Solução da Equação de Transporte de Neutrons e Radiação Dependente do Tempo pelo Método LTS_N ", **XVI CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional—Uberlândia, MG**.

Vilhena, M. T. M. B. and Segatto, C. F., 1996. "A New Iterative Method to Solve the Radiative Transfer Equation", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 55(4), pp. 493–498.

Vilhena, M. T. M. B. and Souza, S. I. S., 1992. "Determinação de Parâmetros Radiantes em Meios Compostos - Geometria Planar - pelo Método LTS_N ", **XV CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional—São Carlos, SP**.

Vilhena, M. T. M. B. and Streck, E., 1992. "An Approximated Analytical Solution for the One-Group Slab-Geometry Neutron Transport Equation", **Kerntechnik**, vol. 57(3), pp. 196–198.

Wauben, W. M. F., de Haan, J. F., and Hovenier, J. W., 1993. "Influence of particle shape on the polarized radiation in planetary atmospheres", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 50(3), pp. 237–246.

Wauben, W. M. F. and Hovenier, J. W., 1992. "Polarized Radiation of an Atmosphere Containing Randomly-Oriented Spheroids", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 47(6), pp. 491–504.

Weng, F., 1992a. "A multi-layer discrete-ordinate method for vector radiative transfer in a vertically-inhomogeneous, emitting and scattering atmosphere - I. theory", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 47(1), pp. 19–33.

Weng, F., 1992b. "A multi-layer discrete-ordinate method for vector radiative transfer in a vertically-inhomogeneous, emitting and scattering atmosphere - II. application", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 47(1), pp. 35–42.

Zabadal, J., 1994. "**Solução Analítica da Equação de Ordenadas Discretas Multidimensional**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Zabadal, J., Vilhena, M. T. M. B., and Barichello, L. B., 1993. "Solução da Equação de Ordenada Discreta em Duas Dimensões pelo Método LTS_N ", **Anais do IX ENFIR- Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica-Caxambu, MG**, pages 90–92.

Zabadal, J., Vilhena, M. T. M. B., and Barichello, L. B., 1995. "Solution For Three-Dimensional One Group Discrete Ordinates Problem by the LTS_N Method", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 22(2), pp. 131–134.

Zabadal, J., Vilhena, M. T. M. B., and Barichello, L. B., 1997. "An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem In a Convex Domain", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 31(3), pp. 225–228.

Zege, E. P. and Chaikovskaya, L., 1996. "New approach to the polarized radiative transfer problem", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 55(1), pp. 19–31.

APÊNDICE I

NOÇÕES SOBRE POLARIZAÇÃO

Uma onda de luz é uma onda eletromagnética transversal. Essas ondas são produzidas com a vibração de cargas elétricas. Para as finalidades aqui propostas, é suficiente dizer que uma onda de luz é uma onda transversal, que tem um componente elétrico e um componente magnético. Em qualquer onda transversal a vibração ocorre perpendicularmente à direção de propagação da onda e pode portanto, ser decomposta em componentes perpendiculares, no plano perpendicular à direção de propagação. Por exemplo, numa onda transversal que move-se numa direção x , os campos elétrico e magnético estão num plano paralelo ao plano yz e podem ser resolvidos em componentes y e z . A luz natural geralmente é não-polarizada, todos os planos de propagação são igualmente prováveis. Mas, por ser uma onda transversal, a luz pode passar a apresentar o efeito de polarização. Polarizar a luz significa selecionar uma direção para a vibração do seu campo elétrico. Por isso, uma representação geométrica é freqüentemente útil para descrever o estado de polarização de uma radiação eletromagnética. Quando a vibração do vetor campo elétrico permanece paralela a uma reta no espaço, a onda é dita linearmente polarizada (figura I.1). A polarização linear também é chamada de polarização plana.

As ondas transversais também podem ser circular ou elipticamente polarizadas. Nas ondas eletromagnéticas circularmente polarizadas (figura I.2) ou elipticamente polarizadas (figura I.3) o vetor campo elétrico gira num círculo ou numa elipse, ou seja, as vibrações do campo elétrico são localizadas nessas representações geométricas.

Na polarização circular os planos (campos elétrico e magnético) de iguais amplitudes diferem em fase por 90° . Na polarização elíptica pode acontecer desses planos diferindo em amplitude serem relacionados em fase por 90° , ou a diferença de fase dos planos de mesma amplitude ser diferente de 90° .

Figura I.1 – Polarização linear

Figura I.2 – Polarização circular

Figura I.3 – Polarização elíptica

Há muitas formas de obtenção da luz polarizada. Aqui, são reproduzidas duas das

exemplificações para a luz plano-polarizada que, propostas como atividades práticas para conteúdos dos volumes [Halliday e Resnick, 1984], [Nussenzveig, 1996] e [Halliday et al., 1997], encontram-se no endereço <http://www.if.ufrgs.br>:

(a) Polarização por absorção

No primeiro exemplo é considerada uma rede de fios condutores, e que sobre esta rede incide luz não-polarizada, como mostra a figura I.4.

Figura I.4 – Esboço de uma rede de fios condutores, com luz incidente não-polarizada, usado na exemplificação da polarização por absorção

Com a decomposição do vetor campo elétrico E , da luz incidente, nas direções x e y , são obtidos os componentes E_x e E_y . O componente E_y força os elétrons *livres* do fio a moverem-se ao longo da direção y . Em função desse movimento, os elétrons *livres* acabam por colidir com os átomos e, dessa forma, transferem a sua energia aos fios na forma de calor. A energia na direção y , da onda incidente, é absorvida pelos fios condutores. Os elétrons *livres* dos fios não podem mover-se na direção x devido ao diminuto diâmetro desses fios e, portanto, o componente E_x não é afetado ao propagar-se através da rede. Assim, a rede transmite uma onda plano-polarizada na direção x .

Essa idéia pode ser implementada na prática nas lâminas "*polaróides*". Essas lâminas são produzidas com polímeros que são macromoléculas orgânicas muito compridas. Quando esses polímeros são esquentados e depois, simultaneamente, resfriados e tensionados, as macromoléculas alinham-se na direção da tensão. Depois, por um processo químico, átomos eletronegativos (como o iodo) são presos na estrutura dos polímeros. Os elétrons de condução desses átomos podem mover-se pela macromolécula como se ela fosse um fio condutor. Assim, o conjunto assemelha-se a uma rede de fios condutores paralelos.

(b) Polarização por espalhamento

A polarização da luz pode ser alterada ao atravessar um meio material. Para esse fim, é necessário estudar a interação da luz com a matéria. Um modelo simplificado para a estrutura atômica consiste em considerar os elétrons (-) *presos* ao núcleo atômico (+) por molas, como mostra a figura I.5. Para um elétron mais fortemente (fracamente) ligado, nesse modelo, é considerada uma constante K da mola maior (menor). Esse modelo, do ponto de vista da Física Quântica é inadequado, mas para exemplificar a polarização da luz ele é bastante útil.

Figura I.5 – Esboço de um átomo representativo de um meio isotrópico, usado na exemplificação da polarização por espalhamento

É indispensável, então, analisar a interação do campo elétrico oscilante da luz ($E = E_0 \cos \omega t$) com as cargas elétricas atômicas.

Para as frequências da luz visível ($\sim 10^{14} Hz$), a inércia dos núcleos atômicos é muito grande para acompanhar as rápidas variações do campo elétrico E da luz; mas os elétrons, com massa muito menor, podem acompanhar a vibração desse campo. Como a energia fornecida pelo campo E aos elétrons normalmente não é suficiente para arrancá-los dos átomos, os elétrons, forçados por E , acabam vibrando em torno do núcleo com a mesma frequência de E , podendo ser considerados como dipolos elétricos oscilantes. Esses reirradiam a energia eletromagnética segundo o padrão de radiação de um dipolo elétrico oscilante, representado na figura I.6. Nessa figura, de (a) até (d) é evidenciado graficamente como origina-se esse padrão. É possível observar como as linhas de força do campo E mudam à medida que as cargas (+) e (-) do dipolo alternam a posição. Longe do dipolo as linhas de força criam uma estrutura de *lóbulos* que propagam-se para fora à medida que o dipolo oscila ((e) na figura). A linha mais forte nessa figura representa a variação do campo E irradiado pelo dipolo na direção considerada. A frequência do campo irradiado é a mesma

do campo incidente que força o dipolo a oscilar. A intensidade do E irradiado é máxima sobre o plano que corta o dipolo ao meio e a intensidade do E irradiado é nula na direção do eixo do dipolo.

Figura I.6 – Esboço do padrão de radiação de um dipolo elétrico oscilante, usado na exemplificação da polarização por espalhamento

Convém lembrar que o elétron (com massa m_e), devido ao K da mola, tem uma frequência natural de oscilação $\omega_0 = \sqrt{K/m_e}$. Dependendo da frequência angular ω da luz incidente, sobre o átomo, é preciso considerar dois casos: $\omega = \omega_0$ (ressonância) e $\omega \neq \omega_0$. Na ressonância, num meio denso, as condições são propícias para a absorção de energia da luz pelo átomo, pois a amplitude da oscilação do elétron é máxima nessa situação. Isso favorece a colisão desse elétron com os átomos vizinhos (o meio é denso) e dessa forma a energia da luz incidente é absorvida, sendo transformada em calor (oriundo das colisões) no material. Para $\omega \neq \omega_0$ essa chance de colisão diminui, pois os elétrons vibram em relação ao núcleo com uma amplitude menor. Assim, esses elétrons podem ser considerados como dipolos elétricos oscilantes, re-emitindo a energia da luz incidente na forma de onda ($E = E_0 \cos \omega t$) conforme o padrão de radiação de um dipolo elétrico oscilante (figura I.6(e)).

O processo consiste, então, na retirada de energia de uma onda incidente e a posterior re-emissão de uma fração dessa energia.

APÊNDICE II

MATRIZ DE ESPALHAMENTO

Espalhamento é o processo físico de interação de uma partícula com uma onda eletromagnética. A partir desse processo, a energia incidente é irradiada em todas as direções. Na atmosfera, as partículas responsáveis pelo espalhamento da luz variam muito em tamanho. Quando as partículas são muito menores que o comprimento de onda da radiação incidente, o espalhamento é referido como espalhamento de Rayleigh. Quando as partículas espalhadas possuem tamanho comparável ou maior que o comprimento de onda da radiação incidente, o espalhamento é chamado de espalhamento de Mie. A intensidade de radiação espalhada depende tanto do tamanho da partícula, como do comprimento de onda da radiação incidente. Quando as partículas são muito pequenas, a tendência é que o espalhamento seja simétrico em todas as direções (espalhamento isotrópico). Quando o tamanho da partícula aumenta, a intensidade de energia espalhada na direção frontal é maior e o espalhamento é não simétrico (espalhamento anisotrópico). Quando um raio de luz incide sobre um determinado volume de partículas, cada partícula espalha a luz que provavelmente já foi espalhada por outra partícula (espalhamento múltiplo). Para a execução de cálculos de múltiplo espalhamento para atmosferas planetárias, devem ser conhecidas as propriedades de espalhamento simples das partículas que constroem a atmosfera.

Um evento de espalhamento simples, na teoria vetorial, é descrito por uma matriz 4×4 que transforma os parâmetros de Stokes de um feixe de luz incidente para um feixe de luz espalhada, isto é,

$$\mathbf{I}_{esp} = F(\cos \Theta) \mathbf{I}_{inc}. \quad (\text{II.1})$$

Essa multiplicação matricial representa uma mudança na direção da radiação. No

modelo de espalhamento de Rayleigh o componente \mathcal{V} de Stokes é nulo. E para uma combinação de espalhamento isotrópico e de Rayleigh o campo de radiação polarizada pode ser descrito apenas pelos dois primeiros componentes do vetor de Stokes (\mathcal{J} e \mathcal{Q}).

Com respeito ao caso especial de espalhamento de Mie, Herman [Herman, 1965] e Domke, em 1975, representaram explicitamente as constantes de espalhamento em termos de coeficientes complexos básicos da série de Mie. Além disso, em 1980, Herman e colaboradores usaram relações de ortogonalidade para deduzir as constantes de espalhamento no contexto de espalhamento de Mie. Para a modelagem considerada no capítulo 3, Siewert seguiu essa aproximação posterior para um modelo mais geral de espalhamento.

Assim, primeiramente na equação vetorial (3.1), a matriz de fase é relacionada à matriz de espalhamento $F(\cos \Theta)$ por [Chandrasekhar, 1950] [Hovenier, 1971]:

$$\mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi - \varphi') = L(\pi - i_2)F(\cos \Theta)L(-i_1), \quad (\text{II.2})$$

com, Θ o ângulo entre os raios de luz antes e depois do espalhamento, e $L(\pi - i_2)$ e $L(-i_1)$ matrizes de transformação linear, requeridas para rotar os planos meridianos antes e depois do espalhamento para um plano de espalhamento local, dadas por

$$L(\pi - \alpha) = L(-\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (\text{II.3})$$

$\alpha = i_1$ representa o ângulo entre o plano de espalhamento e um plano meridiano antes do espalhamento (ângulo entre o plano meridiano OP_1Z e o plano de espalhamento OP_1P_2 na figura II.1), enquanto $\alpha = i_2$ é o ângulo entre o plano de espalhamento e o plano meridiano depois do espalhamento (ângulo entre os planos OP_1P_2 e OP_2Z na figura II.1).

As expressões explícitas (3.6) e (3.7), para os componentes de Fourier $\mathbf{C}^m(\mu, \mu')$ e $\mathbf{S}^m(\mu, \mu')$, na representação analítica da matriz de fase (3.5), são obtidas [Siewert, 1982] a

partir da matriz de espalhamento na forma considerada por Hovenier [Hovenier, 1971]:

$$F(\xi) = \begin{bmatrix} a_1(\xi) & b_1(\xi) & 0 & 0 \\ b_1(\xi) & a_2(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(\xi) & b_2(\xi) \\ 0 & 0 & -b_2(\xi) & a_4(\xi) \end{bmatrix}, \quad (\text{II.4})$$

onde $\xi = \cos \Theta$. Cada elemento dessa matriz só depende do ângulo de espalhamento Θ , que pode ser relacionado aos ângulos polar e azimutal através da relação

$$\xi = \cos \Theta = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi). \quad (\text{II.5})$$

Duas importantes propriedades dessa matriz de espalhamento são reciprocidade e simetria especular. Assim, essa matriz de espalhamento é válida se quaisquer das seguintes hipóteses for satisfeita: (1) cada partícula no conjunto tem um plano de simetria (por exemplo esferóides homogêneos, os quais incluem esferas homogêneas), e as partículas são randomicamente orientadas; ou (2) o conjunto contém partículas cujas partículas especulares ocorrem em número igual e em orientação randômica; ou (3) as partículas são muito menores que o comprimento de onda.

Para o modelo de espalhamento considerado, valem as relações [van de Hulst, 1957]:

$$b_1(\pm 1) = b_2(\pm 1) = 0 \quad e \quad a_2(\pm 1) = \pm a_3(\pm 1). \quad (\text{II.6})$$

E, para partículas esféricas, são verdadeiras:

$$a_2(\xi) = a_1(\xi) \quad e \quad a_4(\xi) = a_3(\xi). \quad (\text{II.7})$$

Agora, seguindo Siewert, a matriz $F(\xi)$ é normalizada tal que:

$$\int_{-1}^{+1} a_1(\xi) d\xi = 2, \quad (\text{II.8})$$

e as seis funções que compõem essa matriz, estimadas funções reais para $\xi \in [-1, 1]$, são expandidas na forma:

$$a_1(\xi) = \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell p_\ell(\xi), \quad \beta_0 = 1, \quad (\text{II.9})$$

$$a_2(\xi) = \sum_{\ell=2}^L \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \{ \alpha_\ell R_\ell^2(\xi) + \zeta_\ell T_\ell^2(\xi) \}, \quad (\text{II.10})$$

$$a_3(\xi) = \sum_{\ell=2}^L \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \{ \zeta_\ell R_\ell^2(\xi) + \alpha_\ell T_\ell^2(\xi) \}, \quad (\text{II.11})$$

$$a_4(\xi) = \sum_{\ell=0}^L \delta_\ell p_\ell(\xi), \quad (\text{II.12})$$

$$b_1(\xi) = \sum_{\ell=2}^L \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \gamma_\ell P_\ell^2(\xi) \quad (\text{II.13})$$

e

$$b_2(\xi) = \sum_{\ell=2}^L \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \epsilon_\ell P_\ell^2(\xi); \quad (\text{II.14})$$

$p_\ell(\xi)$ denota o ℓ -ésimo polinômio de Legendre, $P_\ell^2(\xi)$ as funções associadas de Legendre, e $R_\ell^2(\xi)$ e $T_\ell^2(\xi)$ as combinações das funções esféricas generalizadas.

A seguir, como os polinômios de Legendre e as funções associadas de Legendre satisfazem as relações de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{+1} p_\ell(\xi) p_{\ell'}(\xi) d\xi = \left(\frac{2}{2\ell+1} \right) \delta_{\ell,\ell'} \quad (\text{II.15})$$

e

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell^2(\xi) P_{\ell'}^2(\xi) d\xi = \left(\frac{2}{2\ell+1} \right) \left[\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \right] \delta_{\ell,\ell'}, \quad (\text{II.16})$$

respectivamente, são deduzidas, de (II.9) e (II.12)-(II.14), as seguintes expressões integrais para as constantes que definem a lei de espalhamento:

$$\beta_\ell = \left(\frac{2\ell+1}{2} \right) \int_{-1}^{+1} a_1(\xi) p_\ell(\xi) d\xi, \quad (\text{II.17})$$

$$\delta_\ell = \left(\frac{2\ell+1}{2} \right) \int_{-1}^{+1} a_4(\xi) p_\ell(\xi) d\xi, \quad (\text{II.18})$$

$$\gamma_\ell = \left(\frac{2\ell+1}{2} \right) \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} b_1(\xi) P_\ell^2(\xi) d\xi \quad (\text{II.19})$$

e

$$-\epsilon_\ell = \left(\frac{2\ell+1}{2} \right) \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} b_2(\xi) P_\ell^2(\xi) d\xi. \quad (\text{II.20})$$

Para o cálculo de (II.17) a (II.20) podem ser usadas as fórmulas de recorrência para os polinômios de Legendre,

$$(\ell + 1)p_{\ell+1}(\xi) = (2\ell + 1)\xi p_{\ell}(\xi) - \ell p_{\ell-1}(\xi), \quad \ell \geq 0, \quad p_0(\xi) = 1, \quad (\text{II.21})$$

e para as funções associadas de Legendre,

$$(\ell - 1)P_{\ell+1}^2(\xi) = (2\ell + 1)\xi P_{\ell}^2(\xi) - (\ell + 2)(1 - \delta_{2,\ell})P_{\ell-1}^2(\xi), \quad \ell \geq 2, \quad P_2^2(\xi) = 3(1 - \xi^2). \quad (\text{II.22})$$

Agora, da relação de ortogonalidade [Gel'fand e Šapiro, 1956]

$$(-1)^{m-\rho} \int_{-1}^{+1} \mathcal{P}_{m,\rho}^{\ell}(\xi) \mathcal{P}_{m,\rho}^{\ell'}(\xi) d\xi = \left(\frac{2}{2\ell + 1} \right) \delta_{\ell,\ell'}, \quad \ell, \ell' \geq \sup(|m|, |\rho|), \quad (\text{II.23})$$

são determinadas:

$$\zeta_{\ell} = \left(\frac{2\ell + 1}{2} \right) \left[\frac{(\ell - 2)!}{(\ell + 2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} \{a_3(\xi)R_{\ell}^2(\xi) + a_2(\xi)T_{\ell}^2(\xi)\} d\xi \quad (\text{II.24})$$

e

$$\alpha_{\ell} = \left(\frac{2\ell + 1}{2} \right) \left[\frac{(\ell - 2)!}{(\ell + 2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} \{a_2(\xi)R_{\ell}^2(\xi) + a_3(\xi)T_{\ell}^2(\xi)\} d\xi. \quad (\text{II.25})$$

E, da fórmula recursiva [Gel'fand e Šapiro, 1956]

$$\mathbf{e}_{m,\rho}^{\ell} \mathcal{P}_{m,\rho}^{\ell+1}(\xi) = (2\ell + 1)\xi \mathcal{P}_{m,\rho}^{\ell}(\xi) - \mathbf{f}_{m,\rho}^{\ell} \mathcal{P}_{m,\rho}^{\ell-1}(\xi) - \left[\frac{m\rho(2\ell + 1)}{\ell(\ell + 1)} \right] \mathcal{P}_{m,\rho}^{\ell}(\xi), \quad (\text{II.26})$$

com

$$\mathbf{e}_{m,\rho}^{\ell} = \left(\frac{1}{\ell + 1} \right) \left[(\ell + m + 1)(\ell - m + 1)(\ell + \rho + 1)(\ell - \rho + 1) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{II.27})$$

$$\mathbf{f}_{m,\rho}^{\ell} = \left(\frac{1}{\ell} \right) \left[(\ell + m)(\ell - m)(\ell + \rho)(\ell - \rho) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{II.28})$$

são estabelecidas, para $\ell \geq 2$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\ell-1}{\ell+1}\right) \left[(\ell+3)(\ell-1) \right]^{\frac{1}{2}} R_{\ell+1}^2(\xi) \\ &= (2\ell+1)\xi R_{\ell}^2(\xi) - \left(\frac{\ell+2}{\ell}\right) \left[(\ell+2)(\ell-2) \right]^{\frac{1}{2}} R_{\ell-1}^2(\xi) - \left[\frac{4(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)} \right] T_{\ell}^2(\xi) \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

e

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\ell-1}{\ell+1}\right) \left[(\ell+3)(\ell-1) \right]^{\frac{1}{2}} T_{\ell+1}^2(\xi) \\ &= (2\ell+1)\xi T_{\ell}^2(\xi) - \left(\frac{\ell+2}{\ell}\right) \left[(\ell+2)(\ell-2) \right]^{\frac{1}{2}} T_{\ell-1}^2(\xi) - \left[\frac{4(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)} \right] R_{\ell}^2(\xi). \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Essas equações (II.29) e (II.30), com $R_2^2(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{2}(1+\xi^2)$ e $T_2^2(\xi) = \sqrt{6}\xi$, podem ser usadas para os cálculos de (II.10), (II.11), (II.24) e (II.25).

A seguir são reproduzidas as tabulações (matriz e coeficientes de espalhamento) apresentadas na referência [Vestrucci e Siewert, 1984], para o problema resolvido no capítulo 4. Além destes resultados, Vestrucci e Siewert também fizeram tabulações para um caso de teste, introduzido por Kuščer e Ribarič, da teoria de Mie.

ξ	$a_1(\xi) = a_2(\xi)$	$a_3(\xi) = a_4(\xi)$	$b_1(\xi)$	$b_2(\xi)$
-1	2.973(-1)	-2.973(-1)	0.0	0.0
-0.8	2.698(-1)	-2.532(-1)	-7.035(-2)	1.801(-2)
-0.6	2.687(-1)	-1.946(-1)	-1.479(-1)	2.257(-2)
-0.4	3.003(-1)	-1.097(-1)	-2.333(-1)	1.600(-2)
-0.2	3.760(-1)	1.833(-2)	-3.252(-1)	8.548(-4)
0	5.155(-1)	2.138(-1)	-4.181(-1)	-1.979(-2)
0.2	7.499(-1)	5.110(-1)	-5.005(-1)	-4.197(-2)
0.4	1.128	9.590(-1)	-5.506(-1)	-6.029(-2)
0.6	1.722	1.627	-5.309(-1)	-6.721(-2)
0.8	2.643	2.612	-3.800(-1)	-5.212(-2)
1	4.052	4.052	0.0	0.0

Tabela II.1 – Matriz de espalhamento [Vestrucci e Siewert, 1984].

ℓ	α_ℓ	β_ℓ	γ_ℓ	δ_ℓ	ϵ_ℓ	ζ_ℓ
0	0.0	1.0	0.0	0.7120634246	0.0	0.0
1	0.0	1.4552931819	0.0	1.7601411931	0.0	0.0
2	3.3091220464	1.0540263128	-0.7552491518	1.0668243107	0.0420726875	2.5773207443
3	0.9633758276	0.3975899378	-0.3619934319	0.3965110389	0.0850671555	0.7574437604
4	0.2474124256	0.1165930161	-0.1155748816	0.0957641237	0.0154318420	0.1638177665
5	0.0452636955	0.0238747702	-0.0249815879	0.0176508810	0.0031534874	0.0278314781
6	0.0068892608	0.0039501033	-0.0041675362	0.0026154886	0.0004010299	0.0038897248
7	0.0008798202	0.0005388807	-0.0005739043	0.0003271332	0.0000460147	0.0004642654
8	0.0000987255	0.0000637172	-0.0000677900	0.0000358314	0.0000042875	0.0000490224
9	0.0000099029	0.0000066697	-0.0000070926	0.0000035142	0.0000003617	0.0000046647
10	0.0000009071	0.0000006329	-0.0000006712	0.0000003148	0.0000000272	0.0000004075
11	0.0000000769	0.0000000553	-0.0000000585	0.0000000261	0.0000000019	0.0000000331
12	0.0000000061	0.0000000045	-0.0000000047	0.0000000020	0.0000000001	0.0000000025
13	0.0000000005	0.0000000003	-0.0000000004	0.0000000001	0.0000000000	0.0000000002

Tabela II.2 – Coeficientes de espalhamento [Vestrucci e Siewert, 1984].

APÊNDICE III

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL ALTERNATIVA PARA A APROXIMAÇÃO S_N

A aproximação S_N (3.33), em função dos componentes de Fourier dos parâmetros \mathcal{J} , \mathcal{Q} , \mathcal{U} , \mathcal{V} de Stokes, é dada pelo conjunto acoplado de equações (III.1)-(III.4) abaixo:

$$\begin{aligned} \mu_n \frac{d}{d\tau} \mathcal{J}_{k,n}^m(\tau) + \mathcal{J}_{k,n}^m(\tau) &= \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \mathbb{P}_\ell^m(\mu_n) \left[\beta_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{P}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{J}_{k,i}^m(\tau) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \left(\mathbb{R}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{Q}_{k,i}^m(\tau) - \mathbb{T}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{U}_{k,i}^m(\tau) \right) \right] \\ &\quad + \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \mathbb{P}_\ell^m(\mu_n) \left[\beta_\ell \mathbb{P}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,1} + \gamma_\ell \left(\mathbb{R}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,2} - \mathbb{T}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,3} \right) \right] e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (\text{III.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_n \frac{d}{d\tau} \mathcal{Q}_{k,n}^m(\tau) + \mathcal{Q}_{k,n}^m(\tau) &= \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \left\{ \mathbb{R}_\ell^m(\mu_n) \left[\gamma_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{P}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{J}_{k,i}^m(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \left(\mathbb{R}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{Q}_{k,i}^m(\tau) - \mathbb{T}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{U}_{k,i}^m(\tau) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{T}_\ell^m(\mu_n) \left[\zeta_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \left(\mathbb{T}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{Q}_{k,i}^m(\tau) - \mathbb{R}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{U}_{k,i}^m(\tau) \right) + \epsilon_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{P}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{V}_{k,i}^m(\tau) \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \left\{ \mathbb{R}_\ell^m(\mu_n) \left[\gamma_\ell \mathbb{P}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,1} + \alpha_\ell \left(\mathbb{R}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,2} - \mathbb{T}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,3} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{T}_\ell^m(\mu_n) \left[\zeta_\ell \left(\mathbb{T}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,2} - \mathbb{R}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,3} \right) + \epsilon_\ell \mathbb{P}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,4} \right] \right\} e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (\text{III.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_n \frac{d}{d\tau} \mathcal{U}_{k,n}^m(\tau) + \mathcal{U}_{k,n}^m(\tau) &= \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \left\{ -\mathbb{T}_\ell^m(\mu_n) \left[\gamma_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{P}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{J}_{k,i}^m(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \left(\mathbb{R}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{Q}_{k,i}^m(\tau) - \mathbb{T}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{U}_{k,i}^m(\tau) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{R}_\ell^m(\mu_n) \left[\zeta_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \left(-\mathbb{T}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{Q}_{k,i}^m(\tau) + \mathbb{R}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{U}_{k,i}^m(\tau) \right) - \epsilon_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{P}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{V}_{k,i}^m(\tau) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \left\{ -\mathbb{T}_\ell^m(\mu_n) \left[\gamma_\ell \mathbb{P}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,1} + \alpha_\ell \left(\mathbb{R}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,2} - \mathbb{T}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,3} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{R}_\ell^m(\mu_n) \left[\zeta_\ell \left(-\mathbb{T}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,2} + \mathbb{R}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,3} \right) - \epsilon_\ell \mathbb{P}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,4} \right] \right\} e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (\text{III.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_n \frac{d}{d\tau} \mathcal{V}_{k,n}^m(\tau) + \mathcal{V}_{k,n}^m(\tau) &= \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \mathbb{P}_\ell^m(\mu_n) \left[\epsilon_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \left(-\mathbb{T}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{Q}_{k,i}^m(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbb{R}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{U}_{k,i}^m(\tau) \right) + \delta_\ell \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{P}_\ell^m(\mu_i) \mathcal{V}_{k,i}^m(\tau) \right] \\
&\quad + \frac{\varpi}{2} \sum_{\ell=m}^L \mathbb{P}_\ell^m(\mu_n) \left[\epsilon_\ell \left(-\mathbb{T}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,2} + \mathbb{R}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,3} \right) + \delta_\ell \mathbb{P}_\ell^m(\mu_0) \Omega_{k,4} \right] e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (\text{III.4})
\end{aligned}$$

onde, $\Omega_{k,i}$, $i = 1, \dots, 4$, é o i -ésimo componente de Ω_k em (3.42) ou (3.43), e, $\mathbb{P}_\ell^m(\mu)$, $\mathbb{R}_\ell^m(\mu)$ e $\mathbb{T}_\ell^m(\mu)$ são as versões normalizadas de $P_\ell^m(\mu)$, $R_\ell^m(\mu)$ e $T_\ell^m(\mu)$.

Após a divisão dos sistemas acoplados (III.1)-(III.4) pelas direções discretas μ_n , a aproximação S_N também pode ser descrita pela equação matricial

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{I}_k^m(\tau) - \mathcal{M}^m \mathcal{I}_k^m(\tau) = \mathcal{S}_k^m(\tau) \quad (\text{III.5})$$

quando a matriz \mathcal{M}^m é dada por

$$\mathcal{M}^m = \left[\frac{\varpi}{2} \mathbf{\Delta} \mathcal{A}^m \mathbf{W} - \mathbf{\Delta} \right], \quad (\text{III.6})$$

com $\mathbf{\Delta}$ e \mathbf{W} matrizes bloco-digonais,

$$\mathbf{\Delta} = \text{diag} \left\{ \mathbf{\Delta}_*, \mathbf{\Delta}_*, \mathbf{\Delta}_*, \mathbf{\Delta}_* \right\}, \quad (\text{III.7})$$

$$\mathbf{W} = \text{diag} \left\{ \mathbf{W}_*, \mathbf{W}_*, \mathbf{W}_*, \mathbf{W}_* \right\}, \quad (\text{III.8})$$

cujas sub-matrizes são dadas por

$$\Delta_* = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \dots, \frac{1}{\mu_N} \right\}, \quad (\text{III.9})$$

$$\mathbf{W}_* = \text{diag} \left\{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \right\}, \quad (\text{III.10})$$

respectivamente; e, \mathcal{A}^m é uma matriz bloco, quadrada de ordem $4N$, agora composta por dezesseis sub-matrizes de ordem N ,

$$\mathcal{A}^m = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}^m & \mathcal{A}_{12}^m & \mathcal{A}_{13}^m & \mathcal{A}_{14}^m \\ \mathcal{A}_{21}^m & \mathcal{A}_{22}^m & \mathcal{A}_{23}^m & \mathcal{A}_{24}^m \\ \mathcal{A}_{31}^m & \mathcal{A}_{32}^m & \mathcal{A}_{33}^m & \mathcal{A}_{34}^m \\ \mathcal{A}_{41}^m & \mathcal{A}_{42}^m & \mathcal{A}_{43}^m & \mathcal{A}_{44}^m \end{bmatrix}. \quad (\text{III.11})$$

Usando a notação

$$\Xi_c^{f_i g_j} = \sum_{\ell=m}^L c_\ell f_\ell^m(\mu_i) g_\ell^m(\mu_j), \quad (\text{III.12})$$

onde, $c_\ell \in \{\alpha_\ell, \beta_\ell, \gamma_\ell, \delta_\ell, \epsilon_\ell, \zeta_\ell\}$, e, $f_\ell^m(\mu)$ e $g_\ell^m(\mu)$ assumem os valores das funções normalizadas $\mathbb{P}_\ell^m(\mu)$, $\mathbb{R}_\ell^m(\mu)$ e $\mathbb{T}_\ell^m(\mu)$, são definidos abaixo os componentes \mathcal{A}_{ij}^m da matriz \mathcal{A}^m :

$$\mathcal{A}_{11}^m = \begin{bmatrix} \Xi_\beta^{\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_1} & \Xi_\beta^{\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_\beta^{\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_\beta^{\mathbb{P}_N \mathbb{P}_1} & \Xi_\beta^{\mathbb{P}_N \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_\beta^{\mathbb{P}_N \mathbb{P}_N} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.13})$$

$$\mathcal{A}_{21}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\gamma}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{P}_1} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{P}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_{\gamma}^{\mathbb{R}_N \mathbb{P}_1} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{R}_N \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{R}_N \mathbb{P}_N} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.14})$$

$$\mathcal{A}_{31}^m = - \begin{bmatrix} \Xi_{\gamma}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{P}_1} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{P}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_{\gamma}^{\mathbb{T}_N \mathbb{P}_1} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{T}_N \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{T}_N \mathbb{P}_N} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.15})$$

$$\mathcal{A}_{41}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{III.16})$$

$$\mathcal{A}_{12}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{R}_1} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{R}_2} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{R}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_N \mathbb{R}_1} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_N \mathbb{R}_2} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_N \mathbb{R}_N} \end{bmatrix} = \left[\mathcal{A}_{21}^m \right]^T, \quad (\text{III.17})$$

$$\mathcal{A}_{22}^m = \begin{bmatrix} \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_1} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{T}_1} \right) & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{T}_2} \right) & \dots & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_N} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{T}_N} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_N \mathbb{R}_1} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_N \mathbb{T}_1} \right) & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_N \mathbb{R}_2} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_N \mathbb{T}_2} \right) & \dots & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_N \mathbb{R}_N} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_N \mathbb{T}_N} \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{III.18})$$

$$\mathcal{A}_{32}^m = - \begin{bmatrix} \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{R}_1} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{T}_1} \right) & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{R}_2} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{T}_2} \right) & \dots & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{R}_N} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{T}_N} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_N \mathbb{R}_1} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_N \mathbb{T}_1} \right) & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_N \mathbb{R}_2} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_N \mathbb{T}_2} \right) & \dots & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_N \mathbb{R}_N} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_N \mathbb{T}_N} \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{III.19})$$

$$\mathcal{A}_{42}^m = - \begin{bmatrix} \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{T}_1} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{T}_2} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{T}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_N \mathbb{T}_1} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_N \mathbb{T}_2} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_N \mathbb{T}_N} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.20})$$

$$\mathcal{A}_{13}^m = - \begin{bmatrix} \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{T}_1} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{T}_2} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{T}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_N \mathbb{T}_1} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_N \mathbb{T}_2} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_N \mathbb{T}_N} \end{bmatrix} = \left[\mathcal{A}_{31}^m \right]^T, \quad (\text{III.21})$$

$$\mathcal{A}_{23}^m = - \begin{bmatrix} \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{T}_1} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{R}_1} \right) & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{T}_2} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{R}_2} \right) & \dots & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{T}_N} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{R}_N} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_N \mathbb{T}_1} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_N \mathbb{R}_1} \right) & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_N \mathbb{T}_2} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_N \mathbb{R}_2} \right) & \dots & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_N \mathbb{T}_N} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_N \mathbb{R}_N} \right) \end{bmatrix} = \left[\mathcal{A}_{32}^m \right]^T, \quad (\text{III.22})$$

$$\mathcal{A}_{33}^m = \begin{bmatrix} \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{T}_1} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_1} \right) & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{T}_2} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2} \right) & \dots & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{T}_N} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_N} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_N \mathbb{T}_1} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_N \mathbb{R}_1} \right) & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_N \mathbb{T}_2} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_N \mathbb{R}_2} \right) & \dots & \left(\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_N \mathbb{T}_N} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_N \mathbb{R}_N} \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{III.23})$$

$$\mathcal{A}_{43}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{R}_1} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{R}_2} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{R}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_N \mathbb{R}_1} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_N \mathbb{R}_2} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_N \mathbb{R}_N} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.24})$$

$$\mathcal{A}_{14}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{A}_{41}^m, \quad (\text{III.25})$$

$$\mathcal{A}_{24}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{P}_1} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{P}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{T}_N \mathbb{P}_1} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{T}_N \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{T}_N \mathbb{P}_N} \end{bmatrix} = -[\mathcal{A}_{42}^m]^T, \quad (\text{III.26})$$

$$\mathcal{A}_{34}^m = - \begin{bmatrix} \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{P}_1} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{P}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{R}_N \mathbb{P}_1} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{R}_N \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{R}_N \mathbb{P}_N} \end{bmatrix} = -[\mathcal{A}_{43}^m]^T, \quad (\text{III.27})$$

$$\mathcal{A}_{44}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\delta}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_1} & \Xi_{\delta}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\delta}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Xi_{\delta}^{\mathbb{P}_N \mathbb{P}_1} & \Xi_{\delta}^{\mathbb{P}_N \mathbb{P}_2} & \dots & \Xi_{\delta}^{\mathbb{P}_N \mathbb{P}_N} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.28})$$

Nesta situação, o vetor $\mathcal{I}_k^m(\tau)$ é dado por

$$\mathcal{I}_k^m(\tau) = \left[\mathcal{J}_k^m(\tau) \quad \mathcal{Q}_k^m(\tau) \quad \mathcal{U}_k^m(\tau) \quad \mathcal{V}_k^m(\tau) \right]^T, \quad (\text{III.29})$$

onde

$$\mathcal{J}_k^m(\tau) = \left[\mathcal{J}_{k,1}^m(\tau) \quad \cdots \quad \mathcal{J}_{k,N}^m(\tau) \right]^T, \quad (\text{III.30})$$

$$\mathcal{Q}_k^m(\tau) = \left[\mathcal{Q}_{k,1}^m(\tau) \quad \cdots \quad \mathcal{Q}_{k,N}^m(\tau) \right]^T, \quad (\text{III.31})$$

$$\mathcal{U}_k^m(\tau) = \left[\mathcal{U}_{k,1}^m(\tau) \quad \cdots \quad \mathcal{U}_{k,N}^m(\tau) \right]^T \quad (\text{III.32})$$

e

$$\mathcal{V}_k^m(\tau) = \left[\mathcal{V}_{k,1}^m(\tau) \quad \cdots \quad \mathcal{V}_{k,N}^m(\tau) \right]^T \quad (\text{III.33})$$

são sub-vetores de ordem N .

O vetor fonte, $\mathcal{S}_k^m(\tau)$, agora é descrito como

$$\mathcal{S}_k^m(\tau) = \frac{\overline{\omega}}{4} \Delta \mathcal{N}^m \Omega_k e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}, \quad (\text{III.34})$$

com a matriz

$$\mathcal{N}^m = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11}^m & \mathcal{N}_{12}^m & \mathcal{N}_{13}^m & \mathcal{N}_{14}^m \\ \mathcal{N}_{21}^m & \mathcal{N}_{22}^m & \mathcal{N}_{23}^m & \mathcal{N}_{24}^m \\ \mathcal{N}_{31}^m & \mathcal{N}_{32}^m & \mathcal{N}_{33}^m & \mathcal{N}_{34}^m \\ \mathcal{N}_{41}^m & \mathcal{N}_{42}^m & \mathcal{N}_{43}^m & \mathcal{N}_{44}^m \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

tendo por elementos

$$\mathcal{N}_{11}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\beta}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_0} & \Xi_{\beta}^{\mathbb{P}_2 \mathbb{P}_0} & \dots & \Xi_{\beta}^{\mathbb{P}_N \mathbb{P}_0} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.36})$$

$$\mathcal{N}_{21}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\gamma}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{P}_0} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{R}_2 \mathbb{P}_0} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{R}_N \mathbb{P}_0} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.37})$$

$$\mathcal{N}_{31}^m = - \begin{bmatrix} \Xi_{\gamma}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{P}_0} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{T}_2 \mathbb{P}_0} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{T}_N \mathbb{P}_0} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.38})$$

$$\mathcal{N}_{41}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.39})$$

$$\mathcal{N}_{12}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{R}_0} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_2 \mathbb{R}_0} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_N \mathbb{R}_0} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.40})$$

$$\mathcal{N}_{22}^m = \begin{bmatrix} (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{T}_0}) & (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_2 \mathbb{R}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_2 \mathbb{T}_0}) & \dots & (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_N \mathbb{R}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_N \mathbb{T}_0}) \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.41})$$

$$\mathcal{N}_{32}^m = - \begin{bmatrix} (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{R}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{T}_0}) & (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_2 \mathbb{R}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_2 \mathbb{T}_0}) & \dots & (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_N \mathbb{R}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_N \mathbb{T}_0}) \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.42})$$

$$\mathcal{N}_{42}^m = - \begin{bmatrix} \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{T}_0} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_2 \mathbb{T}_0} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_N \mathbb{T}_0} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.43})$$

$$\mathcal{N}_{13}^m = - \begin{bmatrix} \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{T}_0} & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_2 \mathbb{T}_0} & \dots & \Xi_{\gamma}^{\mathbb{P}_N \mathbb{T}_0} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.44})$$

$$\mathcal{N}_{23}^m = - \begin{bmatrix} (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{T}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{R}_0}) & (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_2 \mathbb{T}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_2 \mathbb{R}_0}) & \dots & (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{R}_N \mathbb{T}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{T}_N \mathbb{R}_0}) \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.45})$$

$$\mathcal{N}_{33}^m = \begin{bmatrix} (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{T}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_0}) & (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_2 \mathbb{T}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_2 \mathbb{R}_0}) & \dots & (\Xi_{\alpha}^{\mathbb{T}_N \mathbb{T}_0} + \Xi_{\zeta}^{\mathbb{R}_N \mathbb{R}_0}) \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.46})$$

$$\mathcal{N}_{43}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{R}_0} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_2 \mathbb{R}_0} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{P}_N \mathbb{R}_0} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.47})$$

$$\mathcal{N}_{14}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.48})$$

$$\mathcal{N}_{24}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{T}_1 \mathbb{P}_0} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{T}_2 \mathbb{P}_0} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{T}_N \mathbb{P}_0} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.49})$$

$$\mathcal{N}_{34}^m = - \begin{bmatrix} \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{R}_1 \mathbb{P}_0} & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{R}_2 \mathbb{P}_0} & \dots & \Xi_{\epsilon}^{\mathbb{R}_N \mathbb{P}_0} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{III.50})$$

$$\mathcal{N}_{44}^m = \begin{bmatrix} \Xi_{\delta}^{\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_0} & \Xi_{\delta}^{\mathbb{P}_2 \mathbb{P}_0} & \dots & \Xi_{\delta}^{\mathbb{P}_N \mathbb{P}_0} \end{bmatrix}^T. \quad (\text{III.51})$$

Para a determinação das funções (III.12), as funções normalizadas $\mathbb{P}_{\ell}^m(\mu)$ podem ser calculadas através da relação recursiva (3.111). Já as funções normalizadas $\mathbb{R}_{\ell}^m(\mu)$ e $\mathbb{T}_{\ell}^m(\mu)$,

podem ser obtidas de

$$\mathbb{R}_\ell^m(\mu) = \frac{\mathbf{Y}_\ell^m(\mu) + \mathbf{Z}_\ell^m(\mu)}{2} \quad (\text{III.52})$$

e

$$\mathbb{T}_\ell^m(\mu) = \frac{\mathbf{Z}_\ell^m(\mu) - \mathbf{Y}_\ell^m(\mu)}{2}, \quad (\text{III.53})$$

com $\mathbf{Y}_\ell^m(\mu)$ e $\mathbf{Z}_\ell^m(\mu)$ dadas em (3.112) e (3.113).

A solução \mathcal{LTS}_N de (III.5) segue as mesmas decisões tomadas no capítulo 3, excetuando que nos sistemas algébricos, para o cálculo das condições de contorno desconhecidas, as sub-matrizes dos coeficientes devem ter ordem $\frac{N}{2}$.