

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**Efeitos de Distribuição de Carga na Instabilidade de  
Estados com Partículas Aprisionadas em Free-Electron  
Lasers**

Eduardo Alcides Peter  
Mestrado

Comissão Coordenadora do Programa  
de Pós-Graduação em Física

Porto Alegre  
2011

Eduardo Alcides Peter

**EFEITOS DE DISTRIBUIÇÃO DE CARGA NA  
INSTABILIDADE DE ESTADOS COM PARTÍCULAS  
APRISIONADAS EM FREE-ELECTRON LASERS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientação: Felipe Barbedo Rizzato

Porto Alegre

2011

## RESUMO

O *free-electron laser* (FEL) surgiu como uma nova fonte de radiação eletromagnética. O presente trabalho trata do efeito de carga em um FEL específico: de passagem única; e, sendo que as interações relevantes são entre o feixe e o campo magnético e entre os elétrons (não são estudados os campos auto consistentes do laser). Encontram-se as equações de movimento de cada partícula dentro do poço e comparam-se os resultados analíticos com os resultados obtidos por simulação computacional, para os limites de *povoamento* dos elétrons em uma situação de equilíbrio. Posteriormente, se analisa o efeito de carga através dos mapas de Poincaré, introduzindo partículas com uma determinada distribuição inicial, dentro do potencial aprisionador. Conclui-se que a introdução de cargas aumenta o número de graus de liberdade do sistema, fazendo com que os mapas de Poincaré não sejam mais uma boa ferramenta para analisar a dinâmica do sistema. Observa-se, também, o fenômeno de quebra de onda no FEL através do efeito do balanço do potencial e de uma distribuição inicial de elétrons diferente da distribuição de equilíbrio.

Palavras-chave: mapas de Poincaré, free-electron laser, potencial ponderomotriz, quebra de onda, distribuição de equilíbrio.

## ABSTRACT

*Free-electron laser* (FEL) was first created as a new source of electromagnetic radiation. The present work is about the charge effect on a specific FEL: single pass; and, with interactions between the beam and the magnetic field and between electrons (laser self consistent fields are not studied). Motion equations of each particle inside ponderomotive well are discovered, and then analytic results for the limits of electronic population are compared with simulated ones, in the situation of equilibrium. Afterwards, particles are introduced in the trapping potential, respecting a defined initial distribution, so the charge effect is analyzed through Poincaré maps. In conclusion, the introduction of charges raises the number of freedom degrees of the system. This makes the Poincaré maps not such a good tool to analyze the system dynamics. The wave breaking phenomenon is also observed in FEL through oscillation balance effect and an initial electronic distribution distinct of the equilibrium one.

Keywords: Poincaré maps, free-electron laser, ponderomotive potential, wave breaking, equilibrium distribution.

# SUMÁRIO

1. Introdução.....	1
2. O Nascimento do Free-Electron Laser.....	4
3. Os Lasers Convencionais e o FEL.....	6
3.1. Descrição básica do funcionamento dos lasers convencionais.....	6
3.2. Descrição básica de um FEL.....	9
3.2.1. Tipos de aceleradores.....	10
3.2.2. Configurações do FEL.....	11
3.2.2.1. FEL de passagem única.....	11
3.2.2.2. FEL oscilador.....	12
3.2.3. Dispositivos geradores de campo magnético.....	13
4. A Física do Free-Electron Laser.....	15
4.1. O FEL é realmente um laser?.....	16
4.2. O FEL estudado.....	17
4.2.1. O potencial ponderomotriz.....	17
4.2.1.1. A escolha de fase.....	26
4.2.2. Interação entre as partículas.....	28
4.2.3. Equações de movimento para o problema.....	35
4.2.4. O programa.....	37
4.2.4.1. Teste 1.....	38
4.2.4.2. Teste 2.....	40
4.2.4.2.1. Teste 2A.....	42
4.2.4.2.2. Teste 2B.....	46
4.2.4.2.3. Teste 2C.....	49
4.3 Limitação do modelo de interação.....	52
5. Mapas de Poincaré.....	59
5.1. Buscando o período.....	62
5.2. Regiões de interesse.....	66

5.3. Curva de perturbação máxima.....	72
5.4. Efeito de carga.....	75
5.4.1 Situação 1.....	75
5.4.2 Situação 2.....	80
5.4.3 Situação 3.....	84
5.5 Discussão.....	88
5.6 Ponto hiperbólico.....	88
6. Quebra de Onda.....	99
6.1 Situação 1.....	100
6.2 Situação 2.....	103
6.3 Situação 3.....	106
6.4 Discussão.....	108
7. Conclusão.....	110
Referência Bibliográficas.....	113

## 1 – Introdução

As fontes de *radiação eletromagnética* (REM) podem ser naturais ou artificiais. Como expoente de fonte de REM natural tem-se o Sol, a estrela mais próxima da Terra. As fontes de REM, como diz o nome, são responsáveis por emitir REM. A REM está dividida em várias faixas (correspondente a um intervalo de comprimento de onda):

- Ondas de rádio ( $0.3\text{m} < \lambda < \infty$ )<sup>1</sup>;
- Micro-ondas ( $1\text{ mm} < \lambda < 0.3\text{m}$ );
- Infravermelho ( $0.75\mu\text{m} < \lambda < 1\text{mm}$ );
- Luz visível ( $380\text{nm} < \lambda < 750\text{nm}$ );
- Ultravioleta ( $10\text{nm} < \lambda < 380\text{nm}$ );
- Raios-X ( $1\text{Å} < \lambda < 10\text{nm}$ );
- Raios Gama ( $0 < \lambda < 1\text{Å}$ );

As fontes de radiação eletromagnética têm um papel muito importante na sociedade contemporânea. Elas fazem parte do dia-a-dia de todos. Seja na hora de ligar para alguém, através de um aparelho de telefonia móvel, ou no hospital, ao se fazer uma tomografia computadorizada com o auxílio de raios-X. Além disso, as fontes de REM são usadas em radares, televisores, fornos de micro-ondas, transmissão de dados por fibras óticas, entre outros.

Essas fontes têm diversas formas de funcionamento. Uma lâmpada incandescente, por exemplo, tem o seu filamento aquecido por uma corrente elétrica até uma temperatura a qual ela emite luz visível. Entretanto, o aquecimento do filamento não apenas converte energia elétrica em *luz visível*, como também, obviamente, produz energia *térmica*, o que é

---

<sup>1</sup>  $\lambda$  = comprimento de onda.

indesejado. A sua *eficiência* (o quanto de energia elétrica é transformada em *luz*) é, portanto, reduzida, justamente, devido a esse aquecimento do filamento.

Com a descoberta de novas fontes de REM no visível (geralmente chamadas de lâmpadas), verifica-se uma gradual substituição das lâmpadas incandescentes por lâmpadas mais eficientes. O aumento da eficiência de uma simples lâmpada pode gerar uma economia extraordinária de energia para um país, se parte da população utilizar a nova fonte.

Existem, também, regiões do espectro que carecem de fontes eficientes e relativamente baratas. Novas fontes de REM podem ser muito úteis para essas regiões. E o *free-electron laser* (FEL) encaixa-se exatamente aqui. Tanto que, o FEL terá, conforme Träger (2007), grande importância nas regiões do infravermelho distante e no intervalo dos THz.

O presente trabalho é dividido em capítulos, para facilitar o seu entendimento:

O capítulo dois apresenta a motivação ao surgimento do FEL e, também, um pouco da história do FEL;

O capítulo três traz a descrição de um laser convencional (quais são os seus componentes e qual é o princípio de funcionamento), bem como, dos tipos de FEL (componentes do FEL, tipos de FEL...);

O capítulo quatro é destinado à apresentação do FEL estudado, elucidando algumas das hipóteses assumidas para o trabalho: explicando um pouco da física do FEL; demonstrando a forma do potencial ponderomotriz; propondo uma forma de interação entre os elétrons aprisionados; calculando, analiticamente, os limites de *povoamento* do potencial (e confrontando com os resultados da simulação computacional); e, estabelecendo os limites do modelo proposto;



O capítulo cinco refere-se à análise do efeito de carga através dos mapas de Poincaré. Neste capítulo, há um breve resumo sobre a utilidade dos mapas de Poincaré. Utilizam-se os mapas para encontrar parâmetros interessantes (regiões de interesse). Sobre essas regiões, inserem-se elétrons aprisionados no potencial ponderomotriz (com uma distribuição de carga específica: a *distribuição de equilíbrio*). Espera-se que, com a introdução de elétrons, a força de interação entre eles faça com que a sua dinâmica seja alterada. A competição entre a força de interação e a força devido ao potencial ponderomotriz pode produzir uma dinâmica assaz complicada. Por outro lado, com uma densidade grande de elétrons, pode ser que a dinâmica deixe de ser complicada, uma vez que a força de interação entre eles restringe a sua *mobilidade*. Como pode a dinâmica dos elétrons ser afetada pela densidade de carga?

Esta análise, da dinâmica dos elétrons, será feita através do uso dos mapas de Poincaré.

Posteriormente, no capítulo seis, há uma pequena discussão sobre o efeito de *quebra de onda* (wave breaking). Três tipos de situações são analisadas, no intuito de verificar a possibilidade de haver o efeito de quebra de onda no FEL. O efeito de quebra de onda não é desejável para um FEL real. A quebra de onda espalha as partículas no espaço de fases mais rapidamente, podendo saturar o ganho de amplitude de radiação de forma *prematura*.

E, por fim, no capítulo sete, é feita uma pequena discussão sobre os resultados obtidos no decorrer do trabalho.

## 2 – O Nascimento do Free-Electron Laser

Antes do nascimento do *free-electron laser* (FEL), Dirac e Kapitza propuseram, em 1933, que poderia haver uma grande transferência de momento quando as funções de onda estacionárias de um elétron interagissem com um campo circularmente polarizado de um fóton de onda estacionária. Sendo, então, uma forma de se produzir radiação coerente. Essa previsão ficou sendo conhecida como efeito Dirac-Kapitza.

Segundo O'Shea e Freund (2001), a emissão espontânea no espectro visível e radiação coerente na região das micro-ondas já haviam sido observadas no início dos anos 50. Motz et al. (1953) fizeram um feixe de elétrons com 100Mev de energia (obtido com um acelerador linear) passar por um *ondulador*, produzindo luz polarizada. Motz tratou os resultados como *aparentemente promissoras*.

O primeiro FEL, imbuído de base teórica, foi construído apenas na metade da década de 70 por John Madey e colegas (Saldini et al., 2000). Madey (1971) já havia publicado a possibilidade de produzir radiação coerente usando um elétron relativístico em um campo magnético transversal e periódico espacialmente e, ainda, calculara o ganho de amplitude. O FEL de Madey funcionava na região do infravermelho, produzindo radiação coerente em um comprimento de onda de 3.4  $\mu\text{m}$  [Madey et al. (1977)]. Operava na configuração oscilatória, ampliando o feixe de CO<sub>2</sub> com o uso de elétrons livres relativísticos gerados pelo *Stanford Superconducting Linac*<sup>2</sup>.

Segundo Dattoli (1993), porém, a grande competição entre fabricantes de lasers e masers pode ter sido o principal fator prejudicial ao surgimento, ou desenvolvimento, do FEL.

---

<sup>2</sup> A título de curiosidade, esse acelerador linear foi construído em 1962 e ajudou pesquisadores a conquistar, pelo menos, quatro prêmios Nobel, conforme <http://www.slac.stanford.edu>.

Novas propriedades e novos materiais para constituir os *meios-ativos* eram vastamente pesquisados, o que impedia o surgimento de fontes alternativas de radiação.

O FEL converte a energia cinética dos elétrons do feixe em radiação [Ready et al. (2001)]. Como será visto adiante, isto se dá porque o feixe de elétrons incidente (com velocidade relativística) interage com o campo magnético gerado por um *dispositivo gerador de campo magnético* (DGCM).

### 3 – Os Lasers Convencionais e o FEL

Apesar de muito promissor, o FEL enfrentou algumas dificuldades no seu desenvolvimento, em especial porque os *aceleradores* de partículas eram demasiadamente onerosos e não muito desenvolvidos.

Entretanto, o FEL terá duas áreas de importância: fontes de radiação de alta potência média e comprimentos de ondas pequenos [O’Shea e Freund (2001)].

#### 3.1 – Descrição básica do funcionamento dos lasers convencionais

O FEL surgiu como uma nova fonte de radiação coerente, diferente dos lasers convencionais. LASER é um acrônimo de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* (ou, *amplificação da luz por emissão de radiação estimulada*). Os lasers convencionais são compostos por: um *meio-ativo*, um dispositivo que forneça energia para o *bombeamento* e um *ressonador* (ou *cavidade ressonante*). O *meio-ativo*<sup>3</sup> é constituído de um sistema atômico ou molecular, de pelo menos dois níveis (ou, no mínimo, três, para que haja amplificação) [Demtröder (2002)].

Antes da descrição do funcionamento do FEL, é útil explicitar o esquema básico de funcionamento de um laser:

---

<sup>3</sup> Segundo Mendel (2007, pg. 362, em tradução livre), [...] *Quase todos os materiais (exceto metais sólidos) podem ser usados como meios-ativos em lasers. [...] A eficiência e as propriedades possíveis para o laser limitam esse número, que, ainda assim, é grande. [...] Em qualquer caso, a ação do laser (emissão estimulada) ocorre entre pelo menos dois níveis de energia (ou bandas) da matéria...* Ou seja, o *meio-ativo* deve ser um material que permita a transição entre pelo menos dois níveis quando interage com o feixe incidente, propiciando a emissão estimulada.

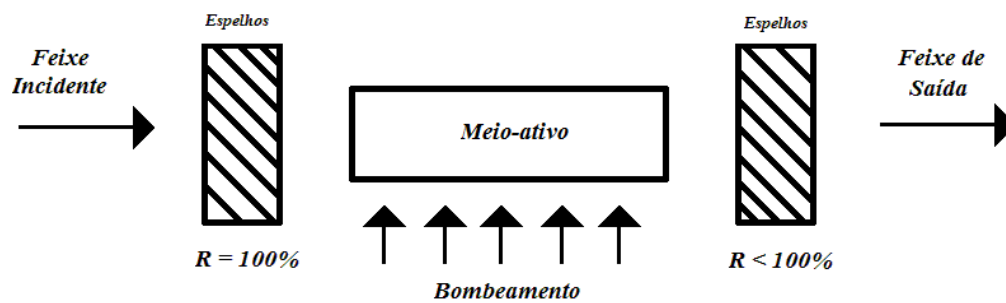


Figura 3.1: Esquema simplificado de um laser, onde R é a refletividade.

A função de cada componente do laser pode ser descrita conforme Menzel (2007, pg. 360):

- O feixe incidente interage com o *meio-ativo*, provocando a emissão estimulada de um fóton (que, espacialmente, não possui direção preferencial) de uma molécula ou um átomo. A emissão faz com que o nível quântico associado à molécula ou ao átomo decaia para um auto estado de menor energia.
- O mecanismo de bombeamento propicia energia para a inversão de população no *meio-ativo* (devolvendo a população para o estado de maior energia).
- O *ressonador* pode ser composto, por exemplo, por dois espelhos [um dos espelhos tem refletividade (R) inferior a 100% e é através da passagem do feixe por ele que se obtém o feixe de saída]. Os espelhos refletem os fótons, devolvendo-os para o *meio-ativo*. O *ressonador* é o responsável pela seleção da direção de propagação, polarização, comprimento de onda, entre outras características. Os fótons refletidos interagem novamente com o *meio-ativo* ocasionando novas emissões estimuladas (ocorre o decaimento de um estado quântico, de maior para menor energia, com a emissão de um fóton com frequência correspondente à diferença de energia entre o estado quântico inicial e final), produzindo mais fótons. Por este motivo é necessário um

mecanismo de bombeamento, que faça a população voltar para o estado quântico de maior energia. Evidentemente, o processo de emissão ocorre em cadeia e é o responsável pela amplificação do feixe inicial.

Segundo Christensen (1984), quando se constrói um laser, busca-se: usar a menor potência possível (ter a maior eficiência possível); priorizar um comprimento de onda; minimizar os custos de operação; adequar o tamanho e peso do laser ao lugar onde ele operará; fazer com que opere por grandes períodos de tempo sem a necessidade de manutenção; e, que sua saída tenha características temporais e espaciais específicas, entre outras. Porém, é difícil satisfazer todas essas condições simultaneamente. Seria interessante se houvesse novas fontes de radiação capazes de atender essas condições com um custo menor.

Apesar da descrição simples, escondem-se problemas bastante complicados no estudo e no desenvolvimento de lasers. Para os fins desse estudo será desnecessário estender-se sobre os lasers convencionais, mas pode-se afirmar que, segundo Menzel (2007), entre os principais problemas (relacionados com o *meio-ativo* e com grande amplitude ou potência do feixe incidente), estão:

- Geralmente um *meio-ativo* responde da maneira esperada para um intervalo bastante pequeno de comprimento de onda.
- Ao usar um feixe muito potente e com perfil não uniforme espacialmente, o *meio-ativo* será aquecido, obviamente, de forma não uniforme, implicando em um gradiente de temperatura. Atrelado ao gradiente de temperatura está um gradiente de refração. Em decorrência desse último gradiente, haverá efeitos não lineares não desejados, como, por exemplo, a *auto focalização* (*self-focusing*). O uso de um feixe com grande potência pode, até mesmo, danificar irreversivelmente o *meio-ativo*.

- O uso de feixes com campos eletromagnéticos associados de grande amplitude (da ordem dos campos eletromagnéticos envolvidos nos átomos ou nas moléculas) provoca efeitos não lineares de segunda e terceira ordem, ou ainda, de ordens superiores.

Os lasers, portanto, estão limitados a uma potência máxima, determinada, basicamente, pelo *meio-ativo*. Alguns lasers contam com mecanismos para o resfriamento do *meio-ativo*, na tentativa de reduzir os efeitos recém-mencionados. Entretanto, as soluções tornam-se cada vez mais onerosas.

### 3.2 – Descrição básica de um FEL

O FEL surgiu como uma nova fonte de radiação coerente. Como maiores atrativos, de acordo com Träger (2007), existem vantagens com relação aos lasers convencionais. O FEL pode produzir radiação tão coerente a ponto de ela ser totalmente definida por efeitos de difração. Como consequência imediata dessa propriedade, o FEL poderia ser utilizado para transmitir radiação a longas distâncias ou ser útil para a obtenção de radiação altamente focalizada. Ainda, segundo Ready et al. (2001), deve-se mencionar que o FEL tem um número, essencialmente, ilimitado de comprimentos de ondas (o espectro não é mais discreto, como no caso dos lasers convencionais), a potência da saída pode ser muito grande e não há risco do *meio-ativo* ser danificado.

O comprimento de onda de radiação é determinado por uma série de fatores: velocidade do feixe de elétrons, comprimento de onda do campo magnético atrelado ao *dispositivo gerador de campo magnético* (DGCM) e a amplitude deste campo magnético. O campo do DGCM, geralmente, é fixo, mas a velocidade do feixe e a amplitude do campo magnético podem ser mudadas, o que permite gerar radiação em diferentes comprimentos de onda, embora não simultaneamente.

Entretanto, conforme Träger (2007), os FEL são relativamente caros. O que torna sua aplicação razoável apenas para regiões onde as outras fontes de radiação convencionais não conseguem trabalhar. A saber, essas regiões são a do infravermelho distante e o intervalo dos THz.

Uma vez apresentadas as vantagens do FEL, o esquematiza-se, de forma básica, na figura a seguir:

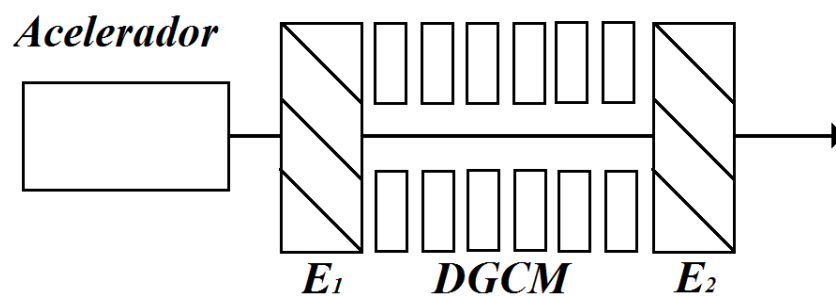


Figura 3.2: Esquema simplificado de um FEL unidimensional. O espelho  $E_1$  tem refletividade de 100% enquanto  $E_2$  tem refletividade menor que 100%. O feixe gerado pelo acelerador se desloca da esquerda para a direita, sofrendo influência do campo magnético produzido pelo DGCM.

### 3.2.1 – Tipos de aceleradores

O *acelerador* tem o papel de dar energia cinética ao feixe de elétrons. Cabe aqui, como curiosidade, comentar que até, pelo menos, 1996 a maior parte dos FEL eram construídos utilizando aceleradores já disponíveis (existentes) [Freund & Antonsen (1996)]. Recentemente, aceleradores específicos têm sido desenvolvidos para atender as necessidades exigidas. Com isto, o FEL deixa de ser um *instrumento de laboratório* e abre possibilidade para ser usado para diversas finalidades, como por exemplo, nas comunicações, na biologia molecular, na defesa militar, entre outras.



Existem vários tipos de *aceleradores*, conforme Träger (2007): *aceleradores eletrostáticos*<sup>4</sup>, aceleradores lineares RF (*RF linacs*<sup>5</sup>), aceleradores de indução (*induction accelerators*<sup>6</sup>), *microtrons*<sup>7</sup>, anéis de armazenamento (*storage rings*<sup>8</sup>), entre outros. Como o objetivo do trabalho não é tratar dos aceleradores, esta discussão encerra-se aqui.

### 3.2.2 – Configurações do FEL

Conforme Saldin et al. (2000), os FEL podem ser divididos em dois tipos: o de passagem única (ou *amplificador*) e o oscilador.

#### 3.2.2.1 – FEL de passagem única

O FEL de passagem única pode ser esquematizado como na figura a seguir:

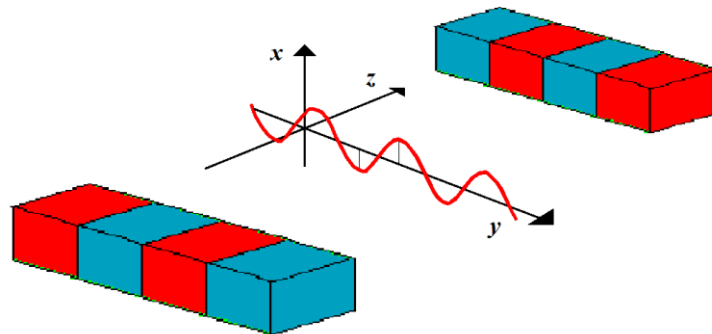


Figura 3.3: Esquema simplificado de um FEL de passagem única.

<sup>4</sup> Segundo Hellborg (2005), o acelerador de Van der Graaf e o Tandem são exemplos de aceleradores eletrostáticos. De acordo com Wangler (2008), o feixe ganha energia de um campo elétrico constante. A maior limitação dos aceleradores eletrostáticos é que a energia máxima obtida não pode ser maior do que o produto da carga pela diferença de potencial, o que não passa de dezenas de megavolts.

<sup>5</sup> Conforme Wangler (2008), nos aceleradores lineares de rádio frequência (*RF linacs*), o feixe é acelerado por campos eletromagnéticos de comprimento de onda comparável a rádio frequência com uma dependência temporal harmônica. As vantagens dos *RF linacs* é que os feixes podem alcançar alta energia com alta qualidade (pequeno diâmetro do feixe e pequena diferença de velocidades entre as partículas do feixe).

<sup>6</sup> Para Moskalev e Sergeev (2003), o acelerador de indução transfere energia cinética para um feixe de elétrons por meio de um campo elétrico produzido por uma mudança do fluxo magnético.

<sup>7</sup> Para Chao e Tigner (2002), uma cavidade de rádio frequência com um intervalo de aceleração é colocada em um campo magnético uniforme. A aceleração ressonante é adquirida pelos elétrons que atravessam esse intervalo com fase próxima da rádio frequência ou múltiplas.

<sup>8</sup> De acordo com Dikanski e Pestrikov (1994), os *anéis de armazenamento* são aceleradores circulares onde o feixe de partículas se mantém circulando (e ganhando energia cinética) por um longo período de tempo. Estão confinados a uma órbita quase circular pela presença de um campo magnético produzido por dipolos magnéticos.

Na *figura 3.3*, o feixe linearmente polarizado propaga-se na direção do eixo  $y$ . Paralelos e equidistantes ao eixo  $y$  estão dois conjuntos formados por magnetos com polos invertidos (os dois conjuntos formados por magnetos formam o DGCM, neste caso), a fim de produzir um campo magnético com periodicidade espacial. O feixe que se propaga entre os dois conjuntos de magnetos interage com o campo magnético produzido por eles, dando origem à radiação do FEL.

### 3.2.2.2 – FEL oscilador

O FEL oscilador, por sua vez, pode ser esquematizado da seguinte maneira:

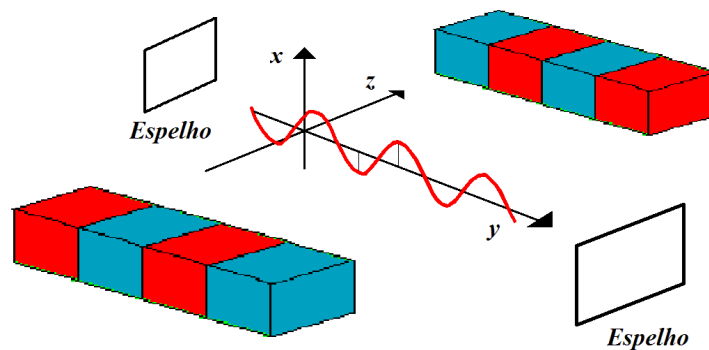


Figura 3.4: Esquema simplificado de um FEL oscilador.

A principal diferença entre as *figuras 3.3 e 3.4* é a presença de espelhos na *figura 3.4*. No FEL oscilador, o feixe é refletido nos espelhos. O termo *oscilador* se deve ao fato do feixe ser refletido nos espelhos, passando diversas vezes pelo campo magnético gerado pelo DGCM (existe, portanto, interação da saída com a entrada). Como na *figura 3.2*, um dos espelhos tem refletividade menor do que 100% (esta é a saída). Conforme Träger (2007), o FEL de configuração oscilatória é limitado para comprimentos de onda pequenos (menores do que o ultravioleta). O motivo é simples: não existem espelhos com boa refletividade para estes comprimentos de onda.

Para os fins deste trabalho, será estudada apenas a configuração do FEL de passagem única.

### 3.2.3 – Dispositivos geradores de campo magnético

Outro componente do FEL é o dispositivo gerador de campo magnético (DGCM). O DGCM pode possuir distintas simetrias e, evidentemente, cada simetria produzirá um campo magnético distinto. Os DGCMs mais utilizados são os helicoidais e os planares, formado por uma sucessão de magnetos com polaridades invertidas ou *rotadas* por 90°. No presente trabalho, o DGCM do FEL estudado será planar, representado a seguir:

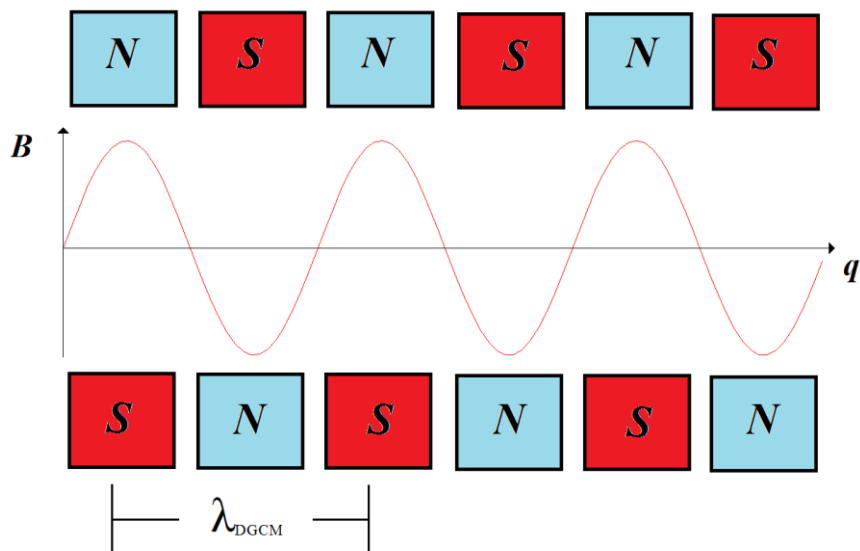


Figura 3.5: DGCM planar produzindo um campo magnético sinusoidal sobre o eixo da coordenada  $q$ .  $\lambda_{\text{DGCM}}$  corresponde ao período do campo magnético gerado (equivalente ao intervalo entre dois magnetos com a mesma polaridade).

Os DGCMs podem ser onduladores (*undulators*<sup>9</sup>) ou *wigglers*. Segundo Brown et al. (1983), a distinção entre onduladores e *wigglers* se dá por um parâmetro ( $K$ ), que é igual à:

$$K = 0.934 B_0[\text{T}]\lambda_{\text{DGCM}}[\text{cm}] \quad 10$$

<sup>9</sup> Conforme Motz e Luchini (1990), o termo *undulator* foi introduzido por Motz, em 1951, com base na palavra latina *unda* (onda) e significa *fazedor de onda* (*wave maker*).

<sup>10</sup> Onde:  $B_0[\text{T}]$  é a amplitude máxima do campo gerado pelo DGCM, dada em Tesla e  $\lambda_{\text{DGCM}}[\text{cm}]$  é o comprimento equivalente a um período do campo magnético gerado, dado em centímetros.

Se  $K \leq 1$ , então o DGCM é chamado de ondulador. Se  $K \gg 1$ , então o DGCM é chamado de *wiggler*.

## 4 – A Física do Free-Electron Laser

No FEL, um feixe de elétrons incidente (com velocidade relativística), com uma onda eletromagnética copropagante (ou seja, um campo eletromagnético de radiação), interage com o campo magnético, espacialmente periódico, gerado por um *dispositivo gerador de campo magnético* (DGCM). Da interação entre o campo do DGCM e o campo copropagante, *nasce* uma onda (chamada de onda ponderomotriz ou ponderomotiva), que viaja a uma velocidade menor do que a da luz [O'Shea e Freund (2001),]. Essa onda ponderomotiva aprisiona os elétrons dentro de poços potenciais periódicos [a origem desse potencial ponderomotriz está na força de Lorentz que deflete (periodicamente) os elétrons].

Imaginando apenas um elétron dentro do potencial ponderomotriz (que é, neste caso, senoidal), ele pode doar ou receber energia do campo (desacelerando ou acelerando, respectivamente), dependendo da sua fase. Pode-se fazer um paralelo com a imagem de um surfista: se o elétron encontra-se antes do *fundo do poço* (isto é, sua fase é negativa), ele é acelerado, e, se ele possui fase positiva, ele é desacelerado pelo potencial ponderomotriz. A estrutura do FEL para um único elétron (em regime de baixo ganho, como é conhecido) poderia, portanto, acelerar um elétron ou desacelerá-lo.

Com a introdução de mais elétrons, a interação coulombiana entre eles faz com que eles se comuniquem, abrindo possibilidade para o FEL trabalhar em *regime de alto ganho* [*high-gain regime*]. No regime de alto ganho, os elétrons formam *grupos (bunches)* na escala do comprimento de onda da radiação. Isto é chamado de modulação espacial [Bonifacio et al. (1990)]. Essa modulação espacial faz com que a amplitude da radiação copropagante aumente exponencialmente (ou seja, é um efeito coletivo que faz com que a amplitude da radiação aumente). A evolução da amplitude da radiação é dada pela equação de onda.

O ganho de amplitude atinge a saturação quando os elétrons se aproximam o máximo possível e o ponto de saturação aumenta à medida que aumenta a densidade de partículas dentro do FEL.

Mas existe uma limitação: com o aumento da densidade de partículas dentro do FEL, também aumenta a repulsão elétrica entre elas, o que produz efeitos não lineares que fazem a amplitude de radiação saturar mais rapidamente (e que inibem, até certo ponto, o crescimento exponencial da amplitude de radiação). Se houver o fenômeno de quebra de onda, o *espalhamento* de partículas no espaço de fases será ainda mais rápido, reduzindo consideravelmente a saturação da amplitude de radiação.

O presente trabalho tem como foco analisar o efeito de carga sobre a dinâmica dos elétrons em um FEL (e observar um possível efeito de quebra de onda), sem levar em conta a dinâmica da amplitude de radiação. Ignorar a dinâmica da amplitude da radiação implica em afastar-se da física que ocorre no FEL, mas, ao mesmo tempo, possibilitará uma melhor compreensão do efeito de carga (e especialmente da quebra de onda) sobre o FEL.

#### 4.1 – O FEL é realmente um laser?

Tendo em vista o funcionamento e os componentes do FEL, pode-se fazer o seguinte questionamento: *o FEL é realmente um laser?* Schmüser et al. (2008, pg. 7) responderam, exatamente, a essa pergunta dizendo:

*[...] Os elétrons em um laser quântico convencional estão ligados aos níveis de energia atômicos, moleculares ou de estado sólido, desta forma, pode-se chamar esse dispositivo de laser de 'elétron-ligado', em contraste ao free-electron laser, no qual os elétrons se movem no vácuo. [...]*

Em certo sentido, o FEL se aproximaria mais dos *tubos de ondas viajantes* (*travelling wave tubes* [TWT]), por envolver apenas a interação do feixe com um campo eletromagnético [Dattoli et al. (1993)].

## 4.2 – O FEL estudado

Neste trabalho, o FEL estudado terá as seguintes propriedades:

- Será de passagem única;
- As interações levadas em conta serão entre o feixe e o campo magnético e entre os elétrons, apenas (não serão estudados os campos auto consistentes do laser);
- O estudo do FEL será realizado *dentro* de apenas um dos poços do potencial ponderomotriz. O poço será *seguido* durante todo o processo.

Buscar-se-á analisar a dinâmica de vários elétrons presos dentro de um potencial chamado de potencial ponderomotriz. Espera-se encontrar regiões de interesse para a dinâmica dos elétrons com a variação dos parâmetros do problema.

O primeiro passo é *construir* um campo magnético e um potencial vetor para o feixe e analisar a forma do potencial ponderomotriz.

### 4.2.1 – O potencial ponderomotriz

Considera-se um feixe propagando-se ao longo do eixo-z. Uma onda eletromagnética propaga-se junto com o feixe e possui um campo eletromagnético associado descrito pelo seguinte potencial vetor:

$$\mathbf{A}_0 = a_0'(y, z, t) e^{i(kz - \omega t + \theta)} \mathbf{x} \quad (4.1)$$

O feixe propaga-se em um *DGCM* que produz um campo magnético espacialmente periódico descrito pelo potencial vetor:

$$\mathbf{A}_{DGCM} = a_{DGCM}'(y) e^{-i(k_w z + \omega t)} \mathbf{x} \quad (4.2)$$

Como se observa na equação (4.2), o referencial não é o do laboratório (uma vez que o campo do DGCM não é estático). Este referencial, como será visto adiante, é o do potencial ponderomotriz. Esta escolha é muito apropriada para simplificar o entendimento e a resolução do problema [Rizzato (1990)].

Procurar-se-ão as equações de movimento para uma partícula do feixe. Para esta finalidade, utilizar-se-á, a relação de força de forma relativística:

$$\mathbf{F}_r = m \frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{v}). \quad (4.3)$$

Onde  $\mathbf{F}_r$  é a força total resultante, em cada direção. A força resultante é a soma de todas as forças que *atuam* sobre um sistema.

Esta equação pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_r = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.4)$$

Trabalhar-se-á com o potencial vetor, para fins práticos. Para que isto seja possível, devem ser introduzidas as equações de Maxwell (para uma partícula):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (4.5) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.6) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Usando também que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.9)$$



Tem-se:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{A} \right]. \quad (4.10)$$

Sabendo que a posição e o tempo são variáveis independentes, a operação de derivada no tempo comuta com o operador rotacional (que é em posição), portanto:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]. \quad (4.11)$$

E, desta forma:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.12)$$

Uma vez obtido este resultado, a expressão (4.12), pode-se voltar à expressão (4.4), reescrevendo-a da seguinte forma:

$$q\mathbf{E} = -q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.13)$$

Trabalhando com a outra parte da expressão (4.4):

$$\frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (4.14)$$

Desta maneira:

$$m \frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{v}) = -q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (4.15)$$

Cabe aqui utilizar uma informação importante. Assume-se que  $\gamma$  seja praticamente constante no tempo, ou seja, que  $\gamma$  dependa apenas das intensidades dos potenciais vetores do feixe e do DGCM (e isso é verdadeiro, uma vez que o referencial é o referencial ponderomotriz). Assim:

$$m \frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{v}) = m \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (4.16)$$

O fator de Lorentz ( $\gamma$ ), pela equação (4.16), age apenas como uma correção de massa.

Portanto, para a velocidade, tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{\gamma m} \left\{ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right\}. \quad (4.17)$$

Assim como o potencial escalar, o potencial vetor *total* pode ser obtido pela superposição de vários potenciais vetores, de tal forma:

$$\mathbf{A}_T = \sum_i \mathbf{A}_i. \quad (4.18)$$

O problema, como descrito, conta com dois potenciais vetores. Originados pelo campo magnético do *DGCM* e pelo campo do feixe [vide equações (4.1) e (4.2)].

Desde modo, (4.22) fica:

$$\mathbf{A}_T = \sum_i \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_o + \mathbf{A}_{DGCM}. \quad (4.19)$$

Usando as expressões (4.1) e (4.2), chega-se à:

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_o + \mathbf{A}_{DGCM} = [A_{ox} + A_{Dx}] \mathbf{x} + [A_{oy} + A_{Dy}] \mathbf{y} + [A_{oz} + A_{Dz}] \mathbf{z} \quad (4.20)$$

Entretanto:

$$A_{oy} = A_{Dy} = A_{oz} = A_{Dz} = 0. \quad (4.21)$$

Ou seja:

$$\mathbf{A}_T(y, z, t) = \mathbf{A}_o + \mathbf{A}_{DGCM} = [A_{ox} + A_{Dx}] \mathbf{x} \quad (4.22)$$

Só há componente não nula na direção x para  $\mathbf{A}_T$ . Usando  $\mathbf{A}_T$  em (4.17):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{\gamma m} \left\{ -\frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}_T) \right\}. \quad (4.23)$$

O próximo passo é transformar a equação (4.23) em três equações, uma para cada componente. Para fazer isso, calcula-se o termo:

$$\nabla \times \mathbf{A}_T = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_{Tx} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}_T = \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} \mathbf{y} - \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} \mathbf{z}. \quad (4.25)$$

E:

$$\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}_T] = \mathbf{v} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} \mathbf{y} - \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} \mathbf{z} \right\}. \quad (4.26)$$

Deste modo:

$$\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}_T] = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} & -\frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} \end{vmatrix}. \quad (4.27)$$

Ou ainda:

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}_T) = \left[ -v_y \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} - v_z \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} \right] \mathbf{x} + \left[ v_x \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} \right] \mathbf{z} + \left[ v_x \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} \right] \mathbf{y}. \quad (4.28)$$

Com isto, a expressão (4.27) está dividida em três equações, uma para cada dimensão:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{\gamma mc} \left\{ -c \frac{\partial A_{Tx}}{\partial t} - v_y \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} - v_z \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} \right\}. & (4.29) \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{\gamma mc} \left\{ v_x \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} \right\}. & (4.30) \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{q}{\gamma mc} \left\{ v_x \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} \right\}. & (4.31) \end{aligned} \right.$$

Despreza-se movimento no eixo  $y$ , assumindo que as forças ponderomotrizas transversais são focalizadas. As partículas são atraídas para  $y = 0$ , onde os campos são localmente homogêneos. Portanto, a velocidade no eixo  $y$  é igual à zero.

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \left\{ v_x \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} \right\} = 0. \quad (4.32)$$

Trabalhando a equação (4.29):

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \left\{ -c \frac{\partial A_{Tx}}{\partial t} - v_y \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} - v_z \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} \right\}. \quad (4.33)$$

Sabendo que  $A_{Tx}$  não depende de  $x$ , conclui-se que:

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} A_{Tx}(y, z, t) = 0. \quad (4.34)$$

Adicionando a expressão (4.34) à expressão (4.33):

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \left\{ -c \frac{\partial A_{Tx}}{\partial t} - v_y \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} - v_z \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} - v_x \frac{\partial}{\partial x} A_{Tx} \right\}. \quad (4.35)$$

Lembrando que:

$$\left\{ \begin{aligned} v_x \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \\ v_y \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \\ v_z \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

Reescreve-se a equação (4.39):

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \left\{ -c \frac{\partial A_{Tx}}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_0 \frac{\partial}{\partial y} A_{Tx} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} A_{Tx} - \frac{\partial x}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_0 A_{Tx} \right\}. \quad (4.36)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \left\{ -c \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \right\} A_{Tx}. \quad (4.37)$$

Lembrando o fato que:

$$-c \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{d}{dt}. \quad (4.38)$$

Obtém-se:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{q}{\gamma mc} \frac{d}{dt} A_{Tx}. \quad (4.39)$$

$$v_x = -\frac{q}{\gamma mc} A_{Tx}. \quad (4.40)$$

Se o movimento do feixe é dado, inicialmente, no eixo  $z$ , e, como suposto, não há movimento na direção do eixo  $y$ , a velocidade no eixo  $x$  corresponde à velocidade *perpendicular*.

$$\mathbf{v}_\perp = -\frac{q}{\gamma mc} A_{Tx} \mathbf{x}. \quad (4.41)$$

Pode-se substituir a equação (4.41) na equação (4.31):

$$\frac{dv_z}{dt} = -\left(\frac{q}{\gamma mc}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (|A_{Tx}|^2) \right\}. \quad (4.42)$$

Lembrando que:

$$A_{Tx}(y, z, t) = a_o'(y, z, t) e^{i(kz - \omega t + \theta)} + a_{DGCM}'(y) e^{-i(k_w z + \omega t)}. \quad (4.43)$$

Para a condição imposta de  $v_y = 0$ , assume-se que:

$$a_{\text{DGCM}}'(y) = a_{\text{DGCM}} \cosh(k_{\perp} y).$$

Usa-se para  $a_o'$ , então, a seguinte relação:

$$a_o'(y, z, t) = a_o(z, t) \cos(k_{\perp} y).$$

Mas supondo injeção de partículas em  $y = 0$ :

$$A_{\text{Tx}}(y, z, t) = a_o(z, t) e^{i(kz - \omega t + \theta)} + a_{\text{DGCM}} e^{-i(k_w z + \omega t)}. \quad (4.44)$$

Assumindo para este trabalho que a amplitude de radiação é constante, ou seja:

$$a_o(z, t) = a_o.$$

Tem-se que:

$$|A_{\text{Tx}}|^2 = a_o^2 + a_{\text{DGCM}}^2 + 2a_o a_{\text{DGCM}} \cos(kz + k_w z + \theta). \quad (4.45)$$

Verificando a condição de casamento de fase, que é tal que:

$$k_p = k + k_w. \quad (4.46)$$

Onde  $k_p$  é o número de onda do potencial de aprisionamento (ponderomotriz).

Portanto, a equação anterior reduz-se a:

$$|A_{\text{Tx}}|^2 = a_o^2 + a_{\text{DGCM}}^2 + 2a_o a_{\text{DGCM}} \cos(k_p z + \theta). \quad (4.47)$$

Cabe aqui dizer que a velocidade de propagação da onda ponderomotriz (no referencial do laboratório) é dada por:

$$v_p = \frac{k c}{k + k_w}. \quad (4.48)$$

Onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Percebe-se que partículas com velocidade zero no referencial do potencial ponderomotriz, tem velocidade dada por  $v_p$  no referencial do laboratório.

Através das equações (4.44) e (4.47), finalmente, obtém-se:

$$\frac{dv_z}{dt} = \left(\frac{q}{\gamma mc}\right)^2 a_o a_{DGCM} k_p \sin(k_p z + \theta). \quad (4.49)$$

Entretanto (com  $\gamma$  constante):

$$\gamma \frac{dv_z}{dt} = \frac{F_z}{m}. \quad (4.50)$$

Logo:

$$F_z = \frac{q^2}{\gamma mc^2} a_o a_{DGCM} k_p \sin(k_p z + \theta). \quad (4.51)$$

Lembrando que:

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi.$$

Onde se obtém:

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi = F_x \mathbf{x} + F_y \mathbf{y} + F_z \mathbf{z} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z} \right\} \Phi.$$

Identificando:

$$F_z = - \frac{\partial}{\partial z} \Phi \mathbf{z}.$$

Assim:

$$- \frac{\partial}{\partial z} \Phi = \frac{q^2}{\gamma mc^2} a_o a_{DGCM} k_p \sin(k_p z + \theta). \quad (4.52)$$

Ou ainda:

$$\Phi = -\frac{q^2}{\gamma mc^2} a_o a_{DGCM} [k + k_w] \int \sin([k + k_w]z + \theta) dz. \quad (4.53)$$

Portanto:

$$\Phi = \frac{q^2}{\gamma mc^2} a_o a_{DGCM} \cos([k + k_w]z + \theta).$$

$$\Phi_p = \frac{q^2}{\gamma mc^2} a_o a_{DGCM} \cos\{k_p z + \theta\}. \quad (4.54)$$

E este é o potencial ponderomotriz (de aprisionamento) para uma partícula. Como se pode ver, a ausência da frequência  $w$  e de uma dependência temporal explícita justifica o nome do referencial, uma vez que este referencial acompanha o potencial ponderomotriz do problema.

Como foi dito anteriormente, a fase  $\theta$  é muito importante para a solução do problema. Uma escolha errada de fase pode fazer com que os elétrons não sejam aprisionados pelo potencial ponderomotriz.

#### 4.2.1.1 – A escolha de fase

O quanto os elétrons são aprisionados depende do potencial ponderomotriz sobre eles. A escolha feita para o referencial tem um papel importante na determinação da fase do feixe de elétrons.

Quer-se que o aprisionamento ocorra nas imediações de  $z = 0$ . Portanto, o potencial ponderomotriz deve ser, em valor absoluto, máximo neste ponto.

$$\Phi_p(z = 0) = \frac{q^2}{\gamma mc^2} a_o a_{DGCM} |\cos\{\theta\}| = |\Phi_{pmax}|. \quad (4.55)$$



Isto acontece quando:

$$|\cos\{\theta\}| = 1.$$

Ou seja, quando a fase  $\theta$  do feixe é:

$$\theta = 0 \text{ ou } \pi.$$

Define-se  $\frac{q^2}{\gamma mc^2} a_0 a_{DGCM}$  como uma quantidade positiva. Deste modo, pode-se calcular a fase.

A fase será escolhida de tal forma que, em  $z = 0$ , o potencial (dado como  $A \cos\{\theta\}$ , neste ponto, com  $A$  sendo uma constante real positiva qualquer) será mínimo.

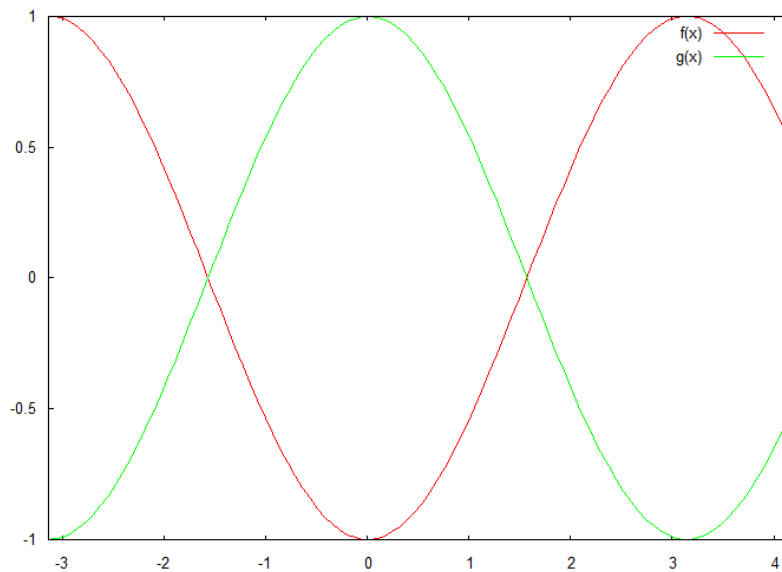


Figura 4.1: A curva em verde representa a fase  $\theta = 0$  e a curva em vermelho representa a fase  $\theta = \pi$ .

Portanto, o potencial é mínimo, no ponto  $z = 0$ , para a fase:

$$\theta = \pi.$$

Dessa maneira:

$$\Phi_p = \frac{q^2}{\gamma m c^2} a_o a_{DGCM} \cos\{k_p z + \pi\}. \quad (4.56)$$

E como:

$$\cos\{k_p z + \pi\} = -\cos\{k_p z\}. \quad (4.57)$$

Tem-se, finalmente:

$$\Phi_p = -\frac{q^2}{\gamma m c^2} a_o a_{DGCM} \cos\{k_p z\}. \quad (4.58)$$

E, enfim, o problema está resolvido, pelo menos quanto à relação *partícula-potencial ponderomotriz*.

O objetivo do trabalho é analisar a dinâmica de elétrons interagindo dentro do poço ponderomotriz. Porém, como será considerada essa interação? É possível encontrar a dinâmica analiticamente? A próxima seção *versa* sobre como será considerada a interação entre as partículas.

#### 4.2.2 – Interação entre as partículas

Dentro do potencial ponderomotriz são colocados elétrons que interagem entre si. Analiticamente, a força exercida sobre cada elétron é dada pela soma discreta das forças exercidas por todos os outros elétrons sobre ele. Ou seja:

$$\mathbf{F}_{ri} = \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ji}. \quad (4.59)^{11}$$

De forma que:

---

<sup>11</sup> Onde  $\mathbf{F}_{ji}$ , é a força elétrica exercida por  $j$  sobre  $i$  e  $N$  é o número total de elétrons.

$$\mathbf{F}_{ri} = \sum_{j \neq i}^N \frac{q^2}{r_{ij}^2} \mathbf{r}_{ij}. \quad (4.60)$$

Para que o problema fosse resolvido analiticamente, ter-se-ia que as posições relativas entre os elétrons mudariam a cada intervalo infinitesimal de tempo. Isso levaria a calcular a força que cada partícula exerce sobre a outra em cada intervalo infinitesimal de tempo. Neste trabalho, buscar-se-á analisar a dinâmica de um sistema com vários elétrons [o número total de elétrons ( $N$ ) é muito grande (por volta de milhões, pelo menos)] durante um intervalo significativo de tempo. Nota-se, imediatamente, que mesmo para um computador, é inviável calcular exatamente a força sobre cada elétron por um tempo muito grande.

Diante deste problema, urge a necessidade de simplificar o modelo. A simplificação será dada da seguinte forma (conforme modelo de Rizzato et. al. (2009)):

- Considera-se que os elétrons estejam uniformemente distribuídos sobre  $N$  placas de área muito grande, tendo essas placas, portanto, densidade igual à  $\sigma$  (todas as placas possuem a mesma carga  $nq$ );
- Em vez de calcular a força exercida por todos os elétrons sobre um elétron, será calculada a força de todas as placas sobre uma placa;
- As placas estarão dispostas perpendicularmente ao eixo de estudo ( $e$  de relevância), ou seja, ao eixo- $z$ . A dinâmica do problema será estudada apenas sobre este eixo;

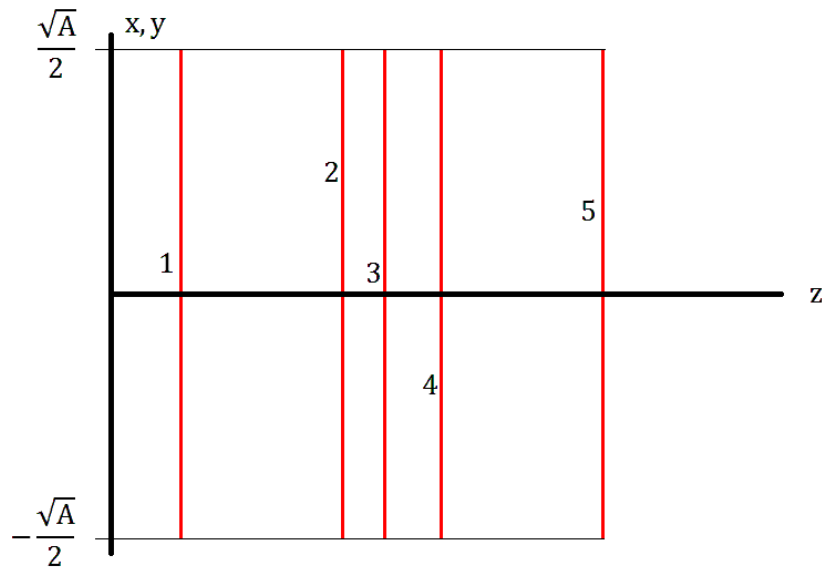


Figura 4.2: Exemplo de placas, de 1 a 5, com área A e dispostas paralelamente aos eixos x e y.

Este conjunto de simplificações permite escrever a força sobre uma das placas como:

$$\mathbf{F}_{ri} = \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ji}. \quad (4.61)^{12}$$

Para calcular a força gerada sobre cada placa, é conveniente encontrar, primeiramente, o campo elétrico sobre cada placa. Que será:

$$\mathbf{E}_{ri} = \sum_{j \neq i}^N \mathbf{E}_{ji}. \quad (4.62)$$

A vantagem, até agora, não é muito grande desse modelo com relação ao analítico. A única diferença é que se reduziu o número de *partículas*, de  $nN$  para  $N$ .

Outra suposição do modelo diz que a área de cada placa é grande, grande com relação à distância entre elas. Permite-se dizer, disto, então, que o campo elétrico produzido por cada

<sup>12</sup> Onde, agora,  $i$  e  $j$  representam as placas  $i$  e  $j$  e não mais os elétrons  $i$  e  $j$ .

placa pode ser considerado uniforme e, assim, pode ser calculado via Teorema de Gauss, como se pode ver na figura a seguir:

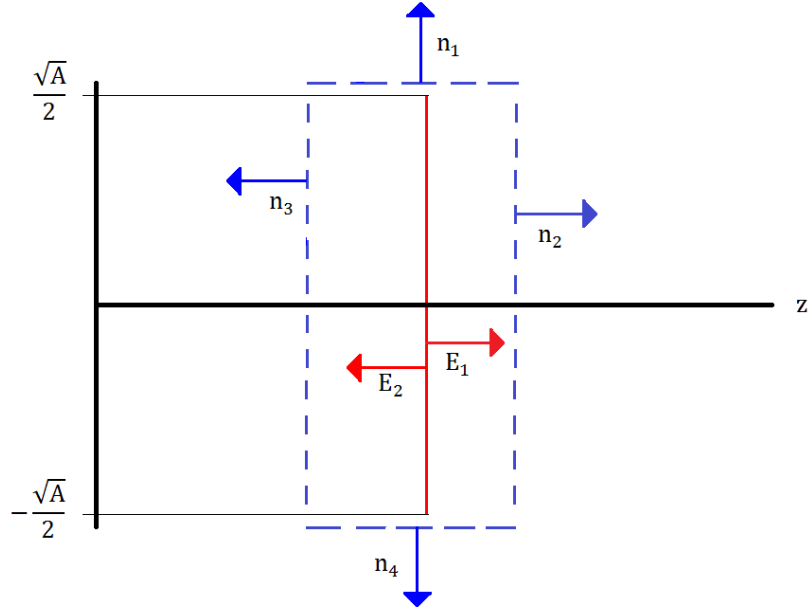


Figura 4.3: Em vermelho está a placa ( $p_1$ ). As linhas azuis pontilhadas denotam as superfícies gaussianas. Os  $n$ 's são as normais às superfícies e os  $E$ 's são os campos elétricos gerados pela placa (que, como foi mencionado, é uniforme).

Da figura, obtém-se que:

$$\int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \mathbf{E}_{p1} \cdot \mathbf{n} \, dx dy = 4\pi nq. \quad (4.63)$$

Recorrendo novamente à figura, sabe-se que:

$$\mathbf{E}_{p1} = \begin{cases} E_1 \mathbf{n}_2 \\ E_2 \mathbf{n}_3 \end{cases}. \quad (4.64)$$

E:

$$\mathbf{n} = \begin{cases} n_1 \mathbf{t} \\ n_2 \mathbf{z} \\ n_3 (-\mathbf{z}) \\ n_4 (-\mathbf{t}) \end{cases}. \quad (4.65)^{13}$$

<sup>13</sup> Onde  $\mathbf{t}$  é qualquer componente ou combinação de componente na direção perpendicular à coordenada  $z$ .

Logo:

$$\int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \mathbf{E}_{p1} \mathbf{n} \, dx dy = \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} (E_1 \mathbf{n}_2 + E_2 \mathbf{n}_3)(n_1 \mathbf{t} + n_2 \mathbf{z} - n_3 \mathbf{z} - n_4 \mathbf{t}) \, dx dy.$$

Usando a propriedade de ortogonalidade do produto escalar:

$$\int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \mathbf{E}_{p1} \mathbf{n} \, dx dy = \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} (E_1 - E_2) \, dx dy. \quad (4.66)$$

Identificando:

$$E_1 = -E_2 = E.$$

$$\int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \mathbf{E}_{p1} \mathbf{n} \, dx dy = 2E \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} dx dy.$$

E, assim:

$$\int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \int_{-\sqrt{A}/2}^{\sqrt{A}/2} \mathbf{E}_{p1} \mathbf{n} \, dx dy = 2 EA.$$

Esta integral, como foi visto, é igual à:

$$2 EA = 4\pi nq. \quad (4.67)$$

De modo que:

$$E = \frac{4\pi nq}{2A} = 2\pi\sigma.$$

Ou:

$$\mathbf{E} = 2\pi \frac{nq}{A} \mathbf{z} = 2\pi\sigma \mathbf{z}. \quad (4.68)^{14}$$

---

<sup>14</sup> Onde  $\sigma$  é a densidade de carga na placa.

Este é o campo elétrico gerado por cada uma das placas.

O campo entre duas placas pode ser visto na figura a seguir:

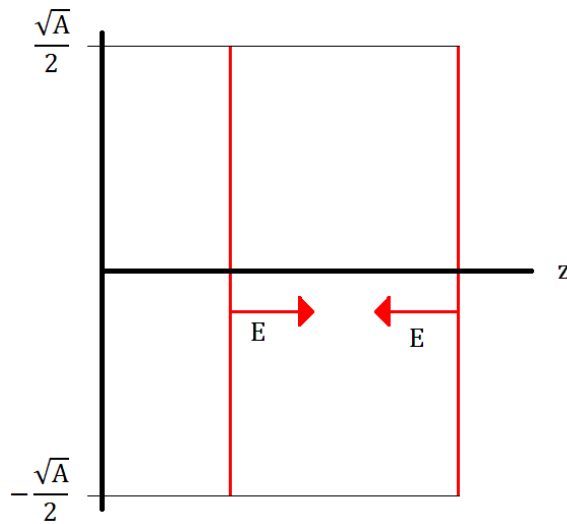


Figura 4.4: Exemplificando o campo entre duas placas.

De forma que o campo elétrico fica:

$$\mathbf{E}_{12} = 2\pi \frac{nq}{A} (\mathbf{z} - (-\mathbf{z})) = 4\pi\sigma \mathbf{z}. \quad (4.69)$$

Com este campo, é possível calcular a força exercida:

$$\mathbf{F}_{12} = \left[ \sum_{i=1}^n q_i \right] 4\pi\sigma \mathbf{z}.$$

Como todas as cargas são iguais, tem-se que:

$$\mathbf{F}_{12} = 4\pi nq\sigma \mathbf{z} = 4\pi \frac{(nq)^2}{A} \mathbf{z}.$$

Para calcular a força sobre uma placa, utilizar-se-á o exemplo que decorre:

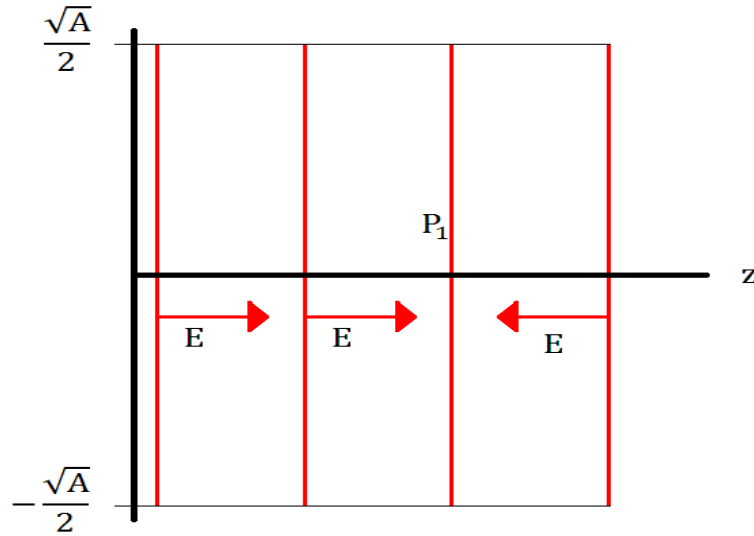


Figura 4.5: Exemplo para calcular a força exercida sobre a placa  $P_1$ .

A força sobre  $P_1$  é:

$$\mathbf{F}_{P_1} = \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{jP_1}.$$

Como foi visto, os campos elétricos tem o mesmo módulo. Assim, constrói-se que:

$$\mathbf{F}_{P_1} = 4\pi \frac{(nq)^2}{A} [N_{\text{esq}P_1} - N_{\text{dir}P_1}] \mathbf{z}. \quad (4.70)^{15}$$

Reescreve-se a última equação como sendo:

$$\mathbf{F}_{P_1} = \frac{4\pi N(nq)^2}{A} \left[ \frac{N_{\text{esq}P_1}}{N} - \frac{N_{\text{dir}P_1}}{N} \right] \mathbf{z}. \quad (4.71)$$

Fica evidente que:

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{N_{\text{esq}P_1}}{N} \leq 1. \\ 0 \leq \frac{N_{\text{dir}P_1}}{N} \leq 1. \end{cases}$$

<sup>15</sup> Onde  $N_{\text{esq}P_1}$  é o número de placas à esquerda de  $P_1$  e  $N_{\text{dir}P_1}$  é o número de placas à direita de  $P_1$ .



E, como parâmetro, estabelece-se:

$$p_b = \frac{4\pi N(nq)^2}{A m} > 0. \quad (4.72)$$

De modo que a força de interação sobre cada placa é igual à:

$$\mathbf{F}_{P_i} = m p_b \left[ \frac{N_{\text{esq}P_i}}{N} - \frac{N_{\text{dir}P_i}}{N} \right] \mathbf{z}. \quad (4.73)$$

#### 4.2.3 – Equações de movimento para o problema

Basicamente, duas espécies de força atuam sobre cada placa: a força de interação entre as placas e a força proveniente do potencial ponderomotriz. Estas forças descrevem, inicialmente, o movimento de cada placa e, assim, a dinâmica do sistema, como um todo.

A força gerada pelo potencial ponderomotriz sobre uma partícula, como foi visto, é igual à:

$$F_z = -\frac{q^2}{\gamma m c^2} a_o a_{DGCM} [k + k_w] \sin([k + k_w]z). \quad (4.74)$$

A força do potencial sobre a placa deve ser, portanto:

$$F_z = -\frac{q^2 n}{\gamma m c^2} a_o a_{DGCM} k_p \sin[k_p z]. \quad (4.75)$$

Estabelecendo outro parâmetro:

$$p_a = \frac{q^2 n}{\gamma m^2 c^2} a_o a_{DGCM} k_p > 0. \quad (4.76)$$

Assim:

$$F_z = -m p_a \sin[k_p z]. \quad (4.77)$$

Nota-se que os parâmetros  $p_a$  e  $p_b$  são completamente independentes. Ou seja, pode-se alterar um sem alterar o outro. Isto, simplificadaamente, porque a amplitude do campo do DGCM pode ser ajustada sem estar atrelada à densidade ou quantidade de cargas e placas presentes no potencial ponderomotriz.

A força sobre cada placa  $i$  será:

$$F_i = -m p_a \sin[k_p z_i] + m p_b \left[ \frac{N_{\text{esq } i}}{N} - \frac{N_{\text{dir } i}}{N} \right]. \quad (4.78)$$

$$F_i = m \left\{ -p_a \sin[k_p z_i] + p_b \left[ \frac{N_{\text{esq } i}}{N} - \frac{N_{\text{dir } i}}{N} \right] \right\}. \quad (4.79)$$

Uma vez encontrada a força resultante sobre cada placa, é possível descobrir a sua posição em um instante de tempo posterior, onde se poderia fazer, por exemplo:

$$z_i(t + \Delta t) = z_i(t) + v_i(t)\Delta t + \frac{a_i(t)}{2} [\Delta t]^2. \quad (4.80)$$

Onde, enfim:

$$a_i(t) = \frac{F_i}{m} = -p_a \sin[k_p z_i] + p_b \left[ \frac{N_{\text{esq } i}}{N} - \frac{N_{\text{dir } i}}{N} \right]. \quad (4.81)$$

O movimento de cada placa é, então, afetado, pelo número de placas que estão à sua direita e esquerda, bem como, depende da densidade de elétrons nas placas, da amplitude do campo do DGCM, da sua posição e, também, da sua velocidade.

A relação de aceleração proposta tem várias vantagens. Entre as principais estão:

- Ela possibilita uma comparação direta entre a força do potencial ponderomotriz e a de interação. Uma vez que  $p_a$  e  $p_b$  são os valores máximos que essas forças podem ter;

- O valor relativo entre esses dois parâmetros ( $p_a/p_b$ ), quando igual, reproduz a mesma dinâmica das placas;

Ainda que a equação tenha se simplificado enormemente supondo que os elétrons se agrupem em placas, é impossível (ou melhor, seria extremamente demorado) calcular a equação de movimento para todas as placas (e esta conta seria repetida por milhares de vezes).

A solução é calcular as equações de movimento através de um programa de computador. O problema exige uma boa acurácia, de modo que as equações serão resolvidas com o método Runge-Kutta de quarta ordem, utilizando a linguagem FORTRAN.

#### 4.2.4 – O programa

O método escolhido para atacar o problema é o Runge-Kutta de quarta ordem. Resumidamente, conforme Scherer (2005), o método consiste em usar médias ponderadas de uma função  $f$  (que aqui é a equação 4.81), dentro de apenas um passo temporal (entre  $t_i$  e  $t_{i+1}$ ) de forma que:

$$F_1 = f(x_j, t_j).$$

$$F_2 = f\left(x_j + \frac{F_1 \Delta t}{2}, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right).$$

$$F_3 = f\left(x_j + \frac{F_2 \Delta t}{2}, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right).$$

$$F_4 = f(x_j + F_3 \Delta t, t_j + \Delta t).$$

$$x_{j+1} = x_j + \frac{\Delta t}{6} (F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4).$$

A integração a cada passo temporal é feita com os pesos acima, o que diminui enormemente o erro intrínseco da programação.

Uma vez tendo sido feito o programa, é necessário testá-lo, para ver se está certo. E este é o tema da subseção subsequente.

#### 4.2.4.1 – Teste 1

Testa-se o movimento de uma única placa, buscando uma equação de movimento analítica. Conforme a expressão (4.81), a equação de movimento é dada por:

$$a_i(t) = \frac{F_i}{m} = -p_a \sin[k_p z_i] + p_b \left[ \frac{N_{esq\ i}}{N} - \frac{N_{dir\ i}}{N} \right].$$

Tomando  $p_b = 0$ :

$$a_i(t) = -p_a \sin[k_p z_i]. \quad (4.82)$$

Supondo que  $k_p z_i \ll 1$ , chega-se à (aproximação parabólica do potencial e linear da força):

$$\ddot{z}_i(t) = -p_a k_p z_i(t). \quad (4.83)$$

Que é a equação de um oscilador harmônico com frequência igual à:

$$\omega = \sqrt{p_a k_p}. \quad (4.84)^{16}$$

A pergunta a ser feita é: Quando se tem a condição  $k_p z_i \ll 1$ ?

Sabidamente a aproximação  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin[x] = x$ , é válida para ângulos menores do que 10°. Assim:

---

<sup>16</sup> O valor negativo está de acordo, uma vez que  $p_a$  é menor do que zero.

$$\sin(-10^\circ) \leq \sin\{k_p z_{0j}\} \leq \sin 10^\circ.$$

Usando que:

$$1 \text{ rad} \cong 57,2956^\circ.$$

$$10^\circ \cong 0,174533 \text{ rad}.$$

Assim:

$$\frac{-0,174533}{k_p} \leq z_{0j} \leq \frac{0,174533}{k_p}. \quad (4.85)^{17}$$

Usando que  $k_p = 4\pi^2$ , se  $z_{0j}$  for:

$$-0,00442 \leq z_{0j} \leq 0,00442.$$

A partícula, analiticamente, deve oscilar como um oscilador harmônico simples. O gráfico obtido pelas simulações foi:

---

<sup>17</sup> Onde  $z_{0j}$  é o valor inicial da posição da placa  $j$ .

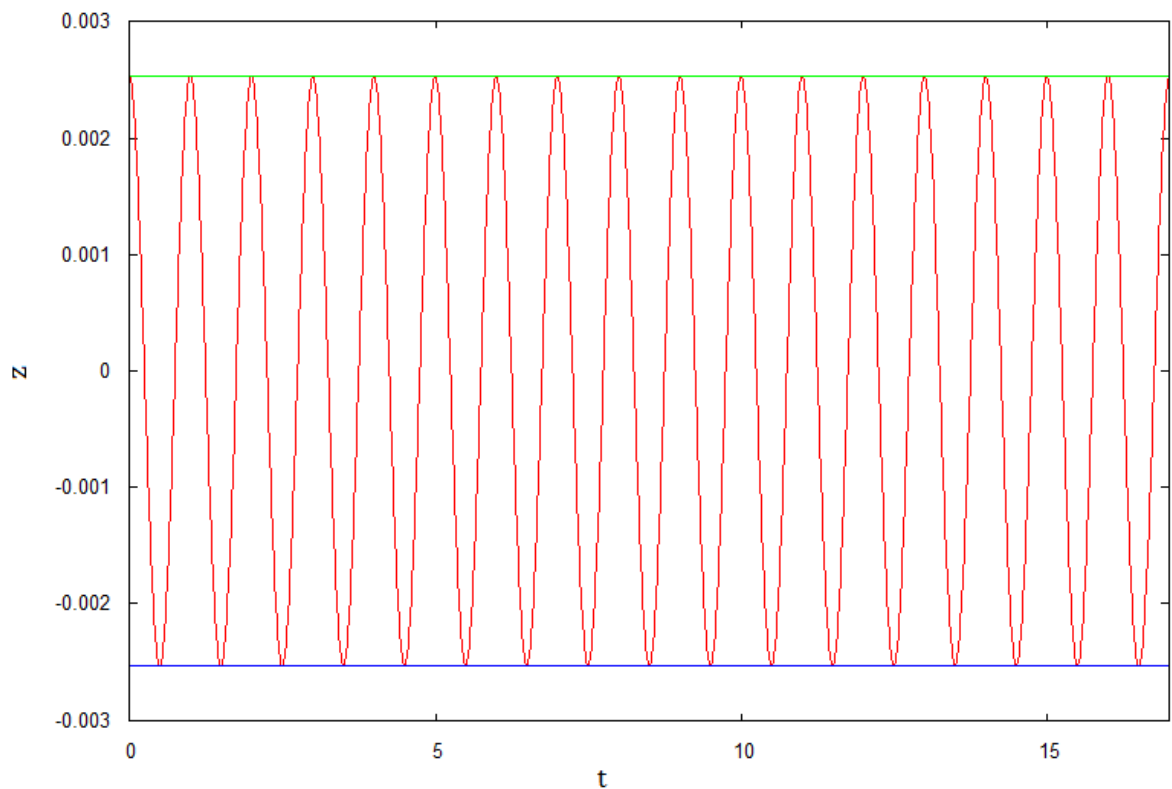


Figura 4.6: As linhas verde e azul representam a amplitude do movimento. Como condição inicial foi escolhido que a posição valeria  $0.1/k_p$  (que está dentro do limite da aproximação), com  $k_p = 4\pi^2$  e  $p_a = 1$ , o que acarreta em um  $\omega = 2\pi$  e em um período  $T = 1$ .

O gráfico foi exatamente de acordo com as *previsões*. O programa foi efetivo no teste: reproduziu um movimento harmônico simples sem a interação com outras placas, na região de validade da aproximação linear para o seno.

#### 4.2.4.2 – Teste 2

Um segundo teste é proposto: analisar a distribuição das placas em uma situação de equilíbrio. A ideia é relativamente simples: para que as placas estejam em equilíbrio, a força sobre cada placa deve ser nula, de forma que:

$$0 = F_z - F_{\text{dist}} \rightarrow F_z = F_{\text{dist}}$$

Entretanto, disto decorre que:

$$\Phi_p = \Phi_{\text{dist}}. \quad (4.86)^{18}$$

$$\Phi_{\text{dist}} = \Phi_p = -\frac{m}{n k_p} p_a \cos\{k_p z\}. \quad (4.87)$$

Sabendo que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{dist}} = \frac{\lambda}{\epsilon_0}. \quad (4.88)^{19}$$

E que:

$$\mathbf{E}_{\text{dist}} = -\nabla\Phi_{\text{dist}}.$$

Tem-se que:

$$\nabla \cdot (\nabla\Phi_{\text{dist}}) = -\frac{\lambda}{\epsilon_0}.$$

De forma que:

$$\nabla^2\Phi_{\text{dist}} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0}. \quad (4.89)$$

Assim:

$$\nabla^2\Phi_{\text{dist}} = \frac{d^2}{dz^2} [\Phi_{\text{dist}}] = -\frac{\lambda}{\epsilon_0}.$$

Sabendo que:

$$\frac{d^2}{dz^2} [\Phi_{\text{dist}}] = \frac{d^2}{dz^2} \left\{ -\frac{m}{k_p} p_a \cos\{k_p z\} \right\}. \quad (4.90)$$

$$\lambda(z) = M k_p \cos\{k_p z\}. \quad (4.91)$$

---

<sup>18</sup> Onde  $\Phi_{\text{dist}}$  é o potencial associado à distribuição.

<sup>19</sup> Onde  $\lambda$  é a densidade linear de placas.

Esta curva determinaria a distribuição de placas se houvesse um contínuo de placas. Como não é o caso, a integral dessa curva, ao longo de  $z$ , no intervalo em que há, de verdade, distribuição, deve corresponder ao número de placas.

Ou seja:

$$\int_{-z}^z \lambda(z) dz = N. \quad (4.92)$$

Uma pergunta que pode surgir é: como encontrar a solução de equilíbrio através do programa? A resposta é relativamente simples: introduz-se um termo de amortecimento no programa. Mais especificamente, no termo de força, de modo que o movimento das placas seja reduzido gradualmente (e quanto mais lenta essa redução, melhor). A equação de força para cada placa fica com o seguinte aspecto:

$$F_i = m \left\{ -p_a \sin[k_p z_i] + p_b \left[ \frac{N_{\text{esq } i}}{N} - \frac{N_{\text{dir } i}}{N} \right] + b v_i \right\}. \quad (4.93)^{20}$$

Desta forma as placas *migram* para regiões onde a força resultante sobre elas (essa força resultante é a soma das forças de interação com as outras placas e com a força ponderomotriz) seja nula.

É necessário atentar que ao cabo do tempo de integração realmente não haja mais movimento. Se ainda há movimento é porque ainda há força resultante sobre as placas e, logicamente, as placas não estão em equilíbrio.

#### 4.2.4.2.1 – Teste 2A

---

<sup>20</sup> Onde  $b$  é o termo de amortecimento e  $v_i$  é a velocidade de cada placa.



O primeiro teste foi realizado com a força ponderomotriz sendo muito superior à força de interação entre as placas (mil vezes, em média). O programa foi rodado com 200 placas interagentes e com os seguintes parâmetros:

$$p_a = 1.0,$$

$$p_b = 0.001,$$

$$k_p = 4\pi^2,$$

$$b = -0.1.$$

É importante ressaltar que as velocidades iniciais de cada placa são iguais a zero e que a distribuição espacial inicial de placas foi aleatória e próxima da origem (dentro da aproximação parabólica para o potencial<sup>21</sup>).

É de se esperar que as placas *povoassem* as cercanias do poço do potencial ponderomotriz ( $z \cong 0$ ), uma vez que a força exercida pelo potencial é muito maior do que a força de interação entre as placas. Com esta consideração é possível aproximar a seguinte equação:

$$\frac{d^2}{dz^2} [\Phi_{\text{dist}}] = \frac{d^2}{dz^2} \left\{ -\frac{m}{k_p} p_a \cos\{k_p z\} \right\}. \quad (4.94)$$

Supondo, então, que o cosseno pode ser aproximado como uma parábola, próximo da origem, tem-se:

$$\frac{d^2}{dz^2} [\Phi_{\text{dist}}] \cong \frac{d^2}{dz^2} \left\{ -\frac{m}{k_p} p_a \{1 - k_p z\}^2 \right\} = H. \quad (4.95)$$

---

<sup>21</sup> De forma alguma essa condição é necessária. A distribuição inicial poderia ser dada em qualquer região dentro do potencial. Escolheu-se que fosse próxima à origem para diminuir o tempo até que todas as placas atingissem o equilíbrio.

Ou seja:

$$\lambda(z) \propto H. \quad (4.96)^{22}$$

A distribuição de placas é independente de  $z$ , se ela encontra-se perto da origem. Isto quer dizer que o número de placas para intervalos iguais perto da origem é igual, ou ainda, que a distribuição de placas perto da origem é uniforme.

Pode-se fazer uma aproximação para saber os limites da distribuição. Sabendo que:

$$F_i = m \left\{ -p_a \sin[k_p z_{imax}] + p_b \left[ \frac{N_{esq\ i}}{N} - \frac{N_{dir\ i}}{N} \right] \right\} = 0.$$

Tem-se:

$$-p_a \sin[k_p z_{imax}] = -p_b \left[ \frac{N_{esq\ i}}{N} - \frac{N_{dir\ i}}{N} \right].$$

Considerando que as placas estão todas à esquerda de  $imax$ :

$$\sin[k_p z_{imax}] = \frac{p_b}{p_a}. \quad (4.97)$$

Substituindo os valores de  $p_a$  e  $p_b$ , e aproximando o seno:

$$z_{imax} = \frac{0.001}{k_p}.$$

Como existe simetria no problema, com relação ao eixo- $z$ , pode-se dizer que o valor mínimo da distribuição é:

$$z_{imin} = -\frac{0.001}{k_p}.$$

---

<sup>22</sup> Onde  $H$  é uma constante.

É fácil ver que se o intervalo  $z = \left[-\frac{0.001}{k_p}, \frac{0.001}{k_p}\right]$  for dividido em dez partes iguais, pela distribuição ser homogênea, deverá haver vinte placas por intervalo. Pode-se comparar esse resultado com o obtido pelas simulações:

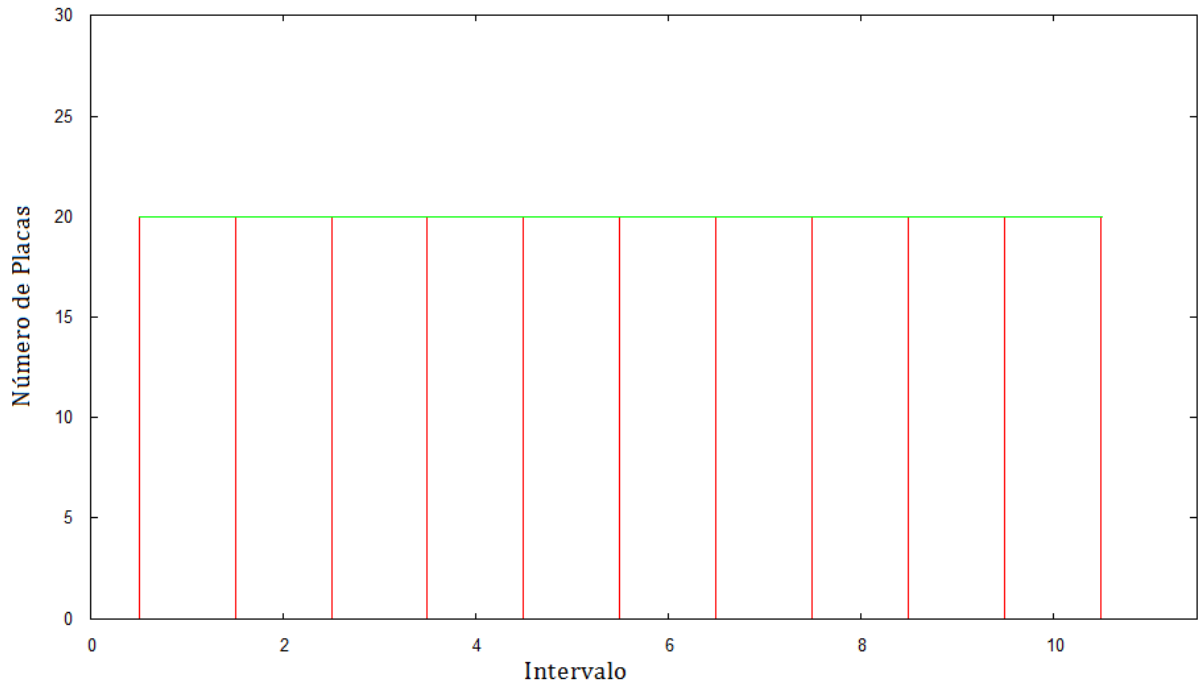


Figura 4.7: Histograma de distribuição das placas em dez intervalos iguais entre  $z = [-2.52 \times 10^{-5}, 2.52 \times 10^{-5}]$ . A curva em verde representa o resultado analítico (exatamente igual ao da simulação, que está em vermelho).

Pode-se comparar mais claramente o resultado da simulação e o analítico. O número de placas em cada intervalo é igual na simulação, como se supôs ser. Além disso, analiticamente, foi encontrado um limite inferior e outro superior (simétricos) de ocupação das placas. O limite encontrado foi:

$$z_{\text{imax/min}} = \pm \frac{0.001}{k_p}.$$

Usando  $k_p = 4\pi^2$ , tem-se:

$$z_{\text{imax/min}} = \pm 2.533 \times 10^{-5}.$$

Este é o valor analítico. O valor encontrado nas simulações foi:

$$Z_{\text{imax/min}_{\text{simulação}}} = \pm 2.52036 \times 10^{-5}.$$

Os valores encontrados são muito próximos. Próximos o suficiente para dizer que o resultado é bom.

#### 4.2.4.2.2 – Teste 2B

Roda-se o mesmo programa com parâmetros diferentes (usando, também, 200 placas):

$$p_a = 1.0,$$

$$p_b = 0.1,$$

$$k_p = 4\pi^2,$$

$$b = -0.1.$$

Novamente, é importante ressaltar que as velocidades iniciais de cada placa eram iguais a zero e que a distribuição espacial inicial de placas foi aleatória e próxima da origem. O resultado, em si, não depende da distribuição inicial espacial, ou de velocidades, das placas. Privilegia-se essa configuração para o resultado ser obtido mais rapidamente (demandando menos tempo de programação).

Desta vez, a interação entre as placas começa a ter um papel representativo, se comparada com o potencial ponderomotriz (as placas, a princípio, não estão mais tão próximas da origem). Pode-se, mesmo assim, analiticamente, descobrir a *forma* da distribuição. Relembrando a expressão (4.94):

$$\frac{d^2}{dz^2} [\Phi_{\text{dist}}] = \frac{d^2}{dz^2} \left\{ -\frac{m}{k_p} p_a \cos\{k_p z\} \right\} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0}.$$

Donde se extrai:

$$\lambda(z) = M k_p \cos\{k_p z\}.$$

E, como:

$$\int_{-z_{\max}}^{z_{\max}} \lambda(z) dz = N.$$

Sabendo os limites da distribuição, pode-se calcular o coeficiente M de normalização.

Encontram-se os limites analíticos considerando que as placas estão todas à esquerda de *imax*:

$$\sin[k_p z_{\max}] = \frac{p_b}{p_a}. \quad (4.97)$$

Logo:

$$k_p z_{\max} = \sin^{-1}(0.1).$$

$$z_{\max} = \frac{0.1001674}{k_p} = 0.002537.$$

Evidentemente:

$$z_{\max/\min} = \pm 2.537 \times 10^{-3}.$$

Enquanto o valor encontrado nas simulações foi:

$$z_{\max/\min_{\text{simulação}}} = \pm 2.5245 \times 10^{-3}.$$

Mais uma vez, os valores obtidos na simulação são muito próximos.

Usando os limites analíticos:

$$\int_{-0.002537}^{0.002537} M k_p \cos\{k_p z\} dz = 200.$$

$$M \sin\{0.1001674\} - M \sin\{-0.1001674\} = 200..$$

$$M \cong 1000.$$

O número de placas em qualquer intervalo é dado, analiticamente, por:

$$N_p = \int M k_p \cos\{k_p z\} dz. \quad (4.98)$$

Ou seja:

$$N_p = 1000 (\sin\{4\pi^2 z_s\} - \sin\{4\pi^2 z_i\}). \quad (4.99)^{23}$$

Os resultados obtidos são expressos no seguinte gráfico:

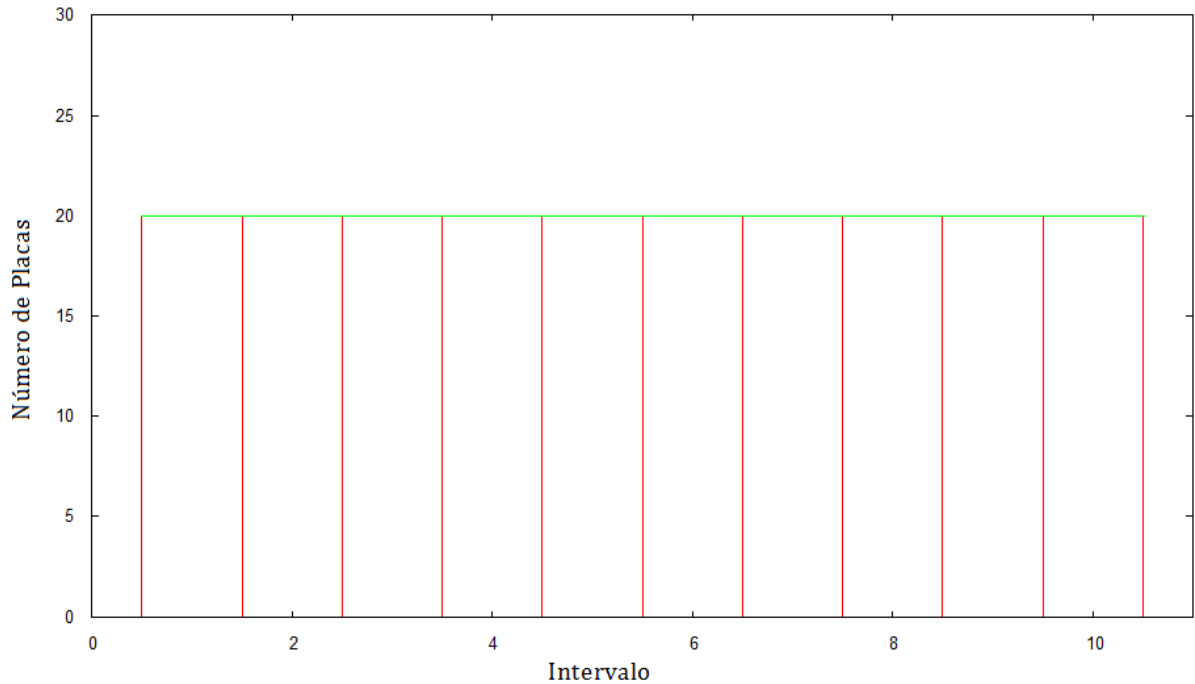


Figura 4.8: Histograma de distribuição das placas em dez intervalos iguais entre  $z = [-0.0025245, 0.0025245]$ . Em verde está a distribuição calculada analiticamente e em vermelho a distribuição dada conforme a simulação.

A *figura 4.8* é praticamente igual à *figura 4.7*: as duas indicam que as placas estão fortemente presas ao potencial ponderomotriz (estão no fundo do poço). Além disso, a aproximação linear para o seno ainda é válida.

<sup>23</sup> Onde  $z_s$  é o valor máximo de  $z$  neste intervalo e  $z_i$  é o valor mínimo de  $z$  neste intervalo.

O ideal para o próximo teste é aumentar significativamente o valor do parâmetro  $p_b$ , de modo que não seja mais válida a aproximação parabólica para o potencial (ou linear para o seno).

#### 4.2.4.2.3 – Teste 2C

Roda-se, agora, o mesmo programa com parâmetros diferentes (usando, também, 200 placas):

$$p_a = 1.0,$$

$$p_b = 0.5,$$

$$k_p = 4\pi^2,$$

$$b = -0.1.$$

As posições de máximo e de mínimo, analiticamente, são encontradas quando todas as placas estão à esquerda e à direita das extremadas, respectivamente (calculando o máximo):

$$\sin[k_p z_{\text{imax}}] = 0.5.$$

Logo:

$$k_p z_{\text{imax}} = \sin^{-1}(0.5).$$

$$z_{\text{imax}} = \frac{0.5236}{k_p} = 0.013263.$$

Evidentemente:

$$z_{\text{imax/min}} = \pm 0.013263.$$

Enquanto o valor encontrado nas simulações foi:

$$z_{\text{imax/min}_{\text{simulação}}} = \pm 0.01318985.$$

De novo, os valores obtidos na simulação são muito próximos aos analíticos.

Usando os limites analíticos:

$$\int_{-0.013263}^{0.013263} M k_p \cos\{k_p z\} dz = 200.$$

$$M \sin\{0.5236\} - M \sin\{-0.5236\} = 200.$$

$$M \cong 200.$$

O número de placas em qualquer intervalo é dado, analiticamente, por:

$$N_p = \int M k_p \cos\{k_p z\} dz.$$

Ou seja:

$$N_p = 200 (\sin\{4\pi^2 z_s\} - \sin\{4\pi^2 z_i\}).$$

Os resultados obtidos são expressos no seguinte gráfico:



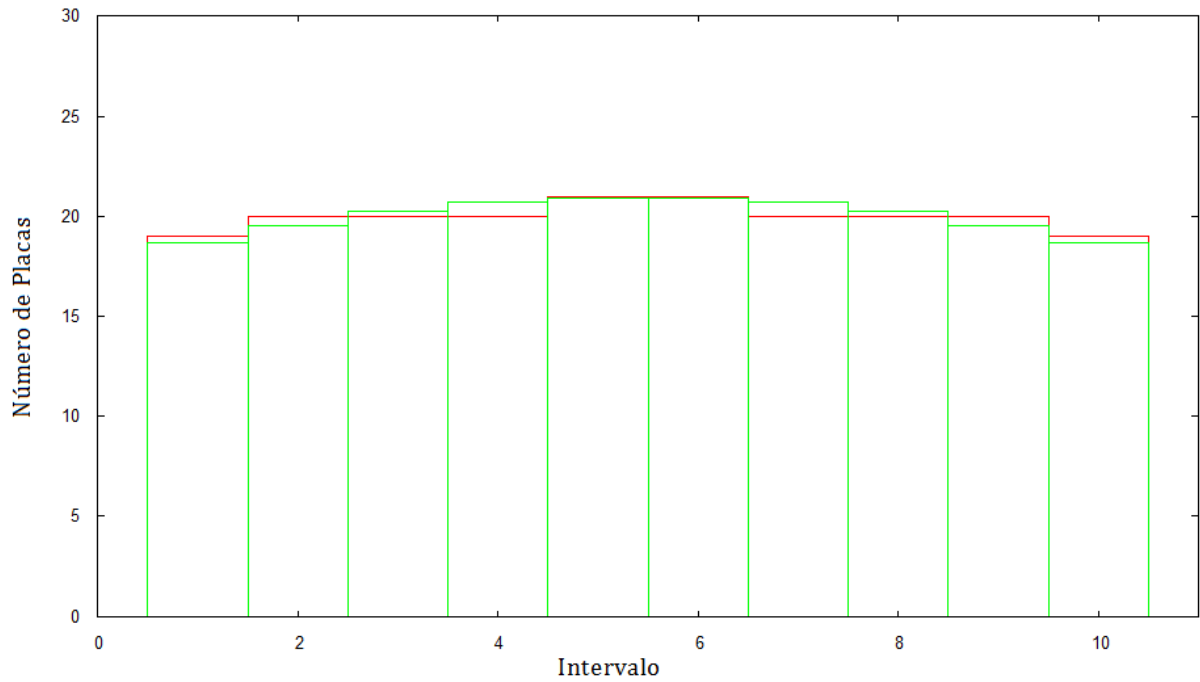


Figura 4.9: Histograma de distribuição das placas em dez intervalos iguais entre  $z = [-0.01318985, 0.01318985]$ . Em verde está a distribuição calculada analiticamente e em vermelho a distribuição dada conforme a simulação.

Na *figura 4.9* é possível ver que a aproximação parabólica para o potencial ponderomotriz já não é mais válida. Apesar disso, viu-se que o resultado obtido pela simulação ficou muito próximo daquele encontrado analiticamente.

Para assegurar que as placas encontraram seu estado estacionário, recorre-se ao seguinte gráfico:

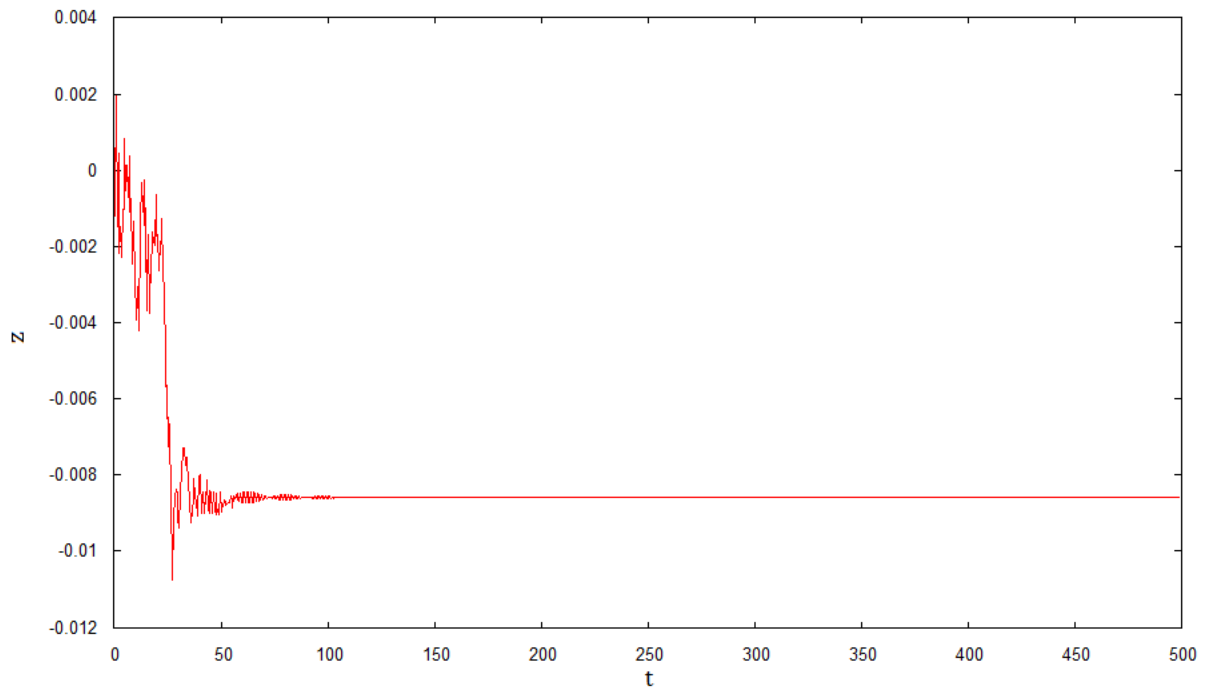


Figura 4.10: Gráfico da posição contra o tempo para uma das placas. Nota-se que, com o passar do tempo, a placa não muda mais sua posição (sinal que não há força resultante sobre ela).

Estes testes servem para mostrar que o programa é confiável. Se ele integra algo, ele o faz de forma correta, gerando pouco erro. Depois desta pequena análise, é possível (e seguro), computacionalmente, prosseguir o trabalho.

### 4.3 – Limitação do modelo de interação

Computacionalmente, os resultados parecem ser confiáveis. Entretanto, a hipótese de interação entre as placas feita na *seção 4.2.2* merece uma justificativa. Como forma de *justificar* o modelo utilizado, recorre-se a uma nova abordagem (real). Nela, os elétrons estão confinados próximos ao plano  $y = 0$ , de modo que:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \delta(y) d(z). \quad (4.100)$$

Sendo  $\varphi$ , o potencial gerado pela presença da densidade de carga  $d(z)$ .

Existem, também, duas placas condutoras, contidas nos planos  $y = -L/2$  e  $y = L/2$  (a presença das placas acaba atraindo as linhas de campo geradas pela partícula carregada). Com essa condição, pode-se conjecturar que:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \quad (4.101)$$

E, representando  $\delta(y)$  como:

$$\delta(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \quad (4.102)$$

Tem-se, das expressões 4.100 e 4.101, que:

$$\nabla^2 \varphi = \left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \varphi. \quad (4.103)$$

Substituindo a expressão 4.101 em 4.103:

$$\nabla^2 \varphi = \left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right]. \quad (4.104)$$

Esta expressão fica resumida à:

$$\nabla^2 \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \left\{ \frac{d^2\{\varphi_n(z)\}}{dz^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varphi_n(z) \right\} \right]. \quad (4.105)$$

Remontando à expressão 4.100 e utilizando a definição contida na expressão 4.102:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \left\{ \frac{d^2\{\varphi_n(z)\}}{dz^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varphi_n(z) \right\} \right] = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) d(z). \quad (4.106)$$

A expressão 4.106 pode ser resolvida fazendo uma multiplicação e uma integral. Dividindo essa expressão em duas (lado esquerdo e direito, respectivamente) e procedendo conforme descrito:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{d^2\{\varphi_n(z)\}}{dz^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varphi_n(z) \right\} \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dy \right] \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n(z) A_n \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dy \right] \right). \quad (4.107)$$

É necessário, por ortogonalidade, que  $n = m$  para que  $\int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dy \neq 0$ . Assim, os somatórios desaparecem e a equação 4.106 pode ser escrita como:

$$\frac{d^2\{\varphi_n(z)\}}{dz^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varphi_n(z) = -4\pi d(z) A_n. \quad (4.108)$$

Supõe-se que  $d(z)$  seja uma partícula em uma posição  $z_0$  qualquer. Portanto:

$$d(z) = \delta(z - z_0).$$

Logo:

$$\frac{d^2\{\varphi_n(z)\}}{dz^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varphi_n(z) = -4\pi \delta(z - z_0) A_n. \quad (4.109)$$

Resolve-se esta equação diferencial para  $n = 1$  (o motivo será explicado em seguida), ou seja:

$$\frac{d^2\{\varphi_1(z)\}}{dz^2} - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \varphi_1(z) = -4\pi \delta(z - z_0) A_1. \quad (4.110)$$

Além disso, impõe-se que o potencial e o campo elétrico sejam periódicos (i.e. estas são as condições iniciais do problema [pensando que o poço ponderomotriz tem como limites  $z = -\pi$  e  $z = \pi$ ]):

$$\begin{cases} \varphi_1(-\pi) = \varphi_1(\pi). & (4.111a) \\ \left. \frac{d\varphi_1}{dz} \right|_{z=-\pi} = \left. \frac{d\varphi_1}{dz} \right|_{z=\pi}. & (4.111b) \end{cases}$$

A solução da equação 4.110 é complicada. Para chegar até ela, foi utilizado o *software* algébrico *Maple*<sup>24</sup>.

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) = & -\frac{4\pi}{2\pi(e^{\pi^2/L} - e^{-\pi^2/L})} (A L \{ [e^{\pi(z+\pi-z_0)/L} + e^{-\pi(z+\pi-z_0)/L}] \Theta(-\pi + z_0) \\ & - [e^{-\pi(-z+\pi+z_0)/L} + e^{\pi(-z+\pi+z_0)/L}] \Theta(\pi + z_0) - e^{\pi(z+\pi-z_0)/L} \\ & + e^{-\pi(-z+\pi+z_0)/L} + e^{\pi(-z+\pi+z_0)/L} - e^{-\pi(z+\pi-z_0)/L} \\ & + [e^{-\pi(-z+\pi+z_0)/L} - e^{\pi(-z+\pi+z_0)/L} + e^{-\pi(-z+\pi-z_0)/L} + e^{\pi(z+\pi-z_0)/L}] \Theta(z \\ & - z_0) \}). \quad (4.112) \end{aligned}$$

Onde  $\Theta(z - z_0)$  é a função de Heaviside, definida como:

$$\Theta(z - z_0) = \begin{cases} 0, & \text{para } z > z_0 \\ 1, & \text{para } z < z_0 \end{cases}$$

Para os seguintes valores:

$$L = 10\pi; z_0 = 0; A_1 = 1. \quad (4.113)$$

Monta-se, a seguir, um gráfico que descreve o potencial gerado por uma partícula. Espera-se que as linhas de campo sejam absorvidas pelos condutores, que é o que acontece na realidade.

---

<sup>24</sup> Um produto Maplesoft®.

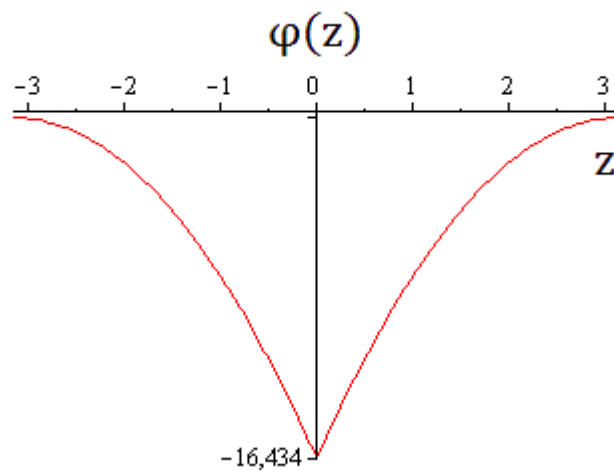


Figura 4.11: Gráfico do potencial de uma partícula posta em  $z = 0$ .

Vê-se que o potencial é simétrico com relação à posição da carga e que possui valor e derivada iguais nos extremos.

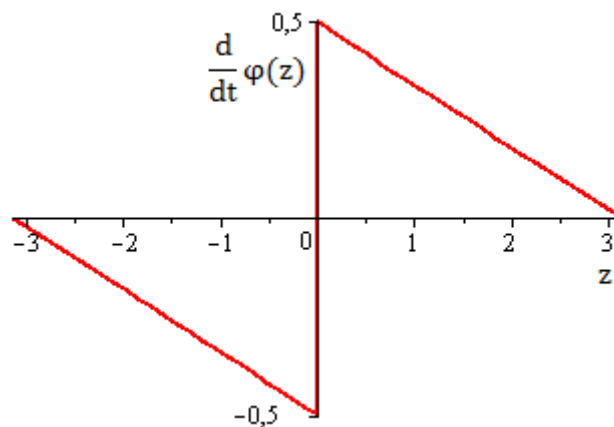


Figura 4.12: Gráfico da derivada do potencial de uma partícula posta em  $z = 0$ .

A derivada do potencial, que representa o campo elétrico, possui valor igual nos extremos (nulo). Tanto em uma, quanto em outra, figura, o *decaimento* da curva é dado como uma exponencial. A forma com que as curvas decaem depende do valor da distância  $L$  das placas. Com  $n$  maiores do que um, o decaimento se daria muito mais abruptamente, de forma que, torna-se plausível a escolha por desconsiderar a soma dos termos relativos a valores de  $n$  maiores do que um.

Esta abordagem *real* deve ser comparada com o modelo. No modelo adotado para este trabalho, o valor do campo elétrico de cada placa é constante, ou seja:

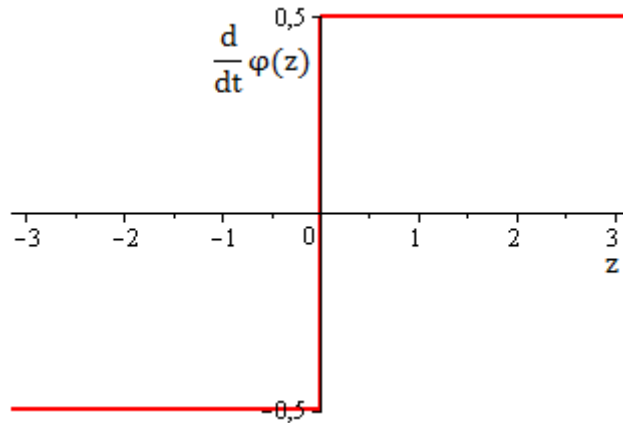


Figura 4.13: Gráfico do campo elétrico de uma partícula posta em  $z = 0$  para o modelo utilizado para este trabalho.

Plota-se, agora, as duas curvas em um mesmo gráfico, para se observar a diferença mais nitidamente:

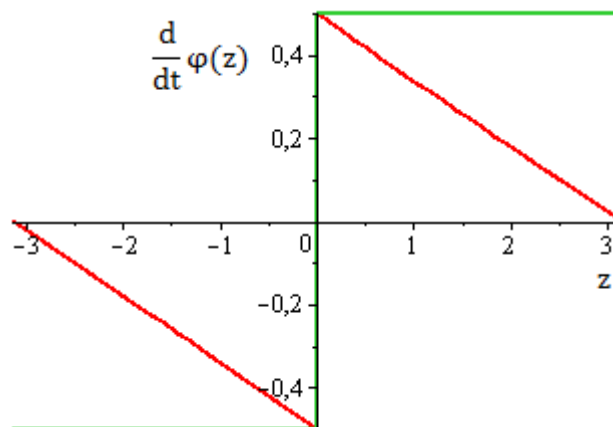


Figura 4.14: Gráfico dos campos elétricos de uma partícula posta em  $z = 0$  para: em vermelho, o modelo real; em verde, o modelo utilizado para este trabalho.

Para analisar este gráfico, imagina-se, agora, outra partícula (testemunha) em uma posição diferente de  $z = 0$ . Esta partícula sente o campo elétrico produzido pela partícula na origem. No modelo do trabalho, a partícula testemunha não sente alteração no campo elétrico à medida que se afasta ou se aproxima da origem, enquanto na situação real, o campo decai (em módulo) com o aumento da distância com relação à origem. Porém, se a distância entre a

partícula testemunha e a partícula carregada for pequena, o valor sentido pela partícula testemunha será praticamente igual, nos dois casos (no modelo do trabalho e no modelo real).

Como a distância entre os elétrons aumenta conforme o aumento da densidade (por repulsão eletrônica) pode-se afirmar que o modelo descreve bem a realidade para densidades de carga não muito grandes. Esta é, sem dúvida, uma limitação do trabalho.



## 5 – Mapas de Poincaré

Jules Henri Poincaré foi um matemático, físico e filósofo da ciência francês. Ele estudou o problema de três corpos, estimulado por um desafio do rei Oscar II, da Suécia. O rei Oscar, na ocasião, indagou se o sistema solar era estável.

A observação do espaço de fase completo dos corpos era complicada e, a princípio, não trazia informação concreta sobre a dinâmica do sistema. Poincaré propôs que a análise da dinâmica deveria ser feita *captando* os pontos que interseccionassem um plano dentro do espaço de fase e, além disso, esses pontos deveriam atravessar o plano sempre no mesmo sentido. Conforme Medeiros (2010), a figura formada pela intersecção dos pontos com o plano forma o *mapa de Poincaré*.

Segundo José & Saletan (1998), o mapa de Poincaré é uma ferramenta útil para analisar a dinâmica de um sistema, quando este sistema é periódico ou quase periódico ou, ainda, quando possui uma força externa periódica. O mapa de Poincaré torna a compreensão do espaço de fase mais fácil, uma vez que ele não marca toda a trajetória no espaço de fase e, sim apenas alguns pontos (isto é, ele reduz em uma dimensão a análise do espaço de fases).

Imagina-se, então, um oscilador harmônico simples unidimensional, governado pela seguinte equação de movimento:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t). \quad (5.1)^{25}$$

A solução do problema é uma curva senoidal, tanto para a posição ( $x$ ), quanto para a velocidade ( $\dot{x}$ ) e para a aceleração ( $\ddot{x}$ ). O espaço de fase do oscilador fica, portanto, com a seguinte forma:

---

<sup>25</sup> Onde  $\omega_0$  é a frequência do oscilador.

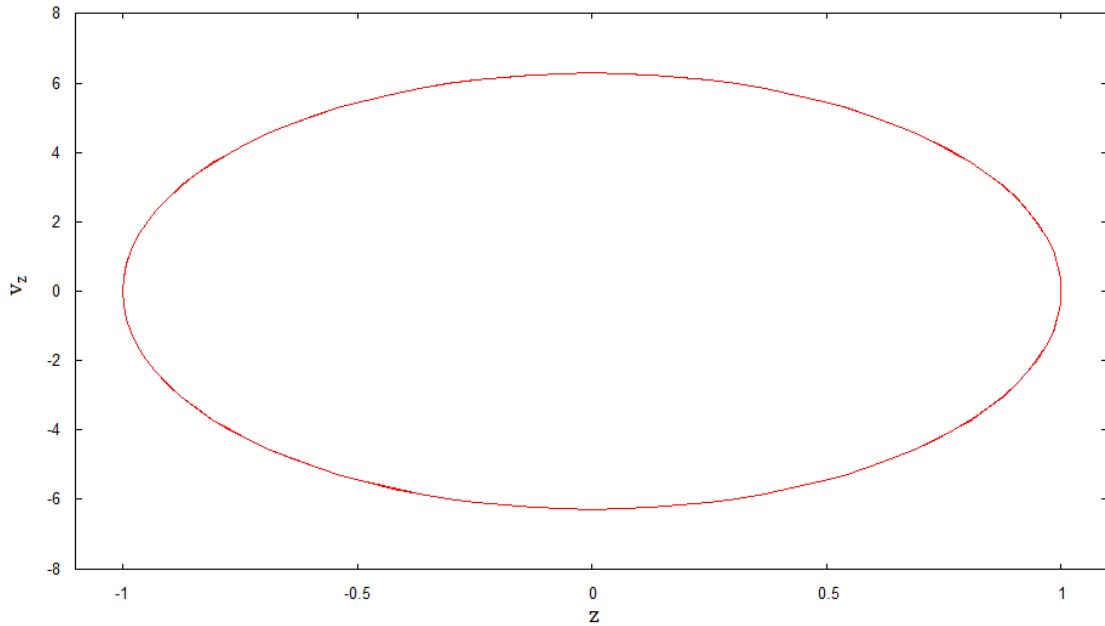


Figura 5.1: Espaço de fase de um oscilador harmônico. Com  $\omega_0 = 2\pi$  e com condições iniciais de  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = 0$ .

Para fazer o mapa de Poincaré, estabelece-se que haverá plotagem no espaço de fase apenas uma vez a cada período de tempo. O período de tempo [T] que torna o entendimento do problema mais fácil é aquele típico do problema. No caso do oscilador harmônico simples ele está relacionado com a frequência natural do sistema [ $\omega_0$ ], ou seja:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.2)$$

Logo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (5.3)$$

E, neste caso específico:

$$T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ u. a. t.}^{26}$$

<sup>26</sup> Onde *u.a.t.* quer dizer: unidade arbitrária de tempo.

Uma vez descoberto  $T$ , plota-se um ponto a cada período de 1 u.a.t., obtendo o seguinte gráfico:

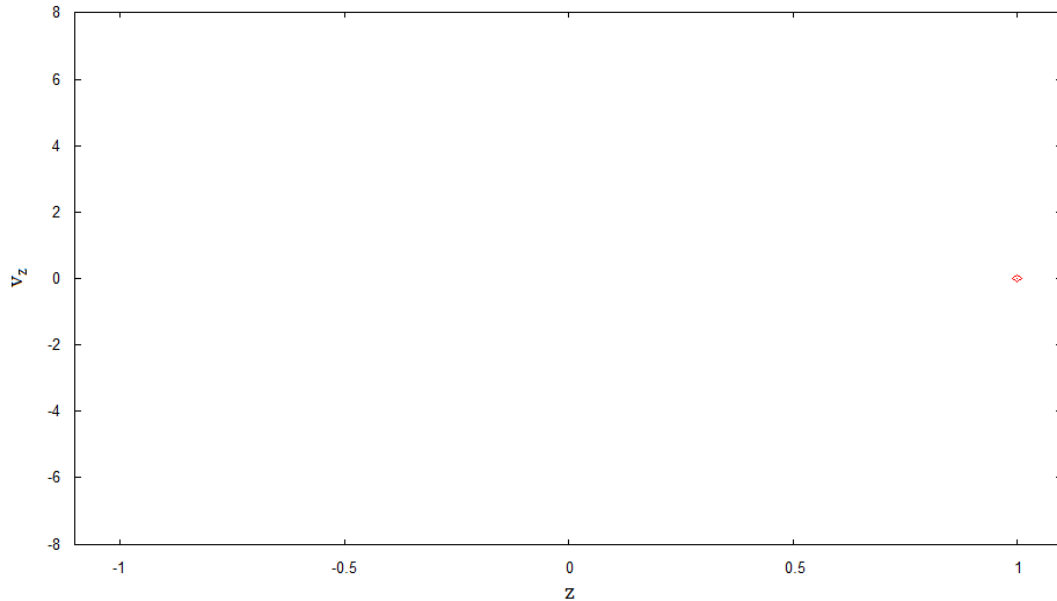


Figura 5.2: Mapa de Poincaré de um oscilador harmônico, com  $\omega_0 = 2\pi$  e com condições iniciais de  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = 0$ .

O resultado não poderia ser distinto. Um oscilador harmônico simples tem como característica, exatamente, *oscilar*, isto é, voltar a uma posição qualquer ocupada no espaço de fase após um certo intervalo de tempo, chamado *período*  $[T]$ . Se ao invés de plotar o espaço de fase completo do oscilador, forem plotados apenas pontos no espaço de fase que *distam* temporalmente de um intervalo igual ao período, espera-se que estes pontos sejam *acumulados*, isso quer dizer, que estejam sobrepostos, uns aos outros. Trajetórias periódicas, em geral, são marcadas como pontos no mapa de Poincaré.

Entretanto, trajetórias quase periódicas no espaço de fases não formam pontos no mapa de Poincaré. Na verdade, elas formam trajetórias fechadas (curvas KAM) no mapa. Há uma explicação razoável: depois de um certo número (mesmo que muito grande) de passagens, a partícula que cruza o mapa volta à sua condição inicial. Se a trajetória é caótica,

formar-se-á uma área completamente preenchida no mapa de Poincaré: a partícula precisaria de um tempo infinito para voltar à sua condição inicial.

Parte-se desta ideia: para uma dinâmica periódica, enxerga-se um número finito de pontos no mapa de Poincaré; para uma dinâmica quase periódica, se enxerga uma curva fechada; e, para uma dinâmica caótica, enxerga-se uma área preenchida por pontos.

## 5.1 – Buscando o período

Com base no capítulo anterior, fica difícil imaginar que exista um *período natural* para o sistema proposto no presente trabalho, por alguns motivos: a aproximação parabólica do potencial funciona apenas para regiões próximas a  $z = 0$ ; e, a interação entre as placas, certamente, altera a dinâmica das próprias placas.

Isso é verdade. Entretanto, imagina-se que a interação entre as placas não tão seja grande, se comparada com a interação com o potencial, e que, para regiões não tão próximas a  $z = 0$  a dinâmica seja quase periódica (como será visto na *figura 5.4*).

Uma vez postos estes argumentos, buscar-se-á encontrar uma frequência intrínseca do problema, como se cada placa não fosse perturbada pela outra e como se o potencial fosse parabólico. Espera-se que, com essa frequência, seja possível obter mapas de Poincaré com qualidade.

Para tal, constrói-se o lagrangeano de um elétron sob a ação, apenas, do potencial ponderomotriz. Define-se o lagrangeano como:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = T - U. \quad (5.4)^{27}$$

Quando o sistema for conservativo (e o sistema é conservativo), pode-se expressar:

---

<sup>27</sup> Onde T é energia cinética da partícula e U é a energia potencial sobre a partícula j.

$$T = T(\dot{q}_j, t). \quad (5.5)$$

$$U = U(q_j, t). \quad (5.6)$$

Assim:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = T(\dot{q}_j, t) - U(q_j, t). \quad (5.7)$$

Identifica-se, para os fins deste trabalho, U como sendo o potencial ponderomotriz, ou seja:

$$U(q_j, t) = \Phi_p(z) = -\frac{q^2}{\gamma mc^2} \hat{a}_o a_{DGCM}' \cos\{k_p z_j\}. \quad (5.8)$$

O lagrangeano, portanto, fica:

$$L(z_j, \dot{z}_j, t) = \frac{m\dot{z}_j^2}{2} + \frac{q^2}{\gamma mc^2} \hat{a}_o a_{DGCM}' \cos\{k_p z_j\}. \quad (5.9)$$

Através do lagrangeano é possível calcular as equações de movimento da partícula.

Para isto, recorre-se a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L(z_j, \dot{z}_j, t)}{\partial z_j} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(z_j, \dot{z}_j, t)}{\partial \dot{z}_j} \right] = 0. \quad (5.10)$$

De modo que:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \left\{ \frac{q^2}{\gamma mc^2} \hat{a}_o a_{DGCM}' \cos\{k_p z_j\} \right\} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{z}_j} \left\{ \frac{m\dot{z}_j^2}{2} \right\} \right] = 0, \quad (5.11)$$

$$\frac{q^2}{\gamma mc^2} \hat{a}_o a_{DGCM}' \frac{\partial}{\partial z_j} \{ \cos\{k_p z_j\} \} - \frac{d}{dt} [m\dot{z}_j] = 0, \quad (5.12)$$

$$-\frac{q^2}{\gamma mc^2} k_p \hat{a}_o a_{DGCM}' \sin\{k_p z_j\} - m\ddot{z}_j = 0. \quad (5.13)$$

$$\ddot{z}_j = -\frac{k_p}{\gamma} \left(\frac{q}{mc}\right)^2 \hat{a}_o a_{DGCM}' \sin\{k_p z_j\}. \quad (5.14)$$

Lembrando, do capítulo anterior, que:

$$p_a = \frac{1}{\gamma} \frac{q^2 n}{m^2 c^2} \hat{a}_o a_{DGCM}' k_p.$$

Tem-se que:

$$\ddot{z}_j = -\frac{p_a}{n} \sin\{k_p z_j\}. \quad (5.15)$$

Esta é a equação de movimento para um elétron  $j$  sob a influência do potencial ponderomotriz. Como são  $n$  elétrons sobre cada placa, multiplica-se o resultado obtido em (5.15) por  $n$ , obtendo, desta maneira, o movimento da placa  $j$  sem levar em conta a presença da interação com as outras placas:

$$\ddot{z}_j = -p_a \sin\{k_p z_j\}. \quad (5.16)$$

Como se pode notar, esta expressão não tem uma frequência temporal bem definida. Como foi mencionado anteriormente, pode-se forçar a existência de uma frequência temporal bem definida fazendo com que as placas sejam confinadas, fortemente (*deeply trapped*), no fundo do poço do potencial ponderomotriz (e assumir que mesmo que as placas não estejam fortemente presas no fundo do poço, elas serão quase periódicas). Assim, recupera-se a equação de um oscilador harmônico simples (OHS), uma vez que a força *produzida* pelo potencial ponderomotriz é proporcional à coordenada  $z$ .

Para recuperar a equação de um OHS, parte-se, do seguinte limite<sup>28</sup>:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = 1. \quad (5.17)$$

---

<sup>28</sup> Limite, este, obtido conforme o teorema do confronto.

Obtendo-se:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sin\{k_p z_j\} = k_p z_j. \quad (5.18)$$

De forma que se substitui  $\sin\{k_p z_j\}$  por  $k_p z_j$  na expressão da equação de movimento, encontrando:

$$\ddot{z}_j = -(p_a k_p) z_j. \quad (5.19)$$

Esta é a equação de movimento de uma placa movendo-se no fundo do poço do potencial ponderomotriz. A frequência natural de oscilação é obtida por comparação. Sabe-se que a equação de um OHS unidimensional, na direção do eixo-z, é dada por:

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z. \quad (5.20)$$

Identificando os termos, conclui-se que:

$$\omega_0^2 = p_a k_p. \quad (5.21)$$

Ou seja:

$$\omega_0 = \sqrt{p_a k_p}. \quad (5.22)$$

Esta é a frequência natural para uma placa que se move no fundo do poço ponderomotriz, sem levar em conta a interação com as outras placas.

Como a interação com as outras placas e a não linearidade da força produzida pelo potencial ponderomotriz farão apenas uma perturbação no período de oscilação da placa (tornando-a *quase* periódica), assume-se que o período do mapa de Poincaré esteja associado a esta frequência  $\omega_0$ . Portanto, o período de plotagem é [conforme a expressão (5.3)]:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{p_a k_p}}. \quad (5.23)$$

Uma vez encontrado o período de plotagem, é possível buscar regiões de interesse, variando os parâmetros.

## 5.2 – Regiões de interesse

O aumento na amplitude das placas dentro do potencial ponderomotriz apenas implica que a trajetória executada por cada placa passe a ser não periódica. As *órbitas* das placas seriam, portanto, quase periódicas. Pode-se observar esse comportamento através do mapa de Poincaré:

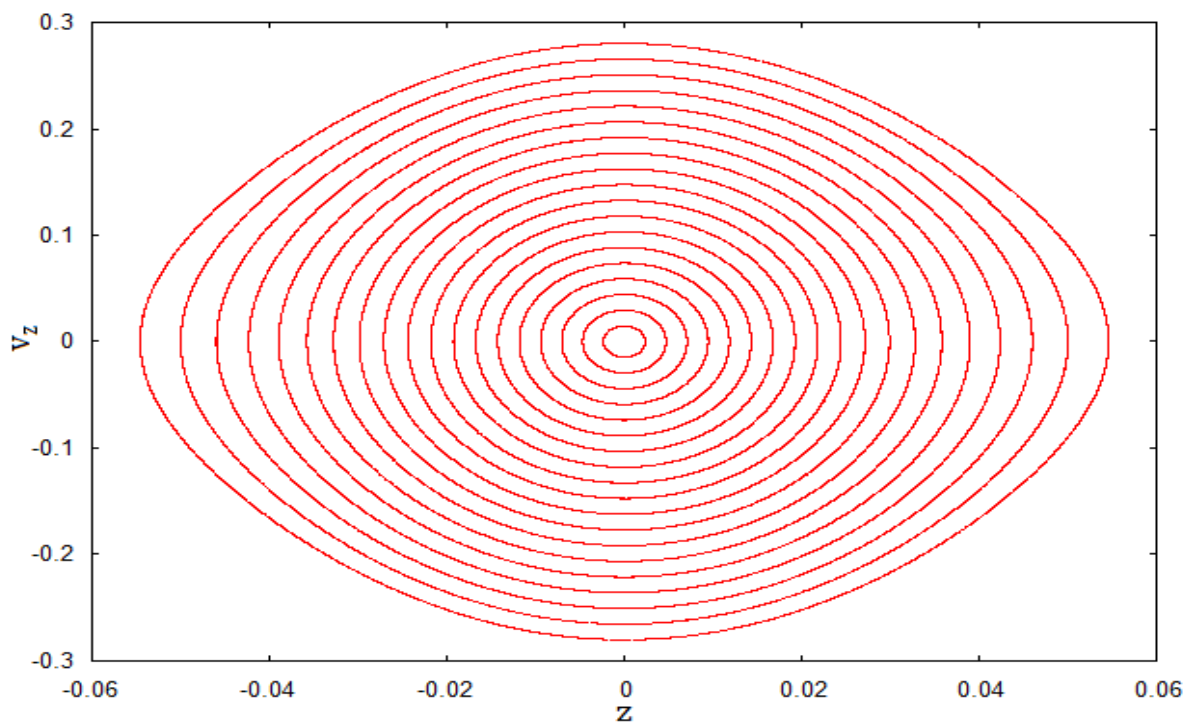


Figura 5.4: Mapa de Poincaré de 20 placas com energias iniciais distintas, sem interação entre as placas, para:

$$k_p = 4\pi^2, \omega = 2\pi, p_a = 1.$$

Se possível, seria interessante encontrar mapas de Poincaré que apresentem estados caóticos. Segundo Goto (2006), é possível produzir ilhas de ressonância e, posteriormente, caos através da introdução de uma perturbação.



Mas o que são as ilhas de ressonância? As ilhas sempre surgem em conjuntos. Supondo que, hipoteticamente, existam duas ilhas (do mesmo conjunto) em um mapa de Poincaré: se a condição inicial for o ponto central de uma das ilhas, a trajetória no mapa de Poincaré será este ponto e um outro, que é o ponto central da outra ilha. Se for um conjunto com quatro ilhas (e como condição inicial o centro de uma delas), o mapa de Poincaré possuirá quatro pontos e etc. O surgimento das ilhas indica que existem pontos que possuem, neste caso, ressonância com o período de plotagem do mapa de Poincaré do tipo 1:2, 1:4... 1:n, onde n representa o número de ilhas de um conjunto de ilhas. As ilhas são trajetórias fechadas (ou seja, quase periódicas) que se formam em volta dos pontos com ressonância.

Sugere-se fazer uma perturbação no potencial ponderomotriz. Tal alteração faz com que a força produzida pelo potencial ponderomotriz sobre uma placa  $i$  ganhe uma dependência temporal, assumindo a seguinte forma:

$$F_{zi} = -m p_a \sin[k_p \{z_i + F(t)\}].$$

Onde a perturbação  $F$  é:

$$F(t) = \varepsilon \sin(\omega t). \quad (5.24)^{29}$$

Portanto:

$$F_z = -m p_a \sin[k_p \{z + \varepsilon \sin(\omega t)\}]. \quad (5.25)$$

Onde a frequência  $\omega$  escolhida é  $\omega_0$ . A escolha por  $\omega_0$  é justificada no trabalho de Rizzato (1990). Segundo ele, esta frequência maximiza a instabilidade no FEL.

---

<sup>29</sup> Com  $\varepsilon$  muito menor que o limite espacial do poço ponderomotriz original (sem a perturbação).

Constroem-se, assim, mapas de Poincaré para 40 energias iniciais distintas (e com mil pontos para cada partícula), variando o parâmetro perturbativo  $\varepsilon$  (lembrando que  $\varepsilon = 0$  já foi plotado [figura 5.4]):

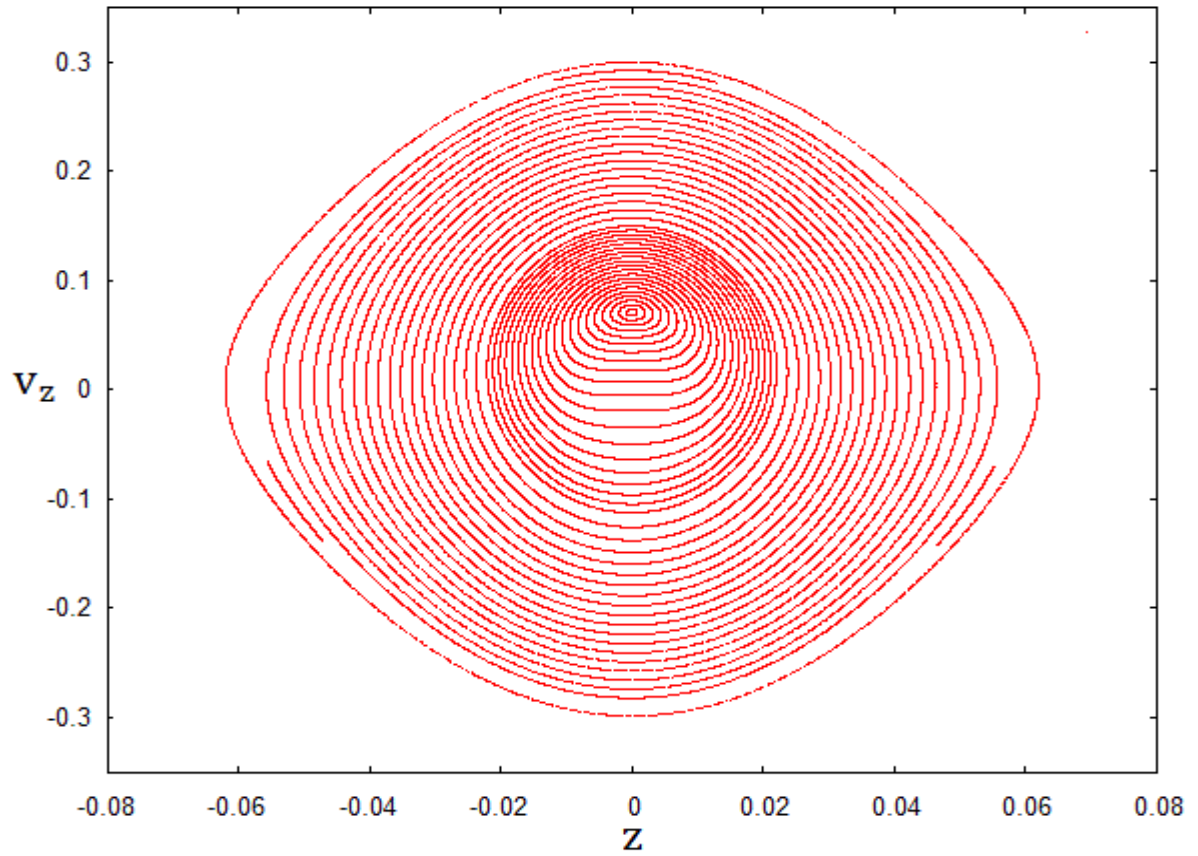


Figura 5.5: Mapa de Poincaré com  $\varepsilon = 0.0003$ ,  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ .

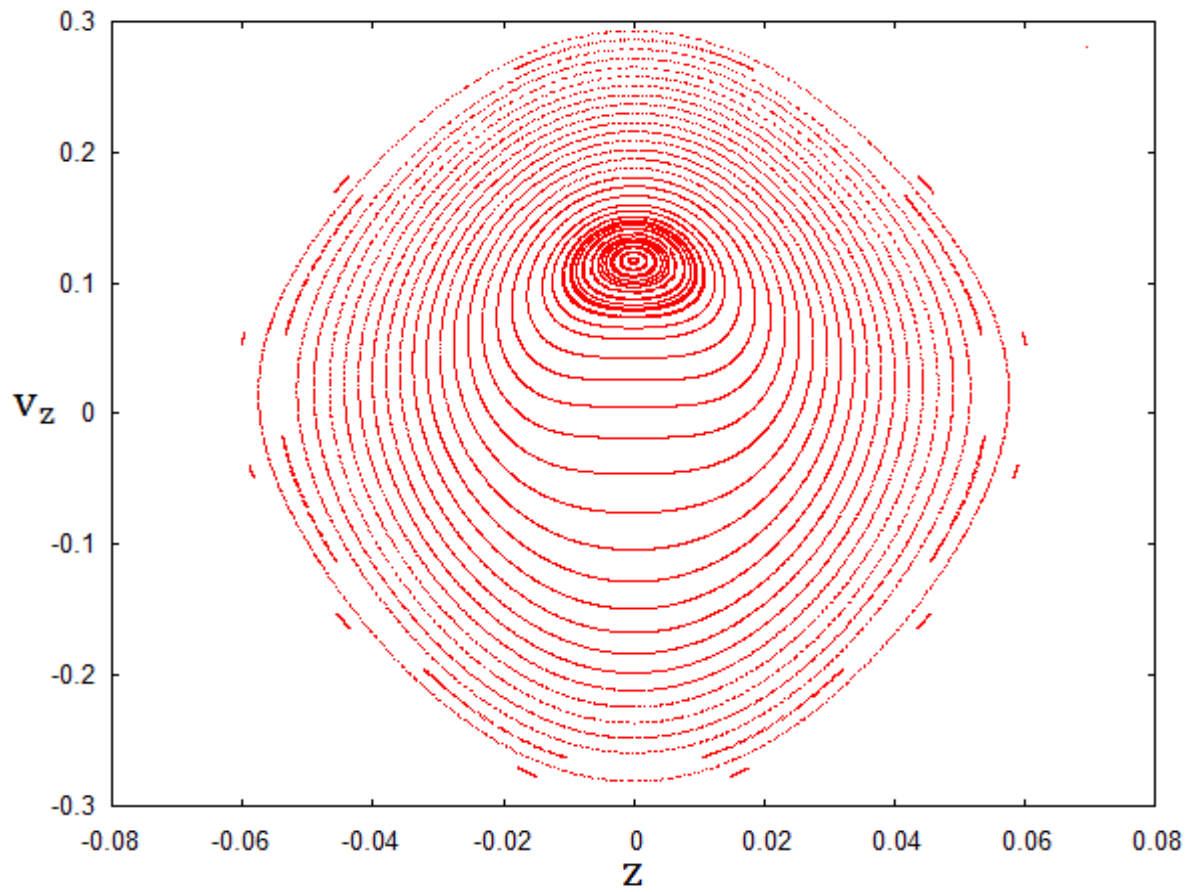


Figura 5.6: Mapa de Poincaré com  $\varepsilon = 0.0015$ ,  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ .

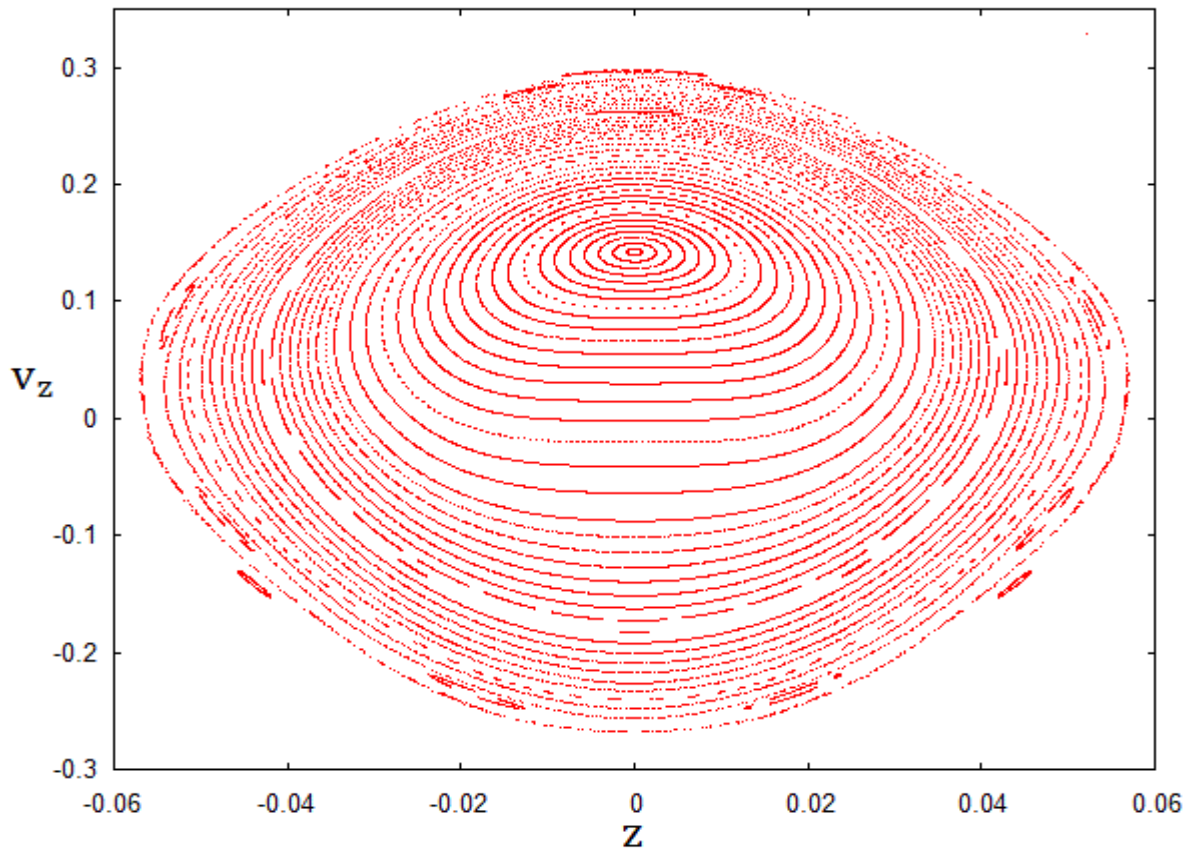


Figura 5.7: Mapa de Poincaré com  $\varepsilon = 0.003$ ,  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ .

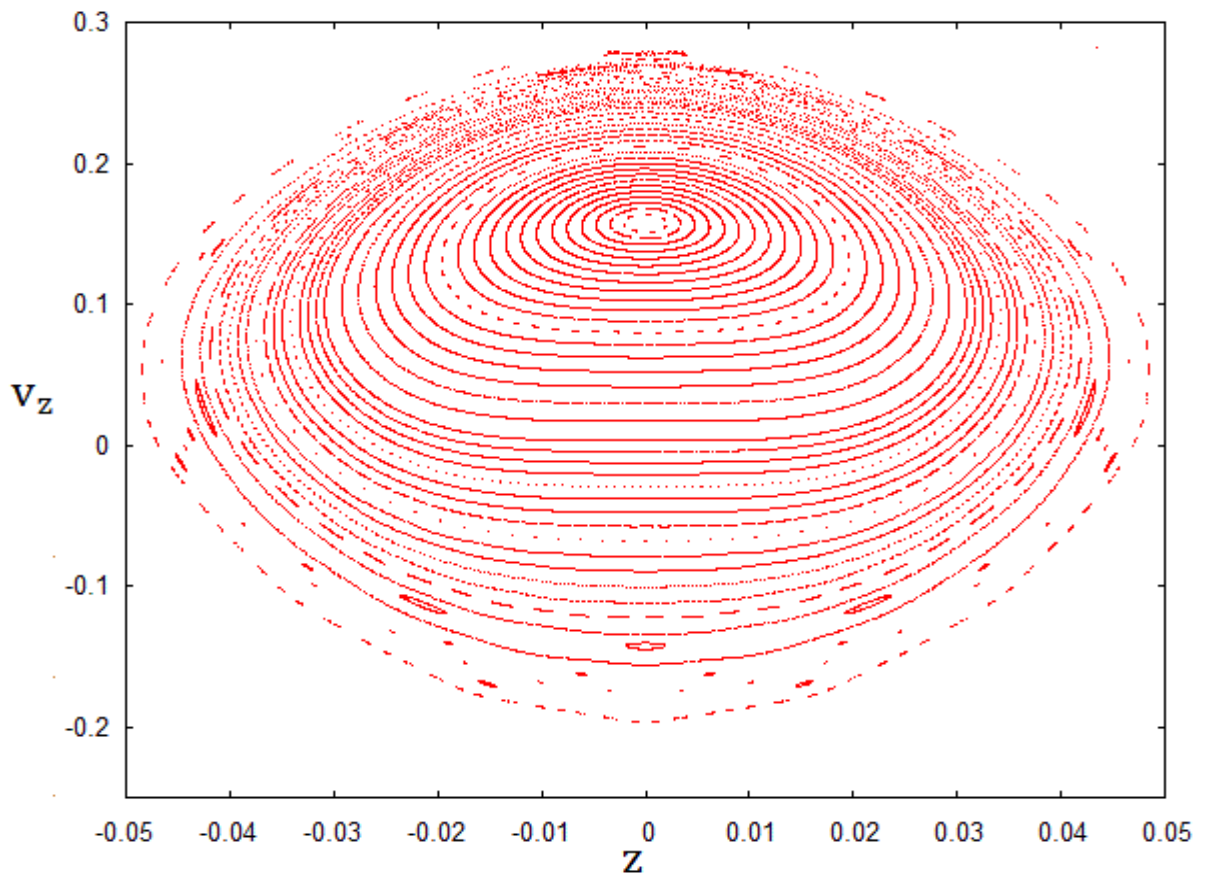


Figura 5.8: Mapa de Poincaré com  $\varepsilon = 0.0045$ ,  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ .

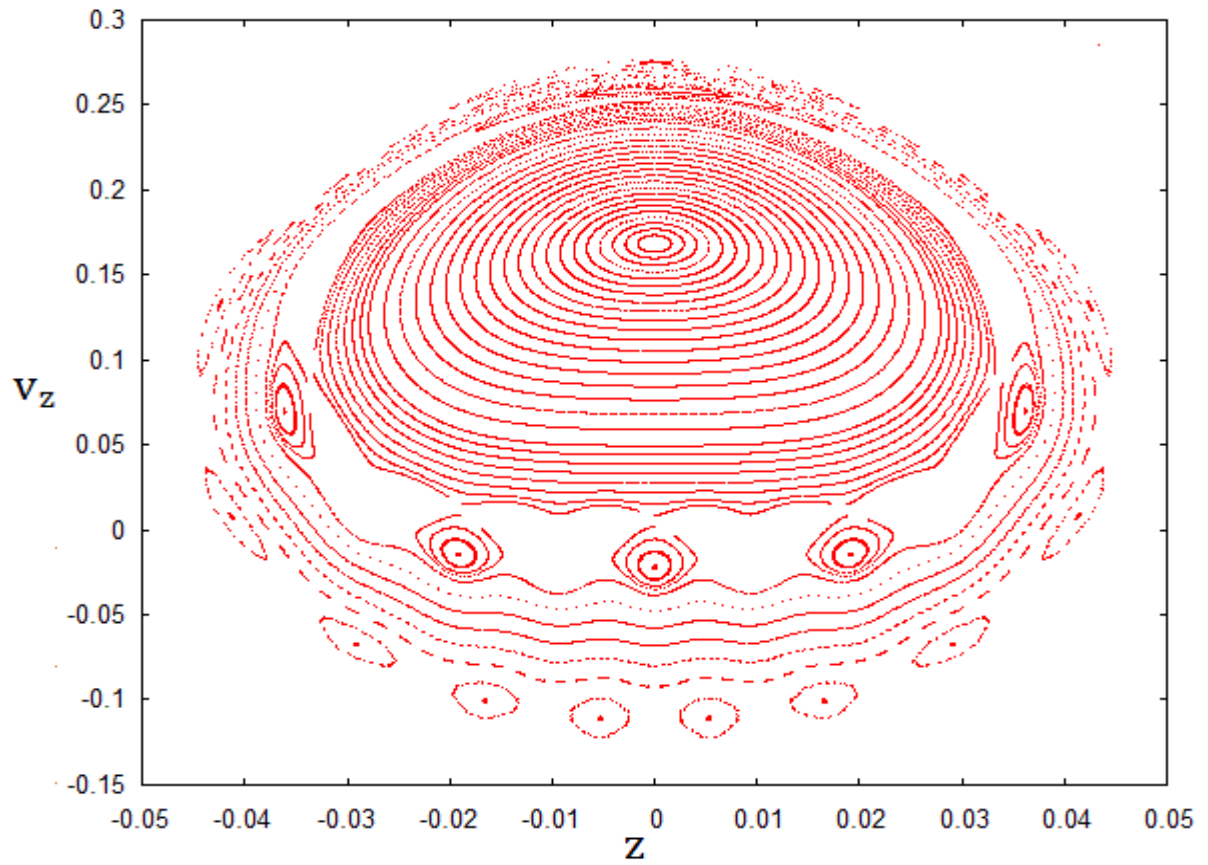


Figura 5.9: Mapa de Poincaré com  $\varepsilon = 0.006$ ,  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ .

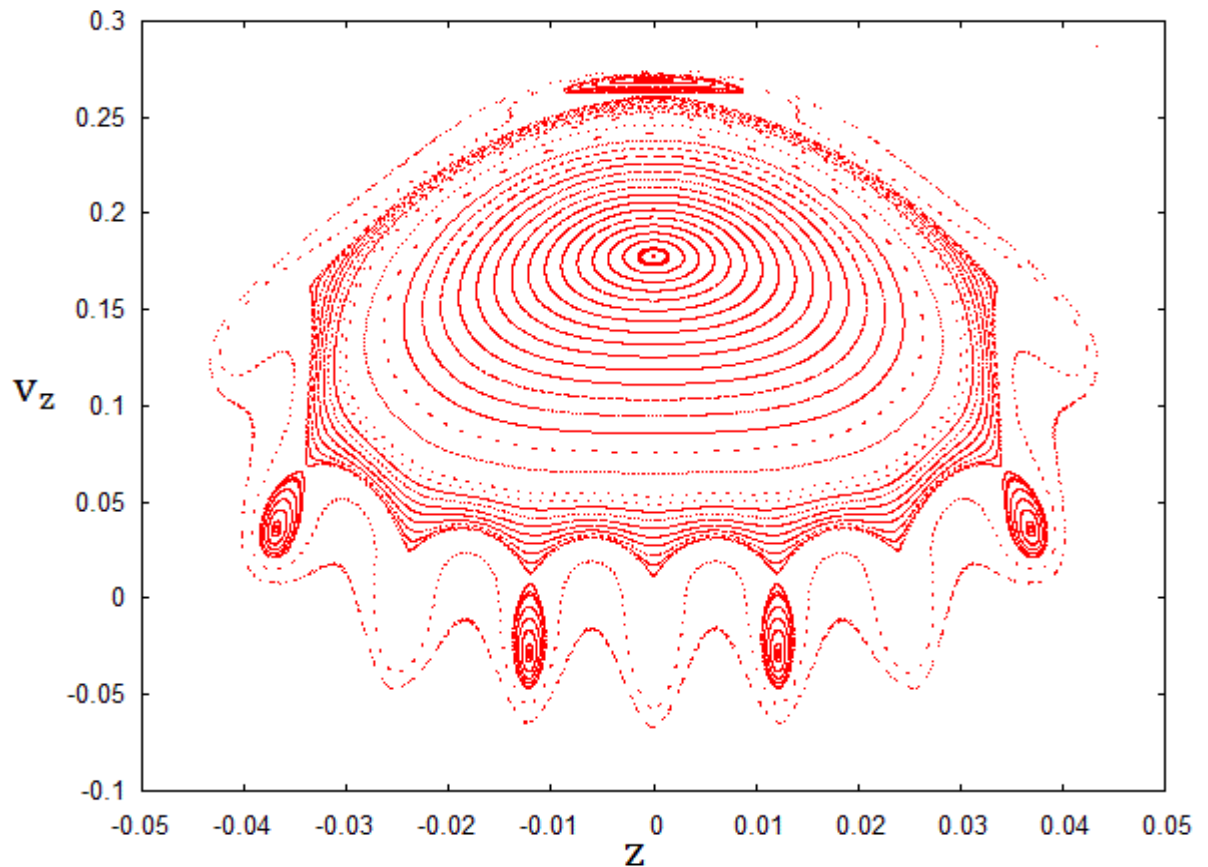


Figura 5.10: Mapa de Poincaré com  $\varepsilon = 0.0075$ ,  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ .

Há uma ressalva para estas figuras: Excluem-se dos mapas as condições iniciais quase *extremas* (entendendo-se como quase extremas as condições iniciais que deixam a placa na iminência de sair do poço).

É importante notar que, em todos os mapas, a introdução do termo perturbativo propiciou o surgimento de ilhas de ressonância. Para pequenos valores do parâmetro perturbativo (como visto nas *figuras 5.5, 5.6 e 5.7*), surgiram ilhas menos pronunciadas e mais distantes do ponto fixo central. À medida que o parâmetro de perturbação aumenta o ponto fixo central é deslocado para cima (ou seja, o valor de  $v_z$  do ponto fixo central aumenta).

As *figuras 5.9 e 5.10* merecem um pouco mais de atenção. A *figura 5.9* apresentou vários conjuntos de ilhas, enquanto na *figura 5.10*, há formação de pontos hiperbólicos.

Não foi possível encontrar regiões significativamente grandes com caos. Sem que essa região seja encontrada, busca-se compreender o efeito das cargas variando a perturbação e a densidade de carga.

### 5.3 – Curva de perturbação máxima

Antes de analisar o efeito da carga sobre os mapas de Poincaré, faz-se uma curva entre dois parâmetros (o parâmetro  $\varepsilon$  e o parâmetro  $p_b$ ), maximizando o parâmetro de perturbação do poço.<sup>30</sup>

A curva auxiliará no entendimento desses parâmetros, para que se ajustem às limitações do trabalho, mais especificamente: esta curva possibilitará a visualização da perturbação máxima do parâmetro  $\varepsilon$  (e esta perturbação máxima terá o nome de  $\varepsilon_{crit}$ ) como função da densidade de carga [para uma distribuição inicial de equilíbrio].

---

<sup>30</sup> Lembrando que sempre se utiliza:  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ .

Para a construção da curva, a distribuição de equilíbrio foi utilizada como distribuição inicial de placas. Além disso, usou-se um tempo de integração de quinhentas vezes o período de uma partícula no fundo do poço ponderomotriz. A simulação foi composta por duzentas placas interagentes.

A posição e a velocidade de cada placa foram monitoradas ao longo do tempo de integração. Se a posição de uma das placas ultrapassar o limite do poço, positivamente ou negativamente, diz-se que a placa foi ejetada do poço e que o parâmetro  $\varepsilon$  superou o valor de  $\varepsilon_{\text{crit}}$ . Diminui-se, então, gradualmente o parâmetro  $\varepsilon$ , até que nenhuma placa seja ejetada, encontrando, enfim,  $\varepsilon_{\text{crit}}$ .

A figura a seguir representa a curva desejada:

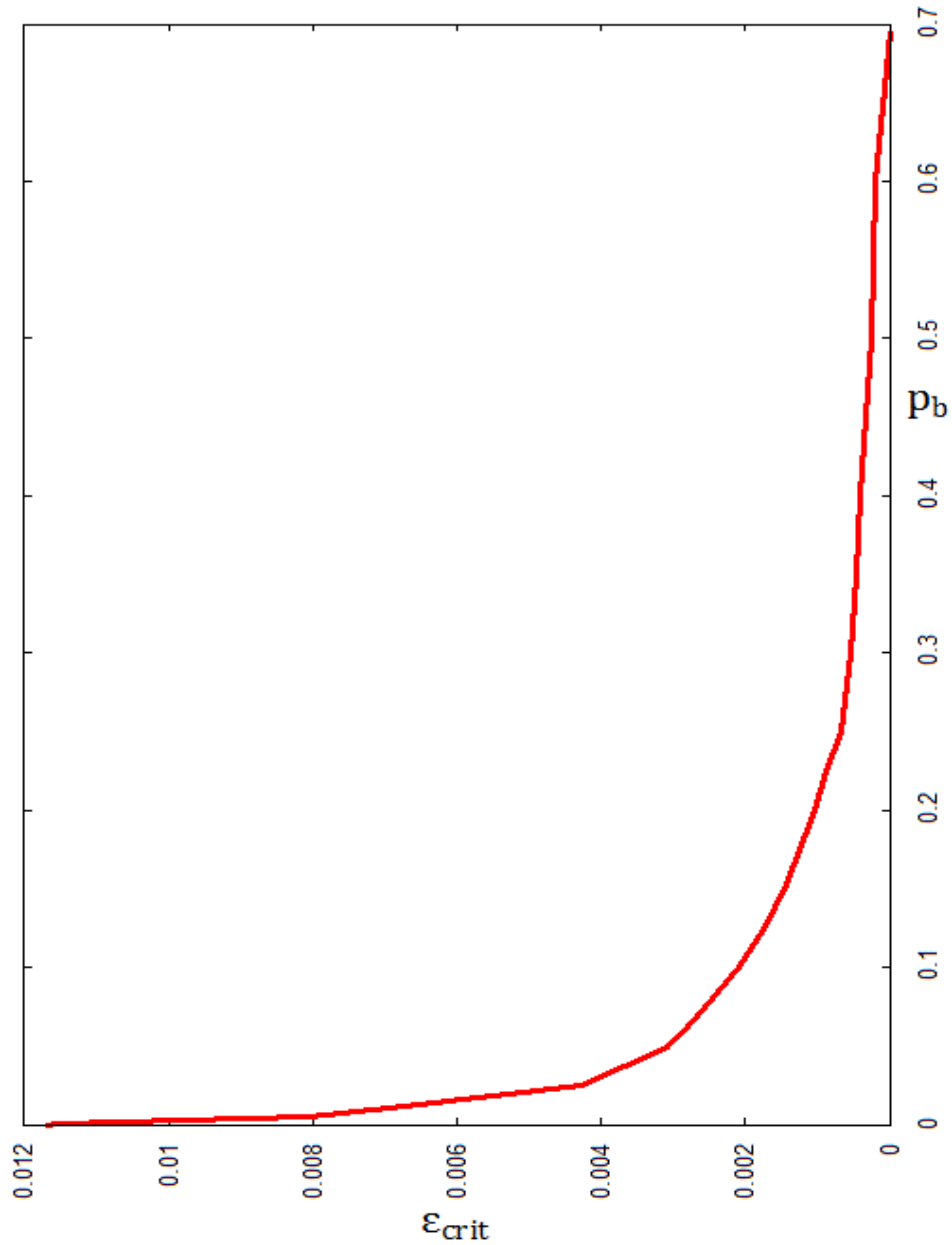


Figura 5.11: Curva de  $\varepsilon_{\text{crit}} \times p_b$  para uma distribuição inicial de equilíbrio.

É importante notar que à medida que o parâmetro  $\varepsilon$  cresce, o valor da densidade máxima diminui (de uma forma visualmente semelhante a uma exponencial).

Com essa curva pode-se estimar os valores máximos para o parâmetro  $p_b$  para os seguintes valores escolhidos de  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_1 = 0.002; p_{b\text{max}} \cong 0.1. \quad (5.26)$$

$$\varepsilon_2 = 0.006; p_{b\text{max}} \cong 0.01. \quad (5.27)$$



$$\varepsilon_3 = 0.0077; p_{b\max} \cong 0.005. \quad (5.28)$$

## 5.4 – Efeito de carga

Nesta seção será feita a análise do efeito de carga sobre o FEL, utilizando os valores de perturbação escolhidos no final da seção anterior ( $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$  definidos nas equações 5.26, 5.27 e 5.28). Para esta análise, utilizar-se-ão duzentas placas interagentes em cada simulação. O tempo de integração é mil vezes maior do que o período de uma placa próxima ao fundo do poço. Ou seja, o mapa de Poincaré de cada partícula é composto por mil pontos.

A distribuição inicial de placas, para todas as simulações, é a distribuição de equilíbrio. Além disso, será monitorado o movimento de vinte placas (chamadas de *placas de controle*), ao longo de todo o tempo de integração. A análise dos mapas de Poincaré será feita com base na dinâmica das placas de controle.

### 5.4.1 – Situação 1

Na *Situação 1*, o valor do parâmetro perturbativo é  $\varepsilon_1 = 0.002$ . Produzem-se mapas de Poincaré para dois diferentes valores de densidade de cargas ( $p_b = 0.05$  e  $p_b = 0.1$ ).

O mapa de Poincaré das placas de controle, sem levar em conta a interação entre as placas, para uma distribuição inicial de equilíbrio com  $p_b = 0.05$  pode ser visto na figura a seguir:

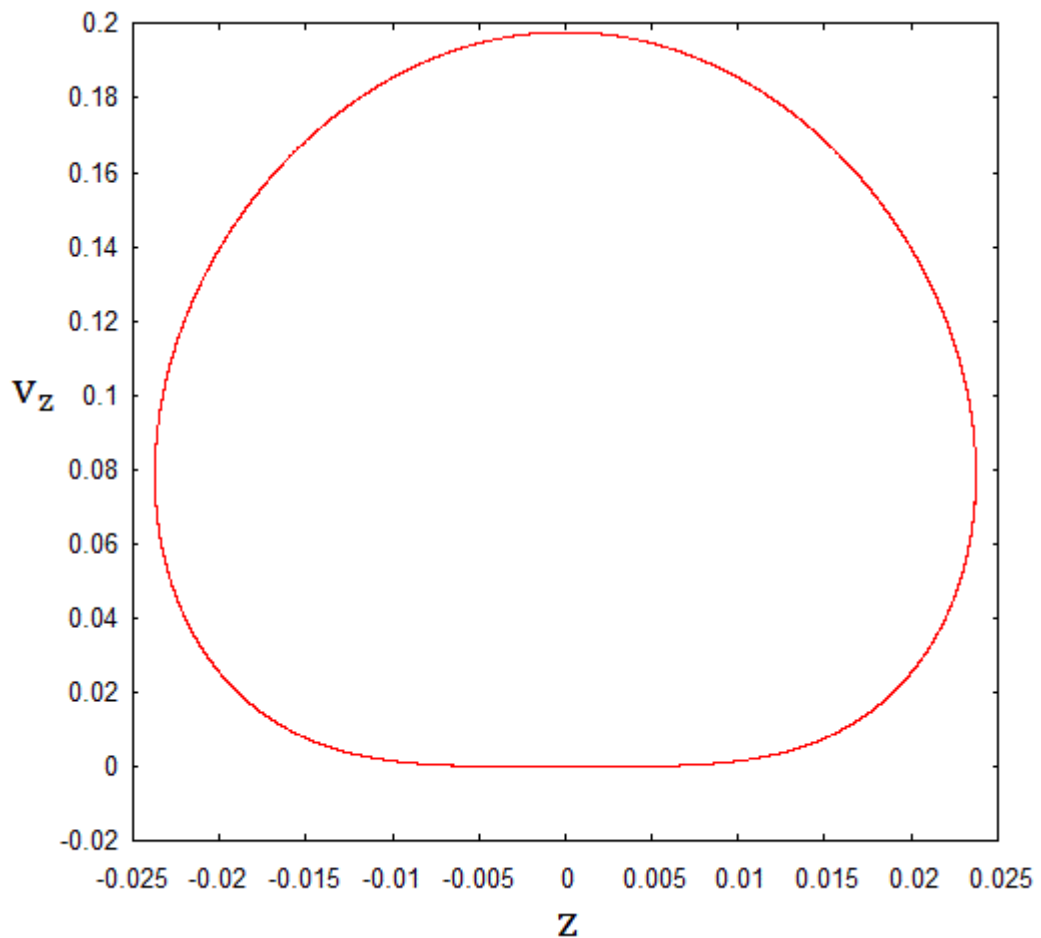


Figura 5.12: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$  e  $\varepsilon = 0.002$  para vinte placas.

Nota-se que na *figura 5.12* as trajetórias das placas de controle estão praticamente sobrepostas, o que significa que suas condições iniciais são muito próximas.

Estes mapas serão a referência para que se possa entender como a interação entre as placas afeta o sistema. Nos mapas a seguir, serão usadas as mesmas condições iniciais para as placas de controle, mas levando em conta a interação entre as placas:

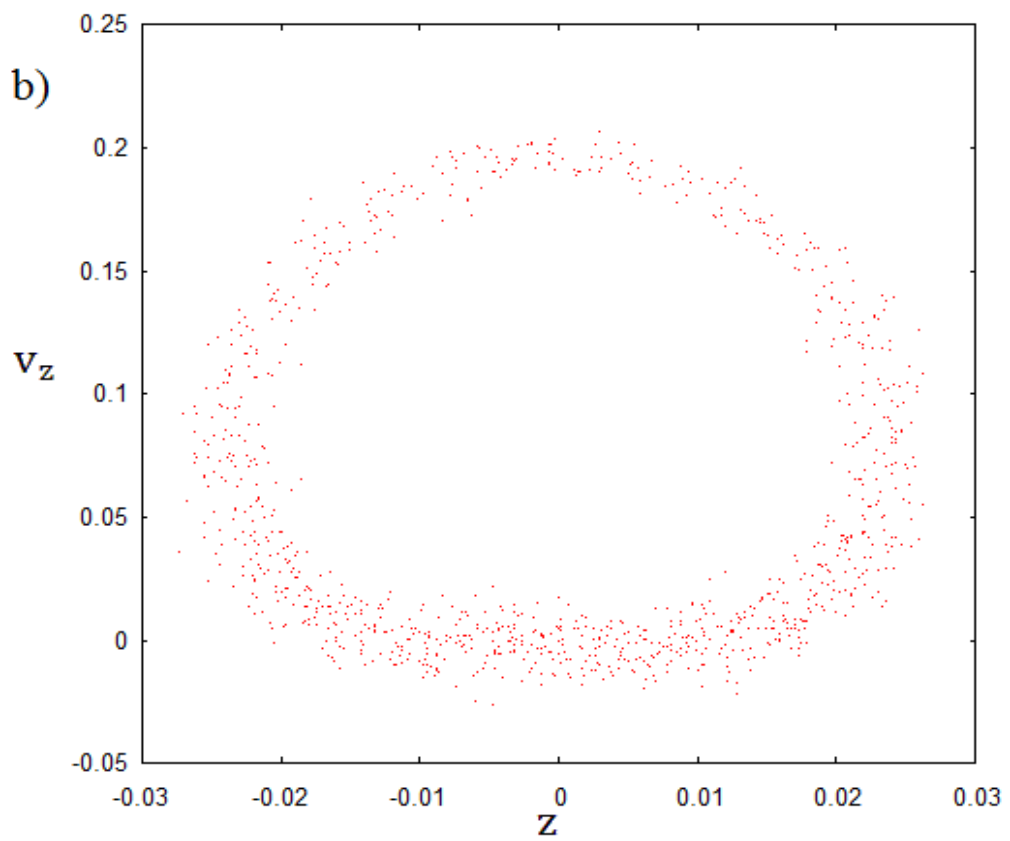
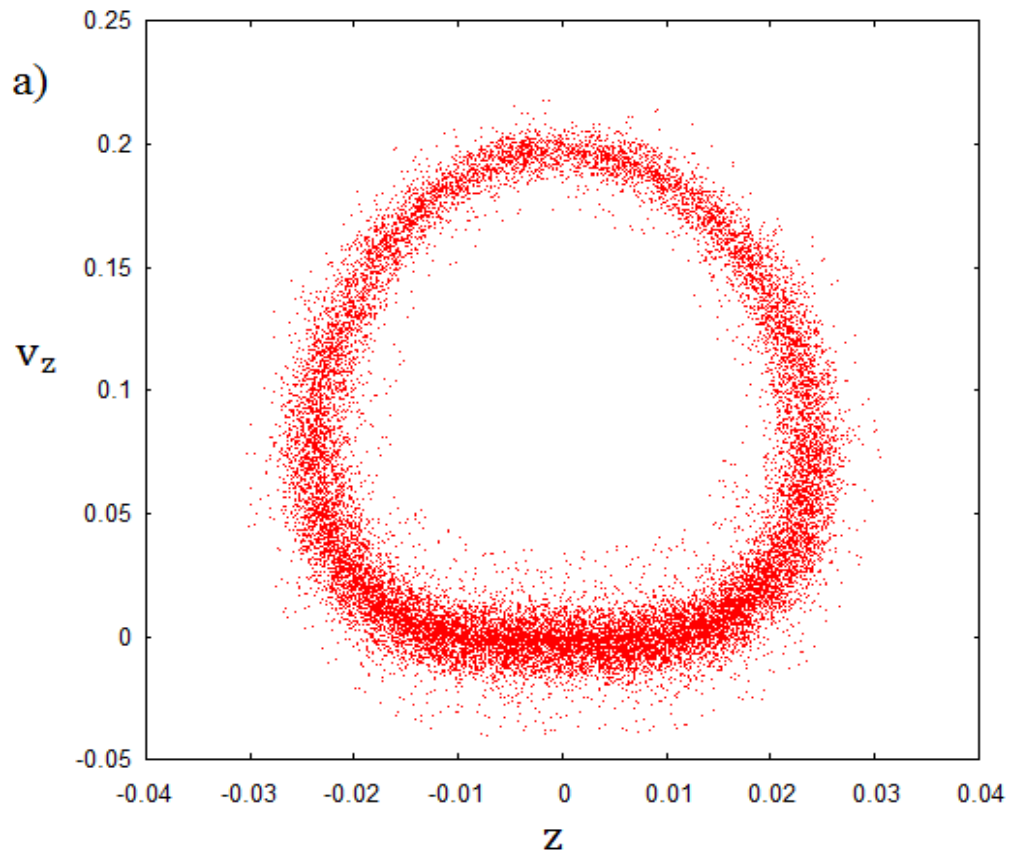


Figura 5.13: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ ,  $p_b = 0.05$  e  $\varepsilon = 0.002$  para: a) vinte placas; b) uma placa.

Observa-se que a introdução de carga fez com que o mapa de Poincaré saísse *borrado* (de uma forma não clara). A discussão sobre esse resultado será feita mais adiante.

Aumenta-se a densidade de carga. A seguir está o mapa de Poincaré das placas de controle, sem levar em conta a interação entre as placas (*mapa de referência*), para uma distribuição inicial de equilíbrio com  $p_b = 0.1$ :

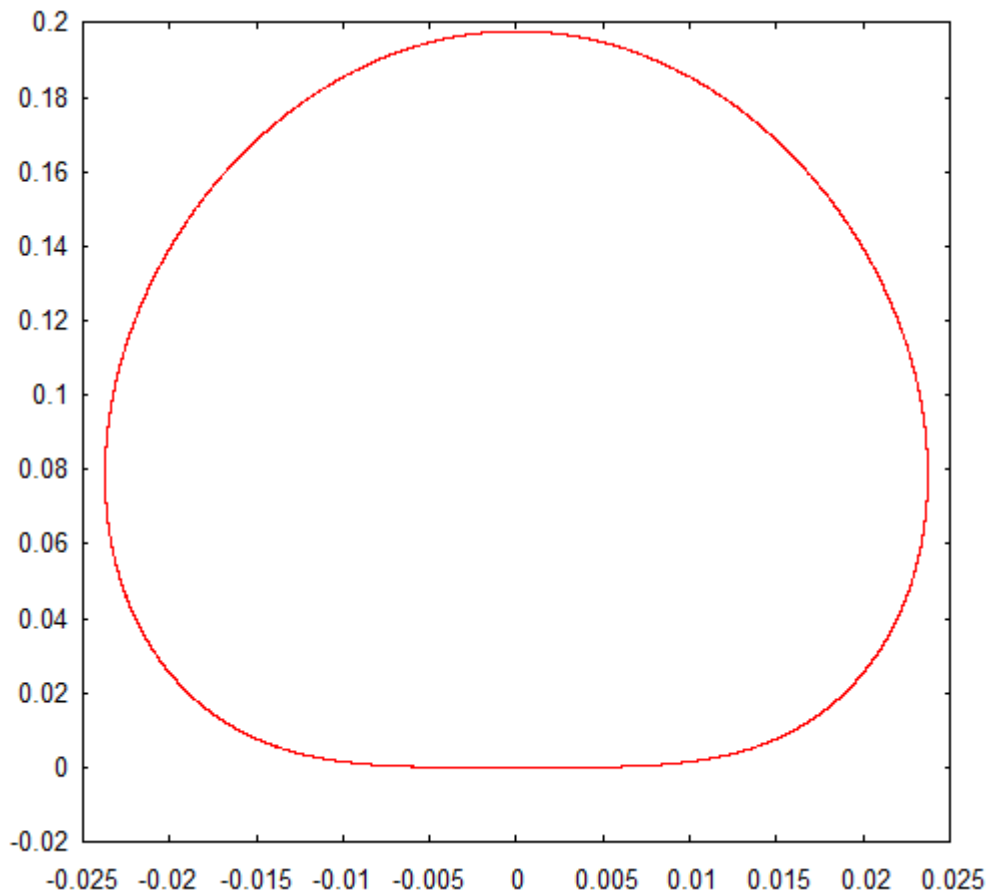


Figura 5.14: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$  e  $\varepsilon = 0.002$  para vinte placas.

Novamente, as condições iniciais das vinte placas são muito próximas, fazendo com que elas fiquem sobrepostas na *figura 5.14*. A seguir estão os mapas relativos à interação entre as placas:

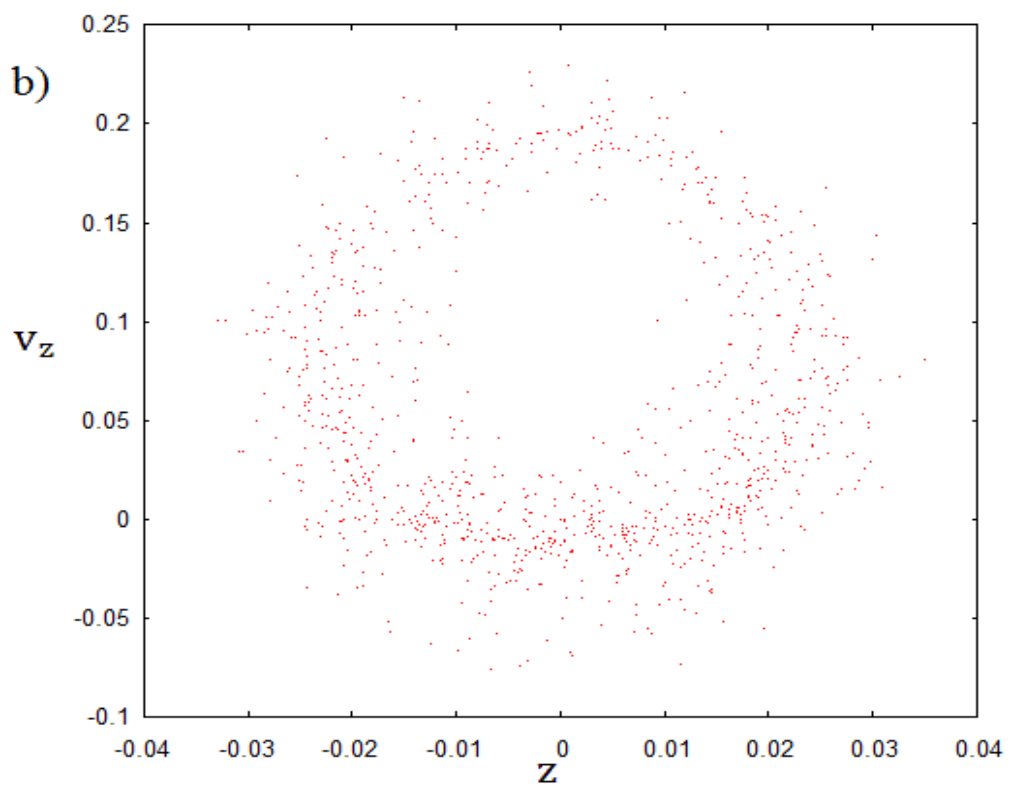
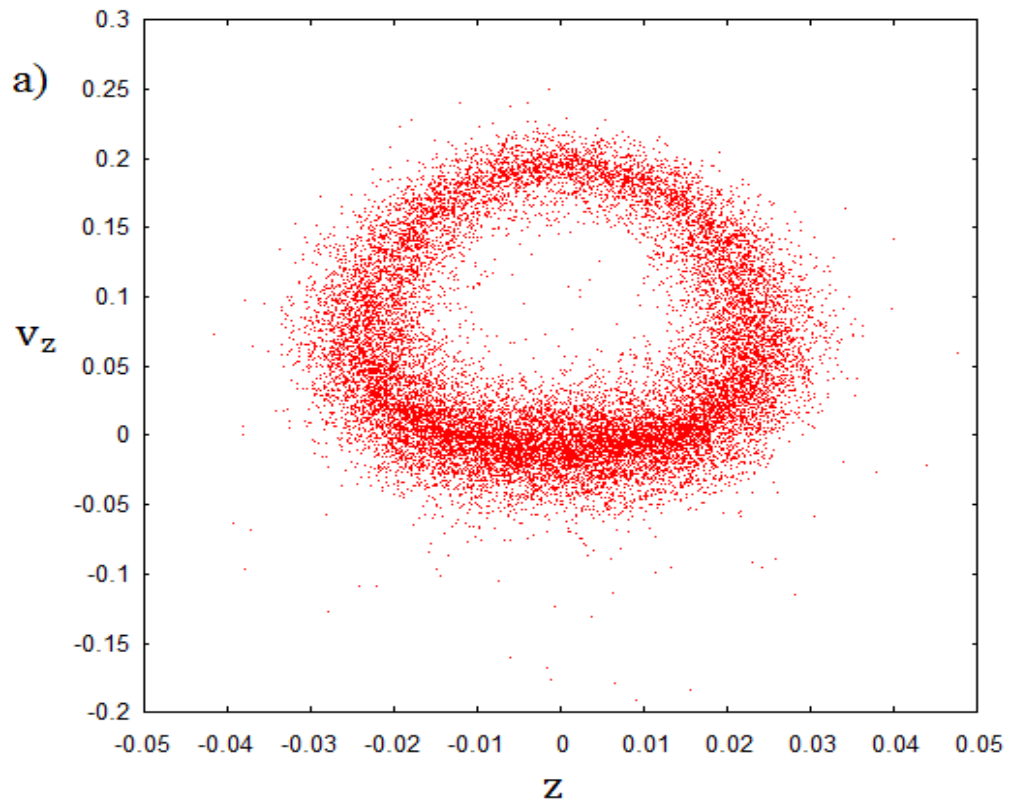


Figura 5.15: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ ,  $p_b = 0.1$  e  $\varepsilon = 0.002$  para: a) vinte placas; b) uma placa.

Comparando as *figuras 5.13 e 5.15*, nota-se que o aumento da densidade de carga, tornou o mapa ainda mais *borrado*.

#### 5.4.2 – Situação 2

Na *Situação 2*, o valor do parâmetro perturbativo é  $\varepsilon_2 = 0.006$ . Produzem-se mapas de Poincaré para dois diferentes valores de densidade de cargas ( $p_b = 0.005$  e  $p_b = 0.01$ ).

O mapa de referência para uma distribuição inicial de equilíbrio com  $p_b = 0.005$  pode ser visto na figura a seguir:

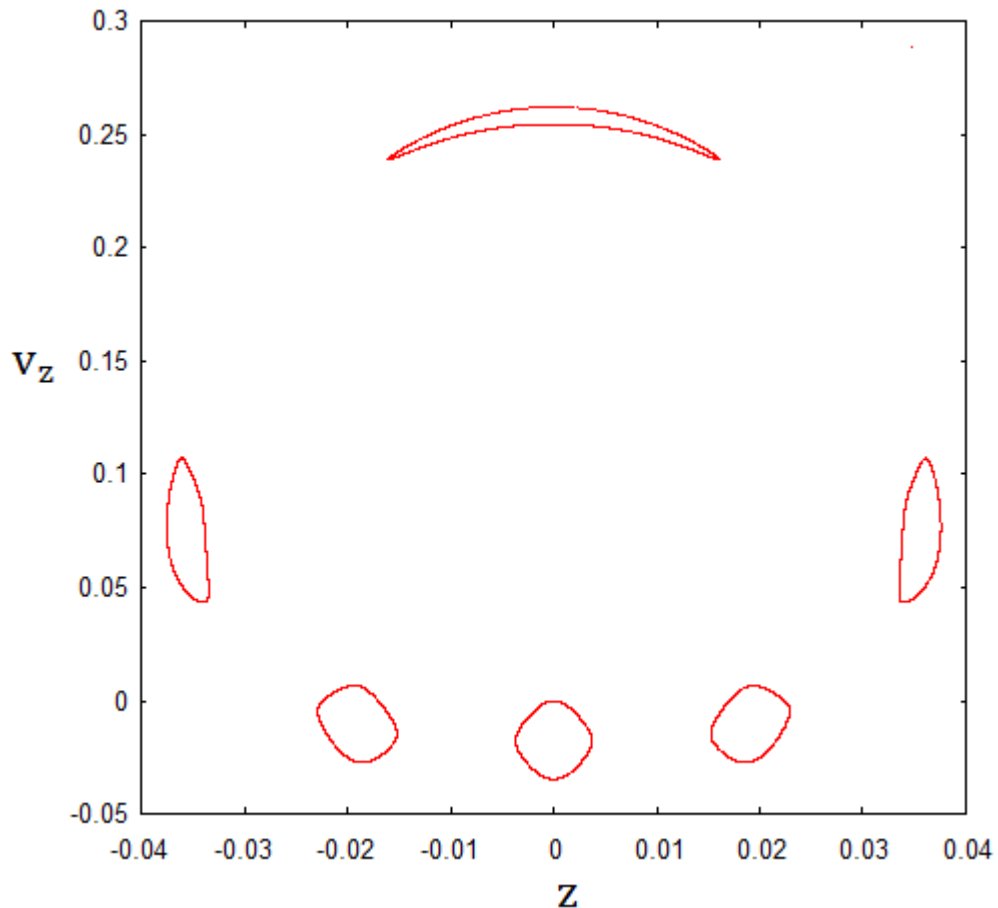


Figura 5.16: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$  e  $\varepsilon = 0.006$  para vinte placas.

Observa-se na *figura 5.16* que as trajetórias das placas, no mapa de Poincaré, ficaram sobrepostas, evidenciando a proximidade das suas condições iniciais.

Fazendo com que as placas interajam, obtêm-se os seguintes mapas:

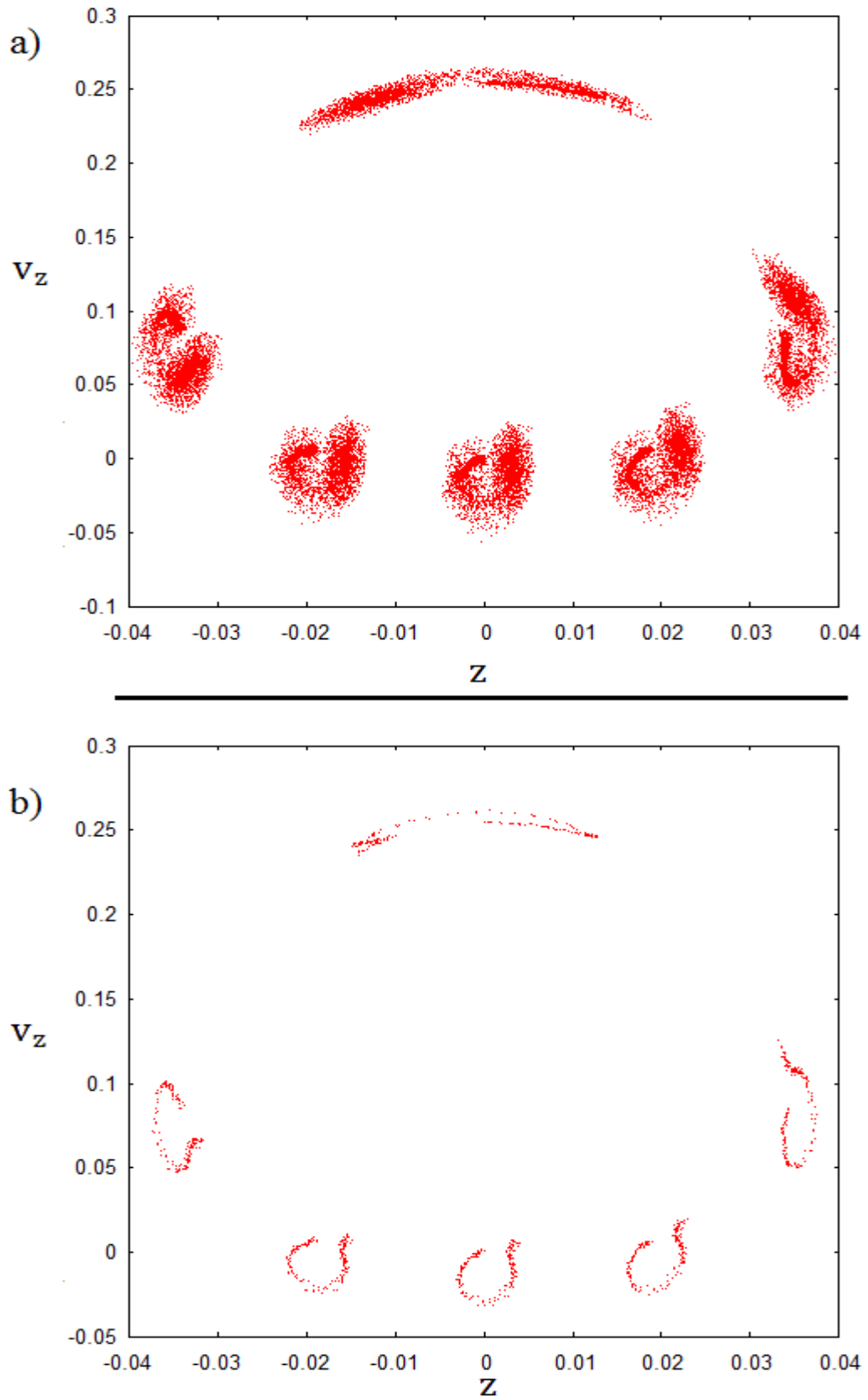


Figura 5.17: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ ,  $p_b = 0.005$  e  $\varepsilon = 0.006$  para: a) vinte placas; b) uma placa.

A introdução da interação novamente alterou o mapa de Poincaré, tornando-o *borrado*.

Aumentando a densidade de carga para  $p_b = 0.01$ , obtém-se o seguinte mapa de referência:

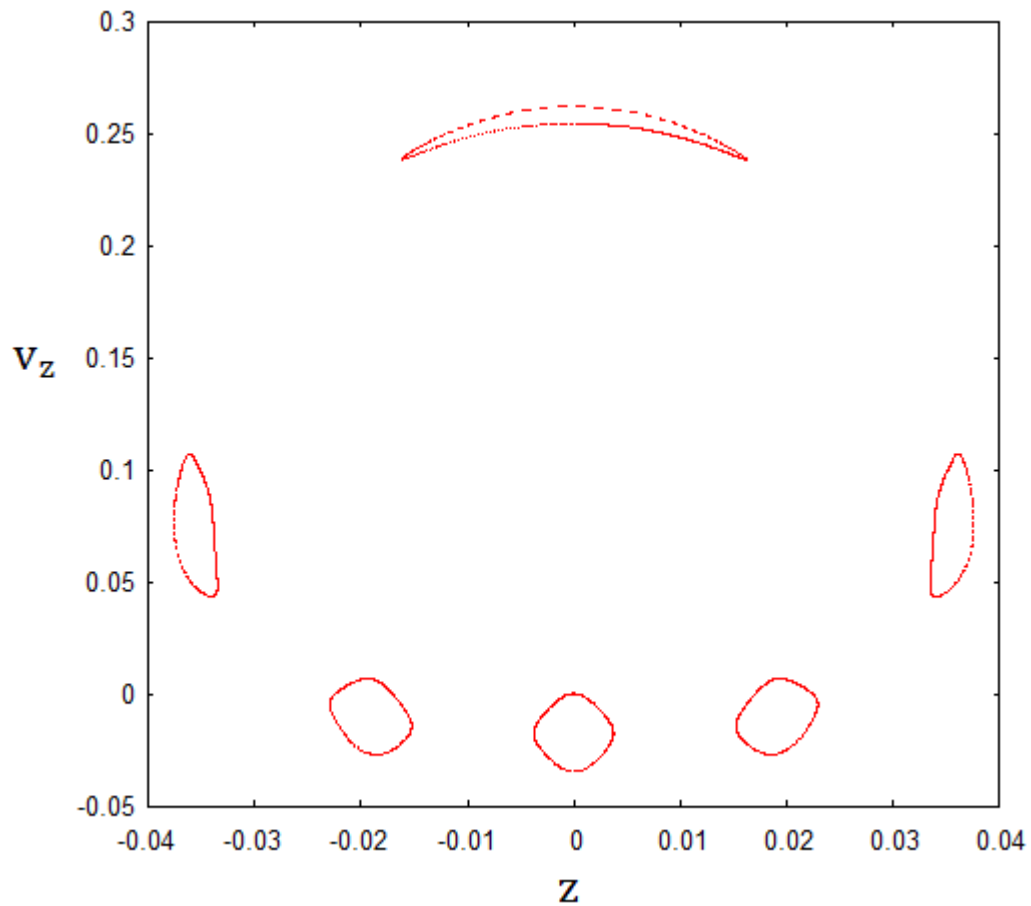


Figura 5.18: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$  e  $\varepsilon = 0.006$  para vinte placas.

As condições iniciais continuam muito próximas. Fazendo com que as placas interajam, obtiveram-se os seguintes mapas:



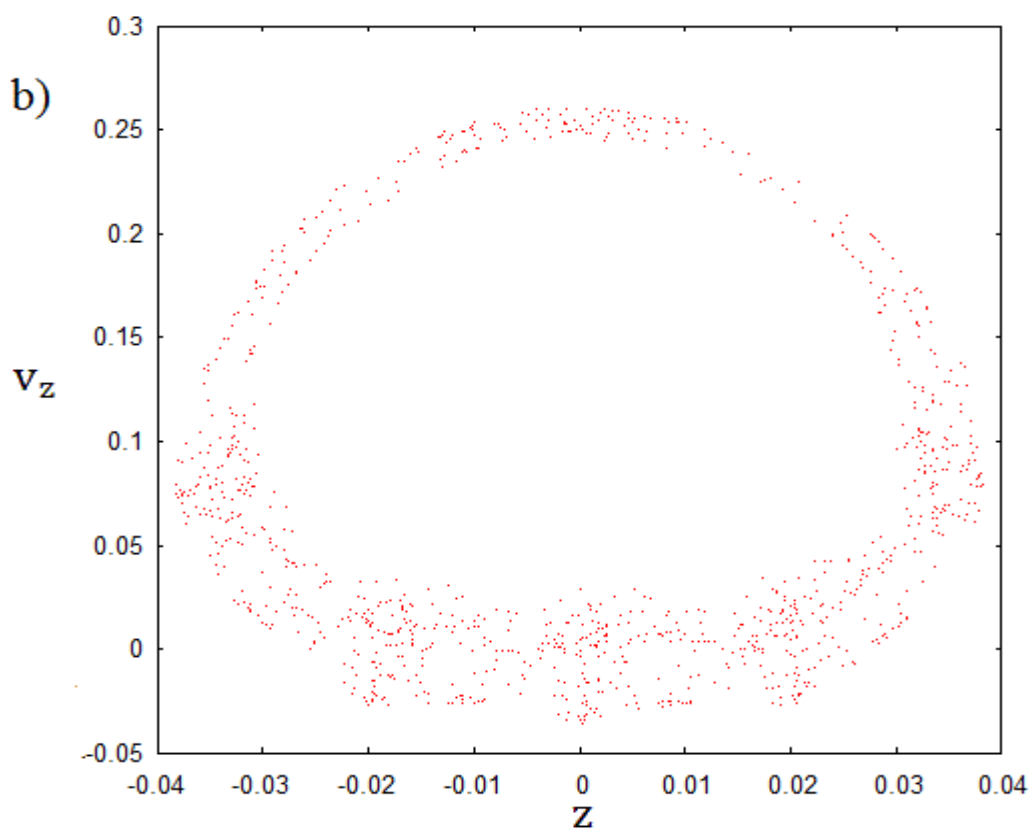
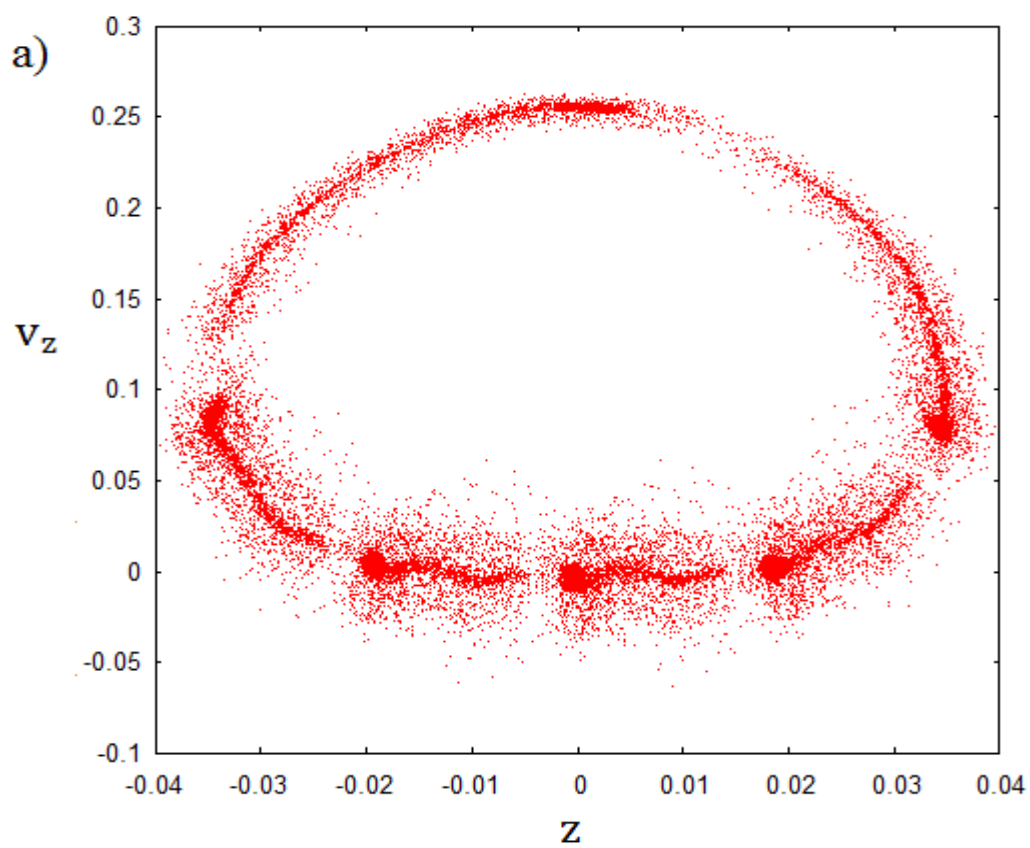


Figura 5.19: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ ,  $p_b = 0.01$  e  $\varepsilon = 0.006$  para: a) vinte placas; b) uma placa.

Em relação à *figura 5.17*, a *figura 5.19*, com mais carga, ficou mais *borrada*, menos clara.

### 5.4.3 – Situação 3

Na *Situação 3*, o valor do parâmetro perturbativo é  $\varepsilon_3 = 0.0077$ . Produzem-se mapas de Poincaré para dois diferentes valores de densidade de cargas ( $p_b = 0.0025$  e  $p_b = 0.005$ ).

O mapa de referência para uma distribuição inicial de equilíbrio com  $p_b = 0.0025$  pode ser visto na figura a seguir:

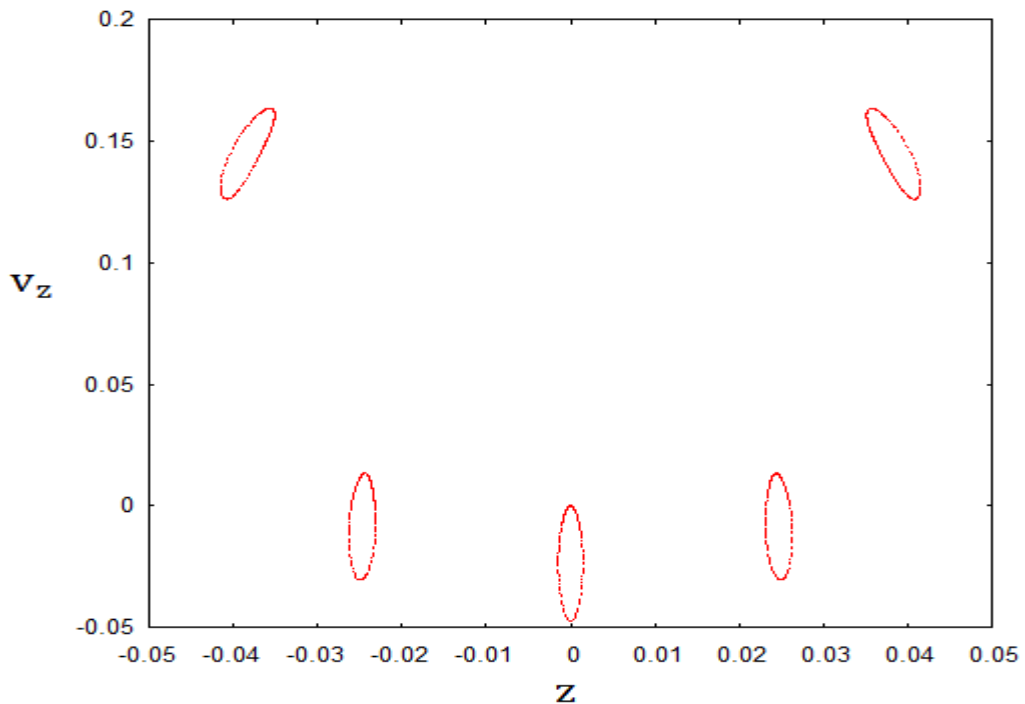


Figura 5.20: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$  e  $\varepsilon = 0.0077$  para vinte placas.

Como sempre, as placas de controle têm condições iniciais muito próximas. Com a interação entre as placas, obtêm-se os seguintes mapas:

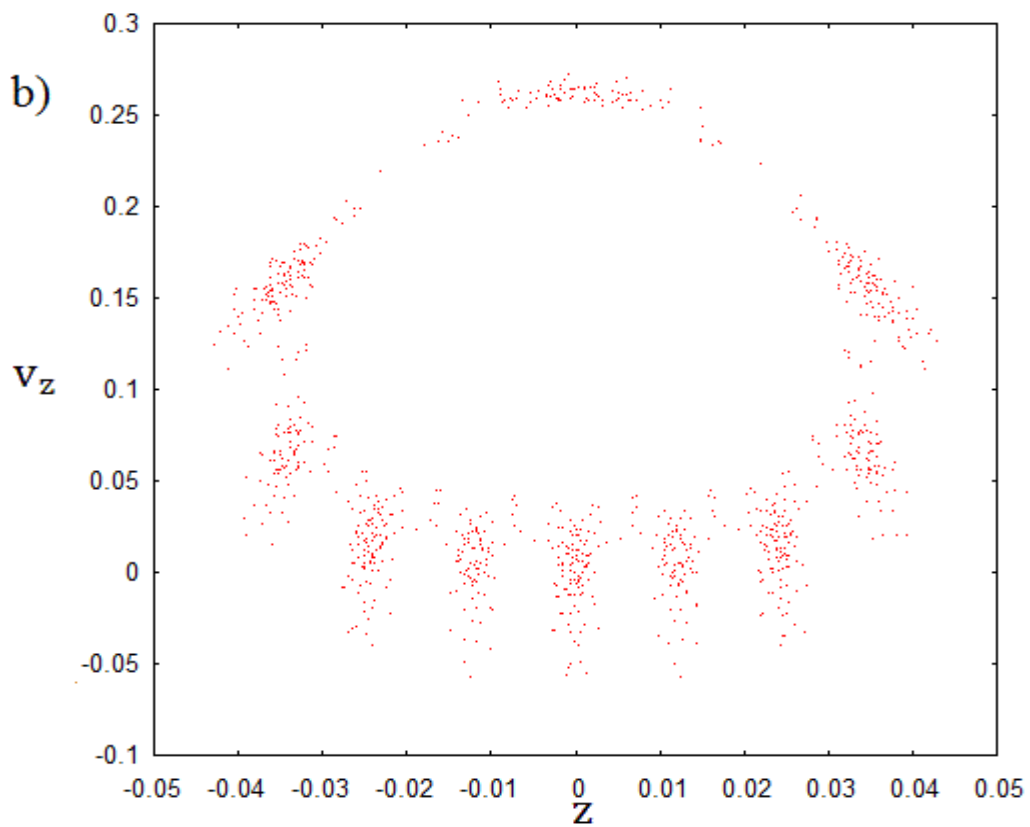
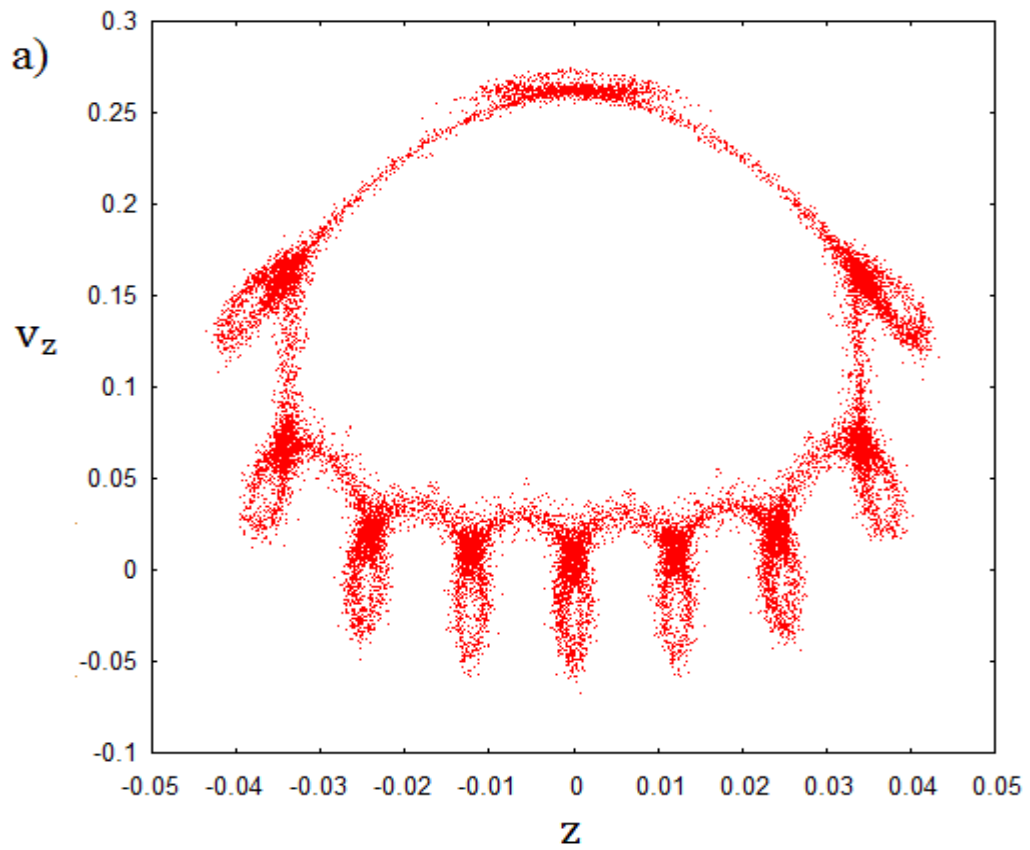


Figura 5.21: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ ,  $p_b = 0.0025$  e  $\varepsilon = 0.0077$  para: a) vinte placas; b) uma placa.

Apesar da pouca densidade de carga, os mapas de Poincaré ficaram *borrados*.

Aumentando a densidade de carga para  $p_b = 0.005$ , chega-se ao seguinte mapa de referência:

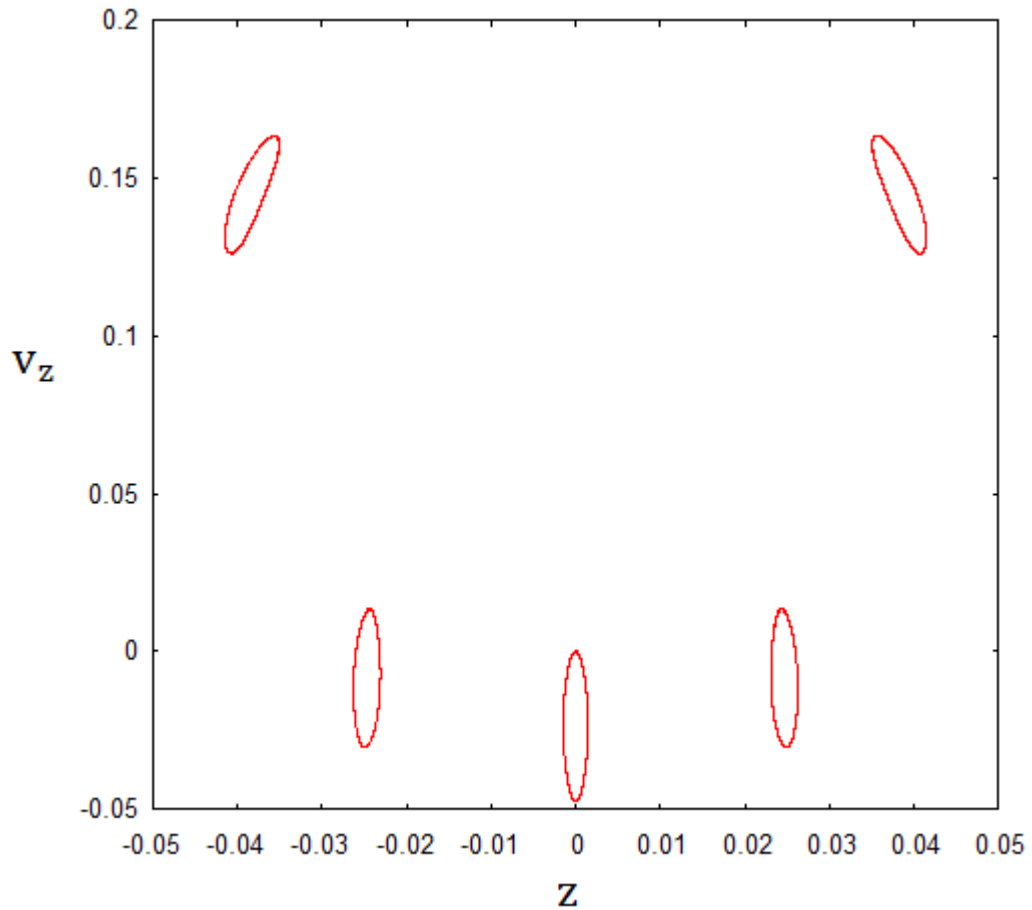


Figura 5.22: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$  e  $\varepsilon = 0.0077$  para vinte placas.

A interação entre as placas propiciou os seguintes mapas de Poincaré:

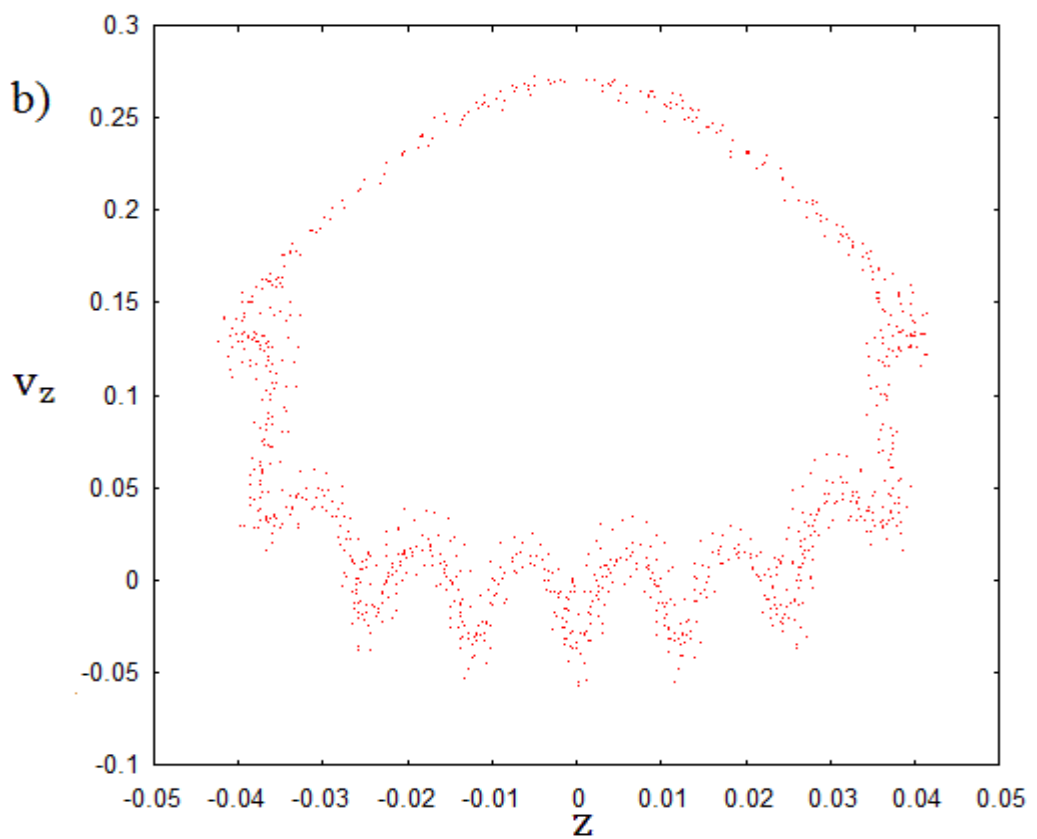
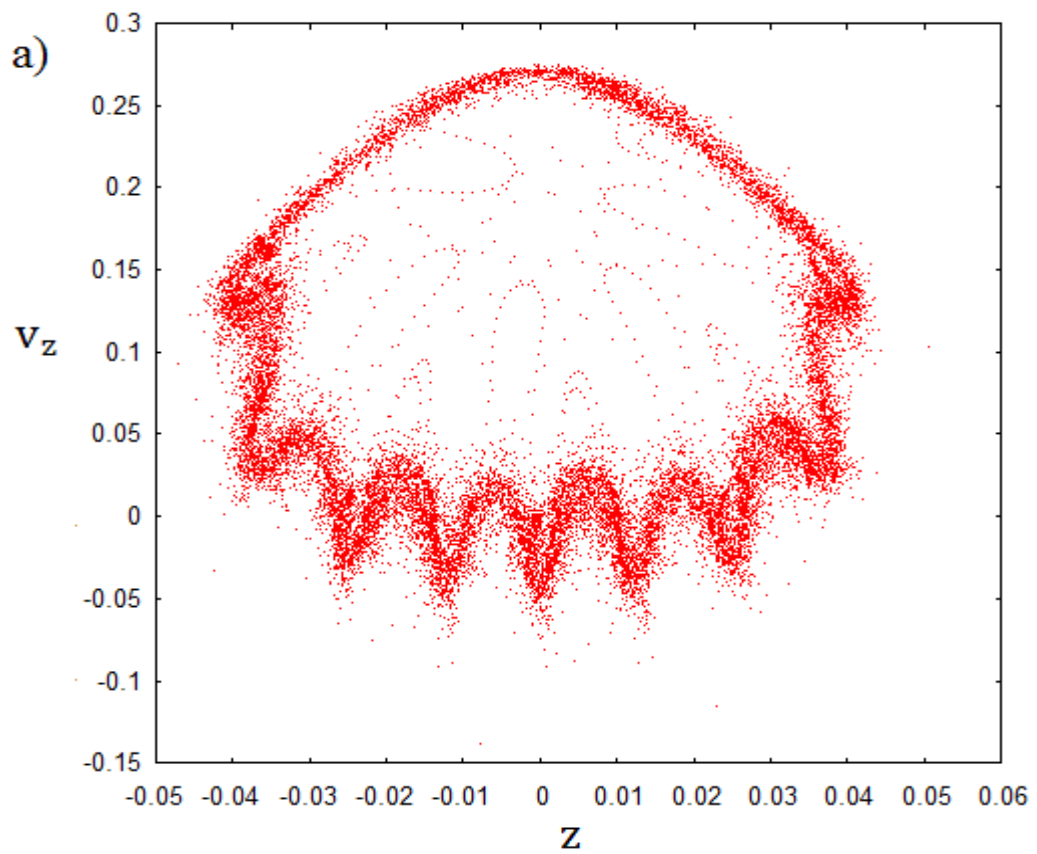


Figura 5.23: Poincaré Plot com  $k_p = 4\pi^2$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $p_a = 1$ ,  $p_b = 0.005$  e  $\varepsilon = 0.0077$  para: a) vinte placas; b) uma placa.

O aumento na densidade de carga fez os mapas ficarem mais *borrados*. Na próxima subseção será feita uma discussão sobre os resultados obtidos com os mapas de Poincaré.

## 5.5 – Discussão

Notoriamente, a introdução de cargas fez com que as trajetórias nos mapas de Poincaré fossem, aparentemente, pontos aleatórios distribuídos ao longo do espaço. Alguém que fizesse uma análise rápida diria que esse comportamento é típico de dinâmicas caóticas.

Entretanto, não se pode afirmar em nenhum dos casos que as placas possuem dinâmica caótica. O bom funcionamento dos mapas de Poincaré está atrelado ao número de graus de liberdade do sistema estudado. A representação das trajetórias do FEL sem interações via mapa de Poincaré estava correta, pois a análise bidimensional fornecida pelos mapas compreende os graus de liberdade do sistema.

A introdução da densidade de carga (através da interação entre as placas) acaba introduzindo novos graus de liberdade. A princípio, tantos graus de liberdade quanto forem as placas. E aqui o mapa de Poincaré já não é mais uma boa ferramenta de análise de estabilidade (o mapa não tem mais a capacidade de predizer se há caos), pois se destroem completamente as definições das curvas KAM, por exemplo. Os *borrões* vistos nos mapas com as interações, portanto, não implicam em caos.

Se há algo que se possa dizer a respeito das placas é que a interação entre elas fez com que a sua dinâmica se tornasse mais complexa, provavelmente reduzindo a coerência do FEL.

## 5.6 – Ponto hiperbólico

Outra forma de visualizar o efeito de carga é através da variação da frequência da perturbação. A sua variação possibilitará encontrar um novo conjunto de pontos fixos, além

do ponto fixo central, no mapa de Poincaré. O período de plotagem do mapa de Poincaré será modificado. Ele estará, agora, atrelado à *nova* frequência de perturbação, ou balanço do poço.

Surgirá, com os parâmetros corretos, um novo conjunto de ilhas de ressonância dentro da, anteriormente, região das órbitas quase periódicas, no mapa de Poincaré. No centro desse conjunto de ilhas haverá um novo ponto fixo elíptico (o ponto elíptico original é deslocado para cima, com o aumento da frequência). O significado desse novo ponto é simples: se uma placa foi inicialmente posta sobre este ponto fixo; depois do período da perturbação, ela estará, exatamente, sobre este mesmo ponto do espaço de fases, indicando que a placa está em ressonância<sup>31</sup> com a frequência de vibração (perturbação) do poço (isso sem levar em conta a presença de cargas). Evidentemente, a frequência da perturbação deve ser menor que do que a frequência natural das placas no fundo do poço, por um motivo simples: o período das placas aumenta à medida que elas se afastam do centro do poço.

Assim como surge um novo ponto elíptico, surge, necessariamente, também um ponto hiperbólico (que se localizará abaixo dos pontos elípticos). Contendo este ponto hiperbólico, existe uma curva chamada curva *separatriz* (vale lembrar que o período da órbita torna-se infinito sobre a separatriz, conforme Quillen [2003]).

A separatriz é, segundo Guevara (2003), uma órbita homoclínica, isto é: uma curva fechada que contém um ponto fixo. As órbitas homoclínicas não são estruturalmente estáveis, podendo ser destruídas por qualquer pequena perturbação de algum parâmetro, gerando órbitas periódicas ou caos.

Para encontrar o ponto hiperbólico, fixam-se os seguintes parâmetros:

$$k_p = 4\pi^2, p_a = 1 \text{ e } \varepsilon = 0.001$$

---

<sup>31</sup> Neste caso é uma ressonância do tipo 1:1.

O parâmetro que resta é a frequência da perturbação (lembrando:  $a_i(t) = -p_a \sin[k_p\{z_i + \varepsilon \sin(\omega t)\}]$ ). A sequência de figuras abaixo é formada por vinte placas com condições iniciais diferentes e tem por finalidade mostrar o surgimento dos novos pontos fixos, à medida que se diminui a frequência  $\omega$ :

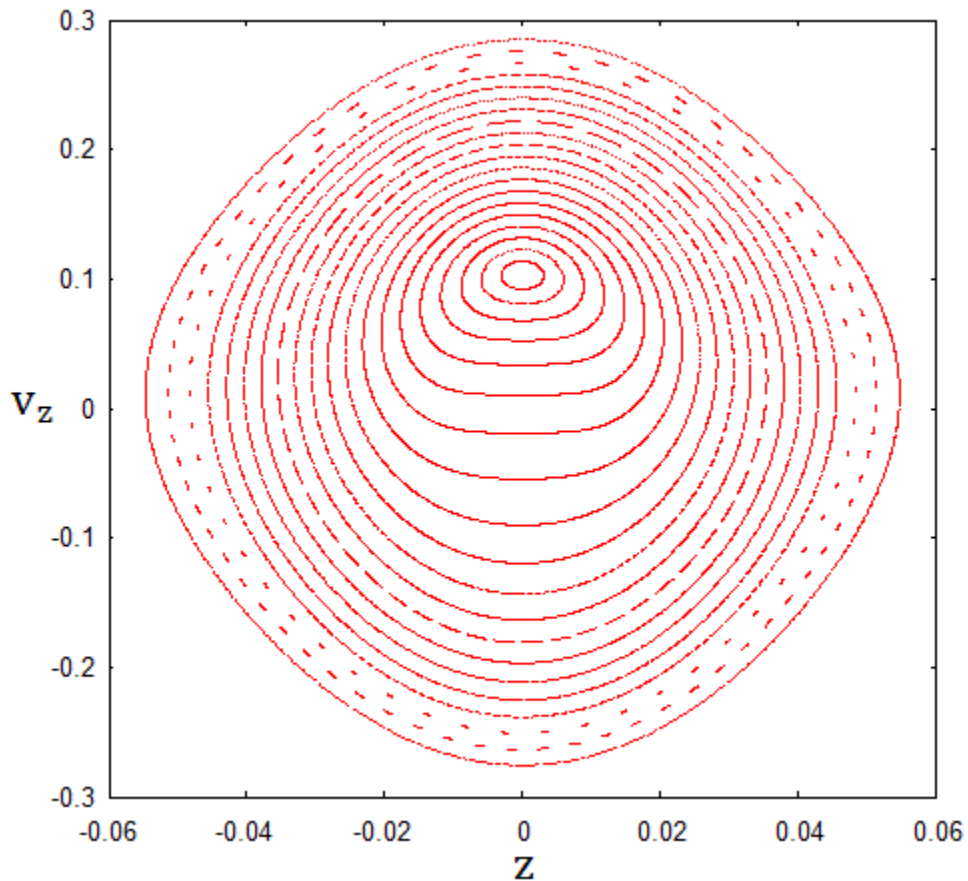


Figura 5.24: Mapa de Poincaré de vinte placas com condições iniciais distintas para  $\omega = \omega_0$ ;

A *figura 5.24* mostra um mapa muito semelhante com os já vistos neste trabalho. Não há nenhuma novidade. Espera-se ver (ou começar a ver) mudanças a partir da próxima figura, que possui uma frequência de balanço ligeiramente inferior à frequência natural de uma placa no fundo do poço.

Com a mudança da frequência do balanço do potencial, muda-se também o período de plotagem para o mapa de Poincaré, de acordo com a expressão:



$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5.29)$$

Utilizando o período da *equação 5.29*, constrói-se o mapa abaixo:

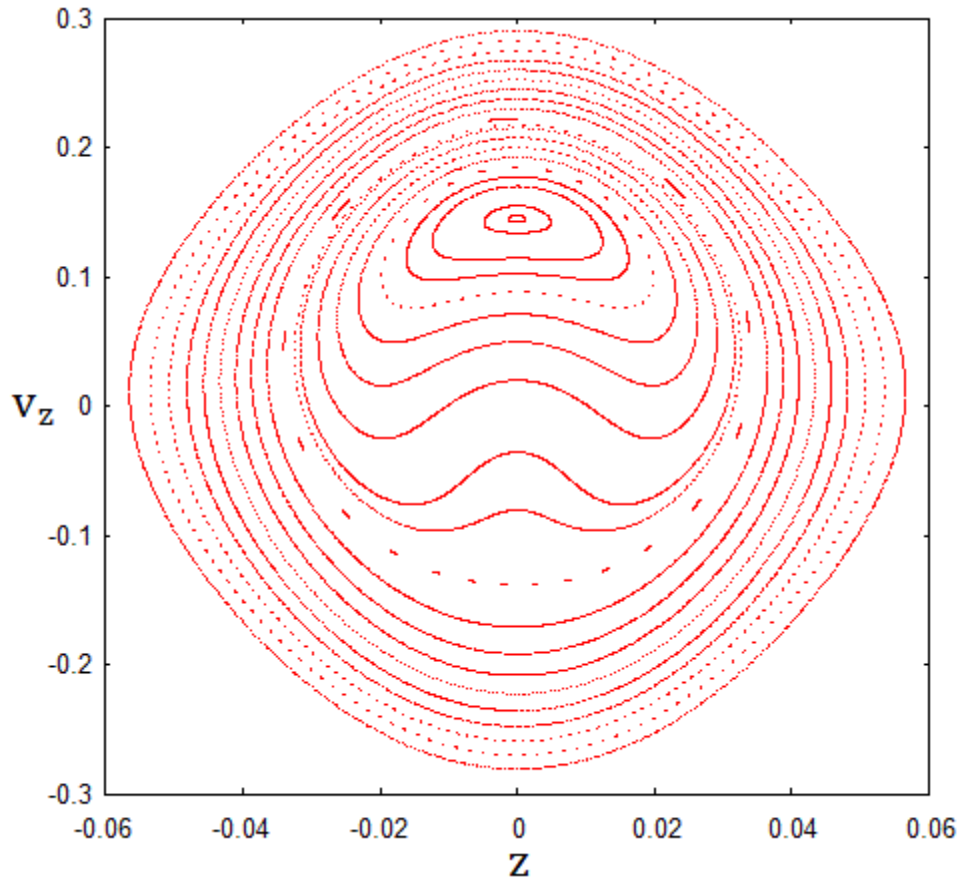


Figura 5.25: Mapa de Poincaré de vinte placas com condições iniciais distintas para  $\omega = \omega_0/1.04$ ;

Na *figura 5.25* observam-se deformações das curvas fechadas que contêm valores entre  $v_z = -0.1$  e  $v_z = 0.1$  para  $z = 0$ . Essas deformações estão indicando o surgimento de um novo conjunto de ilhas de ressonância e, como consequência, um novo conjunto de pontos fixos.

Diminui-se mais um pouco a frequência de balanço do potencial para, enfim, obter:

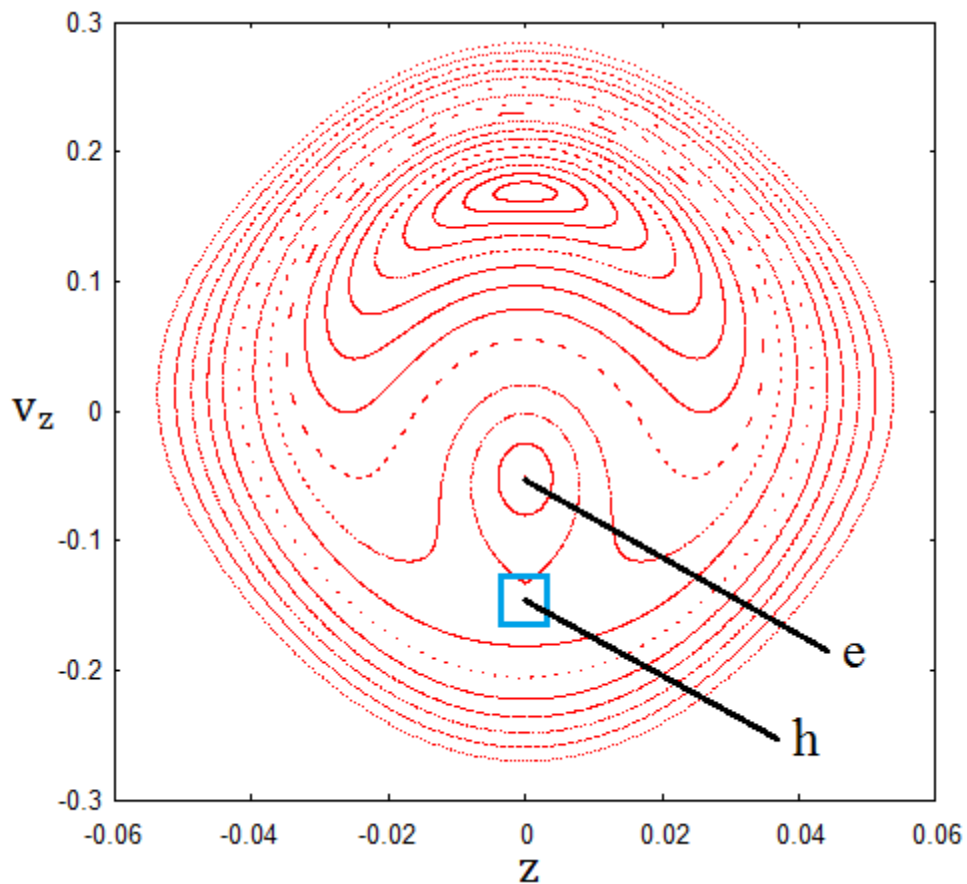


Figura 5.26: Mapa de Poincaré de vinte placas com condições iniciais distintas para  $\omega = \omega_0/1.07$ ;

A *figura 5.26* apresenta-se notoriamente mais complexa que as anteriores. Nela surgem os novos pontos fixos: um ponto elíptico (agora o mapa possui dois pontos elípticos) e um ponto hiperbólico. O novo ponto elíptico é denotado pelo ponto *e*, enquanto a região *h* é a região que contém o ponto hiperbólico.

Seria interessante estudar melhor a região *h*, para localizar com precisão o ponto hiperbólico. Para que isto seja possível, inicia-se a simulação fazendo com que as placas tenham condições iniciais muito próximas do ponto hiperbólico. Os mapas obtidos para essas condições podem ser vistos na sequência:

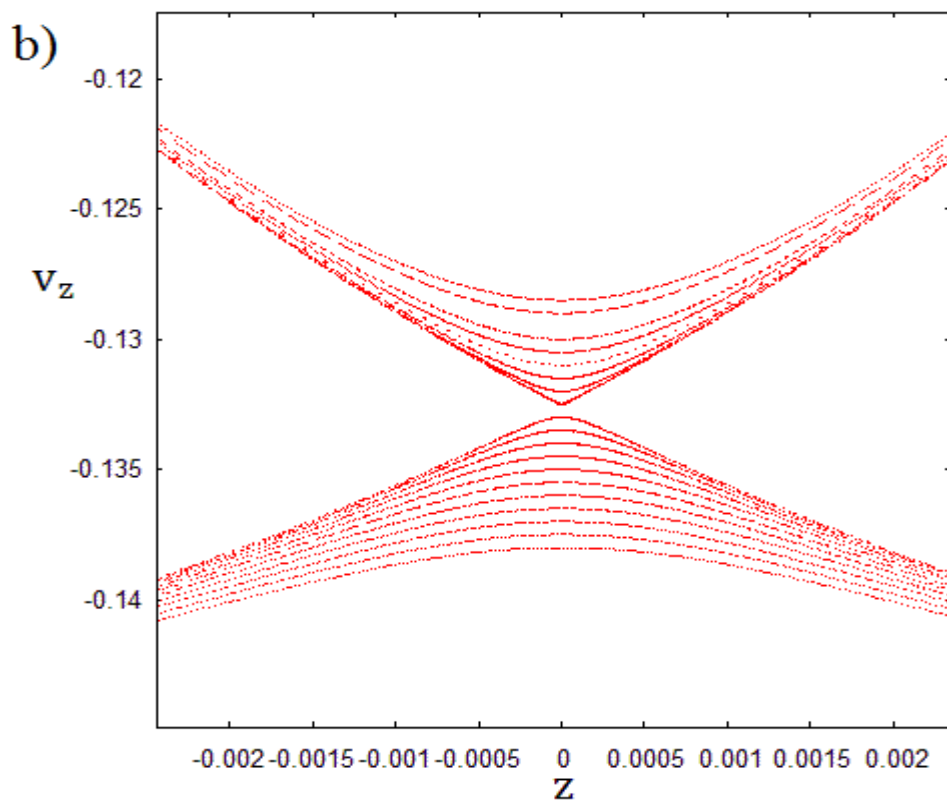
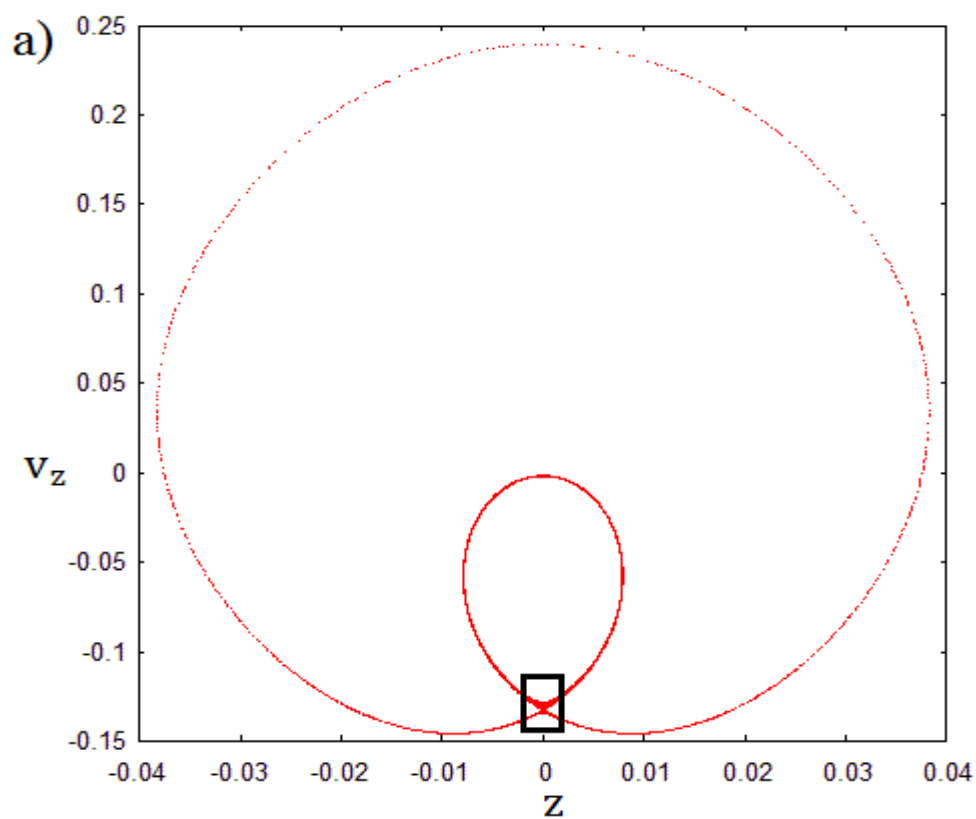


Figura 5.27: Mapa de Poincaré para vinte placas com condições iniciais perto do ponto hiperbólico: a) mapa completo; b) zoom da região indicada na figura *a*.

A *figura 5.27* confirma as expectativas da *figura 5.26* sobre o fato do ponto hiperbólico existir, uma vez que é bem perceptível a formação de uma bifurcação do tipo tangente (ou do tipo sela-nó), com a separatriz (ela não foi representada nos mapas) dada em forma de  $x$ . É possível ainda, através da ampliação da figura, aproximar o valor do ponto fixo hiperbólico:

$$v_{z,hip} = -0.132532 \text{ e } z_{hip} = 0.$$

Para observar o efeito de carga, deve-se simplesmente introduzir este efeito à dinâmica das placas (exatamente como nas subseções anteriores). A dinâmica de cada placa, para lembrar, fica regida pela equação:

$$a_i(t) = -p_a \sin[k_p \{z_i + \varepsilon \sin(\omega t)\}] + p_b \left[ \frac{N_{esq\ i}}{N} - \frac{N_{dir\ i}}{N} \right].$$

Neste estudo, as condições iniciais das duzentas placas, que farão parte das simulações, estarão muito próximas ao ponto hiperbólico, dentro do intervalo abaixo:

$$-0.138 < v_{zi} < -0.128, \text{ para } z_i = 0.$$

A dinâmica foi simulada para três cargas distintas:

$$p_{b1} = 0.0001; \quad p_{b2} = 0.01; \quad \text{e } p_{b3} = 0.05.$$

Como resultado, foram obtidos os mapas de Poincaré observados a seguir:

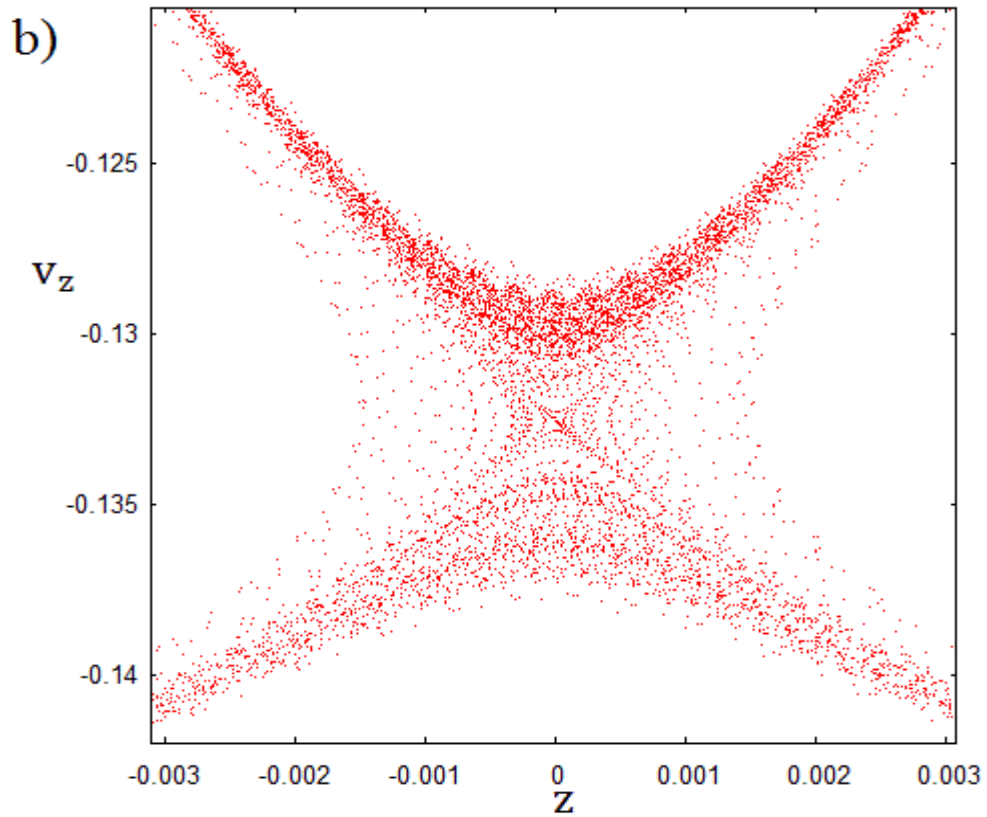
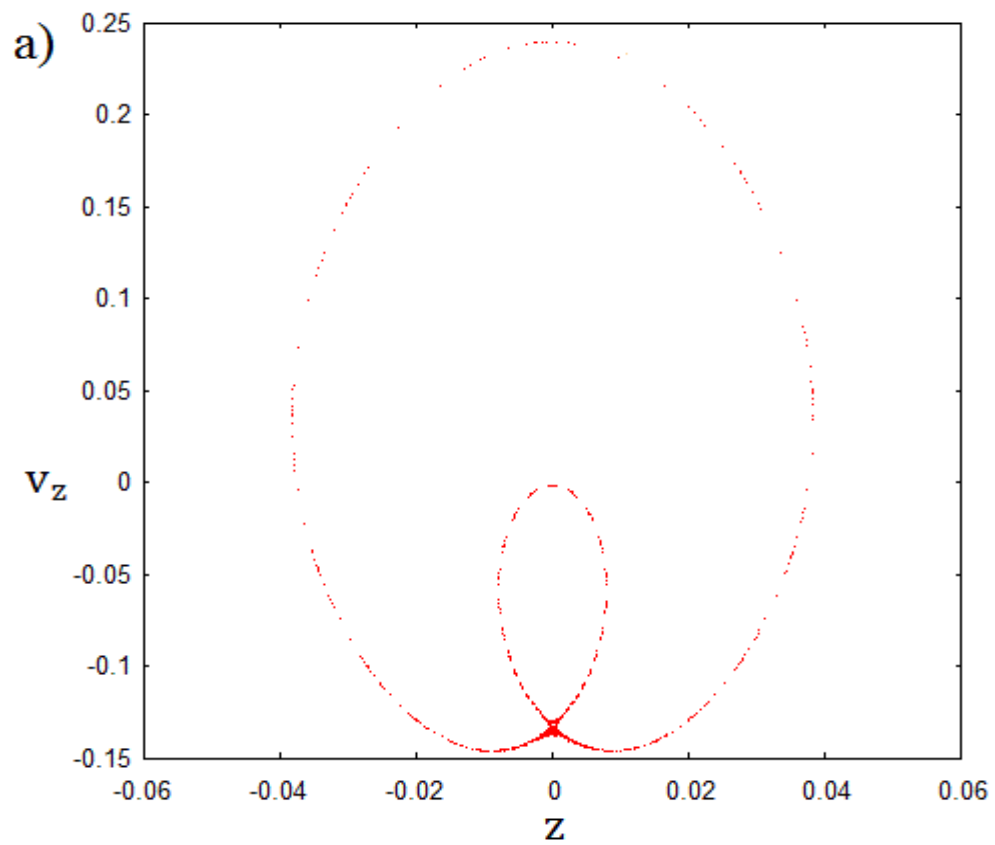


Figura 5.28: Mapas de Poincaré para  $p_{b1} = 0.0001$  e: a) uma placa; b) vinte placas, na região próxima ao ponto hiperbólico.

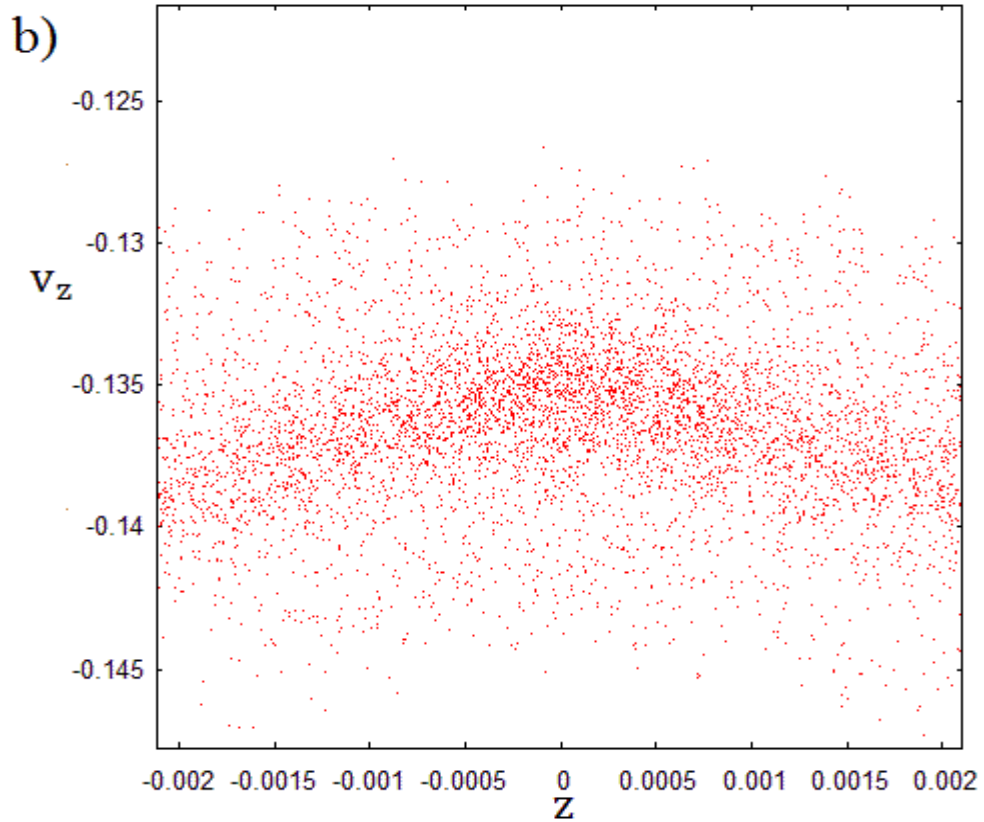
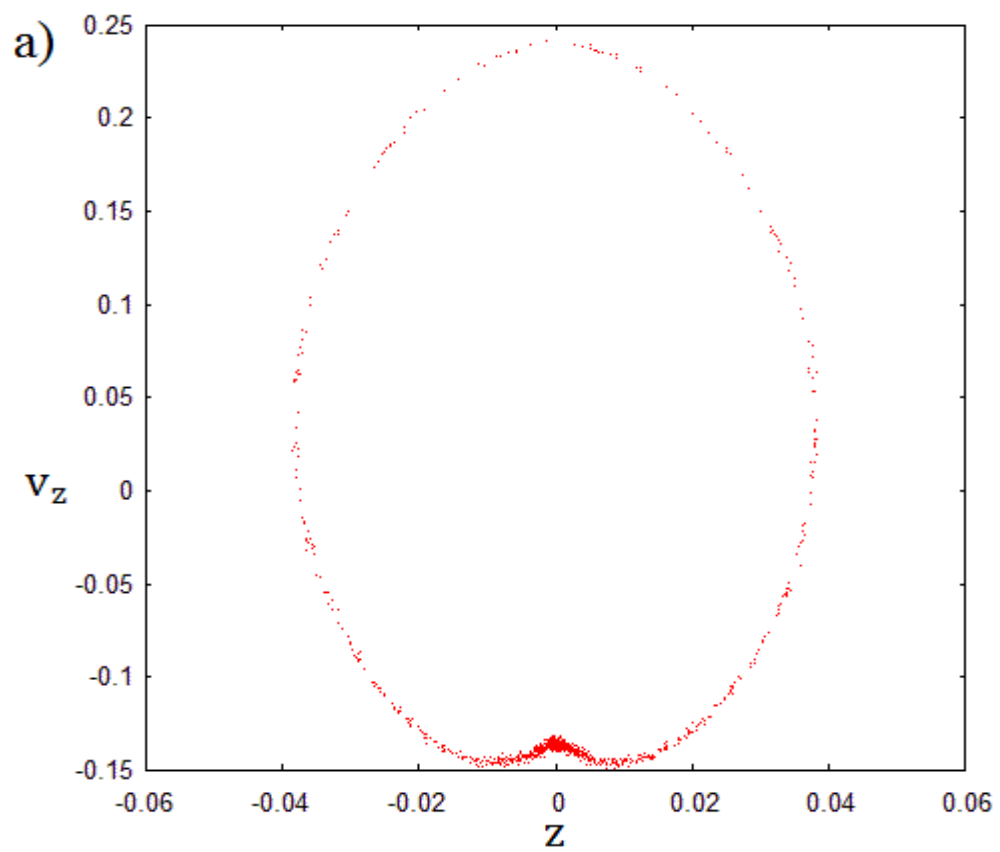


Figura 5.29: Mapas de Poincaré para  $p_{b2} = 0.01$  e: a) uma placa; b) vinte placas, na região próxima ao ponto hiperbólico.

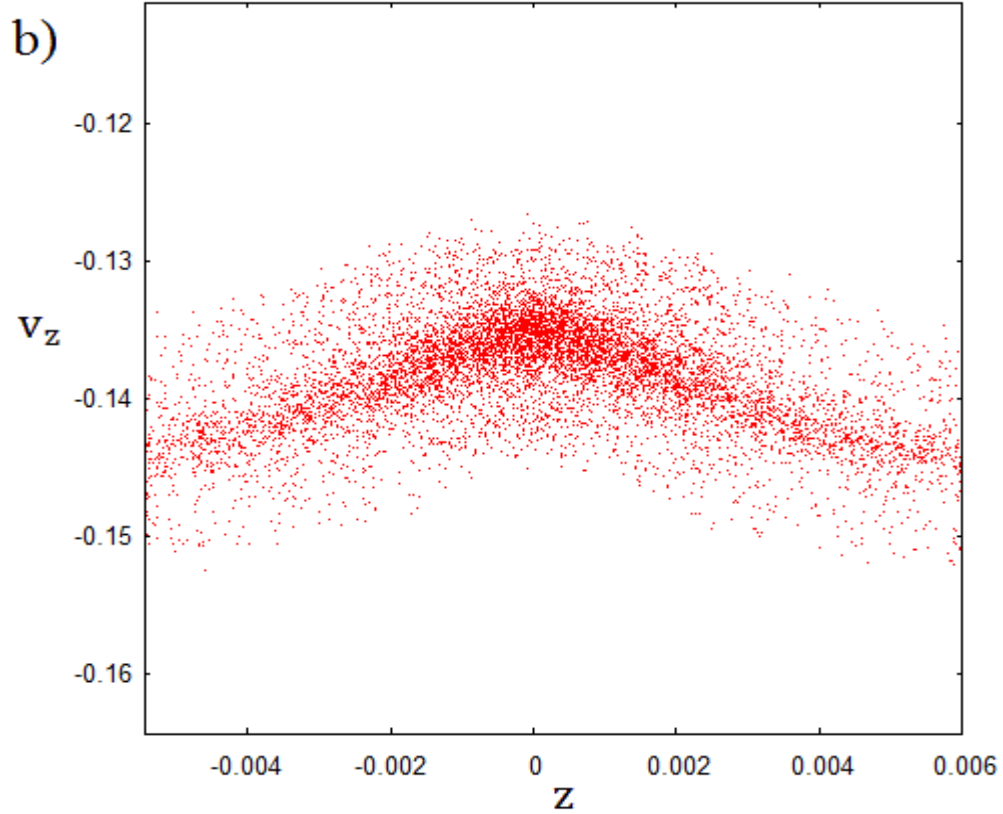
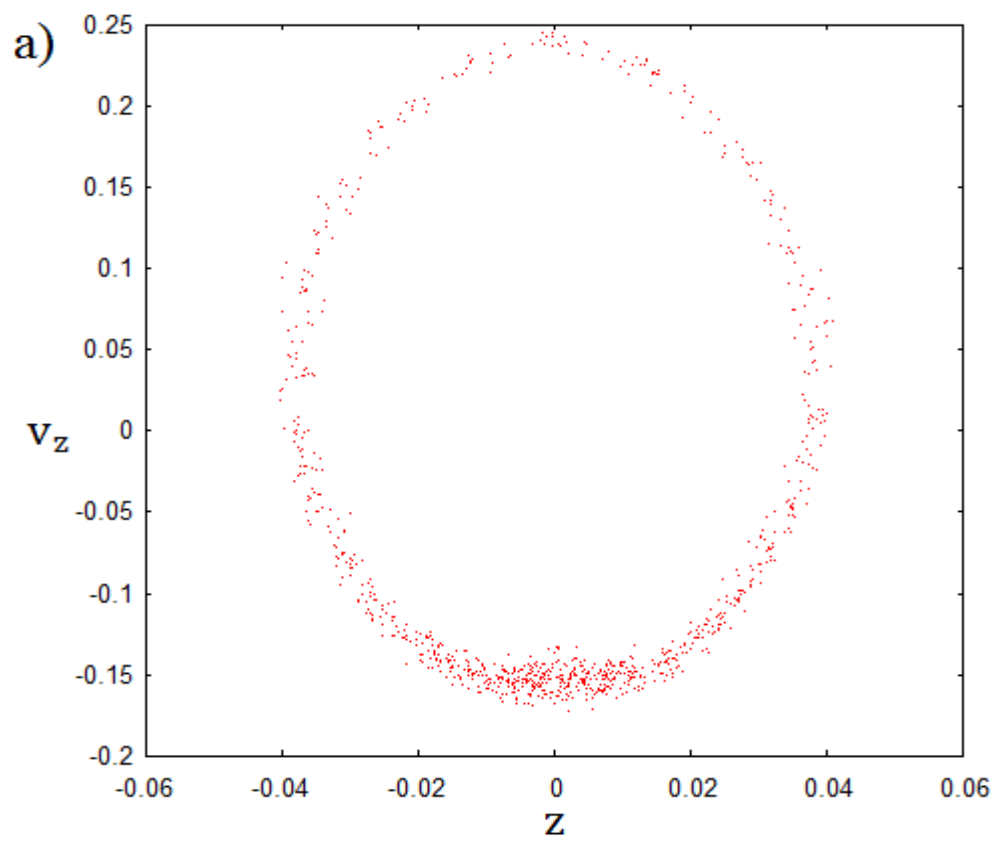


Figura 5.30: Mapas de Poincaré para  $p_{b3} = 0.05$  e: a) uma placa; b) vinte placas, na região próxima ao ponto hiperbólico.

Em todas essas três figuras (*figuras 5.28, 5.29 e 5.30*), o efeito de cargas produziu um borão nos mapas de Poincaré. Como anteriormente mencionado, os borões ocorreram devido a um aumento no número de graus de liberdade do sistema, propiciado pela inclusão de placas.

Dessa forma, o mapa de Poincaré deixa de ser uma ferramenta útil para a análise da dinâmica e, portanto, não é possível assegurar o que aconteceu com o ponto hiperbólico, ou, mais precisamente: não se pode afirmar qual é o efeito de cargas sobre o ponto fixo hiperbólico.



## 6 – Quebra de Onda

Segundo Trines (2003), a *quebra de onda* (wave breaking) é um processo dinâmico no qual a velocidade de um elétron em uma certa região passa a ser muito grande em relação à velocidade de fase da onda nesta mesma região, desenvolvendo uma singularidade (um grande aumento na densidade de carga em uma pequena região do espaço) à medida que a onda passa. Quando esta singularidade torna-se muito pronunciada, há a ejeção (dada como se fosse, realmente, um *jato* [jet]) de algumas partículas. Conforme Rizzato et. al (2007), a quebra de onda ocorre com uma razão: as partículas carregadas relaxam para um fluxo estacionário quando partem de um fluxo não estacionário.

Depois de haver a quebra de onda, o sistema relaxa. Quando o sistema atinge o relaxamento, é possível perceber a existência de duas regiões bem distintas: o *núcleo* (core) e o *halo* (halo). O núcleo apresenta partículas com pouca velocidade, enquanto o halo é composto por partículas com grande velocidade.

Evidentemente, a inhomogeneidade e a densidade de carga são variáveis relevantes para o surgimento da quebra de onda. Por exemplo, mesmo com uma inhomogeneidade grande, no feixe, pode não ocorrer a quebra. Para isto, a densidade de carga deve ser muito baixa. Assim como, para uma densidade de carga considerável, desde que seja bem homogênea, pode não ocorrer a quebra. No caso deste trabalho, o que seria uma distribuição homogênea é, na verdade, uma distribuição de equilíbrio.

Da mesma forma, deve-se perguntar: o balanço gerado no potencial (produzido pela perturbação  $\epsilon$ ) faz com que surja quebra de onda? Tornando a distribuição de carga inicial distinta da distribuição de equilíbrio, haverá quebra de onda?

O objetivo desta seção é verificar se há quebra de onda em três situações distintas:

- Situação 1: Na presença da perturbação temporal do potencial ( $\epsilon$ ), com distribuição inicial de equilíbrio.
- Situação 2: Na ausência da perturbação temporal do potencial, com distribuição inicial diferente da distribuição de equilíbrio.
- Situação 3: Na presença da perturbação temporal do potencial e com distribuição inicial diferente da distribuição de equilíbrio.

Alguns parâmetros foram fixados para todas as situações:

$$k_p = 4\pi^2, \omega = 2\pi, p_b = 0.5 \text{ e } p_a = 1$$

A onda, que pode ou não quebrar, deve ser vista no espaço de fase *instantâneo*<sup>32</sup> e *completo*<sup>33</sup>. A quebra de onda será vista através de simulações computacionais. Nas três situações, foram utilizadas mil placas interagentes.

## 6.1 – Situação 1

Nesta situação, propõe-se a distribuição inicial como sendo a distribuição de equilíbrio de mil placas interagentes, com as partículas interagindo entre si dentro do potencial ponderomotriz com uma perturbação temporal.

A escolha da perturbação é relevante para o aparecimento da quebra. Além disso, o valor da perturbação determina quando haverá a quebra. Provavelmente, o aumento da perturbação diminui o tempo transcorrido até a quebra de onda.

O valor escolhido para a perturbação foi baseado na *figura 5.11*: buscou-se um valor menor que  $\epsilon_{\text{crit}}$ , para que, deste modo, assegure-se que as partículas não sejam ejetadas do poço. Porém, o valor não poderia ser tão baixo a ponto do balanço não contribuir para a

<sup>32</sup> Ou seja, levando em conta as posições e velocidades do momento apenas.

<sup>33</sup> Posições e velocidades de *todas* as partículas que estão no poço.

dinâmica do sistema. Pensando nessas duas condições, escolheu-se o valor do parâmetro perturbativo como:

$$\varepsilon = 0.0002$$

A sequência de figuras, a seguir, revela o aparecimento da quebra de onda e o estado de relaxação:

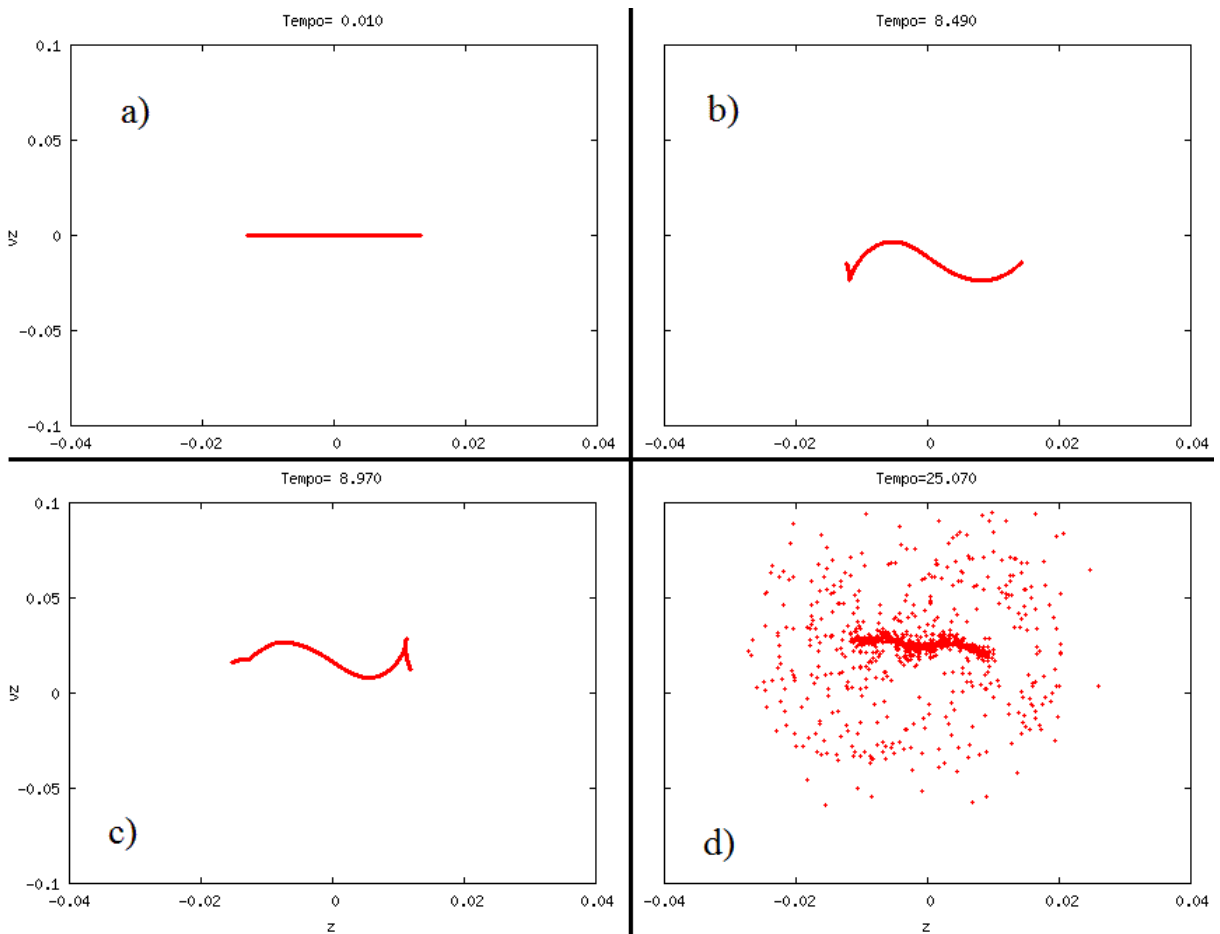


Figura 6.1: Sequência de *snapshots* do espaço de fase para  $\varepsilon = 0.0002$ : a) distribuição inicial de placas; b) singularidade antes da quebra; c) quebra e iminência de uma nova quebra; e, d) sistema relaxado.

A distribuição inicial, vista na *figura 6.1a*, se transforma em uma onda, com um ponto de singularidade, que quebra por volta do tempo arbitrário 8.49, na posição  $z \cong -0.013$ , como visto na *figura 6.1b*. Uma nova singularidade é vista na *figura 6.1c*, por volta da posição  $z \cong 0.015$ , na iminência de provocar uma nova quebra de onda. A quebra de

onda surge, basicamente, com o acúmulo de cargas (placas) muito próximas, mas com velocidades distintas. A formação do jato foi incipiente, tanto na *figura 6.1b* quanto na *6.1c*.

A *figura 6.1d* revela o sistema relaxado: é nítida a presença de um núcleo, composto por placas com velocidades baixas, e de um halo, formado por placas com velocidades grandes.

É mister ressaltar, na sequência dessas figuras, que o núcleo não está centrado em  $v_z = 0$ , porque existe a perturbação, que balança o poço temporalmente.

Observa-se claramente a quebra de onda. Porém, apenas com as *fotografias* (snapshots) instantâneas do espaço de fases não é possível avaliar se o sistema está relaxado. Propõe-se uma abordagem rudimentar para verificar o estado de relaxação: quando o sistema está relaxado (e como se observou na *figura 6.1d*), formam-se duas regiões, a saber, o núcleo e o halo. Define-se uma nova variável, chamada  $v_{lim}$ , da seguinte forma:

- $v_{lim}$  é a maior velocidade, em módulo, entre as velocidades de todas as placas a cada instante de tempo.

Há uma explicação plausível para a definição dessa nova variável. Enquanto não há quebra de onda, a variável  $v_{lim}$  aumenta gradualmente, conforme a onda no espaço de fase se propaga. Do momento da quebra até o momento no qual o sistema relaxa, há um aumento considerável no valor da nova variável. Porém, quando o sistema relaxa, o valor de  $v_{lim}$  varia em torno de uma posição média. Pensa-se que essa nova variável seja quase como uma distância entre o núcleo e o halo (no espaço de fase) e, conseqüentemente, que a relaxação seja como uma estabilização desta distância.

Monitora-se a variável  $v_{lim}$  ao longo do tempo de integração, obtendo o seguinte gráfico:

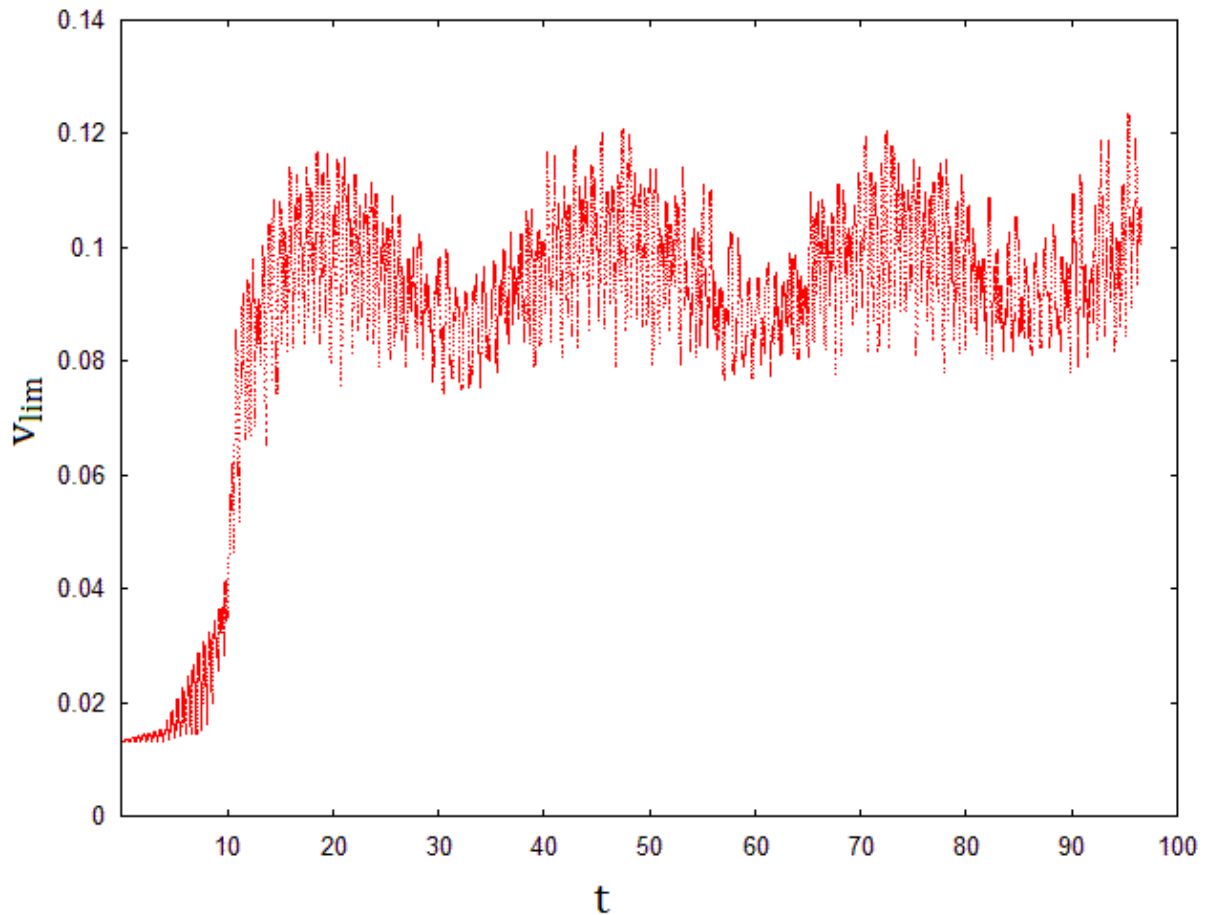


Figura 6.2: Monitoramento da variável  $v_{lim}$  ao longo do tempo.

Verifica-se na *figura 6.2* que há um aumento brusco do valor da nova variável por volta de  $t = 10$ , perto do tempo da quebra da onda. Percebe-se que, por volta de  $t = 20$ , o valor de  $v_{lim}$  oscila em torno de uma média, ou seja, o sistema relaxa por volta desse valor (e isso, válida, de certa forma, a descrição da *figura 6.1d*). Uma das múltiplas frequências presentes na figura corresponde à frequência de balanço do poço.

Conclui-se que a interação entre as cargas, com uma distribuição inicial de equilíbrio, somada ao balanço do poço, produz efeito de quebra de onda.

## 6.2 – Situação 2

Nesta situação, propõe-se que a distribuição inicial não seja a distribuição de equilíbrio e que não exista a perturbação temporal no potencial ponderomotriz (isto é:  $\varepsilon = 0$ ). Pensa-se nessa

situação como sendo mais realista que a anterior, no sentido da distribuição inicial não ser a de equilíbrio, o que na prática é muito difícil realizar.

Provoca-se uma inhomogeneidade transformando a posição inicial de cada placa (em relação à distribuição de equilíbrio). Essa transformação é dada da seguinte forma:

$$z_{io} = z_{io_{eq}} + \lambda \left\{ \frac{\Psi_i}{z_{max} - z_{min}} \right\}. \quad (6.1)^{34}$$

Com:

$$\Psi_i = (z_{io_{eq}} - z_{min})(z_{max} - z_{io_{eq}}). \quad (6.2)$$

O valor de  $\lambda$  está fortemente ligado ao tempo transcorrido até a quebra de onda. Uma pequena variação do *fator de inhomogeneidade*<sup>35</sup> pode gerar uma grande variação entre os tempos de quebra de onda.

Para esta situação, se estabelece o valor do fator como:

$$\lambda = 0.5. \quad (6.3)$$

A pergunta que precisa ser respondida nesta seção é: a inhomogeneidade das condições iniciais pode produzir quebra de onda, ainda que sem a perturbação do potencial?

Para responder a essa pergunta, simulou-se o resultado computacionalmente. Da simulação, nasceram as seguintes figuras:

---

<sup>34</sup> Onde:  $z_{io}$  é a posição inicial da placa  $i$ ;  $z_{io_{eq}}$  é a posição inicial de equilíbrio para a placa  $i$ ;  $\lambda$  é o fator de inhomogeneidade;  $z_{max}$  é o valor máximo de posição das placas na distribuição de equilíbrio; e,  $z_{min}$  é o valor mínimo de posição das placas na distribuição de equilíbrio.

<sup>35</sup> A inhomogeneidade, aqui, significa o quão diferente da distribuição de equilíbrio a nova distribuição está.

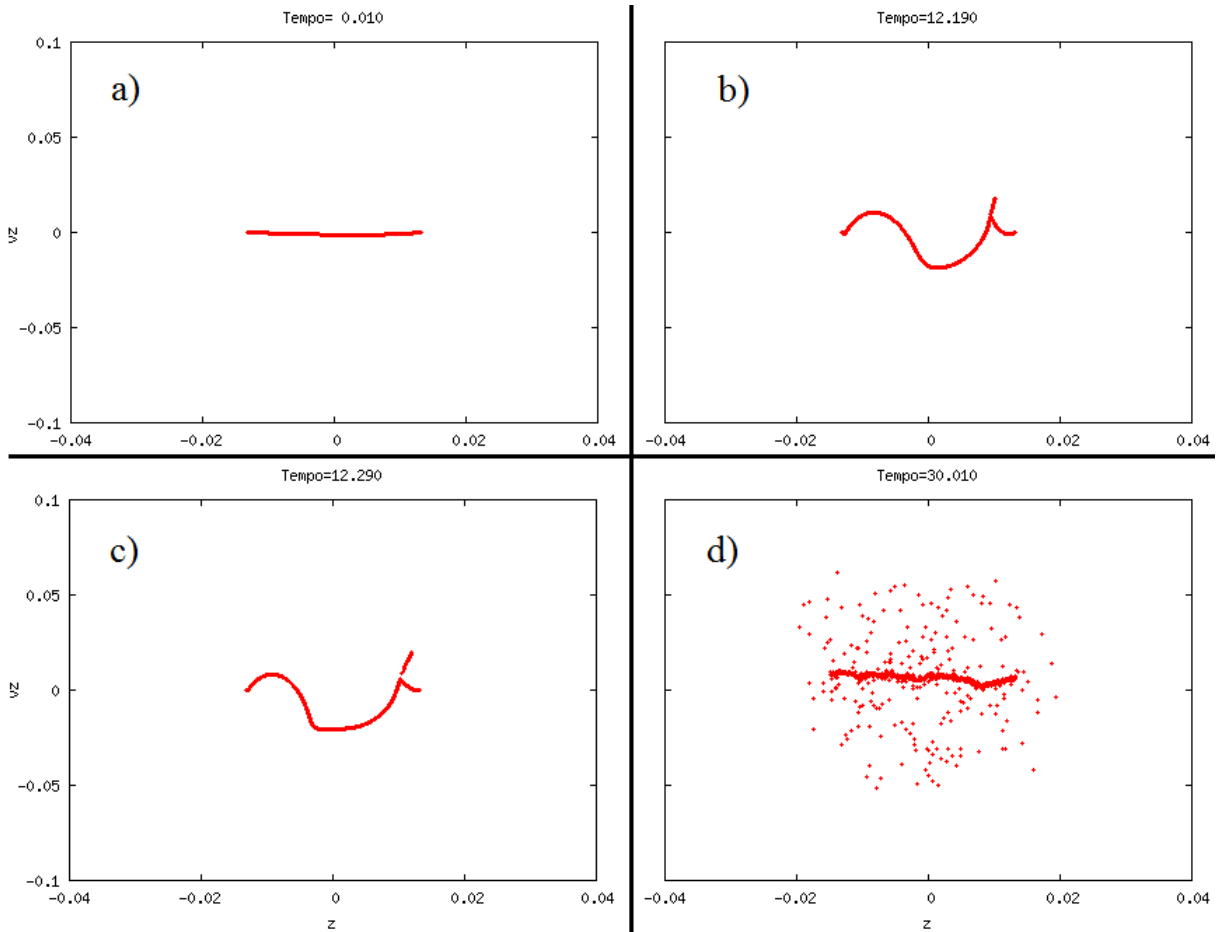


Figura 6.3: Sequência de *snapshots* do espaço de fase para  $\varepsilon = 0$  e  $\lambda = 0.5$ : a) distribuição inicial de placas; b) singularidade logo que a onda quebra; c) quebra de onda, com a presença de um *jato* [jet] sendo ejetado do núcleo; e, d) sistema relaxado.

Na sequência de fotografias do espaço de fases da *figura 6.3* é possível ver o instante da quebra de onda (*figura 6.3b*) e a posterior ejeção de um jato de placas (*figura 6.3c*). Verifica-se ainda a relaxação do sistema, na *figura 6.3d*. Nota-se que, diferentemente da *Situação 1*, as placas presentes no núcleo possuem velocidades muito próximas a zero, com pouca variação entre elas. Essa é uma consequência direta do potencial não oscilar no tempo.

Monitorando, novamente, a variável  $v_{lim}$  ao longo do tempo, é possível estimar o tempo no qual o sistema é considerado relaxado:

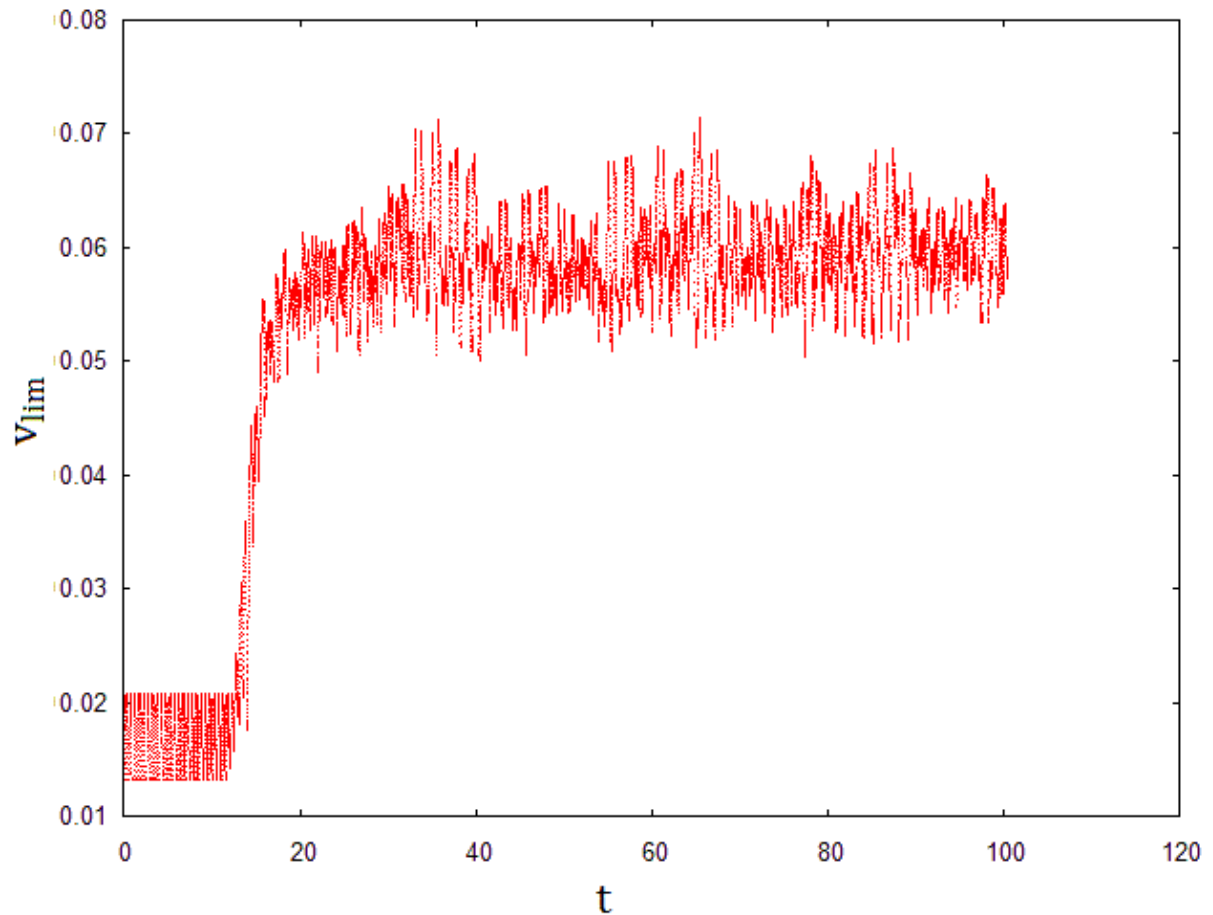


Figura 6.4: Monitoramento da variável  $v_{lim}$  ao longo do tempo.

Pela *figura 6.4*, nota-se um aumento brusco do valor da nova variável, começando por volta de  $t = 13$ , tempo próximo da quebra da onda. A relaxação ocorre por volta de  $t = 30$  u.a.t. (unidades arbitrárias de tempo). Apesar da dinâmica complicada de  $v_{lim}$ ,  $v_{lim}$ , ao que tudo indica, oscila em torno de uma média.

Conclui-se, nessa situação, que, mesmo que o potencial ponderomotriz não seja perturbado temporalmente, é possível observar o fenômeno de quebra de onda no FEL submetido a efeitos de carga distribuída fora do estado de equilíbrio.

### 6.3 – Situação 3

Nesta situação, propõe-se que a distribuição inicial não seja a distribuição de equilíbrio e que, ainda, exista a perturbação temporal no potencial ponderomotriz.



A distribuição utilizada nesta seção é a mesma gerada pela transformação da distribuição de equilíbrio proposta na seção anterior (vide *equação 6.1*), com o mesmo fator de *inogeneidade* ( $\lambda = 0.5$ ) e utilizando o mesmo parâmetro perturbativo da *Situação 1* ( $\varepsilon = 0.0002$ ). Como resultado da simulação, mostra-se a seguinte sequência de *snapshots*:

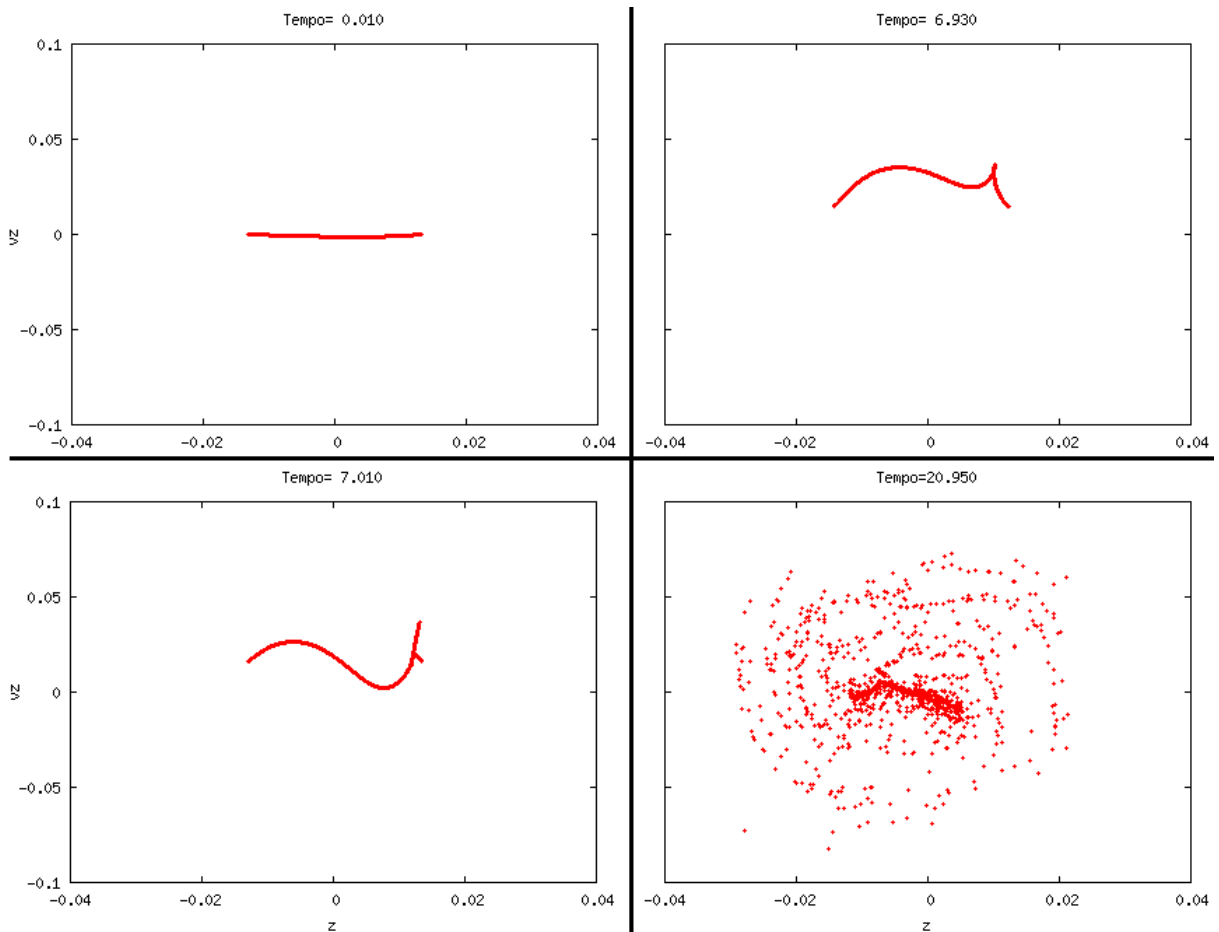


Figura 6.5: Sequência de *snapshots* do espaço de fase para  $\varepsilon = 0.0002$  e  $\lambda = 0.5$ : a) distribuição inicial de placas; b) singularidade, na iminência da quebra de onda; c) surgimento de um *jato* [jet] sendo ejetado do núcleo; e, d) sistema relaxado.

A sequência de imagens da *figura 6.5* revela o efeito de quebra de onda na presença da perturbação do potencial e com uma distribuição inicial distinta da obtida na situação de equilíbrio.

O monitoramento da variável  $v_{lim}$ , para esta situação, pode ser visto a seguir:

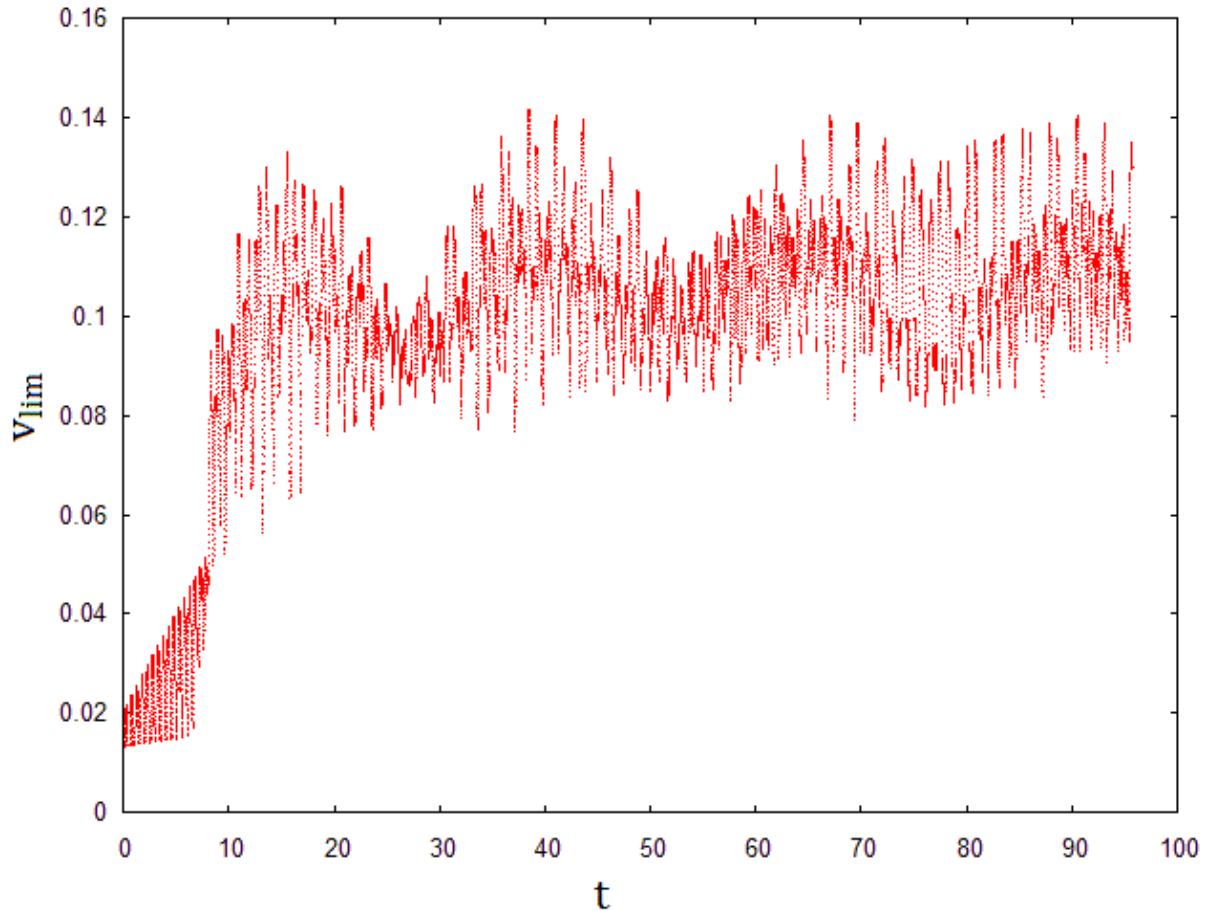


Figura 6.6: Monitoramento da variável  $v_{lim}$  ao longo do tempo.

A *figura 6.6* mostra um brusco crescimento da variável  $v_{lim}$  antes de  $t = 10$ , enquanto a relaxação parece ocorrer por volta de  $t = 20$ .

Conclui-se que também ocorre quebra de onda na situação três.

## 6.4 – Discussão

Três possíveis cenários foram analisados. Nas três situações ocorreu a quebra de onda no espaço de fases. Isto significa que existem, pelo menos, três formas de provocar quebra de onda no FEL através do uso de uma densidade de carga aprisionada no potencial ponderomotriz significativa. Este resultado é positivo em pelo menos um aspecto (observado neste capítulo): a quebra de onda transforma a flutuação coerente de um fluxo não estacionário em energia cinética microscópica (aumentando a energia dos elétrons).

Entretanto, o processo de quebra de onda não pode ser controlado, pois gera uma distribuição final de energia dentro de um intervalo muito grande de energia, o que não é muito interessante.

Outro problema referente ao efeito de quebra de onda é que o efeito de onda está associado a efeitos não lineares e, especialmente, à saturação da amplitude de radiação em um FEL real. Portanto, do ponto de vista da utilidade do FEL (amplificar um sinal de radiação de entrada), a presença da quebra de onda é um efeito não desejável.

## 7 – Conclusão

Após uma breve descrição sobre o FEL e a exposição do modelo utilizado para este trabalho, foram comparados valores analíticos para as posições mínima e máxima ocupadas por uma placa na situação de equilíbrio para diversos valores de densidades de carga. Aqui, os resultados obtidos através das simulações computacionais (executadas utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem, para a integração das equações) se assimilaram aos analíticos. Mostrou-se que o modelo responde muito bem à realidade para densidades de carga baixas e que ele é limitado quando as placas estão longes umas das outras.

Em uma etapa seguinte, o mapa de Poincaré foi a ferramenta para a análise da dinâmica das placas, com e sem interação entre elas. Introduziu-se um parâmetro perturbativo no potencial ponderomotriz (fazendo-o ter uma dependência temporal periódica), com a mesma frequência de uma partícula fortemente aprisionada no potencial (a ponto de ser possível fazer a aproximação parabólica para o potencial ponderomotriz). Não foi possível encontrar regiões significativamente caóticas sem a interação entre as placas. Apesar disso, foi feito um estudo sobre a influência do efeito de cargas sobre a dinâmica das placas, utilizando uma distribuição inicial de equilíbrio.

Os mapas de Poincaré ficaram *borrados*, como se a dinâmica fosse caótica. Entretanto, esta análise, além de prematura, é errada. A conclusão correta é que os mapas de Poincaré não poderiam mais ser uma boa ferramenta de análise, uma vez que a introdução da interação entre as placas provocou, irremediavelmente, o surgimento de novos graus de liberdade (a princípio, tantos quanto forem o número de placas, fazendo com que fosse destruída a definição das curvas KAM) no sistema. O que pode se afirmar sobre o efeito de cargas é que ele, ao menos, torna a dinâmica das placas muito mais complexa, podendo, inclusive, comprometer a coerência do FEL.

Abordando o problema de outra forma, variou-se a frequência de perturbação do potencial, fazendo surgir um novo par de pontos fixos (um novo ponto elíptico e um ponto hiperbólico [instável]).

Foram distribuídas placas com condições iniciais próximas ao ponto hiperbólico, imaginando que o efeito de carga pudesse tornar a região mais estável. O mapa de Poincaré, mais uma vez, não se mostrou uma boa ferramenta para analisar o impacto que as cargas produziram na dinâmica das placas com trajetórias (no mapa de Poincaré) próximas ao ponto hiperbólico, recaindo na situação anterior: não se pode afirmar, exatamente, qual o efeito que as cargas tiveram sobre o ponto hiperbólico. A interação entre as placas destruiu a definição das curvas KAM.

A interação entre as placas dentro do potencial ponderomotriz do FEL poderia resultar no fenômeno de quebra de onda. Com base nessa suposição, fez-se um novo estudo do FEL. Foram propostas três situações distintas (em uma delas, havia a perturbação temporal do potencial e uma distribuição inicial fora do equilíbrio; noutra, não havia perturbação do potencial, mas havia uma distribuição inicial fora do equilíbrio; e, por fim, a última, onde havia a perturbação do potencial, porém a distribuição inicial era a distribuição de equilíbrio).

O efeito de quebra de onda ocorreu nessas três situações, mostrando, pelo menos, três formas diferentes de produzir quebra de onda em um FEL. Notou-se, também, que na situação em que havia balanço e distribuição inicial diferente à de equilíbrio, concomitantemente, a quebra e a relaxação aconteceram antes das outras situações. A situação na qual não havia balanço (apenas distribuição inicial diferente à de equilíbrio) foi a que mais tempo levou para haver quebra de onda e relaxar.

A quebra de onda pode acelerar elétron, ao passo que, de modo negativo, ela aumenta o intervalo de distribuição de energia dos elétrons. Além disso, para um trabalho futuro, a

quebra de onda pode atrapalhar no processo de ganho de amplitude de radiação, uma vez que ela espalha mais rapidamente os elétrons no espaço de fase, prejudicando a formação de grupos de elétrons coerentes (que ajudam no ganho de amplitude da radiação).

A conclusão do trabalho é que, baseado no modelo apresentado, a introdução de carga no FEL faz com que se perca o controle sobre muitas propriedades interessantes desta fonte de radiação, uma vez que o efeito de carga torna a dinâmica das placas bastante complexa.

O projeto futuro deste trabalho é construir um modelo mais realista, levando à introdução dos campos auto consistentes, que, seguramente, afetarão na dinâmica das partículas. O objetivo primeiro de um trabalho futuro é analisar como esta quebra de onda observada neste trabalho afeta a saturação do ganho de amplitude por parte da onda eletromagnética de radiação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANTON, H et al. **Cálculo**. Bookman. 8ª edição. Volume 1. 2007.
- [2] BONIFACIO, R et al. Physics of the High-Gain FEL and Superradiance. **Rivista del Nuovo Cimento**. v. 13, n. 9, 1990.
- [3] BOYD, T. e SANDERSON, J. **The Physics of Plasmas**. Cambridge University Press: Cambridge. 2003.
- [4] BROWN, G., HALBACK, K., HARRIS, J. e HERMAN, W. Wiggler and Undulator Magnets – A Review. **Nuclear Instruments and Methods**. v. 208, 1983.
- [5] CHAO, A e TIGNER, M. **Handbook of Accelerator Physics and Engineering**. World Scientific Publishing Co. Cingapura. 2ª edição, 2002.
- [6] CHRISTENSEN, C. P. New Laser Source Technology. **Science**. n. 4645, vol. 224. Abril 1984.
- [7] DATTOLI, G., RENIERI, A. e TORRE, A. **Lectures on the Free Electron Laser Theory and Related Topics**. World Scientific Publishing Co. Cingapura. 1993.
- [8] DEMTRÖDER, W. **Laser Spectroscopy: Basic Concepts and Instrumentation**. Springer-Verlag: Heidelberg, Alemanha. 3ª edição. 2002.
- [9] DIKANSKY, N. e PESTRIKOV, D. **The Physics of Intense Beam and Storage Rings**. Springer-Verlag: Heidelberg, Alemanha. 1994.
- [10] FREUND, H. P. e ANTONSEN, Jr. T. M. **Principles of Free-Electron Laser**. Chapman & Hall: Londres, Inglaterra. 2ª edição. 1996.
- [11] GOLDSTEIN, H., POOLE, C. e SAFKO, J. **Classical Mechanics**. Addison Wesley. 3ª edição. 2002.
- [12] GOTO, S. Analytical Expression for Low-Dimensional Resonance Islands in a 4-Dimensional Symplectic Map. **Progress of Theoretical Physics**. v. 115, n. 2. 2006.
- [13] GUEVARA, M. Bifurcations Involving Fixed Points and Limit Cycles in Biological Systems. **Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine**. Springer-Verlag: Nova Iorque, EUA. 2003.

- [14] HELLBORG, R. **Eletrostatic accelerators: fundamental and applications**. Springer-Verlag: Heidelberg, Alemanha. 2005.
- [15] JACKSON, J. **Classical Electrodynamics**. John Wiley & Sons, Inc. 3ª edição. 1999.
- [16] JOSÉ, J. V. e SALETAN, E. J. **Classical Dynamics: A Contemporary Approach**. Cambridge University Press. 1998.
- [17] KALLENRODE, M. **Space Physics: an introduction to plasmas and particles in the heliosphere and magnetosphere**. Springer-Verlag: Heidelberg, Alemanha. 3ª edição. 2004.
- [18] KAPITZA, P. L. e DIRAC, P. A. M. The reflection of electrons from standing light waves. **Proc. Cambridge Philos. Soc.** 29, 297. 1933.
- [19] KUHN, T. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. Perspectiva: São Paulo. 1982.
- [20] LANDAU, L. D. e LIFSHITZ, E. M. **Mechanics**. Butterworth-Heinemann. 3ª edição. 1976.
- [21] MADEY, J. Stimulated Emission of Bremsstrahlung in a Periodic Magnetic Field. **Journal of Applied Physics**. v. 42, n. 5, abril de 1971.
- [22] MADEY, J., DEACON, D., ELIAS, L., RAMIAN, G., SCHWETTMAN, H. e SMITH, T. First Operation of a Free-Electron Laser. **Physical Review Letters**. v. 38, n. 16, abril de 1977.
- [23] MEDEIROS, E. S. **Controle de Caos e Saltos entre Atratores em um Sistema com Impactos**. São Paulo: USP, 2010. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física.
- [24] MENZEL, R. **Photonics: Linear and Nonlinear Interactions of Laser Light and Matter**. Springer-Verlag: Heidelberg, Alemanha. 2ª ed. 2007.
- [25] MILLER, R. B. **An Introduction to the Physics of Intense Charged Particle Beams**. Plenum Press, New York, EUA. 1982.
- [26] MOSKALEV, V. A. e SERGEEV, G. I. A Cyclic Induction Accelerator. **Russian Physics Journal**. n. 3, v. 46, 270-277, 2003.
- [27] MOTZ, H. e LUCHINI, P. **Undulators and Free-Electron Lasers**. Oxford University Press: Oxford, Estados Unidos. 1990.



- [28] MOTZ, H., THON, W. e WHITEHURST, R. Experiments on Radiation by Fast Electron Beams. **Journal of Applied Physics**. v. 24, n. 7, julho de 1953.
- [29] O'SHEA, P. G. e FREUND, H. P. Free-Electron Laser: Status and Applications. **Science**. n. 292, 1853-1858. 2001.
- [30] QUILLEN, A. C. Chaos Caused by Resonance Overlap in the Solar Neighborhood: Spiral Structure at the Bar's Outer Lindblad Resonance. **The Astronomical Journal**. n. 125, 2003.
- [31] READY, J. F. e FARSON, D. F. **LIA Handbook of Laser Materials Processing**. Laser Institute of America. Magnolia Publishing, Inc. 1ª edição. 2001.
- [32] RIZZATO, F. Dispersive effects on the main-wave modulational instability in free-electron lasers. **Physical Review A**. v. 41, n. 3, fevereiro de 1990.
- [33] RIZZATO, F., PAKTER, R. e LEVIN, Y. Driven one-component plasmas. **Physical Review E**. 2009.
- [34] RIZZATO, F., PAKTER, R. e LEVIN, Y. Wave Breaking and Particle Jets in Intense Inhomogeneous Charged Beams. **Physics of Plasmas**. n. 14:110701. 2007.
- [35] SALDIN, E. L., SCHNEIDMILLER, E. A. e YURKOV, M. V. **The Physics of Free Electron Lasers**. Springer-Verlag: Heidelberg, Alemanha. 2000.
- [36] SCHERER, Claudio. **Métodos Computacionais da Física**. Livraria da Física: São Paulo. 1ª edição. 2005.
- [37] SCHMÜSER, P., DOHLUS, M. e ROSSBACH, J. **Ultraviolet and Soft X-Ray Free-Electron Lasers: Introduction to Physical Principles, Experimental Results, Technological Challenges**. Springer-Verlag: Heidelberg, Alemanha. 2008.
- [38] TRÄGER, F. **Springer Handbook of Lasers and Optics**. Springer-Verlag: Heidelberg, Alemanha. 2007.
- [39] TRINES, R. **Generation of Highly-Energetic Electrons in Laser-Plasma Wakefields**. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2003. Tese de Doutorado, Technische Universiteit Eindhoven.
- [40] WANGLER, T. P. **RF Linear Accelerators**. Wiley-VCH: Weinheim, Alemanha. 2ª edição. 2008.

[41] Disponível em: <<http://www.slac.stanford.edu>>. Acesso em 29/09/2010, às 00:53.