INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

"CORRELAÇÃO ANGULAR DIRECIONAL GAMA-GAMA-GAMA NÃO PERTURBADA E PERTURBADA"

Eda Homrich da Jornada

Trabalho apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Pôrto Alegre
1 9 7 2

Trabalho financiado parcialmente por: Conselho Nacional de Pesquisas, Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico, Conselho de Pesquisas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Agradeço aos Drs. A. Maciel e J.D.Rogers pela orientação recebida durante a elaboração do presente trabalho.

RESUMO

Estuda-se, utilizando tensores estatísticos, a correlação angular direcional entre três radiações gama consecutivas emitidas por um núcleo. Mostra-se como este método introduz simplificações na obtenção das expressões gerais de correlação.

Inicialmente é tratado o problema de correlações não perturbadas. Expressões de correlação perturbada são obtidas considerando-se as interações elétricas e magnéticas estáticas do núcleo. Em ambos os casos são dadas as formas diferencial e integral das correlações angulares.

Em se tratando de correlação perturbada devido a interações magnéticas, estuda-se também a situação em que a distribuição angular ou a dependência temporal da radiação intermediária não é observada. Analisa-se ainda o caso em que ambos os efeitos não são observados.

Discute-se a aplicabilidade das expressões obtidas e sugere-se o emprego de uma das mesmas para o Cs^{131}.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A teoria para correlação angular tripla não perturbada já é conhecida a bastante tempo[1,2,3,4,5]. Diversos são também os trabalhos experimentais que envolvam tal assunto[6,7,8,9].

No presente trabalho, as expressões já conhecidas da correlação tripla não perturbada serão obtidas utilizando-se o formalismo dos tensores estatísticos. Esse método foi empregado por Coester e Jauch[10], Gabriel[11] e Stoffen[12], na obtenção da função correlação angular, apenas para o caso de uma cascata dupla.

Empregamos ainda o mesmo formalismo para encontrar as expressões da função correlação angular $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ direcional perturbada. Tais expressões, até o atual momento, não haviam sido determinadas. Estudamos os casos em que a perturbação é devido à existência de gradientes de campo elétrico na amostra e a devido à aplicação de um campo magnético externo constante. Os resultados são apresentados nas formas diferencial e integral.

Obtivemos, além disso, as expressões da correlação perturbada devido à interação magnética, quando não desejamos adquirir informação sobre a distribuição angular ou a dependência temporal da radiação intermediária. O caso em que ambas informações não são desejáveis simultaneamentes, também foram examinada~~s~~. Mostramos que em certos casos especiais, as expressões são bastante simples e provavelmente de grande aplicação prática.

A necessidade em se obter expressões para a correlação tripla perturbada para a análise de certos núcleos, pode ser vista em problemas semelhantes aos que ocorrem no Cs^{131}.

Conhecida a expressão da correlação $\gamma_1 - \gamma_3$, ou seja, no caso em que não são detetadas distribuição angular, bem como dependência temporal da radiação intermediária, pode-

-se medir o momento de dipolo magnético do nível de 79 kev ($7/2^+$) do Cs^{131}, não observando a radiação de 55 kev ($5/2^+$). Não se consegue fazer essa medida através de correlação dupla, pois o nível em questão não é populado por radiação detetável. E_M é detectável.

Uma vez conhecido aquele valor, poderemos testar os diversos modelos previstos para o citado núcleo.[15] Os modelos existentes não concordam satisfatoriamente com os valores já medidos para os momentos magnéticos e elétricos do nível de 133 kev, aproximando-se mais do modelo unificado. Esses resultados podem ser encontrados nos artigos de Freed e Miles[16], Kisslinger e Sorensen[17] e Fechner[18].

Além disso, podem surgir casos em que cascatas duplas semelhantes impedem o estudo de um determinado nível. Para núcleos em que isso ocorra, uma medida de cascata tripla com a radiação intermediária não observada é interessante.

Desejamos ainda salientar a questão referente ao emprego do formalismo adotado no desenvolvimento desse trabalho.

Sabemos que um ensemble de núcleos orientados de spin I pode ser convenientemente descrito através de uma matriz densidade $\rho(I)$ na representação de momento angular (Im). De acordo com Fano e Racach tais matrizes densidades podem ser expressas através de um conjunto de tensores irredutíveis com parâmetros $\rho_q^\lambda(I)$. Esses são obtidos através da combinação dos momentos angulares I e I', resultando num novo momento angular $\vec{\lambda} = \vec{I} - \vec{I'}$, ($|\vec{I}| = |\vec{I'}|$) da seguinte forma:

$$\rho_q^\lambda(I) = \sum_{m,m'} (-)^{I+m} \langle I\,-m\,I\,m' | \lambda q \rangle \langle m | \rho(I) | m' \rangle$$

Convém frisar que o conhecimento desses parâmetros é equivalente ao conhecimento de todos os elementos de matriz da matriz densidade. Coester e Jauch[10] bem como Coester[13] mostram claramente esse fato. Não existe razão física para empregarmos tais parâmetros ao invés de matrizes densidades, ao se descrever um ensemble de spins. Também não há interpretação física concreta para o momento angular λ. É somente uma conveniência matemática, já que os parâmetros $\rho_q^\lambda(I)$ apresentam propriedades de transformação mais apropriadas frente a rotações do sistema de de coordenadas quantizado do que as matrizes densidades.

Adotaremos aqui a terminologia de Fano e Racach e denominaremos de tensor ao conjunto de parâmetros $\rho_q^\lambda(I)$ pertencentes a um valor deifinido de λ e I. Assim cada tensor possui $2\lambda + 1$ parâmetros $q = -\lambda, -\lambda + 1, \ldots, \lambda$.

Entretanto, segundo Fano[14], representar os elementos de matriz $\langle Im | \rho(I) | Im' \rangle$ pelos tensores estatísticos é equivalente a expandir $\rho(I)$ num conjunto completo ortonormal de operadores tensoriais irredutíveis U_q^λ.

Além disso Coester[13] mostra que os tensores estatísticos apresentam basicamente a informação contida na transformação de representação do momento λ para a representação do momento angular I.

Os assuntos que compreendem esse trabalho acham-se assim distribuidos:

No capítulo I é feito o estudo da correlação $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ direcional não perturbada diferencial. No capítulo II, encontram-se as expressões da correlação $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ direcional perturbada diferencial. Reservamos o capítulo seguinte para estudar casos especiais da correlação $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ perturbada devido à interação magnética. No último capítulo são dadas as conclusões sobre os resultados apresentados neste trabalho.

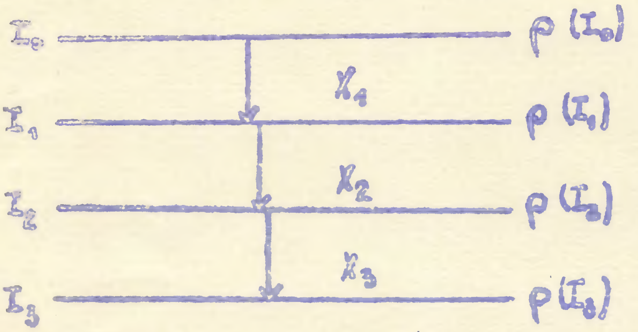
Finalizando, julgamos conveniente fazer uma revisão do emprego dos tensores estatísticos, no estudo das distribuições angulares, a fim de melhor compreensão deste trabalho. Para tanto, escrevemos a expressão da função correlação angular no caso de duas radiações emitidas por um núclelo, bem como algumas propriedades importantes decorrentes do formalismo, no apêndice A. No apêndice B desenvolvemos com mais detalhe algumas propriedades que foram obtidas no decorrer deste trabalho. No apêndice C escrevemos as demais propriedades já conhecidas e utilizadas no mesmo, como as que envolvem funções de rotação e símbolos de 3j, 6j, e 9j. Para facilitar a leitura, as expressões localizadas nos apêndices A, B e C foram denotadas por um número arábico precedido das letras A, B e C.

A notação que empregamos, no que se refere aos tensores estatísticos foi a mesma utilizada por Steffen[12].

I - CORRELAÇÃO $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ DIRECIONAL NÃO PERTURBADA DIFERENCIAL

I.1 Expressão geral de correlação $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ direcional não perturbada

Vamos supor que um núcleo decaia pela emissão sucessiva das radiações X1, X2, X3, como indica o esquema abaixo.



$\rho(I_0)$, $\rho(I_1)$, $\rho(I_2)$ e $\rho(I_3)$ são as matrizes densidades dos estados de spin I_0, I_1, I_2 e I_3 respectivamente.

Se $H(X_i)$ $(i = 1,2,3)$ for o hamiltoneano que descreve a emissão da radiação X_i, a expressão que se obtém para as matrizes densidades dos estados I_1, I_2 e I_3 é:

$$\rho(I_1) = H(X_1)\,\rho(I_0)\,H^{+}(X_1)$$

$$\rho(I_2) = H(X_2)\,\rho(I_1)\,H^{+}(X_2)$$

$$\rho(I_3) = H(X_3)\,\rho(I_2)\,H^{+}(X_3)$$

Sabemos que a expressão da função correlação angular $W(1,2,3)$ das 3 radiações é obtida através da operação do traço de $\rho(I_3)$ no espaço de spin. Empregando a notação $H_i = H(X_i)$ obtém-se:

$$W(1,2,3) = \mathrm{Tr}\left[\rho(I_3)\right] = \mathrm{Tr}\left[H_3H_2H_1\,\rho(I_0)H_1^{+}H_2^{+}H_3^{+}\right] \qquad (1)$$

Se o estado inicial I_0 é orientado ao acaso, $\rho(I_0)$ será proporcional à matriz unidade I:

$$\rho(I_0) = \frac{I}{2I_0 + 1} \qquad (1')$$

No que segue desprezaremos este fator de proporcionalidade, considerando-o somente mais tarde ao se calcular explicitamente os parâmetros das radiações $\rho(I_i)$.

Utilizando-se as relações (9Ab) e (9Aa), podemos escrever:

$$H_1 H_1^{+} = \sum_{\lambda_1 q_1} U_{q_1}^{\lambda_1} \rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(\chi_1) \qquad (2)$$

$$H_3^{+} H_3 = \sum_{\lambda_3 q_3} U_{q_3}^{\lambda_3 +} \rho_{q_3}^{\lambda_3}(\chi_3) \qquad (3)$$

Substituindo em (1):

$$\begin{aligned} W(1,2,3) &= \sum_{\lambda_3 q_3} \rho_{q_3}^{\lambda_3}(\chi_3)\, Tr\left[U_{q_3}^{\lambda_3 +} H_2 H_1 H_1^{+} H_2^{+}\right] \\ &= \sum_{\lambda_3 q_3, \lambda_1 q_1} \rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(\chi_1)\, \rho_{q_3}^{\lambda_3}(\chi_3)\, Tr\left[U_{q_3}^{\lambda_3 +} H_2 U_{q_1}^{\lambda_1} H_2^{+}\right] \end{aligned} \qquad (4)$$

A quantidade $H_2 U_{q1} H_2^{+}$, que aparece no traço em (4) pode ser expandida novamente em termos de um tensor estatístico. Tal tensor, entretanto, pela natureza da expressão, não será um tensor irredutível como em (2) e (3). Será um tensor de segunda ordem, ou seja:

$$H_2 U_{q_1}^{\lambda_1} H_2^{+} = \sum_{\lambda_2 q_2} U_{q_2}^{\lambda_2} \rho_{q_1 q_2}^{\lambda_1 \lambda_2 +}(\chi_2) \qquad (5)$$

Assim, substituindo (5) em (4) e utilizando (6A) obtemos:

$$\begin{aligned} W(1,2,3) &= \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ q_1 q_2 q_3}} \rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(\chi_1)\, \rho_{q_1 q_2}^{\lambda_1 \lambda_2 +}(\chi_2)\, \rho_{q_3}^{\lambda_3}(\chi_3)\, Tr\left[U_{q_3}^{\lambda_3 +} U_{q_2}^{\lambda_2}\right] \\ &= \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \\ q_1 q_2}} \rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(\chi_1)\, \rho_{q_1 q_2}^{\lambda_1 \lambda_2 +}(\chi_2)\, \rho_{q_2}^{\lambda_2}(\chi_3) \end{aligned} \qquad (6)$$

Para obtermos as expressões destes tensores em termos dos hamiltoneanos de radiação, multiplicamos as expressões (2) e (5) por $U_{q'}^{\lambda'+}$, a (3) por $U_{q'}^{\lambda'}$ e tomamos o traço das relações resultantes, i.é:

$$Tr\left[H_1 H_1^+ U_{q'}^{\lambda'+}\right] = \sum_{\lambda_1 q_1} \rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(X_1)\, Tr\left[U_{q_1}^{\lambda_1} U_{q'}^{\lambda'+}\right]$$

$$Tr\left[H_2 U_{q_1}^{\lambda_1} H_2^+ U_{q'}^{\lambda'+}\right] = \sum_{\lambda_2 q_2} \rho_{q_1 q_2}^{\lambda_1 \lambda_2 +}(X_2)\, Tr\left[U_{q_2}^{\lambda_2} U_{q'}^{\lambda'+}\right]$$

$$Tr\left[H_3^+ H_3 U_{q'}^{\lambda'}\right] = \sum_{\lambda_2 q_2} \rho_{q_2}^{\lambda_2}(X_3)\, Tr\left[U_{q'}^{\lambda'} U_{q_2}^{\lambda_2 +}\right]$$

e em vista de (6A) obtemos finalmente:

$$\rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(X_1) = Tr\left[H_1 H_1^+ U_{q_1}^{\lambda_1 +}\right] \tag{7a}$$

$$\rho_{q_1 q_2}^{\lambda_1 \lambda_2 +}(X_2) = Tr\left[H_2 U_{q_1}^{\lambda_1} H_2^+ U_{q_2}^{\lambda_2 +}\right] \tag{7b}$$

$$\rho_{q_2}^{\lambda_2}(X_3) = Tr\left[H_3^+ H_3 U_{q_2}^{\lambda_2 +}\right] \tag{7c}$$

Os tensores $\rho_{q_1}^{\lambda_1 +}$, $\rho_{q_1 q_2}^{\lambda_1 \lambda_2 +}$, $\rho_{q_2}^{\lambda_2}$ em (7) referem-se ao sistema de coordenadas x, y, z. É conveniente expressá-los com relação a sua direção de propagação $\vec{k}$ e polarização $\vec{p}$, ou seja, no sistema $\vec{kp}$. (ver apêndice A). Denotando por um índice zero as quantidades referidas ao sistema $\vec{kp}$, temos:

$$\rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(X_1) = \sum_{q_1'} \rho_{q_1'}^{\lambda_1 +}(X_1)_0\, D_{q_1' q_1}^{\lambda_1 *}(R_1) \tag{8a}$$

$$\rho_{q_2}^{\lambda_2}(X_3) = \sum_{q_2'} \rho_{q_2'}^{\lambda_2}(X_3)_0\, D_{q_2' q_2}^{\lambda_2}(R_3) \tag{8b}$$

Para se obter a expressão do tensor $\rho^{\lambda_1\lambda_2 +}_{q_1 q_2}$ (X2) no sistema $\vec{kp}$, é suficiente exprimir os tensores U^{λ}_{q} no mesmo sistema. Isto porque tais tensores formam um conjunto completo (7A) e portanto constituem uma base para os tensores estatísticos. Assim, para expressar os tensores de radiação no sistema $\vec{kp}$, é indiferente expressarmos a base ou os hamiltoneanos de radiação no novo sistema. Convém salientar que nesse ponto está a vantagem do emprego do método adotado no presente trabalho. Ao se empregar a noção de matriz densidade torna-se, nesta etapa, necessário escrever o hamiltoneano de radiação mais explicitamente a fim de expressá-lo no sistema $\vec{kp}$. Como se vê, os tensores estatísticos possuem propriedades frente a rotações mais convenientes e consequentemente a vantagem do seu emprego torna-se clara.

Em decorrência disso, tem-se para a relação (7b):

$$\rho^{\lambda_1\lambda_2 +}_{q_1 q_2}(X_2) = \sum_{q,q'} D^{\lambda_1}_{q q_1}(R_2)\, D^{\lambda_2 *}_{q' q_2}(R_2)\, Tr\left[H_2 U^{\lambda_1}_{q} H_2^{+} U^{\lambda_2 +}_{q'}\right]$$

$$= \sum_{q,q'} D^{\lambda_1}_{q q_1}(R_2)\, D^{\lambda_2 *}_{q' q_2}(R_2)\, \rho^{\lambda_1\lambda_2 +}_{q q'}(X_2)_0 \qquad (8c)$$

Se estamos interessados apenas na expressão para correlação angular direcional, $q_1' = q_2' = q' = q = 0$ (12A). Logo, as relações (8) ficam para este caso:

$$\rho^{\lambda_1 +}_{q_1}(X_1) = \rho^{\lambda_1 +}_{0}(X_1)_0\, D^{\lambda_1 *}_{0 q_1}(R_1) = \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0\, D^{\lambda_1 *}_{0 q_1}(R_1)$$

$$\rho^{\lambda_1\lambda_2 +}_{q_1 q_2}(X_2) = \rho^{\lambda_1\lambda_2 +}_{0\,0}(X_2)\, D^{\lambda_1}_{0 q_1}(R_2)\, D^{\lambda_2 *}_{0 q_2}(R_2) = \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_2}(X_2)_0\, D^{\lambda_1}_{0 q_1}(R_2)\, D^{\lambda_2 *}_{0 q_2}(R_2)$$

$$\rho^{\lambda_2}_{q_2}(X_3) = \rho^{\lambda_2}_{0}(X_3)_0\, D^{\lambda_2}_{0 q_2}(R_3) = \rho_{\lambda_2}(X_3)_0\, D^{\lambda_2}_{0 q_2}(R_3)$$

Dessa forma, se em (6) exprimirmos os tensores estatísticos no sistema $\vec{kp}$ e supondo não se observar a direção de polarização das três radiações X1, X2 e X3, obtemos para a função correlação:

$$W(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 q_1 \\ \lambda_2 q_2}} \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0 \, \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_2}(X_2)_0 \, \rho_{\lambda_2}(X_3)_0 \, D^{\lambda_1 *}_{0q_1}(R_1) \, D^{\lambda_1}_{0q_1}(R_2) \times \times D^{\lambda_2 *}_{0q_2}(R_2) \, D^{\lambda_2}_{0q_2}(R_3) \qquad (9a)$$

ou ainda, em vista de (10)

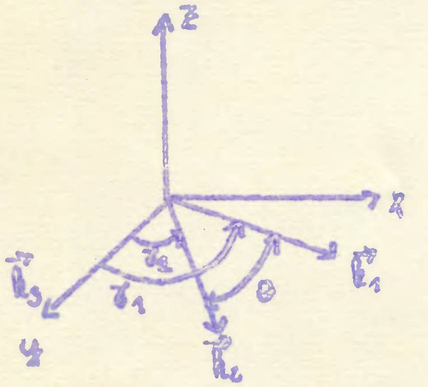
$$W(1,2,3) = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0 \, \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_2}(X_2)_0 \, \rho_{\lambda_2}(X_3)_0 \, P_{\lambda_1}(\cos\xi) \, P_{\lambda_2}(\cos\xi') \qquad (9b)$$

onde R_i é a rotação expressa pelos ângulos de Euler α_1, β_1, γ_1, R_2 pelos ângulos de Euler α_2, β_2, γ_2 e R_3 pelos de α_3, β_3, γ_3. Assim os cossenos de ξ e ξ' que aparecem em (9b) valem:

$$\cos\xi = \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}\beta_2 \cos(\gamma_2 - \gamma_1)$$

$$\cos\xi' = \cos\beta_2 \cos\beta_3 + \operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}\beta_3 \cos(\gamma_3 - \gamma_2)$$

Para a situação em que os três detetores se encontram no mesmo plano e supondo este ser o plano xy, conforme esquema abaixo, obtemos:



$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \pi/2$$

$$\gamma_3 = 0$$

$$\theta = \gamma_1 - \gamma_2$$

$$\cos\xi = \cos(\gamma_2 - \gamma_1) = \cos\theta$$

$$\cos\xi' = \cos\gamma_2$$

$$W(1,2,3) = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0 \, \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_2}(X_2)_0 \, \rho_{\lambda_2}(X_3)_0 \, P_{\lambda_1}(\cos\theta) \, P_{\lambda_2}(\cos\gamma_2) \qquad (9c)$$

A fim de que se possa utilizar as expressões (9) necessitamos ainda calcular os tensores $\rho^{+}_{\lambda_1}(X1)$, $\rho^{+}_{\lambda_1\lambda_2}(X2)$ e $\rho_{\lambda_3}(X3)$, o que será feito no próximo ítem.

I.2 Tensores estatísticos

Com o propósito de estimar o valor dos tensores estatísticos para o caso de correlação direcional é conveniente calculá-los inicialmente supondo que os índices q_1', q_2', q' e q das expressões (8) não sejam nulos, ou seja, devemos calcular

$$\rho^{\lambda_1 +}_{q_1'}(X_1)_0 = Tr\left[H(X_1)_0\, H^{+}(X_1)_0\, U^{\lambda_1 +}_{q_1'}\right]$$

$$\rho^{\lambda_2}_{q_2'}(X_3)_0 = Tr\left[H^{+}(X_3)_0\, H(X_3)_0\, U^{\lambda_2}_{q_2}\right]$$

$$\rho^{\lambda_1\lambda_2 +}_{q_1 q_2}(X_2)_0 = Tr\left[H(X_2)_0\, U^{\lambda_1}_{q_1}\, H^{+}(X_2)_0\, U^{\lambda_2 +}_{q'}\right]$$

Por conveniência passaremos a adotar no que segue, a notação:

$q_1' = q_1$, $q_2' = q_2$, $q = q_3$, $q' = q_4$

O operador $H(X)$, que descreve a emissão da radiação X, pode ser expandido em termos do operador $H(\vec{k},p)$. Este operador descreve a emissão da mesma radiação como uma onda plana de vetor $\vec{k}$ e projeção do spin p do quanta da radiação, com relação a $\vec{k}$. A razão dessa expansão deve-se ao fato de que a radiação que detetamos é observada em seu estado de onda plana. Logo podemos escrever:[12]

$$H(X)_0 = \sum_p a_p\, H(\vec{k},p)$$, onde a_p são as amplitudes da expansão. (10a)

Estudaremos somente o caso em que a radiação X é de origem eletromagnética. Este assunto é discutido por diversos autores[18,19,20,21,22,23,24].

É nossa intenção dar um breve resumo dos principais aspectos que envolvem esse fenômeno.

Quando se considera as interações eletromagnéticas de um sistema quântico cujos estados possuem momento angular I e paridade π definidos, é mais conveniente expressar o campo eletromagnético em coordenadas esféricas do que em coordenadas cartesianas, ou seja, descrever as ondas eletromagnéticas como autofunções do momento angular e paridade, ao invés de autofunções do momento linear.

Como os estados inicial ψ_i e final ψ_f dos níveis para os quais ocorre a transição são autofunções de I, e π, os princípios de conservação impõem que as diferenças entre os números quânticos inicial e final:

$$\vec{I}_i - \vec{I}_f = \vec{L}$$

$$\pi_i - \pi_f = \pi_r \tag{11}$$

sejam encontradas no campo de radiação da onda emitida. É por esse motivo que é mais conveniente descrever as ondas eletromagnéticas como autofunções do momento linear.

Tais autofunções, que formam um conjunto completo, são denominadas de campos de multipolo (elétrico ou magnético, denotados por $\vec{A}^{(e)}_{LM}(k\vec{r})$ e $\vec{A}^{(m)}_{LM}(k\vec{r})$ respectivamente). Assim o vetor potencial $\vec{A}$ da radiação emitida, bem como os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{H}$ podem ser expandidos em termos desses multipolos.

Vamos escrever explicitamente a expressão do operador $H(X)_0$ em função dos campos de multipolo. A dedução da mesma pode ser encontrada nas referências citadas no início deste parágrafo. Nos limitaremos aqui somente a transcrever os resultados já conhecidos.

$$H(X)_0 = \sum_p a_p \, H(\vec{k}p)_0$$

J_N é o operador corrente do núcleo

$$H(kp)_0 = - \vec{J}_N \cdot \vec{A}_p(\vec{k})_0 \tag{12}$$

onde $\vec{A}_p(\vec{k})_0$ representa o vetor potencial descrito como uma onda plana, cuja direção de propagação é a do eixo z:

$$\vec{A}_p(\vec{k})_0 = \vec{e}_p \, e^{ikz} \tag{13}$$

onde p, a projeção do quanta de radiação, para o caso de radiação eletromagnética vale ± 1. O valor + 1 correspondendo a uma onda circularmente polarizada à esquerda e o valor -1 a uma onda circularmente polarizada à direita. O vetor $\vec{e}_p$ é um vetor de polarização:

$$\vec{e}_p = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{x} + ip\vec{y}) \qquad (|\vec{x}| = |\vec{y}| = 1)$$

Definindo os operadores de multipolo como:

$$\vec{A}^{(e)}_{LM}(k\vec{r}) = \frac{i^L \, \vec{\nabla} \times \vec{L}}{k\,[L(L+1)]^{1/2}} \, j_L(kr)\, Y_{LM}(\hat{r}) \tag{14}$$

$$\vec{A}^{(m)}_{LM}(k\vec{r}) = \frac{i^L \, \vec{L}}{[L(L+1)]^{1/2}} \, j_L(kr)\, Y_{LM}(\hat{r}) \tag{15}$$

a expressão (12) em termos desses multipolos vale:

$$\vec{A}_p(\vec{k})_0 = -\sqrt{2\pi} \sum_{L,M} (2L+1)^{1/2} \, (\vec{A}^{(e)}_{LM} + p\vec{A}^{(m)}_{LM})_0 \, \delta_{M,p} \qquad (15)$$

que pode ainda ser escrita como:

$$Ap(k)_0 = -\sqrt{2\pi} \sum_{L,M} (2L+1)^{1/2} \, p^{A_\pi} \, \delta_{M,p} \, \vec{A}^{(\pi)}_{LM} \tag{16}$$

onde se introduziu a quantidade A_π, cujos valores que assume são:

A_e = 0 para radiação elétrica

A_m = 1 para radiação magnética

Assim, tendo em vista as relações(12) a (16), obtemos para o hamiltoneano de radiação:

$$H(X)_0 = \sqrt{2\pi} \sum_{L_1 M_1 p} a_p \, (2L+1)^{1/2} \, p^{\Lambda_\pi} \, \delta_{M,p} \, \vec{JN} \cdot \vec{A}^{(\pi)*}_{LM} \qquad (17)$$

Ao se calcular os elementos de matriz deste operador é conveniente escolhermos a fase dos estados nucleares de tal forma que os elementos assim calculados sejam reais(12). Utilizaremos aqui este resultado. Dessa forma o elemento $\langle I_f m_f | \vec{JN} \cdot \vec{A}^{(\pi)*}_{LM} | I_i m_i \rangle = \langle I_f m_f | JNA_{LM} | I_i m_i \rangle$

- Cálculo do tensor $\rho^{\lambda_1 +}_{q_1}(X_1)_0$

Conhecendo-se a expressão do hamiltoneano de radiação podemos agora obter o valor dos tensores estatísticos das radiações. Para o tensor $\rho^{\lambda_1 +}_{q_1}(X_1)_0$, tem-se:

$$\rho^{\lambda_1 +}_{q_1}(X_1)_0 = T_r \left[H(X_1)_0 H^+(X_1)_0 \, U^{\lambda_1 +}_{q_1} \right] =$$

$$\sum_{m_1 m_0 m_1'} \langle I_0 m_1 | H_1^+ | I_1 m_0 \rangle \langle I_1 m_0 | U^{\lambda_1 +}_{q_1} | I_1 m_1' \rangle \langle I_1 m_1' | H_1 | I_0 m_1 \rangle$$

Utilizando o teorema de Wigner-Eckart bem como as expansões (10a) e (10b), obtem-se:

$$\langle I_0 m_1 | H_1^+ | I_1 m_0 \rangle = \sum_{L_1' M_1' p'} \sqrt{2\pi} \, a^*_{p'} \, (2L_1'+1)^{1/2} \, p'^{\Lambda_\pi} \, \delta_{M_1', p'} \, (-)^{L_1' - M_1' + 1 + I_0 - m_1} \begin{pmatrix} I_0 & L_1' & I_1 \\ -m_1 & -M_1' & m_0 \end{pmatrix} \langle I_0 \| jNA^{(\pi)}_{L_1'} \| I_1 \rangle \qquad (18)$$

pois $\left(\vec{j_N} \cdot \vec{A}^{(\pi)}_{LM} \right)^+ = (-)^{L-M+1} \, \vec{j_N} \cdot \vec{A}^{(\pi)}_{L-M}$

$$\langle I_1 m_1' | H_1 | I_0 m_1 \rangle = \sum_{L_1 M_1 p} \sqrt{2\pi} \, a_p \, (2L_1+1)^{1/2} \, p^{\Lambda_\pi} \, \delta_{M_1, p} \, (-)^{L_1 - M_1} \times \qquad (19)$$

$$(-)^{1+I_0-m_1} \begin{pmatrix} I_0 & L_1 & I_1 \\ -m_1 & -M_1 & m_1' \end{pmatrix} \langle I_0 \| jNA^{(\pi)}_{L_1} \| I_1 \rangle$$

De acôrdo com (4bA):

$$\langle I_1 m_0 | U^{\lambda_1 +}_{q_1} | I_1 m'_1 \rangle = (-)^{I_1 + m_0 + q_1} (2\lambda_1+1)^{1/2} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_1 \\ -m_0 & m'_1 & -q_1 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Assim,

$$\rho^{\lambda_1 +}_{q_1}(X_1)_0 = \sum_{\substack{L_1 M_1 p \\ L'_1 M'_1 p'}} 2\pi\, a_p a^*_{p'} \left[(2L_1+1)(2L'_1+1)(2\lambda_1+1)\right]^{1/2} p'^{A_{\pi'}} p^{A_\pi} \delta_{M'_1, p'} \times$$

$$\delta_{M_1,p} \langle I_0 \| i_N A^{(\pi')}_{L'_1} \| I_1 \rangle \langle I_0 \| i_N A^{(\pi)}_{L_1} \| I_1 \rangle \sum_{m_0 m_1 m'_1} (-)^{L'_1 - M'_1 + 1} \times$$

$$(-)^{I_0 - m_1 + L_1 - M_1 + 1 + I_1 - m_1 + I_0 + m_0 + q_1} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_1 \\ -m_0 & m'_1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & L'_1 & I_1 \\ -m_1 & -M'_1 & m_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & L_1 & I_1 \\ -m_1 & -M_1 & m'_1 \end{pmatrix}$$

Entretanto, utilizando a propriedade (2C), e como:

$$q_1 = m_0 - m'_1 \qquad M'_1 = m_0 - m_1 \qquad M_1 = m'_1 - m_1$$

e em vista das propriedades (3C), podemos escrever:

$$\sum_{\substack{m_0 m_1 \\ m'_1}} (-)^{L'_1 - M'_1 + L_1 - M_1 + 2I_0 + I_1 - 2m_1 + m_0 + q_1} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_1 \\ -m_0 & m'_1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & L'_1 & I_1 \\ -m_1 & -M'_1 & m_0 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} I_0 & L_1 & I_1 \\ -m_1 & -M_1 & m'_1 \end{pmatrix} = (-)^{L'_1 - M'_1 + L_1 - M_1 + I_1 + I_0 + \lambda_1} \sum_{\substack{m_0 m_1 \\ m'_1}} (-)^{2I_1 + I_0 - 2m_1 + m_0 + q_1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & I_1 & I_1 \\ q_1 & m_0 & -m'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & L_1 & I_1 \\ -m_1 & -M_1 & m'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & I_1 & L'_1 \\ m_1 & -m_0 & M'_1 \end{pmatrix} = (-)^{L'_1 + L_1 - M_1 + I_1 + I_0 + \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 & L'_1 \\ q_1 & -M_1 & M'_1 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 & L_1 & L'_1 \\ I_0 & I_1 & I_1 \end{Bmatrix} = (-)^{L_1 + I_0 - M_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 & L'_1 \\ -q_1 & M_1 & -M'_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & L_1 & L'_1 \\ I_0 & I_1 & I_1 \end{Bmatrix} \text{, pois}$$

$-2m_1 + m_0 + q_1 = -2m_1 + 2m_0 - m'_1 = -m_1 + m_0 - m'_1 + M'_1$ e como

$-m_1 - m'_1 = M_1 - 2m'_1$ que é um nº inteiro,

$$(-)^{-2m_1 + m_0 + q_1} = (-)^{M_1} (-)^{m_1 + m_0 + m'_1}$$

Efetuando a soma sôbre M_1 e M'_1:

$$\rho^{\lambda_1 +}_{q_1}(X_1)_0 = \sum_{\substack{L_1 p \\ L'_1 p'}} 2\pi\, a_p a^*_{p'} \left[(2L_1+1)(2L'_1+1)(2\lambda_1+1)\right]^{1/2} p'^{A_{\pi'}} p^{A_\pi} \langle I_0 \| i_N A^{(\pi')}_{L'_1} \| I_1 \rangle \times \qquad (21)$$

$$\langle I_0 \| i_N A^{(\pi)}_{L_1} \| I_1 \rangle (-)^{I_1 + I_0 - p} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 & L'_1 \\ -q_1 & p & -p' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & L_1 & L'_1 \\ I_0 & I_1 & I_1 \end{Bmatrix}$$

Para correlação direcional $a_p a^*_{p'} = \frac{1}{2}\,\delta_{p,p'}$ e portanto:

$$\rho^+_{\lambda_1}(X_1)_0 = \pi \sum_{L_1 L_1', p=\pm 1} \left[(2L_1+1)(2L_1'+1)(2\lambda_1+1)\right]^{1/2} p^{\Lambda_\pi+\Lambda_{\pi'}} \langle I_0 \| j_N A^{(\pi')}_{L_1'} \| I_1 \rangle \times$$

$$\langle I_0 \| j_N A^{(\pi)}_{L_1} \| I_1 \rangle (-)^{I_1+I_0-p} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 & L_1' \\ -q_1 & p & -p \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & L_1 & L_1' \\ I_0 & I_1 & I_1 \end{Bmatrix} \qquad (22)$$

$$(q_1 = p - p = 0)$$

Se na expressão (22) efetuarmos a soma sobre p, tem-se

$$\sum_{p=\pm 1} p^{\Lambda_\pi+\Lambda_{\pi'}} (-)^p \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 & L_1' \\ 0 & p & -p \end{pmatrix} = (-)^1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 & L_1' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + (-)^{\Lambda_\pi+\Lambda_{\pi'}-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 & L_1' \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 & L_1' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[1 + (-)^{\Lambda_\pi+\Lambda_{\pi'}+\lambda_1+L_1+L_1'}\right]$$

Logo, para que $\rho^+_{\lambda_1}(X_1)_0$ seja diferente de zero, é necessário que $\Lambda_\pi + \Lambda_{\pi'} + \lambda_1 + L_1 + L_1'$ seja par. Entretanto, se a radiação X_1 de multipolaridade L_1 e L_1' liga estados nucleares cujas paridades são números quânticos perfeitos, $\Lambda_\pi + \Lambda_{\pi'} + L_1 + L_1'$ = nº par. Assim λ_1 deve ser par, e:

$$\rho^+_{\lambda_1}(X_1)_0 = 2\pi \sum_{L_1 L_1'} \left[(2L_1+1)(2L_1'+1)(2\lambda_1+1)\right]^{1/2} \langle I_0 \| j_N A^{(\pi')}_{L_1'} \| I_1 \rangle \langle I_0 \| j_N A^{(\pi)}_{L_1} \| I_1 \rangle_\pi$$

$$(-)^{I_1+I_0-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 & L_1' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & L_1 & L_1' \\ I_0 & I_1 & I_1 \end{Bmatrix}$$

Introduzindo as funções $F_\lambda(L_1\ L_1'\ I\ I')$, cuja expressão é dada em (4C) podemos escrever:

$$\rho^+_{\lambda_1}(X_1)_0 = \frac{2\pi}{(2I_0+1)^{1/2}} \sum_{L_1 L_1'} F_{\lambda_1}(L_1 L_1' I_0 I_1) \langle I_0 \| j_N A^{(\pi)}_{L_1} \| I_1 \rangle \langle I_0 \| j_N A^{(\pi')}_{L_1'} \| I_1 \rangle \qquad (23)$$

Supondo que ocorram apenas dois multipolos

$L_1 = L_1$ e $L_1 = L_1'$

$L_1' = L_1$ e $L_1' = L_1'$

$$\rho^{+}_{\lambda_1}(\chi_1)_0 = a\Big[F_{\lambda_1}(L_1L_1I_0I_1)\langle I_0\|j_N A^{(\pi)}_{L_1}\|I_1\rangle^2 + 2F_{\lambda_1}(L_1L_1'I_0I_1)\langle I_0\|j_N A^{(\pi)}_{L_1}\|I_1\rangle \times$$

$$\langle I_0\|j_N A^{(\pi')}_{L_1'}\|I_1\rangle + F_{\lambda_1}(L_1'L_1'I_0I_1)\langle I_0\|j_N A^{(\pi')}_{L_1'}\|I_1\rangle^2\Big], \text{ onde}$$

$a = \dfrac{2\pi}{(2I_0+1)^{1/2}}$ x fator dado em (1') $\therefore$ $a = 2\pi/(2I_0+1)^{3/2}$

Denominando de acordo com Biedenharn e Rose[1],

$\delta(\chi_1) = \dfrac{\langle I_1\| j_N A^{(\pi')}_{L_1'}\|I_0\rangle}{\langle I_1\| j_N A^{(\pi)}_{L_1}\|I_0\rangle}$ e usando a normalização $\rho^{+}_0(\chi_1)_0 = 1$,

$$\rho^{+}_0(\chi_1)_0 = a\sum_{L_1L_1'} F_0(L_1L_1'I_0I_1)\langle I_0\|j_N A^{(\pi)}_{L_1}\|I_1\rangle\langle I_0\|j_N A^{(\pi')}_{L_1'}\|I_1\rangle =$$

$$a\sum_{L_1}\langle I_0\|j_N A^{(\pi)}_{L_1}\|I_1\rangle^2 = a\langle I_1\|j_N A^{(\pi)}_{L_1}\|I_0\rangle^2\left[1+\delta^2(\chi_1)\right] = 1$$

Logo:

$$\rho^{+}_{\lambda_1}(\chi_1)_0 = a\left\{\frac{F_{\lambda_1}(L_1L_1I_0I_1)}{a[1+\delta^2(\chi_1)]} + (-1)^{L_1+L_1'}\frac{2\delta(\chi_1)F_{\lambda_1}(L_1L_1'I_0I_1)}{a[1+\delta^2(\chi_1)]} + \frac{\delta^2(\chi_1)F_{\lambda_1}(L_1'L_1'I_0I_1)}{a[1+\delta^2(\chi_1)]}\right\}$$

$$= \frac{1}{1+\delta^2(\chi_1)}\left[F_{\lambda_1}(L_1L_1I_0I_1) + (-1)^{L_1+L_1'}2\delta(\chi_1)F_{\lambda_1}(L_1L_1'I_0I_1) + \delta^2(\chi_1)F_{\lambda_1}(L_1'L_1'I_0I_1)\right] \quad (24)$$

- Cálculo do tensor $\rho^{\lambda_2}_{q_2}(X_3)_0$

Com a expressão desse tensor é semelhante a da referente à radiação X_1, o processo empregado para obter o valor de $\rho^{\lambda_2}_{q_2}(X_3)_0$ é idêntico ao de $\rho^{\lambda_1 +}_{q_1}(X_1)_0$. Em consequência disso, não será preciso desenvolver minuciosamente todas as etapas do cálculo para esse tensor, pois essas já foram descritas em detalhe no ítem anterior.

Da expressão (7c) tem-se:

$$\rho^{\lambda_2}_{q_2}(X_3)_0 = \mathrm{Tr}\left[U^{\lambda_2}_{q_2}H_3H_3^{+}\right] = \mathrm{Tr}\left[H_3^{+}U^{\lambda_2}_{q_2}H_3\right]$$

$$= \sum_{m_2m_1m_1'}\langle I_3m_2|H_3^{+}|I_2m_1\rangle\langle I_2m_1|U^{\lambda_2}_{q_2}|I_2m_1'\rangle\langle I_2m_1'|H_3|I_3m_2\rangle$$

Mas:

$$\langle I_3 m_2 | H_3^+ | I_2 m_1 \rangle = \sum_{p' L_3' M_3'} \sqrt{2\pi}\, a_{p'}^* (2L_3'+1)^{1/2} p'^{\Lambda_{\pi'}} \delta_{M_3', p'} (-)^{L_3'-M_3'} \times$$

$$(-)^{1+I_3-m_2} \begin{pmatrix} I_3 & L_3' & I_2 \\ -m_2 & -M_3' & m_1 \end{pmatrix} \langle I_3 \| j_N A_{L_3'}^{(\pi')} \| I_2 \rangle$$

$$\langle I_2 m_1' | H_3 | I_3 m_2 \rangle = \sum_{p L_3 M_3} \sqrt{2\pi}\, a_p (2L_3+1)^{1/2} p^{\Lambda_\pi} \delta_{M_3, p} (-)^{L_3-M_3+1+I_3-m_2}$$

$$\begin{pmatrix} I_3 & L_3 & I_2 \\ -m_2 & -M_3 & m_1' \end{pmatrix} \langle I_3 \| j_N A_{L_3}^{(\pi)} \| I_2 \rangle$$

$$\langle I_2 m_1 | U_{q_2}^{\lambda_2} | I_2 m_1' \rangle = (-)^{I_2+m_1} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_2 \\ -m_1 & m_1' & q_2 \end{pmatrix} (2\lambda_2+1)^{1/2}$$

Logo:

$$\rho_{q_2}^{\lambda_2}(X_3)_0 = \sum_{\substack{p L_3 M_3 \\ p' L_3' M_3'}} 2\pi\, a_p a_{p'}^* \left[(2L_3+1)(2L_3'+1)(2\lambda_2+1)\right]^{1/2} p'^{\Lambda_{\pi'}} p^{\Lambda_\pi} \delta_{M_3', p'} \delta_{M_3, p}$$

$$\langle I_3 \| j_N A_{L_3}^{(\pi)} \| I_2 \rangle \langle I_3 \| j_N A_{L_3'}^{(\pi')} \| I_2 \rangle \sum_{m_2 m_1 m_1'} (-)^{I_3-m_2+I_3-m_2+I_2+m_1+L_3} \times$$

$$(-)^{L_3'-M_3-M_3'} \begin{pmatrix} I_3 & L_3' & I_2 \\ -m_2 & -M_3' & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & L_3 & I_2 \\ -m_2 & -M_3 & m_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_2 \\ -m_1 & m_1' & q_2 \end{pmatrix} = \sum_{p L_3 p' L_3'} (-)^{I_2+I_3-p'} \times$$

$$2\pi\, a_p a_{p'}^* \left[(2L_3+1)(2L_3'+1)(2\lambda_2+1)\right]^{1/2} p'^{\Lambda_{\pi'}} p^{\Lambda_\pi} \langle I_3 \| j_N A_{L_3}^{(\pi)} \| I_2 \rangle \times$$

$$\langle I_3 \| j_N A_{L_3'}^{(\pi')} \| I_2 \rangle \begin{pmatrix} \lambda_2 & L_3 & L_3' \\ q_2 & p & -p' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & L_3 & L_3' \\ I_3 & I_2 & I_2 \end{Bmatrix}$$

No caso de correlação direcional, $a_p a_{p'}^* = \frac{1}{2} \delta_{p,p'}$, e assim:

$$\rho_{\lambda_2}(X_3)_0 = \pi \sum_{L_3 L_3'} (-)^{I_2+I_3} \left[(2L_3+1)(2L_3'+1)(2\lambda_2+1)\right]^{1/2} \langle I_3 \| j_N A_{L_3'}^{(\pi')} \| I_2 \rangle \times$$

$$\langle I_3 \| j_N A_{L_3}^{(\pi)} \| I_2 \rangle \begin{Bmatrix} \lambda_2 & L_3 & L_3' \\ I_3 & I_2 & I_2 \end{Bmatrix} \sum_{p=\pm 1} (-)^{-p} p^{\Lambda_\pi + \Lambda_{\pi'}} \begin{pmatrix} \lambda_2 & L_3 & L_3' \\ 0 & p & -p \end{pmatrix}$$

Efetuando a soma sobre p,

$$\rho_{\lambda_2}(X_3)_0 = 2\pi \sum_{L_3 L_3'} (-)^{I_2+I_3-1} \left[(2\lambda_2+1)(2L_3+1)(2L_3'+1)\right]^{1/2} \langle I_3 \| j_N A_{L_3}^{(\pi)} \| I_2 \rangle \times$$

$$\langle I_3 \| j_N A_{L_3'}^{(\pi')} \| I_2 \rangle \begin{pmatrix} \lambda_2 & L_3 & L_3' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & L_3 & L_3' \\ I_3 & I_2 & I_2 \end{Bmatrix}$$

Usando a função (4C),

$$\rho_{\lambda_2}(X_3)_0 = \frac{2\pi}{(2I_2+1)^{1/2}} \sum_{L_3 L_3'} F_{\lambda_2}(L_3 L_3' I_3 I_2) \langle I_3 \| j_N A_{L_3}^{(\pi)} \| I_2 \rangle \langle I_3 \| j_N A_{L_3'}^{(\pi')} \| I_2 \rangle \quad (25)$$

Utilizando a razão de mistura $\delta(\gamma_3) = \dfrac{\langle I_3 \| j_N A_{L_3'}^{(\pi')} \| I_2 \rangle}{\langle I_3 \| j_N A_{L_3}^{(\pi)} \| I_2 \rangle}$ da radiação X_3, a normalização $\rho_0\ (X_3)_0 = 1$ e supondo que na transição ocorram apenas dois multipolos $\begin{cases} L_3 = L_3, L_3' \\ L_3' = L_3', L_3 \end{cases}$ se obtém o seguinte resultado para (25):

$$\rho_{\lambda_2}(X_3)_0 = \frac{1}{1+\delta^2(\gamma_3)} \left[F_{\lambda_2}(L_3 L_3 I_3 I_2) + 2\,\delta(\gamma_3) F_{\lambda_2}(L_3 L_3' I_3 I_2) + \delta^2(\gamma_3) F_{\lambda_2}(L_3' L_3' I_3 I_2) \right] \quad (26)$$

Onde λ_2 é um número par.

- Cálculo do tensor $\rho_{q_1 q_2}^{\lambda_1 \lambda_2^+}(X_2)_0$

Em vista de (7b), podemos escrever:

$$\rho_{q_1 q_2}^{\lambda_1 \lambda_2^+}(X_2)_0 = Tr\left[H_2\, U_{q_1}^{\lambda_1} H_2^+ U_{q_2}^{\lambda_2^+} \right] = Tr\left[H_2^+ U_{q_2}^{\lambda_2^+} H_2\, U_{q_1}^{\lambda_1} \right]$$

$$= \sum_{\substack{m_2 m_1' \\ m_1 m_2'}} \langle I_2 m_2 | H_2^+ | I_1 m_1 \rangle \langle I_1 m_1 | U_{q_2}^{\lambda_2^+} | I_1 m_1' \rangle \langle I_1 m_1' | H_2 | I_2 m_2' \rangle \times \langle I_2 m_2' | U_{q_1}^{\lambda_1} | I_2 m_2 \rangle$$

De acordo com as expressões (17) e (4bA), tem-se:

$$\langle I_2 m_2 | H_2^+ | I_1 m_1 \rangle = \sum_{L_2' M_2' p'} a_{p'}^{*} \sqrt{2\pi}\, (2L_2'+1)^{1/2}\, p'^{\,A_{p'}}\, \delta_{M_2', p'} (-)^{L_2' - M_2' + 1} \times (-)^{I_2 - m_2} \begin{pmatrix} I_2 & L_2' & I_1 \\ -m_2 & -M_2' & m_1 \end{pmatrix} \langle I_2 \| j_N A_{L_2'}^{(\pi')} \| I_1 \rangle$$

$$\langle I_2 m_2' | U_{q_1}^{\lambda_1} | I_2 m_2 \rangle = (-)^{I_2 - m_2'} (2\lambda_1+1)^{1/2} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ -m_2' & m_2 & q_1 \end{pmatrix}$$

$$\langle I_1 m_1' | H_L | I_2 m_2' \rangle = \sum_{L_2 M_2 p} a_p \sqrt{2\pi}\, (2L_2+1)^{1/2}\, p^{\Lambda\pi}\, \delta_{M_2, p}\, (-)^{L_2 - M_2 + 1 + I_2} \times$$

$$(-)^{-m_2'} \begin{pmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ -m_2' & -M_2 & m_1' \end{pmatrix} \langle I_2 \| j_N A_{L_2}^{(\pi)} \| I_1 \rangle$$

$$\langle I_1 m_1 | U_{q_2}^{\lambda_2 +} | I_1 m_1' \rangle = (-)^{I_1 + m_1'} (2\lambda_2+1)^{1/2} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ -m_1' & m_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\rho_{q_1 q_2}^{\lambda_1 \lambda_2 +}(X_2)_0 = 2\pi \sum_{\substack{L_2 M_2 p \\ L_2' M_2' p'}} a_{p'}^* a_p \left[(2L_2+1)(2L_2'+1)(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)\right]^{1/2} p^{\Lambda\pi} p'^{\Lambda\pi'} \times$$

$$\delta_{M_2, p}\, \delta_{M_2', p'} \langle I_2 \| j_N A_{L_2}^{(\pi)} \| I_1 \rangle \langle I_2 \| j_N A_{L_2'}^{(\pi')} \| I_1 \rangle \sum_{\substack{m_2 m_1 \\ m_1' m_2'}} (-)^{L_2' - M_2'} \times$$

$$(-)^{I_2 - m_2 + L_2 - M_2 + I_2 - m_2' + I_2 + m_2' + I_1 + m_1'} \begin{pmatrix} I_2 & L_2' & I_1 \\ -m_2 & -M_2' & m_1 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ -m_2' & -M_2 & m_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ -m_2' & m_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ -m_1' & m_1 & q_2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Para correlação direcional, $a_p a_{p'}^* = \frac{1}{2}\, \delta_{p,p'}$ e $q_1 = q_2 = 0$. Se esse é o caso, podemos escrever:-

$$\rho_{\lambda_1 \lambda_2}^{+}(X_2)_0 = \pi \sum_{L_2 L_2', p=\pm 1} \left[(2L_2+1)(2L_2'+1)(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)\right]^{1/2} p^{\Lambda\pi + \Lambda\pi'} \langle I_2 \| j_N A_{L_2}^{(\pi)} \| I_1 \rangle \times$$

$$\langle I_2 \| j_N A_{L_2'}^{(\pi')} \| I_1 \rangle \sum_{\substack{m_2 m_1 \\ m_2' m_1'}} (-)^{3I_2 + I_1 + L_2 + L_2' - p} \begin{pmatrix} I_2 & L_2' & I_1 \\ -m_2 & -p & m_1 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ -m_2' & -p & m_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ -m_2' & m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ -m_1' & m_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entretanto, de acordo com o resultado obtido no apêndice (B),

$$\sum_{\substack{m_2 m_1 \\ m_2' m_1'}} (-)^{3I_2+I_1+L_2+L_2'-p} \begin{pmatrix} I_2 & L_2' & I_1 \\ -m_2 & -p & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ -m_2' & -p & m_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ -m_2' & m_2 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ -m_1' & m_1 & 0 \end{pmatrix} = (-)^{L_2'+p} \sum_{\lambda_3} (2\lambda_3+1) \begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & \lambda_1 \\ I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ L_2 & L_2' & \lambda_3 \end{Bmatrix}$$

Substituindo tal valor em (27)

$$\rho^{+}_{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_2)_0 = \pi \sum_{L_2 L_2' \lambda_3} (2\lambda_3+1) \left[(2L_2+1)(2L_2'+1)(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)\right]^{1/2} \langle I_2 \| j_N A^{(\pi)}_{L_2} \| I_1 \rangle \times$$

$$\langle I_2 \| j_N A^{(\pi')}_{L_2'} \| I_1 \rangle (-)^{L_2'} \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ L_2 & L_2' & \lambda_3 \end{Bmatrix} \sum_{p=\pm 1} (-)^p \, p^{A_\pi + A_{\pi'}} \begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -p & p & 0 \end{pmatrix}$$

Realizando a soma sobre p,

$$\sum_{p=\pm 1} (-)^p \, p^{A_\pi + A_{\pi'}} \begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} = (-)^1 \begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[1 + (-)^{L_2+L_2'+\lambda_3+A_\pi+A_{\pi'}}\right]$$

Vemos que essa expressão será não nula apenas quando λ_2 for par, já que $L_2 + L_2' + A_\pi + A_{\pi'}$, é um número par, pois se supõe que a radiação gama de multipolaridade L_2 e L_2' ocorre para estados nucleares cujas paridades são números quânticos perfeitos.

Assim,

$$\rho^{+}_{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_2)_0 = 2\pi \sum_{\substack{L_2 L_2' \\ \lambda_3, \text{par}}} (2\lambda_3+1) \left[(2L_2+1)(2L_2'+1)(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)\right]^{1/2} \langle I_2 \| j_N A^{(\pi)}_{L_2} \| I_1 \rangle \times$$

$$\langle I_2 \| j_N A^{(\pi')}_{L_2'} \| I_1 \rangle (-)^{L_2'-1} \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ L_2 & L_2' & \lambda_3 \end{Bmatrix} \qquad (28)$$

Supondo que na transição ocorram apenas dois multipolos

$L_2 = L_2$ e L_2'

$L_2' = L_2'$ e $\tilde{L}_2$, a expressão (28) pode ser colocada na forma:

$$\overset{+}{\rho}_{\lambda_1\lambda_2}(X_2)_0 = 2\pi \sum_{\lambda_3 \, par} (2\lambda_3+1)\left[(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)\right]^{1/2} \begin{pmatrix}\lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Bigg\{ (-)^{L_2-1}(2L_2+1) \times$$

$$\begin{pmatrix}L_2 & L_2 & \lambda_3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{Bmatrix}I_2 & I_2 & \lambda_1\\ I_1 & I_1 & \lambda_2\\ L_2 & L_2 & \lambda_3\end{Bmatrix} \langle I_2 \| j_N A^{(\pi)}_{L_2} \| I_1\rangle^2 + \left[(2L_2+1)(2L_2'+1)\right]^{1/2} \times$$

$$\begin{pmatrix}L_2 & L_2' & \lambda_3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{Bmatrix}I_2 & I_2 & \lambda_1\\ I_1 & I_1 & \lambda_2\\ L_2 & L_2' & \lambda_3\end{Bmatrix} \langle I_2 \| j_N A^{(\pi)}_{L_2} \| I_1\rangle \langle I_2 \| j_N A^{(\pi')}_{L_2'} \| I_1\rangle \Big[(-)^{L_2'-1} +$$

$$(-)^{2I_2+2I_1+L_2'+2L_2-1}\Big] + (2L_2'+1) \begin{pmatrix}L_2' & L_2' & \lambda_3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{Bmatrix}I_2 & I_2 & \lambda_1\\ I_1 & I_1 & \lambda_2\\ L_2' & L_2' & \lambda_3\end{Bmatrix} \times$$

$$(-)^{L_2'-1} \langle I_2 \| j_N A^{(\pi')}_{L_2'} \| I_1\rangle^2 \Bigg\} \qquad (29)$$

Com a normalização $\overset{+}{\rho}_{00}(X_2)_0 = 1$ e denominando $\delta(\gamma_2) = \dfrac{\langle I_2 \| j_N A^{(\pi')}_{L_2'} \| I_1\rangle}{\langle I_2 \| j_N A^{(\pi)}_{L_2} \| I_1\rangle}$ a razão de mistura da radiação X_2, tem-se:

$$\overset{+}{\rho}_{00}(X_2)_0 = 2\pi \Bigg\{ (-)^{L_2-1}(2L_2+1) \begin{pmatrix}L_2 & L_2 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{Bmatrix}I_2 & I_2 & 0\\ I_1 & I_1 & 0\\ L_2 & L_2 & 0\end{Bmatrix} \langle I_2 \| j_N A^{(\pi)}_{L_2} \| I_1\rangle^2$$

$$+ (-)^{L_2'-1} \left[(2L_2+1)(2L_2'+1)\right]^{1/2} \begin{pmatrix}L_2 & L_2' & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{Bmatrix}I_2 & I_2 & 0\\ I_1 & I_1 & 0\\ L_2 & L_2' & 0\end{Bmatrix} \times$$

$$\langle I_2 \| j_N A^{(\pi')}_{L_2'} \| I_1\rangle \langle I_2 \| j_N A^{(\pi)}_{L_2} \| I_1\rangle \left(1 + (-)^{2I_2+2I_1+2L_2}\right)$$

$$+ (-)^{L_2'-1}(2L_2'+1) \begin{pmatrix}L_2' & L_2' & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{Bmatrix}I_2 & I_2 & 0\\ I_1 & I_1 & 0\\ L_2' & L_2' & 0\end{Bmatrix} \langle I_2 \| j_N A^{(\pi')}_{L_2'} \| I_1\rangle^2 \Bigg\} \qquad (30)$$

$$= 1$$

Entretanto, de acordo com (10c), e (11c),

$$\begin{Bmatrix} I_2 & I_2 & 0 \\ I_1 & I_1 & 0 \\ L_2 & L_2 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1 & I_1 & 0 \\ L_2 & L_2 & 0 \\ I_2 & I_2 & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{I_1+L_2+I_2}}{\sqrt{(2I_2+1)}} \begin{Bmatrix} I_1 & I_1 & 0 \\ L_2 & L_2 & I_2 \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{2I_1+2I_2+2L_2}}{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)(2L_2+1)}}$$

$$\begin{Bmatrix} I_2 & I_2 & 0 \\ I_1 & I_1 & 0 \\ L_2 & L_2' & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1 & I_1 & 0 \\ L_2 & L_2' & 0 \\ I_2 & I_2 & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{I_1+L_2+I_2}}{\sqrt{(2I_2+1)}} \begin{Bmatrix} I_1 & I_1 & 0 \\ L_2' & L_2 & I_2 \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{L_2',L_2}(-)^{2I_2+2I_1+L_2+L_2'}}{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)(2L_2'+1)}}$$

$$\begin{Bmatrix} I_2 & I_2 & 0 \\ I_1 & I_1 & 0 \\ L_2' & L_2' & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1 & I_1 & 0 \\ L_2' & L_2' & 0 \\ I_2 & I_2 & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{I_1+L_2'+I_2}}{\sqrt{(2I_2+1)}} \begin{Bmatrix} I_1 & I_1 & 0 \\ L_2' & L_2' & I_2 \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{2I_1+2L_2'+2I_2}}{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)(2L_2'+1)}}$$

Logo,

$$\rho_{00}^{+}(X_2)_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)}} \Bigg[(-)^{3L_2-1+2I_1+2I_2} \frac{(2L_2+1)}{\sqrt{(2L_2+1)}} \begin{pmatrix} L_2 & L_2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\langle I_2 \| j_N A_{L_2}^{(\pi)} \| I_1 \rangle^2 + (-)^{3L_2'+2I_1+2I_2-1} \frac{(2L_2'+1)}{\sqrt{(2L_2'+1)}} \begin{pmatrix} L_2' & L_2' & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \langle I_2 \| j_N A_{L_2'}^{(\pi')} \| I_1 \rangle^2 \Bigg] = 1$$

Mas, em vista de (12C),

$$\begin{pmatrix} L_2 & L_2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{L_2+1}}{\sqrt{(2L_2+1)}} \qquad \begin{pmatrix} L_2' & L_2' & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{L_2'-1}}{\sqrt{(2L_2'+1)}}$$

Portanto,

$$\rho_{00}^{+}(X_2)_0 = \frac{2\pi(-)^{2I_2+2I_1}}{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)}} \left[\langle I_2 \| j_N A_{L_2}^{(\pi)} \| I_1 \rangle^2 + \langle I_2 \| j_N A_{L_2'}^{(\pi')} \| I_1 \rangle^2 \right] =$$

$$= \frac{2\pi(-)^{2I_2+2I_1}}{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)}} \langle I_2 \| j_N A_{L_2}^{(\pi)} \| I_1 \rangle^2 \left[1 + \delta^2(\gamma_2) \right] = 1 \tag{31}$$

Assim a expressão (29), com essa normalização torna-se:

$$\rho^{\tau}_{\lambda_1\lambda_2}(\gamma_2)_0 = \sum_{\lambda_3 \text{ par}} (-)^{-2I_2-2I_1} \sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)}\ \frac{(2\lambda_3+1)}{(1+\delta^2(\gamma_2))} \times$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg\{ (-)^{L_2-1} (2L_2+1) \begin{pmatrix} L_2 & L_2 & \lambda_3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2 \\ I_2 & I_1 & L_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{Bmatrix} +$$

$$2\delta(\gamma_2)(-)^{L_2'-1} \sqrt{(2L_2+1)(2L_2'+1)} \begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2 \\ I_2 & I_1 & L_2' \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{Bmatrix} +$$

$$\delta^2(\gamma_2)(-)^{L_2'-1} (2L_2'+1) \begin{pmatrix} L_2' & L_2' & \lambda_3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2' \\ I_2 & I_1 & L_2' \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{Bmatrix} \Bigg\} \qquad (32)$$

Onde se utilizou a propriedade de invariança do símbolo de 9j frente a uma reflexão em torno de uma de suas diagonais.

I.3 Função Correlação Angular $\gamma_1 - \gamma_3$ direcional não perturbada

Para se obter a expressão da função correlação direcional não perturbada no caso em que a radiação intermediária não é observada, devemos integrar a expressão (9a) no que se refere a parte angular da radiação X_2. Ou seja,

$$W(1-3) = \int W(1,2,3)\, d\Omega_2$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_1 q_1 \\ \lambda_2 q_2}} \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0\, \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_2}(X_2)_0\, \rho_{\lambda_2}(X_3)_0\, D^{\lambda_1 *}_{0q_1}(R_1)\, D^{\lambda_2}_{0q_2}(R_3) \times .$$

$$\int d\Omega_2\, D^{\lambda_1}_{0q_1}(R_2)\, D^{\lambda_2 *}_{0q_2}(R_2)$$

Esta integral, em vista de (13C), pode ser escrita como:

$$\int d\Omega_2\, D^{\lambda_1}_{0q_1}(R_2)\, D^{\lambda_2 *}_{0q_2}(R_2) = \frac{8\pi^2}{2\lambda_1+1}\, \delta_{\lambda_1\lambda_2}\, \delta_{q_1 q_2}$$

Em vista disso e da propriedade (1C), obtemos:

$$W(1-3) = 8\pi^2 \sum_{\lambda_1} \frac{\rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0\, \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_1}(X_2)_0\, \rho_{\lambda_1}(X_3)_0}{2\lambda_1+1} \sum_{q_1} D^{\lambda_1 *}_{0q_1}(R_1)\, D^{\lambda_1}_{0q_1}(R_3)$$

$$= 8\pi^2 \sum_{\lambda_1} \frac{\rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0\, \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_1}(X_2)_0\, \rho_{\lambda_1}(X_3)_0}{2\lambda_1+1}\, P_{\lambda_1}(\cos\xi) \qquad \ldots (33)$$

Se os detetores estiverem no plano xy,

$\cos\xi = \cos(\gamma_3 - \gamma_1)$, pois $\beta_1 = \beta_3 = \pi/2$

Denominando $U_{\lambda_1\lambda_1} = 8\pi^2 \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_1}$, com a normalização $U_{00} = 1$, podemos em vista de (29) e (31) escrever:

$$U_{\lambda_1\lambda_1}(X_2) = \sum_{\lambda_3\ \mathrm{par}} (-)^{-2I_2-2I_1} (2\lambda_3+1)(2\lambda_1+1) \frac{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)}}{[1+\delta^2(\gamma_2)]} \times$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[(-)^{L_2-1} (2L_2+1) \begin{pmatrix} L_2 & L_2 & \lambda_3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2 \\ I_2 & I_1 & L_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_3 \end{Bmatrix} + \right.$$

$$+ 2\,\delta(\gamma_2)\,(-)^{L_2'-1}\sqrt{(2L_2+1)(2L_2'+1)}\begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2 \\ I_2 & I_1 & L_2' \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \delta^2(\gamma_2)\,(-)^{L_2'-1}(2L_2'+1)\begin{pmatrix} L_2' & L_2' & \lambda_3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2' \\ I_2 & I_1 & L_2' \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_3 \end{Bmatrix} \qquad (34)$$

$$U_{00}(\gamma_2)_0 = \frac{16\pi^2\,(-)^{2I_2+2I_1}}{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)}}\,\langle I_2 \| j_N A_{L_2}^{(\pi)} \| I_1\rangle^2\left[1+\delta^2(\gamma_2)\right] \qquad (35)$$

Como $0 \leq \lambda_3 \leq 2\lambda_1$, vamos considerar que na soma sobre λ_3 em (34) ocorra somente o termo com seu valor mínimo, ou seja, $\lambda_3 = 0$. Neste caso, tendo em vista as relações (10C) e (12C), podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{\lambda_1}}{\sqrt{2\lambda_1+1}} \qquad \begin{pmatrix} L_2 & L_2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{L_2+1}}{\sqrt{2L_2+1}}$$

$$\begin{pmatrix} L_2' & L_2' & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{L_2'+1}}{\sqrt{2L_2'+1}} \qquad \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2 \\ I_2 & I_1 & L_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{I_1+I_2+L_2+\lambda_1}}{\sqrt{(2L_2+1)(2\lambda_1+1)}}\begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2 \\ I_1 & I_2 & \lambda_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2 \\ I_2 & I_1 & L_2' \\ \lambda_1 & \lambda_1 & 0 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2' \\ I_2 & I_1 & L_2' \\ \lambda_1 & \lambda_1 & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{I_1+I_2+L_2'+\lambda_1}}{\sqrt{(2L_2'+1)(2\lambda_1+1)}}\begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2' \\ I_1 & I_2 & \lambda_1 \end{Bmatrix}$$

Assim, substituindo esses valores em (34) para o termo $\lambda_3 = 0$ e lembrando que λ_1 é um número par, obtemos:

$$U_{\lambda_1 \lambda_1}(\gamma_2)_0 = (-)^{-I_1 - I_2} \frac{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)}}{[1 + \delta^2(\gamma_2)]} \left[(-)^{L_2} \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2 \\ I_1 & I_2 & \lambda_1 \end{Bmatrix} + (-)^{L_2'} \delta^2(\gamma_2) \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2' \\ I_1 & I_2 & \lambda_1 \end{Bmatrix} \right] \tag{36}$$

O valor do tensor correspondente à radiação X_1 é dado pela expressão (24) e o correspondente à radiação X_2 pela expressão (26), trocando-se apenas o índice λ_2 por λ_1. Assim, a expressão da correlação $\gamma_1 - \gamma_3$ está determinada

$$W(1-3) = \sum_{\lambda} \rho_\lambda^{+}(\gamma_1)_0 \, U_{\lambda\lambda}(\gamma_2)_0 \, \rho_\lambda(\gamma_3)_0 \, \frac{P_\lambda[\cos(\zeta)]}{2\lambda+1} \tag{37}$$

$$\rho_\lambda^{+}(\gamma_1)_0 = \frac{1}{1+\delta^2(\gamma_1)} \left[F_\lambda(L_1 L_1 I_0 I_1) + 2(-)^{L'-L} \delta(\gamma_1) F_\lambda(L_1 L_1' I_0 I_1) + \delta^2(\gamma_1) F_\lambda(L_1' L_1' I_0 I_1) \right]$$

$$U_{\lambda\lambda}(\gamma_2)_0 = (-)^{-I_1 - I_2} \frac{\sqrt{(2I_2+1)(2I_1+1)}}{[1 + \delta^2(\gamma_2)]} \left[(-)^{L_2} \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2 \\ I_1 & I_2 & \lambda \end{Bmatrix} + (-)^{L_2'} \delta^2(\gamma_2) \begin{Bmatrix} I_2 & I_1 & L_2' \\ I_1 & I_2 & \lambda \end{Bmatrix} \right]$$

$$\rho_\lambda(\gamma_3)_0 = \frac{1}{1+\delta^2(\gamma_3)} \left[F_\lambda(L_3 L_3 I_2 I_3) + 2\delta(\gamma_3) F_\lambda(L_3 L_3' I_2 I_3) + \delta^2(\gamma_3) F_\lambda(L_3' L_3' I_2 I_3) \right]$$

II - CORRELAÇÃO $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ DIRECIONAL PERTURBADA DIFERENCIAL

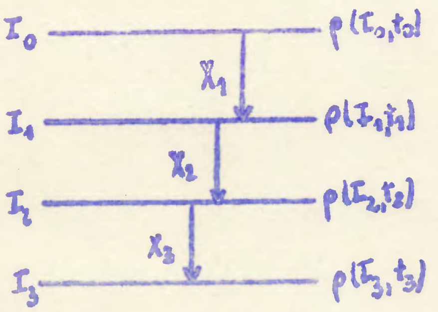
Até o momento se supôs que os núcleos apresentavam apenas interações de origem eletromagnética. Entretanto, sabemos que os mesmos estão sujeitos a forças extranucleares devido ao meio em que se encontram. Se considerarmos tais forças, haverá uma modificação nos resultados da correlação angular não perturbada. Esta modificação poderá ser grande ou não, dependendo da intensidade das perturbações que as originam.

Medidas de correlações anisotrópicas só são possíveis se os estados intermediários perturbados possuem spin maior do que 1/2. Tais estados podem apresentar momentos de dipolo magnéticos bem como de quadrupolo elétrico. Se aplicarmos um campo magnético externo e como este interage com os momentos magnéticos dos níveis nucleares, podemos obter informação do momento magnético de um determinado nível, através de medida de correlação perturbada por interação magnética. Da mesma forma, devido às interações dos gradientes de campo elétrico existentes no meio externo ao núcleo com os momentos de quadrupolo dos níveis nucleares, obtém-se informação dos momentos de quadrupolo ao se realizar a medida de correlação perturbada por interações elétricas.

Se qualquer uma das interações acima descritas é fraca frente à outra, podemos tratar as perturbações isoladamente. Será adotada essa suposição no que segue.

II.1 Expressão geral de correlação $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ direcional perturbada

Sabe-se que para uma cascata tripla, conforme esquema ao lado, em que t_0 indica o tempo de início do decaimento, t_1 e t_2-t_1 os tempos em que os níveis I_1 e I_2 estão sujeitos a interações causadas por campos externos, a evolução temporal das matrizes densidades destes mesmos estados podem ser descritas como:[13]



Supondo $t_0 = 0$, e $\Lambda(t)$ o operador evolução temporal dos estados $|Im\rangle$

$$\rho(I_1,0) \equiv \rho_0 = H(X_1)H^+(X_1)$$

$$\rho(I_1,t_1) = \Lambda_1(t_1)\,\rho_0\,\Lambda_1^+(t_1)$$

$$\rho(I_2,t_1) = H(X_2)\,\rho(I_1,t_1)\,H^+(X_2) = H_2\,\Lambda_1(t_1)\,\rho_0\,\Lambda_1^+(t_1)\,H_2^+$$

$$\rho(I_2,t_2) = \Lambda_2(t_1,t_2)\,\rho(I_2,t_1)\,\Lambda_2^+(t_1,t_2) = \Lambda_2(t_1,t_2)\,H_2\,\Lambda_1(t_1)\,\rho_0\,\Lambda_1^+(t_1)\,H_2^+\,\Lambda_2^+(t_1,t_2)$$

$$\rho(I_3,t_2) = H_3\,\rho(I_2 t_2)\,H_3^+ = H_3\,\Lambda_2(t_2,t_1)\,H_2\,\Lambda_1(t_1)\,\rho_0\,\Lambda_1^+(t_1)\,H_2^+\,\Lambda_2^+(t_1,t_2)\,H_3^+$$

Se K é o hamiltoneano que descreve a interação do nível I_1 com o campo que causa a perturbação deste estado e K' é o hamiltoneano que descreve a interação de nível I_2 com o mesmo campo e supondo que tal independa do tempo, podemos escrever para os operadores evolução $\Lambda(t_1)$ e $\Lambda(t')$,[24]

$$\Lambda_1(t_1) = e^{-iKt_1/\hbar} = e^{-iKt/\hbar} = \Lambda_1(t)$$

$$\Lambda_2(t_1,t_2) = e^{-iK'(t_2-t_1)/\hbar} = e^{-iK't'/\hbar} = \Lambda_2(t')$$

, onde utilizamos a notação $t_1 = t$, $t_2-t_1 = t'$

Logo, podemos calcular a expressão da função correlação $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ perturbada, tomando-se o traço de $\rho(I_3, t_2)$. Note-se que para tanto não é necessário, ainda, especificar qual o tipo de campo que causa a perturbação dos níveis intermediários.

$$W_p(1,2,3) = Tr\left[H_3 \Lambda_2(t') H_2 \Lambda_1(t) H_0 H_1^+ \Lambda_1^+(t) H_2^+ \Lambda_2^+(t') H_3^+\right]$$

Procedendo de maneira análoga ao capítulo anterior,

$$H_1 H_1^+ = \sum_{\lambda_1 q_1} U_{q_1}^{\lambda_1} \rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(x_1) \tag{38}$$

Logo,

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\lambda_1 q_1} \rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(x_1) Tr\left[H_3 \Lambda_2(t') H_2 \Lambda_1(t) U_{q_1}^{\lambda_1} \Lambda_1^+(t) H_2^+ \Lambda_2^+(t') H_3^+\right]$$

Introduzindo-se o coeficiente de perturbação $G_{q' q''}^{\lambda' \lambda''}(t)$ 25,12, podemos expandir os operadores evolução das matrizes densidades em termos dos mesmos como segue:

$$\Lambda_1(t) U_{q_1}^{\lambda_1} \Lambda_1^+(t) = \sum_{\lambda_1' q_1'} G_{\lambda_1' \lambda_1}^{q_1' q_1}(t) U_{q_1'}^{\lambda_1'} \tag{39}$$

Assim,

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 q_1 \\ \lambda_2 q_2}} \rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(x_1) G_{\lambda_1' \lambda_1}^{q_1' q_1}(t) Tr\left[H_3 \Lambda_2(t') H_2 U_{q_1'}^{\lambda_1'} H_2^+ \Lambda_2^+(t') H_3^+\right]$$

$$H_2 U_{q_1'}^{\lambda_1'} H_2^+ = \sum_{\lambda_2 q_2} U_{q_2}^{\lambda_2} \rho_{q_2 q_1'}^{\lambda_2 \lambda_1' +}(x_2) \tag{40}$$

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 q_1\\ \lambda_1' q_1'\\ \lambda_2 q_2}} \rho^{\lambda_1^+}_{q_1}(X_1)\,\rho^{\lambda_2\lambda_1'^+}_{q_2 q_1'}(X_2)\, G^{q_1' q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t)\, Tr\left[H_3 \Lambda_2(t') U^{\lambda_2}_{q_2} \Lambda_2^+(t') H_3^+\right]$$

$$\Lambda_2(t')\, U^{\lambda_2}_{q_2}\, \Lambda_2^+(t') = \sum_{\lambda_2' q_2'} G^{q_2' q_2}_{\lambda_2' \lambda_2}(t')\, U^{\lambda_2'}_{q_2'} \qquad (41)$$

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2\\ \lambda_2' q_1 q_1'\\ q_2 q_2'}} \rho^{\lambda_1^+}_{q_1}(X_1)\,\rho^{\lambda_2\lambda_1'^+}_{q_2 q_1'}(X_2)\, G^{q_1' q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t)\, G^{q_2' q_2}_{\lambda_2' \lambda_2}(t') \times$$
$$\times\, Tr\left[H_3\, U^{\lambda_2'}_{q_2'}\, H_3^+\right]$$

$$H_3 H_3^+ = \sum_{\lambda_3 q_3} U^{\lambda_3^+}_{q_3}\, \rho^{\lambda_3}_{q_3}(X_3) \qquad (42)$$

$$Tr\left[H_3\, U^{\lambda_2'}_{q_2'}\, H_3^+\right] = \sum_{\lambda_3 q_3} \rho^{\lambda_3}_{q_3}(X_3)\, Tr\left[U^{\lambda_3^+}_{q_3} U^{\lambda_2'}_{q_2'}\right] = \sum_{\lambda_3 q_3} \rho^{\lambda_3}_{q_3}(X_3) \times$$

$\delta_{\lambda_3 \lambda_2'}\, \delta_{q_3, q_2'}$, devido à propriedade (6A).

Assim, finalmente,

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2,\\ \lambda_3 q_1 q_1'\\ q_2 q_3}} \rho^{\lambda_1^+}_{q_1}(X_1)\,\rho^{\lambda_2\lambda_1'^+}_{q_2 q_1'}(X_2)\,\rho^{\lambda_3}_{q_3}(X_3)\, G^{q_1' q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t)\, G^{q_3 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \qquad (43)$$

É interessante notar que os coeficientes de perturbação não são tensores irredutíveis, da mesma maneira como não o é o tensor que descreve a emissão da radiação intermediária. $G_{\lambda' \lambda''}^{q' q''}(t)$ descreve a influência da perturbação sobre a correlação angular.

Multiplicando-se por $U_{q'}^{\lambda' +}$, ambos os membros das expressões (38), (39), (40), (41), por $U_{q'}^{\lambda'}$ em (42), tomando-se o traço da relação obtida e utilizando propriedade (6A), obtém-se:

$$\rho_{q_1}^{\lambda_1 +}(X_1) = Tr\left[U_{q_1}^{\lambda_1 +} H_1 H_1^{+}\right] \tag{38'}$$

$$\rho_{q_2 q_1'}^{\lambda_2 \lambda_1' +}(X_2) = Tr\left[U_{q_2}^{\lambda_2 +} H_2 U_{q_1'}^{\lambda_1'} H_2^{+}\right] \tag{40'}$$

$$\rho_{q_3}^{\lambda_3}(X_3) = Tr\left[U_{q_3}^{\lambda_3} H_3^{+} H_3\right] \tag{42'}$$

$$G_{\lambda_1' \lambda_1}^{q_1' q_1}(t) = Tr\left[U_{q_1'}^{\lambda_1' +} \Lambda_1 U_{q_1}^{\lambda_1} \Lambda_1^{+}\right] \tag{39'}$$

$$G_{\lambda_3 \lambda_2}^{q_3 q_2}(t') = Tr\left[U_{q_3}^{\lambda_3 +} \Lambda_2 U_{q_2}^{\lambda_2} \Lambda_2^{+}\right]. \tag{41'}$$

Expressando as quantidades que aparecem em (43) no sistema $\vec{kp}$, ou seja, em termos da direção de polarização $\vec{p}$ e propagação $\vec{k}$ das radiações X, tem-se:

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \lambda_3 \\ q_1 q_1' q_2 q_3 \\ q' q_2' q_2'' q_3'}} \rho_{q'}^{\lambda_1 +}(X_1)_0\, \rho_{q_2' q_2''}^{\lambda_2 \lambda_1' +}(X_2)_0\, \rho_{q_3'}^{\lambda_3}(X_3)_0\, G_{\lambda_1' \lambda_1}^{q_1' q_1}(t)\, G_{\lambda_3 \lambda_2}^{q_3 q_2}(t') \times$$
$$\times D_{q' q_1}^{\lambda_1 *}(R_1)\, D_{q_2' q_2}^{\lambda_2 *}(R_2)\, D_{q_2'' q_1'}^{\lambda_1'}(R_2)\, D_{q_3' q_3}^{\lambda_3}(R_3)$$

Entretanto, para correlação direcional, $q' = q_2' = q_2'' = q_3' = 0$ e assim,

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \\ \lambda_3 q_1 q_1' \\ q_2 q_3}} \rho_{\lambda_1}^{+}(X_1)_0 \, \rho^{+}_{\lambda_2 \lambda_1'}(X_2)_0 \, \rho_{\lambda_3}(X_3)_0 \, G^{q_1' q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) \, G^{q_3 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \, \times$$

$$\times \, D^{\lambda_1 *}_{0 q_1}(R_1) \, D^{\lambda_2 *}_{0 q_2}(R_2) \, D^{\lambda_1'}_{0 q_1'}(R_2) \, D^{\lambda_3}_{0 q_3}(R_3) \qquad (44)$$

Obtivemos assim, em (44), a expressão geral da função correlação angular diferencial perturbada direcional para uma cascata tripla. Os tensores estatísticos, no caso de decaimento ser processado através de radiação gama, são dados pelas expressões (24), (26) e (32) do capítulo I.

Nos dois seguintes parágrafos estudaremos o que ocorre com a correlação, quando as perturbações introduzidas são as causadas pela interação do momento de dipolo magnético do núcleo com um campo magnético estático externo e a interação devido a um gradiente de campo elétrico com o momento de quadrupolo do núcleo.

II.2 Função correlação angular $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ perturbada por interação magnética

O hamiltoniano K que descreve esta interação é dado por:

$$K = - \vec{\mu} \cdot \vec{H} = - g \, \mu_N \vec{I} \cdot \vec{H} \qquad (45)$$

onde, as quantidades acima têm o significado:

$\vec{\mu}$ operador momento de dipolo magnético do nível de spin I

$\vec{H}$ campo magnético estático

g fator g do nível

μ_N magneton nuclear

$\vec{I}$ spin do nível

Se aplicarmos o campo magnético segundo uma direção arbitrária e escolhermos esta como sendo a direção do eixo z, obtemos:

$$K = -\mu_z H = -g\,\mu_N I_z\, H$$

H é a intensidade do campo magnético na direção z.

Essa expressão nos mostra que o hamiltoneano K é diagonal na representação $|Im\rangle$. Denominando E_m os autovalores de K,

$$\langle I\, m | K | I\, m' \rangle = E_m\, \delta_{m,m'}$$

Dessa forma, ao calcularmos os elementos do operador $\mu_z H$, necessitamos apenas calcular os diagonais. Para tanto utilizamos o teorema de Wigner-Eckart.

$$\langle I\, m | K | I\, m \rangle = -\langle I\, m | \mu_z H | I\, m \rangle = -H(-1)^{I-m}\begin{pmatrix} I & 1 & I \\ -m & 0 & m \end{pmatrix}\langle I \| \mu_z \| I \rangle$$

Mas devido a (36C) e (14C),

$$\langle I\, m | K | I\, m \rangle = -\frac{H\, 2m}{\sqrt{(2I+2)(2I+1)2I}}\, \langle I \| \mu_z \| I \rangle \qquad (46)$$

Definindo como o momento magnético μ a seguinte quantidade,

$$\mu = \langle I\, I | \mu_z | I\, I \rangle$$

e aplicando-se novamente o teorema de Wigner-Eckart,

$$\mu = \begin{pmatrix} I & 1 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix} \langle I \| \mu_z \| I \rangle$$

e em vista das propriedades (3bC) e (14C),

$$\mu = \frac{2I}{\sqrt{(2I+2)(2I+1)2I}} \langle I \| \mu_z \| I \rangle$$

ou ainda,

$$\langle I \| \mu_z \| I \rangle = \frac{\sqrt{(2I+2)(2I+1)\,2I}}{2I} \mu$$

Substituindo esse valor em (46), obtém-se:

$$E_m = \langle I m | K | I m \rangle = - \frac{m \mu H}{I}$$

Introduzindo a frequência de Larmor w_B

$$w_B = \frac{E_{m+1} - E_m}{\hbar} = - \frac{H \mu}{\hbar I}$$

e as energias E_m podem ser expressas como:

$$E_m = \hbar m w_B$$

Em vista disso, calcularemos os coeficientes de perturbação $G_{\lambda' \lambda''}^{q' q''}(t)$ da expressão (44). Do parágrafo anterior sabe-se que

$$G_{\lambda_1^{'} \lambda_1}^{q_1^{'} q_1}(t) = Tr \left[U_{q_1^{'}}^{\lambda_1^{'} +} \Lambda_1(t) U_{q_1}^{\lambda_1} \Lambda_1^{+}(t) \right]$$

onde,

$$\Lambda_1(t) = e^{-\frac{iKt}{\hbar}}$$

$$\Lambda_1^{+}(t) = e^{\frac{iKt}{\hbar}}$$

Portanto,

$$G^{q_1' q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) = \sum_{\substack{m\, m'' \\ m'\, m_1}} \langle I_1 m | \Lambda_1 | I_1 m' \rangle \langle I_1 m' | U^{\lambda_1}_{q_1} | I_1 m'' \rangle \times$$

$$\langle I_1 m'' | \Lambda_1^+ | I_1 m_1 \rangle \langle I_1 m_1 | U^{\lambda_1' +}_{q_1'} | I_1 m \rangle$$

Entretanto,

$$\langle I_1 m | \Lambda_1 | I_1 m' \rangle = e^{-\frac{i E_m t}{\hbar}} \delta_{m, m'}$$

$$\langle I_1 m'' | \Lambda_1^+ | I_1 m_1 \rangle = e^{\frac{i E_{m_1} t}{\hbar}} \delta_{m'', m_1}$$

Logo,

$$G^{q_1' q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) = \sum_{m\, m_1} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_m - E_{m_1})t} \langle I_1 m | U^{\lambda_1}_{q_1} | I_1 m_1 \rangle \langle I_1 m_1 | U^{\lambda_1' +}_{q_1'} | I_1 m \rangle$$

Como $E_m - E_{m1} = \hbar\, w_B (m - m_1) = \hbar\, w_{B} q_1$, pois devido à propriedade (4bA), $q_1 = q_1' = m - m_1$, podemos escrever:

$$G^{q_1' q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) = e^{-i q_1 w_B t} \sum_{m, m_1} \langle I_1 m | U^{\lambda_1}_{q_1} | I_1 m_1 \rangle \langle I_1 m_1 | U^{\lambda_1' +}_{q_1'} | I_1 m \rangle$$

$$= e^{-i q_1 w_B t} \delta_{\lambda_1, \lambda_1'} \delta_{q_1, q_1'} \qquad (47)$$

O coeficiente de perturbação referente ao tempo t' é obtido procedendo-se de maneira análoga. O resultado que se obtém é:

$$G^{q_3 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') = \mathrm{Tr}\left[\Lambda_2(t')\, U^{\lambda_2}_{q_2}\, \Lambda_2^+(t')\, U^{\lambda_3 +}_{q_3}\right] = e^{-i q_2 w_B t'} \delta_{\lambda_2, \lambda_3} \delta_{q_2, q_3} \qquad (48)$$

As frequências de Larmor que aparecem em (47) e (48) valem:

$$\omega_B' = - \frac{H\, \mu'}{\hbar\, I_2}$$

$$\omega_B = - \frac{H\, \mu}{\hbar\, I_1}$$

É conveniente exprimir os coeficientes de perturbação em termos das matrizes de rotações. Isto feito, as relações (47) e (48) resultam em:

$$G^{q_1' q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) = D^{\lambda_1 *}_{q_1 q_1}(0, 0, -\omega_B t)\ \delta_{\lambda_1, \lambda_1'}\ \delta_{q_1, q_1'} \tag{49}$$

$$G^{q_3 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') = D^{\lambda_2 *}_{q_2 q_2}(0, 0, -\omega_B' t')\ \delta_{\lambda_2, \lambda_3}\ \delta_{q_2, q_3} \tag{50}$$

Se agora substituirmos (49) e (50) em (44), se obtém para a correlação:

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \\ q_1 q_2}} \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)\, \rho^{+}_{\lambda_2 \lambda_1}(X_2)\, \rho_{\lambda_2}(X_3)\, D^{\lambda_1 *}_{q_1 q_1}(0, 0, -\omega_B t) \times$$

$$D^{\lambda_2 *}_{q_2 q_2}(0, 0, -\omega_B' t')\, D^{\lambda_1 *}_{0 q_1}(R_1)\, D^{\lambda_2 *}_{0 q_2}(R_2)\, D^{\lambda_1}_{0 q_1}(R_2)\, D^{\lambda_2}_{0 q_2}(R_3) \tag{51}$$

Empregando a propriedade (15C), relativa às matrizes de rotação, obtém-se:

$$D^{\lambda_1 *}_{q_1 q_1}(0, 0, -\omega_B t)\, D^{\lambda_1 *}_{0 q_1}(R_1) = D^{\lambda_1 *}_{0 q_1}(0, \beta_1, (\gamma_1 - \omega_B t))$$

$$D^{\lambda_2 *}_{q_2 q_2}(0, 0, -\omega_B' t')\, D^{\lambda_2 *}_{0 q_2}(R_2) = D^{\lambda_2 *}_{0 q_2}(0, \beta_2, (\gamma_2 - \omega_B' t'))$$

Logo,

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1\lambda_2\\ q_1q_2}} \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0\, \rho^{+}_{\lambda_2\lambda_1}(X_2)_0\, \rho_{\lambda_2}(X_3)_0\, D^{\lambda_1 *}_{0q_1}[0,\beta_1,(\gamma_1-\omega_B t)] \times$$

$$D^{\lambda_2 *}_{0q_2}[0,\beta_2,(\gamma_2-\omega_B' t')]\, D^{\lambda_1}_{0q_1}(R_2)\, D^{\lambda_2}_{0q_2}(R_3)$$

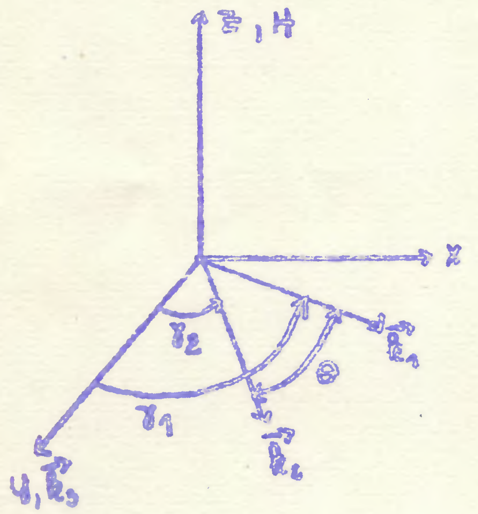
Finalmente, usando (1C),

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0\, \rho^{+}_{\lambda_2\lambda_1}(X_2)_0\, \rho_{\lambda_2}(X_3)_0\, P_{\lambda_1}(\cos\phi)\, P_{\lambda_2}(\cos\phi') \qquad (52)$$

onde,

$$\cos\phi = \cos\beta_1\cos\beta_2 + \operatorname{sen}\beta_1\operatorname{sen}\beta_2\cos(\gamma_1-\omega_B t-\gamma_2)$$

$$\cos\phi' = \cos\beta_2\cos\beta_3 + \operatorname{sen}\beta_2\operatorname{sen}\beta_3\cos(\gamma_2-\omega_B' t'-\gamma_3)$$



Se escolhermos a geometria na qual os três detetores estão situados no plano xy conforme figura ao lado, tem-se

$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \pi/2$

$\gamma_3 = 0$

$\gamma_1 - \gamma_2 = \theta$.

Se esse é o caso, a expressão (51) torna-se

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0\, \rho^{+}_{\lambda_2\lambda_1}(X_2)_0\, \rho_{\lambda_2}(X_3)_0\, P_{\lambda_1}[\cos(\theta-\omega_B t)]\, P_{\lambda_2}[\cos(\gamma_2-\omega_B' t')] \qquad (53)$$

9c

Comparando a expressão acima com a (9C) para a mesma geometria, conclui-se que no caso de perturbação devido a interação do campo magnético estático com o momento magnético do núcleo os ângulos θ e γ_2, modificam-se para $\theta - \omega_B t$ e

$\gamma_2 - w_B' t'$ ou seja, o núcleo, durante o intervalo de tempo t, precessiona em torno do campo magnético H de um ângulo $w_B t$ e durante o intervalo t', precessiona de um ângulo $w_B' t'$.

II.3 Correlação angular $\gamma_1 - \gamma_3$ direcional perturbada devido à interação magnética observando-se a dependência temporal da radiação intermediária X_2.

Para se aplicar a expressão (52) no caso em que não se deseja detetar a distribuição angular de radiação intermediária, integramos naquela sobre a parte angular correspondente a radiação X_2.

É mais fácil, entretanto, calcularmos essa integral na expressão (51), onde as matrizes de rotação correspondentes a R_2 que é a parte angular da radiação em questão permite-nos utilizar o resultado (130). Obtemos dessa forma:

$$W_p(1-3) = 8\pi^2 \sum_{\lambda_1 q_1} \frac{\rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_o\, \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_1}(X_2)_o\, \rho_{\lambda_1}(X_3)_o}{2\lambda_1 + 1} D^{\lambda_1 *}_{oq_1}(0,0,-w_B t) \times$$

$$D^{\lambda_1 *}_{oq_1}(0,0,-w_B' t')\, D^{\lambda_1 *}_{oq_1}(R_1)\, D^{\lambda_1}_{oq_1}(R_3)$$

$$= 8\pi^2 \sum_{\lambda_1 q_1} \frac{\rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_o\, \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_1}(X_2)_o\, \rho_{\lambda_1}(X_3)_o}{2\lambda_1 + 1} \times$$

$$D^{\lambda_1 *}_{oq_1}\left[0, \beta_1, (\gamma_1 - w_B t)\right] D^{\lambda_1}_{oq_1}\left[0, \beta_2, (\gamma_3 + w_B' t')\right]$$

Utilizando a propriedade (1C) e o tensor $U_{\lambda\lambda}$ definido no capítulo I e cuja expressão é dada em (36), tem-se:

$$W_p(1-3) = \sum_{\lambda q} \rho_\lambda^+(\gamma_1)_0 \, U_{\lambda\lambda}(\gamma_2)_0 \, \rho_\lambda(\gamma_3)_0 \, \frac{P_\lambda[\cos\xi]}{2\lambda+1} \qquad (54)$$

onde,

$$\cos\xi = \cos(\gamma_1 - \omega_B t - \gamma_3 - \omega_B' t')$$

$$= \cos\left[(\gamma_1 - \gamma_3) - (\omega_B t + \omega_B' t')\right]$$

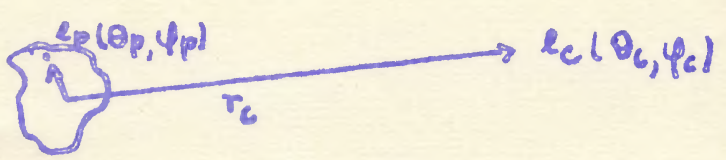
II.4 Função correlação angular $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ perturbada devido à interação elétrica

Estados nucleares com spin maior ou igual a 1 apresentam geralmente momentos de quadrupolo elétrico que interagem com gradientes de campo elétrico.

O hamiltoneano que descreve as interações eletrostáticas é dado por[26].

$$K = \sum_{c,p} \frac{e_p e_c}{|\vec{r}_p - \vec{r}_c|} \qquad (55)$$

onde o vetor $\vec{r}_p$ descreve a posição das cargas no núcleo e o vetor $\vec{r}_c$, a posição das cargas externas ao núcleo



Expandindo $\dfrac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}_c|}$, para $r_c > r_p$, obtém-se:

$$\frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}_c|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_p^{\,k}}{r_c^{\,k+1}} P_k\left[\cos(\vec{r}_p, \vec{r}_c)\right]$$

Utilizando (1C),

$$\frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}_c|} = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=-k}^{+k} \frac{r_p^{\,k}}{r_c^{\,k+1}} \frac{1}{2k+1} Y_k^{q*}(\theta_c, \varphi_c) Y_k^q(\theta_p, \varphi_p) \tag{56}$$

e como $Y_k^{q*}(\theta_c, \varphi_c) = (-)^q Y_k^{-q}(\theta_c, \varphi_c)$, podemos escrever:

$$K = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{q=-k}^{+k} (-)^q \sum_p e_p r_p^{\,k} Y_k^q(\theta_p, \varphi_p) \times$$

$$\sum_c \frac{e_c}{r_c^{\,k+1}} Y_k^{-q}(\theta_c, \varphi_c) \tag{57a}$$

Introduzindo-se os tensores operadores momento do núcleo $T_q^{(k)}$ e o operador campo eletrostático $V_q^{(k)}$,

$$T_q^{(k)} = \sum_p e_p r_p^{\,k} Y_k^q(\theta_p, \varphi_p)$$

$$V_q^{(k)} = \sum_c e_c \frac{1}{r_c^{\,k+1}} Y_k^q(\theta_c, \varphi_c)$$

e devido à propriedade (16C), relativa ao produto de dois tensores,

$$K = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=-k}^{+k} (-)^q \frac{T_q^{(k)} V_{-q}^{(k)}}{(2k+1)} = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{(k)} \cdot V^{(k)}}{(2k+1)}$$

$$= 4\pi \left(T^{(0)} \cdot V^{(0)} + \frac{T^{(1)} \cdot V^{(1)}}{3} + \frac{T^{(2)} \cdot V^{(2)}}{5} + \cdots \right) \tag{57b}$$

O 2º termo desta expansão corresponde ao momento de quadrupolo elétrico. Os termos em k impar anulam-se devido à conservação de paridade e o primeiro descreve as interações coulombianas ordinárias entre cargas. Assim, o hamiltoneano para interações de gradiente de campo elétrico com momento de quadrupolo é dado por:

$$K = \frac{4\pi}{5} T^{(2)} \cdot V^{(2)} = \frac{4\pi}{5} \sum_{q=-2}^{+2} (-)^q T_q^{(2)} V_{-q}^{(2)} \qquad (58)$$

Supondo que o campo eletrostático possui simetria axial, o único componente não nulo de $V_q^{(2)}$ é o componente $q = 0$, ou seja

$$V_0^{(2)} = \sum_c \frac{e_c}{r_c^3} Y_2^0 (\theta_c, r_c)$$

Expressando em termos de coordenadas cartesianas[21]

$$V_0^{(2)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \sum_c \frac{e_c}{r_c^3} (3\cos^2\theta_c - 1) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} V_{zz}$$

Para este caso, o hamiltoneano (58) vale:

$$K = \sqrt{\frac{\pi}{5}} T_0^{(2)} V_{zz}$$

As energias E_m correspondentes a este operador podem ser obtidas aplicando-se o teorema de Wigner-Eckart aos elementos de matriz do operador K, no espaço de spin

$$\langle Im|K|Im'\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{5}} V_{zz} \langle Im| T_0^{(2)} |Im'\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{5}} V_{zz} (-)^{I-m} \begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} \langle I \| T^{(2)} \| I\rangle \qquad (59)$$

com $m = m'$, devido a propriedade triangular do símbolo 3j. Logo os autovalores de energia do hamiltoneano são diagonais e valem, utilizando propriedade (17C),

$$E_m = \langle I m | K | I m \rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{5}}\; V_{zz} \sqrt{\frac{(2I-2)!}{(2I+3)!}}\; 2\left[3m^2 - I(I+1)\right] \langle I \| T^{(2)} \| I \rangle \qquad (60)$$

Definindo o momento de quadrupolo elétrico Q através da relação:

$$e Q = \langle I I | \sum_i e_i (3 z_i^2 - r_i^2) | I I \rangle \qquad (61)$$

e como a coordenada cartesiana z relaciona-se com as coordenadas esféricas através de

$$z = r \cos\theta$$

tem-se:

$$\sum_i e_i (3 z_i^2 - r_i^2) = \sum_i e_i r_i^2 (3 \cos^2\theta - 1) =$$

$$4\sqrt{\frac{\pi}{5}} \sum_i e_i r_i^2 Y_2^0(\theta_i, \varphi_i) = 4\sqrt{\frac{\pi}{5}}\; T_0^{(2)} \qquad (62)$$

Dessa maneira, podemos escrever para o momento de quadrupolo elétrico

$$e Q = 4\sqrt{\frac{\pi}{5}} \langle I I | T_0^{(2)} | I I \rangle \qquad (63)$$

Aplicando o teorema de Wigner-Eckart, obtemos:

$$e Q = 4\sqrt{\frac{\pi}{5}} \begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix} \langle I \| T^{(2)} \| I \rangle$$

Em vista de (17C),

$$eQ = 4\sqrt{\frac{\pi}{5}}\sqrt{\frac{(2I-2)!}{(2I+3)!}}\;2\left[3I^2 - I(I+1)\right]\langle I \| T^{(2)} \| I \rangle$$

ou ainda,

$$\langle I \| T^{(2)} \| I \rangle = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\sqrt{\frac{(2I+3)!}{(2I-2)!}}\;\frac{eQ}{2I(2I-1)} \qquad (64)$$

Substituindo essa expressão em (60),

$$E_m = \frac{3m^2 - I(I+1)}{4I(2I-1)}\, eQ\, V_{zz} \qquad (65)$$

Introduzindo-se a frequência de quadrupolo w_Q,

$w_Q = -\dfrac{eQ\,V_{zz}}{4I(2I-1)\hbar}$, podemos exprimir as energias em função desta:

$$E_m = \hbar\left[I(I+1) - 3m^2\right]w_Q \qquad (66)$$

Podemos agora calcular os coeficientes de perturbação que aparecem na expressão da função correlação perturbada (44)

$$G^{q_1' q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) = \mathrm{Tr}\left[U^{\lambda_1' +}_{q_1'}\,\Lambda_1\,U^{\lambda_1}_{q_1}\,\Lambda_1^{+}\right] = \sum_{\substack{m_1, m_1' \\ m_2, m_2'}} \langle I_1 m_1 | U^{\lambda_1' +}_{q_1'} | I_1 m_1' \rangle \times$$

$$\langle I_1 m_1' | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | I_1 m_2 \rangle \langle I_1 m_2 | U^{\lambda_1}_{q_1} | I_1 m_2' \rangle \langle I_1 m_2' | e^{\frac{iHt}{\hbar}} | I_1 m_1 \rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_1'} e^{-3i(m_1'^2 - m_1^2)w_Q t} \langle I_1 m_1' | U^{\lambda_1' +}_{q_1'} | I_1 m_1 \rangle \langle I_1 m_1 | U^{\lambda_1}_{q_1} | I_1 m_1' \rangle$$

$$= \sum_{\substack{m_1 \\ m_1'}} e^{-3i(m_1'^2 - m_1^2)w_Q t} \left[(2\lambda_1+1)(2\lambda_1'+1)\right]^{1/2} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_1' \\ -m_1 & m_1' & q_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_1 \\ -m_1 & m_1 & q_1 \end{pmatrix}$$

onde $w_Q = -eQ\, V_{zz}/4I_1(2I_1-1)\hbar$

Como os símbolos 3j acima requerem que $q_1 = q_1' = m_1 - m_1'$, tem-se

$$G^{q_1 q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) = \sum_{m_1 m_1'} e^{-3i(m_1'^2 - m_1^2)w_Q t} \left[(2\lambda_1+1)(2\lambda_1'+1)\right]^{1/2} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_1' \\ -m_1 & m_1' & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_1 \\ -m_1 & m_1' & q_1 \end{pmatrix} \qquad (67)$$

Denominando w_0 a frequência correspondente à menor diferença de energia, concluimos da expressão (66),

$$\hbar \Delta w = |E_{m_1+1} - E_{m_1}| = 3\hbar w_Q (2m_1+1) \qquad (68)$$

Se o spin I_1 for inteiro, a menor diferença de energia é obtida para $m_1 = 0$. Assim,

$w_0 = 3\, w_Q$ para I_1 inteiro

Se o spin for semi-inteiro, a menor diferença de energia se obtém substituindo m_1 por 1/2 na expressão (68). Logo,

$w_0 = 6\, w_Q$ para I_1 semi-inteiro

Definindo como $S^{\lambda_1 \lambda_1'}_{n\, q_1}$ a seguinte quantidade[25]:

$$S^{\lambda_1 \lambda_1'}_{n\, q_1} = \sum_{m_1 m_1'} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_1 \\ -m_1 & m_1' & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_1' \\ -m_1 & m_1' & q_1 \end{pmatrix} \left[(2\lambda_1+1)(2\lambda_1'+1)\right]^{1/2}$$

e exprimindo a exponencial em (67) em termos de w_0, tem-se:

$$e^{-3i(m_1'^2 - m_1^2)w_Q t} = e^{-in w_0 t} \qquad (69)$$

onde n é um número inteiro positivo e vale:

$n = |m_1'^2 - m_1^2|$ se I_1 for inteiro e

$= \dfrac{|m_1'^2 - m_1^2|}{2}$ se I_1 for semi-inteiro

Desta forma, obtemos para o coeficiente de perturbação:

$$G^{q_1 q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) = \sum_{m} S^{\lambda_1' \lambda_1}_{m\, q_1}\, e^{-im\omega_0 t}$$

Entretanto, como $W_p(1,2,3)$ é real, pode-se mostrar que os coeficientes de perturbação possuem a seguinte propriedade[27] (Ver apêndice B):

$$G^{qq}_{k_1 k_2} = (-)^{k_1+k_2}\, G^{qq\,*}_{k_1 k_2}$$

Como k_1 e k_2 são pares, pois são os índices dos tensores estatísticos das radiações X, $G^{qq}_{k_1 k_2}$ é real e podemos escrever:

$$G^{q_1 q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) = \sum_{m} S^{\lambda_1' \lambda_1}_{m\, q_1} \cos m\omega_0 t \tag{68}$$

Procedendo de maneira idêntica com relação ao coeficiente de perturbação para o tempo t', definido em (41'), encontramos o seguinte resultado:

$$G^{q_3 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') = G^{q_2 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') = \sum_{m'} S^{\lambda_3 \lambda_2}_{m'\, q_2} \cos m'\omega_0' t' \tag{69}$$

onde,

$$S^{\lambda_3 \lambda_2}_{m'\, q_2} = \sum_{m_2 m_2'} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_3 \\ -m_2 & m_2' & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_2 \\ -m_2 & m_2' & q_2 \end{pmatrix} \left[(2\lambda_3+1)(2\lambda_2+1)\right]^{1/2} \tag{70}$$

$m' = |m_2'^2 - m_2^2|$, $\omega_0' = 3\,\omega_Q'$ se I_2 for inteiro

$= \dfrac{|m_2'^2 - m_2^2|}{2}$, $\omega_0' = 6\,\omega_Q'$ se I_2 for semi-inteiro

$$\omega_Q' = -\frac{e\,Q'\,V_{zz}}{4 I_2 (2I_2-1)\hbar}$$

A conveniência de exprimir os coeficientes de perturbação nas formas (68) e (69) é que se possui valores de $S^{\lambda\lambda'}_{N\ell}$ tabelados 28.

II.5 Função correlação angular $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ perturbada devido à interação elétrica, para uma fonte policristalina

Quadrupolar

Para uma fonte policristalina, supondo que cada microcristal seja axialmente simétrico com relação a um eixo de quantização arbitrário, a expressão da função correlação angular é obtida fazendo-se a média sobre todas as direções dos campos de perturbação. Isto é equivalente a fixar uma direção para o campo, digamos a direção R_1 e fazer a média sobre as demais direções na expressão (41). Calcularemos, portanto, a integral:

$$\int D^{\lambda_1 *}_{0q_1}(R_1)\, D^{\lambda_2 *}_{0q_2}(R_2)\, D^{\lambda_1'}_{0q_1}(R_2)\, D^{\lambda_3}_{0q_2}(R_3)\, d\Omega_1 \qquad (71)$$

Primeiramente, utilizando a propriedade (18C), vamos escrever:

$$D^{\lambda_2 *}_{0q_2}(R_2)\, D^{\lambda_1'}_{0q_1}(R_2) = (-)^{-q_2}\, D^{\lambda_2}_{0-q_2}(R_2)\, D^{\lambda_1'}_{0q_1}(R_2)$$

$$= (-)^{-q_2} \sum_{\lambda, m} (2\lambda+1)\, D^{\lambda *}_{0m}(R_2) \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' & \lambda \\ -q_2 & q_1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (72)$$

onde $m = q_2 - q_1$.

Podemos expressar as rotações R_2 e R_3 em função da rotação R_1 (19C)

$$D^{\lambda_3}_{0q_2}(R_3) = \sum_{q'} D^{\lambda_3}_{0q'}(S_3)\, D^{\lambda_3}_{q'q_2}(R_1) \qquad (73)$$

$$D^{\lambda *}_{0m}(R_2) = \sum_{m'} D^{\lambda *}_{0m'}(S_2)\, D^{\lambda *}_{m'm}(R_1) \tag{74}$$

Substituindo (72), (73) e (74) em (71), tem-se:

$$B = (-)^{-q_2} \sum_{\substack{\lambda m \\ q' m'}} (2\lambda+1) \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' & \lambda \\ -q_2 & q_1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D^{\lambda_3}_{0q'}(S_3)\, D^{\lambda *}_{0m'}(S_2)\, x$$

$$\int D^{\lambda_1 *}_{0q_1}(R_1)\, D^{\lambda *}_{m'm}(R_1)\, D^{\lambda_3}_{q'q_2}(R_1)\, d\Omega_1 \tag{75}$$

Em virtude de (20C) e lembrando $D^{\lambda *}_{m\,m'}(w) = (-)^{m-m'} D^{\lambda}_{-m-m'}(w)$, a integral sobre $d\Omega_1$ vale:

$$\int D^{\lambda_1 *}_{0q_1}(R_1)\, D^{\lambda *}_{m'm}(R_1)\, D^{\lambda_3}_{q'q_2}(R_1)\, d\Omega_1 = (-)^{q_1+m'-m}\, 8\pi^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda & \lambda_3 \\ 0 & -m' & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda & \lambda_3 \\ -q_1 & -m & q_2 \end{pmatrix}$$

$m' = q'$

Assim, usando esse resultado e como da relação (72) $m = q_2 - q_1$, tem-se:

$$B = \pi^2 \sum_{\lambda m q'} (-)^{q'} (2\lambda+1)\, D^{\lambda_3}_{0q'}(S_3)\, D^{\lambda *}_{0q'}(S_2) \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' & \lambda \\ -q_2 & q_1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda & \lambda_3 \\ 0 & -q' & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda & \lambda_3 \\ -q_1 & -m & q_2 \end{pmatrix}$$

$$= 8\pi^2 \sum_{\substack{\lambda m \\ q'}} (2\lambda+1)\, D^{\lambda_3}_{0q'}(S_3)\, D^{\lambda}_{0-q'}(S_2) \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' & \lambda \\ -q_2 & q_1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda & \lambda_3 \\ 0 & -q' & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda & \lambda_3 \\ -q_1 & -m & q_2 \end{pmatrix} \tag{76}$$

Assim, para uma fonte policristalina, a expressão da correlação angular perturbada, devido à interação gradiente de campo elétrico com o momento de quadrupolo é:

$$W_p(1,2,3) = 8\pi^2 \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda m \\ q_1 q_2 q'}} \rho^+_{\lambda_1}(X_1)_0 \, \rho^+_{\lambda_2 \lambda_1'}(X_2)_0 \, \rho_{\lambda_3}(X_3)_0 \, G^{q_1 q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) \times$$

$$G^{q_2 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \, B(\lambda_2, \lambda_1', \lambda, \lambda_3, \lambda_1; q_1, q_2, q', m) \tag{77}$$

onde $B(\lambda_2, \lambda_1', \lambda, \lambda_3, \lambda_1; q_1, q_2, q', m)$ é o resultado obtido em (76). Desenvolvemos a soma acima supondo que λ_1, λ_3, λ_1', λ_2 admitem apenas os valores 0 e 2. A fim de tornar mais compacto o resultado, empregamos a notação:

$$\rho(\lambda_1 \lambda_3 \lambda_1' \lambda_2) = \rho^+_{\lambda_1}(X_1)_0 \, \rho^+_{\lambda_2 \lambda_1'}(X_2)_0 \, \rho_{\lambda_3}(X_3)_0$$

$$a_4 = \frac{1}{7}(2L - S - 2R)$$

$$b_4 = \frac{9}{7}\left(\frac{2}{5}\ell - \sqrt{\frac{2}{15}}\, p + \sqrt{\frac{1}{15}}\, r\right)$$

$$L = D^{(2)}_{00}(S_2)\, D^{(2)}_{00}(S_3)$$

$$R = D^{(2)}_{02}(S_2)\, D^{(2)}_{0-2}(S_3) + D^{(2)}_{0-2}(S_2)\, D^{(2)}_{02}(S_3)$$

$$S = D^{(2)}_{01}(S_2)\, D^{(2)}_{0-1}(S_3) + D^{(2)}_{0-1}(S_2)\, D^{(2)}_{01}(S_3)$$

$$\ell = D^{(4)}_{00}(S_2)\, D^{(2)}_{00}(S_3)$$

$$p = D^{(4)}_{01}(S_2)\, D^{(2)}_{0-1}(S_3) + D^{(4)}_{0-1}(S_2)\, D^{(2)}_{01}(S_3)$$

$$r = D^{(4)}_{02}(S_2)\, D^{(2)}_{0-2}(S_3) + D^{(4)}_{0-2}(S_2)\, D^{(2)}_{02}(S_3)$$

e a expressão obtida foi:

$$
\begin{aligned}
W_p(1,2,3) = 8\pi^2 \Big\{ & \rho(0000)\, G^{00}_{00}(t)\, G^{00}_{00}(t') + \frac{\rho(0022)}{5}\, G^{00}_{20}(t)\, G^{00}_{02}(t') + \\
& \rho(2200)\, G^{00}_{02}(t)\, G^{00}_{20}(t')\, \frac{D^{(2)}_{00}(S_2)}{5} + \rho(2020)\, G^{00}_{00}(t')\, \frac{D^{(2)}_{00}(S_2)}{5} \Big[G^{00}_{22}(t) + \\
& G^{11}_{22}(t) + G^{-1-1}_{22}(t) + G^{22}_{22}(t) + G^{-2-2}_{22}(t) \Big] + \rho(2002)\, \frac{G^{00}_{02}(t')}{5}\, D^{(2)}_{00}(S_2) \times \\
& G^{00}_{02}(t) + \rho(2022)\, G^{00}_{02}(t')\, \frac{D^{(2)}_{00}(S_2)}{35} \Big[2\, G^{00}_{22}(t) + G^{11}_{22}(t) + G^{-1-1}_{22}(t) \\
& - 2 G^{22}_{22}(t) - 2\, G^{-2-2}_{22}(t) \Big] + \rho(0202)\, \frac{(L-S+R)}{5}\, G^{00}_{00}(t) \Big[G^{00}_{22}(t') + G^{11}_{22}(t') + \\
& G^{-1-1}_{22}(t') + G^{22}_{22}(t') + G^{-2-2}_{22}(t') \Big] + \rho(0220)\, \frac{(L-S+R)}{5}\, G^{00}_{20}(t)\, G^{00}_{20}(t') + \\
& \rho(0222)\, \frac{(L-S+R)}{35}\, G^{00}_{20}(t) \Big[2\, G^{00}_{22}(t') + G^{11}_{22}(t') + G^{-1-1}_{22}(t') - 2 G^{22}_{22}(t') \\
& - 2 G^{-2-2}_{22}(t') \Big] + \rho(2202)\, \frac{G^{00}_{02}(t)}{5} \Big[G^{00}_{22}(t') + G^{22}_{22}(t') - G^{-2-2}_{22}(t') + \\
& \frac{1}{2}\Big(G^{11}_{22}(t') + G^{-1-1}_{22}(t') \Big) \Big] a_4 + \rho(2220)\, \frac{G^{00}_{20}(t')}{5} \Big[G^{00}_{22}(t) + G^{22}_{22}(t) - G^{-2-2}_{22}(t) \\
& + \frac{1}{2}\Big(G^{11}_{22}(t) + G^{-1-1}_{22}(t) \Big) \Big] a_4 + \rho(2222) \Big\{ G^{00}_{22}(t)\, \frac{G^{00}_{22}(t')}{5} \Big[\frac{2}{7}(a_4 + b_4) + \\
& \frac{D^{(2)}_{00}(S_2)}{5} \Big] + \frac{1}{7}\Big(\frac{a_4}{10} + \frac{b_4}{3} \Big) \Big[G^{00}_{22}(t) \Big(G^{11}_{22}(t') + G^{-1-1}_{22}(t') \Big) + G^{11}_{22}(t)\, G^{00}_{22}(t') + \\
& G^{-1-1}_{22}(t)\, G^{00}_{22}(t') \Big] + \frac{1}{7}\Big(\frac{2a_4}{5} + \frac{b_4}{6} \Big) \Big[G^{00}_{22}(t) \Big(G^{22}_{22}(t') + G^{-2-2}_{22}(t') \Big) + G^{22}_{22}(t)\, G^{00}_{22}(t') \\
& + G^{-2-2}_{22}(t)\, G^{00}_{20}(t') \Big] + \frac{1}{5} \Big[\frac{1}{7}\Big(\frac{c_4}{2} + \frac{8}{9} b_4 \Big) + \frac{D^{(2)}_{00}(S_3)}{5} \Big] \Big[G^{11}_{22}(t)\, G^{11}_{22}(t') + \\
& G^{-1-1}_{22}(t)\, G^{-1-1}_{22}(t') \Big] + \frac{1}{7}\Big(\frac{3}{5} a_4 + \frac{2b_4}{9} \Big) \Big(G^{11}_{22}(t)\, G^{-1-1}_{22}(t') + G^{-1-1}_{22}(t)\, G^{11}_{22}(t') \Big) \\
& + \frac{1}{7}\Big(\frac{3}{5} a_4 + \frac{b_4}{18} \Big) \Big(G^{11}_{22}(t)\, G^{22}_{22}(t') + G^{-1-1}_{22}(t)\, G^{-2-2}_{22}(t') + G^{22}_{22}(t)\, G^{11}_{22}(t') + \\
& G^{-2-2}_{22}(t)\, G^{-1-1}_{22}(t') \Big) + \frac{b_4}{9} \Big[\frac{1}{2} \Big(G^{11}_{22}(t)\, G^{-2-2}_{22}(t') + G^{-1-1}_{22}(t)\, G^{22}_{22}(t') + G^{22}_{22}(t) \times \\
& G^{-1-1}_{22}(t') + G^{-2-2}_{22}(t)\, G^{11}_{22}(t') \Big) + G^{22}_{22}(t)\, G^{-2-2}_{22}(t') + G^{-2-2}_{22}(t)\, G^{22}_{22}(t') \Big] + \\
& \frac{1}{5} \Big[\frac{1}{7}\Big(2a_4 + \frac{b_4}{12} \Big) + \frac{D^{(2)}_{00}(S_3)}{5} \Big] \Big[G^{22}_{22}(t)\, G^{22}_{22}(t') + G^{-2-2}_{22}(t)\, G^{-2-2}_{22}(t') \Big] \Big\} \Big\} \qquad (78)
\end{aligned}
$$

III - CASOS ESPECIAIS DA CORRELAÇÃO ANGULAR GAMA-GAMA-GAMA PERTURBADA POR INTERAÇÃO MAGNÉTICA

III.1 Expressão integral de correlação $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ perturbada

Sabemos que quando o tempo de resolução τ_0 de coincidência do equipamento é muito maior do que a vida média dos estados intermediários, devemos empregar o método integral, já que não é possível observar-se efeitos diferenciais no tempo. A expressão integral é obtida da diferencial $W_p(1,2,3,t,t')$ através de:

$$W_p(1,2,3,\infty) = \frac{\int_0^\infty dt\, e^{-t/\tau_1} \int_0^\infty e^{-t'/\tau_2}\, W_p(1,2,3,t,t')\, dt'}{\int_0^\infty e^{-t/\tau_1}\, dt \int_0^\infty e^{-t'/\tau_2}\, dt'}$$

$$= \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \int_0^\infty dt\, e^{-t/\tau_1} \int_0^\infty e^{-t'/\tau_2}\, W_p(1,2,3,t,t')\, dt' \qquad (79)$$

$$(t' = t_2 - t)$$

onde,

$W_p(1,2,3,\infty)$ expressa a forma integral da correlação perturbada

$W_p(1,2,3,t,t') = \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \rho_{\lambda_1\lambda_2}(123)\, P_{\lambda_1}[\cos(\theta - \omega_B t)]\, P_{\lambda_2}[\cos(\theta_2 - \omega_B' t')]$

$\rho_{\lambda_1 \lambda_2}(1,2,3) = \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0\, \rho^{+}_{\lambda_1\lambda_2}(X_2)_0\, \rho_{\lambda_2}(X_3)_0$

τ_1 é o tempo de vida média do estado intermediário I_1

τ_2 é o tempo de vida média do estado intermediário I_2

Ao se calcular a integral acima, iremos supor que λ_1 e λ_2 apresentem apenas os valores 0 e 2. Essa suposição é razoável uma vez que os resultados experimentais indicam que termos com $\lambda = 4$ são em geral muito pequenos. Logo podemos escrever:

$$W_p(1,2,3,t,t') = \rho_{00}(123)\, P_0[\cos(\theta - \omega_B t)]\, P_0[\cos(\gamma_2 - \omega_B' t')] + \rho_{02}(123)\, P_0[\cos(\theta - \omega_B t)]\, P_2[\cos(\gamma_2 - \omega_B' t')] + \rho_{20}(123)\, P_2[\cos(\theta - \omega_B t)]\, P_0[\cos(\gamma_2 - \omega_B' t')] + \rho_{22}(123)\, P_2[\cos(\theta - \omega_B t)]\, P_2[\cos(\gamma_2 - \omega_B' t')] \tag{80}$$

$$(\theta = \gamma_1 - \gamma_2)$$

Como $\rho(123)$ independe de t e t', as integrais que devem ser calculadas são do tipo:

$$A = \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\infty} dt\, e^{-t/\tau_1}\, P_{\lambda_1}[\cos(\theta - \omega_B t)] \tag{81}$$

$$B = \frac{1}{\tau_2} \int_0^{\infty} dt'\, e^{-t'/\tau_2}\, P_{\lambda_2}[\cos(\gamma_2 - \omega_B' t')] \tag{82}$$

Para tanto, introduziremos as novas variáveis:

$$y = (\theta - \omega_B t) \qquad \text{e} \qquad y' = (\gamma_2 - \omega_B' t')$$

As integrais A e B ficam portanto:

$$A = -\frac{e^{-\theta/\omega_B \tau_1}}{\tau_1 \omega_B} \int_{\theta}^{-\infty} dy\, e^{y/\tau_1 \omega_B}\, P_{\lambda_1}(\cos y) \tag{83}$$

$$B = -\frac{e^{-\gamma_2/\omega_B' \tau_2}}{\tau_2 \omega_B'} \int_{\gamma_2}^{-\infty} dy'\, e^{y'/\tau_2 \omega_B'}\, P_{\lambda_2}(\cos y') \tag{84}$$

Lembrando que os polinômios de Legendre $P_\lambda(x)$ para $\lambda = 0$ e 2 valem:

$$P_0(x) = 1$$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, as integrais (83) e (84) para $\lambda_1 = 0,2$ e $\lambda_2 = 0, 2$ possuem o seguinte resultado:

1) λ_1 e $\lambda_2 = 0$

$$A = 1$$

$$B = 1 \tag{85}$$

2) λ_1 e $\lambda_2 = 2$

$$A = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{3\,\omega_B \tau_1}{1+(2\tau_1\omega_B)^2}\left[\frac{\cos 2\theta}{2\tau_1\omega_B} + \operatorname{sen} 2\theta\right]\right\}$$

$$B = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{3\,\omega_B' \tau_2}{1+(2\tau_2\omega_B')^2}\left[\frac{\cos 2\gamma_2}{2\tau_2\omega_B'} + \operatorname{sen} 2\gamma_2\right]\right\} \tag{86}$$

Substituindo os valores obtidos em (86) e (85) em (79) e tendo em vista a expansão (80), obtém-se como resultado para a forma integral da correlação gama tripla perturbada:

$$\begin{aligned} W_p(1,2,3,\infty) = 1 &+ \frac{\rho_{02}(123)}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{3\tau_2\omega_B'}{1+(2\tau_2\omega_B')^2}\left(\frac{\cos 2\gamma_2}{2\tau_2\omega_B'} + \operatorname{sen} 2\gamma_2\right)\right] + \frac{\rho_{20}(123)}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{3\tau_1\omega_B}{1+(2\tau_1\omega_B)^2}\left(\frac{\cos 2\theta}{2\tau_1\omega_B}\right.\right. \\ &\left.\left. + \operatorname{sen} 2\theta\right)\right] + \frac{\rho_{22}(123)}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{3\,\omega_B\tau_1}{1+(2\tau_1\omega_B)^2}\left(\frac{\cos 2\theta}{2\tau_1\omega_B}\right.\right. \\ &\left.\left. + \operatorname{sen} 2\theta\right)\right]\left[\frac{1}{2} + \frac{3\,\omega_B'\tau_2}{1+(2\tau_2\omega_B')^2}\left(\frac{\cos 2\gamma_2}{2\tau_2\omega_B'} + \operatorname{sen} 2\gamma_2\right)\right] \end{aligned} \tag{87}$$

III.2 Expressão integral da correlação $\gamma_1 - \gamma_3$ perturbada

Desejando-se obter a forma integral $W_p(1-3, \infty)$ da correlação $\gamma_1 - \gamma_3$, cuja expressão na forma diferencial é dada em (54), devemos integrar aquele resultado em relação aos tempos t e t', conforme o procedimento do parágrafo anterior.

$$W(1-3,\infty) = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \int_0^\infty dt\, e^{-t/\tau_1} \int_0^\infty dt'\, e^{-t'/\tau_2}\, W_p(1-3) \tag{88}$$

Denominando de $\rho_\lambda(123)$ ao produto $\rho_\lambda^+(X_1)_0 U_{\lambda\lambda}(X_2)_0\, \rho_\lambda(X_3)_0$, podemos escrever para a relação (54):

$$W_p(1-3) = \sum_\lambda \rho_\lambda(123)\, P_\lambda \left\{ \cos\left[(\gamma_1-\gamma_2)-(w_B t + w_B' t')\right]\right\}_{(t'=t_2-t)} \tag{89}$$

Na integral dupla (88), vamos calcular apenas seu valor correspondente aos termos com $\lambda = 0$ e 2. Como a dependência nos tempos t e t' estão contidos apenas nos polinômios de Legendre, as integrais que devem ser calculadas são do tipo:

$$A = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \int_0^\infty dt\, e^{-t/\tau_1} \int_0^\infty dt'\, e^{-t'/\tau_2}\, P_\lambda\left[\cos(a - w_B' t')\right]$$

onde $a = \gamma_1 - \gamma_2 - w_B t = \theta - w_B t$

1) Para $\lambda = 0$, obtém-se:

$A = 1$

2) Para $\lambda = 2$, escrevemos:

$$B = \int_0^{\infty} dt' \, e^{-t'/\tau_2} \, P_2\left[\cos(a - \omega'_B t')\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\tau_2}{2} + \frac{3\omega'_B \tau_2^2}{1+4(\omega'_B \tau_2)^2}\left(\frac{\cos 2a}{2\omega'_B \tau_2} + \operatorname{sen} 2a\right)\right]$$

$$A = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \, \frac{\tau_1 \omega_B \, \tau_2 \omega'_B}{\left[1+4(\omega'_B \tau_2)^2\right]\left[1+4(\omega_B \tau_1)^2\right]} \left[\cos 2\theta\left(\frac{1}{2\omega'_B \tau_2 \, \omega_B \tau_1} - 2\right) + \operatorname{sen} 2\theta \times \left(\frac{1}{\omega'_B \tau_2} + \frac{1}{\omega_B \tau_1}\right)\right] = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \int_0^{\infty} e^{-t/\tau_1} B \, dt$$

Assim, a expressão para a forma integral da correlação $\gamma_1 - \gamma_3$, correspondente aos dois primeiros termos da soma (89) é:

$$W(1-3,\infty) = 1 + \beta_2^{+}(X_1)_0 \, U_{22}(X_2)_0 \, \beta_2(X_3)_0 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \, \frac{(\tau_1 \omega_B)(\tau_2 \, \omega'_B)}{\left[1+4(\omega'_B \tau_2)^2\right]\left[1+4(\omega_B \tau_1)^2\right]} \left[\cos 2\theta \left(\frac{1}{2\omega'_B \tau_2 \omega_B \tau_1} - 2\right) + \operatorname{sen} 2\theta \left(\frac{1}{\omega'_B \tau_2} + \frac{1}{\omega_B \tau_1}\right)\right]\right\} \tag{90}$$

III.3 Expressão diferencial da correlação $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ perturbada, não se observando a dependência temporal da radiação intermediária X_2

Para essa situação, devemos integrar a função correlação perturbada $W_p(1,2,3,t,t')$, cuja expressão na forma diferencial é dada em (53), sobre o tempo t correspondente à emissão da radiação X_2.

int

ñ devia ser $\int_0^{\infty}$

Denominando de $W_p(1,2,3,t_2)$ a função correlação que se deseja calcular, tem-se:

$$W_p(1,2,3,t_2) = \frac{\displaystyle\int_0^{t_2} e^{-t\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)} W_p(1,2,3,t,t')\,dt}{\displaystyle\int_0^{t_2} e^{-t\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)}\,dt}$$

$$(t' = t_2 - t)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)}{1-e^{-\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)t_2}} \int_0^{t_2} e^{-t\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)} W_p(1,2,3,t,t')\,dt \qquad (91)$$

Supondo novamente que $W_p(1,2,3,t,t')$ seja expresso através da relação (80), as integrais que devêmos calcular são do tipo:

$$C = \int_0^{t_2} e^{-t\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)} P_{\lambda_1}\left[\cos(\theta - w_B t)\right] P_{\lambda_2}\left[\cos(\gamma_2 - w_B' t_2 + w_B' t)\right] dt$$

Introduzindo-se as novas variáveis

$x = \theta - w_B t = a + by$

$y = \alpha + w_B' t$

$\alpha = \gamma_2 - w_B' t_2$

$a = \theta + \alpha w_B / w_B' = \theta - \alpha b$

$b = - w_B / w_B'$

$$C = \frac{e^{\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)\frac{\alpha}{w_B'}}}{w_B'} \int_{\alpha}^{\alpha + w_B' t_2} e^{-\frac{y}{w_B'}\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)} P_{\lambda_1}\left[\cos(a+by)\right] P_{\lambda_2}(\cos y)\,dy \qquad (92)$$

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$c = \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)t_2} - 1}{\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}} \tag{93}$$

2) Para $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$

$$c = \frac{e^{\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\frac{\alpha}{\omega'_\theta}}}{2\,\omega'_\theta} \int_{\alpha}^{\alpha + \omega'_\theta t_2} e^{-\frac{y}{\omega'_\theta}\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} (3\cos^2 y - 1)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{e^{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)t_2} - 1}{2\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)} + \frac{3\,\omega'_\theta}{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)^2 + 4\omega'^2_\theta}\left[\frac{1}{2\,\omega'_\theta}\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right) \times \right.\right.$$

$$\left(e^{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)t_2} \cos 2\gamma_2 - \cos 2(\gamma_2 - \omega'_\theta t_2)\right) + e^{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)t_2} \times$$

$$\left.\left. \operatorname{sen} 2\gamma_2 - \operatorname{sen} 2(\gamma_2 - \omega'_\theta t_2)\right]\right\} \tag{94}$$

3) Para $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$

$$c = \frac{e^{\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\frac{\alpha}{\omega'_\theta}}}{2\,\omega'_\theta} \int_{\alpha}^{\alpha + \omega'_\theta t_2} e^{-\frac{y}{\omega'_\theta}\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} \left[3\cos^2(a + by) - 1\right] dy$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{e^{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)t_2} - 1}{2\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)} + \frac{3\,\omega_\theta}{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)^2 + 4\omega^2_\theta}\left[\frac{1}{2\,\omega_\theta}\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right) \times \right.\right.$$

$$\left(e^{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)t_2} \cos 2(\theta - \omega_\theta t_2) - \cos 2\theta\right) - e^{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)t_2} \operatorname{sen} 2(\theta - \omega_\theta t_2)$$

$$\left.\left. + \operatorname{sen} 2\theta\right]\right\} \tag{95}$$

4) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$C = \frac{e^{\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)\frac{\alpha}{\omega_B'}}}{4\,\omega_B'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_B' t_2} e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)\frac{y}{\omega_B'}} \left[3\cos^2(\theta+by)-1\right]\left[3\cos^2 y-1\right] dy$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \frac{e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}-1}{4\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)} - \frac{9}{4}\,\frac{(\omega_B-\omega_B')}{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)^2+4(\omega_B-\omega_B')^2}\left[-\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)\times\right.\right.$$

$$\frac{1}{2(\omega_B-\omega_B')}\left(e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}\cos 2(\gamma_1-\omega_B t_2)-\cos 2(\gamma_1-\omega_B' t_2)\right)+e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}\operatorname{sen} 2(\gamma_1-\omega_B t_2)$$

$$\left.-\operatorname{sen} 2(\gamma_1-\omega_B' t_2)\right] - \frac{9}{4}\,\frac{(\omega_B+\omega_B')}{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)^2+4(\omega_B+\omega_B')^2}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)\right.$$

$$\frac{1}{(\omega_B+\omega_B')}\left(e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}\cos 2(\theta-\gamma_2-\omega_B t_2)-\cos 2(\theta-\gamma_2+\omega_B' t_2)\right)+e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}\times$$

$$\left.\operatorname{sen} 2(\theta-\gamma_2-\omega_B t_2)-\operatorname{sen} 2(\theta-\gamma_2+\omega_B' t_2)\right] + \frac{3}{4}\,\frac{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)}{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)^2+4\omega_B^2}\times$$

$$\left[e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}\cos 2(\theta-\omega_B t_2)-\cos 2\theta\right] - \frac{3}{2}\,\frac{\omega_B}{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)^2+4\omega_B^2}\left[e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}\operatorname{sen} 2(\theta-\omega_B t_2)\right.$$

$$\left.-\operatorname{sen} 2\theta\right] + \frac{3}{4}\,\frac{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)}{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)^2+4\omega_B'^2}\left[e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}\cos 2\gamma_2-\cos 2(\gamma_2-\omega_B' t_2)\right]$$

$$\left.+\frac{3}{2}\,\frac{\omega_B'}{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)^2+4\omega_B'^2}\left[e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}\operatorname{sen} 2\gamma_2-\operatorname{sen} 2(\gamma_2-\omega_B' t_2)\right]\right\} \tag{95}$$

Portanto, em vista das expressões (96), (95), (94), (93)e (91), obtemos o seguinte resultado para $W_p(1,2,3,t_2)$:

$$
\begin{aligned}
W_p(123,t_2) = {} & 1 + \frac{\rho_{02}(123)}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{3\omega'_B\beta}{\beta^2+4\omega'^2_B}\,\frac{1}{e^{\beta t_2}-1}\times\right.\\
& \left[\frac{\beta}{2\omega'_B}\left(e^{\beta t_2}\cos 2\gamma_2 - \cos 2(\gamma_2-\omega'_B t_2)\right) + e^{\beta t_2}\operatorname{sen} 2\gamma_2 - \operatorname{sen} 2(\gamma_2-\omega'_B t_2)\right]\Bigg\}\\
& \frac{\rho_{20}(123)}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{3\omega_B\beta}{\beta^2+4\omega_B^2}\,\frac{1}{e^{\beta t_2}-1}\left[\frac{\beta}{2\omega_B}\left(e^{\beta t_2}\cos 2(\theta-\omega_B t_2)\right.\right.\right.\\
& \left.\left.\left. - \cos 2\theta\right) - e^{\beta t_2}\operatorname{sen} 2(\theta-\omega_B t_2) + \operatorname{sen} 2\theta\right]\right\} + \frac{\rho_{22}(123)}{4}\left\{\frac{1}{4} - \right.\\
& \frac{9}{4}\,\frac{(\omega_B-\omega'_B)\beta}{\beta^2+4(\omega_B-\omega'_B)^2}\,\frac{1}{e^{\beta t_2}-1}\left[-\frac{\beta}{2(\omega_B-\omega'_B)}\left(e^{\beta t_2}\cos 2(\gamma_1-\omega_B t_2) - \right.\right.\\
& \left.\left.\cos 2(\gamma_1-\omega'_B t_2)\right) + e^{\beta t_2}\operatorname{sen} 2(\gamma_1-\omega_B t_2) - \operatorname{sen} 2(\gamma_1-\omega'_B t_2)\right] - \\
& \frac{9}{4}\,\frac{(\omega_B+\omega'_B)\beta}{\beta^2+4(\omega_B+\omega'_B)^2}\,\frac{1}{e^{\beta t_2}-1}\left[-\frac{\beta}{2(\omega_B+\omega'_B)}\left(e^{\beta t_2}\cos 2(\theta-\gamma_2-\omega_B t_2) - \right.\right.\\
& \left.\left.\cos 2(\theta-\gamma_2+\omega'_B t_2)\right) + e^{\beta t_2}\operatorname{sen} 2(\theta-\gamma_2-\omega_B t_2) - \operatorname{sen} 2(\theta-\gamma_2+\omega'_B t_2)\right]\\
& + \frac{3}{4}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+4\omega_B^2}\,\frac{1}{e^{\beta t_2}-1}\left[e^{\beta t_2}\cos 2(\theta-\omega_B t_2) - \cos 2\theta\right] - \frac{3}{2}\,\frac{\beta\omega_B}{\beta^2+4\omega_B^2}\times\\
& \frac{1}{e^{\beta t_2}-1}\left[e^{\beta t_2}\operatorname{sen} 2(\theta-\omega_B t_2) - \operatorname{sen} 2\theta\right] + \frac{3}{4}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+4\omega'^2_B}\,\frac{1}{e^{\beta t_2}-1}\times\\
& \left[e^{\beta t_2}\cos 2\gamma_2 - \cos 2(\gamma_2-\omega'_B t_2)\right] + \frac{3}{2}\,\frac{\omega'_B\beta}{\beta^2+4\omega'^2_B}\,\frac{1}{e^{\beta t_2}-1}\times\\
& \left.\left[e^{\beta t_2}\operatorname{sen} 2\gamma_2 - \operatorname{sen} 2(\gamma_2-\omega'_B t_2)\right]\right\} \qquad \left(\beta = \frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)
\end{aligned}
\tag{97}
$$

III.4 Expressão diferencial da correlação $\gamma_1 - \gamma_3$ não se observando a dependência temporal de radiação intermediária X_2

No capítulo II obtivemos a expressão da correlação angular $W(1-3)$, para a situação em que não observamos os efeitos da distribuição angular devido a emissão da radiação intermediária. Se além disso não desejamos obter informação do tempo que envolve esta transição, devemos integrar a relação (54) sobre o tempo t, correspondente à emissão de X_2, de acordo com o procedimento feito no ítem anterior III.3.

Denominando $W_p(1-3, t_2)$, a expressão que se deseja calcular, tem-se:

$$W_p(1-3, t_2) = \frac{\int_0^{t_2} e^{-t\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)} W_p(1-3)\, dt}{\int_0^{t_2} e^{-t\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)} dt}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)}{e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2}-1} \int_0^{t_2} e^{t\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)} W_p(1-3)\, dt \tag{98}$$

Supondo que λ apresente apenas os valores 0 e 2,

$$W_p(1-3) = 1 + \frac{P_2(123)}{5} P_2(\cos\xi)$$

onde:

$$\rho_\lambda(1\,2\,3) = \rho_\lambda^+(X_1)_0\, U_{\lambda\lambda}(X_2)_0\, \rho_\lambda(X_3)_0$$

$$\cos\xi = \cos\left[(\gamma_1-\gamma_2) - (\omega_B t + \omega_B' t')\right] = \cos(a+bt)$$

$$a = \gamma_1 - \gamma_2 - \omega_B' t_2$$

$$b = \omega_B' - \omega_B$$

$$t' = t_2 - t$$

Logo,

$$W_p(1\text{-}3, t_2) = \frac{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)}{e^{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)t_2} - 1} \left[\int_0^{t_2} e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t} dt + \frac{\rho_2(1\,2\,3)}{5} \times \right.$$

$$\left. \int_0^{t_2} e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t} P_2\left[\cos(a+bt)\right] dt \right] \tag{99}$$

Entretanto,

$$\int_0^{t_2} e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t} dt = \frac{e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t_2} - 1}{-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)}$$

$$\int_0^{t_2} P_2\left[\cos(a+bt)\right] e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t} dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^{t_2} e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t}\left[3\cos^2(a+bt)-1\right] dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\left(e^{\beta t_2} - 1\right)}{2\beta} + \frac{3\,b}{\beta^2 + 4b^2}\left[\frac{\beta}{2b}\left(e^{\beta t_2}\cos 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B t_2)\right.\right.\right.$$

$$\left. - \cos 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B' t_2)\right) + e^{\beta t_2}\operatorname{sen} 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B t_2) -$$

$$\left.\left. \operatorname{sen} 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B' t_2)\right]\right\}$$

$$\left(\beta = \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)$$

Substituindo esses resultados em (99), obtemos finalmente a expressão desejada:

$$W_p(1-3,t_2) = 1 + \frac{\rho_2(123)}{10}\left\{\frac{1}{2} + \frac{3\beta(\omega_B' - \omega_B)}{[\beta^2 + 4(\omega_B'-\omega_B)^2](e^{\beta t_2} - 1)} \times \right.$$

$$\left[\frac{\beta}{2(\omega_B'-\omega_B)}\left(e^{\beta t_2}\cos 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B t_2) - \right.\right.$$

+ ?

$$\left.\cos 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B' t_2)\right) + e^{\beta t_2}\,\mathrm{sen}\, 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B t_2)$$

$$\left.\left. - \,\mathrm{sen}\, 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B' t_2)\right]\right\} \qquad (100)$$

É interessante analisarmos a expressão (100) no caso em que as vidas médias τ_1 e τ_2 são da mesma ordem ou o dobro uma em relação à outra.

a) Se $\tau_1 = \tau_2$, então $\beta = 0$ e a expressão (100) resulta em:

$$W_p(1-3,t_2) = 1 + \frac{\rho_2(123)}{10}\left\{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{sen}\,2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B t_2) - \mathrm{sen}\,2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B' t_2)}{t_2(\omega_B'-\omega_B)}\right\} \qquad (101)$$

b) Se $\tau_1 = 2\tau_2$, então $\beta = \frac{1}{\tau_1}$ e obtemos para a (100):

$$W_p(1-3,t_2) = 1 + \frac{\rho_2(123)}{10}\left\{\frac{1}{2} + \left[\frac{3}{2}\left(e^{t_2/\tau_1}\cos 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B t_2) \right.\right.\right.$$

$$\left. - \cos 2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B' t_2)\right) + 3(\omega_B'-\omega_B)\tau_1\left(e^{t_2/\tau_1}\,\mathrm{sen}\,2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B t_2)\right.$$

$$\left.\left.\left. - \,\mathrm{sen}\,2(\gamma_1-\gamma_2-\omega_B' t_2)\right)\right]\frac{1}{(1+4(\omega_B'-\omega_B)^2\tau_1^2)(e^{t_2/\tau_1} - 1)}\right\}$$

(102)

c) Se $\tau_2 = 2\tau_1$, então $\beta = -\frac{1}{\tau_2}$ e portanto

$$W_\beta(1-3, t_2) = 1 + \frac{P_2(\cos\theta_{23})}{10} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left[\frac{e^{-t_2/\tau_2} \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2 - \omega_B t_2) - \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2 - \omega_B' t_2)}{(1 + 4(\omega_B' - \omega_B)^2 \tau_2^2)(e^{-t_2/\tau_2} - 1)} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{3(\omega_B' - \omega_B)\tau_2}{1 + 4(\omega_B' - \omega_B)^2 \tau_2^2} \left[\frac{e^{-t_2/\tau_2} \sin 2(\gamma_1 - \gamma_2 - \omega_B t_2)}{e^{-t_2/\tau_2} - 1} - \frac{\sin 2(\gamma_1 - \gamma_2 - \omega_B' t_2)}{e^{-t_2/\tau_2} - 1} \right] \right\} \qquad (103)$$

Estas expressões são bastante simples e de bastante interesse prático. Exemplo de sua utilização é fornecido no próximo capítulo.

IV - CONCLUSÕES

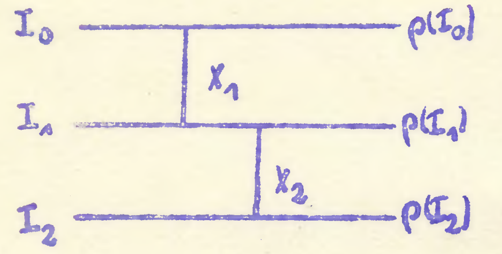
As expressões obtidas para a correlação angular tripla perturbada são de natureza complexa e de difícil aplicação experimental. Certamente os resultados traduzidos pelas expressões (78) e (97) que se aplicam no caso de interação elétrica na forma diferencial e magnética diferencial na qual não se observa o tempo de emissão da radiação intermediária X_2, respectivamente, não são de fácil interpretação.

Correlação $\gamma_1 - \gamma_2$ não perturbada é usado para determinar os spins nucleares e misturas de transições. Como a correlação $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ não perturbada é sensível a esses mesmos parâmetros, esta técnica não é tão utilizada quanto a primeira, uma vez que o número de coincidências por unidade de tempo é menor relativamente à obtida em correlação dupla. Tem sido usada onde outros métodos falharam.

Pela mesma razão a expressão (53) que se aplica para o caso de correlação angular tripla perturbada diferencial devido a interação magnética, apesar de sua forma relativamente simples, só será útil para a determinação dos momentos magnéticos dos níveis intermediários de um núcleo, quando é impossível fazê-lo através de correlação dupla perturbada. Em tais situações, entretanto, é interessante se fazer a análise da correlação entre o primeiro e o terceiro gama, uma vez que sua expressão depende, além dos spins dos níveis intermediários e multipolaridades da transição não observada, também das intensidades das perturbações dos níveis intermediários. Isso nos possibilita, então, obter-se os valores dos momentos magnéticos dos estados intermediários.

Entretanto, as expressões de maior interesse prático são possivelmente as relacionadas com as (90) e (100) e os casos especiais (101) a (103). Exemplo disto se obtém consultando-se o esquema de desintegração do Cs^{131}, que pode ser encontrada na referência 14. Esse núcleo possui dois estados de vida média quase idênticos. São esses os níveis de 79 kev ($7/2^+$) e o de 133 kev ($5/2^+$), cujas meias vidas são de 9.6 ns e 9.3 ns, respectivamente. É razoável supor-se que uma medida de correlação $\gamma_1 - \gamma_3$ não observando a dependência temporal do segundo gama e em que os estados intermediários sejam os de 79 kev e 133 kev, resulte na expressão (101). Em consequência disso, pode-se determinar o momento magnético do nível $7/2^+$, cujo interesse mencionamos na introdução desse trabalho, uma vez que o momento magnético do nível 133 kev já é conhecido.

APÊNDICE A



Vamos supor que para um dado núcleo em desintegração ocorra a cascata ilustrada ao lado. I_0, I_1, I_2 são os spins dos níveis assinalados; X_1 e X_2 são as radiações que populam os níveis I_1 e I_2 respectivamente e $\rho(I_0)$, $\rho(I_1)$, $\rho(I_2)$ são as matrizes densidades dos estados I_0, I_1, I_2.

As matrizes densidades $\rho(I)$ descrevem um ensemble de núcleos orientados e de spin I. Costuma-se escrevê-las na representação de momento angular $|Im\rangle$, sendo m a projeção do spin I em relação a um sistema de eixos de quantização propriamente escolhido. Naturalmente $\rho(I)$ será diagonal nesta representação se o ensemble que estiver descrevendo possuir um eixo de simetria coincidente com o eixo de quantização z.

A partir da noção de matrizes densidade, construimos os tensores estatísticos de ordem λ, $\rho_q^\lambda(I)$, da seguinte forma:

$$\rho_q^\lambda(I) = \sum_{m,m'} (-)^{I+m} \langle I\,-m\; I\,m' | \lambda q \rangle \langle m | \rho(I) | m' \rangle \tag{1A}$$

Estes são tensores irredutíveis e como tais transformam-se frente a uma rotação tridimensional R como:

$$\rho_q^\lambda(I) = \sum_{q'} D_{q'q}^\lambda(\alpha, \beta, \gamma)\, \rho_{q'}^\lambda(I) \tag{2A}$$

onde $D_{q'q}^\lambda$ é a matriz de rotação que leva o tensor primitivo a ser expresso num novo sistema de eixos que forma com o inicial os ângulos de Euler α, β, γ.

A relação (1A) pode ser expressa de maneira inversa:

$$\langle m|\rho|m'\rangle = \sum_{\lambda,q} (-)^{I+m} \langle I\text{-}m\, I m' | \lambda q\rangle \rho_q^\lambda (I) \tag{3A}$$

Esta expressão nos mostra que os elementos de matriz da matriz densidade podem ser expandidos em termos dos elementos de matriz do tensor esférico unitário U_q^λ.

$$\langle I m' | U_q^\lambda | I m\rangle = (-)^{I+m} \langle I\text{-}m\, I m' | \lambda q\rangle \tag{4aA}$$

$$= (-)^{I+m'} (2\lambda+1)^{1/2} \begin{pmatrix} I & I & \lambda \\ -m' & m & q \end{pmatrix} \tag{4bA}$$

<u>Propriedades dos tensores U_q^λ</u>:

$$U_q^{\lambda +} = (-)^q U_{-q}^\lambda \tag{5A}$$

$$Tr(U_q^\lambda U_{q'}^{\lambda' +}) = \sum_{m,m'} \langle I\text{-}m\, I m' | \lambda q\rangle \langle I\text{-}m\, I m' | \lambda' q'\rangle = \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{q,q'} \tag{6A}$$

$$\sum_{\lambda q} \langle I m | U_q^\lambda | I m'\rangle \langle I m'' | U_q^{\lambda +} | I m'''\rangle = \delta_{m,m'''} \delta_{m',m''} \tag{7A}$$

$$\sum_{\lambda,q} U_q^{\lambda +} | U_q^\lambda = E$$

onde E = operador unidade (8A)

Dessa forma, a expressão (3A), em termos dos tensores U_q^λ será:

$$\langle m| \rho(I) | m'\rangle = \sum_{\lambda,q} \langle m' | U_q^\lambda | m\rangle \rho_q^\lambda = \sum_{\lambda,q} \langle m | U_q^{\lambda +} | m'\rangle \rho_q^\lambda$$

ou de maneira mais compacta:

$$\rho(I) = \sum_{\lambda q} U_q^{\lambda +} \rho_q^\lambda \tag{9aA}$$

e a forma conjugada:

$$\rho^{+}(I) = \sum_{\lambda,q} U_q^{\lambda} \rho_q^{\lambda +} \qquad (9bA)$$

Descrevendo as radiações X_1 e X_2 pelos operadores $H(X_1)$ e $H(X_2)$ respectivamente e não levando em conta perturbações extranucleares, as matrizes densidades dos estados I_1 e I_2 podem ser escritas como:

$$\rho(I_1) = H(X_1)\, \rho(I_0)\, H^{+}(X_1)$$

$$\rho(I_2) = H(X_2)\, \rho(I_1)\, H^{+}(X_2)$$

A função correlação angular $W(1,2)$ dessas duas radiações é obtida através da operação traço de:

$$W(1,2) = Tr[\rho(I_2)] = Tr[H(X_2)\, \rho(I_1)\, H^{+}(X_2)]$$

Tendo em vista a relação (9aA), podemos escrever

$$W(1,2) = \sum_{\lambda,q} Tr[H(X_2)\, U_q^{\lambda +} \rho_q^{\lambda}(X_1)\, H^{+}(X_2)] =$$

$$= \sum_{\lambda,q} \rho_q^{\lambda}\, Tr[H(X_2)\, U_q^{\lambda +} H^{+}(X_2)]$$

Utilizando a propriedade de invariança de uma permutação cíclica frente a operação do traço e propriedades (9bA) e (6A), tem-se:

$$W(1,2) = \sum_{\lambda,q} \rho_q^{\lambda}(X_1)\, Tr[H^{+}(X_2)\, H(X_2)\, U_q^{\lambda +}] = \sum_{\substack{\lambda,q\\ \lambda',q'}} \rho_q^{\lambda}(X_1)\, \rho_{q'}^{\lambda' +}(X_2)\, Tr[U_{q'}^{\lambda'} U_q^{\lambda +}]$$

$$= \sum_{\lambda q} \rho_q^{\lambda}(X_1)\, \rho_q^{\lambda +}(X_2) \qquad (10A)$$

Entretanto os tensores $\rho_q^{\lambda}(X_1)$ e $\rho_q^{\lambda +}(X_2)$ referem-se ao sistema x,y,z.

É conveniente expressá-los em termos das direções de polarização $\vec{p}$ e propagação $\vec{k}$ da radiação. Denotaremos por $\vec{kp}$ este novo sistema e representaremos as quantidades expressas no mesmo por um índice zero. Assim:

$$\rho_q^{\lambda}(X_1) = \sum_{q'} \rho_{q'}^{\lambda}(X_1)_0 \, D_{q'q}^{\lambda}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \qquad \text{(11aA)}$$

$$\rho_q^{\lambda^+}(X_2) = \sum_{q''} \rho_{q''}^{\lambda^+}(X_2)_0 \, D_{q''q}^{\lambda^*}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \qquad \text{(11bA)}$$

Se não observamos a polarização $\vec{p}$ da radiação, mas somente sua direção de propagação $\vec{k}$, que é o caso da correlação direcional, o tensor ρ_q^{λ} é axialmente simétrico com relação à direção de propagação $\vec{k}$. Isto significa que $\rho_q^{\lambda}(X)_0$ é invariante frente a uma rotação em torno desse eixo de simetria.

$$\rho_q^{\lambda}(X)_0 = \sum_{q_1} \rho_{q_1}^{\lambda}(X)_0 \, D_{q_1 q}^{\lambda}(\alpha, 0, 0) = \sum_{q_1} \rho_{q_1}^{\lambda}(X_1)_0 \, e^{-iq\alpha} \delta_{q_1, q}$$

onde $q_1 = q = 0$ para $\alpha \neq 0$

Assim a única componente não nula deste tensor é a componente $\rho_0^{\lambda}(X)_0$, que denotaremos por $\rho_\lambda(X)_0$. Logo, para o caso de simetria axial em torno da direção de propagação $\vec{k}$, as expressões (11A) aparecem como:

$$\left.\begin{aligned} \rho_q^{\lambda}(X_1) &= \rho_\lambda(X_1)_0 \, D_{0q}^{\lambda}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \\ \rho_q^{\lambda^+}(X_2) &= \rho_\lambda^{+}(X_2)_0 \, D_{0q}^{\lambda^*}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(12A)}$$

Em vista disso, a expressão para a correlação angular direcional não perturbada devido a duas radiações X_1, X_2 será dada por:

$$W(1,2) = \sum_{\lambda, q} \rho_\lambda(X_1)_0 \, \rho_\lambda^{+}(X_2)_0 \, D_{0q}^{\lambda}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \, D_{0q}^{\lambda^*}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

e em consequência da propriedade (1C)

$$W(1,2) = \sum_{\lambda} \rho_\lambda(X_1)_0 \, \rho_\lambda^{+}(X_2)_0 \, P_\lambda(\cos\theta) \qquad \text{(13A)}$$

APÊNDICE B

B.I - Cálculo do somatório

$$\sum_{\substack{m_2 m_1 \\ m_2' m_1'}} \begin{pmatrix} I_2 & L_2' & I_1 \\ -m_2 & -p & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ -m_2' & -p & m_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ -m_2' & m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ -m_1' & m_1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Empregando sucessivamente a relação (5C), obtem-se

$$A = \sum_{\substack{m_2 m_2' \\ m_1'}} \begin{pmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ -m_2' & -p & m_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ -m_2' & m_2 & 0 \end{pmatrix} \sum_{m_1} \begin{pmatrix} I_2 & L_2' & I_1 \\ -m_2 & -p & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ -m_1' & m_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{m_2, m_2' \\ m_1', \ell_3, m_3}} (-)^{I_1+\ell_3+p} (2\ell_3+1) \begin{Bmatrix} \lambda_2 & I_1 & I_1 \\ L_2' & I_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L_2' & I_1 & \ell_3 \\ p & -m_1' & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & I_2 & \ell_3 \\ 0 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ -m_2' & -p & m_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ -m_2' & m_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{m_2, m_2' \\ \ell_3\, m_3}} (-)^{I_1+\ell_3+p} (2\ell_3+1) \begin{Bmatrix} \lambda_2 & I_1 & I_1 \\ L_2' & I_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ -m_2' & m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & I_2 & \ell_3 \\ 0 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \sum_{m_1'} \begin{pmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ -m_2' & -p & m_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2' & I_1 & \ell_3 \\ p & -m_1' & m_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{m_2 m_2' \ell_3 \\ m_3\, \ell_1 m_1}} (-)^{2I_1+\ell_1+\ell_3+p-m_2'+m_3} (2\ell_3+1)(2\ell_1+1) \begin{Bmatrix} I_1 & I_1 & \lambda_2 \\ I_2 & \ell_3 & L_2' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ \ell_3 & L_2' & \ell_1 \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \lambda_1 \\ -m_2' & m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & I_2 & \ell_3 \\ 0 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & L_2 & \ell_1 \\ m_3 & -p & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & L_2' & \ell_1 \\ -m_2' & p & -m_1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{\ell_1 \ell_2 \ell_3 m_2' \\ m_1 m_2 m_3}} (-)^{2I_1+I_2+\ell_1+\ell_2+\ell_3+p} (2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1) \begin{Bmatrix} \lambda_2 & I_1 & I_1 \\ L_2' & I_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ \ell_3 & L_2' & \ell_1 \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \ell_3 & \lambda_2 & I_2 \\ I_2 & \lambda_1 & \ell_2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & L_2 & \ell_1 \\ m_3 & -p & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & L_2' & \ell_1 \\ -m_2' & p & -m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \lambda_2 & \ell_2 \\ m_2' & 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \lambda_1 & \ell_2 \\ -m_3 & 0 & -m_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{l_1,l_2,l_3,l_4\\ m_1,m_2,m_3,m_4}} (-)^{2I_1+2I_2+l_1+l_2+l_3+l_4+2p} (2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)(2l_4+1) \begin{Bmatrix} \lambda_2 & I_1 & I_1 \\ L_2' & I_2 & l_3 \end{Bmatrix} \times$$

$$\begin{Bmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ l_3 & L_2' & l_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & \lambda_2 & I_2 \\ I_2 & \lambda_1 & l_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & l_2 & I_2 \\ L_2' & l_1 & l_4 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & L_2 & l_1 \\ m_3 & -p & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & \lambda_1 & l_2 \\ -m_3 & 0 & -m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2' & l_2 & l_4 \\ p & m_2 & m_4 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \lambda_2 & l_1 & l_4 \\ 0 & -m_1 & -m_4 \end{pmatrix}$$

Usando propriedades (6C) e (3C), se obtém:

$$\sum_{\substack{m_1 m_2\\ m_3 m_4}} \begin{pmatrix} l_1 & l_3 & L_2 \\ m_1 & m_3 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & l_3 & \lambda_1 \\ -m_2 & -m_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2' & l_2 & l_4 \\ p & m_2 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & l_1 & l_4 \\ 0 & -m_1 & -m_4 \end{pmatrix}$$

$$= (-)^{L_2'+l_2+l_4+\lambda_2+l_1+l_4} \sum_{\substack{m_1 m_2\\ m_3 m_4}} \begin{pmatrix} L_2 & l_1 & l_3 \\ -p & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2' & l_4 & l_2 \\ p & m_4 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_4 & \lambda_2 \\ m_1 & m_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_2 & \lambda_1 \\ m_3 & m_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-)^{L_2'+2l_4+l_1+l_2+\lambda_2} \sum_{\lambda_3} (2\lambda_3+1) \begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ l_1 & l_4 & \lambda_2 \\ l_3 & l_2 & \lambda_1 \end{Bmatrix}$$

Logo,

$$A = \sum_{\substack{l_1 l_2 l_3\\ l_4\ \lambda_3}} (-)^{2I_1+2I_2+2l_1+2l_2+l_3+3l_4+\lambda_2+2p+L_2'} (2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1) \times$$

$$\times (2l_4+1)(2\lambda_3+1) \begin{Bmatrix} \lambda_2 & I_1 & I_1 \\ L_2' & I_2 & l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ l_3 & L_2' & l_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & \lambda_2 & I_2 \\ I_2 & \lambda_1 & l_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & l_2 & I_2 \\ L_2' & l_1 & l_4 \end{Bmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ l_1 & l_4 & \lambda_2 \\ l_3 & l_2 & \lambda_1 \end{Bmatrix} \qquad (1B)$$

Em consequência da proprie dade (7C),

$$\sum_{l_4} (2l_4+1) \begin{Bmatrix} \lambda_2 & l_1 & l_4 \\ \lambda_3 & L_2 & L_2' \\ \lambda_1 & l_3 & l_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & l_4 & l_4 \\ L_2' & l_2 & I_2 \end{Bmatrix} = (-1)^{2I_2} \begin{Bmatrix} \lambda_3 & L_2 & L_2' \\ l_1 & I_2 & l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & l_3 & l_2 \\ I_2 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{Bmatrix}$$

Entretanto em (1B) tem-se:

$$\sum_{l_4} (2l_4+1)(-1)^{3l_4} \begin{Bmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ l_1 & l_4 & \lambda_2 \\ l_3 & l_2 & \lambda_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & l_2 & I_2 \\ L_2' & l_1 & l_4 \end{Bmatrix} \qquad (2B)$$

Em vista de (3C)

$$\begin{Bmatrix} \lambda_2 & l_2 & I_2 \\ L_2' & l_1 & l_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_2 & l_1 & l_4 \\ L_2' & l_2 & I_2 \end{Bmatrix}$$

e como,

$$\begin{Bmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ l_1 & l_4 & \lambda_2 \\ l_3 & l_2 & \lambda_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_3 & L_2 & L_2' \\ \lambda_2 & l_1 & l_4 \\ \lambda_1 & l_3 & l_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= (-1)^{\lambda_3+L_2+L_2'+\lambda_2+l_1+l_4+\lambda_1+l_3+l_2} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & l_1 & l_4 \\ \lambda_3 & L_2 & L_2' \\ \lambda_1 & l_3 & l_2 \end{Bmatrix}$$

a relação (2B) fica, portanto,

$$(-)^{\lambda_3+L_2+L_2'+\lambda_2+\ell_1+\lambda_1+\ell_3+\ell_2} \sum_{\ell_4} (2\ell_4+1)(-)^{4\ell_4} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & \ell_1 & \ell_4 \\ \lambda_3 & L_2 & L_2' \\ \lambda_1 & \ell_3 & \ell_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_2 & \ell_1 & \ell_4 \\ L_2' & \ell_2 & I_2 \end{Bmatrix} \qquad (3B)$$

Se l_4
- for inteiro
  - par : $(-)^{4l_4} = 1$
  - ímpar : $(-)^{4l_4} = 1$
- for semi-inteiro, $l_4 = \frac{2a+1}{2}$: $(-)^{4l_4} = 1$

Assim, em (3B), o termo $(-)^{4l_4}$ desaparece e podemos empregar a expressão (1B) resultando:

$$(-)^{\lambda_3+L_2+L_2'+\lambda_2+\ell_1+\lambda_1+\ell_3+\ell_2+2I_2} \begin{Bmatrix} \lambda_3 & L_2 & L_2' \\ \ell_1 & I_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \ell_3 & \ell_2 \\ I_2 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{Bmatrix}$$

Logo,

$$A = \sum_{\substack{\ell_1 \ell_2 \\ \ell_3 \lambda_3}} (-)^{2I_1+4I_2+3\ell_1+3\ell_2+2\ell_3+2\lambda_2+\lambda_1+2p+\lambda_3+L_2+2L_2'} \times$$

$$(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)(2\lambda_3+1) \begin{Bmatrix} \lambda_2 & I_1 & I_1 \\ L_2' & I_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ \ell_3 & L_2' & \ell_1 \end{Bmatrix} \times$$

$$\begin{Bmatrix} \ell_3 & \lambda_2 & I_2 \\ I_2 & \lambda_1 & \ell_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_3 & L_2 & L_2' \\ \ell_1 & I_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \ell_3 & \ell_2 \\ I_2 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4B)

Mas de acordo com a propriedade (8C),

$$\sum_{l_2} (-)^{\lambda_3+I_2+l_2}(2l_2+1)\begin{Bmatrix}\lambda_1 & l_3 & l_2\\ I_2 & \lambda_2 & \lambda_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} I_2 & \lambda_2 & l_2\\ l_3 & \lambda_1 & I_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_3\\ I_2 & l_3 & I_2\end{Bmatrix} \qquad (5B)$$

Vemos que em (4B) tem-se um termo idêntico ao do primeiro membro da relação acima, a menos de um fator $(-1)^{2l_2}$. Todavia, escrevendo $3l_2 = 2l_2 + l_2$, verificamos que:

Se l_2 for

- inteiro
  - par $\quad (-1)^{3l_2} = (-1)^{l_2+2}$
  - ímpar $\quad (-1)^{3l_2} = (-1)^{l_2+2}$
- semi-inteiro $\quad (-1)^{3l_2} = (-1)^{l_2+1}$

Assim, a soma sobre l_2 em (4B) pode ser escrita como:

$$\sum_{l_2} (-)^{3l_2}(2l_2+1)\begin{Bmatrix}\lambda_1 & l_3 & l_2\\ I_2 & \lambda_2 & \lambda_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l_3 & \lambda_2 & I_2\\ I_2 & \lambda_1 & l_2\end{Bmatrix}(-)^{\lambda_3+I_2} =$$

$$(-)^{+\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}} \sum_{l_2} (-)^{l_2+\lambda_3+I_2}(2l_2+1) \times$$

$$\begin{Bmatrix}\lambda_1 & l_3 & l_2\\ I_2 & \lambda_2 & \lambda_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} I_2 & \lambda_2 & l_2\\ l_3 & \lambda_1 & I_2\end{Bmatrix}$$ e de acordo com (5B)

$$= (-)^{+\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}}\begin{Bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ l_3 & I_2 & I_2\end{Bmatrix}$$ onde o valor $+1$ deve ser empregado

quando l_2 for semi-inteiro e o valor $+2$ no caso de l_2 ser inteiro.

Portanto,

$$A = \sum_{l_1 l_3 \lambda_3} (-)^{2I_1+3I_2+3l_1+2l_3+2\lambda_2+\lambda_1+2p+L_2+2L_2'+\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}} (2l_1+1) \times$$

$$\times (2l_3+1)(2\lambda_3+1) \begin{Bmatrix} \lambda_2 & I_1 & I_1 \\ L_2' & I_2 & l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & L_2 & I_1 \\ l_3 & L_2' & l_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_3 & L_2 & L_2' \\ l_1 & I_2 & l_3 \end{Bmatrix} \times$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ l_3 & I_2 & I_2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L_2 & L_2' & \lambda_3 \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6B)$$

Devido à propriedade (8C),

$$\sum_{l_1} (-)^{I_1+\lambda_3+l_1} (2l_1+1) \begin{Bmatrix} l_3 & L_2 & l_1 \\ I_2 & L_2' & I_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & L_2' & l_1 \\ L_2 & l_3 & \lambda_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_3 & L_2' & I_1 \\ L_2 & I_2 & \lambda_3 \end{Bmatrix}$$

Entretanto em (6B) tem-se:

$$B = \sum_{l_1} (-)^{I_1+\lambda_3+3l_1} (2l_1+1) \begin{Bmatrix} l_3 & L_2 & l_1 \\ I_2 & L_2' & I_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_2 & L_2' & l_1 \\ L_2 & l_3 & \lambda_3 \end{Bmatrix}$$, que é da mesma

forma da soma sobre l_2 já executada.

Procedendo de maneira idêntica com respeito à soma em l_1, podemos escrever para esta:

$$B = (-)^{+\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}} \begin{Bmatrix} l_3 & L_2' & I_1 \\ L_2 & I_2 & \lambda_3 \end{Bmatrix}$$ Também aqui o valor + 1 deve ser

empregado quando l_1 for um número semi-inteiro e o valor + 2 quando l_1 for inteiro.

Utilizando tais resultados, tem-se:

$$A = \sum_{\ell_3 \lambda_3} (-)^{I_1 + 3I_2 + 2\ell_3 - \lambda_3 + 2\lambda_2 + \lambda_1 + 2p + L_2 + 2L_2' + \overset{(\ell_2)}{\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}} + \overset{(\ell_1)}{\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}}} \times (2\lambda_3+1) \times$$

$$(2\ell_3+1)\left\{\begin{matrix}\lambda_2 & I_1 & I_1\\ L_2' & I_2 & \ell_3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \ell_3 & I_2 & I_2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\ell_3 & L_2' & I_1\\ L_2 & I_2 & \lambda_3\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}L_2 & L_2' & \lambda_3\\ -p & p & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (7B)$$

Entretanto da relação (9C), tomando-se os valores:

$j_1 = j_2 = I_2$

$J_{12} = \vec{j_1} + \vec{j_2} = \lambda_1$

$j_3 = j_4 = I_1$

$J_{34} = \vec{j_3} + \vec{j_4} = \lambda_2$

$J = \lambda_3$

$J_{13} = \vec{j_1} + \vec{j_3} = \vec{I_1} + \vec{I_2} = \vec{L_2}$

$J_{24} = \vec{j_2} + \vec{j_4} = \vec{I_2} + \vec{I_1} = \vec{L_2'}$

tem-se:

$$\sum_{\ell_3} (-)^{2\ell_3} (2\ell_3+1)\left\{\begin{matrix}I_2 & I_2 & \lambda_1\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \ell_3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}I_1 & I_1 & \lambda_2\\ I_2 & \ell_3 & L_2'\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}L_2 & L_2' & \lambda_3\\ \ell_3 & I_2 & I_1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}I_2 & I_2 & \lambda_1\\ I_1 & I_1 & \lambda_2\\ L_2 & L_2' & \lambda_3\end{matrix}\right\}$$

Dessa forma,

$$A = \sum_{\lambda_3} (-)^{I_1 + 3I_2 - \lambda_3 + 2\lambda_2 + \lambda_1 + 2p + L_2 + 2L_2' + \overset{(\ell_1)}{\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}} + \overset{(\ell_2)}{\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}}} (2\lambda_3+1) \times$$

$$\begin{pmatrix}L_2 & L_2' & \lambda_3\\ -p & p & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}I_2 & I_2 & \lambda_1\\ I_1 & I_1 & \lambda_2\\ L_2 & L_2' & \lambda_3\end{matrix}\right\}$$

Multiplicando a expressão acima por $(-1)^{3I_2+I_1+L_2+L_2'-p}$ a fase que resulta após essa operação é:

$$F = (-1)^{2I_1 + 6I_2 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1 + p + 2L_2 + 3L_2' + \left\{ {1 \atop 2} \right\}^{\ell_1} + \left\{ {1 \atop 2} \right\}^{\ell_2}}$$

Entretanto, lembrando que

$$\vec{\ell}_1 = \vec{I}_2 + \vec{L}_2' \qquad\qquad \vec{L}_2' = \vec{I}_2 + \vec{I}_1$$

$$\vec{\ell}_2 = \vec{I}_2 + \vec{\lambda}_2 \qquad\qquad \vec{L}_2 = \vec{I}_2 + \vec{I}_1$$

a fase F, para valores de spin inteiro ou semi-inteiro se resumirá em:

$$F = (-1)^{L_2' + p}$$

B.II Propriedade dos coeficientes de perturbação frente à conjugação

$$W_p(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \\ \lambda_3 q_1 q_2}} \rho^{+}_{\lambda_1}(X_1)_0 \, \rho^{+}_{\lambda_1 \lambda_1'}(X_2)_0 \, \rho_{\lambda_3}(X_3)_0 \, G^{q_1 q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) \, \times$$

$$G^{q_2 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \, D^{(\lambda_2)^*}_{0 q_2}(R_2) \, D^{(\lambda_1)^*}_{0 q_1}(R_1) \, D^{(\lambda_1')}_{0 q_1}(R_2) \, D^{\lambda_3}_{0 q_2}(R_3)$$

Como os tensores estatísticos $\rho^{+}_{\lambda_1}, \rho^{+}_{\lambda_2 \lambda_1'}$ e ρ_{λ_3} que descrevem a emissão das radiações $X_1 X_2 X_3$ e a função correlação angular $W_p(1,2,3)$ são reais, podemos escrever:

$$W_p(1,2,3) - W_p^*(1,2,3) = \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \\ \lambda_3 q_1 q_2}} \left[G^{q_1 q_1}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) \, G^{q_2 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \, D^{(\lambda_2)^*}_{0 q_2}(R_2) \, \times \right.$$

$$D^{(\lambda_1)^*}_{0 q_1}(R_1) \, D^{(\lambda_1')}_{0 q_1}(R_2) \, D^{\lambda_3}_{0 q_2}(R_3) - G^{q_1 q_1^*}_{\lambda_1' \lambda_1}(t) \, G^{q_2 q_2^*}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \, D^{(\lambda_2)}_{0 q_2}(R_2) \, D^{(\lambda_1)}_{0 q_1}(R_1) \, \times$$

$$\left. D^{(\lambda_1')^*}_{0 q_1}(R_2) \, D^{(\lambda_3)^*}_{0 q_2}(R_3) \right] = 0$$

Lembrando que $D^{(j)*}_{mm'}(\omega) = (-)^{m-m'} D^{(j)}_{-m-m'}(\omega)$

$$\sum_{\substack{\lambda_1\lambda_1'\lambda_2\\ \lambda_3 q_1 q_2}} \Big\{ G^{q_1q_1}_{\lambda'\lambda_1}(t) \left[D^{\lambda_1}_{0-q_1}(R_1) D^{\lambda_1'}_{0q_1}(R_2) \right] G^{q_2q_2}_{\lambda_3\lambda_2}(t) \left[D^{\lambda_2}_{0-q_2}(R_2) D^{\lambda_3}_{0q_2}(R_3) \right]$$

$$- G^{q_1q_1 *}_{\lambda'\lambda_1}(t) \left[D^{\lambda_1}_{0q_1}(R_1) D^{\lambda_1'}_{0-q_1}(R_2) \right] G^{q_2q_2 *}_{\lambda_3\lambda_2}(t) \left[D^{\lambda_2}_{0q_2}(R_2) D^{\lambda_3}_{0-q_2}(R_3) \right] \Big\} = 0 \qquad (8B)$$

Devido à propriedade (19C),

$$D^{\lambda_1'}_{0q_1}(R_2) = \sum_{q_1'} D^{\lambda_1'}_{0q_1'}(S_2) D^{\lambda_1'}_{q_1'q_1}(R_1)$$

$$D^{\lambda_1'}_{0-q_1}(R_2) = \sum_{q'} D^{\lambda_1'}_{0q'}(S_2) D^{\lambda_1'}_{q'-q_1}(R_1)$$

$$D^{\lambda_3}_{0q_2}(R_3) = \sum_{q_2'} D^{\lambda_3}_{0q_2'}(S_3) D^{\lambda_3}_{q_2'q_2}(R_2)$$

$$D^{\lambda_3}_{0-q_2}(R_3) = \sum_{q_2''} D^{\lambda_3}_{0q_2''}(S_3) D^{\lambda_3}_{q_2''-q_2}(R_2)$$

Substituindo as expansões acima em (8B),

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \\ \lambda_3 q_1 q_2}} \Big\{ G^{q_1 q_1}_{\lambda_1 \lambda_1'}(t) \Big[\sum_{q_1'} D^{\lambda_1'}_{0 q_1'}(S_2)\, D^{\lambda_1}_{0 -q_1}(R_1)\, D^{\lambda_1'}_{q_1' q_1}(R_1) \Big] G^{q_2 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \times$$

$$\Big[\sum_{q_2'} D^{\lambda_3}_{0 q_2'}(S_3)\, D^{\lambda_2}_{0 -q_2}(R_2)\, D^{\lambda_3}_{q_2' q_2}(R_2) \Big] - G^{q_1 q_1^*}_{\lambda_1 \lambda_1'}(t) \Big[\sum_{q'} D^{\lambda_1'}_{0 q'}(S_2)\, D^{\lambda_1'}_{q' -q_1}(R_1) \times$$

$$D^{\lambda_1}_{0 q_1}(R_1) \Big] G^{q_2 q_2^*}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \Big[\sum_{q_2''} D^{\lambda_3}_{0 q_2''}(S_3)\, D^{\lambda_3}_{q_2'' -q_2}(R_2)\, D^{\lambda_2}_{0 q_2}(R_2) \Big] \Big\} = 0$$

(9B)

Utilizando a propriedade (18C)

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \\ \lambda_3 q_1 q_2}} \Big\{ G^{q_1 q_1}_{\lambda_1 \lambda_1'}(t) \Big[\sum_{\substack{j_1 m_1 \\ m_1' q_1'}} (2 j_1 + 1)\, D^{(j_1)^*}_{m_1' m_1}(R_1)\, D^{(\lambda_1')}_{0 q_1'}(S_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' & j_1 \\ 0 & q_1' & m_1' \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' & j_1 \\ -q_1 & q_1 & m_1 \end{pmatrix} \Big] G^{q_2 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \Big[\sum_{\substack{j_2 m_2 \\ m_2' q_2'}} (2 j_2 + 1)\, D^{(j_2)^*}_{m_2' m_2}(R_2)\, D^{\lambda_3}_{0 q_2'}(S) \times$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & j_2 \\ 0 & q_2' & m_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & j_2 \\ -q_2 & q_2 & m_2 \end{pmatrix} \Big] - G^{q_1 q_1^*}_{\lambda_1 \lambda_1'}(t) \Big[\sum_{\substack{j_1 m_1 \\ m_1' q'}} (2 j_1 + 1)\, D^{(j_1)^*}_{m_1' m_1}(R_1) \times$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' & j_1 \\ 0 & q' & m_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' & j_1 \\ q_1 & -q_1 & m_1 \end{pmatrix} D^{(\lambda_1')}_{0 q'}(S_2) \Big] G^{q_2 q_2^*}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \Big[\sum_{\substack{j_2 m_2 \\ m_2' q_2''}} (2 j_2 + 1) \times$$

$$D^{(j_2)^*}_{m_2' m_2}(R_2)\, D^{(\lambda_3)}_{0 q_2''}(S_3) \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & j_2 \\ 0 & q_2'' & m_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & j_2 \\ q_2 & -q_2 & m_2 \end{pmatrix} \Big] \Big\} = 0$$

(10B)

Entretanto, em vista das propriedades dos símbolos 3j,

$$q_1' = -m_1' \qquad q_2' = -m_2' \qquad q' = -m_1' \qquad q_2'' = -m_2'$$

$$m_1 = q_1 - q_1 = 0 \qquad m_2 = q_2 - q_2 = 0 \qquad m_1 = q_1 - q_1 = 0 \qquad m_2 = q_2 - q_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \delta_2 \\ q_2 & -q_2 & 0 \end{pmatrix} = (-)^{\lambda_2+\lambda_3+\delta_2} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \delta_2 \\ -q_2 & q_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' & \delta_1 \\ q_1 & -q_1 & 0 \end{pmatrix} = (-)^{\lambda_1+\lambda_1'+\delta_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' & \delta_1 \\ -q_1 & q_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Substituindo-se tais resultados em (10B),

$$\sum_{\substack{\lambda_1\lambda_1'\lambda_2 \\ \lambda_3 q_1 q_2}} \sum_{\delta_1 q_1} (2\delta_1+1)\, D^{(\delta_1)*}_{-q_1' 0}(R_1)\, D^{(\lambda_1')}_{0 q_1'}(S_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' & \delta_1 \\ 0 & q_1' & -q_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' & \delta_1 \\ -q_1 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\left\{ \sum_{\delta_2 q_2'} (2\delta_2+1)\, D^{(\delta_2)*}_{-q_2' 0}(R_2)\, D^{(\lambda_3)}_{0 q_2}(S_3) \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \delta_2 \\ 0 & q_2' & -q_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \delta_2 \\ -q_2 & q_2 & 0 \end{pmatrix} \left[G^{q_1 q_1}_{\lambda_1 \lambda_1'}(t) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. G^{q_2 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') - (-)^{\lambda_1+\lambda_1'+\delta_1}\, G^{q_1 q_1^*}_{\lambda_1 \lambda_1'}(t)\, G^{q_2 q_2^*}_{\lambda_3 \lambda_2}(t')\, (-)^{\lambda_2+\lambda_3+\delta_2} \right] \right\} \tag{11B}$$

Como os coeficientes de perturbação são independentes entre si em relação a λ, obtemos o resultado final

$$G^{q_1 q_1}_{\lambda_1 \lambda_1'}(t) = (-)^{\lambda_1+\lambda_1'}\, G^{q_1 q_1^*}_{\lambda_1 \lambda_1'}(t) \tag{12B}$$

$$G^{q_2 q_2}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') = (-)^{\lambda_2+\lambda_3}\, G^{q_2 q_2^*}_{\lambda_3 \lambda_2}(t') \tag{13B}$$

APÊNDICE C

$$\sum_q D^{\lambda}_{0q}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\, D^{\lambda *}_{0q}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) = P_\lambda(\cos\xi)$$

$$(\cos\xi = \cos\beta_1\cos\beta_2 + \mathrm{sen}\,\beta_1\,\mathrm{sen}\,\beta_2\cos(\gamma_2-\gamma_1)) \tag{1C}$$

$$\sum_{m_1m_2m_3} (-)^{l_1+l_2+l_3+m_1+m_2+m_3} \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & -m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3\\ -m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3\\ m_1 & -m_2 & m_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ l_1 & l_2 & l_3\end{Bmatrix} \tag{2C}$$

Propriedades de simetria do símbolo 3j

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} = (-)^{j_1+j_2+j_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ -m_1 & -m_2 & -m_3\end{pmatrix} \tag{3aC}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2\\ m_3 & m_1 & m_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1\\ m_2 & m_3 & m_1\end{pmatrix} \tag{3bC}$$

$$(-)^{j_1+j_2+j_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3\\ m_2 & m_1 & m_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2\\ m_1 & m_3 & m_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1\\ m_3 & m_2 & m_1\end{pmatrix} \tag{3cC}$$

$$F_\lambda(LL'II') = (-)^{I+I'-1}\left[(2L+1)(2L'+1)(2I'+1)(2\lambda+1)\right]^{1/2}\begin{pmatrix} L & L' & \lambda\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & L' & \lambda\\ I' & I' & I\end{pmatrix} \tag{4C}$$

$$F_\lambda(LL'II') = F_\lambda(L'LII')$$

$$F_0(LL'II') = \delta_{L,L'}$$

$$\sum_{m_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & -m_3\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{l_3m_3} (-)^{j_3+l_3+m_1+m_1}(2l_2+1)\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ l_1 & l_2 & l_3\end{Bmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & -m_3\end{pmatrix} \tag{5C}$$

$$\sum_{\gamma,x} (2x+1) \begin{pmatrix} a & b & x \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & c & d \\ \gamma & \varepsilon & \varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & x \\ e & f & c \\ g & h & d \end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{\substack{\mu',\nu' \\ \rho',\sigma'}} \begin{pmatrix} a & e & g \\ \alpha & \mu' & \nu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & f & h \\ \beta & \rho' & \sigma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f & c \\ \mu' & \rho' & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h & d \\ \nu' & \sigma' & \varphi \end{pmatrix} \tag{6C}$$

$$\sum_{x} (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ c & d & e \\ f & g & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & x \\ e & h & k \end{Bmatrix} = (-)^{2k} \begin{Bmatrix} c & d & e \\ b & k & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & g & h \\ k & a & c \end{Bmatrix} \tag{7C}$$

$$\sum_{x} (-)^{f+g+x} (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ c & d & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & x \\ b & a & g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & d & f \\ b & c & g \end{Bmatrix} \tag{8C}$$

$$\sum_{l_3} (-)^{2l_3} (2l_3+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ J_{34} & J & l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ j_2 & l_3 & J_{24} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ l_3 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} \tag{9C}$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & f \\ j_3 & j_4 & f' \\ g & g' & 0 \end{Bmatrix} = \delta_{f,f'} \delta_{g,g'} \frac{(-)^{j_2+j_3+f+g}}{\sqrt{(2f+1)(2g+1)}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & f \\ j_4 & j_3 & g \end{Bmatrix} \tag{10C}$$

$$\begin{Bmatrix} j & j' & 0 \\ J & J' & g \end{Bmatrix} = (-)^{j+J+g} \frac{\delta_{j,j'} \delta_{J,J'}}{\sqrt{(2j+1)(2J+1)}} \tag{11C}$$

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-)^{j-m} \frac{1}{(2j+1)^{1/2}} \tag{12C}$$

$$\int D^{(j_1)^*}_{m_1' m_1}(\omega)\, D^{(j_2)}_{m_2' m_2}(\omega)\, d\omega = \frac{8\pi^2}{2j+1}\, \delta_{m_1', m_1}\, \delta_{m_2', m_2}\, \delta_{j_1, j_2} \tag{13C}$$

$$\begin{pmatrix} j & j & 1 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-)^{j-m} \frac{2m}{\sqrt{(2j+2)(2j+1)2j}} \tag{14C}$$

$$D^{(j_1)^*}_{m_1 m_1}(0,0,\theta)\, D^{(j_2)^*}_{0 m_1}(0,\beta,\gamma) = A(j_1, m_1)\, e^{-im_1\theta}\, e^{im_1\gamma}$$

$$= D^{(j_1)^*}_{0 m_1}\left[0, \beta, (\gamma-\theta)\right] \tag{15C}$$

$$A(j_1, m_1) = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2j_1+1}} (-)^{m_1} \left[\frac{2j_1+1}{4\pi} \quad \frac{(j_1-m_1)!}{(j_1+m_1)!}\right]^{1/2} P^{m_1}_{j_1}(\cos\beta)$$

$$S \equiv \left(\vec{T}^{k} \cdot \vec{U}^{k}\right) = \sum_q (-)^q\, T_q^{(k)}\, U_{-q}^{(k)} \tag{16C}$$

$$\begin{pmatrix} j & j & 2 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-)^{-j+m} \sqrt{\frac{(2j-2)!}{(2j+3)!}}\; 2\left[3m^2 - j(j+1)\right] \tag{17C}$$

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m, m' = -j}^{+j} (2j+1)\, D^{(j)^*}_{m' m}(\omega) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & m \end{pmatrix} = \tag{18C}$$

$$= D^{(j_1)}_{m_1' m_1}(\omega)\, D^{(j_2)}_{m_2' m_2}(\omega)$$

Se a rotação (α, β, γ) é o resultado da aplicação sucessiva das rotações (α_1, β_1, γ_1) e (α_2, β_2, γ_2) nesta ordem, então:

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{m''} D^{(j)}_{m'm''}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\, D^{(j)}_{m''m}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) \qquad (19C)$$

$$\int d\Omega\, D^{(j_1)}_{m_1' m_1}(\omega)\, D^{(j_2)}_{m_2' m_2}(\omega)\, D^{(j_3)}_{m_3' m_3}(\omega) = 8\pi^2 \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \qquad (20C)$$

REFERÊNCIAS

1. L.C.Biedenharn e M.E.Rose, Rev.Mod.Phys. 25 (1953) 729
2. A.J.Ferguson, Angular correlations methods in gamma-ray spectroscopy. North-Holland (1965), cap. 3.
3. S.Devons e L.J.B.Goldfarb, Handbuch der Physik, 42 (1957) 362.
4. P.B.Smith, Nuclear Reactions, 2 (1962) 248. North-Holland.
5. G.Bueche e H.Appel, Z.Phys. 250 (2) (1972) 145.
6. B.P.Singh, H.S.Dahiya, U.S.Pande, Phys.Rev.C, 4 (1971) 1510.
7. U.S.Pande e B.P.Singh, Ind.J.Phys., 44 (1970) 300.
8. F.E.Coffman, J.H.Hamilton, A.V.Ramayya, M.U.Kim e R.L.Robinson, Angular correlations in nuclear desintegrations. Noordhoff (1971) 270.
9. B.P.Singh e H.S.Dahiya, Phys. Rev. C, (1972), outubro.
10. F.Coester e J.M.Jauch, Helv.Phys.Acta, 26 (1953) 1.
11. H.Gabriel, Phys.Rev. 181 (1969) 506.
12. R.M.Steffen, Angular correlations in nuclear desintegrations. Noordhoff (1971), cap. 1.
13. F.Coester, Gamma-gamma angular correlations. ANL 5316 (1955)26.
14. U.Fano, Phys.Rev., 90 (1953) 577.
15. A.Maciel, Medida e interpretação de propriedades nucleares do Mo^{95}, In^{115}, e Cs^{131}. Tese de doutoramento apresentada à UFRGS (1970).
16. N.Freed e W.Miles, Nuovo Cim., 60B (1969) 301.
17. L.S.Kisslinger e R.A.Sorensen, Rev.Mod.Phys., 35 (1963) 853.
18. J.Fechner, A.Hammesfahr, A.Kluge, S.K.Sen, H.Toschinski, J. Voss e P.Weigt, Nucl.Phys., A130 (1969) 545.
19. M.E.Rose, Multipole fields. John Wiley and Sons (1955).
20. M.E.Rose, Elementary theory of angular momentum. John Wiley and Sons (1957).
21. J.D.Jackson, Classical Electrodynamics. John Wiley and Sons (1962), cap. 16.
22. J.M.Blatt e V.G.Weisskopf, Theoretical nuclear physics. John Wiley and Sons (1952) cap. XII e apêndice B.

23. S.de Benedetti, Nuclear interactions. John Wiley and Sons (1964).

24. A.Messiah, Quantum mechanics. North-Holland (1966).

25. R.M.Steffen e H.Frauenfelder, Perturbed angular correlations. North-Holland (1964), cap. I.

26. E.Matthias, W.Schneider e R.M.Steffen, Phys.Rev., 125 (1962) 261.

27. C.T.Alonso, Angular correlations in nuclear desintegrations. Noordhoff (1971), 426.

28. K.Alder, H.Albers - Schönberg, E.Heer e T.B.Novey, Helv. Phys.Acta, 26 (1953) 761.