

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Produção de Entropia Devido a
Flutuações da Métrica em um Sistema
de N Partículas**

Artur de Souza Lima Malabarba
artur.malabarba@ufrgs.br

Orientação: **S. D. Prado**
R. M. C. de Almeida

Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre

22 de maio de 2012

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Revisão Bibliográfica	3
1.2	A Função Correlação	7
2	Ferramentas Teóricas	9
2.1	Entropia de von Neumann	9
2.2	Transformada de Fourier	10
2.3	Variáveis Estocásticas	11
2.4	Integral de Caminho de Feynman	11
2.4.1	O Propagador	12
2.4.2	A Partícula Livre	13
2.4.3	A Perturbação	14
3	Resultados	16
3.1	Metodologia	16
3.2	Uma Partícula	18
3.2.1	Discussão	20
3.3	N Partículas	23
3.3.1	Discussão	25

Apêndices	26
A	27
B	29
B.1 Variáveis Gaussianas Discretas	29
B.2 As Médias	31
B.3 Concluindo	32
C	33
C.1 Equação (3.10)	33
C.2 Equação (3.14)	41
C.3 Equações (3.15) e (3.16)	42
C.4 Equação (3.18)	43
Referências Bibliográficas	51

Resumo

Quantum theory applied to macroscopic systems predicts oscillatory behavior for macroscopic systems. Also, the deterministic character of microscopic physics contradicts the irreversibility of thermodynamics. Here we study the effects of energy and metric fluctuations on entropy production focusing on the statistical properties of a three-dimensional gas. We derive a general expression for the probability density operator without assuming any specific expression for the spatial correlation of the fluctuations, which yields results for a wide variety of scenarios. We predict the decoherence and thermalization times for N non-interacting particles scale with N^{-2} , dominating the effects from external thermalization sources, thus facilitating its measurement and the verification of the existence of fluctuations.

A teoria quântica aplicada a sistemas microscópicos prevê comportamento oscilatório para objetos macroscópicos. Também, o caráter determinístico da física microscópica contradiz a irreversibilidade da termodinâmica. Aqui, estudamos os efeitos que flutuações de métrica e de energia tem sobre a produção de entropia, focando nas propriedades estatísticas de um gás tridimensional. Derivamos uma expressão geral para o operador densidade de probabilidade, sem assumir uma expressão específica para a correlação espacial das flutuações, que leva a resultados para uma vasta variedade de cenários. Nós prevemos que os tempos de decoerência e de termalização para N partículas não-interagentes cai com N^{-2} , dominando os efeitos de fontes externas de termalização, de modo a facilitar sua medida e a verificação da existência as flutuações.

Agradecimentos

Agradeço

à minha companheira, Camila Amavisca, pela sua dedicação e compreensão;

à minha família pelo seu apoio;

às minhas orientadoras por seu auxílio;

e aos meus colegas, Jonier Antunes, Jardel Cestari, José Luis e Everton Granemann, por conversas interessantes e frutíferas no assunto.

Capítulo 1

Introdução

As maiores dificuldades da física fundamental contemporânea estão no estabelecimento de pontes entre teorias de diferentes escalas. Na escala de número de partículas, por exemplo, temos a incompatibilidade entre a termodinâmica e as mecânicas clássica e quântica. Enquanto estas duas são compostas de leis dinâmicas determinísticas e reversíveis, a termodinâmica incorpora inúmeros processos irreversíveis. Através da mecânica estatística é possível ligar estados de equilíbrio termodinâmico a estados microscópicos de equilíbrio de sistemas clássicos ou quânticos. No entanto, não é possível explicar como um estado microscópico arbitrário convergirá de forma irreversível para um estado termodinâmico, visto que suas leis de movimento são reversíveis. Esta contradição, aqui denominada de conflito de termalização, se deve ao determinismo e à simetria de inversão temporal de ambas teorias microscópicas comparados com a irreversibilidade de processos termodinâmicos [1]. Considere a termalização de dois gases em contato térmico a temperaturas diferentes. A termodinâmica dita que o estado final (equilíbrio térmico) é de entropia mais alta que o estado inicial. Contudo, tanto a descrição clássica quanto a descrição quântica de sistemas fechados deste processo seguem leis

reversíveis e, portanto, não preveem aumento de entropia [2].

Outro conflito de escalas está nas Flutuações Quânticas Macroscópicas. A extensão direta da teoria quântica para o mundo macroscópico leva a várias contradições. Aplicando-se rigorosamente os postulados da mecânica quântica para objetos macroscópicos, conclui-se que deve haver fases quânticas associadas ao sistema macroscópico, denominadas na literatura de Flutuações Quânticas Macroscópicas [3–6] (FQM), acarretando flutuações na probabilidade de medida das propriedades de um sistema, como sua densidade, orientação, coordenadas. Estas, por sua vez, levam a previsões irreais e implicam aparentes paradoxos como o gato de Schrödinger [7, 8]. Isso está vinculado diretamente à dualidade onda-partícula, visto que uma partícula quântica goza de propriedades ondulatórias e objetos macroscópicos não. Uma solução para este conflito também se aplicaria a outros tópicos como o paradoxo Einstein-Podolsky-Rosen [9, 10] e ao problema da medida [11].

1.1 Revisão Bibliográfica

Flutuações quânticas da métrica têm sido investigadas como uma solução em potencial para ambos conflitos [12–14], devido à sua propriedade de quebrar a simetria de inversão temporal e à sua natureza estocástica. As flutuações são quase sempre dadas por um termo de ruído estocástico, e geralmente são implementadas em uma das três possíveis formas:

1. somadas às componentes da métrica;
2. somadas à densidade de energia de um dado sistema;
3. somadas ao índice de refração do vácuo.

Dentre outros, elas também têm sido estudadas sob o contexto de cosmologia [15–18]. Hu e Shiokawa [16], por exemplo, mostraram em 1998 os efeitos que flutuações da métrica têm sobre o campo eletromagnético e até mesmo

sobre o horizonte de buracos negros. Usando a terceira abordagem, um dos seus resultados foi que, dadas as condições corretas, essas flutuações levam à criação e aniquilação espontâneas de partículas.

No que diz respeito a FQM, foi mostrado quantitativamente que pelo menos as implementações 1. e 2. acarretam num decaimento rápido das oscilações macroscópicas de probabilidade [6, 19]. Em particular, os resultados obtidos por Diósi [12] indicam um amortecimento exponencial das oscilações de fase quânticas. Acrescentando um termo de ruído gaussiano (branco no tempo) ao potencial gravitacional newtoniano, e tomando as médias como

$$\begin{aligned}\langle \phi(\mathbf{r}, t) \rangle &= 0, \\ \langle \phi(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}', t') \rangle &= \frac{\hbar G}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t - t'),\end{aligned}\tag{1.1}$$

ele obtém a equação de von Neumann de um sistema sujeito a essa perturbação

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_0, \hat{\rho}] - \frac{G}{2\hbar} \int \int \frac{d^3r d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [u(\mathbf{r}), [u(\mathbf{r}'), \hat{\rho}]],\tag{1.2}$$

onde u é denominado o operador densidade de massa local. Note que o termo proporcional a G é real, provocando um amortecimento na evolução oscilatória das componentes não-diagonais do operador. Esta equação é importante para nós, pois esse termo real proporcional a um comutador duplo é um termo recorrente no estudo de decoerência devido a flutuações. Nesse caso específico, o termo diverge caso se tenha uma partícula completamente localizada, sendo, por isso, necessário estabelecer uma distância mínima a ser considerada (denotada por Diósi[12] como a largura crítica). A função correlação empregada também é semelhante a que usamos nesse trabalho. Como veremos adiante, isso estabelece uma ligação direta com essa dissertação, exceto que a nossa abordagem elimina a divergência espacial em troca de uma temporal.

Para uma revisão (e referências) sobre decoerência temporal de autoestados de energia ver [20]. Nesta revisão, Diósi define a decoerência de um sistema quântico como a destruição da interferência, e se denomina como decoerência de energia quando há destruição de interferência entre autoestados de energia. Decoerência diminui dispersões em valores esperados (como ΔE). Dispersões coerentes muito grandes são características de um sistema fortemente quântico, enquanto que dispersões pequenas levam a um comportamento clássico do sistema. Essa relação leva a crer que a decoerência é vital no surgimento do comportamento clássico a partir de sistemas quânticos.

A decoerência pode ser abordada a partir dos autoestados de qualquer observável, mas a decoerência de energia, em particular, é de interesse pois ela (entre outras) garante a localização de objetos massivos. Um exemplo interessante propõe que o estado de um sistema no instante t depende, na verdade, de $t + \delta t$, onde δt é uma variável estocástica com $\langle (\delta t)^2 \rangle_{\delta t} = \tau t$. Isso é equivalente a assumir uma incerteza na constante \hbar^{-1} [20]. Como resultado, tem-se que as componentes não-diagonais do operador densidade de probabilidade tendem a zero exponencialmente a uma taxa $\tau(E_i - E_j)^2/\hbar^2$. Neste caso, a equação para a evolução temporal do operador é:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \hat{\rho}] - \frac{\tau}{\hbar^2}[H, [H, \hat{\rho}]]. \quad (1.3)$$

Note aqui, novamente, a presença de um termo real proporcional ao duplo comutador. Esse termo nos permite estimar o tempo de decoerência de sistemas em termos de τ como o inverso da taxa de decoerência. A falha desta (e da maioria das abordagens) é que a determinação de valores para o tempo de decoerência está sujeita a uma arbitrariedade na determinação de τ .

Como exemplo, citamos aqui Milburn [21]. Usando uma abordagem bastante semelhante a essa, e tomando τ como sendo o tempo de Planck ($\sqrt{\frac{\hbar G}{c^2}} \approx 10^{-44} s$), ele chega a tempos de decoerência condizentes com o que se espera de tal mecanismo (ver tabela 1.1). A superposição de energia é a diferença $E_i - E_j$ que influencia a taxa com que é amortecida a componente

Escala de Grandeza	Superposição de Energia	Tempo
Atômica	1 eV	10^{13} s
Altas Energias	1 GeV	10^{-5} s
Macroscópica	1 J	10^{-25} s

Tabela 1.1: Tempos de decoerência pelo método de Milburn[20].

$i - j$ do operador. Como vemos, os tempos de decoerência variam desde a ordem de 10^{13} s, quando a dispersão de energia é de 1 eV (escala atômica), até 10^{-25} s para escalas macroscópicas de energia.

Com respeito à taxa de produção de entropia, no entanto, ainda não há um resultado quantitativo semelhante. Em 1994, Chaves *et al.* [13] abordaram este tópico considerando o efeito que flutuações da métrica teriam na energia cinética de uma partícula. Para se incorporar as flutuações na métrica, o hamiltoniano da partícula é dado por:

$$H = \frac{\mathbf{p}_i (\delta^{ij} + \xi^{ij}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{p}_j}{2m}, \quad (1.4)$$

onde ξ^{ij} são variáveis estocásticas gaussianas. A partir do lagrangiano, eles constroem uma expressão para a função de Green do operador densidade de probabilidade médio da partícula no espaço de posição. Através dela, se torna evidente que a localização espacial do operador é uma consequência das flutuações. Com isso, fazem uma previsão qualitativa para a produção de entropia de uma partícula e também preveem o tempo de decoerência da partícula como

$$\tau_{dec} = \left(\frac{\hbar}{K} \right)^2 \frac{1}{T_P}, \quad (1.5)$$

sendo K sua energia cinética e T_P o tempo de Planck. A partir dessa expressão, eles também estimam que o tempo de decoerência para um sistema de

N partículas seguiria

$$\frac{1}{\tau_{dec}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau_{dec}^i} = N \left\langle \frac{1}{\tau_{dec}^i} \right\rangle. \quad (1.6)$$

Partindo de suposições similares, nós obtivemos uma expressão quantitativa tanto para o operador de densidade de probabilidade quanto para a produção de entropia válidas para tempos curtos. Prosseguindo com os cálculos para um gás de N partículas não-interagentes, escrevemos uma expressão geral para a produção de entropia do gás (com a entropia de von-Neumann). Em contraste com resultados anteriores, a nossa formulação indica que o tempo de decoerência é da ordem de N^{-2} , ao invés de N^{-1} . Como discutido nos parágrafos finais, tal resultado é de mais fácil verificação experimental que o anterior.

1.2 A Função Correlação

Antes de iniciar os nossos cálculos propriamente, vale a pena discutir o que podemos supor sobre o ruído e sobre a sua função de correlação espacial $f(\mathbf{x})$. O mais provável é que algum mecanismo ainda não compreendido está por trás de todos os conflitos discutidos na seção 1. No entanto, uma ótima forma de melhor compreender este mecanismo é verificar como ele deve se comportar nos limites que já conhecemos. Ao investigar os efeitos de um particular ruído, queremos verificar se é possível responder várias perguntas com um único modelo. Caso seja, teremos confirmado que é possível que o mesmo fenômeno fundamental seja responsável por todos estes efeitos, e ainda saberemos que o modelo utilizado nos deixa um passo mais perto de compreender este fenômeno.

Mas que propriedades podemos assumir a priori para o ruído? Num primeiro momento, devemos começar pelo caso mais simples e prático. Por se tratar de oscilações nas componentes do tensor de métrica, é de se esperar que

ele esteja sujeito a influências semelhantes às da própria métrica. Ou seja, fatores como o tensor energia-momento ($T^{\mu\nu}$), que variam com o sistema e determinam a forma da métrica, também devem determinar o comportamento das flutuações da métrica. Felizmente, essa dependência se reduz quanto menor for a energia envolvida. Assim, para que o sistema seja matematicamente abordável, precisamos lidar apenas com densidades de energia que não causem variações nas componentes mais intensas que as flutuações de ξ . Caso contrário, o próprio sistema com que lidamos afetará a natureza do ruído, resultando em um efeito não-linear.

De principal interesse para os nossos cálculos é a função de correlação espacial $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Desde que o sistema respeite o limiar estabelecido, temos poucas restrições sobre a forma dessa função. Como trataremos apenas de sistemas homogêneos, f depende apenas do módulo do seu argumento. A homogeneidade na densidade de energia dos sistemas que serão tratados poderá ser verificada pelo fato de que $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ é constante. A função correlação representa o quanto as flutuações no ponto \mathbf{x} coincidem com as no ponto \mathbf{x}' . Assim, a correlação deve ter uma largura característica (maior que o comprimento de Planck, $\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-35}m$, mas muito menor que sistemas macroscópicos) além da qual ela cai rapidamente a zero. Não é necessário estipular a forma de f dentro dessa largura, basta para nós que o seu valor no zero ($f(0)$) seja o máximo absoluto da função.

Capítulo 2

Ferramentas Teóricas

Ao longo deste texto faremos uso de diversas ferramentas cuja compreensão é essencial para a compreensão do texto. Nesta seção, abordaremos as mais importantes, revisando as propriedades relevantes daquelas mais conhecidas e explicando com mais ênfase as que não são estudadas num curso de graduação.

2.1 Entropia de von Neumann

A entropia de von Neumann é uma generalização da entropia de Boltzmann [22],

$$S = \ln \Omega \tag{2.1}$$

direcionada a mecânica estatística quântica. Ao contrário da entropia de Gibbs, ela não depende de conceitos clássicos como coordenadas do espaço de fases, e leva em conta a possibilidade de um sistema se encontrar em uma superposição de microestados.

Dado um operador densidade de probabilidade $\hat{\rho}$, a entropia de von Neu-

mann é definida como:

$$S = \text{Tr} [\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \quad (2.2)$$

O termo $\ln \hat{\rho}$ é um operador que tem os mesmos autovetores que $\hat{\rho}$, e cujos autovalores são o logaritmo natural dos autovalores de $\hat{\rho}$.

2.2 Transformada de Fourier

Como a transformada de Fourier é utilizada com recorrência nessa dissertação, vamos listar as propriedades que nos são mais importantes. Sendo $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ o funcional da integral de Fourier aplicada em \mathbf{k} , com \mathbf{k} e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ e sendo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável cuja transformada é

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{k} &\mapsto \mathcal{F}_{\mathbf{k}}(f) \end{aligned} \quad (2.3)$$

temos que[23]

1. Se $g(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}^n$, então

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}}(g.f) = a\nabla_{\mathbf{k}}^n F(\mathbf{k}); \quad (2.4)$$

2. Para qualquer $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ integrável cuja transformada é G ,

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}}(g.f) = (G * F)(\mathbf{k}). \quad (2.5)$$

Onde o produto de convolução $G * F$, definido por

$$(G * F)(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{v} G(\mathbf{v})F(\mathbf{k} - \mathbf{v}), \quad (2.6)$$

é bilinear e simétrico (a propriedade de simetria será relevante durante as contas).

2.3 Variáveis Estocásticas

Uma variável estocástica [24] (ou variável aleatória), a grosso modo, é uma variável cujo valor está sujeito a fatores que são imprevisíveis no dado contexto. Apesar de imprevisível, o valor de uma variável estocástica está sujeito a uma distribuição de probabilidade que descreve a (densidade de) probabilidade de cada valor possível.

No nosso caso, usamos uma variável estocástica que é função do tempo e do espaço. Ou seja, seu valor a cada instante e em cada ponto é uma realização diferente (mas não independente) dos possíveis valores da variável. Apresentaremos aqui as características de uma variável gaussiana contínua simples. No apêndice B descrevemos com mais detalhes como esses princípios se aplicam ao nosso caso de uma função de quatro coordenadas.

Uma variável estocástica gaussiana, segue uma distribuição de probabilidade do tipo

$$\rho(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi M}} e^{-\frac{(a-a_0)^2}{2M}}, \quad (2.7)$$

onde a_0 é a média (primeiro momento) e M é a média quadrática (segundo momento) dos possíveis valores assumidos pela variável. Outra forma de definir uma variável estocástica seria pelo seu funcional gerador (seção 3.1).

2.4 Integral de Caminho de Feynman

A integral de caminho de Feynman [25] é um método para se calcular a função de Green de sistemas quânticos a partir de um lagrangeano clássico. Dado um estado inicial cuja representação no espaço de posição é expressa por $\Psi(\mathbf{x}, 0)$, pode-se calcular o estado desse sistema no instante t a partir de sua função de Green $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}' K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', 0) \Psi(\mathbf{x}', 0). \quad (2.8)$$

A função de Green K também é comumente chamada de propagador do sistema. Aqui, o papel da integral de caminho é fornecer esse propagador. Mas antes de apresentá-la precisamos estabelecer melhor o contexto.

2.4.1 O Propagador

A formalização da mecânica quântica por integrais de caminho de Feynman supõe que uma partícula, ao se deslocar do ponto a até o ponto b , percorre todos os caminhos possíveis entre esses dois pontos. A contribuição que cada caminho representa para o todo é determinada por uma fase imaginária, calculada como função do caminho. Os argumentos de Feynman são que esta fase deve ser aproximadamente constante nas proximidades do caminho clássico, mas oscilar bastante quanto mais longe estiver[26]. Dessa forma, as contribuições devido aos caminhos muito diferentes do caminho clássico tenderiam a se anular, enquanto os caminhos semelhantes aos clássicos se somam.

Uma forma de se atingir isso é garantir que a contribuição de cada caminho seja uma função cujo único extremo é o caminho clássico, que é exatamente o papel exercido pela ação clássica. Assim, estabelecemos que a função de Green deve ser dada por uma soma sobre todos os caminhos possíveis de um fator peso do tipo $e^{-iS(\mathbf{r})/\hbar}$, onde $S = \int L dt$ é ação referente a trajetória \mathbf{r} e \hbar é necessário por consistência dimensional. Portanto, escrevemos

$$K(b, a) = K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = \int_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}=\mathbf{x}_b} \mathcal{D}\mathbf{x} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(\mathbf{x}) dt} \quad (2.9)$$

onde $\int_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}=\mathbf{x}_b} \mathcal{D}\mathbf{x}$ deve ser lido como a soma sobre todas as trajetórias que passam por \mathbf{x}_a em t_a e por \mathbf{x}_b em t_b .

2.4.2 A Partícula Livre

O maior problema da formalização de integrais de Feynman é a falta de uma definição matemática para esse termo que garanta a convergência da integral. Para nós, no entanto, bastará a expressão para uma partícula livre[25]

$$\int_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}=\mathbf{x}_b} \mathcal{D}\mathbf{x} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(\mathbf{x})dt} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_i \right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(\left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} L(t_i)\epsilon} \right)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_a, \quad \mathbf{x}_N = \mathbf{x}_b. \quad (2.10)$$

Aqui, basta entender que ele simboliza a discretização da curva de caminho em N segmentos de reta, cada um com uma duração temporal de $\epsilon = (t_b - t_a)/N = t_{i+1} - t_i$, onde cada segmento vai do ponto \mathbf{x}_i em t_i até o ponto \mathbf{x}_{i+1} em t_{i+1} . Integra-se cada um desses extremos sobre todo o espaço para garantir que se cubra todas as curvas possíveis, mas mantém-se fixos os pontos \mathbf{x}_a e \mathbf{x}_b para garantir as condições de contorno. Finalmente, toma-se o limite com $N \rightarrow \infty$ para recuperar uma curva contínua. Esse método não cobre todo o conjunto de trajetórias contínuas que se encaixam nas condições de contorno, mas cobre um subconjunto denso desse conjunto. Isso será o bastante, mas não cabe a essa dissertação demonstrar. Para mais detalhes sobre as tecnicidades desse termo ou sobre integrais de Feynman em geral, ver [25].

Para avaliar as integrais, substitui-se $\dot{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)/\epsilon$ e encontra-se o padrão nas $N-1$ integrais. Os detalhes específicos dessa conta estão descritos no apêndice A, e obtém-se que o propagador para a partícula livre é

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2i\pi\hbar(t_b - t_a)} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{im}{2\hbar(t_b - t_a)}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a)^2}. \quad (2.11)$$

Também é possível verificar que essa expressão traz o mesmo resultado que se calculássemos a função de Green da equação de Schrödinger com o hamiltoniano de partícula livre. A vantagem aqui é que o resultado foi obtido

através do lagrangiano clássico.

2.4.3 A Perturbação

Existem soluções para o propagador para uma variedade de lagrangianos possíveis. Para o nosso caso, no entanto, precisaremos abordar o problema de forma perturbativa. Os cálculos que são desenvolvidos no apêndice C usam uma forma adaptada do que é apresentado nessa seção, mas a descrição dessa forma cabe ao apêndice. Aqui descrevemos o método mais simples de teoria de perturbação aplicada a integrais de caminho de Feynman.

Dado um lagrangiano do tipo

$$L(t) = L_0 + L', \quad (2.12)$$

onde o K_0 associado a L_0 é conhecido, e L' não é função da velocidade \dot{x} , é possível aproximar o propagador completo K até primeira ordem em L' da seguinte forma:

- Expande-se a exponencial de ação, de modo que

$$e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} = e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^{t_b} L_0(t) dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \int L'(\tau) d\tau \right)^n, \quad (2.13)$$

e trunca-se até primeira ordem em L' , onde o termo de ordem 0 resulta em K_0 e o termo seguinte é a perturbação (denominado K_1);

- Aplica-se para K_1 o mesmo método de discretização utilizado acima, colocando em evidência a integral temporal, separando os intervalos

discretizados antes e depois de τ , e denominando $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}(\tau)$

$$K_1(b, a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_c \frac{iL'(\mathbf{x}_c)}{\hbar} \left(\prod_{i=1}^{c-1} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_i \right) \left(\prod_{i=0}^{c-1} E_i \right) \\ \times \left(\prod_{i=c+1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_i \right) \left(\prod_{i=c}^{N-1} E_i \right) \quad (2.14)$$

onde,

$$E_i = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} L(t_i)\epsilon}; \quad (2.15)$$

- Efetuam-se todas as integrais espaciais, exceto \mathbf{x}_c , resultando em

$$K_1(b, a) = \frac{i}{\hbar} \int d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_c K(b, c) L'(\mathbf{x}_c) K(c, a). \quad (2.16)$$

Capítulo 3

Resultados



3.1 Metodologia

Aqui, seguindo uma metodologia semelhante a [13], adicionamos uma perturbação pequena às componentes espaciais do tensor de métrica de espaço plano tal que

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \xi_{\mu\nu}(x), \quad (3.1)$$

onde $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ é um ponto no espaço-tempo e $\eta_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de métrica de Minkowsky. A perturbação $\xi_{\mu\nu}$ aplicada é tal que:

- A cada ponto x , $\xi_{\mu\nu}(x)$ consiste de três variáveis estocásticas gaussianas (ξ_{11} , ξ_{22} e ξ_{33}) que podem ou não depender uma das outras.
- $\xi_{\mu\nu}$ tem média nula e é, em geral, muito pequeno (tem desvio $\ll 1$). Estimativas da sua ordem de magnitude são tratadas mais adiante.

A dinâmica resultante do sistema depende de se as diferentes componentes $\xi_{\mu\nu}$ são correlacionadas ou não. Ao invés de um ruído estritamente branco,

nós consideramos o caso mais genérico onde a função de autocorrelação tem larguras características no tempo e no espaço, e somente a sua largura ϵ no tempo é suposta curta o bastante para a aproximação de ruído branco. A dependência espacial da correlação $f(\mathbf{x})$, no entanto, é tomada como descrito abaixo.

Aqui temos uma escolha a fazer com relação à natureza das flutuações. Já que $\xi_{\mu\nu}$ contém três componentes não-nulas, devemos especificar se estas componentes são independentes, ou não, entre si. Por exemplo, caso tomássemos as três componentes como independentes teríamos que $\langle \xi_{ii}\xi_{jj} \rangle_{\xi} = \delta_{ij} \langle \xi_{ii}\xi_{ii} \rangle_{\xi}$. Neste caso, os cálculos que seguem mudariam levemente, e o resultado final diferiria apenas por um fator numérico. Neste trabalho, ξ é visto como a consequência de flutuações escalares na densidade de energia do sistema, restrito a efeitos de primeira ordem, por isso, assumimos que as três componentes são idênticas (de modo a manter um único grau de liberdade) e, portanto, dependentes. Assim, definimos:

$$\xi_{\mu\nu}(x) = \begin{cases} \xi(x), & \text{se } \mu = \nu = 1, 2, 3; \\ 0, & \text{outros casos,} \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\xi(x)$ é uma variável estocástica com distribuição de probabilidade definida pelo funcional gerador

$$G[u] = \langle e^{i \int \xi(\mathbf{z},t)u(\mathbf{z},t)d\mathbf{z}dt} \rangle_{\xi} \quad (3.3a)$$

$$= e^{-\frac{\epsilon}{2} \int u(\mathbf{z},t)u(\mathbf{z}',t)f(\mathbf{z}-\mathbf{z}')d\mathbf{z}d\mathbf{z}'dt}, \quad (3.3b)$$

característico de variáveis gaussianas, onde a correlação espacial é uma função real, par e módulo-quadrado integrável que define as propriedades de ξ . O fator ϵ é necessário por consistência dimensional. Nas nossas equações $\langle \cdot \rangle_{\xi}$ é usado para denotar média sobre todas as realizações do ruído, enquanto $\langle \cdot | \cdot \rangle$ é usado para denotar produto interno padrão de vetores. Esse funcional gerador resume todas as propriedades que estabelecemos para o ruído. Ele

é característico de variáveis estocásticas gaussianas, e derivadas funcionais da equação (3.3b) tomadas em $u = 0$ resultam em $\langle \xi \rangle_\xi = 0$ e $\langle \xi(x)\xi(x') \rangle_\xi = \epsilon f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$, ou seja, ξ é um ruído branco no tempo, mas colorido no espaço. Para mais detalhes sobre como calcular as médias a partir do funcional vide apêndice B.2. As únicas suposições feitas sobre a função de correlação espacial são as propriedades discutidas acima: (i) ela é par e (ii) ela tende a zero monotonicamente e (devido à sua curta largura) é módulo-quadrado integrável. Para uma explicação melhor sobre o funcional gerador e sua relação com as médias e com variáveis gaussianas, ver o apêndice B.

3.2 Uma Partícula

Para estudar os efeitos de primeira ordem da perturbação sobre a evolução temporal do sistema, começamos com o caso simples (e extensível) de uma única partícula de massa m dentro de uma caixa rígida. Nas contas que se seguem, buscamos apenas descrever os efeitos em primeira ordem que a perturbação teria na dinâmica de uma partícula, através do seu lagrangiano.

Devido à perturbação sobre $g_{\mu\nu}$, o lagrangiano do sistema é

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2\xi(x), \quad (3.4)$$

onde foi usado o lagrangiano não-relativístico. Pode se mostrar que, até mais baixa ordem em ϵ , os resultados são idênticos a se fosse usado o lagrangiano relativístico. Usando integrais de caminho de Feynman [25] para calcular a evolução temporal do operador de densidade de probabilidade leva a

$$\rho_\xi(\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_a d^3\mathbf{y}_a K_\xi(b, a) \rho(\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, 0) \quad (3.5a)$$

$$K_\xi(\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, t; \mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, 0) = \int_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}=\mathbf{x}_b} \mathcal{D}x \int_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_a}^{\mathbf{y}=\mathbf{y}_b} \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar}[S[\mathbf{x}] - S[\mathbf{y}]]} \quad (3.5b)$$

$$S[\mathbf{x}] = S_0[\mathbf{x}] + \frac{m}{2} \int_0^t \dot{\mathbf{x}}^2 \xi(x, t) dt' \quad (3.5c)$$

Aqui, S_0 é a ação clássica de uma partícula livre, ponto acima da variável denota derivada temporal, e as integrais de caminho de (3.5b) são tomadas sobre todas as trajetórias possíveis que começam no ponto \mathbf{x}_a e \mathbf{y}_a e terminam no ponto \mathbf{x}_b e \mathbf{y}_b (pontos no espaço tridimensional). Para avaliar quantidades observáveis precisamos do operador densidade de probabilidade médio $\langle \rho \rangle_\xi$. Tomando a exponencial da eq. (3.3a) em $u(\mathbf{z}, t) = \eta (\dot{\mathbf{x}}^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \dot{\mathbf{y}}^2 \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}))$ (onde $\eta = m/2\hbar$) leva à última exponencial da eq. (3.5a). Já que a condição inicial e a ação clássica são independentes de ξ , tomar a média de K_ξ sobre as realizações do ruído leva à exponencial na eq. (3.3b),

$$\langle K_\xi \rangle = K = \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar}(S_0[\mathbf{x}] - S_0[\mathbf{y}])} e^{-\frac{\epsilon \eta^2}{2} \kappa}, \quad (3.6)$$

onde

$$\kappa = \int_0^t [(\dot{\mathbf{x}}^4 + \dot{\mathbf{y}}^4) f(0) - 2\dot{\mathbf{x}}^2 \dot{\mathbf{y}}^2 f(\mathbf{x} - \mathbf{y})] dt \quad (3.7)$$

será denominado de núcleo da eq. (3.6). A eq. (3.6) mostra que, perante a média, a contribuição de fase imaginária no expoente se torna um termo de amortecimento real, negativo e proporcional à massa. Sabe-se que o integrando é positivo desde que $f(\mathbf{x}) \leq f(0)$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$, que está de acordo com as nossas suposições sobre a correlação. Como vamos ver, este termo é responsável por amortecer as FQM e aumentar a entropia.

Tomando a média sobre ξ da eq. (3.6) e mantendo apenas termos até primeira ordem em f , obtém-se

$$K(b, a) \approx K_0(b, a) + \frac{3t}{4\epsilon} [5f(0) + 3I(\Delta_b, \Delta_a)] K_0(b, a) \quad (3.8a)$$

$$I = \frac{\Delta_b - \Delta_a}{[\Delta_b - \Delta_a]^2} \int_{\Delta_a}^{\Delta_b} f(z) dz. \quad (3.8b)$$

Onde $\Delta_a = \mathbf{x}_a - \mathbf{y}_a$, $\Delta_b = \mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b$, e a trajetória de integração de I é

um segmento de reta entre os dois extremos. Tomando a média sobre ξ da eq. (3.5a) leva a

$$\rho(\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, t) = \int \int d^3\mathbf{x}_a d^3\mathbf{y}_a K(b, a) \rho(\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, 0). \quad (3.9)$$

3.2.1 Discussão

Finalmente, combinando a eq. (3.8a) para o propagador com a eq. (3.9) para a evolução temporal de ρ , obtém-se

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = B \left[1 + \frac{15t}{4\epsilon} f(0) + \frac{9t}{4\epsilon} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (3.10)$$

onde

$$\rho_F = \left(\frac{m}{2\pi\hbar t} \right)^3 \int d^3\mathbf{x}' d^3\mathbf{y}' \rho(\mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) e^{i\eta \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2 - (\mathbf{y}-\mathbf{y}')^2}{t}} \quad (3.11)$$

é a evolução de partícula livre e $B = (1 + 6t/\epsilon)^{-1}$ é obtida por normalização (vide apêndice C.1). Vale enfatizar que a equação acima é válida para qualquer função de correlação e qualquer densidade de probabilidade inicial, desde que ambas tenham transformadas de Fourier. Também é necessário que o domínio de integração (o tamanho da caixa) seja muito grande comparado com $\sqrt{\hbar t/m}$.

A eq. (3.10) é útil devido à sua generalidade. Ela nos diz o efeito de primeira ordem que qualquer perturbação estocástica branca-no-tempo da métrica tem na dinâmica de uma partícula quântica isolada, partindo de qualquer condição inicial. O principal efeito da expressão dentro dos colchetes é o amortecimento de todos os termos não-diagonais. Assim, se tomarmos a taxa de variação de ρ a $t = 0$,

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_F - \rho_F \frac{9}{4\epsilon} (f(0) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})). \quad (3.12)$$

De imediato se veem as semelhanças com outros resultados da literatura, como as equações (1.2) e (1.3). O primeiro termo do lado direito da eq. (3.12)

corresponde à evolução oscilatória padrão da mecânica quântica, satisfazendo tanto simetria de inversão temporal quanto conservação de entropia. Por outro lado, a contribuição do segundo termo é mais rica. Ela destrói este comportamento oscilatório, amortece componentes não-diagonais, mantém o comportamento padrão da diagonal e gradualmente leva a um operador densidade fortemente localizado no espaço de posição. Visto que $f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ decai rapidamente (para $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ além da largura de correlação) a taxa com que uma dada componente $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é amortecida varia rapidamente de 0 até $9f(0)/4\epsilon$ (nesta mesma região).

O efeito de localização do operador densidade deve ser muito lento para uma partícula. A eq. (3.12) mostra que o tempo característico para esse efeito é de $\tau = 4\epsilon/9f(0)$, indicando que $f(0)$ deve ser igualmente pequeno e, portanto, contribuindo para a validade da expansão em primeira ordem. Este tempo característico representa o tempo que leva para que o efeito do ruído altere de forma significativa o estado de uma partícula sem outras interações (tendendo a um estado localizado). Também, vale notar que essa evolução temporal é imposta sobre qualquer estado inicial, até mesmo aqueles que seriam estacionários sob um hamiltoniano de partícula livre.

Isso finalmente nos permite estimar a ordem de magnitude da amplitude $f(0)/\epsilon$. Aqui, optamos por seguir as estimativas do método de Milburn[21] (ver tabela 1.1), e usar 10^{13} s como o tempo de decoerência na escala de energia atômica. Dada essa suposição, nós estimamos a amplitude como sendo da ordem de

$$\frac{9f(0)}{4\epsilon} \sim 10^{-13}\text{s}. \quad (3.13)$$

Lembramos, no entanto, que se trata apenas de uma estimativa, e que até mesmo estimativas com duas ordens de grandeza de diferença são possíveis.

Usando a entropia de von Neumann [27], e armados das expressões para ρ e $\dot{\rho}$, podemos calcular a taxa de produção de entropia, válida sob as mesmas

condições que as eqs. (3.10) e (3.12)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -K_B \text{Tr} \left[\frac{d\hat{\rho}}{dt} \ln \hat{\rho} \right] \\ &= -\frac{9K_B}{4\epsilon} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} d^3\lambda \ln(C_\lambda) \langle \mathbf{y} | \lambda \rangle \langle \lambda | \mathbf{x} \rangle \\ &\quad \times [f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - f(0)] \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde λ é o conjunto de parâmetros que identifica os autovetores de $\hat{\rho}(t=0)$ e C_λ são os respectivos autovalores.

Como exemplo, avaliamos a eq. (3.14) no caso em que a condição inicial é uma distribuição normal dada por $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = \exp\{-\mathbf{x}^2/\sigma^2\}/L^3$, onde σ é arbitrário. Isso leva a

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{9K_B\sigma^2}{4\epsilon} \nabla^2 f(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=0}, \quad (3.15)$$

e mostra que a variação de entropia para este sistema, em particular, é sempre não-negativa, já que segue das nossas suposições sobre f que $\nabla^2 f(0) \geq 0$. Contudo, de maior importância para nós é saber quando ocorre a igualdade. Esta condição inicial é consistente com uma distribuição de Boltzmann dentro de uma caixa de tamanho L com $\sigma^2 = 4/K_B T$, que é um estado de equilíbrio termodinâmico e, portanto, deve obedecer $\dot{S} = 0$ [1]. A informação sobre a positividade da segunda derivada na origem pode ser obtida se exigirmos a conservação de energia média. Assim como as flutuações introduzidas no sistema produzem entropia, elas também podem produzir energia. Podemos, então, calcular a taxa com que a energia média de uma partícula aumenta, quando sob efeito do ruído

$$\frac{dE}{dt} = \text{Tr} \left[\frac{d\hat{\rho}}{dt} H \right] = -\frac{1}{2m} \frac{9}{4\epsilon^2} \nabla^2 f(0). \quad (3.16)$$

A eq. (3.16) expressa a taxa de variação da energia média. Ao contrário da expressão (3.15) para a entropia, que está restrita a uma condição inicial,

o resultado é válido para qualquer condição inicial diagonal no espaço de momento. Isso se aplica ao caso acima (funções do tipo $\rho(x, y, 0) = \rho_0(x - y)$ são sempre diagonais no espaço de momento), e também se aplica à qualquer condição inicial diagonal no espaço de energia (lembrando que aqui estamos tratando de partículas livres).

Se exigirmos que a energia média de todos esses sistemas seja conservada, teremos que $\nabla^2 f(0) = 0$, que, por sua vez, significa que distribuições de Boltzmann são estados de entropia constante, como exigido pela termodinâmica. Por outro lado, essa condição não diz nada sobre a produção de entropia para outros sistemas, o que significa que, em geral, outras distribuições não estão em equilíbrio.

3.3 N Partículas

Para este capítulo, passaremos a tratar de um sistema com N partículas não-interagentes e de mesma massa. O subíndice i é usado para enumerar as partículas. A construção do operador densidade de probabilidade $\hat{\rho}$ e do propagador K é análoga ao caso unidimensional. Definimos X e Y como o conjunto dos N vetores \mathbf{x}_i e \mathbf{y}_i respectivamente. Consequentemente, $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ se torna $\rho(X, Y, t)$ e todas as integrais (nas eq. (3.5a) e além) sobre as variáveis $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}$ se tornam $\prod_{i=1}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{y}_i$. Finalmente, usando o lagrangiano $L = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}_i^2 (1 + \xi(\mathbf{x}_i, t))$, o núcleo da eq. (3.6) será

$$\begin{aligned} \kappa = \int_0^t \sum_{i,j=1}^N & [\dot{\mathbf{x}}_i^2 \dot{\mathbf{x}}_j^2 f(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \dot{\mathbf{y}}_i^2 \dot{\mathbf{y}}_j^2 f(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) \\ & - \dot{\mathbf{x}}_i^2 \dot{\mathbf{y}}_j^2 f(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j) - \dot{\mathbf{x}}_j^2 \dot{\mathbf{y}}_i^2 f(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_i)] dt'. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Segue diretamente de (3.17) que os termos $i = j$ retornam o resultado de uma partícula para a i -ésima partícula (com variáveis \mathbf{x}_i e \mathbf{y}_i). Todos os outros termos fornecem interações que emergem entre as partículas devido

às flutuações de fundo, apesar do fato de o lagrangiano usado não conter termos de interação.

A expressão completa para $\rho(X, Y, t)$ é um tanto poluída e não vale a pena incluí-la neste texto (ver apêndice C.4). De mais interesse para nós, a expressão para $\dot{\rho}$ a tempos curtos, também calculada no mesmo apêndice, é uma extensão relativamente direta da eq. (3.12). No espaço de posição

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \dot{\rho}_F - \rho_F \frac{9}{8\epsilon} \sum_{i,j} Q_{ij} \\ Q_{ij} &= 4 \int d^{3N} X' \rho(X', X', 0) f(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j) - F_{ij}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $F_{ij} = f(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + f(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) + 2f(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j)$. A equação (3.18) é bastante geral com respeito a $\rho(t=0)$ e a f , e é um dos principais resultados deste estudo. Ela contém também um termo real que contrasta com a evolução temporal padrão do operador densidade. A integral de Q_{ij} é uma constante, e o Q_{ij} em si é análogo ao termo $f(0) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ da equação (3.12). Pode-se ver que este termo real, que é proporcional ao tempo de decoerência, está somado sobre i e j e, portanto, cresce em magnitude com N^2 . Isso significa que ele é uma contribuição forte para o amortecimento de FQM, já que fontes externas de decoerência afetariam cada partícula individualmente e portanto seriam apenas de ordem N . Sendo segunda ordem em N torna esta decoerência um efeito potencialmente mensurável das flutuações, e também indica que elas se manifestam no sistema como uma interação irreversível entre as partículas.

Segunda a definição (3.14) para a entropia, podemos calcular a taxa de variação de entropia para tempos curtos como:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{9K_B}{8\epsilon} \sum_{i,j} \int d^{3N} X d^{3N} Y d\lambda \\ &\quad \times Q_{ij} \rho(X, Y, 0) \ln(C_\lambda) \langle Y|\lambda \rangle \langle \lambda|X \rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

que também é análoga ao caso de uma partícula. Novamente, o fato de

que Q_{ij} é somado sobre N^2 componentes indica que a produção de entropia também cresce com N^2 . Portanto, ambas taxas de variação para N -partículas têm um tempo característico de decoerência (ou de termalização) τ da forma

$$\tau_N \sim \frac{\tau}{N^2} = \frac{4\epsilon}{9f(0)N^2}. \quad (3.20)$$

Este tempo característico é obtido da evolução temporal de todo o operador densidade de probabilidade. Dessa forma, ele não só representa a velocidade com que FQM são amortecidas (devido à equação (3.18)), mas também o quão rápido um gás arbitrário converge para o equilíbrio termodinâmico (devido à equação (3.19)). Combinado com a equação (3.13), ele prevê valores da ordem de $10^{13}/N^2$ s. Isso pode resultar tanto em tempos da ordem de alguns segundos, para sistemas mesoscópicos, quanto em tempos abaixo de 10^{-30} s para um gás macroscópico.

3.3.1 Discussão

Nossos cálculos indicam que este tempo de decoerência e termalização é inversamente proporcional ao quadrado do número de partículas. Já que fontes externas de termalização (transferência de calor pelas paredes, radiação externa) tendem a afetar cada partícula individualmente, elas crescem com primeira ordem em N . Isso significa que, para um N grande o bastante, a influência de flutuações de energia na termalização de um gás de partículas vai dominar sobre outras influências externas. Essa diferença deve ser um efeito mensurável, o que nos fornece um possível ponto para a verificação dos nossos resultados.

Estes resultados também abrem alguns pontos. Existe um conjunto de condições que devem ser atingidas para que a distribuição de Boltzmann seja o único estado de entropia constante? Uma análise numérica das equações (3.18) e (3.19) também poderia revelar alguns resultados quantitativos com relação a condições iniciais não abordadas aqui, talvez também verifi-

cando o tempo de decoerência (3.20).

Experimentos recentes têm sido capazes de medir tempos de decoerência em sistemas mesoscópicos de muitas partículas. Os mais merecedores de atenção são os baseados em junções Josephson e dc-SQUID [28, 29], assim como decoerência de fótons em cavidades *high-Q* [30]. O tempo exato de decoerência dependerá da amplitude $f(0)/\epsilon$ e de fatores numéricos que precisariam ser recalculados para fótons, mas a expressão (3.20) deve continuar sendo válida. Assim, variando-se o número de partículas envolvidas será possível verificar a veracidade da escala de N^{-2} , mesmo que não se saiba os fatores numéricos exatos.

Apêndice A

Aqui, partimos das equações (2.9) e (2.10) para calcular a expressão (2.11) do propagador de partícula livre.

Como descrito na seção 2.4.2, para resolver as $N - 1$ integrais precisamos substituir $\dot{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)/\epsilon$ e encontrar o padrão nelas. A primeira integral (sobre \mathbf{x}_1) fica

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_1 e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2} e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2} \\ &= \left(\frac{im}{2\pi\hbar\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_1 e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\mathbf{x}_1^2} e^{\frac{-im\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0)}{\hbar\epsilon}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

que é simplesmente uma transformada de Fourier com $\mathbf{k} = \frac{m(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0)}{\hbar\epsilon}$. Avaliando essa integral temos que

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{im}{4\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)^2}, \quad (\text{A.2})$$

Da mesma forma pode-se demonstrar que, dado

$$I_{j-1} = \left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{im}{2j\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0)^2}. \quad (\text{A.3})$$

se

$$I_j = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_j e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_{j+1}-\mathbf{x}_j)^2} I_{j-1}, \quad (\text{A.4})$$

então

$$I_j = \left(\frac{1}{j+1}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{im}{2(j+1)\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_{j+1}-\mathbf{x}_0)^2}. \quad (\text{A.5})$$

Portanto, por indução

$$I_{N-1} = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{im}{2N\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_b-\mathbf{x}_a)^2}. \quad (\text{A.6})$$

Note que a equação (2.10) inclui N vezes o fator $(\)^{\frac{3}{2}}$, mas na equação (A.6) ele foi contado $N-1$ vezes. Assim, calcular o propagador de partícula livre é simplesmente uma questão de multiplicar uma última vez pelo fator e tomar o limite

$$\begin{aligned} K(b, a) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon N}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{im}{2N\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_b-\mathbf{x}_a)^2} \\ &= \left(\frac{m}{2i\pi\hbar(t_b-t_a)}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{im}{2\hbar(t_b-t_a)}(\mathbf{x}_b-\mathbf{x}_a)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde tomar o limite é trivial, visto que $N\epsilon = t_b - t_a$.

Apêndice B



O funcional gerador apresentado na seção 3.1 estabelece a igualdade

$$\langle e^{i \int_a^b g(x) \nu(x) dx} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b g(x) g(x') M(x-x') dx dx'} \quad (\text{B.1})$$

onde $\langle \nu(x) \nu(x') \rangle = M(x - x')$. A seção que se segue parte de um exemplo simples, usando variáveis aleatórias discretas, para justificar que este é o gerador de variáveis gaussianas contínuas. A seção seguinte a esta calcula explicitamente as derivadas deste funcional para mostrar que estão corretas as médias usadas no texto.

B.1 Variáveis Gaussianas Discretas

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma dada matriz simétrica de determinante não nulo, e seja \vec{a} um vetor cujas componentes são variáveis estocásticas que assumem valores em \mathbb{R} e cuja distribuição é dada pela expressão:

$$\rho(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi M)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \vec{a} \mathbf{M}^{-1} \vec{a} \right\} \quad (\text{B.2})$$

Sendo a média sobre iterações de \vec{a} definida como:

$$\begin{aligned}\langle \cdot \rangle &= \int_R \cdot \, d(\vec{a}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \cdot \, d^n \vec{a}\end{aligned}\tag{B.3}$$

onde R é a região que contém todas as formas possíveis para a variável \vec{a} , e aqui se resume ao \mathbb{R}^n , mostramos as seguintes igualdades:

1.

$$\langle \vec{a} \rangle = 0\tag{B.4}$$

$$\langle a_j \rangle = 0, \forall j = 1, \dots, n\tag{B.5}$$

2.

$$\langle e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}} \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \vec{k} \mathbf{M} \vec{k} \right\}, \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^n\tag{B.6}$$

3.

$$\langle a_i a_j \rangle = M_{ij}\tag{B.7}$$

Demonstrações:

1. Como a distribuição é uma função par em \vec{a} , tem-se que a função $\vec{a}\rho(\vec{a})$ é ímpar. Como a região de integração é simétrica em torno da origem, o resultado da integral (B.3) será nulo, que é justamente a equação (B.4). A equação (B.5) é consequência direta.
2. Abrindo a definição da média pela equação (B.3), vê-se que a expressão do item 2) é simplesmente a transformada de Fourier N -dimensional de uma gaussiana normalizada. Como consequência, o resultado deve ser também uma gaussiana com a matriz do expoente invertida (e sem coeficiente multiplicativo). Esta é a função característica.
3. Finalmente podemos obter facilmente a equação (B.7), vendo que a média se trata apenas de uma transformada de Fourier aplicada em

$\vec{k} = 0$. Esta média pode ser, então, diretamente obtida derivando-se a função característica em k_j e em k_i e aplicando-a em 0.

Agora que demonstramos a versão discreta desta equação, tomamos o limite contínuo:

$$\begin{aligned}
 i, j &\rightarrow x, x' \\
 \vec{a}, \vec{k} &\rightarrow \nu(x), g(x) \\
 M_{ij} &\rightarrow M(x - x') \\
 \vec{k} \cdot \vec{a} &\rightarrow \int_a^b \nu(x)g(x)dx \\
 \vec{k}\mathbf{M}\vec{k} &\rightarrow \int_a^b \int_a^b g(x)g(x')M(x - x')dxdx'
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Dessa forma, ν a cada ponto x é uma variável estocástica análoga à componente a_i de \vec{a} . Sem mais delongas, a versão contínua da equação (B.6) é

$$\langle e^{i \int_a^b g(x)\nu(x)dx} \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b g(x)g(x')M(x - x')dxdx' \right\} \tag{B.9}$$

B.2 As Médias

As médias que queremos demonstrar são

$$\begin{aligned}
 \langle \nu(x) \rangle &= 0, \forall x \\
 \langle \nu(x)\nu(x') \rangle &= M(x - x').
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Uma forma de obtê-las é simplesmente seguindo a extensão para o contínuo usada na seção anterior. Outra forma, mais rigorosa, é tomar a equação (B.9) como definição da variável aleatória e obter as identidades por meio de derivadas dessa definição.

Por exemplo, a primeira derivada da expressão (B.9) em relação a g pode

ser reduzida a

$$\begin{aligned} \langle \nu(x) e^{i \int_a^b g(x) \nu(x) dx} \rangle &= -G(x) e^{-\frac{1}{2} \iint_a^b g(x) g(x') M(x-x') dx dx'} \\ G(x) &= \int_a^b g(z) M(x-z) dz \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

E a derivada dessa expressão, por sua vez, se resume a

$$\begin{aligned} \langle \nu(x) \nu(x') e^{i \int_a^b g(x) \nu(x) dx} \rangle &= [M(x-x') + G(x)G(x')] \times \\ &\times e^{-\frac{1}{2} \iint_a^b g(x) g(x') M(x-x') dx dx'} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Ambas expressões são válidas para todo g integrável. Enfim, basta aplicá-las em $g = 0$ e tem-se as identidades (B.10).

B.3 Concluindo

Para aplicar a expressão (B.9) ao problema do capítulo 3, basta ver que ele se trata do caso em que:

$$\begin{aligned} x &= (t, \mathbf{z}) \\ x' &= (t', \mathbf{z}') \\ a &= (0, -\infty, -\infty, -\infty) \\ b &= (t, \infty, \infty, \infty) \\ M(x-t') &= \epsilon f(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \delta(t-t') \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

De modo que

$$\langle e^{i \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{z}, t') \nu(\mathbf{z}, t') d\mathbf{z} dt'} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \epsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{z}, t') g(\mathbf{z}', t') f(\mathbf{z} - \mathbf{z}') dt d\mathbf{z} d\mathbf{z}'}. \quad (\text{B.14})$$

Apêndice C

//

Este apêndice é dedicado a calcular as equações (3.10), (3.14), (3.15), (3.16) e (3.18). Nas contas que seguem as variáveis \mathbf{x} e \mathbf{y} sempre representam vetores espaciais de três componentes respectivamente. Na seção C.4, X e Y representam o conjunto de todas as coordenadas \mathbf{x}^i e \mathbf{y}^i respectivamente, onde o índice superior i denota a partícula em questão.

C.1 Equação (3.10)

Expandindo a última exponencial da equação (3.6) em sua série de potências, obtemos

$$\begin{aligned} K(b, a) &= \int \int e^{\frac{i}{\hbar}(S_0[\mathbf{x}] - S_0[\mathbf{y}])} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^t p dt' \right]^n \frac{1}{n!} \mathcal{D}\mathbf{x} \mathcal{D}\mathbf{y} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \int e^{\frac{i}{\hbar}(S_0[\mathbf{x}] - S_0[\mathbf{y}])} \left[\int_0^t p dt' \right]^n \frac{1}{n!} \mathcal{D}\mathbf{x} \mathcal{D}\mathbf{y} \\ &= K_0 + K_1 + K_2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Onde

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) = -\frac{\epsilon \eta^2}{2} [\dot{\mathbf{x}}^4 f(0) + \dot{\mathbf{y}}^4 f(0) - 2\dot{\mathbf{x}}^2 \dot{\mathbf{y}}^2 f(\mathbf{x} - \mathbf{y})], \quad (\text{C.2})$$

K_0 é o propagador de partícula livre, e K_1 é a correção de primeira ordem que precisamos calcular. Nos próximos passos, de modo a simplificar a notação, nós vamos ocultar temporariamente qualquer dependencia na variável \mathbf{y} , e definir a constante $\eta = m/2\hbar$.

A princípio, nós temos a seguinte expressão para a correção de primeira ordem:

$$K_1(b, a) = \int_0^t \int p(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s) e^{\frac{i}{\hbar} S_0[\mathbf{x}]} \mathcal{D}\mathbf{x} ds. \quad (\text{C.3})$$

No caso em que p não depende da velocidade $\dot{\mathbf{x}}$, a expressão acima pode ser reduzida a

$$K_1(b, a) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K_0(b, c) p(\mathbf{x}_c, t_c) K_0(c, a) d^3\mathbf{x}_c dt_c, \quad (\text{C.4})$$

pelo método padrão de discretização de trajetórias. Resumidamente, este procedimento consiste em:

- Discretizar a integral de caminho em N integrais espaciais do tipo

$$\left(\frac{\eta}{i\pi\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_j e^{\frac{i\eta}{\epsilon}(\mathbf{x}_{j+1}-\mathbf{x}_j)^2}; \quad (\text{C.5})$$

- Separar a integral espacial sobre a variável $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}(s)$, onde $t_c = s$ é tomado como o instante de tempo em que a partícula interage com a perturbação;
- Avaliar as integrais espaciais antes e depois de t_c , resultando em $K_0(c, a)$ e $K_0(b, c)$ respectivamente.

No nosso caso, p é uma função de $\dot{\mathbf{x}}$. Quando efetuarmos a discretização das trajetórias, temos de substituir $\dot{\mathbf{x}}(s) \rightarrow (\mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c)/\epsilon$ e então $p(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s)$ se torna $p(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_{c+1}, t_c)$. Isso significa que a interação ocorre sobre dois passos do tempo discretizado, e nós também temos que separar a

integral sobre \mathbf{x}_{c+1} , o que resulta em

$$K_1(b, a) = \left(\frac{\eta}{i\pi\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^t dt_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_{c+1} K_0(b, c+1) \times e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}(\mathbf{x}_{c+1}-\mathbf{x}_c)^2} p(\mathbf{x}_{c+1}, \mathbf{x}_c, t_c) K_0(c, a). \quad (\text{C.6})$$

Recuperando agora a dependência em \mathbf{y} , temos

$$K_1(b, a) = \left(\frac{\eta}{\pi\epsilon}\right)^3 \int_0^t dt_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_{c+1} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{y}_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{y}_{c+1} \times K_0(b, c+1) e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}[(\mathbf{x}_{c+1}-\mathbf{x}_c)^2 - (\mathbf{y}_{c+1}-\mathbf{y}_c)^2]} \times K_0(c, a) p(\mathbf{x}_{c+1}, \mathbf{x}_c, \mathbf{y}_{c+1}, \mathbf{y}_c, t_c), \quad (\text{C.7})$$

onde $p = -r + s$, e

$$r = \eta^2 \frac{f(0)}{2\epsilon^3} [(\mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c)^4 + (\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^4] \quad (\text{C.8})$$

$$s = \eta^2 \frac{f(\mathbf{x}_c - \mathbf{y}_c)}{\epsilon^3} (\mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c)^2 (\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^2.$$

Por simplicidade, separamos K_1 em $K_s - K_r$ e os avaliamos separadamente, onde

$$K_r(b, a) = \frac{\eta^5}{2\pi^3\epsilon^6} \int_0^t dt_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_{c+1} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{y}_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{y}_{c+1} \times K_0(b, c+1) e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}[(\mathbf{x}_{c+1}-\mathbf{x}_c)^2 - (\mathbf{y}_{c+1}-\mathbf{y}_c)^2]} K_0(c, a) \times [(\mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c)^4 + (\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^4] f(0), \quad (\text{C.9})$$

$$K_s(b, a) = \frac{\eta^5}{\pi^3\epsilon^6} \int_0^t dt_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_{c+1} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{y}_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{y}_{c+1} \times K_0(b, c+1) e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}[(\mathbf{x}_{c+1}-\mathbf{x}_c)^2 - (\mathbf{y}_{c+1}-\mathbf{y}_c)^2]} K_0(c, a) \times (\mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c)^2 (\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^2 f(\mathbf{x}_c - \mathbf{y}_c). \quad (\text{C.10})$$

Substituindo a expressão para K_0 , e abreviando todas as integrais espaciais por $d^{12}\mathbf{x}$, temos

$$K_r = \frac{\eta^{11} f(0)}{2\pi^9 \epsilon^6} \int_0^t \frac{dt_c}{t_c^3 (t - t_c - \epsilon)^3} \int d^{12}\mathbf{x} G H, \quad (\text{C.11})$$

onde

$$G = e^{i\eta \left[-\frac{(\mathbf{y}_b - \mathbf{y}_{c+1})^2}{t - t_c - \epsilon} + \frac{(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_a)^2 - (\mathbf{y}_c - \mathbf{y}_a)^2}{t_c} - \frac{(\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^2}{\epsilon} \right]}, \quad (\text{C.12})$$

e

$$H = [(\mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c)^4 + (\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^4] e^{\frac{i\eta}{\epsilon} (\mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c)^2} e^{\frac{i\eta}{t - t_c - \epsilon} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_{c+1})^2}. \quad (\text{C.13})$$

Rearranjando as exponenciais da equação acima, definimos $\mathbf{z} = \mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c$, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c$ e $\mathbf{k} = 2\mathbf{x}' \frac{\eta}{t - t_c - \epsilon}$, e vemos que H pode ser escrito como

$$H = e^{i \frac{\eta}{t - t_c - \epsilon} \mathbf{x}'^2} [\mathbf{z}^4 + (\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^4] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} e^{-i\alpha \mathbf{z}^2}, \quad (\text{C.14})$$

onde $\alpha = -\eta \frac{t - t_c}{\epsilon(t - t_c - \epsilon)}$. Neste formato, se torna evidente que uma integral em \mathbf{z} dessa equação é nada mais que a transformada de Fourier de uma Gaussiana complexa vezes um polinômio. Já que toda a dependência em \mathbf{x}_{c+1} está contida em H , e como os limites de integração são infinitos, podemos trocar uma variável de integração de $d^3\mathbf{x}_{c+1}$ para $d^3\mathbf{z}$, e teremos a transformada de Fourier. Uma vez que

$$\mathcal{F}[(\mathbf{z})^4 e^{-i\alpha \mathbf{z}^2}] = \nabla_{\mathbf{k}}^4 e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{4i\alpha}} \left(\frac{\pi}{i\alpha} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (\text{C.15})$$

é fácil ver que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{z} H = \left(\frac{\pi}{i\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i \frac{\eta}{t - t_c - \epsilon} \mathbf{x}'^2} [\nabla_{\mathbf{k}}^4 + (\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^4] e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{4i\alpha}}. \quad (\text{C.16})$$

Isso nos leva a

$$H = - \left(\sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}} \right)^3 e^{i\frac{\eta}{t-t_c}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c)^2} \left[- \left(\frac{\mathbf{k}\epsilon}{2\eta} \right)^4 + i\frac{\mathbf{k}^2\epsilon^3}{\eta^3} + \frac{15\epsilon^2}{4\eta^2} + (\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^4 \right], \quad (\text{C.17})$$

onde $\epsilon \ll t$ foi usado para simplificar a expressão final.

Então, definimos

$$H' = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{y}_{c+1} e^{-i\frac{\eta}{t-t_c-\epsilon}(\mathbf{y}_b - \mathbf{y}_{c+1})^2 - i\frac{\eta}{\epsilon}(\mathbf{y}_{c+1} - \mathbf{y}_c)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}_{c+1} H, \quad (\text{C.18})$$

de modo que os passos necessários para a variável \mathbf{y}_{c+1} são idênticos ao complexo conjugado dos passo acima, resultando em

$$H = \frac{\pi^3\epsilon^5}{\eta^5} e^{i\eta\frac{(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c)^2 - (\mathbf{y}_c - \mathbf{y}_c)^2}{t-t_c}} \left[\frac{(\mathbf{k}^4 + \mathbf{w}^4)\epsilon^2}{16\eta^2} - i\frac{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{w}^2)\epsilon}{\eta} - \frac{15}{2} \right], \quad (\text{C.19})$$

onde \mathbf{w} é o análogo de \mathbf{k} para \mathbf{y} . No limite de ϵ pequeno a expressão acima se torna

$$H' = -\frac{15\pi^3\epsilon^5}{2\eta^5} e^{i\frac{\eta}{t-t_c}[(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c)^2 - (\mathbf{y}_b - \mathbf{y}_c)^2]}. \quad (\text{C.20})$$

De volta ao propagador, temos

$$K_r = \frac{\eta^{11}f(0)}{2\pi^9\epsilon^6} \int_0^t \frac{dt_c}{t_c^3(t-t_c)^3} \int \int d^3\mathbf{x}_c d^3\mathbf{y}_c H' e^{i\frac{\eta}{t_c}[(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_a)^2 - (\mathbf{y}_c - \mathbf{y}_a)^2]}, \quad (\text{C.21})$$

que, com um pouco de empenho, resultará em

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{\eta^8 f(0)}{2\pi^6\epsilon^6} \int_0^t \frac{dt_c}{(t-t_c)^3} \int \int d^3\mathbf{x}_c d^3\mathbf{y}_c H' K_0(c, a) \\ &= -\frac{15f(0)}{4\epsilon} \int_0^t dt_c \int \int d^3\mathbf{x}_c d^3\mathbf{y}_c K_0(b, c) K_0(c, a) \\ &= -\frac{15}{4} \frac{f(0)}{\epsilon} t K_0(b, a) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Aqui está claro que deve haver um intervalo de tempo ϵ abaixo do qual o nosso modelo para as flutuações deixa de valer, já que o propagador diverge no limite em que ϵ tende a 0. Esta característica é motivo de cuidado, mas, como discutimos na seção 1.1, não é inesperada e já é conhecida da literatura [12]. A diferença aqui, quando comparada com a equação (1.2), é que somos forçados a impor um limite inferior para o intervalo temporal, ao invés do espacial.

Usando uma abordagem semelhante para K_s ,

$$K_s = \frac{\eta^{11}}{\pi^9 \epsilon^6} \int_0^t dt_c \frac{H'}{t_c^3 (t - t_c - \epsilon)^3} \quad (\text{C.23})$$

onde,

$$\begin{aligned} H' &= \int \int d^3 \mathbf{y}_c d^3 \mathbf{x}_c e^{i \frac{\eta}{t_c} [(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_a)^2 - (\mathbf{y}_c - \mathbf{y}_a)^2]} f(\mathbf{x}_c - \mathbf{y}_c) H \\ H(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c) &= J(\mathbf{x}_c) J^*(\mathbf{y}_c) \\ J &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x}_{c+1} (\mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c)^2 e^{i \frac{\eta}{t-t_c-\epsilon} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_{c+1})^2} e^{i \frac{\eta}{\epsilon} (\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_{c+1})^2} \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Para avaliar $J(\mathbf{x}_c)$ buscamos escrever a equação (C.24) novamente em termos de transformadas de Fourier. Fazendo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{x}_{c+1} - \mathbf{x}_c \\ \Delta X &= \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c, \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

resulta em

$$J = e^{i \frac{\eta}{t-t_c-\epsilon} \Delta X^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{v} \mathbf{v}^2 e^{-\alpha \mathbf{v}^2 - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad (\text{C.26})$$

onde $\mathbf{k} = 2 \frac{\eta}{t-t_c-\epsilon} \Delta X$ e $\alpha = -i \eta \left[\frac{t-t_c}{(t-t_c-\epsilon)\epsilon} \right]$. Avaliando essa integral e aplicando-a na definição de H na (C.24) leva a

$$J = e^{i \frac{\eta}{t-t_c} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c)^2} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3\epsilon}{2\eta} - \left(\frac{\mathbf{k}\epsilon}{2\eta} \right)^2 \right] \quad (\text{C.27})$$

$$H = \frac{\epsilon^3 \pi^3}{\eta^3} \left[\frac{3\epsilon}{2\eta} - \left(\frac{\mathbf{k}\epsilon}{2\eta} \right)^2 \right] \left[\frac{3\epsilon}{2\eta} - \left(\frac{\mathbf{w}\epsilon}{2\eta} \right)^2 \right] e^{i\eta \frac{(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c)^2}{t-t_c}} e^{-i\eta \frac{(\mathbf{y}_b - \mathbf{y}_c)^2}{t-t_c}}. \quad (\text{C.28})$$

Novamente, o limite de ϵ pequeno resulta em.

$$H = \frac{9\epsilon^5 \pi^3}{4\eta^5} e^{i\eta \frac{(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c)^2}{t-t_c}} e^{-i\eta \frac{(\mathbf{y}_b - \mathbf{y}_c)^2}{t-t_c}}. \quad (\text{C.29})$$

$$H' = \frac{9\epsilon^5 \pi^3}{4\eta^5} \int \int d^3 \mathbf{y}_c d^3 \mathbf{x}_c e^{i\frac{\eta}{t_c} [(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_a)^2 - (\mathbf{y}_c - \mathbf{y}_a)^2]} f(\mathbf{x}_c - \mathbf{y}_c) e^{i\eta \frac{(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c)^2}{t-t_c}} e^{-i\eta \frac{(\mathbf{y}_b - \mathbf{y}_c)^2}{t-t_c}} \quad (\text{C.30})$$

Uma última vez, redefinimos as constantes

$$\alpha = -\frac{i\eta t}{t_c(t-t_c)} \quad (\text{C.31})$$

$$\mathbf{k} = 2\eta \left(\frac{\mathbf{x}_b}{t-t_c} + \frac{\mathbf{x}_a}{t_c} \right),$$

e chegamos à expressão

$$H' = \frac{9\epsilon^5 \pi^3}{4\eta^5} \int d^3 \mathbf{y}_c e^{-i\frac{\eta}{t_c} (\mathbf{y}_c - \mathbf{y}_a)^2} e^{-i\eta \frac{(\mathbf{y}_b - \mathbf{y}_c)^2}{t-t_c}} H'_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_c) \quad (\text{C.32})$$

$$H'_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_c) = e^{i\eta \left(\frac{\mathbf{x}_b^2}{t-t_c} + \frac{\mathbf{x}_a^2}{t_c} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x}_c e^{-\alpha \mathbf{x}_c^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_c} f(\mathbf{x}_c - \mathbf{y}_c).$$

As equações acima expressam a transformada de Fourier de um produto de funções. Assumindo que f tenha uma transformada de Fourier, \tilde{f} , temos que

$$H'_{\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\eta \left(\frac{\mathbf{x}_b^2}{t-t_c} + \frac{\mathbf{x}_a^2}{t_c} \right)} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \left[e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{4\alpha}} * \left(e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}_c} \tilde{f}(\mathbf{k}) \right) \right], \quad (\text{C.33})$$

onde $*$ é o operador de convolução. Definimos $\alpha' = -\alpha$ e \mathbf{v} análogo a $-\mathbf{k}$, então

$$H' = \frac{9\epsilon^5 \pi^3}{4\eta^5} e^{-i\eta \left(\frac{\mathbf{y}_b^2}{t-t_c} + \frac{\mathbf{y}_a^2}{t_c} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{y}_c e^{-\alpha' \mathbf{y}_c^2} e^{-i\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}_c} H'_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_c)$$

$$H' = \frac{9\epsilon^5\pi^3}{4\eta^5} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i\eta\left(\frac{y_b}{t-t_c} + \frac{y_a}{t_c}\right)} \left(\frac{\pi}{\alpha'}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{v^2}{4\alpha'}} * \tilde{H}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}), \quad (\text{C.34})$$

onde

$$\tilde{H}'_{\mathbf{x}} = e^{i\eta\left(\frac{x_b^2}{t-t_c} + \frac{x_a^2}{t_c}\right)} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \left[e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} * \left(\delta^3(\mathbf{v} + \mathbf{k}) \tilde{f}(\mathbf{k}) \right) \right]. \quad (\text{C.35})$$

Finalmente, expandindo as integrais de convolução resulta em

$$H' = \frac{9\epsilon^5\pi^3}{4\eta^5} e^{[x]-[y]} \frac{1}{(2\pi)^3} \left| \frac{\pi}{\alpha} \right|^3 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}' e^{\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}' e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}{4\alpha}} \tilde{f}(\mathbf{k}') \delta(\mathbf{v}' + \mathbf{k}'), \quad (\text{C.36})$$

que pode ser avaliado para

$$\begin{aligned} H' &= \frac{9\epsilon^5\pi^3}{4\eta^5} e^{[x]-[y]} \frac{1}{(2\pi)^3} \left| \frac{\pi}{\alpha} \right|^3 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}' e^{\frac{(\mathbf{v}+\mathbf{k}')^2}{4\alpha}} e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}{4\alpha}} \tilde{f}(\mathbf{k}') \\ H' &= \frac{9\epsilon^5\pi^3}{4\eta^5} e^{[x]-[y]} \left| \frac{\pi}{\alpha} \right|^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{\mathbf{k}' \cdot \frac{\mathbf{v}+\mathbf{k}}{2\alpha}} e^{\frac{v^2}{4\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} \tilde{f}(\mathbf{k}') \\ H' &= \frac{9\epsilon^5\pi^3}{4\eta^5} e^{i\frac{\eta}{t}[(\mathbf{x}_b-\mathbf{x}_a)^2 - (\mathbf{y}_b-\mathbf{y}_a)^2]} \left| \frac{\pi}{\alpha} \right|^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{z}} \tilde{f}(\mathbf{k}') \\ H' &= \frac{9\epsilon^5\pi^6}{4\eta^8} \frac{t_c^3(t-t_c)^3}{t^3} e^{i\frac{\eta}{t}[(\mathbf{x}_b-\mathbf{x}_a)^2 - (\mathbf{y}_b-\mathbf{y}_a)^2]} \left| \frac{\pi}{\alpha} \right|^3 f(\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

e então

$$H' = \frac{9\pi^9(t-t_c)^3 t_c^3 \epsilon^5}{4\eta^{11}} K_0(b, a) f(\mathbf{z}), \quad (\text{C.38})$$

onde $\mathbf{z} = \frac{1}{t}[(t-t_c)(\mathbf{x}_a - \mathbf{y}_a) + t_c(\mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b)]$ é uma função linear de t_c , indo de $\mathbf{x}_a - \mathbf{y}_a$ até $\mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b$. Ligando a equação acima com a equação (C.24), e mudando a variável de integração de t_c para \mathbf{z} , resulta

$$K_s(b, a) = K_0(b, a) \frac{9t}{4\epsilon} \frac{(\mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b) - (\mathbf{x}_a - \mathbf{y}_a)}{[(\mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b) - (\mathbf{x}_a - \mathbf{y}_a)]^2} \int_{\mathbf{x}_a - \mathbf{y}_a}^{\mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b} d\mathbf{z} f(\mathbf{z}). \quad (\text{C.39})$$

onde o trajeto de integração é uma reta ligando os dois limites. Adicionando

isso à equação (C.22) para K_r chegamos à expressão

$$K_1(b, a) = \frac{3t}{4\epsilon} \left[5f(0) + 3 \frac{(\mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b) - (\mathbf{x}_a - \mathbf{y}_a)}{[(\mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b) - (\mathbf{x}_a - \mathbf{y}_a)]^2} \int_{\mathbf{x}_a - \mathbf{y}_a}^{\mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b} d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) \right] K_0(b, a), \quad (\text{C.40})$$

que, finalmente, resulta na equação (3.8a).

Então, mudando o sistema de coordenadas de \mathbf{x} e \mathbf{y} para $\Delta = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\phi = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, e mudando a variável de integração da equação (3.8b) para $\tau \in [0, t]$ por

$$\mathbf{z} = (\Delta_b - \Delta_a) \tau / t + \Delta_a, \quad (\text{C.41})$$

é fácil obter a equação (3.10) a partir das expressões (3.8a) e (3.9).

C.2 Equação (3.14)

A partir da definição da entropia de von Neumann

$$S = -K_B \text{Tr} [\hat{\rho} \ln \hat{\rho}], \quad (\text{C.42})$$

e usando o fato que $\hat{\rho}$ tem traço constante, é fácil ver que

$$\frac{dS}{dt} = -K_B \text{Tr} \left[\frac{d\hat{\rho}}{dt} \ln \hat{\rho} \right]. \quad (\text{C.43})$$

De modo a fazer uso da expressão acima, precisamos de uma expressão para o operador derivado e uma definição para o logaritmo.

Definição 1. *Seja $|\mathbf{l}\rangle$ um autovetor no espaço de Hilbert de $\hat{\rho}$ com autovalor $C_{\mathbf{l}} \in \mathbb{R}$. Se o conjunto de todos $|\mathbf{l}\rangle$ formam uma base ortonormal para o espaço de Hilbert, então $\ln(\hat{\rho}) = \sum_{\mathbf{l}} \ln(C_{\mathbf{l}}) |\mathbf{l}\rangle \langle \mathbf{l}|$.*

Avaliando-se o traço na base dos autovetores de $\hat{\rho}$, e inserindo as identi-

dades em ambos os lados de $\dot{\hat{\rho}}$, temos

$$\frac{dS}{dt} = -K_B \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}d^3\mathbf{l} \langle \mathbf{l}|\mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}|\dot{\hat{\rho}}|\mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y}|\ln \hat{\rho}|\mathbf{l} \rangle, \quad (\text{C.44})$$

que pode ser prontamente identificado como a equação (3.14).

C.3 Equações (3.15) e (3.16)

A porção de partícula livre do operador densidade sempre apresenta entropia e energia constantes, então podemos desconsiderá-la durante os cálculos de taxas de variação. Se desejado, o termo $\dot{\rho}_F$ pode ser carregado ao longo dos cálculos sem efeito algum nos resultados.

Supondo uma condição inicial diagonal no espaço de momento é equivalente a tomar

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) &= \rho_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}|\hat{\rho}|\mathbf{y} \rangle \\ \hat{\rho} &= \int d^3\mathbf{k} |\mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k}| \bar{\rho}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

com

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{9}{4\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} |\mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k}| \left[\frac{\bar{\rho}(\mathbf{k}) * \bar{f}(\mathbf{k})}{2\pi} - f(0)\bar{\rho}(\mathbf{k}) \right]. \quad (\text{C.46})$$

Sabendo-se a derivada temporal do operador densidade, é trivial aplicar o operador hamiltoniano

$$H \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{\omega \hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} k^2 |\mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k}| \left[\frac{\bar{\rho}(\mathbf{k}) * \bar{f}(\mathbf{k})}{2\pi} - f(0)\bar{\rho}(\mathbf{k}) \right]. \quad (\text{C.47})$$

Finalmente, usando as identidades

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle &= \exp(-ikx) / \sqrt{2\pi}^3 \\
f(0) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \bar{f}(\mathbf{k}) \\
\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \bar{\rho}(\mathbf{k}) &= 2\pi\rho(0) = \frac{2\pi}{L} \\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{l}}{2\pi} \mathbf{l}^2 \bar{f}(\mathbf{l}) &= -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z=0),
\end{aligned} \tag{C.48}$$

é simples obter a equação (3.16) tirando o traço da equação (C.47).

O caminho mais simples para a obtenção da equação (3.15) é escrever a condição inicial no espaço de momento. O termo $\ln C_{\mathbf{k}}$, então, dá origem a dois outros termos: um proporcional a $\sigma^2 \mathbf{k}^2/4$, que é análogo ao cálculo acima (de energia); e outro proporcional a uma constante, que é facilmente avaliado para zero.

C.4 Equação (3.18)

Aqui, usamos \mathbb{K} para denotar os propagadores de N partículas (aqueles que dependem de todos os N pares $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)$) e mantemos K apenas para os propagadores de 1 partícula. Seguindo os passos descritos obtém-se a seguinte expressão para o propagador

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}(b, a) &= \int_{X=X_a}^{X=X_b} \mathcal{D}X \int_{Y=Y_a}^{Y=Y_b} \mathcal{D}Y e^{\frac{i}{\hbar}[S_0[X]-S_0[Y]]} \times e^{-\frac{eJ^2}{2}\kappa}, \\
\kappa &= \int_0^t \sum_{i,j=1}^N [(\dot{\mathbf{x}}^i)^2 (\dot{\mathbf{x}}^j)^2 f(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j) + (\dot{\mathbf{y}}^i)^2 (\dot{\mathbf{y}}^j)^2 f(\mathbf{y}^i - \mathbf{y}^j) \\
&\quad - (\dot{\mathbf{x}}^i)^2 (\dot{\mathbf{y}}^j)^2 f(\mathbf{x}^i - \mathbf{y}^j) - (\dot{\mathbf{x}}^j)^2 (\dot{\mathbf{y}}^i)^2 f(\mathbf{x}^j - \mathbf{y}^i)] dt'.
\end{aligned} \tag{C.49}$$

Isso, então, nos permite calcular ρ com a expressão

$$\rho(X_b, Y_b, t) = \int \int d^{3N} X_a d^{3N} Y_a \mathbb{K}(b, a) \rho(X_a, Y_a, 0). \quad (\text{C.50})$$

A expansão em ordem zero do propagador (C.49) é simplesmente a generalização para N partículas do propagador de partícula livre. Calcular a correção de primeira ordem requer passos muito semelhantes àqueles descritos para a versão de 1 partícula, ainda que consideravelmente mais complicados.

Primeiro, deve-se novamente expandir a segunda exponencial da equação (C.49) até primeira ordem em f . A correção resultante contém uma soma sobre todos os i e j , o que nos permite escrever

$$\mathbb{K}_1 = \sum_{i,j=1} \mathbb{K}_1^{i,j}. \quad (\text{C.51})$$

De modo a avaliar $\mathbb{K}_1^{i,j}$, deve-se considerar separadamente os casos $i = j$ e os $i \neq j$. Felizmente, os casos $i = j$ são bastante diretos, já que os cálculos são idênticos ao cenário de 1 partícula, então $\mathbb{K}_1^{i,i} = K_1^i(b, a) \prod_{n \neq i} K_0^n(b, a)$, onde $K^i(b, a) = K(\mathbf{x}_b^i, \mathbf{y}_b^i, t; \mathbf{x}_a^i, \mathbf{y}_a^i)$ é o propagador da i -ésima partícula. Já os casos $i \neq j$ requerem mais trabalho, mas podem ser facilitados seguindo-se as seguintes etapas:

- Dividir o propagador $\mathbb{K}_1^{i,j}$ em quatro termos, cada um correspondente a um dos termos do núcleo da equação (C.49);
- Calcular um desses termos. Apesar dos cálculos não serem idênticos a nenhum outro descrito aqui, eles seguem a mesma lógica (múltiplas integrais de Fourier e substituições de variável) dos cálculos de 1 partícula;
- Armado do resultado, os outros três termos no propagador podem ser facilmente calculados seguindo-se passos quase idênticos. A única diferença é que se deve tirar o conjugado complexo sempre que \mathbf{x} for

trocado por \mathbf{y} e vice-versa.

Dividindo o propagador temos

$$\mathbb{K}_1^{i,j}(b, a) = \left[K K_1^{\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^j} - K K_1^{\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j} - K K_1^{\mathbf{y}^i, \mathbf{y}^j} + K K_1^{\mathbf{y}^i, \mathbf{x}^j} \right] \prod_{n \neq i, j} K_0^n(b, a), \quad (\text{C.52})$$

onde os termos $K K_1^{u^i, v^j}$ (com u e v sendo \mathbf{x} ou \mathbf{y}) são propagadores perturbativos de interação entre a partícula i e a partícula j , que podem ser definidos como

$$\begin{aligned} K K_1^{u^i, v^j} &= \int_0^t dt_c \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x}_c^i \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x}_{c+1}^i \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{y}_c^i \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{y}_{c+1}^i \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x}_c^j \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x}_{c+1}^j \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{y}_c^j \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{y}_{c+1}^j \\ &\quad K_0^i(b, c+1) K_0^i(c, a) K_0^j(b, c+1) K_0^j(c, a) \\ &\quad \frac{\eta^2}{2\epsilon^3} (u_{c+1}^i - u_c^i)^2 (v_{c+1}^j - v_c^j)^2 f(u_c^i - v_c^j) \\ &\quad \left(\frac{\eta}{\pi\epsilon} \right)^6 e^{i\frac{\eta}{\epsilon} [(\mathbf{x}_{c+1}^i - \mathbf{x}_c^i)^2 - (\mathbf{y}_{c+1}^i - \mathbf{y}_c^i)^2]} e^{i\frac{\eta}{\epsilon} [(\mathbf{x}_{c+1}^j - \mathbf{x}_c^j)^2 - (\mathbf{y}_{c+1}^j - \mathbf{y}_c^j)^2]}. \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

Das vinte e quatro integrais espaciais envolvidas, todas as que não envolvem as variáveis u^i e v^j (doze ao todo) são triviais. Por exemplo, tomando o caso $u = \mathbf{x}$ e $v = \mathbf{y}$, as seis integrais sobre \mathbf{y}^i resultam na dependência em \mathbf{y} do propagador não-perturbado da partícula i , e equivalentemente para \mathbf{x} e j . Dessa forma, as integrais sobre \mathbf{x}^i e \mathbf{y}^j são análogas às que temos no cálculo de K_s para 1 partícula levando ao resultado

$$\begin{aligned} K K_1^{\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^j} &= \frac{9}{8\epsilon} K_0^i K_0^j \int_0^t f(\vec{\delta}^{\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^j}(\tau)) d\tau, \\ \vec{\delta}^{u^i, v^j}(\tau) &= \frac{\tau}{t} (u_b^i - v_b^j - u_a^i + v_a^j) + u_a^i - v_a^j. \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

Como a equação (C.52) será somada sobre i e j , e levando em consideração as simetrias do integrando, podemos usar a substituição $K K_1^{\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^j} + K K_1^{\mathbf{y}^i, \mathbf{x}^j} \rightarrow$

$2KK_1^{\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^j}$ sem afetar o resultado final. Refazendo os cálculos para os casos $(u, v) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ e $(u, v) = (\mathbf{y}, \mathbf{y})$ temos

$$\begin{aligned} KK_1^{\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j} &= -\frac{9}{8\epsilon} K_0^i K_0^j \int_0^t f(\vec{\delta}^{\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j}(\tau)) d\tau, \\ KK_1^{\mathbf{y}^i, \mathbf{y}^j} &= -\frac{9}{8\epsilon} K_0^i K_0^j \int_0^t f(\vec{\delta}^{\mathbf{y}^i, \mathbf{y}^j}(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

Esse conjunto de equações leva ao resultado

$$\mathbb{K}_1^{i,j} = \frac{9}{8\epsilon} \mathbb{K}_0 \int_0^t f(\vec{\delta}_{i,j}^{\mathbf{x}, \mathbf{x}}(\tau)) + 2f(\vec{\delta}_{i,j}^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\tau)) + f(\vec{\delta}_{i,j}^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}(\tau)) d\tau, \quad i \neq j. \quad (\text{C.56})$$

Unindo-o ao resultado para $i = j$ mencionado anteriormente.

$$\mathbb{K}_1^{i,i} = \frac{9}{8\epsilon} \mathbb{K}_0 \left[\int_0^t f(\vec{\delta}_{i,i}^{\mathbf{x}, \mathbf{x}}(\tau)) + 2f(\vec{\delta}_{i,i}^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\tau)) + f(\vec{\delta}_{i,i}^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}(\tau)) d\tau + \frac{4f(0)}{3\epsilon} t \right], \quad (\text{C.57})$$

com

$$\mathbb{K}_1 = \sum_i \mathbb{K}_1^{i,i} + \sum_{i \neq j} \mathbb{K}_1^{i,j}, \quad (\text{C.58})$$

percebe-se que a correção em primeira ordem do propagador pode ser resumida como

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_1 &= \frac{9}{8\epsilon} \mathbb{K}_0 \sum_{i,j=1}^N \int_0^t G(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^i, \mathbf{y}^j, \tau) d\tau \\ G &= f(\vec{\delta}_{i,j}^{\mathbf{x}, \mathbf{x}}(\tau)) + 2f(\vec{\delta}_{i,j}^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\tau)) + f(\vec{\delta}_{i,j}^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}(\tau)) + \delta_{ij} \frac{4f(0)}{3\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

Dado o propagador, para calcular $\dot{\rho}$ resta apenas encontrarmos o fator de normalização B . Como no caso de 1 partícula, escrevemos aqui a expressão

para $t = 0$.

$$\begin{aligned} \rho(X, Y, t) &= B(t) \int d^{3N} X_a d^{3N} Y_a \rho(X_a, Y_a, 0) \mathbb{K}_0(b, a) (1 + \mathbb{H}(t)) \\ \mathbb{H}(t) &= \mathbb{H}(X_b, Y_b, t; X_a, Y_a) = \frac{9}{8\epsilon} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t G d\tau. \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

A partir dessa expressão, tiramos o traço da primeira derivada temporal de $\rho(X, Y, t)$ e o aplicamos em $t = 0$. Usando que $B(0) = 1$, $\mathbb{H}(0) = 0$ e $\text{Tr} [\dot{\hat{\rho}}] = 0$ chegamos a

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(X, Y, 0) &= \dot{\rho}_F(X, Y, 0) + \dot{B}(0) \rho_F(X, Y, 0) + \rho_F(X, Y, 0) \dot{\mathbb{H}}(0) \\ \dot{B}(0) &= -\frac{9}{2\epsilon} \left(\frac{N}{3} f(0) + \sum_{i,j} Q^{i,j} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

onde $Q_{i,j} = \int d^{3N} X \rho_F(X, X, 0) f(x^i - x^j)$. E substituindo $\dot{B}(0)$ em $\dot{\rho}$, finalmente, obtém-se a equação (3.18).

Referências Bibliográficas

- [1] H. B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics, 2nd Edition*. Wiley, August 1985. ISBN 0471862568.
- [2] R. P. Feynman and J. Shaham. *Statistical mechanics: a set of lectures*. W.A. Benjamin, Reading, Mass. :, 1972. ISBN 0805325093 0805325085.
- [3] Y. Guan, J. W. Haus, and P. Powers. Macroscopic quantum fluctuations of pulsed nanosecond optical parametric generation in periodically-poled LiNbO₃. *Phys. Rev. A*, 71:023809, Feb 2005. doi: 10.1103/PhysRevA.71.023809.
- [4] A. Smerzi and S. Raghavan. Macroscopic quantum fluctuations in the josephson dynamics of two weakly linked bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 61:063601, May 2000. doi: 10.1103/PhysRevA.61.063601.
- [5] I. A. Walmsley and M. G. Raymer. Experimental study of the macroscopic quantum fluctuations of partially coherent stimulated raman scattering. *Phys. Rev. A*, 33:382–390, Jan 1986. doi: 10.1103/PhysRevA.33.382.
- [6] L. Diósi. Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations. *Phys. Rev. A*, 40(3):1165–1174, Aug 1989. doi: 10.1103/PhysRevA.40.1165.
- [7] E. Schrödinger. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23(49):823–828, 1935.

-
- [8] J. Paavola, M. J. W. Hall, M. G. A. Paris, and S. Maniscalco. Finite-time quantum-to-classical transition for a schrödinger-cat state. *Phys. Rev. A*, 84:012121, Jul 2011. doi: 10.1103/PhysRevA.84.012121.
- [9] S. P. Walborn, A. Salles, R. M. Gomes, F. Toscano, and P. H. Souto Ribeiro. Revealing hidden einstein-podolsky-rosen nonlocality. *Phys. Rev. Lett.*, 106:130402, Mar 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.106.130402.
- [10] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10):777–780, 1935.
- [11] E. P. Wigner. The problem of measurement. *American Journal of Physics*, 31(1):6–15, 1963. doi: 10.1119/1.1969254.
- [12] L. Diósi. A universal master equation for the gravitational violation of quantum mechanics. *Phys. Lett. A*, 120(8):377–381, March 1987. doi: doi:10.1016/0375-9601(87)90681-5.
- [13] A. Chaves, J. Figueiredo, and M. Nemes. Metric fluctuations, thermodynamics and classical physics: A proposed connection. *Annals of Physics*, 231:174–184, April 1994.
- [14] P. Cejnar, V. Zelevinsky, and V. V. Sokolov. Decoherence and thermalization in a simple bosonic system. *Phys. Rev. E*, 63:036127, Feb 2001. doi: 10.1103/PhysRevE.63.036127.
- [15] R. Martín and E. Verdaguer. Stochastic semiclassical fluctuations in minkowski spacetime. *Phys. Rev. D*, 61:124024, May 2000. doi: 10.1103/PhysRevD.61.124024.
- [16] B. L. Hu and K. Shiokawa. Wave propagation in stochastic spacetimes: Localization, amplification, and particle creation. *Phys. Rev. D*, 57(6):3474–3483, Mar 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.57.3474.
-

-
- [17] A. Campos and E. Verdaguer. Stochastic semiclassical equations for weakly inhomogeneous cosmologies. *Phys. Rev. D*, 53:1927–1937, Feb 1996. doi: 10.1103/PhysRevD.53.1927.
- [18] B. L. Hu and A. Roura. Metric fluctuations of an evaporating black hole from backreaction of stress tensor fluctuations. *Phys. Rev. D*, 76:124018, Dec 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.76.124018.
- [19] L. Diósi. Orthogonal jumps of the wavefunction in white-noise potentials. *Phys. Lett.*, 112A(6):288–292, November 1985.
- [20] L. Diósi. Intrinsic time uncertainties and decoherence: Comparison of 4 models. *Braz. J. Phys.*, 58:260–265, Jun 2005.
- [21] G. J. Milburn. Intrinsic decoherence in quantum mechanics. *Phys. Rev. A*, 44:5401–5406, Nov 1991. doi: 10.1103/PhysRevA.44.5401.
- [22] L. Reichl and J. Luscombe. *A Modern Course in Statistical Physics*. 1999.
- [23] D. Kammler. *A First Course in Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780521883405.
- [24] B. Fristedt and L. Gray. *A modern approach to probability theory*. Probability and its applications. Birkhäuser, 1997. ISBN 9780817638078.
- [25] R. Feynman and A. Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw-Hill New York, 1965.
- [26] M. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag, 1990. ISBN 9780387971735.
- [27] V. V. Sokolov, B. A. Brown, and V. Zelevinsky. Invariant correlational entropy and complexity of quantum states. *Phys. Rev. E*, 58:56–68, Jul 1998. doi: 10.1103/PhysRevE.58.56.
-

-
- [28] P. Bertet, I. Chiorescu, G. Burkard, K. Semba, C. J. P. M. Harmans, D. P. DiVincenzo, and J. E. Mooij. Dephasing of a superconducting qubit induced by photon noise. *Phys. Rev. Lett.*, 95:257002, Dec 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.95.257002.
- [29] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij. Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit. *Science*, 299(5614):1869–1871, 2003. doi: 10.1126/science.1081045.
- [30] A. Auffeves, P. Maioli, T. Meunier, S. Gleyzes, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche. Entanglement of a mesoscopic field with an atom induced by photon graininess in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 91: 230405, Dec 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.91.230405.
-