Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Questões em skew anéis de polinômios parciais e skew anéis de séries de potências parciais

Tese de Doutorado

Luciane Gobbi

Porto Alegre, abril de 2011.

Tese de Doutorado submetida por Luciane Gobbi[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Wagner de Oliveira Cortes

Banca Examinadora:
Dr. Alveri Alves Sant'Ana (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Antonio Paques (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (USP)
Dr. Francisco César Polcino Milies (USP)
Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero (Co-Orientador - PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Wagner de Oliveira Cortes (Orientador - PPG-MAT/UFRGS)

Data da defesa: 06 de abril de 2011.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

Foram muitos anos até chegar a este momento tão especial da minha vida. Por isto, se torna extremamente difícil agradecer a cada uma das pessoas que me acompanharam em todo este processo. São muitas pessoas que, em algum momento, me deram atenção, ouvindo e ajudando a superar a todos os problemas pelos quais passei. Serei eternamente grata a vocês pelo apoio dado a mim.

Agradeço a Deus pelas oportunidades que tive em minha vida. Principalmente, quero agradecer por ter condições de aproveitar ao máximo cada uma delas.

Agradeço a compreensão e o incentivo do meu orientador, Wagner e de sua esposa, Suzana. Agradeço também pelo apoio do professor Miguel, através de suas idéias e sugestões sempre tão importantes para meu crescimento profissional.

Aos colegas, meu sincero agradecimento. Vocês foram essenciais para meu êxito.

Em especial, quero agradecer a minha família. Aos meus pais pelo eterno incentivo. Certamente, vocês mereciam um capítulo inteiro desta tese em homenagem ao apoio e à torcida para que tudo desse certo. Também agradeço aos meus irmãos, a tia Zélia e a Nona Maria, pela compreensão nos momentos de impaciência e ausência.

Por fim, quero agradecer ao meu marido Bruno. Se, em algum momento, por alguma razão, pensei em desistir de tudo, foi por você que persisti na adversidade. Minha conquista é, portanto, sua conquista. Obrigada por estar sempre ao meu lado, me incentivando.

Um forte abraço a todos vocês!

Resumo

Questões em skew anéis de polinômios parciais e skew anéis de séries de potências parciais.

Neste trabalho, consideramos uma ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre um anel com unidade R que admite ação envolvente (T, σ), onde $\sigma : T \to T$ é um automorfismo. Estudamos condições necessárias e suficientes para que $R[x;\alpha]$ e $R < x; \alpha >$ sejam anéis quasi-duo à direita. Além disto, obtemos uma descrição do radical de Jacobson em cada caso.

Finalizamos a tese obtendo condições necessárias e suficientes para que o skew anel de séries de potências parcial $R[[x;\alpha]]$ seja um anel de Bezout à direita e duo à direita.

Abstract

Questões em skew anéis de polinômios parciais e skew anéis de séries de potências parciais.

In this work, we consider a partial action α of $\mathbb{Z}$ on a ring with identity R with enveloping action (T, σ), where $\sigma : T \to T$ is an automorphism. We study necessary and sufficient conditions for $R[x; \alpha]$ and $R < x; \alpha >$ to be right quasi-duo. Moreover, we give a complete description of the Jacobson radical in each case.

We study necessary and sufficient conditions for the partial skew power series rings $R[[x; \alpha]]$ to be right duo and right Bezout.

Sumário

Introdução

A noção de ação parcial de um grupo é uma extensão da noção de ação (global) de grupo. Ações parciais de grupos apareceram primeiramente na teoria de álgebra de operadores como uma ferramenta geral para a pesquisa de C^*-álgebras geradas por isometrias parciais, permitindo caracterizar diversas classes destas álgebras como produtos cruzados por ações parciais. Os produtos cruzados claramente se encontram no centro de uma rica interação entre sistemas dinâmicos e álgebras de operadores. Os esforços em generalizá-los geram um novo conhecimento estrutural sobre álgebras, que podem ser vistos como produtos cruzados mais gerais. Na teoria de álgebra de operadores, diversas álgebras relevantes já foram caracterizadas como produtos cruzados por ações parciais. Em particular, por exemplo, as álgebras de Bunce-Deddens Toeplitz [8] e [9], as álgebras de Toeplitz de grupos quase-ordenados bem como as álgebras Cuntz-Krieger [11]. Outros resultados nesta direção podem ser encontrados em [1], [10], [22]. M. Dokuchaev e R. Exel em [5], introduziram ações parciais de grupos de uma maneira puramente algébrica e o produto cruzado parcial $R *_\alpha G$ também é definido. Nesse trabalho, os autores exibem condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial possua ação envolvente. Além disso, os autores exibem um exemplo mostrando que o skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$ nem sempre é associativo. Todavia, nos casos em que existe uma envolvente, este anel está mergulhado em um anel associativo e, portanto, é associativo.

A existência de uma ação envolvente para uma ação parcial passa a ter um papel importante na obtenção de generalizações de resultados já estabelecidos das ações globais. Neste caso, um dos primeiros trabalhos no qual se utiliza a existência de uma envolvente para obtermos as generalizações de resultados já conhecidos em ações globais para ações parciais se baseia na teoria de skew anéis de polinômios parciais, ver [3].

O trabalho que se segue está dividido em três partes. No Capítulo 1 apresentamos a grande maioria dos conceitos que serão usados na tese, com indicação bibliográfica detalhada sobre o assunto. Para facilitar esta leitura, procuramos apresentar estes conceitos contextualizados a nossa situação de trabalho.

No Capítulo 2, consideramos uma ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre um anel com unidade R que admite envolvente (T, σ), onde $\sigma : T \to T$ é um automorfismo. Dividimos este capítulo em duas partes. Na primeira Seção, estudamos condições necessárias e suficientes para que $R[x; \alpha]$ seja um anel quasi-duo à direita e, neste caso, obtemos uma descrição explícita do radical de Jacobson deste anel.

Na segunda Seção, consideramos α uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel com unidade R que admite envolvente (T, σ). Estudamos condições necessárias e suficientes para que $R < x; \alpha >$ seja um anel quasi-duo à direita e, neste caso, também obtemos uma descrição explícita do radical de Jacobson deste anel.

Destacamos, principalmente, os artigos [19] e [20], que nos serviram de base, e até mesmo inspiração, para os estudos apresentados neste capítulo.

Em ([21], Theorem 1.6 e Corollary 3.1), os autores exibiram condições necessárias e suficientes para que o skew anel de séries de potências $S[[x; \sigma]]$, onde $\sigma : S \to S$ é um endormorfismo, seja um anel de Bezout à direita e duo à direita. Em particular, eles provaram que as seguintes condições são equivalentes:

(i) $S[[x; \sigma]]$ é um anel de Bezout à direita e duo à direita.

(ii) $S[[x; \sigma]]$ é um anel distributivo à direita e reduzido.

(iii) $S[[x;\sigma]]$ é um anel duo à direita e todo submódulo de um $S[[x;\sigma]]$-módulo plano é plano.

(iv) S é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular e σ é uma aplicação bijetiva tal que $\sigma(e) = e$, para todo elemento idempotente $e \in S$.

Consideramos um anel R e uma ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre R que admite envolvente (T, σ). O *skew anel de séries de potências parcial*, denotado por $R[[x;\alpha]]$, consiste de séries da forma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, onde x é uma variável e $a_i \in S_i$ são os coeficientes da série, para todo $i \geq 0$. A adição neste anel é a usual e a multiplicação satisfaz, para quaisquer elementos $a_i, b_i \in S_i$,

$$(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

onde $c_i = a_0 b_i + a_1 \alpha_1(b_{i-1} 1_{-1}) + ... + a_i \alpha_i(b_0 1_{-i})$, para todo $i \geq 0$. É claro que o skew anel de polinômios parcial $R[x;\alpha]$ é um subanel de $R[[x;\alpha]]$.

No Capítulo 3, estabelecemos uma caracterização semelhante à obtida em ([21], Theorem 1.6 e Corollary 3.1) para o skew anel de séries de potências parcial $R[[x;\alpha]]$. Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira Seção, provamos inúmeros resultados que serão necessários para a demonstração do principal resultado deste capítulo. Em sua maioria, eles generalizam os que constam em ([24], sections 6.4 e 6.5). Além disto, procuramos detalhar a terminologia e as definições necessárias para a abordagem feita na segunda Seção deste capítulo.

Na segunda Seção obtivemos o Teorema a seguir, o qual extende ([21], Theorem 1.6 e Corollary 3.1):

Teorema 3.2.7 Suponhamos que α seja uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel com unidade R e $A = R[[x;\alpha]]$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é um anel de Bezout à direita e duo à direita.

2. A é um anel de Bezout à direita e reduzido.

3. A é um anel de Bezout à direita e quasi-duo à direita.

4. A é um anel de Bezout à direita e semicomutativo.

5. A é um anel distributivo à direita e duo à direita.

6. A é um anel distributivo à direita e reduzido.

7. A é um anel distributivo à direita.

8. Todo ideal à direita de A gerado por dois elementos é plano, R é um anel abeliano e todo elemento idempotente de R é α-invariante.

9. A é um anel duo à direita e todo submódulo de um A-módulo plano é plano.

10. Todo submódulo de um A-módulo plano é plano, R é um anel abeliano e todo elemento idempotente de R é α-invariante.

11. R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular e todo elemento idempotente de R é α-invariante.

12. A é um anel de Bezout à direita e R é um anel duo à direita.

13. A é um anel de Bezout à direita e R é um anel reduzido.

14. A é um anel de Bezout à direita e R é um anel quasi-duo à direita.

15. A é um anel de Bezout à direita e R é um anel semicomutativo.

16. A é um anel de Bezout à direita e R é um anel fortemente regular.

17. R é um anel duo à direita $\aleph_0$-injetivo à direita von Neumann regular e todo elemento idempotente de R é α-invariante.

Destacamos que muitos resultados desta tese foram demonstrados considerando-se as propriedades à direita sobre os anéis. Porém, os mesmos resultados podem ser provados considerando-se as mesmas propriedades à esquerda.

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Ações Globais

Iniciamos este capítulo definindo ação de grupos sobre um conjunto qualquer. Para isto, consideramos um grupo G com elemento neutro 1, um conjunto X qualquer e o conjunto $Bij(X)$ das bijeções de X. Maiores detalhes do que será exposto aqui podem ser encontrados em [23].

Definição 1.1.1. *Dizemos que o grupo G age sobre o conjunto X se existe uma aplicação $\beta : G \to Bij(X)$, definida por $\beta(g) = \beta_g$, para todo $g \in G$, satisfazendo as seguintes condições:*

1. $\beta_1 = id_X$.

2. $\beta_g \circ \beta_h = \beta_{gh}$, *ou seja, a composição é compatível com a multiplicação no grupo.*

Nosso objetivo é definir uma ação de um grupo G sobre um anel R. Observamos, inicialmente, que anéis são equivalentes a k-álgebras, com k um anel comutativo. De fato, uma k-álgebra R com unidade 1_R, onde k é um anel comutativo, é um anel tal que, para quaisquer elementos $a \in k$ e $x, y \in R$, temos que $ax \in R$ e

$$a(xy) = (ax)y = x(ay).$$

Ou seja, R tem uma estrutura de k-módulo. Assim, o próximo passo é definir ações de grupos sobre álgebras.

Definição 1.1.2. *Seja T uma k-álgebra, com k um anel comutativo. Dizemos que um grupo G age sobre T se, para todo $g \in G$, existe um automorfismo k-linear $\beta_g : T \to T$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$\beta_1 = id_T$.*

2. *$\beta_g \circ \beta_h = \beta_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$.*

Seja $Aut_k(T)$ o grupo dos automorfismos k-lineares de T. Equivalentemente, temos que um grupo G age sobre uma k-álgebra T se existe um homomorfismo de grupos $\beta : G \to Aut_k(T)$.

Observamos que k é omitido quando T é uma $\mathbb{Z}$-álgebra, ou mesmo quando k fica subentendido. Denotamos por (T, β) a ação do grupo G sobre o anel T, onde $\beta = \{\beta_g : T \to T : g \in G\}$.

Um subconjunto $A \subseteq T$ é dito *G-invariante* se $\beta_g(A) = A$, para todo $g \in G$. Se I é um ideal G-invariante de T então podemos definir o automorfismo $\overline{\beta_g} : T/I \to T/I$, induzido por β_g, de tal forma que $\overline{\beta_g}(r + I) = \beta_g(r) + I$, para todo $g \in G$. Neste caso, dizemos que $(T/I, \overline{\beta})$ é a ação global induzida por (T, β), onde

$$\overline{\beta} = \{\overline{\beta_g} : T/I \to T/I; g \in G\}.$$

O *skew anel de grupo* de uma ação global (T, β), denotado por $T *_\beta G$, é definido como sendo um T-módulo livre à esquerda com base $\{\mu_g : g \in G\}$, isto é,

$$T *_\beta G = \{ \sum_{finita} t_g \mu_g : t_g \in T\}.$$

A adição em $T *_\beta G$ é a usual e a multiplicação satisfaz

$$a\mu_g.b\mu_h = a\beta_g(b)\mu_{gh},$$

para quaisquer $a, b \in T$ e $g, h \in G$.

1.2 Ações Parciais

1.2.1 Definindo uma ação parcial

Destacamos, a seguir, alguns resultados e definições que podem ser encontrados em [5]. No que segue, consideramos um grupo G com elemento neutro 1 e um anel R com unidade 1_R, a menos de menção em contrário.

Definição 1.2.1. *Uma ação parcial de G sobre R é uma coleção de ideais S_g de R, com $g \in G$, e isomorfismos $\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g$ tais que, para quaisquer $g, h \in G$, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $S_1 = R$ *e* $\alpha_1 = id_R$.

2. $S_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$.

3. $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, *para todo* $x \in \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$.

Observamos que a condição (2) é equivalente a igualdade $S_g \cap S_{gh} = \alpha_g(S_h \cap S_{g^{-1}})$, para quaisquer $g, h \in G$. Por (3), temos que $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$.

Denotamos por (R, α), ou simplesmente α, uma ação parcial de um grupo G sobre um anel R. Uma *ação envolvente* para α, denotada por (T, β), é uma álgebra T juntamente com uma ação global $\beta = \{\beta_g : g \in G\}$ de G sobre T, onde β_g é um automorfismo de T, tal que a ação parcial é obtida por restrição da ação global ([5], Definition 4.2). Mais precisamente, quando α admite ação envolvente (T, β), podemos assumir que R é um ideal de T e as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $T = \sum_{g \in G} \beta_g(R)$.

2. $S_g = R \cap \beta_g(R)$, para todo $g \in G$.

3. $\alpha_g(a) = \beta_g(a)$, para quaisquer $g \in G$ e $a \in S_{g^{-1}}$.

Observamos que o item (1) nos fornece uma relação bastante favorável para transportarmos propriedades de R para T, e vice-versa. Por ([5], Theorem 4.5), sabemos que uma ação parcial α admite uma ação envolvente se, e somente se, cada ideal S_g de R é gerado por um elemento idempotente central de R.

No caso em que uma ação parcial α admite uma ação envolvente, denotamos por 1_g a unidade de S_g. Pelo item (2), temos que $1_g = \beta_g(1_R)1_R$.

Exemplo 1.2.2. *Sejam G um grupo que age globalmente sobre um anel T e R um ideal de T. Para todo $g \in G$, consideramos $S_g = R \cap \beta_g(R)$ e definamos $\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g$ como a restrição de β_g a $S_{g^{-1}}$. Então α é uma ação parcial de G sobre R. Além disto, se R é um ideal gerado por um elemento idempotente central de T então cada ideal S_g de R tem unidade 1_g e, portanto, α admite uma ação envolvente contida em T.*

1.2.2 Ação parcial induzida

Consideramos uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g, g \in G\}$ de um grupo G sobre um anel R. Maiores detalhes do que será exposto aqui podem ser encontrados em [12] e [18].

Definição 1.2.3. *Seja I um ideal de R. Dizemos que I é um ideal α-invariante se $\alpha_g(I \cap S_{g^{-1}}) = I \cap S_g$, para todo $g \in G$.*

Seja I um ideal α-invariante de R. Para cada $g \in G$, definamos

$$\overline{S}_g = (I + S_g)/I \simeq S_g/(I \cap S_g).$$

Assim, para cada $g \in G$, podemos considerar o isomorfismo $\overline{\alpha}_g : \overline{S}_{g^{-1}} \to \overline{S}_g$, induzido por α_g e definido por $\overline{\alpha}_g(s+I) = \alpha_g(s) + I$, para todo $s \in S_{g^{-1}}$. O seguinte resultado aparece em ([18], Corolário 2.3.6, pág. 46) e [12].

Proposição 1.2.4. *Sejam* $\alpha = \{\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g, g \in G\}$ *uma ação parcial de um grupo* G *sobre um anel* R *que admite envolvente* (T, β) *e* I *um ideal* α*-invariante de* R*. Então* $\overline{\alpha} := \{\overline{\alpha}_g : \overline{S}_{g^{-1}} \to \overline{S}_g, g \in G\}$ *é uma ação parcial de* G *sobre o anel quociente* $\overline{R} = R/I$*.*

Neste caso, dizemos que $\overline{\alpha}$ é uma *ação parcial induzida* pela ação parcial α no anel quociente $\overline{R}$.

1.2.3 Ação parcial de tipo finito

Seja R um anel associativo com unidade 1_R. Consideramos uma ação parcial α de um grupo G sobre R que admite envolvente (T, β). Maiores detalhes do que é exposto nesta seção podem ser encontrados em [12].

Definição 1.2.5. *Dizemos que* α *é uma ação parcial de tipo finito se existe um subconjunto finito* $\{g_1, ..., g_n\}$ *de* G *tal que* $\sum_{1 \leq i \leq n} S_{gg_i} = R$*, para todo* $g \in G$*.*

Se G é um grupo finito então toda ação parcial de G sobre o anel R é uma ação parcial de tipo finito. A seguir, apresentamos uma caracterização para ações parciais de tipo finito, ver ([12], Proposition 1.2).

Proposição 1.2.6. *Seja* α *uma ação parcial de um grupo* G *sobre um anel* R *que admite envolvente* (T, β)*. As seguintes condições são equivalentes:*

1. α *é uma ação parcial de tipo finito.*

2. *Existem* $g_1, ..., g_n \in G$ *tais que* $T = \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_{g_i}(R)$*.*

3. T *tem um elemento unidade.*

Assim, se α é uma ação parcial de tipo finito então T é uma soma finita de ideais de T que são isomorfos a R.

1.2.4 Anéis que são soma de ideais

Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre um anel R que admite envolvente (T, β). Como já observamos anteriormente, neste caso, o anel T é uma soma de ideais de T que são isomorfos a R. Por isto, nesta seção, vamos abordar o estudo de anéis que são somas de ideais.

Iniciamos esta seção com um resultado que aparece em ([12], Proposition 1.10) e [6].

Proposição 1.2.7. *Seja $S = \sum_{i \in \mathcal{I}} B_i$, onde B_i é um ideal de S que, como um anel, admite elemento unidade 1_i, para todo $i \in \mathcal{I}$. Então*

1. *1_i é um elemento idempotente central de S e $B_i = S1_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$.*
2. *S tem um elemento unidade se, e somente se, existe um subconjunto finito $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}$ tal que $S = \sum_{i \in \mathcal{J}} B_i$. Além disto, se $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., n\}$ então*

$$1_S = \sum_{1 \leq l \leq n} \sum_{i_1 < i_2 < ... i_l} (-1)^{l+1} 1_{i_1} 1_{i_2} ... 1_{i_l}$$

é o elemento unidade de S.

Em particular, observamos que o elemento unidade 1_S do anel S pode ser escrito como uma soma de elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais

$$1_S = e_1 + ... + e_n$$

onde $e_1 = 1_1, ..., e_j = (1_S - 1_1)(1_S - 1_2)...(1_S - 1_{j-1})1_j$, para todo $2 \leq j \leq n$.

Seja α uma ação parcial de tipo finito de um grupo G sobre um anel R que admite envolvente (T, β). Então, pela Proposição 1.2.6, existe um subconjunto finito

$\{g_1, ..., g_n\}$ de G tal que $T = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(R)$. Logo

$$R = 1_R T = \sum_{i=1}^{n} 1_R \beta_{g_i}(R) = \sum_{i=1}^{n} S_{g_i}$$

onde S_{g_j} é um anel com unidade $1_{g_j} = 1_R \beta_{g_j}(1_R)$, para todo $1 \leq j \leq n$.

Pela Proposição 1.2.7, temos que o elemento unidade de R satisfaz

$$1_R = \sum_{1 \leq l \leq n} \sum_{g_{i_1} < g_{i_2} < \ldots g_{i_l}} (-1)^{l+1} 1_{g_{i_1}} 1_{g_{i_2}} \ldots 1_{g_{i_l}}$$

o qual pode ser escrito como uma soma de elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais

$$1_R = e_1 + \ldots e_n,$$

onde $e_1 = 1_{g_1}, \ldots, e_j = (1_R - 1_{g_1})(1_R - 1_{g_2}) \ldots (1_R - 1_{g_{j-1}}) 1_{g_j}$, para todo $2 \leq j \leq n$. Desta forma, quando a ação parcial é de tipo finito, obtemos que

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i,$$

com $Re_j \subseteq S_{g_j}$ ideal de S_{g_j}, para todo $1 \leq j \leq n$.

1.3 Skew Anel de Grupo Parcial

Durante esta seção, consideramos uma ação parcial α de um grupo G sobre um anel com unidade R. Maiores detalhes do que abordaremos aqui podem ser encontrados em [5].

Definição 1.3.1. *O skew anel de grupo parcial, denotado por $R *_\alpha G$, é definido como* *o conjunto de todas as somas formais finitas*

$$\sum_{g \in G} a_g \delta_g$$

onde $a_g \in S_g$ *e* δ_g *são símbolos, para cada* $g \in G$. *A adição é definida como usualmente e a multiplicação satisfaz a seguinte regra*

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_g^{-1}(a_g)b_h)\delta_{gh}$$

para quaisquer elementos $a_g \in S_g$, $b_h \in S_h$ *e* $g, h \in G$.

O anel $R *_\alpha G$ nem sempre é associativo, como nos mostra ([5], Example 3.5). A seguir, destacamos dois resultados que nos fornecem condições para que $R *_\alpha G$ seja um anel associativo, ver ([5], Proposition 4.3 e Corollary 3.4).

Teorema 1.3.2. *Se* (T, β) *é uma ação envolvente da ação parcial* (R, α), *então o skew anel de grupo parcial* $R *_\alpha G$ *está mergulhado em* $T *_\beta G$. *Em particular,* $R *_\alpha G$ *é um anel associativo.*

Por ([5], Example 3.5), temos que nem toda ação parcial admite ação envolvente.

Teorema 1.3.3. *Se* R *é um anel semiprimo então o skew anel de grupo parcial* $R *_\alpha G$ *é um anel associativo.*

Neste caso, a associatividade de $R *_\alpha G$ independe da ação parcial α do grupo G sobre o anel R.

1.4 Skew Anéis de Polinômios Parciais

Nesta seção assumimos que R é um anel associativo com unidade 1_R. Consideramos um grupo cíclico infinito G gerado por σ e uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_{\sigma^i} : S_{\sigma^{-i}} \to S_{\sigma^i}\}$

de G sobre R. Para facilitar a notação, denotamos o ideal S_{σ^i} de R e o isomorfismo $\alpha_{\sigma^i} : S_{\sigma^{-i}} \rightarrow S_{\sigma^i}$ simplesmente por S_i e $\alpha_i : S_{-i} \rightarrow S_i$, respectivamente, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Neste sentido, dizemos que α é uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre R. Maiores detalhes do que abordaremos aqui podem ser encontrados em [3].

O *skew anel de grupo parcial* $R *_\alpha G$ pode ser identificado com o conjunto de todas as somas formais finitas

$$\sum_{i=-n}^{m} a_i x^i$$

onde $a_i \in S_i$, para todo $-n \leq i \leq m$. A adição neste anel é a adição usual de polinômios e a multiplicação satisfaz

$$ax^i bx^j = \alpha_i(\alpha_{-i}(a)b)x^{i+j}$$

para quaisquer elementos $i, j \in \mathbb{Z}$, $a \in S_i$ e $b \in S_j$. Neste caso, o skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$ é denotado por $R < x; \alpha >$ e denominado *skew anel de polinômios de Laurent parcial*.

Assumimos que cada ideal S_i, $i \in \mathbb{Z}$, é gerado por um elemento idempotente central de R, o qual denotamos por 1_i. Desta maneira, (R, α) admite uma ação envolvente (T, σ), onde $\sigma : T \rightarrow T$ é um automorfismo de T e, pelo Teorema 1.3.2, temos que $R < x; \alpha >$ é um anel associativo.

Observamos que G é um grupo infinito e, por isto, o anel T não precisa, necessariamente, ter uma unidade.

Além disto, o skew anel de grupo $T * G$ pode ser identificado com o *skew anel de polinômios de Laurent* $T < x; \sigma >$, com adição definida como usualmente e a multiplicação satisfazendo a regra

$$ax^i bx^j = a\sigma^i(b)x^{i+j}$$

para quaisquer elementos $a, b \in T$ e $i, j \in \mathbb{Z}$. Assim, $R < x; \alpha >$ é um subanel de $T < x; \sigma >$.

Definimos o *skew anel de polinômios parcial* $R[x; \alpha]$ como o subanel de $R < x; \alpha >$ cujos elementos são os polinômios da forma

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

com $a_i \in S_i$, para todo $0 \leq i \leq n$. A adição neste anel é a adição usual de polinômios e a multiplicação satisfaz

$$cx^i dx^j = \alpha_i(\alpha_{-i}(c)d)x^{i+j}$$

para quaisquer $i, j \geq 0$, $c \in S_i$ e $d \in S_j$. Notamos que $R[x, \alpha] \subseteq T[x; \sigma]$ e, em particular, $R[x, \alpha]$ é um anel associativo.

1.5 Skew Anéis de Séries de Potências Parciais

Sejam T um anel associativo com unidade e $\varphi : T \to T$ um endomorfismo. O *skew anel de séries de potências*, denotado por $T[[x; \varphi]]$, pode ser identificado com o conjunto de todas as séries da forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

onde x é uma variável e $a_i \in T$, para todo $i \geq 0$. Neste anel, para quaisquer $a_i, b_i \in T$, a adição e a multiplicação satisfazem, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \\ (\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \end{aligned}$$

onde $c_i = a_0 b_i + a_1 \varphi(b_{i-1}) + ... + a_i \varphi^i(b_0)$, para todo $i \geq 0$.

Desta forma, o skew anel de polinômios $T[x;\varphi]$ é um subanel de $T[[x;\varphi]]$, consistindo das séries com apenas um número finito de coeficientes não-nulos.

Consideramos um anel com unidade R e uma ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre R que admite envolvente (T,σ). O *skew anel de séries de potências parcial*, denotado por $R[[x;\alpha]]$, pode ser identificado com o conjunto das séries da forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

onde x é uma variável e $a_i \in S_i$, para todo $i \geq 0$. Neste anel, para quaisquer $a_i, b_i \in S_i$, a adição e a multiplicação satisfazem, respectivamente

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \\ (\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \end{aligned}$$

onde $c_i = a_0 b_i + a_1 \alpha_1(b_{i-1} 1_{-1}) + ... + a_i \alpha_i(b_0 1_{-i})$, para todo $i \geq 0$.

Desta forma, o skew anel de polinômios parcial $R[x;\alpha]$ é um subanel de $R[[x;\alpha]]$, consistindo das séries com apenas um número finito de coeficientes não-nulos.

1.6 Alguns Resultados Conhecidos

O objetivo desta seção é destacar alguns resultados e definições já conhecidos e que foram utilizados no decorrer de nossos estudos. Iniciamos com algumas notas sobre anéis quasi-duo. Sempre estaremos considerando anéis com unidade, a menos de menção em contrário.

1.6.1 Anéis quasi-duo

Iniciamos esta seção com a definição de anéis quasi-duo e, em seguida, apresentamos alguns resultados sobre estes anéis que serão utilizados durante esta tese. Maiores detalhes do que apresentamos aqui podem ser encontrados em [19] e [20].

Dizemos que um anel R é *duo à direita* se todo ideal à direita de R é um ideal bilateral. Analogamente se define anel duo à esquerda. Dizemos que R é um anel duo se R é um anel duo à direita e duo à esquerda. Exemplos de anéis duo podem ser encontrados em [25].

Definição 1.6.1. *Dizemos que um anel R é quasi-duo à direita se todo ideal maximal à direita de R é um ideal bilateral. Analogamente, definimos anéis quasi-duo à esquerda. Dizemos que R é um anel quasi-duo se R é um anel quasi-duo à direita e quasi-duo à esquerda.*

Por ([26], Proposition 2.1), o anel das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre um anel quasi-duo à direita é quasi-duo à direita.

Apresentamos, a seguir, um resultado geral que utilizaremos muitas vezes no decorrer do trabalho, ver ([15], Corollary 2(v)).

Teorema 1.6.2. *Seja $h : R \to S$ um homomorfismo sobrejetivo de anéis. Se R é um anel quasi-duo à direita então S é um anel quasi-duo à direita.*

Consideramos um anel R e um R-módulo à direita M. O *anulador* de M em R é definido por $r_R(M) = \{r \in R : Mr = 0\}$. Dizemos que M é um *módulo fiel* se $r_R(M) = 0$. Dizemos que M é um *módulo simples* se $M \neq 0$ e M não admite R-submódulos não-triviais. Um anel R é dito *primitivo à direita* (respectivamente à esquerda) se existe um R-módulo à direita (respectivamente à esquerda) simples e fiel.

O próximo resultado nos fornece uma caracterização para anéis quasi-duo à direita, ver ([19]).

Teorema 1.6.3. *Um anel R é quasi-duo à direita se, e somente se, toda imagem homomórfica primitiva à direita de R é um anel de divisão.*

Nos dois parágrafos que seguem e no Teorema 1.6.4, o anel R não precisa, necessariamente, ter unidade.

Um elemento $x \in R$ é *quasi-regular à direita* se existe $y \in R$ tal que $x+y+xy = 0$. Dizemos que R é um anel *quasi-regular à direita* se todo elemento de R é quasi-regular à direita. Um ideal à direita I de R (R não precisa ser, necessariamente, um anel quasi-regular à direita) é quasi-regular à direita se todo elemento de I é quasi-regular à direita.

O *radical de Jacobson* de um anel R, denotado por $J(R)$, é a união de todos os ideais à direita quasi-regulares à direita de R. Dizemos que um ideal à direita V de um anel R é *regular* se existe um elemento $e \in R$, denominado uma unidade à esquerda de V, tal que $er - r \in V$, para todo $r \in R$. Assim, temos a seguinte caracterização do radical de Jacobson de um anel R, ver ([4], Lemma 54, pág. 95).

Teorema 1.6.4. *O radical de Jacobson de um anel R é igual a:*

1. *interseção de todos os ideais maximais à direita regulares de R.*

2. *interseção de todos os ideais maximais à esquerda regulares de R.*

3. $\{x : xr$ *é quasi-regular à direita, para todo* $r \in R\}$.

4. $\{x : rx$ *é quasi-regular à esquerda, para todo* $r \in R\}$.

Se R é um anel com unidade então o radical de Jacobson de R é a interseção de todos os ideais maximais à direita de R. Equivalentemente, este radical também pode ser caracterizado pelo conjunto

$$J(R) = \{r \in R : 1_R - xry \in U(R),\ para\ quaisquer\ x, y \in R\} \tag{1.1}$$

onde $U(R)$ é o conjunto das unidades do anel R. Em particular, $J(R)$ é um ideal bilateral de R. Para maiores detalhes, veja ([16], Section 4) e ([4], Chapter 4).

Lema 1.6.5. *R é um anel quasi-duo à direita se, e somente se, $R/J(R)$ é um anel quasi-duo à direita.*

Para o próximo resultado, necessitamos da seguinte definição, ver ([16], Definition 12.1, pág. 203).

Definição 1.6.6. *Sejam S, $\{S_i | i \in \mathcal{I}\}$ anéis e $\varepsilon : S \to \prod_{i \in \mathcal{I}} S_i$ um homomorfismo injetivo de anéis. Dizemos que ε representa S como um produto subdireto dos anéis S_i, $i \in \mathcal{I}$, se cada uma das aplicações $S \to S_i$ (obtida pela composição de ε com as projeções nas coordenadas) é sobrejetiva.*

Observamos que S pode ser representado como um produto subdireto dos anéis $\{S_i | i \in \mathcal{I}\}$ se, e somente se, para todo $i \in \mathcal{I}$ existe um homomorfismo sobrejetivo de anéis $\varphi_i : S \to S_i$ tal que $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} ker\varphi_i = 0$.

Suponhamos que S é um produto subdireto dos anéis $\{S_i | i \in \mathcal{I}\}$. Então, por ([17], Corollary 3.2(6)), S é um anel quasi-duo à direita se, e somente se, S_i é um anel quasi-duo à direita, para todo $i \in \mathcal{I}$.

Dizemos que um anel S é *reduzido* se S não contém elementos nilpotentes não-nulos. Estas observações são necessárias para a prova do resultado a seguir, veja ([26], Lemma 2.3).

Lema 1.6.7. *Se R é um anel quasi-duo à direita, então $R/J(R)$ é um anel reduzido.*

Dizemos que um ideal P de um anel R é *completamente primo* se R/P é um domínio. Por ([16], Proposition 11.6, pág. 183), todo anel simples é um anel primitivo à direita e à esquerda. Encerramos esta seção com a seguinte observação.

Observação 1.6.8. *Todo ideal maximal à direita de um anel quasi-duo à direita é um ideal completamente primo.*

De fato, sejam R um anel quasi-duo à direita e M um ideal maximal à direita de R. Por definição, temos que M é um ideal bilateral de R. Então R/M é um anel simples e, em particular, primitivo. Além disto, pelo Teorema 1.6.2, R/M é um anel quasi-duo à direita como imagem homomórfica de R. Pelo Teorema 1.6.3, temos que R/M é um anel de divisão e, portanto, M é um ideal completamente primo de R.

1.6.2 Anéis $\mathbb{Z}$-graduados

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre anéis $\mathbb{Z}$-graduados que serão utilizados nesta tese. Maiores detalhes do que abordaremos aqui podem ser encontrados em [20].

Iniciamos com a definição de anéis $\mathbb{Z}$-graduados.

Definição 1.6.9. *Dizemos que um anel L é $\mathbb{Z}$-graduado se $L = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n$ é uma soma direta de subgrupos aditivos L_n, satisfazendo $L_nL_m \subseteq L_{n+m}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. Se $L_nL_m = L_{n+m}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, então L é denominado um anel fortemente $\mathbb{Z}$-graduado.*

Seja α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R. Observamos que os anéis

$$R[x; \alpha] = \bigoplus_{i\geq 0} S_i x^i$$

e

$$R < x; \alpha >= \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} S_i x^i$$

são naturalmente $\mathbb{Z}$-graduados. Assim, os resultados gerais obtidos para anéis $\mathbb{Z}$-graduados em [20] podem ser aplicados para $R[x; \alpha]$ e $R < x; \alpha >$.

Seja L um anel $\mathbb{Z}$-graduado. Dizemos que um ideal I do anel L é *homogêneo* se $I = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(I \cap L_n)$. O seguinte resultado aparece em ([20], Theorem 1).

Teorema 1.6.10. *Seja L um anel $\mathbb{Z}$-graduado. As seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$J(L)$ é um ideal homogêneo.*

2. *Se $l \in \bigcup_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} L_n$ então $1 + l$ é invertível se, e somente se, l é nilpotente.*

Consideramos um anel $\mathbb{Z}$-graduado L. Sejam $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os ideais maximais à direita M de L tais que $L_n \nsubseteq M$, para algum $n \in \mathbb{Z}$ não-nulo, e $\mathcal{B}$ o conjunto dos demais ideais maximais à direita de L. Definimos $\mathcal{A}(L) = \bigcap_{M \in \mathcal{A}} M$ e, analogamente, $\mathcal{B}(L) = \bigcap_{M \in \mathcal{B}} M$. Então, o radical de Jacobson de L satisfaz

$$J(L) = \mathcal{A}(L) \cap \mathcal{B}(L).$$

Além disto, por ([20], Proposition 3), temos que

$$\mathcal{A}(L) = \{l \in L; L_n l \subseteq J(L),\ \textit{para todo}\ 0 \neq n \in \mathbb{Z}\} \tag{1.2}$$

é um ideal bilateral de L.

1.6.3 Módulos distributivos e alguns tópicos relacionados

Os resultados apresentados nesta seção são importantes para o estudo que realizamos sobre os skew anéis de séries de potências parciais. Maiores detalhes do que abordaremos aqui podem ser encontrados em ([24]).

Iniciamos com a definição de módulo distributivo ([24], 2.3(1), pág. 33).

Definição 1.6.11. *Consideramos um anel R e um R-módulo à direita M. Dizemos que M é um módulo distributivo se $(N + P) \cap Q = (N \cap Q) + (P \cap Q)$, para quaisquer R-submódulos N, P e Q de M.*

Dizemos que um anel R é distributivo à direita se R, como R-módulo à direita, é um módulo distributivo. Equivalentemente, R é um anel distributivo à direita se, para quaisquer ideais à direita I, J e K de R, temos que $(I + J) \cap K = (I \cap K) + (J \cap K)$.

Analogamente se define anel distributivo à esquerda. Dizemos que R é um anel distributivo se R é um anel distributivo à direita e distributivo à esquerda.

A seguir, apresentamos uma caracterização para módulos distributivos ([24], 2.4($1 \Leftrightarrow 3$), pág. 34).

Proposição 1.6.12. *Consideramos um anel R e um R-módulo à direita M. Então M é distributivo se, e somente se, para quaisquer $m, n \in M$, existem $a, b, c, d \in R$ tais que $1 = a + b$, $ma = nc$ e $nb = md$.*

A próxima definição aparece em ([24], 2.1, pág. 33).

Definição 1.6.13. *Sejam R um anel e M um R-módulo à direita. Dizemos que M é um módulo de Bezout se cada submódulo finitamente gerado de M é cíclico.*

Proposição 1.6.14. *Sejam R um anel e M um R-módulo à direita. Então M é um módulo de Bezout se, e somente se, para quaisquer $m, n \in M$ existem $a, b, c, d \in R$ tais que $m = (ma + nb)c$ e $n = (ma + nb)d$.*

Dizemos que R é um anel de Bezout à direita se R, como R-módulo à direita, é um módulo de Bezout. Equivalentemente, R é um anel de Bezout à direita se todo ideal à direita finitamente gerado de R é principal. Analogamente se define um anel de Bezout à esquerda. Dizemos que R é um anel de Bezout se R é um anel de Bezout à direita e à esquerda. O próximo resultado aparece em ([24], 2.35, pág. 43).

Proposição 1.6.15. *Sejam R um anel quasi-duo à direita e M um R-módulo à direita qualquer. Se M é um módulo de Bezout então M é um módulo distributivo.*

Consideramos um anel R e um R-módulo à direita E. Dizemos que E é um *módulo plano* se, para cada monomorfismo de R-módulos à esquerda $u : M_1 \to M_2$, o homomorfismo de grupos $f : E \otimes M_1 \to E \otimes M_2$ definido por

$$f(a \otimes b) = (id_E \otimes u)(a \otimes b) = a \otimes u(b)$$

é um monomorfismo.

A próxima proposição aparece em ([24], 4.18, pág. 122).

Proposição 1.6.16. *Para um anel R, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Todo submódulo de um R-módulo à direita plano é plano.*

2. *Todo submódulo de um R-módulo à esquerda plano é plano.*

3. *Todo ideal à direita de R é plano.*

4. *Todo ideal à esquerda de R é plano.*

5. *Todo ideal à direita de R finitamente gerado é plano.*

6. *Todo ideal à esquerda de R finitamente gerado é plano.*

7. *Para todo ideal à direita finitamente gerado E de R e para qualquer ideal à esquerda finitamente gerado M de R, o homomorfismo natural de grupos*

$$h : E \otimes M \to EM$$

definido por $h(x \otimes y) = xy$, é um isomorfismo.

O próximo resultado aparece em ([24], 4.21(2), pág. 124).

Proposição 1.6.17. *Se R é um anel de Bezout à direita reduzido, então todo submódulo (à esquerda ou à direita) de um R-módulo plano é plano.*

O próximo resultado aparece em ([24], 4.24(2), pág. 125).

Proposição 1.6.18. *Seja R um anel tal que todo ideal à direita de R gerado por dois elementos é plano. Então para quaisquer $u, v, w \in R$ tais que $uv = vw$, existem $f, g, h \in R$ satisfazendo $uf = vg$ e $(1 - f)v = hw$.*

Dizemos que um anel R é *abeliano* se todo elemento idempotente de R é um elemento central de R. Um anel R é *von Neumann regular* se, para todo $a \in R$, existe $r \in R$ tal que $a = ara$. Dizemos que R é um anel *fortemente regular* se $a \in a^2R$, para todo $a \in R$. Ou seja, R é um anel fortemente regular se, para todo $a \in R$, existe $r \in R$ tal que $a = a^2r$.

Claramente, todo anel fortemente regular é um anel reduzido. Além disto, a imagem homomórfica de um anel fortemente regular é um anel fortemente regular. O seguinte resultado aparece em ([14], Theorem 3.5, pág. 28).

Lema 1.6.19. *R é um anel fortemente regular se, e somente se, R é um anel abeliano von Neumann regular.*

Seja R um anel fortemente regular. Conforme ([14], Corollary 4.2, pág. 38), para cada $x \in R$ existe uma unidade $u \in R$ tal que $xux = x$. Por isto, todo elemento de um anel fortemente regular R pode ser escrito como um produto de uma unidade de R e um elemento idempotente central de R. Em particular, segue que todo anel fortemente regular é um anel duo.

O próximo resultado aparece em ([24], 5.15, pág. 161).

Proposição 1.6.20. *Suponhamos que R é um anel tal que $R/J(R)$ é um anel fortemente regular. Seja M um R-módulo à direita. Então M é um módulo distributivo se, e somente se, M é um módulo de Bezout.*

A próxima definição aparece em ([24], 4.84, pág. 150).

Definição 1.6.21. *Sejam R um anel e M um R-módulo à direita. Dizemos que M é um módulo $\aleph_0$-injetivo se, para qualquer ideal à direita B de R gerado por um conjunto enumerável de elementos, todo homomorfismo $B_R \to M$ pode ser estendido a um homomorfismo $R_R \to M$.*

Neste sentido, dizemos que um anel R é $\aleph_0$-injetivo à direita se R, como R-módulo à direita, é um módulo $\aleph_0$-injetivo. Analogamente se define anel $\aleph_0$-injetivo à esquerda. Dizemos que R é um anel $\aleph_0$-injetivo se R é um anel $\aleph_0$-injetivo à direita e $\aleph_0$-injetivo à esquerda.

Sejam R um anel e M um R-módulo à direita. Conforme ([24], 4.87, pág. 152), dizemos que M é um módulo $\aleph_0$-*algebricamente compacto* se todo sistema $L(a_{ij}, m_i, M)$ com um número contável de equações lineares

$$\{\sum_{j=0}^{t(i)} x_j a_{ij} = m_i\}_{i=0}^{\infty}$$

com coeficientes $a_{ij} \in R$, $m_i \in M$ e com um número contável de incógnitas $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ assumindo valores em M tal que todo subsistema finito deste sistema tem solução, então $L(a_{ij}, m_i, M)$ tem solução em M.

Neste sentido, dizemos que um anel R é $\aleph_0$-algebricamente compacto à direita se R, como R-módulo à direita, é um módulo $\aleph_0$-algebricamente compacto. Analogamente se define anel $\aleph_0$-algebricamente compacto à esquerda. Dizemos que R é um anel $\aleph_0$-algebricamente compacto se R é um anel $\aleph_0$-algebricamente compacto à direita e $\aleph_0$-algebricamente compacto à esquerda.

A seguir, destacamos um resultado muito importante, que reúne todas estas definições mencionadas, ver ([24], 4.88, pág. 153).

Teorema 1.6.22. *Para um anel fortemente regular R, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *R é um anel $\aleph_0$-injetivo à esquerda.*

2. *R é um anel $\aleph_0$-injetivo à direita.*

3. *R é um anel $\aleph_0$-algebricamente compacto à esquerda.*

4. *R é um anel $\aleph_0$-algebricamente compacto à direita.*

5. *Para cada conjunto enumerável $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ de elementos idempotentes centrais*

mutuamente ortogonais de R e para cada conjunto enumerável $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ de elementos de R, existe um elemento $b \in R$ tal que $be_i = a_i e_i$, para todo $i \geq 0$.

Seja R um anel fortemente regular. Pela Proposição 1.6.22, temos que R é um anel $\aleph_0$-injetivo à direita se, e somente se, R é um anel $\aleph_0$-injetivo à esquerda. Por isto, quando R é um anel fortemente regular $\aleph_0$-injetivo à direita (ou à esquerda), diremos apenas que R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular.

Analogamente, pela Proposição 1.6.22, quando R é um anel fortemente regular $\aleph_0$-algebricamente compacto à direita (ou à esquerda), diremos apenas que R é um anel $\aleph_0$-algebricamente compacto fortemente regular.

Capítulo 2

Skew anéis de polinômios parciais e skew anéis de polinômios de Laurent parciais quasi-duo

Neste capítulo, salvo menção em contrário, assumimos que α é uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R que admite envolvente (T, σ), onde $\sigma : T \to T$ é um automorfismo. Recordamos que, neste caso, cada ideal S_i de R é gerado por um elemento idempotente central $1_i = 1_R\sigma^i(1_R)$.

Na primeira seção estudamos condições necessárias e suficientes para que o skew anel de polinômios parcial $R[x; \alpha]$ seja um anel quasi-duo à direita. Obtivemos, em particular, uma descrição do radical de Jacobson de $R[x; \alpha]$.

Na segunda seção consideramos α uma ação parcial de tipo finito e abordamos um estudo semelhante para o skew anel de polinômios de Laurent parcial $R < x; \alpha >$, obtendo condições necessárias e suficientes para que este anel seja quasi-duo à direita. Novamente, obtivemos uma descrição do radical de Jacobson de $R < x; \alpha >$.

Alguns resultados deste capítulo generalizam resultados que podem ser encontrados em [19] e [20].

2.1 Skew Anéis de Polinômios Parciais Quasi-duo

Recordamos que um anel R é *quasi-duo à direita* (respectivamente *à esquerda*) se todo ideal maximal à direita (respectivamente à esquerda) de R é um ideal bilateral. Iniciamos esta seção com o seguinte resultado.

Proposição 2.1.1. *Seja α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R que admite envolvente (T,σ). Então R é um anel quasi-duo à direita se, e somente se, T é um anel quasi-duo à direita.*

Demonstração. Suponhamos que T é um anel quasi-duo à direita e consideramos a aplicação natural $\varphi : T \rightarrow R$ definida por $\varphi(t) = t.1_R$, para todo $t \in T$. Claramente φ é um homomorfismo sobrejetivo. Assim, pelo Teorema 1.6.2, R é um anel quasi-duo à direita como imagem homomórfica de T.

Reciprocamente, suponhamos que R é um anel quasi-duo à direita e seja M um ideal maximal à direita de T. Então existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $M \cap \sigma^s(R)$ é um ideal à direita próprio de $\sigma^s(R)$. Seja L um ideal maximal à direita de $\sigma^s(R)$ tal que $M \cap \sigma^s(R) \subseteq L$. Observamos que o conjunto

$$X := \{t \in T : t\sigma^s(1_R) \in L\}$$

é um ideal à direita de T. Como, por hipótese, $\sigma^s(R) \simeq R$ é um anel quasi duo à direita então L é um ideal bilateral e, por isto, X é um ideal bilateral de T. Finalmente, se $x \in M$, então $x\sigma^s(1_R) \in M \cap \sigma^s(R) \subseteq L$, e segue que $M \subseteq X$. Por hipótese M é um ideal maximal à direita de T e, por isto $M = X$ é um ideal bilateral de T. Portanto T é um anel quasi-duo à direita. $\square$

O próximo resultado exibe condições necessárias e suficientes para que os anéis $R[x;\alpha]$ e $R < x;\alpha >$ sejam comutativos.

Proposição 2.1.2. *Consideramos α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R que admite envolvente (T, σ). As seguintes condições são equivalentes:*

1. *R é um anel comutativo e $\alpha_i = id_{S_{-i}}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

2. *$R[x; \alpha]$ é um anel comutativo.*

3. *$R < x; \alpha >$ é um anel comutativo.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Sejam R um anel comutativo e $\alpha_i = id_{S_{-i}}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Observamos que

$$S_{-i} = \alpha_i(S_{-i}) = S_i$$

e, por isto, $1_i = 1_{-i}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Sejam $a \in S_i$, $r \in S_j$ e $i, j \geq 0$ elementos quaisquer. Então, por hipótese, segue que

$$\begin{aligned} ax^i rx^j &= a\alpha_i(r1_{-i})x^{i+j} = ar1_{-i}x^{j+i} = ar1_i x^{j+i} \\ &= arx^{j+i} = rax^{j+i} = rx^j ax^i \end{aligned}$$

e, portanto, $R[x; \alpha]$ é um anel comutativo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $R[x; \alpha]$ um anel comutativo. Em particular, $R \subseteq R[x; \alpha]$ é um anel comutativo.

Observamos que $S_{-i} = S_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. De fato, seja $a \in S_{-i}$. Então, $a1_i x^i = 1_i x^i a = \alpha_i(a)x^i$ e, por isto, $\alpha_i(a) = a1_i \in S_{-i}$. Assim $\alpha_i(S_{-i}) = S_i \subseteq S_{-i}$.

Por outro lado, notamos que $1_i x^i = 1_i x^i 1_i = \alpha_i(1_i 1_{-i})x^i$, para todo $i \geq 0$. Desta maneira $1_i = \alpha_i(1_i 1_{-i})$ e, segue que

$$1_{-i} = \alpha_{-i}(1_i) = \alpha_{-i}(\alpha_i(1_i 1_{-i})) = 1_i 1_{-i} = 1_{-i} 1_i.$$

Assim $S_{-i} \subseteq S_i$.

Logo,

$$ax^i = 1_i x^i a = \alpha_i(a1_{-i})x^i = \alpha_i(a1_i)x^i = \alpha_i(a)x^i,$$

para quaisquer elementos $a \in S_i$ e $i \geq 0$ e, portanto, $\alpha_i = id_{S_{-i}}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

A prova de (1) $\Leftrightarrow$ (3) é similar ao caso (1) $\Leftrightarrow$ (2). $\square$

Consideramos um anel S e um automorfismo $\sigma : S \to S$. Conforme [19], um elemento $a \in S$ é chamado *σ-nilpotente* se, para cada $m \geq 1$, existe $n \geq 1$ tal que

$$a\sigma^m(a)\sigma^{2m}(a)...\sigma^{nm}(a) = 0.$$

Um subconjunto $B \subseteq S$ é denominado *σ-nil* se cada elemento de B é σ-nilpotente. Consideramos também o conjunto

$$N(S) = \{a \in S : \exists n \geq 1; a\sigma(a)...\sigma^n(a) = 0\}.$$

A seguir, estendemos esta definição para ações parciais. Consideramos α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R que admite ação envolvente (T, σ).

Definição 2.1.3. *Um elemento $a \in R$ é chamado α-nilpotente se, para cada $m \geq 1$, existe $n \geq 1$ tal que*

$$a\alpha_m(a1_{-m})\alpha_{2m}(a1_{-2m})...\alpha_{nm}(a1_{-nm}) = 0.$$

Um subconjunto $I \subseteq R$ é denominado α-nil se cada elemento de I é α-nilpotente.

Para todo $i \geq 1$, consideramos o conjunto

$$N^i_\alpha(R) = \{a \in R : \exists n \geq 1, a\alpha_i(a1_{-i})...\alpha_{ni}(a1_{-ni}) = 0\}$$

e definamos $N_\alpha(R) = \cap_{i \geq 1} N^i_\alpha(R)$.

Para o anel T temos, analogamente, que

$$N^i(T) = \{a \in T : \exists n \geq 1, a\sigma^i(a)...\sigma^{ni}(a) = 0\}$$

para todo $i \geq 1$. Claramente, $N(T) = N^1(T) \supseteq \cap_{i\geq 1} N^i(T)$.

Como $R \subseteq T$ então $N^i_\alpha(R) \subseteq N^i(T)$, para todo $i \geq 1$ e, por isto,

$$N_\alpha(R) = \cap_{i\geq 1} N^i_\alpha(R) \subseteq \cap_{i\geq 1} N^i(T) \subseteq N(T).$$

De agora em diante, denotamos $N_\sigma(T) = \cap_{i\geq 1} N^i(T)$.

Exemplo 2.1.4. *Um caso em que* $N^1_\alpha(R) \supsetneq N_\alpha(R) = N_\sigma(T) \subsetneq N(T)$.

Sejam k um corpo e $T = ke_1 \oplus ke_2 \oplus ke_3$, onde $e_1, e_2, e_3 \in T$ são elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais. Definamos o automorfismo $\sigma : T \to T$ por $\sigma(e_1) = e_2$, $\sigma(e_2) = e_3$, $\sigma(e_3) = e_1$ e $\sigma|_k = id_k$.

Consideramos $R = ke_1 \oplus ke_2$ e a ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre R definida como a restrição de σ, isto é,

$$\begin{aligned} S_i &= ke_1, i \equiv 2(mod 3) \\ S_j &= ke_2, j \equiv 1(mod 3) \\ S_l &= R, l \equiv 0(mod 3) \end{aligned}$$

e, $\alpha_1(e_1) = e_2$, $\alpha_2(e_2) = e_1$ e $\alpha_3 = id_R$.

Observamos que $e_i\sigma(e_i) = 0$ e, por isto, $e_i \in N(T)$, para todo $i = 1, 2, 3$. Como $\sigma^{3i} = id_T$ então $N^{3i}(T) = 0$, para todo $i \geq 1$ e, deste modo, $N_\sigma(T) = 0$. Logo, $N_\sigma(T) \subsetneq N(T)$.

Seja $a = a_1e_1 + a_2e_2 \in N^{3i}_\alpha(R)$ um elemento qualquer. Por definição, existe $n \geq 1$

tal que

$$0 = a\alpha_{3i}(a)...\alpha_{3in}(a) = a^{n+1} = a_1^{n+1}e_1 + a_2^{n+1}e_2.$$

Desta maneira, $a_1 = a_2 = 0$ e, portanto, $a = 0$. Logo

$$N_\alpha(R) = \bigcap_{i\geq 1} N_\alpha^i(R) = 0 = N_\sigma(T).$$

Observamos que, para todo $r = a_1e_1 + a_2e_2 \in R$,

$$r\alpha_1(re_1)\alpha_2(re_2) = 0$$

e, por isto, $N_\alpha^1(R) = R$. Logo, $N_\alpha(R) \subsetneq N_\alpha^1(R)$.

Sejam S um anel, $\varphi : S \to S$ um automorfismo e I um ideal de S. Dizemos que I é um *φ-ideal* de S se $\varphi(I) \subseteq I$. Se $\varphi(I) = I$ então I é chamado um *ideal φ-invariante* de S.

Seja α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R. Recordamos que um ideal I de R é denominado um *α-ideal* se $\alpha_i(I\cap S_{-i}) \subseteq I\cap S_i$, para todo $i \geq 0$. Se $\alpha_i(I\cap S_{-i}) = I\cap S_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, dizemos que I é um *ideal α-invariante* de R, ver Definição 1.2.3. No próximo resultado destacamos algumas propriedades de $N_\alpha(R)$.

Lema 2.1.5. *1. $N_\alpha(R)$ contém todo subconjunto α-nil de R.*

2. $N_\alpha^i(R) = N^i(T) \cap R$, para todo $i \geq 1$. Em particular, $N_\alpha(R) = N_\sigma(T) \cap R$.

3. $N_\alpha(R)$ é um subconjunto α-invariante de R.

Demonstração. (1) Consideramos um subconjunto α-nil $I \subseteq R$ e $a \in I$ um elemento qualquer. Por definição, para todo $i \geq 1$, existe $n \geq 1$ tal que

$$a\alpha_i(a1_{-i})\alpha_{2i}(a1_{-2i})...\alpha_{ni}(a1_{-ni}) = 0.$$

Assim, $a \in \cap_{i \geq 1} N_\alpha^i(R) = N_\alpha(R)$ e, portanto, $I \subseteq N_\alpha(R)$.

(2) Seja $a \in N_\alpha^i(R)$ um elemento qualquer. Por definição, existe $n \geq 1$ tal que

$$a\alpha_i(a1_{-i})...\alpha_{ni}(a1_{-ni}) = a\sigma^i(a)...\sigma^{ni}(a) = 0.$$

Logo $a \in N^i(T) \cap R$.

Por outro lado, seja $a \in N^i(T) \cap R$ um elemento qualquer. Por definição, existe $n \geq 1$ tal que

$$a\sigma^i(a)...\sigma^{ni}(a) = a1_R\sigma^i(a1_R)...1_R\sigma^{ni}(a1_R) = a\alpha_i(a1_{-i})...\alpha_{ni}(a1_{-ni}) = 0.$$

Assim $a \in N_\alpha^i(R)$ e, por isto, $N_\alpha^i(R) = N^i(T) \cap R$, para todo $i \geq 1$. Portanto,

$$N_\alpha(R) = \cap_{i \geq 1} N_\alpha^i(R) = (\cap_{i \geq 1} N^i(T)) \cap R = N_\sigma(T) \cap R.$$

(3) Inicialmente mostraremos que $N_\sigma(T)$ é um subconjunto σ-invariante de T. De fato, seja $a \in N_\sigma(T)$. Por definição, $a \in N^i(T)$, para todo $i \geq 1$. Então, para cada $i \geq 1$, existe $n \geq 1$ tal que $a\sigma^i(a)...\sigma^{ni}(a) = 0$. Assim,

$$\sigma(a\sigma^i(a)...\sigma^{ni}(a)) = \sigma(a)\sigma^i(\sigma(a))...\sigma^{ni}(\sigma(a)) = 0$$

e

$$\sigma^{-1}(a\sigma^i(a)...\sigma^{ni}(a)) = \sigma^{-1}(a)\sigma^i(\sigma^{-1}(a))...\sigma^{ni}(\sigma^{-1}(a)) = 0.$$

Desta maneira, $\sigma(a), \sigma^{-1}(a) \in N^i(T)$, para todo $i \geq 1$. Logo,

$$N_\sigma(T) = \cap_{i \geq 1} N^i(T) = \cap_{i \geq 1} \sigma(N^i(T)) = \sigma(\cap_{i \geq 1} N^i(T)) = \sigma(N_\sigma(T))$$

e, portanto, pelo item (2), $N_\alpha(R) = N_\sigma(T) \cap R$ é subconjunto α-invariante de R. $\square$

Seja L um anel com unidade. Recordamos que o radical de Jacobson de L, denotado por $J(L)$, é definido como a interseção de todos os ideais maximais à direita de L. Dizemos que L é um anel J-semisimples se $J(L) = 0$.

Mais geralmente, a definição de radical pode ser encontrada em [4]. O resultado a seguir aparece em ([4], Teorema 48, pág. 125).

Proposição 2.1.6. *Para um radical rad, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Se I é um ideal de L e $L = rad(L)$ então $I = rad(I)$.*

2. *Para todo anel L e todo ideal I de L temos que $rad(I) = I \cap rad(L)$.*

Dizemos que um radical é *hereditário* se satisfazer a uma das equivalências acima descritas. Conforme ([13], pág. 45), *o radical de Jacobson de um anel L é um radical hereditário.* Então, por ([18], Proposição 2.3.10, pág. 50), $J(R)$ é um ideal α-invariante de R, independentemente da ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre o anel R.

Desta maneira, se α é uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R que admite envolvente (T, σ), então o radical de Jacobson de R satisfaz

$$J(R) = J(T) \cap R. \tag{2.1}$$

Os radicais de Jacobson dos skew anéis de polinômios e skew anéis de polinômios de Laurent foram completamente descritos em ([2], Theorem 3.1). A seguir, destacamos resultados similares obtidos para $R[x; \alpha]$ e $R < x; \alpha >$.

Proposição 2.1.7. *Seja α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R que admite ação envolvente (T, σ). Então existem ideais α-nil, α-invariantes $K \subseteq J(R)$ e I de R tais que*

$$J(R[x; \alpha]) = J(R) \cap I + \sum_{i \geq 1} (S_i \cap I) x^i \tag{2.2}$$

e

$$J(R < x; \alpha >) \quad = \quad K < x; \alpha > . \tag{2.3}$$

Demonstração. Por ([12], Proposition 6.1), temos que

$$J(R < x; \alpha >) = J(T < x; \sigma >) \cap R < x; \alpha >$$

e, analogamente, $J(R[x; \alpha]) = J(T[x; \sigma]) \cap R[x; \alpha]$.

Além disto, por ([2], Theorem 3.1), obtemos que

$$\begin{aligned} J(T < x; \sigma >) &= L < x; \sigma > \\ J(T[x; \sigma]) &= M \cap J(T) + M[x; \sigma]x \end{aligned}$$

onde $L \subseteq J(T)$ e M são ideais σ-nil σ-invariantes de T.

Desta maneira, pela igualdade 2.1, temos que

$$\begin{aligned} J(R[x; \alpha]) &= J(T[x; \sigma]) \cap R[x; \alpha] \\ &= (M \cap J(T) + M[x; \sigma]x) \cap R[x; \alpha] \\ &= (M \cap R) \cap J(T) + \sum_{i \geq 1} ((M \cap R) \cap S_i)x^i \\ &= (M \cap R) \cap J(R) + \sum_{i \geq 1} ((M \cap R) \cap S_i)x^i. \end{aligned}$$

Consideramos $I = M \cap R$ ideal α-nil α-invariante de R tal que

$$J(R[x; \alpha]) = J(R) \cap I + \sum_{i \geq 1} (S_i \cap I)x^i.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} J(R<x;\alpha>) &= J(T<x;\sigma>)\cap R<x;\alpha> \\ &= L<x;\sigma>\cap R<x;\alpha> \\ &= (L\cap R)<x;\alpha> . \end{aligned}$$

Observamos que, pela igualdade 2.1, $L\cap R\subseteq J(T)\cap R=J(R)$. Desta maneira, consideramos $K=L\cap R$ ideal α-nil α-invariante de R, contido em $J(R)$, tal que

$$J(R<x;\alpha>)=K<x;\alpha> .$$

$\square$

Observamos que

$$R[x;\alpha]=\bigoplus_{i\geq 0} S_i x^i$$

é um anel naturalmente $\mathbb{Z}$-graduado. Isto nos permite aplicarmos os resultados e métodos desenvolvidos em [20] para o anel $R[x;\alpha]$.

Sejam $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os ideais maximais à direita M de $R[x;\alpha]$ tais que $S_i x^i\nsubseteq M$, para algum $i\geq 1$, e $\mathcal{B}$ o conjunto dos demais ideais maximais à direita de $R[x;\alpha]$. Consideramos $\mathcal{A}(R[x;\alpha])=\bigcap_{M\in\mathcal{A}} M$ e, analogamente, $\mathcal{B}(R[x;\alpha])=\bigcap_{M\in\mathcal{B}} M$. Pela igualdade 1.2, temos que

$$\mathcal{A}(R[x;\alpha])=\{f\in R[x;\alpha]; fS_i x^i\subseteq J(R[x;\alpha]),\forall i\geq 1\} \tag{2.4}$$

é um ideal bilateral de $R[x;\alpha]$. Além disto, o radical de Jacobson de $R[x;\alpha]$ satisfaz

$$J(R[x;\alpha])=\mathcal{A}(R[x;\alpha])\cap\mathcal{B}(R[x;\alpha]).$$

O próximo lema descreve precisamente os elementos de $\mathcal{B}(R[x;\alpha])$, no caso em que $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita.

Lema 2.1.8. *Seja $R[x;\alpha]$ um anel quasi-duo à direita. Um ideal maximal à direita $M \in \mathcal{B}$ se, e somente se, $M = (M \cap R) + \sum_{i\geq 1} S_i x^i$, onde $M \cap R$ é um ideal maximal à direita de R. Em particular,*

$$\mathcal{B}(R[x;\alpha]) = J(R) + \sum_{i\geq 1} S_i x^i.$$

Demonstração. Suponhamos que $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita. Por ([20], Theorem 5), temos que R é um anel quasi-duo à direita. Assim, por definição, todo ideal maximal à direita de R é um ideal bilateral.

Sejam $M \in \mathcal{B}$ e $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \in M$ elementos quaisquer. Como $S_i x^i \subseteq M$, para todo $i \geq 1$, então $f_0 = f - \sum_{i=1}^{n} f_i x^i \in M \cap R$. Assim, $f \in (M \cap R) + \sum_{i\geq 1} S_i x^i$ e, portanto, $M \subseteq (M \cap R) + \sum_{i\geq 1} S_i x^i$.

Claramente $(M \cap R) + \sum_{i\geq 1} S_i x^i \subseteq M$, para todo $M \in \mathcal{B}$ e, portanto,

$$M = (M \cap R) + \sum_{i\geq 1} S_i x^i.$$

Como $R[x;\alpha]/M \simeq R/(M \cap R)$ é um anel simples, então $M \cap R$ é um ideal maximal de R.

Reciprocamente, seja $M = (M \cap R) + \sum_{i\geq 1} S_i x^i$, onde $M \cap R$ é um ideal maximal de R. Claramente $S_i x^i \subseteq M$, para todo $i \geq 1$. Além disto, $R[x;\alpha]/M \simeq R/(M \cap R)$ é um anel simples e, por isto, $M \in \mathcal{B}$.

Mostraremos agora que $\mathcal{B}(R[x;\alpha]) = J(R) + \sum_{i\geq 1} S_i x^i$. Seja N um ideal maximal de R. Então $M = N + \sum_{i\geq 1} S_i x^i \in \mathcal{B}$ e, portanto,

$$M = N + \sum_{i\geq 1} S_i x^i = M \cap R + \sum_{i\geq 1} S_i x^i.$$

Deste modo $N = M \cap R$ e, assim,

$$\mathcal{B}(R[x;\alpha]) = \bigcap_{M \in \mathcal{B}} M = \bigcap_{M \in \mathcal{B}} (M \cap R) + \sum_{i \geq 1} S_i x^i = J(R) + \sum_{i \geq 1} S_i x^i.$$

$\square$

A partir de agora estudaremos algumas propriedades que nos serão úteis para a descrição do radical de Jacobson de $R[x;\alpha]$, no caso em que $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita.

Inicialmente, destacamos um exemplo em que $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita mas, o skew anel de polinômios $T[x;\sigma]$ não é um anel quasi-duo à direita. Isto nos garante que o estudo dos skew anéis de polinômios parciais quasi-duo à direita não é uma generalização imediata do caso global.

Exemplo 2.1.9. *$R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita e, no entanto, $T[x;\sigma]$ não é um anel quasi-duo à direita.*

Sejam k um corpo e $T = ke_1 \oplus ke_2 \oplus ke_3$, onde $e_1, e_2, e_3 \in T$ são elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais. Definamos o automorfismo $\sigma : T \to T$ por $\sigma(e_1) = e_2$, $\sigma(e_2) = e_3$, $\sigma(e_3) = e_1$ e $\sigma|_k = id_k$.

Consideramos $R = ke_1$ e a ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre R definida por: $S_i = R$ e $\alpha_i = id_R$, para todo $i \equiv 0(mod 3)$; $S_j = 0$ e $\alpha_j = 0$, nos demais casos. Então, sob estas condições, $R[x;\alpha] = \bigoplus_{i \geq 0} ke_1 x^{3i}$ é um anel comutativo e, em particular, quasi-duo à direita.

Observamos que $e_i\sigma(e_i) = 0$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Além disto,

$$(e_1 + e_2)\sigma(e_1 + e_2)\sigma^2(e_1 + e_2) = (e_1 + e_2)(e_2 + e_3)(e_3 + e_1) = 0$$

e, por isto, $e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 \in N(T)$. Como $1_T = e_1 + e_2 + e_3 \notin N(T)$, então $N(T)$ não é um ideal de T e, por ([19], Proposition 2.3), temos que $T[x;\sigma]$ não é um anel quasi-duo à direita.

Antes de prosseguirmos, faremos a seguinte observação.

Observação 2.1.10. *Seja α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R que admite envolvente (T,σ). Notamos que, para quaisquer $a \in R$ e $i \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} a\alpha_i(a1_i1_{-i}) &= a\sigma^i(a1_R\sigma^i(1_R)\sigma^{-i}(1_R)) = a\sigma^i(a)\sigma^{2i}(1_R)1_R \\ &= a1_R\sigma^i(a)1_R\sigma^{2i}(1_R) = a\alpha_i(a1_{-i})1_{2i}. \end{aligned}$$

Nosso próximo resultado fornece uma descrição de $N_\alpha(R)$, quando $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita.

Lema 2.1.11. *Se $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita então*

$$N_\alpha(R) = \mathcal{A}(R[x;\alpha]) \cap R = \{a \in R : a1_ix^i \in J(R[x;\alpha]), \forall i \geq 1\}$$

é um ideal α-invariante de R.

Demonstração. Seja $a \in N_\alpha(R)$ um elemento qualquer. Por definição, para cada $i \geq 1$, existe $n \geq 1$ tal que $a\alpha_i(a1_{-i})...\alpha_{ni}(a1_{-ni}) = 0$. Consideramos o elemento

$$u = a1_ix^i + J(R[x;\alpha]) \in R[x;\alpha]/J(R[x;\alpha]).$$

Então,

$$u^{n+1} = (a1_ix^i)^{n+1} + J(R[x;\alpha]) = a\alpha_i(a1_{-i})...\alpha_{ni}(a1_{-ni})x^{(n+1)i} + J(R[x;\alpha]) = \overline{0}.$$

Pelo Lema 1.6.7, temos que $R[x;\alpha]/J(R[x;\alpha])$ é um anel reduzido e, por isto, $u = \overline{0}$. Assim, $a1_ix^i \in J(R[x;\alpha])$, para todo $i \geq 1$ e, pela igualdade 2.4, segue que $a \in \mathcal{A}(R[x;\alpha]) \cap R$.

Por outro lado, consideramos um elemento $a \in \mathcal{A}(R[x;\alpha]) \cap R$ qualquer. Então, pela igualdade 2.4, temos que $a1_i x^i \in J(R[x;\alpha])$, para todo $i \geq 1$. Pela Proposição 2.1.7, existe um ideal α-nil α-invariante I de R tal que

$$J(R[x;\alpha]) = J(R) \cap I + \sum_{i \geq 1} (S_i \cap I)x^i$$

e, por isto, $a1_i \in I$, para todo $i \geq 1$. Deste modo, $a1_i$ é um elemento α-nilpotente e, por definição, para cada $i \geq 1$ existe $n \geq 1$ tal que

$$a1_i \alpha_i(a1_i 1_{-i})\alpha_{2i}(a1_i 1_{-2i})...\alpha_{ni}(a1_i 1_{-ni}) = 0.$$

Pela Observação 2.1.10, temos que

$$a1_i \alpha_i(a1_i 1_{-i})\alpha_{2i}(a1_i 1_{-2i})...\alpha_{ni}(a1_i 1_{-ni}) = a\alpha_i(a1_{-i})\alpha_{2i}(a1_{-2i})...\alpha_{ni}(a1_{-ni})1_{(n+1)i}$$

e então, $a\alpha_i(a1_{-i})\alpha_{2i}(a1_{-2i})...\alpha_{(n+1)i}(a1_{-(n+1)i}) = 0$. Logo $a \in N_\alpha^i(R)$, para todo $i \geq 1$ e, por isto, $a \in N_\alpha(R)$.

Como $\mathcal{A}(R[x;\alpha])$ é um ideal bilateral de $R[x;\alpha]$ então, pelo Lema 2.1.5, temos que $N_\alpha(R) = \mathcal{A}(R[x;\alpha]) \cap R$ é um ideal α-invariante de R. $\square$

Já observamos que o radical de Jacobson de $R[x;\alpha]$, denotado por $J(R[x;\alpha])$, satisfaz

$$J(R[x;\alpha]) = \mathcal{A}(R[x;\alpha]) \cap \mathcal{B}(R[x;\alpha]).$$

Seja I um ideal α-invariante de R. Definimos $I[x;\alpha] = \bigoplus_{i \geq 0}(I \cap S_i)x^i$. Não é difícil ver que $I[x;\alpha]$ é um ideal de $R[x;\alpha]$. No próximo resultado, obtemos uma descrição para $N_\alpha(R)[x;\alpha]$, no caso em que $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita.

Corolário 2.1.12. *Se $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita então*

$$J(R[x;\alpha]) \subseteq N_\alpha(R)[x;\alpha] = \mathcal{A}(R[x;\alpha]).$$

Demonstração. Claramente

$$J(R[x;\alpha]) = \mathcal{A}(R[x;\alpha]) \cap \mathcal{B}(R[x;\alpha]) \subseteq \mathcal{A}(R[x;\alpha]).$$

Mostraremos que $N_\alpha(R)[x;\alpha] = \mathcal{A}(R[x;\alpha])$. De fato, seja $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in N_\alpha(R)[x;\alpha]$ um elemento qualquer, com $a_i \in N_\alpha(R) \cap S_i$, para todo $0 \leq i \leq n$. Pelo Lema 2.1.11, temos que $a_i \in \mathcal{A}(R[x;\alpha]) \cap S_i$, para todo $0 \leq i \leq n$. Como $\mathcal{A}(R[x;\alpha])$ é um ideal bilateral de $R[x;\alpha]$ então $f \in \mathcal{A}(R[x;\alpha])$. Logo $N_\alpha(R)[x;\alpha] \subseteq \mathcal{A}(R[x;\alpha])$.

Por outro lado, seja $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathcal{A}(R[x;\alpha])$ um elemento qualquer. Pela igualdade 2.4, temos que $f1_i x^i \in J(R[x;\alpha])$, para todo $i \geq 1$. Pelo Teorema 1.6.10, $J(R[x;\alpha])$ é um ideal homogêneo de $R[x;\alpha]$ e, portanto, $a_0 \in \mathcal{A}(R[x;\alpha])$. Desta maneira, pelo Lema 2.1.11, temos que $a_0 \in N_\alpha(R)$ e, além disto,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i = f - a_0 \in \mathcal{A}(R[x;\alpha]) \cap \mathcal{B}(R[x;\alpha]) = J(R[x;\alpha]).$$

Pela Proposição 2.1.6, temos que $a_i \in I$ ideal α-nil de R, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, pelo Lema 2.1.5(1), segue que $a_i \in N_\alpha(R)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Consequentemente, $f \in N_\alpha(R)[x;\alpha]$. $\square$

Recordamos que um anel S é um produto subdireto dos anéis $\{S_i | i \in \mathcal{I}\}$ se, e somente se, para todo $i \in \mathcal{I}$ existe um homomorfismo sobrejetivo de anéis $\varphi_i : S \to S_i$ tal que $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} ker\varphi_i = 0$, ver ([16], Definition 12.1, pág. 203).

Nosso próximo resultado generaliza o que aparece em ([19], Lemma 3.2).

Lema 2.1.13. *Sejam α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R e $U \subseteq V$ ideais bilaterais de R tais que V é α-invariante. Então $U + \sum_{i \geq 1}(V \cap S_i)x^i$ é um ideal* *bilateral de $R[x;\alpha]$ e $R[x;\alpha]/(U+\sum_{i\geq 1}(V\cap S_i)x^i)$ é um anel quasi-duo à direita se, e somente se, R/U e $R[x;\alpha]/V[x;\alpha]$ são anéis quasi-duo à direita.*

Demonstração. Claramente $U+\sum_{i\geq 1}(V\cap S_i)x^i$ é um ideal bilateral de $R[x;\alpha]$.

Como V é um ideal α-invariante de R, então α induz uma ação parcial $\overline{\alpha}$ de $\mathbb{Z}$ sobre R/V, ver Seção 1.2.2.

Definamos o isomorfismo de anéis $\psi : (R/V)[x;\overline{\alpha}] \rightarrow R[x;\alpha]/V[x;\alpha]$ por $\psi(\sum_{i=0}^{n}(r_i+V)x^i)=\sum_{i=0} r_i x^i + V[x;\alpha]$. É fácil ver que

$$[U+\sum_{i\geq 1} S_i x^i]\cap V[x;\alpha] = U+\sum_{i\geq 1}(V\cap S_i)x^i \tag{2.5}$$

Definamos o homomorfismo sobrejetivo de anéis

$$\varphi : R[x;\alpha]/(U+\sum_{i\geq 1}(V\cap S_i)x^i) \rightarrow R/U+\sum_{i\geq 1}\overline{S_i}x^i$$

por

$$\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + (U+\sum_{i\geq 1}(V\cap S_i)x^i)) = (a_0+U)+\sum_{i=1}^{n}(a_i+V)x^i,$$

onde $\overline{S_i}=(S_i+V)/V \simeq S_i/(V\cap S_i)$, para todo $i\in\mathbb{Z}$. Observamos que φ é uma aplicação injetora. De fato, seja

$$\overline{f}=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + (U+\sum_{i\geq 1}(V\cap S_i)x^i) \in ker\varphi.$$

Então $\varphi(\overline{f})=(a_0+U)+\sum_{i=1}^{n}(a_i+V)x^i=\overline{0}$ e, segue que, $a_0\in U$ e $a_i\in V\cap S_i$, para todo $1\leq i\leq n$. Desta maneira, $\overline{f}=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i+(U+\sum_{i\geq 1}(V\cap S_i)x^i))=\overline{0}$.

Assim,

$$R[x;\alpha]/(U+\sum_{i\geq 1}(V\cap S_i)x^i) \simeq R/U+\sum_{i\geq 1}\overline{S_i}x^i.$$

Consideramos os homomorfismos de anéis

$$\psi_1 : R[x;\alpha]/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i) \to R/U$$

e

$$\psi_2 : R[x;\alpha]/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i) \to (R/V)[x;\overline{\alpha}].$$

É fácil ver que

$$ker\psi_1 = (U + \sum_{i\geq 1} S_i x^i)/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i)$$

e

$$ker\psi_2 = V[x;\alpha]/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i).$$

Da igualdade 2.5, obtemos que

$$\begin{aligned} ker\psi_1 \cap ker\psi_2 &= (U + \sum_{i\geq 1} S_i x^i)/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i) \cap V[x;\alpha]/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i) \\ &= (U + \sum_{i\geq 1} S_i x^i) \cap V[x;\alpha])/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i) = \overline{0}. \end{aligned}$$

Desta forma, $R[x;\alpha]/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i)$ é um produto subdireto de R/U e $(R/V)[x;\overline{\alpha}] \simeq R[x;\alpha]/V[x;\alpha]$. Então, por ([17], Corollary 3.6(2)), temos que $R[x;\alpha]/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i)$ é um anel quasi-duo à direita se, e somente se, R/U e $R[x;\alpha]/V[x;\alpha]$ são anéis quasi-duo à direita. $\square$

Agora estamos em condições de provar nosso principal resultado, o qual generaliza ([20], Corollary 9).

Teorema 2.1.14. *$R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita se, e somente se, R é um* *anel quasi-duo à direita, $N_\alpha(R)$ é um ideal α-invariante de R,*

$$J(R[x;\alpha]) = J(R) \cap N_\alpha(R) + \sum_{i \geq 1} (N_\alpha(R) \cap S_i) x^i$$

e $(R/N_\alpha(R))[x;\overline{\alpha}]$ é um anel comutativo, onde $\overline{\alpha}$ é a ação parcial induzida por α em $R/N_\alpha(R)$.

Demonstração. Suponhamos que $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita. Pelo Lema 2.1.11, temos que $N_\alpha(R)$ é um ideal α-invariante de R. Desta forma, podemos considerar a ação parcial $\overline{\alpha}$ induzida por α em $R/N_\alpha(R)$, ver Seção 1.2.2. Pelo Corolário 2.1.12, temos que

$$R[x;\alpha]/\mathcal{A}(R[x;\alpha]) = R[x;\alpha]/(N_\alpha(R))[x;\alpha] \simeq (R/N_\alpha(R))[x;\overline{\alpha}].$$

Como $R[x;\alpha]$ é um anel $\mathbb{Z}$-graduado então, por ([20], Theorem 5), temos que R é um anel quasi-duo à direita e $(R/N_\alpha(R))[x;\overline{\alpha}]$ é um anel comutativo. Pelo Lema 2.1.8, segue que

$$J(R[x;\alpha]) = \mathcal{A}(R[x;\alpha]) \cap \mathcal{B}(R[x;\alpha]) = J(R) \cap N_\alpha(R) + \sum_{i \geq 1} (N_\alpha(R) \cap S_i) x^i.$$

Reciprocamente, suponhamos que o radical de Jacobson de $R[x;\alpha]$ satisfaz

$$J(R[x;\alpha]) = J(R) \cap N_\alpha(R) + \sum_{i \geq 1} (N_\alpha(R) \cap S_i) x^i.$$

Consideramos $U = J(R) \cap N_\alpha(R)$ e $V = N_\alpha(R)$ ideais de R tais que $U \subseteq V$ e V é um ideal α-invariante. Pelo Lema 1.6.2, R/U é um anel quasi-duo à direita como imagem homomórfica de R. Além disto, por hipótese,

$$R[x;\alpha]/V[x;\alpha] = R[x;\alpha]/(N_\alpha(R)[x;\alpha]) \simeq (R/N_\alpha(R))[x;\overline{\alpha}]$$

é um anel comutativo e, em particular, quasi-duo à direita. Assim, pelo Lema 2.1.13,

$$R[x;\alpha]/J(R[x;\alpha]) = R[x;\alpha]/(U + \sum_{i\geq 1}(V \cap S_i)x^i)$$

é um anel quasi-duo à direita. Portanto, pelo Lema 1.6.5, temos que $R[x;\alpha]$ é um anel quasi-duo à direita. □

2.2 Skew Anéis de Polinômios de Laurent Parciais Quasi-duo

Nesta seção consideramos α uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel com unidade R que admite envolvente (T,σ). Exibiremos condições necessárias e suficientes para que o skew anel de polinômios de Laurent parcial $R < x;\alpha >$ seja um anel quasi-duo à direita. Obtivemos, em particular, uma descrição completa do radical de Jacobson de $R < x;\alpha >$.

Como na seção anterior, sejam $\mathcal{A}$ o conjunto dos ideais maximais à direita M de $R < x;\alpha >$ tais que $1_n x^n \notin M$, para algum $n \in \mathbb{Z}$ não-nulo, e $\mathcal{B}$ o conjunto dos demais ideais maximais à direita de $R < x;\alpha >$. Consideramos $\mathcal{A}(R < x;\alpha >) = \bigcap_{M\in\mathcal{A}} M$ e, analogamente, $\mathcal{B}(R < x;\alpha >) = \bigcap_{M\in\mathcal{B}} M$.

Como $R < x;\alpha >$ é um anel $\mathbb{Z}$-graduado então, pela igualdade 1.2, temos que

$$\mathcal{A}(R < x;\alpha >) = \{f \in R < x;\alpha >: f1_i x^i \in J(R < x;\alpha >),\ \textit{para todo}\ 0 \neq i \in \mathbb{Z}\} \quad (2.6)$$

é um ideal bilateral de $R < x;\alpha >$. Além disto, o radical de Jacobson de $R < x;\alpha >$ satisfaz a igualdade

$$J(R < x;\alpha >) = \mathcal{A}(R < x;\alpha >) \cap \mathcal{B}(R < x;\alpha >).$$

Nosso primeiro resultado destaca que os ideais maximais à direita que pertencem ao conjunto $\mathcal{B}$ não exercem influência na determinação do radical de Jacobson de $R < x; \alpha >$, no caso em que $R < x; \alpha >$ é um anel quasi-duo à direita e α é uma ação parcial de tipo finito. Usaremos este resultado várias vezes no decorrer desta seção, mesmo sem fazer referência a ele.

Lema 2.2.1. *Seja α uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R que admite envolvente (T, σ). Se $R < x; \alpha >$ é um anel quasi-duo à direita então $\mathcal{B} = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que existe um ideal maximal à direita $I \in \mathcal{B}$. Por hipótese, $R < x; \alpha >$ é um anel quasi-duo à direita e, por isto, I é um ideal bilateral de $R < x; \alpha >$ tal que

$$I = I \cap R \oplus \sum_{i \neq 0} S_i x^i$$

onde $I \cap R$ é um ideal de R que contém S_i, para todo $i \neq 0$. De fato, notamos que $1_i x^i \in I$, para todo $i \neq 0$ e, por isto,

$$1_i x^i 1_{-i} x^{-i} = 1_i \in I \cap R.$$

Conforme observamos na Seção 1.2.4,

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} S_{j_i} \subseteq I \cap R$$

e, portanto, $I = R < x; \alpha >$, o que é uma contradição. Logo $\mathcal{B} = \emptyset$. $\square$

Desta maneira, se $R < x; \alpha >$ é um anel quasi-duo à direita então o radical de Jacobson de $R < x; \alpha >$ satisfaz a igualdade

$$J(R < x; \alpha >) = \mathcal{A}(R < x; \alpha >) \cap \mathcal{B}(R < x; \alpha >) = \mathcal{A}(R < x; \alpha >). \tag{2.7}$$

Antes de prosseguirmos, faremos uma observação.

Observação 2.2.2. *Sejam* $R < x; \alpha >$ *um anel quasi-duo à direita e* M *um ideal maximal à direita de* $R < x; \alpha >$ *tal que* $1_j x^j \notin M$*, para algum* $0 \neq j \in \mathbb{Z}$*. Então,* $1_{-j} x^{-j} \notin M$*.*

De fato, por hipótese, M é um ideal maximal bilateral de $R < x; \alpha >$. Assim, se $1_{-j} x^{-j} \in M$ então $1_{-j} x^{-j} 1_j x^j = 1_{-j} \in M$ e, desta maneira, $1_j x^j = 1_j x^j 1_{-j} \in M$, o que contradiz a hipótese inicial.

Agora estamos em condições de fornecer uma descrição precisa do radical de Jacobson de $R < x; \alpha >$, no caso em que $R < x; \alpha >$ é um anel quasi-duo à direita.

Proposição 2.2.3. *Se* $R < x; \alpha >$ *é um anel quasi-duo à direita então*

$$J(R < x; \alpha >) = N_\alpha(R) < x; \alpha > .$$

Em particular, $N_\alpha(R)$ *é um ideal* α*-invariante de* R*.*

Demonstração. Mostraremos que

$$N_\alpha(R) = J(R < x; \alpha >) \cap R.$$

De fato, seja $r \in N_\alpha(R) = \bigcap_{i \geq 1} N_\alpha^i(R)$. Por definição, para cada $i \geq 1$, existe $n \geq 1$ tal que $r\alpha_i(r1_{-i})...\alpha_{ni}(r1_{-ni}) = 0$. Assim, não é difícil ver que $r1_i x^i \in R < x; \alpha >$ e

$$\overline{r1_i x^i} = r1_i x^i + J(R < x; \alpha >) \in R < x; \alpha > /J(R < x; \alpha >)$$

são elementos nilpotentes. Pelo Lema 1.6.7, $R < x; \alpha > /J(R < x; \alpha >)$ é um anel reduzido e, segue que, $r1_i x^i \in J(R < x; \alpha >)$, para todo $i \geq 1$. Em particular $r1_i x^i \in M$, para todo ideal $M \in \mathcal{A}$.

Pela Observação 1.6.8, cada ideal $M \in \mathcal{A}$ é um ideal completamente primo de $R < x; \alpha >$ que não contém $1_m x^m$, para algum $m \geq 1$. Assim $r \in M$, para todo $M \in \mathcal{A}$ e, por isto,

$$r \in (\bigcap_{M \in \mathcal{A}} M) \cap R = \mathcal{A}(R < x; \alpha >) \cap R = J(R < x; \alpha >) \cap R.$$

Logo, $N_\alpha(R) \subseteq J(R < x; \alpha >) \cap R$.

Por outro lado, seja $a \in J(R < x; \alpha >) \cap R$ um elemento qualquer. Pela Proposição 2.1.7, temos que $a \in J(R < x; \alpha >) = K < x; \alpha >$, onde K é um ideal α-nil α-invariante de R. Desta maneira, pelo Lema 2.1.5(1), segue que $a \in K \subseteq N_\alpha(R)$ e, portanto, $J(R < x; \alpha >) \cap R \subseteq N_\alpha(R)$.

Em particular, pelo Lema 2.1.5(3), temos que $N_\alpha(R)$ é um ideal α-invariante de R tal que

$$N_\alpha(R) < x; \alpha > \subseteq J(R < x; \alpha >).$$

Finalmente, mostraremos que $J(R < x; \alpha >) \subseteq N_\alpha(R) < x; \alpha >$. Consideramos $f = \sum_{i=p}^{q} a_i x^i \in J(R < x; \alpha >)$ um elemento qualquer. Por ([20], Theorem 1(i)), $J(R < x; \alpha >)$ é um ideal homogêneo de $R < x; \alpha >$ e, assim $a_i x^i \in J(R < x; \alpha >)$, para todo $p \leq i \leq q$. Logo,

$$a_i x^i 1_{-i} x^{-i} = a_i \in J(R < x; \alpha >) \cap R = N_\alpha(R)$$

e, por isto, $f \in N_\alpha(R) < x; \alpha >$. Portanto, pela igualdade 2.7,

$$\mathcal{A}(R < x; \alpha >) = J(R < x; \alpha >) = N_\alpha(R) < x; \alpha > .$$

$\square$

Agora estamos em condições de provar o principal resultado desta seção, o qual generaliza ([20], Corollary 10).

Teorema 2.2.4. *$R < x;\alpha >$ é um anel quasi-duo à direita se, e somente se, $N_\alpha(R)$ é um ideal α-invariante de R,*

$$J(R < x;\alpha >) = N_\alpha(R) < x;\alpha >$$

e $(R/N_\alpha(R)) < x;\overline{\alpha} >$ é um anel comutativo, onde $\overline{\alpha}$ é a ação parcial induzida por α em $R/N_\alpha(R)$.

Demonstração. Suponhamos que $R < x;\alpha >$ é um anel quasi-duo à direita. Pela Proposição 2.2.3, $N_\alpha(R)$ é um ideal α-invariante de R tal que $J(R < x;\alpha >) = N_\alpha(R) < x;\alpha >$. Logo, por ([20], Theorem 5),

$$R < x;\alpha > /\mathcal{A}(R < x;\alpha >) = R < x;\alpha > /J(R < x;\alpha >) \simeq (R/N_\alpha(R)) < x;\overline{\alpha} >$$

é um anel comutativo, onde $\overline{\alpha}$ é a ação parcial induzida por α em $R/N_\alpha(R)$.

Reciprocamente, suponhamos que $N_\alpha(R)$ é um ideal α-invariante de R. Por hipótese, temos que

$$(R/N_\alpha(R)) < x;\overline{\alpha} >\simeq R < x;\alpha > /N_\alpha(R) < x;\alpha >= R < x;\alpha > /J(R < x;\alpha >)$$

é um anel comutativo e, em particular, quasi-duo à direita. Portanto, pelo Lema 1.6.5, segue que $R < x;\alpha >$ é um anel quasi-duo à direita. $\square$

Destacamos que o estudo realizado nesta seção, para o caso em que α é apenas uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R, permanece em aberto, mas está sendo estudado.

Capítulo 3

Skew anéis de séries de potências parciais

Sejam S um anel e $\sigma : S \to S$ um endomorfismo. Em [21], os autores exibiram condições necessárias e suficientes para que o skew anel de séries de potências $S[[x;\sigma]]$ seja um anel de Bezout à direita e duo à direita. Em particular, eles provaram que as seguintes condições são equivalentes:

(i) $S[[x;\sigma]]$ é um anel de Bezout à direita e duo à direita.

(ii) $S[[x;\sigma]]$ é um anel distributivo à direita e reduzido.

(iii) $S[[x;\sigma]]$ é um anel duo à direita e todo submódulo de um $S[[x;\sigma]]$-módulo plano é plano.

(iv) S é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular e σ é uma aplicação bijetiva tal que $\sigma(e) = e$, para todo elemento idempotente $e \in S$.

Neste capítulo, salvo menção em contrário, assumimos que α é uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel com unidade R que admite envolvente (T, σ), onde $\sigma : T \to T$ é um automorfismo.

O objetivo deste capítulo é estabelecer uma caracterização semelhante à obtida em ([21], Theorem 1.6 e Corollary 3.1) para o skew anel de séries de potências parcial $R[[x;\alpha]]$. Na primeira seção destacamos vários resultados que são pré-requisitos para a prova dos principais resultados deste capítulo. Em sua maioria, estes resultados generalizam alguns resultados que constam em ([24], Sections 6.4 e 6.5).

Na segunda seção estudamos condições necessárias e suficientes sobre o anel R e a ação parcial α para que o skew anel de séries de potências parcial $R[[x;\alpha]]$ seja um anel de Bezout à direita e duo à direita.

3.1 Alguns Resultados Preliminares

Recordamos que um anel S é *reduzido* se S não contém elementos nilpotentes não-nulos. Sejam $X \subseteq S$ um subconjunto não-vazio e $r_S(X) = \{a \in S : Xa = 0\}$ o conjunto dos elementos de S que anulam X pela direita, denominado *anulador à direita* de X. Claramente, $r_S(X)$ é um ideal à direita de S. Analogamente se define o anulador à esquerda $l_S(X)$ de X.

A seguir destacamos um resultado que aparece em ([24], 1.35(2), pág. 14).

Lema 3.1.1. *Se S é um anel reduzido então $r_S(a) = l_S(a)$ é um ideal bilateral de S, para todo $a \in S$.*

Seja S um anel. Um endomorfismo $\varphi : S \to S$ é denominado *rígido* se $a\varphi(a) \neq 0$, para todo $a \in S$ não-nulo. A seguir, estendemos esta definição para o caso parcial.

Definição 3.1.2. *Dizemos que uma ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R é parcialmente α-rígida se $a\alpha_j(a.1_{-j}) \neq 0$, para quaisquer $a \in S_j$ não-nulo e $j \in \mathbb{Z}$.*

Nosso primeiro resultado generaliza o que aparece em ([24], 6.52, pág. 209).

Lema 3.1.3. *Para os anéis $A = R[[x;\alpha]]$ e $S = R[x;\alpha]$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A é um anel reduzido.

2. S é um anel reduzido.

3. α é uma ação parcialmente α-rígida.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Se A é um anel reduzido então $S \subseteq A$ é um anel reduzido.

(2) $\Rightarrow$ (3) Se S é um anel reduzido então $R \subseteq S$ é um anel reduzido.

Seja $a \in S_n$ tal que $a\alpha_n(a.1_{-n}) = 0$, para algum $n \geq 0$. Assim, $(ax^n)^2 = 0$ e, por hipótese, $ax^n = 0$. Logo $a = 0$.

Pelo Lema 3.1.1, segue que $\alpha_n(a.1_{-n})a \neq 0$, para quaisquer $a \in S_n$ não-nulo e $n \geq 0$. Desta maneira, $a\alpha_n(a.1_{-n}) \neq 0$, para quaisquer $a \in S_n$ não-nulo e $n \in \mathbb{Z}$ e, portanto, α é uma ação parcialmente α-rígida.

(3) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos que α é uma ação parcialmente α-rígida. Por definição, $a\alpha_n(a1_{-n}) \neq 0$, para quaisquer $a \in S_n$ não-nulo e $n \in \mathbb{Z}$. Claramente, R é um anel reduzido.

Seja $f = \sum_{n\geq 0} f_n x^n \in A$, com $f_n \in S_n$, para todo $n \geq 0$, tal que

$$f^2 = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i+j=n} f_i\alpha_i(f_j1_{-i})\Big)x^n = 0.$$

Deste modo $f_0^2 = 0$ e, como R é um anel reduzido, então $f_0 = 0$. Por hipótese de indução suponhamos que $f_j = 0$, para todo $j < m$. Observamos que, por hipótese de indução, o coeficiente do termo de grau $2m$ de f^2 satisfaz

$$\begin{aligned}\sum_{i+j=2m} f_i\alpha_i(f_j1_{-i}) &= f_0f_{2m} + ... + f_m\alpha_m(f_m1_{-m}) + ... + f_{2m}\alpha_{2m}(f_01_{-2m}) \\ &= f_m\alpha_m(f_m1_{-m}) = 0\end{aligned}$$

de onde segue que $f_m = 0$. Por indução, temos que $f_n = 0$, para todo $n \geq 0$ e, portanto, $f = 0$. $\square$

Recordamos que um anel S é *fortemente regular* se para todo $a \in S$, existe $r \in S$ tal que $a = a^2 r$. A seguir, estendemos esta definição para ações parciais.

Definição 3.1.4. *Seja α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R. Dizemos que R é um anel α-fortemente regular se, para quaisquer $a \in R$ e $j \neq 0$, existe $b_j \in R$ tal que $\alpha_j(a1_{-j}) = \alpha_j(a1_{-j})^2 b_j$.*

No próximo resultado exibimos uma condição necessária e suficiente para que R seja um anel α-fortemente regular.

Lema 3.1.5. *R é um anel α-fortemente regular se, e somente se, S_k é um anel fortemente regular, para todo $k \neq 0$.*

Demonstração. Suponhamos que R é um anel α-fortemente regular e seja $a \in S_k$, com $k \neq 0$. Por definição, para qualquer $j \neq 0$, existe $b_j \in R$ tal que $\alpha_j(a1_{-j}) = \alpha_j(a1_{-j})^2 b_j$. Em particular, para $j = -k$, temos que $\alpha_{-k}(a) = \alpha_{-k}(a)^2 b_{-k}$. Deste modo,

$$a = \alpha_k(\alpha_{-k}(a)) = \alpha_k(\alpha_{-k}(a)^2 b_{-k}) = a^2 \alpha_k(b_{-k} 1_{-k})$$

e, segue que S_k é um anel fortemente regular, para todo $k \neq 0$.

Reciprocamente, suponhamos que S_k é um anel fortemente regular, para todo $k \neq 0$. Seja $a \in R$ um elemento qualquer. Então $a1_{-k} \in S_{-k}$ e, por definição, existe $b \in S_{-k}$ tal que $a1_{-k} = (a1_{-k})^2 b$. Assim,

$$\alpha_k(a1_{-k}) = \alpha_k((a1_{-k})^2 b) = \alpha_k(a1_{-k})^2 \alpha_k(b).$$

Logo, R é um anel α-fortemente regular. $\square$

Dizemos que um anel S é *semicomutativo* se o anulador à direita (ou à esquerda) de cada elemento de S é um ideal bilateral. Equivalentemente, S é um anel semicomutativo se, para quaisquer $a, b \in S$ tais que $ab = 0$, temos que $aSb = 0$. Antes de prosseguirmos faremos algumas observações que serão utilizadas no decorrer desta tese, mesmo sem fazer referência a elas.

Se S é um anel duo à direita então, claramente, S é um anel quasi-duo à direita e semicomutativo.

Suponhamos que S seja um anel semicomutativo. Em particular, por definição, temos que $r_S(e)$ e $r_S(1-e)$ são ideais bilaterais de S, para todo elemento idempotente $e \in S$. Logo, $r(1-e) \in r_S(e)$ e $re \in r_S(1-e)$ e, por isto, $er(1-e) = (1-e)re = 0$. Ou seja, $er = ere = re$ e, portanto, S é um anel abeliano.

Seja S um anel reduzido e consideramos $a, b \in S$ tais que $ab = 0$. Logo $(ba)^2 = 0$ e, por hipótese, segue que $ba = 0$. Desta forma,

$$(asb)^2 = asb.asb = as(ba)sb = 0,$$

para todo $s \in S$. Como S é um anel reduzido então $aSb = 0$ e, portanto, S é um anel semicomutativo.

O próximo resultado estabelece uma condição para que um anel semicomutativo seja um anel α-fortemente regular.

Lema 3.1.6. *Seja α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel semicomutativo R tal que, para quaisquer $j \geq 1$ e $a \in R$, existe um elemento $b_j \in R$ satisfazendo $\alpha_j(a1_{-j}) = \alpha_j(a1_{-j})ab_j$. Então R é um anel α-fortemente regular.*

Demonstração. Dado $j \geq 1$, consideramos $a \in S_{-j}$ um elemento qualquer. Por hipótese, existe um elemento $b_j \in R$ tal que $\alpha_j(a)[1_R - ab_j] = 0$. Seja $m = 1_R - ab_j \in r_R(\alpha_j(a))$. Como R é um anel semicomutativo, então $r_R(\alpha_j(a))$ é um ideal bilateral de R. Assim, $\alpha_j(m1_{-j})am \in r_R(\alpha_j(a))$ e, por isto,

$$0 = \alpha_j(a)\alpha_j(m1_{-j})am = \alpha_j(am)am.$$

Novamente, por hipótese, existe $g_j \in R$ tal que $\alpha_j(am) = \alpha_j(am)amg_j = 0$, ou seja,

$$0 = am = a(1_R - ab_j) = a - a^2 b_j.$$

Desta maneira, $a = a.1_{-j} = a^2(b_j 1_{-j})$ e, segue que, S_{-j} é um anel fortemente regular, para todo $j \geq 1$. Como $S_j \simeq S_{-j}$ então S_j é fortemente regular, para todo $j \neq 0$. Portanto, pelo Lema 3.1.5, R é um anel α-fortemente regular. $\square$

Agora estamos em condições de enunciar e provar o próximo resultado, o qual generaliza ([24], 6.55((3), (5), (6)), pág. 211). Maiores detalhes acerca das definições abordadas na proposição a seguir podem ser encontrados na Seção 1.6.3.

Proposição 3.1.7. *Sejam $S = R[x;\alpha]$, $S(n) = S/(\sum_{i\geq n} S_i x^i)$ e*

$$I(n) = (\sum_{i\geq 1} S_i x^i)/(\sum_{i\geq n} S_i x^i)$$

para todo $n \geq 1$. As seguintes afirmações são válidas:

1. *$I(n)$ é um ideal nilpotente de $S(n)$ e $R \simeq S(n)/I(n)$, para todo $n \geq 1$.*

2. *Se R é um anel fortemente regular, então $S(n)/J(S(n))$ é um anel fortemente regular.*

3. *Se R é um anel fortemente regular, então $S(n)$ é um anel distributivo à direita se, e somente se, $S(n)$ é um anel de Bezout à direita.*

Demonstração. 1. Como $\sum_{i\geq 1} S_i x^i$ é um ideal de S, então $I(n)$ é um ideal de $S(n)$ tal que o produto de quaisquer n elementos de $I(n)$ é nulo. Além disto,

$$S(n)/I(n) = (S/(\sum_{i\geq n} S_i x^i))/((\sum_{i\geq 1} S_i x^i)/(\sum_{i\geq n} S_i x^i)) \simeq S/(\sum_{i\geq 1} S_i x^i) \simeq R$$

para todo $n \geq 1$.

2. Por (1) temos que $I(n)$ é, em particular, um nil ideal de $S(n)$ tal que $R \simeq S(n)/I(n)$. Assim $I(n) \subseteq J(S(n))$, o que nos permite considerar a aplicação sobrejetiva $\gamma : R \to S(n)/J(S(n))$. Portanto $S(n)/J(S(n))$ é um anel fortemente regular como imagem homomórfica de R.

3. Seja R um anel fortemente regular. Por (2) temos que $S(n)/J(S(n))$ é um anel fortemente regular e, pela Proposição 1.6.20, $S(n)$ é um anel distributivo à direita se, e somente se, $S(n)$ é um anel de Bezout à direita.

$\square$

Consideramos o anel $S = \sum_{i \in \mathcal{I}} B_i$, onde cada ideal B_i tem unidade 1_i. Conforme ([18], Corolário 2.1.7(1), pág. 32), temos que S é um anel J-semisimples se, e somente se, B_i é um anel J-semisimples, para todo $i \in \mathcal{I}$. Além disto, por ([18], Proposição 2.1.11, pág. 34), S é um anel von Neumann regular se, e somente se, B_i é um anel von Neumann regular, para todo $i \in \mathcal{I}$. Ressaltamos que, neste último caso, não é necessário que cada ideal B_i tenha unidade.

Proposição 3.1.8. *Seja $S = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} B_i$, onde cada ideal B_i tem unidade 1_i. Então S é um anel fortemente regular se, e somente se, B_i é um anel fortemente regular, para todo $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Suponhamos que B_i é um anel fortemente regular, para todo $i \in \mathcal{I}$. Para qualquer $s \in S$, existem $i_1, ..., i_j \in \mathcal{I}$ tais que $s = s_{i_1} + ... + s_{i_j}$, com $s_{i_n} \in B_{i_n}$, para todo $1 \leq n \leq j$. Por definição, existe $a_{i_n} \in B_{i_n}$ tal que $s_{i_n} = s_{i_n}^2 a_{i_n}$, para todo $1 \leq n \leq j$. Desta maneira

$$\begin{aligned} s^2(a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_j}) &= (s_{i_1}^2 + s_{i_2}^2 + ... + s_{i_j}^2)(a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_j}) \\ &= s_{i_1}^2 a_{i_1} + s_{i_2}^2 a_{i_2} + ... + s_{i_j}^2 a_{i_j} \\ &= s_{i_1} + ... + s_{i_j} = s \end{aligned}$$

e, portanto, S é um anel fortemente regular. Reciprocamente, suponhamos que S é um anel fortemente regular. Seja $r \in B_i \subseteq S$, para $i \in \mathcal{I}$. Por definição, existe $s \in S$ tal que $r = r^2 s$. Assim, $r = r1_i = r^2(s1_i)$ e, portanto, S_i é um anel fortemente regular, para todo $i \in \mathcal{I}$. □

A seguir, vamos contextualizar estes resultados segundo a nossa necessidade. Maiores detalhes acerca da definição de ação parcial de tipo finito podem ser encontrados nas Seções 1.2.3 e 1.2.4.

Corolário 3.1.9. *Seja α uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R que admite envolvente (T, σ).*

1. *R é um anel J-semisimples se, e somente se, S_j é um anel J-semisimples, para todo $j \neq 0$.*

2. *R é um anel von Neumann regular se, e somente se, S_j é um anel von Neumann regular, para todo $j \neq 0$.*

3. *R é um anel fortemente regular se, e somente se, S_j é um anel fortemente regular, para todo $j \neq 0$.*

O próximo resultado generaliza o que aparece em ([24], 6.61, pág. 215).

Proposição 3.1.10. *Suponhamos que α seja uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R tal que, para quaisquer $j \geq 1$ e $a \in R$, existe $b_j \in R$ satisfazendo $\alpha_j(a1_{-j}) = \alpha_j(a1_{-j})ab_j$. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *$J(R) = 0$.*

2. *Se R é um anel semicomutativo, então R é um anel fortemente regular e todo elemento idempotente de R é um elemento α-invariante central de $R[x; \alpha]$.*

Demonstração. 1. Recordamos que o radical de Jacobson de um anel é um radical hereditário e, então, pela Proposição 2.1.6, temos que $J(S_j) = J(R) \cap S_j$, para todo $j \neq 0$.

Seja $a \in J(S_{-j}) = J(R) \cap S_{-j}$, com $j \geq 1$. Por hipótese, existe $b_j \in R$ tal que $\alpha_j(a)(1_R - ab_j) = 0$. Como $a \in J(R)$ então $1_R - ab_j \in U(R)$, o grupo das unidades de R e, por isto, $\alpha_j(a) = 0$. Desta maneira $a = 0$ e, segue que, $J(S_{-j}) = 0$, para todo $j \geq 1$. Como $S_j \simeq S_{-j}$ então $J(S_j) = 0$, para todo $j \neq 0$. Logo, pelo Corolário 3.1.9(1), R é um anel J-semisimples.

2. Por hipótese R é um anel semicomutativo e, pelo Lema 3.1.6, temos que R é um anel α-fortemente regular. Pelo Lema 3.1.5, S_j é um anel fortemente regular, para todo $j \neq 0$ e, pelo Corolário 3.1.9(3), segue que R é um anel fortemente regular.

Seja $e \in R$ um elemento idempotente. Mostraremos que e é um elemento central de $R[x;\alpha]$. Como R é um anel fortemente regular então, pelo Lema 1.6.19, $e, 1_R - e \in R$ são elementos centrais de R. Por hipótese, para todo $j \geq 1$, existem $u_j, v_j \in R$ tais que,

$$\begin{aligned} \alpha_j(e1_{-j}) &= \alpha_j(e1_{-j})eu_j \\ \alpha_j((1_R - e)1_{-j}) &= \alpha_j((1_R - e)1_{-j})(1_R - e)v_j. \end{aligned}$$

Como $\alpha_j(e1_{-j}) + \alpha_j((1_R - e)1_{-j}) = 1_j$ então, segue das igualdades anteriores que, para todo $j \geq 1$,

$$e1_j = e1_j\alpha_j(e1_{-j})eu_j + e1_j\alpha_j((1_R - e)1_{-j})(1_R - e)v_j = \alpha_j(e1_{-j}).$$

Logo, todo elemento idempotente de R é α-invariante e, para quaisquer $a \in S_i$

e $i \geq 0$, temos que

$$ax^i e = a\alpha_i(e1_{-i})x^i = ae1_i x^i = eax^i.$$

$\square$

A prova do próximo resultado é simples e, por isto, iremos omití-la.

Lema 3.1.11. *Seja $\psi : A \to B$ um homomorfismo sobrejetivo de anéis. Se A é um anel de Bezout à direita (respectivamente distributivo à direita) então B é um anel de Bezout à direita (respectivamente distributivo à direita).*

O resultado a seguir generaliza o que aparece em ([21], Proposition 2.5(ii)).

Proposição 3.1.12. *Sejam α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R e $A = R[[x;\alpha]]$. Se A é um anel reduzido, então todo elemento idempotente de R é α-invariante.*

Demonstração. Suponhamos que A é um anel reduzido. Então A é um anel semi-comutativo e, em particular, segue que A é um anel abeliano. Desta maneira, todo elemento idempotente $e \in R$ é um elemento central de A e, por isto,

$$e1_j x^j = 1_j x^j e = \alpha_j(e.1_{-j})x^j$$

para todo $j \geq 1$. Logo, $\alpha_j(e.1_{-j}) = e.1_j$, para todo $j \in \mathbb{Z}$ e, portanto, todo elemento idempotente de R é α-invariante. $\square$

No próximo resultado, estudamos condições para que o skew anel de polinômios parcial $R[x;\alpha]$ seja um anel de Bezout. Este resultado generaliza o que aparece em ([24], 6.62, pág. 215).

Proposição 3.1.13. *Suponhamos que R seja um anel fortemente regular tal que todo elemento idempotente de R seja α-invariante. Consideramos $S = R[x;\alpha]$ e $A = R[[x;\alpha]]$. As seguintes condições são válidas:*

1. A é um anel reduzido e S é um subanel de Bezout reduzido de A.

2. Se $n \geq 1$, então $S/(\sum_{i\geq n} S_i x^i)$ é um anel de Bezout distributivo.

Demonstração. 1. Seja $a \in S_j$ tal que $a\alpha_j(a1_{-j}) = 0$, para algum $j \in \mathbb{Z}$. Como R é um anel fortemente regular, então podemos escrever $a = ue$, onde $u \in U(R)$ e $e \in R$ é um elemento idempotente central, ver Seção 1.6.3. Desta maneira, temos que

$$0 = a\alpha_j(a1_{-j}) = ue\alpha_j(ue1_{-j}) = ue\alpha_j(u1_{-j})\alpha_j(e1_{-j}) = ue\alpha_j(u1_{-j}).$$

Como $u \in U(R)$ então $e1_j = 0$. Assim $a = a1_j = ue1_j = 0$ e, portanto, α é uma ação parcialmente α-rígida. Pelo Lema 3.1.3, segue que A é um anel reduzido. Claramente, $S \subseteq A$ é um subanel reduzido de A.

Mostraremos que S é um anel de Bezout à direita. De fato, seja $D = fS + gS$ um ideal à direita de S gerado por $f, g \in S$. Seja $n = min(\delta(f), \delta(g))$, onde $\delta(h)$ denota o grau de um polinômio $h \in S$. Iremos proceder por indução sobre n. Assumiremos que $n = \delta(f) \leq \delta(g)$.

Seja $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \in S$, onde $f_i \in S_i$, para todo $0 \leq i \leq n$. Por hipótese, temos que R é um anel fortemente regular e, por isto, $f_n = a_n e_n$, onde $a_n \in U(R)$ e $e_n \in R$ é um elemento idempotente central.

Suponhamos que $n = 0$. Neste caso, $f = f_0 = a_0 e_0$. Definimos

$$h = e_0 + g(1_R - e_0).$$

Não é difícil ver que $hf = he_0 a_0 = f$. Além disto, por hipótese, todo elemento idempotente de R é α-invariante e, por isto,

$$h(1_R - e_0 + ge_0) = g.$$

Desta maneira, $D = fS + gS = hS$ é um ideal à direita principal de S.

Por hipótese de indução, suponhamos que $uS+vS$ é um ideal à direita principal de S, para quaisquer polinômios $u, v \in S$ tais que $n > min(\delta(u), \delta(v))$.

Para mostrarmos que D é um ideal à direita principal de S é suficiente provarmos que $D(1_R - e_n)$ e De_n são ideais à direita principais de S. De fato, não é difícil ver que $D = D(1_R - e_n) + De_n$. Sejam $h_1, h_2 \in S$ tais que $D(1_R - e_n) = h_1S$ e $De_n = h_2S$. Como $S = S(1_R - e_n) \oplus Se_n$ então,

$$\begin{aligned}
(h_1 + h_2)S &= (h_1 + h_2)(S(1_R - e_n) \oplus Se_n) \\
&= h_1S(1_R - e_n) + h_1Se_n + h_2S(1_R - e_n) + h_2Se_n \\
&= h_1S(1_R - e_n) + h_2Se_n \\
&= D(1_R - e_n) + De_n = D.
\end{aligned}$$

Inicialmente, mostraremos que $D(1_R - e_n)$ é um ideal à direita principal de S. De fato, por hipótese, todo elemento idempotente de R é α-invariante e, por isto, observamos que

$$\begin{aligned}
D(1_R - e_n) = (fS + gS)(1_R - e_n) &= fS(1_R - e_n) + gS(1_R - e_n) \\
&= f(1_R - e_n)S + g(1_R - e_n)S.
\end{aligned}$$

O coeficiente do termo de grau n de $f(1_R - e_n)$ é dado por

$$f_n\alpha_n((1_R - e_n)1_{-n}) = f_n(1_R - e_n)1_n = f_n(1_R - e_n) = a_ne_n(1_R - e_n) = 0$$

e, desta maneira, $\delta(f(1_R - e_n)) < n$. Assim

$$min(\delta(f(1_R - e_n)), \delta(g(1_R - e_n))) < n$$

e, por hipótese de indução, temos que $D(1_R - e_n)$ é um ideal à direita principal de S.

Mostraremos agora que De_n é um ideal à direita principal de S. Observamos inicialmente que podemos considerar $\delta(g) = \delta(f) = n$. De fato, suponhamos que $\delta(g) = p > n$. Definamos

$$l = fe_n\alpha_{-n}(a_n^{-1}g_p1_n)x^{p-n} - ge_n$$

e observamos que $D = Sf + Sg = Sf + Sl$. O coeficiente do termo de grau p do polinômio $l \in S$ é igual a

$$f_ne_na_n^{-1}g_p1_n - g_pe_n = 0$$

e, portanto $\delta(l) < p$. Podemos repetir este processo um número suficiente de vezes até obtermos um polinômio de grau precisamente n. Por isto, vamos supor que $\delta(g) = n$.

Definamos $q = fe_n\alpha_{-n}(a_n^{-1}g_n) - ge_n$ e observamos que o coeficiente do termo de grau n do polinômio $q \in S$ satisfaz

$$\begin{aligned} q_n &= f_n\alpha_n(e_n1_{-n})a_n^{-1}g_n - g_ne_n \\ &= f_ne_na_n^{-1}g_n - g_ne_n \\ &= a_ne_na_n^{-1}g_n - g_ne_n = 0. \end{aligned}$$

Logo $\delta(q) < n$. Além disto,

$$De_n = (fS + gS)e_n = fe_nS + ge_nS = fe_nS + qS$$

e, como $min(\delta(fe_n), \delta(q)) < n$ então, por hipótese de indução, segue que De_n é um ideal à direita principal de S.

Portanto D é um ideal à direita principal de S e, por isto, S é um anel de Bezout à direita. De maneira inteiramente análoga, verificamos que S é um anel de Bezout à esquerda. Logo, S é um subanel de Bezout reduzido de A.

2. Consideramos $\psi : S \to S/(\sum_{i\geq n} S_i x^i)$ um homomorfismo sobrejetivo de anéis, para todo $n \geq 1$. Por (1), temos que S é um anel de Bezout. Assim, pelo Lema 3.1.11, $S/(\sum_{i\geq n} S_i x^i)$ é um anel de Bezout como imagem homomórfica de S. Por hipótese, R é um anel fortemente regular e, por isto, pela Proposição 3.1.7(3), segue que $S/(\sum_{i\geq n} S_i x^i)$ é um anel distributivo.

□

Seja $A = R[[x; \alpha]]$. A ordem de uma série $f \in A$, denotada por $\mathcal{O}(f)$, é a menor potência de x em f com coeficiente não-nulo. Consideramos, para todo $j \geq 1$,

$$M_j = \{f \in A; \mathcal{O}(f) \geq j+1\}.$$

O próximo resultado generaliza ([24], 6.68((1), (3), (4), (5), (6), (7)), pág. 219).

Proposição 3.1.14. *Sejam $A = R[[x; \alpha]]$, $S = R[x; \alpha]$, $A(n) = A/M_{n-1}$ e $I(n) = M_0/M_{n-1}$, para todo $n \geq 1$. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Para quaisquer $f, g \in A$, temos que $\sum_{i\geq 0}(f 1_j x^j g)^i$ é o elemento inverso de $1_R - f 1_j x^j g \in A$, para todo $j \geq 1$.*

2. *$M_0 \subseteq J(A)$.*

3. *$A/M_{n-1} \simeq S/\sum_{i\geq n} S_i x^i$, para todo $n \geq 1$.*

4. *$I(n)$ é um ideal nilpotente de $A(n)$ e $R \simeq A(n)/I(n)$, para todo $n \geq 1$.*

5. *Se R é um anel fortemente regular então $A/J(A)$ e $A(n)/J(A(n))$ são anéis fortemente regulares.*

6. *Se R é um anel fortemente regular, então A (respectivamente $A(n)$) é um anel distributivo à direita se, e somente se, A (respectivamente $A(n)$) é um anel de Bezout à direita.*

Demonstração. 1. Observamos que, para quaisquer elementos $f, g \in A$,

$$\sum_{i\geq 0}(f1_jx^jg)^i)(1_R - f1_jx^jg) = (f1_jx^jg)^0 = 1_R$$

e, analogamente,

$$(1_R - f1_jx^jg)\sum_{i\geq 0}(f1_jx^jg)^i) = 1_R.$$

Assim, $\sum_{i\geq 0}(f1_jx^jg)^i$ é o elemento inverso de $1_R - f1_jx^jg \in A$, para todo $j \geq 1$.

2. Por (1), temos que $1_R - f1_jx^jg \in U(A)$, o grupo das unidades de A, para quaisquer $f, g \in A$ e $j \geq 1$. Portanto, por ([16], Lemma 4.3, pág. 54), $1_jx^j \in J(A)$, para todo $j \geq 1$ e, desta maneira, $M_0 \subseteq J(A)$.

3. Para todo $n \geq 1$, definamos a aplicação $\psi : S/\sum_{i\geq n} S_ix^i \to A/M_{n-1}$ por

$$\psi(\sum_{i=0}^{m} f_ix^i + \sum_{i\geq n} S_ix^i) = \sum_{i\geq 0} f_ix^i + M_{n-1}$$

onde $m < n$ e $f_i = 0$, para todo $i \geq n$. Claramente ψ é um homomorfismo sobrejetivo. Além disto, $\overline{f} = \sum_{i=0}^{m} f_ix^i + \sum_{i\geq n} S_ix^i \in ker(\psi)$ se, e somente se, $\sum_{i\geq 0} f_ix^i \in M_{n-1}$ e, por definição, segue que $\sum_{i\geq 0} f_ix^i = \sum_{i\geq n} f_ix^i = 0$. Assim $\overline{f} = \overline{0}$ e, portanto ψ é uma aplicação injetiva.

4. Claramente $I(n)$ é um ideal nilpotente de $A(n)$. Além disto,

$$A(n)/I(n) = (A/M_{n-1})/(M_0/M_{n-1}) \simeq A/M_0 \simeq R$$

para todo $n \geq 1$.

5. Por (4), $I(n)$ é, em particular, um ideal nil de $A(n)$ tal que $R \simeq A(n)/I(n)$. Assim, $I(n) \subseteq J(A(n))$ e, por isto, podemos considerar o homomorfismo sobrejetivo de anéis $\gamma_n : R \to A(n)/J(A(n))$, para todo $n \geq 1$. Desta maneira, $A(n)/J(A(n))$ é um anel fortemente regular como imagem homomórfica de R.

   Por (2), temos que $M_0 \subseteq J(A)$ é tal que $A/M_0 \simeq R$. Desta maneira, podemos considerar o homomorfismo sobrejetivo $\gamma : R \to A/J(A)$, donde segue que $A/J(A)$ é um anel fortemente regular como imagem homomórfica de R.

6. Por (5), temos que $A/J(A)$ e $A(n)/J(A(n))$ são anéis fortemente regulares. Pela Proposição 1.6.20, A (respectivamente $A(n)$) é um anel distributivo à direita se, e somente se A (respectivamente $A(n)$) é um anel de Bezout à direita.

$\square$

Seja M um R-módulo à direita. Um subfator de M é um submódulo de M/N, onde N é um submódulo de M. O próximo lema aparece em ([24], 2.54, pág. 51).

Lema 3.1.15. *Se N é um subfator de um módulo distributivo M, então $End(N/J(N))$ é um anel reduzido.*

Nosso próximo resultado generaliza ([24], 6.63, pág. 216).

Proposição 3.1.16. *Sejam α uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R, $A = R[[x;\alpha]]$ e $\pi_j : A \to A/M_j$ o epimorfismo canônico. Suponhamos que $\pi_j(A)$ é um anel distributivo à direita, para todo $j \geq 1$. Então as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *Para quaisquer $a \in R$ e $j \geq 1$ existe um elemento $b_j \in R$ tal que $\alpha_j(a1_{-j}) = \alpha_j(a1_{-j})ab_j$.*

2. *R é um anel fortemente regular, $\pi_j(A)$ é um anel de Bezout distributivo, para todo $j \geq 1$ e todo elemento idempotente $e \in R$ é um elemento α-invariante central de A.*

Demonstração. 1. Sejam $a \in R$ e $j \geq 1$ quaisquer. Por hipótese, $\pi_j(A)$ é um anel distributivo à direita e, pela Proposição 1.6.12, existem elementos

$$\begin{aligned}
\overline{f} &= \pi_j(f) = f + M_j \\
\overline{g} &= \pi_j(g) = g + M_j \\
\overline{h} &= \pi_j(h) = h + M_j \\
\overline{s} &= \pi_j(s) = s + M_j
\end{aligned}$$

em $\pi_j(A)$, com $f, g, h, s \in A$, tais que

$$\begin{aligned}
1_R + M_j &= f + g + M_j \\
af + M_j &= 1_j x^j h + M_j \\
1_j x^j g + M_j &= as + M_j
\end{aligned}$$

Desta maneira, existem $l_1, l_2, l_3 \in M_j$, tais que

$$\begin{aligned}
1_R &= f + g + l_1 \\
af &= 1_j x^j h + l_2 \\
1_j x^j g &= as + l_3
\end{aligned}$$

e, por isto,

$$\begin{aligned}
\alpha_j(a1_{-j})x^j &= 1_j x^j a 1_R \\
&= 1_j x^j a(f + g + l_1) \\
&= 1_j x^j (af) + 1_j x^j (ag) + 1_j x^j a l_1 \\
&= 1_j x^j (1_j x^j h + l_2) + \alpha_j(a1_{-j}) 1_j x^j g + 1_j x^j a l_1 \\
&= 1_j 1_{2j} x^{2j} h + 1_j x^j l_2 + \alpha_j(a1_{-j})[as + l_3] + 1_j x^j a l_1.
\end{aligned}$$

Os coeficientes do termo de grau j desta igualdade satisfazem $\alpha_j(a1_{-j}) = \alpha_j(a1_{-j})as_j$, onde s_j é o coeficiente do termo de grau j da série $s \in A$. Portanto, basta considerarmos $b_j = s_j \in R$.

2. Pela Proposição 3.1.10, temos que R é um anel J-semisimples. Notamos que

$$R \simeq A/M_0 \simeq (A/M_j)/(M_0/M_j) = \pi_j(A)/\pi_j(M_0)$$

e, por isto, existe um homomorfismo sobrejetivo $\psi : \pi_j(A) \to R$. Pela Proposição 3.1.11, R é um anel distributivo à direita como imagem homomórfica de $\pi_j(A)$. Pelo Lema 3.1.15, temos que

$$R \simeq End(R) = End(R/J(R))$$

é um anel reduzido e, em particular, semicomutativo.

Portanto, pela Proposição 3.1.10(2), temos que R é um anel fortemente regular tal que todo elemento idempotente de R é um elemento α-invariante central de A. Logo, pela Proposição 3.1.13(2), temos que $S/(\sum_{i\geq j} S_i x^i)$ é um anel de Bezout distributivo, para todo $j \geq 1$. Pela Proposição 3.1.14(3), temos que $\pi_j(A) = A/M_j \simeq S/\sum_{i\geq j+1} S_i x^i$ é um anel de Bezout distributivo, para todo $j \geq 1$.

□

Nosso próximo resultado generaliza o que aparece em ([24], 6.64, pág. 217).

Proposição 3.1.17. *Suponhamos que α é uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R. Seja $S = R[x;\alpha]$ e suponhamos que $S/(\sum_{i\geq j+1} S_i x^i)$ é um anel de Bezout à direita, para todo $j \geq 1$. Se R é um anel quasi-duo à direita ou semicomutativo então, para quaisquer $a \in R$ e $j \geq 1$, existe um elemento $b_j \in R$ tal que $\alpha_j(a1_{-j}) = \alpha_j(a1_{-j})ab_j$. Além disto, R é um anel fortemente regular, todo elemento idempotente* *de R é um elemento α-invariante central de S e $S/(\sum_{i\geq j+1} S_i x^i)$ é um anel de Bezout distributivo, para todo $j \geq 1$.*

Demonstração. Seja R um anel quasi-duo à direita. Consideramos o epimorfismo canônico $\pi_j : S \to S/(\sum_{i\geq j+1} S_i x^i)$, para todo $j \geq 1$. Então,

$$\pi_j(\sum_{i\geq 1} S_i x^i) = (\sum_{i\geq 1} S_i x^i)/(\sum_{i\geq j+1} S_i x^i)$$

é um ideal à esquerda nilpotente de $\pi_j(S)$ e, em particular, $\pi_j(\sum_{i\geq 1} S_i x^i) \subseteq J(\pi_j(S))$. Além disto,

$$\pi_j(S)/\pi_j(\sum_{i\geq 1} S_i x^i) = (S/(\sum_{i\geq j+1} S_i x^i))/((\sum_{i\geq 1} S_i x^i)/(\sum_{i\geq j+1} S_i x^i)) \simeq S/(\sum_{i\geq 1} S_i x^i) \simeq R.$$

Desta maneira, podemos considerar o homomorfismo sobrejetivo

$$\gamma : R \to \pi_j(S)/J(\pi_j(S)).$$

Neste caso, pelo Teorema 1.6.2, $\pi_j(S)/J(\pi_j(S))$ é um anel quasi-duo à direita como imagem homomórfica de R. Segue da Proposição 1.6.5 que $\pi_j(S)$ é um anel quasi-duo à direita. Além disto, por hipótese, temos que $\pi_j(S)$ é um anel de Bezout à direita. Pelo Lema 1.6.15, segue que $\pi_j(S)$ é um anel distributivo à direita. Usando o isomorfismo obtido na Proposição 3.1.14(3), concluímos que o resultado segue da Proposição 3.1.16.

Suponhamos que R é um anel semicomutativo. Pela primeira parte, é suficiente mostrarmos que R é um anel quasi-duo à direita. Sejam $a \in R$ e $1_j x^j \in S$ elementos quaisquer. Por hipótese, $\pi_j(S)$ é um anel de Bezout à direita e, por definição, $\overline{aS + 1_j x^j S}$ é um ideal à direita principal de $\pi_j(S)$, para todo $j \geq 1$. Assim, existem elementos $f, g, m, u \in S$ e $l_1, l_2 \in \sum_{i \geq j+1} S_i x^i$ tais que

$$
\begin{aligned}
(ag + 1_j x^j m)f &= a + l_1 \\
(ag + 1_j x^j m)u &= 1_j x^j + l_2.
\end{aligned}
$$

Notamos que os termos de grau zero na primeira igualdade satisfazem $ag_0 f_0 = a$. Além disto, os termos de grau zero e grau j na segunda igualdade satisfazem $ag_0 u_0 = 0$ e

$$
ag_j \alpha_j(u_0 1_{-j}) + ag_{j-1}\alpha_{j-1}(u_1 1_{1-j}) + ... + ag_0 u_j + \alpha_j(m_0 u_0 1_{-j}) = 1_j, \qquad (3.1)
$$

respectivamente.

Por hipótese, $r_R(ag_0)$ é um ideal bilateral de R e, por isto, $f_0 m_0 u_0 \in r_R(ag_0)$. Como $a = ag_0 f_0$, então

$$
am_0 u_0 = ag_0 f_0 m_0 u_0 = 0,
$$

isto é, $\alpha_j(am_0 u_0 1_{-j}) = 0$. Definamos $b = g_j \alpha_j(u_0 1_{-j}) + g_{j-1}\alpha_{j-1}(u_1 1_{1-j}) + ... + g_0 u_j$. Pela igualdade 3.1, temos que $ab + \alpha_j(m_0 u_0 1_{-j}) = 1_j$ e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\alpha_j(a1_{-j}) &= \alpha_j(a1_{-j})[ab + \alpha_j(m_0 u_0 1_{-j})] \\
&= \alpha_j(a1_{-j})ab + \alpha_j(am_0 u_0 1_{-j}) = \alpha_j(a1_{-j})ab.
\end{aligned}
$$

Pela Proposição 3.1.10, segue que R é um anel fortemente regular. Portanto, R é um anel duo à direita e, em particular, quasi-duo à direita. Estamos então no primeiro caso considerado. $\square$

Sejam R um anel e M um R-módulo à direita. Conforme ([24], 4.87, pág. 152), dizemos que M é um módulo $\aleph_0$-*algebricamente compacto* se todo sistema

$L(a_{ij}, m_i, M)$ com um número contável de equações lineares

$$\{\sum_{j=0}^{t(i)} x_j a_{ij} = m_i\}_{i=0}^{\infty}$$

com coeficientes $a_{ij} \in R$, $m_i \in M$ e com um número contável de incógnitas $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ assumindo valores em M tal que todo subsistema finito deste sistema tem solução, então $L(a_{ij}, m_i, M)$ tem solução em M.

Neste sentido, dizemos que um anel R é $\aleph_0$-*algebricamente compacto à direita* se R, como R-módulo à direita, é um módulo $\aleph_0$-algebricamente compacto. Analogamente se define anel $\aleph_0$-algebricamente compacto à esquerda. Dizemos que R é um anel $\aleph_0$-algebricamente compacto se R é $\aleph_0$-algebricamente compacto à direita e $\aleph_0$-algebricamente compacto à esquerda.

Consideramos um anel R e um R-módulo à direita E. Dizemos que E é um *módulo plano* se, para cada monomorfismo de R-módulos à esquerda $u : M_1 \to M_2$, o homomorfismo de grupos $f : E \otimes M_1 \to E \otimes M_2$ definido por

$$f(a \otimes b) = (id_E \otimes u)(a \otimes b) = a \otimes u(b)$$

é um monomorfismo.

Nosso próximo resultado generaliza o que aparece em ([24], 6.69(2), pág. 220).

Proposição 3.1.18. *Suponhamos que R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular tal que todo elemento idempotente de R é α-invariante. Então $A = R[[x;\alpha]]$ é um anel de Bezout reduzido distributivo e todo submódulo de um A-módulo plano é plano.*

Demonstração. Mostraremos, inicialmente, que A é um anel distributivo à esquerda. Equivalentemente, pela Proposição 1.6.12, devemos verificar que, para quaisquer séries $u, v \in A$, existem elementos $f, g, h, k \in A$ tais que $1_R = f + g$, $fu = hv$ e $gv = ku$. Desta maneira, temos um sistema de três equações em A equivalente a um sistema contável de equações lineares Q em R_R com um número contável de incógnitas à esquerda $f_i, g_i, h_i, k_i \in R$, para todo $i \geq 0$, com coeficientes à direita em R dependendo de $\{u_i, v_i \in R\}$ fixos, onde cada equação contém apenas um número finito de incógnitas.

Seja N um subsistema finito de Q. Então existe $n \geq 1$ tal que N não contém incógnitas $f_i, g_i, h_i, k_i \in R$, para todo $i \geq n$. Pela Proposição 3.1.14(3), temos que $A/M_{n-1} \simeq S/\sum_{i \geq n} S_i x^i$ e, portanto, pela Proposição 3.1.13(2), A/M_{n-1} é um anel de Bezout distributivo, para todo $n \geq 1$. Assim, pela Proposição 1.6.12, a extensão de N ao quociente A/M_{n-1} é um sistema solúvel. Desta maneira N é solúvel em R e, por isto, todo subsistema finito de Q é solúvel em R.

Por hipótese, R é um anel $\aleph_0$-injetivo à direita e, pela Proposição 1.6.22, R é um anel $\aleph_0$-algebricamente compacto à direita. Desta maneira, por definição, Q é solúvel em R e, por isto, A é um anel distributivo à esquerda. Analogamente se verifica que A é um anel distributivo à direita.

Por um raciocínio inteiramente análogo ao desenvolvido na Proposição 3.1.13(1) temos que A é um anel reduzido. Como R é um anel fortemente regular e A é um anel distributivo então, pela Proposição 3.1.14(6), segue que A é um anel de Bezout. Logo, pela Proposição 1.6.17, todo submódulo de um A-módulo plano é plano. $\square$

Nosso próximo resultado generaliza o que aparece em ([24], 6.70, pág. 220).

Proposição 3.1.19. *Suponhamos que α seja uma ação parcial de tipo finito tal que todo ideal à direita de $A = R[[x; \alpha]]$ gerado por dois elementos é plano. Então R é um anel von Neumann regular.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $R = \bigoplus_{j=1}^{n} D_j$, onde $D_j = Re_j$, para todo $1 \leq j \leq n$, ver Seção 1.2.4. Pelo Corolário 3.1.9(2), é suficiente mostrarmos que D_j é um anel von Neumann regular, para todo $1 \leq j \leq n$. Seja $a \in D_j$ um elemento qualquer. Como $a1_j x^j = 1_j x^j \alpha_{-j}(a)$ então, pela Proposição 1.6.18, existem $f, g, t \in A$

tais que as seguintes igualdades são válidas:

$$
\begin{aligned}
af &= 1_j x^j g && (3.2)\\
(1_R - f)1_j x^j &= t\alpha_{-j}(a). && (3.3)
\end{aligned}
$$

O termo constante da igualdade 3.2 satisfaz $af_0 = 0$. O coeficiente do termo de grau j da igualdade 3.3 satisfaz $(1_R - f_0)1_j = t_j a$. Logo,

$$a = a - af_0 = a(1_R - f_0) = a(1_R - f_0)1_j = at_j a$$

e, portanto, D_j é von Neumann regular, para todo $1 \leq j \leq n$. $\square$

O próximo resultado mostra que a soma direta de uma família qualquer de anéis $\aleph_0$-injetivo fortemente regulares é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular.

Proposição 3.1.20. *Se $L = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} R_i$ é uma soma direta de uma família qualquer de anéis $\aleph_0$-injetivo fortemente regulares então L é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.8, temos que L é um anel fortemente regular. Sejam $\{e_n\}_{n \geq 0}$ um conjunto enumerável de elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais de L e $\{a_n\}_{n \geq 0}$ um conjunto enumerável de elementos de L. Então, para todo $n \geq 0$, temos que e_n se escreve como uma soma finita de elementos idempotentes centrais ortogonais $e_{n_i} \in R_i$. Além disto, para cada $n \geq 0$, segue que a_n se escreve como uma soma finita de elementos $a_{n_i} \in R_i$. Por hipótese, cada anel R_i é $\aleph_0$-injetivo fortemente regular e, pela Proposição 1.6.22, existe um elemento $b_i \in R_i$ tal que, para qualquer $n \geq 0$,

$$b_i e_{n_i} = a_{n_i} e_{n_i}.$$

Seja $b \in L$ a soma destes elementos $b_i \in R_i$. Não é difícil ver que $be_n = a_n e_n$, para todo $n \geq 0$ e, portanto, pela Proposição 1.6.22, temos que L é um anel $\aleph_0$-injetivo. $\square$

A seguir, provaremos os dois principais resultados desta seção. Iniciamos com um resultado que generaliza ([24], 6.71, pág. 221).

Teorema 3.1.21. *Suponhamos que α seja uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R e consideramos $A = R[[x;\alpha]]$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é um anel distributivo à direita.*

2. *A é um anel de Bezout à direita e R é um anel quasi-duo à direita ou semicomutativo.*

3. *A é um anel de Bezout à direita ou distributivo à direita e R é um anel fortemente regular.*

4. *A é um anel de Bezout reduzido distributivo e todo submódulo de um A-módulo plano é plano.*

5. *R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular e todo elemento idempotente de R é α-invariante.*

Demonstração. Consideramos o homomorfismo sobrejetivo de anéis naturalmente definido

$$\pi_n : A \to A/M_n$$

para cada $n \geq 1$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Pelo Lema 3.1.11, temos que $\pi_n(A)$ é um anel distributivo à direita como imagem homomórfica de A. Pela Proposição 3.1.16(2), temos que R é um anel fortemente regular.

(2) $\Rightarrow$ (3) Pelo Lema 3.1.11, temos que $\pi_n(A)$ é um anel de Bezout à direita como imagem homomórfica de A. Pela Proposição 3.1.14(3), segue que

$$\pi_n(A) = A/M_n \simeq S/\sum_{i \geq n+1} S_i x^i$$

e, por isto, $S/\sum_{i\geq n+1} S_i x^i$ é um anel de Bezout à direita, para todo $n \geq 1$. Por hipótese, R é um anel quasi-duo à direita ou semicomutativo e, portanto, pela Proposição 3.1.17, R é um anel fortemente regular.

(5) $\Rightarrow$ (4) Segue diretamente da Proposição 3.1.18.

(4) $\Rightarrow$ (3) Por hipótese, A é um anel distributivo à direita. Então, pelo Lema 3.1.11, temos que $\pi_n(A)$ é um anel distributivo à direita como imagem homomórfica de A. Assim, pela Proposição 3.1.16(2), segue que R é um anel fortemente regular.

(3) $\Rightarrow$ (1) Se R é um anel fortemente regular e A é um anel de Bezout à direita então, pela Proposição 3.1.14(6), A é um anel distributivo à direita.

(3) $\Rightarrow$ (2) Seja R um anel fortemente regular. Então R é um anel duo à direita e, em particular, R é um anel quasi-duo à direita e semicomutativo. Além disto, se A é um anel distributivo à direita então, pela Proposição 3.1.14(6), A é um anel de Bezout à direita.

(3) $\Rightarrow$ (5) Seja R um anel fortemente regular. Então, pela Proposição 3.1.14(6), temos que A é um anel distributivo à direita. Pelo Lema 3.1.11, segue que $\pi_n(A)$ é um anel distributivo à direita, para todo $n \geq 1$. Logo, pela Proposição 3.1.16(2), todo elemento idempotente de R é α-invariante e, pela Proposição 3.1.13(1), temos que A é um anel reduzido. Segue da Proposição 1.6.17 que todo submódulo (à esquerda ou à direita) de um A-módulo plano é plano. Logo, pela Proposição 1.6.16, todo ideal à direita de A gerado por dois elementos é plano.

Mostraremos que S_n é um ideal $\aleph_0$-injetivo, para todo $n \neq 0$. De fato, sejam $\{c_i\}_{i\geq 0}$ um conjunto enumerável de elementos de S_n e $\{e_i\}_{i\geq 0}$ um conjunto enumerável de elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais de S_n. Então, existe um conjunto enumerável $\{a_i\}_{i\geq 0}$ de elementos de S_{-n} tais que $a_i = \alpha_{-n}(c_i)$, para todo

$i \geq 0$. Consideramos os monômios

$$
\begin{aligned}
u &= e_i x^n \\
v &= c_i x^n e_i x^n = c_i e_i x^{2n} \\
w &= e_i x^n c_i x^n = e_i \alpha_n(c_i 1_{-n}) x^{2n}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$wu = e_i \alpha_n(c_i 1_{-n}) x^{3n} = uv$$

e, pela Proposição 1.6.18, existem $f, g, h \in A$ tais que as seguintes igualdades são satisfeitas:

$$(1_R - f)v = gu \tag{3.4}$$

$$uf = wh. \tag{3.5}$$

Da igualdade 3.4, segue que

$$g e_i x^n = (1_R - f) c_i e_i x^{2n} = c_i e_i x^{2n} - f c_i e_i x^{2n}.$$

Os coeficientes dos termos de grau $2n$ desta última igualdade satisfazem

$$g_n e_i = c_i e_i - e_i f_0 c_i,$$

onde $f_0 \in R$ é o termo independente de $f \in A$ e $g_n \in S_n$ é o coeficiente do termo de grau n de $g \in A$.

Da igualdade 3.5, obtemos que

$$e_i x^n f = e_i \alpha_n(c_i 1_{-n}) x^{2n} h.$$

Os coeficientes dos termos de grau n desta última igualdade satisfazem

$$e_i\alpha_n(f_0 1_{-n}) = 0.$$

Como $e_i \in R$ é um elemento α-invariante, então $e_i f_0 1_{-n} = 0$ e, por isto,

$$(e_i f_0 x^n)^2 = e_i f_0 \alpha_n(e_i f_0 1_{-n}) x^{2n} = 0.$$

Observamos que A é um anel reduzido, donde segue que $e_i f_0 = 0$. Portanto,

$$g_n e_i = c_i e_i - e_i f_0 c_i = c_i e_i$$

para todo $i \geq 0$ e, pela Proposição 1.6.22, segue que S_n é um anel $\aleph_0$-injetivo, para todo $n \neq 0$. Por hipótese, α é uma ação parcial de tipo finito e, pela Proposição 3.1.20, temos que R é um anel $\aleph_0$-injetivo. □

Nosso próximo resultado generaliza ([24], 6.72, pág. 221).

Teorema 3.1.22. *Suponhamos que α seja uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel abeliano R tal que todo elemento idempotente de R seja α-invariante. Consideramos $A = R[[x;\alpha]]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Todo submódulo de um A-módulo plano é plano.*

2. *Todo ideal à direita de A gerado por dois elementos é plano.*

3. *R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Segue diretamente da Proposição 1.6.16.

(2) $\Rightarrow$ (3) Pela Proposição 3.1.19, temos que R é um anel von Neumann regular. Como R é um anel abeliano então, pelo Lema 1.6.19, temos que R é um anel fortemente regular. Por um processo inteiramente análogo ao desenvolvido no Teorema 3.1.21((3) $\Rightarrow$ (5)) concluímos que R é um anel $\aleph_0$-injetivo.

(3) $\Rightarrow$ (1) Se R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular então, pelo Teorema 3.1.21, todo submódulo de um A-módulo plano é plano. $\square$

3.2 Skew Anéis de Séries de Potências Parciais de Bezout, Duo e Distributivo

Durante esta seção, assumimos que α é uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel com unidade R que admite envolvente (T, σ), onde $\sigma : T \to T$ é um automorfismo. Nosso objetivo é extender ([21], Theorem 1.6 e Corollary 3.1) para o skew anel de séries de potências parcial $R[[x; \alpha]]$.

Nosso primeiro resultado generaliza ([21], Proposition 2.2).

Proposição 3.2.1. *Se $A = R[[x; \alpha]]$ é um anel duo à direita, então R é um anel duo à direita tal que todo elemento idempotente de R é α-invariante.*

Demonstração. Seja $a \in R$ um elemento qualquer. Como A é um anel duo à direita então $ba \in Aa \subseteq aA$, para todo $b \in R$. Desta maneira, existe $f = \sum_{n\geq 0} f_n x^n \in A$ tal que $ba = af$ e, por isto, $ba = af_0 \in aR$. Assim $Ra \subseteq aR$ e, portanto, R é um anel duo à direita.

Seja $e \in R$ um elemento idempotente qualquer. Observamos que todo anel duo à direita é um anel semicomutativo e, em particular, é um anel abeliano. Desta maneira, $e \in R$ é um elemento central de A e, segue que,

$$e.1_j x^j = 1_j x^j.e = \alpha_j(e.1_{-j})x^j$$

para todo $j \geq 1$. Deste modo $\alpha_j(e.1_{-j}) = e.1_j$, para todo $j \geq 1$ e, portanto, $\alpha_j(e.1_{-j}) = e1_j$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. $\square$

Não é difícil ver que, para todo $l \in \mathbb{Z}$, $\sigma^l(R)[[x; \sigma]]$ é um ideal à direita de $T[[x; \sigma]]$ constituído pelas séries da forma $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^l(a_i)x^i$, com $a_i \in R$, para todo $i \geq 0$. A prova do próximo resultado é bem conhecida para séries de potências usuais e, por isto, iremos omití-la.

Lema 3.2.2. *Suponhamos que* $l \in \sigma^{-i}(R)[[x;\sigma]] \subseteq T[[x;\sigma]]$ *seja uma série com coeficientes em* $\sigma^{-i}(R)$ *tal que seu termo independente é inversível em* $\sigma^{-i}(R)$*. Então existe uma série* $t \in \sigma^{-i}(R)[[x;\sigma]]$ *tal que* $lt = \sigma^{-i}(1_R)$*.*

Nosso próximo resultado generaliza o que aparece em ([21], Proposition 2.4).

Proposição 3.2.3. *Suponhamos que* R *seja um anel* $\aleph_0$*-injetivo fortemente regular tal que todo elemento idempotente de* R *é* α*-invariante. Então todo ideal à direita principal de* $A = R[[x;\alpha]]$ *é gerado por uma série de potências cujos coeficientes são elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais de* R*.*

Demonstração. Seja $f = \sum_{n\geq 0} f_n x^n \in A$ uma série qualquer, onde $f_n \in S_n$, para todo $n \geq 0$. Consideramos o ideal à direita principal fA de A.

Como R é um anel fortemente regular, então $f_n = d_n u_n$, onde $d_n \in R$ é um elemento idempotente central e $u_n \in U(R)$, para todo $n \geq 0$, ver Seção 1.6.3. Desta maneira, podemos supor que $d_n \in S_n$, para todo $n \geq 0$. Definimos

$$e_n = d_n(1_R - d_{n-1})...(1_R - d_0) \in S_n$$

para todo $n \geq 0$ e consideramos a série $g = \sum_{n\geq 0} e_n x^n \in A$. Observamos que, para $i > j$,

$$e_i e_j = d_i(1_R - d_{i-1})...(1_R - d_j)...(1_R - d_0).d_j(1_R - d_{j-1})...(1_R - d_0) = 0$$

e, por isto, $g \in A$ é uma série de potências cujos coeficientes são elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais de R.

Consideramos o conjunto enumerável $\{\alpha_{-m}(f_{m+n}1_m)\}_{m,n\geq 0}$ de elementos de R. Como R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular então, pela Proposição 1.6.22, existe um conjunto enumerável $\{b_n\}_{n\geq 0}$ de elementos de R tais que

$$b_n e_m = \alpha_{-m}(f_{m+n}1_m)e_m$$

para quaisquer $m, n \geq 0$. Por hipótese, todo elemento idempotente de R é α-invariante e, desta maneira, para quaisquer $m, n \geq 0$,

$$e_m\alpha_m(b_n 1_{-m}) = e_m f_{m+n}. \tag{3.6}$$

Mostraremos, inicialmente, que $fA \subseteq gA$. De fato, seja $h = \sum_{n\geq 0} b_n 1_n x^n \in A$ tal que $gh = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, onde $c_n = \sum_{i+j=n} e_i\alpha_i(b_j 1_j 1_{-i})$. Observamos que $f_n = d_n u_n = d_n^2 u_n = d_n f_n$ e, pela igualdade (3.6),

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{i+j=n} e_i\alpha_i(b_j 1_j 1_{-i}) = \sum_{i+j=n} e_i\alpha_i(b_j 1_{-i})1_n \\ &= \sum_{i+j=n} e_i f_{i+j} 1_n = (\sum_{i=0}^{n} e_i) f_n \\ &= [(\sum_{i=0}^{n} e_i) d_n] f_n \in S_n. \end{aligned}$$

Além disto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} e_i &+ \prod_{i=0}^{n-1}(1_R - d_i) = e_0 + e_1 + ... + e_{n-1} + (1_R - d_0)...(1_R - d_{n-1}) \\ &= e_0 + e_1 + ... + e_{n-1} + (1_R - d_0)...(1_R - d_{n-2})1_R - (1_R - d_0)...(1_R - d_{n-2})d_{n-1} \\ &= e_0 + e_1 + ... + e_{n-2} + (1_R - d_0)...(1_R - d_{n-2}) \end{aligned}$$

donde, por indução, segue que

$$\sum_{i=0}^{n-1} e_i + \prod_{i=0}^{n-1}(1_R - d_i) = 1_R.$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=0}^{n} e_i)d_n &= (e_0 + e_1 + ... + e_{n-1})d_n + e_n d_n = \sum_{i=0}^{n-1} e_i d_n + e_n \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} e_i d_n + \prod_{i=0}^{n-1}(1_R - d_i)d_n \\
&= [\sum_{i=0}^{n-1} e_i + \prod_{i=0}^{n-1}(1_R - d_i)]d_n = 1_R d_n = d_n
\end{aligned}$$

e, obtemos que,

$$c_n = [(\sum_{i=0}^{n} e_i)d_n]f_n = d_n f_n = f_n$$

para todo $n \geq 0$. Assim $gh = f$ e, por isto, $fA \subseteq gA$.

Mostraremos agora que $gA \subseteq fA$. Como todo elemento idempotente de R é α-invariante, então $1_n = \alpha_n(1_{-n}) = 1_n 1_{-n}$. Logo

$$1_{-n} = \alpha_{-n}(1_n) = \alpha_{-n}(1_n 1_{-n}) = 1_n 1_{-n}$$

e, assim, $1_n = 1_{-n}$, para todo $n \geq 0$.

Devemos verificar que existe uma série $p = \sum_{n\geq 0} p_n x^n \in A$, com $p_n \in S_n$, para todo $n \geq 0$, tal que $g = fp$. No entanto, $g = fp$ se, e somente se, $e_n = \sum_{i+j=n} f_i \alpha_i(p_j 1_{-i})$, para todo $n \geq 0$. Deste modo, temos um sistema com um número contável de equações lineares tal que

$$\begin{aligned}
e_n &= \alpha_{-n}(e_n) = \alpha_{-n}(\sum_{i+j=n} f_i \alpha_i(p_j 1_{-i})) \\
&= \sum_{i+j=n} \alpha_{-n}(f_i 1_n)\alpha_{i-n}(p_j 1_{n-i})1_{-n} \\
&= \sum_{i+j=n} \alpha_{-n}(f_i 1_n)\alpha_{-j}(p_j).
\end{aligned}$$

Desta maneira, para determinarmos a série $p \in A$ tal que $g = fp$ devemos verificar que o sistema

$$e_n = \sum_{i+j=n} \alpha_{-n}(f_i 1_n) x_j \tag{3.7}$$

é solúvel em R, com $n \geq 0$.

Como R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular então, pela Proposição 1.6.22, temos que R é um anel $\aleph_0$-algebricamente compacto. Assim, o sistema (3.7) é solúvel em R se, e somente se, todo seu subsistema finito for solúvel em R.

Desta maneira, mostraremos que, para todo $m \geq 0$ existem $y_0, ..., y_m \in R$ tais que

$$e_n = \sum_{i+j=n} \alpha_{-n}(f_i 1_n) y_j$$

com $0 \leq n \leq m$.

De fato, notamos que

$$\begin{aligned} fe_i &= \sum_{n\geq 0} f_n x^n e_i = \sum_{n \geq 0} f_n \alpha_n(e_i 1_{-n}) x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} f_n e_i 1_n x^n = \sum_{n\geq 0} f_n e_i x^n. \end{aligned}$$

Como, para todo $n < i$,

$$f_n e_i = u_n d_n e_i = (u_n d_n) d_i (1_R - d_{i-1}) ... (1 - d_n) ... (1_R - d_0) = 0$$

então $fe_i = \sum_{n \geq i} f_n e_i x^n$.

Consideramos a série $h_1 = \alpha_{-i}(u_i 1_i) + \sum_{j \geq 1} \alpha_{-i}(f_{i+j} 1_i) x^j \in A$. Assim,

$$e_i x^i . h_1 = e_i u_i x^i + \sum_{j \geq 1} e_i f_{i+j} x^{i+j} = e_i f_i x^i + \sum_{j\geq 1} e_i f_{i+j} x^{i+j} = \sum_{n \geq i} f_n e_i x^n.$$

Observamos que, por hipótese, cada elemento $e_i \in S_i$ é α-invariante e, por isto,

$$\begin{aligned} fe_i &= \sum_{n\geq i} f_n e_i x^n = e_i x^i.h_1 \\ &= x^i e_i[\alpha_{-i}(u_i 1_i) + \sum_{j\geq 1} \alpha_{-i}(f_{i+j}1_i)x^j] \\ &= e_i x^i[\sigma^{-i}(u_i) + \sum_{j\geq 1} \sigma^{-i}(f_{i+j})x^j] \\ &= e_i x^i h_2 \end{aligned}$$

onde $h_2 = \sigma^{-i}(u_i) + \sum_{j\geq 1} \sigma^{-i}(f_{i+j})x^j \in \sigma^{-i}(R)[[x;\sigma]]$ é uma série com termo independente inversível em $\sigma^{-i}(R)$.

Pelo Lema 3.2.2, existe uma série $t \in \sigma^{-i}(R)[[x;\sigma]]$ tal que $h_2 t = \sigma^{-i}(1_R)$. Desta maneira,

$$e_i x^i = e_i x^i \sigma^{-i}(1_R) = e_i x^i(h_2 t) = (e_i x^i h_2)t = (fe_i)t.$$

Definamos $q_m = \sum_{i=0}^{m} e_i t$, para todo $m \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} e_0 + e_1 x + ... + e_m x^m &= \sum_{i=0}^{m} e_i x^i = \sum_{i=0}^{m} fe_i t \\ &= f\sum_{i=0}^{m} e_i t = fq_m. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se $q_m = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in A$, com $y_j 1_{-j} = \alpha_{-j}(a_j)$, para todo $j \geq 0$, então

$$\begin{aligned} fq_m &= \sum_{n\geq 0} f_n x^n . \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(\sum_{i+j=n} f_i \alpha_i(a_j 1_{-i}))x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(\sum_{i+j=n} f_i \alpha_i(\alpha_j(y_j 1_{-j})1_{-i}))x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(\sum_{i+j=n} f_i \alpha_n(y_j 1_{-n}))x^n. \end{aligned}$$

Pela igualdade 3.8, temos que

$$\sum_{i=0}^{m} e_i x^i = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i+j=n} f_i \alpha_n(y_j 1_{-n})\Big)x^n$$

e, por isto, $e_n = \sum_{i+j=n} f_i\alpha_n(y_j.1_{-n})$, para todo $0 \leq n \leq m$. Deste modo,

$$e_n = \alpha_{-n}(e_n) = \sum_{i+j=n} \alpha_{-n}(f_i 1_n) y_j$$

para todo $0 \leq n \leq m$. Logo, todo subsistema finito do sistema em (3.7) é solúvel em R e, portanto, o próprio sistema em (3.7) é solúvel em R.

Desta maneira, existe uma série $p \in A$ tal que $g = fp$ e, portanto, $gA \subseteq fA$. Logo $fA = gA$ é um ideal principal gerado por uma série de potências cujos coeficientes são elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais de R. □

O próximo resultado estabelece condições para que o skew anel de séries de potências parcial $R[[x;\alpha]]$ seja um anel duo à direita.

Lema 3.2.4. *Suponhamos que R seja um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular tal que todo elemento idempotente de R é α-invariante. Então $A = R[[x;\alpha]]$ é um anel duo à direita.*

Demonstração. Consideramos fA um ideal à direita principal de A gerado pela série $f = \sum_{n\geq 0} f_n x^n \in A$. Mostraremos que $Af \subseteq fA$. De fato, seja $g = \sum_{n\geq 0} g_n x^n \in A$ uma série qualquer. Pela Proposição 3.2.3, podemos supor que os coeficientes da série f são elementos idempotentes centrais mutuamente ortogonais de R. Consideramos o conjunto enumerável $\{\alpha_{-n}(g_i 1_n)\}_{i,n\geq 0}$ de elementos de R. Pela Proposição 1.6.22, existe um conjunto enumerável $\{t_i\}_{i\geq 0}$ de elementos de R tais que $e_n t_i = e_n\alpha_{-n}(g_i 1_n)$, para quaisquer $i, n \geq 0$. Por hipótese, todo elemento idempotente de R é α-invariante e, assim

$$e_n\alpha_n(t_i 1_{-n}) = e_n g_i \tag{3.9}$$

para quaisquer $i, n \geq 0$.

Definamos $h = \sum_{n\geq 0} t_n.1_n x^n \in A$. Então,

$$\begin{aligned}
gf &= (\sum_{n\geq 0} g_n x^n)(\sum_{n\geq 0} e_n x^n) \\
&= \sum_{n\geq 0}(\sum_{i+j=n} g_i e_j)x^n \\
&= (\sum_{n\geq 0}(\sum_{i+j=n} g_i e_j)x^n)1_R \\
&= \sum_{n\geq 0}(\sum_{i+j=n} g_i e_j)1_n x^n
\end{aligned}$$

e, pela igualdade 3.9,

$$\begin{aligned}
fh &= (\sum_{n\geq 0} e_n x^n)(\sum_{n\geq 0} t_n 1_n x^n) \\
&= \sum_{n\geq 0}(\sum_{i+j=n} e_i\alpha_i((t_j 1_j)1_{-i}))x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}(\sum_{i+j=n} e_i\alpha_i(t_j 1_{-i}))1_n x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}(\sum_{i+j=n} e_i g_j)1_n x^n.
\end{aligned}$$

Logo $gf = fh$ e, portanto, $Af \subseteq fA$. □

Agora estamos em condições de provar nosso principal resultado, o qual generaliza ([21], Theorem 1.6 e Corollary 3.1).

Teorema 3.2.5. *Suponhamos que α seja uma ação parcial de tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R e consideramos $A = R[[x;\alpha]]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A é um anel de Bezout à direita e duo à direita.*

2. *A é um anel de Bezout à direita e reduzido.*

3. *A é um anel de Bezout à direita e quasi-duo à direita.*

4. *A é um anel de Bezout à direita e semicomutativo.*

5. *A é um anel distributivo à direita e duo à direita.*

6. *A é um anel distributivo à direita e reduzido.*

7. *A é um anel distributivo à direita.*

8. *Todo ideal à direita de A gerado por dois elementos é plano, R é um anel abeliano e todo elemento idempotente de R é α-invariante.*

9. *A é um anel duo à direita e todo submódulo de um A-módulo plano é plano.*

10. *Todo submódulo de um A-módulo plano é plano, R é um anel abeliano e todo elemento idempotente de R é α-invariante.*

11. *R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular e todo elemento idempotente de R é α-invariante.*

12. *A é um anel de Bezout à direita e R é um anel duo à direita.*

13. *A é um anel de Bezout à direita e R é um anel reduzido.*

14. *A é um anel de Bezout à direita e R é um anel quasi-duo à direita.*

15. *A é um anel de Bezout à direita e R é um anel semicomutativo.*

16. *A é um anel de Bezout à direita e R é um anel fortemente regular.*

17. *R é um anel duo à direita $\aleph_0$-injetivo von Neumann regular e todo elemento idempotente de R é α-invariante.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.21, temos que as afirmações (7) e (11) são equivalentes. Pelo Teorema 3.1.22, as condições (8), (10) e (11) também são equivalentes. Claramente (5) $\Rightarrow$ (7). Como (7) $\Rightarrow$ (11) então, pelo Lema 3.2.4, A é um anel duo à direita. Logo (7) $\Rightarrow$ (5).

Mostraremos que (7) $\Rightarrow$ (6). De fato, como (7) $\Rightarrow$ (11) então R é um anel fortemente regular e todo elemento idempotente de R é α-invariante. Seja $a \in S_j$ tal que $a\alpha_j(a1_{-j}) = 0$, para algum $j \in \mathbb{Z}$. Como S_j fortemente regular, para todo $j \in \mathbb{Z}$, então $a = ue$, onde $u \in U(S_j)$ e $e = e^2 \in S_j$. Assim,

$$0 = a\alpha_j(a1_{-j}) = ue\alpha_j(ue1_{-j}) = ue\alpha_j(u1_{-j})$$

e, como $u \in U(S_j)$, então $e = e1_j = 0$. Logo $a = 0$ e, portanto, α é uma ação parcialmente α-rígida. Deste modo, pelo Lema 3.1.3, segue que A é um anel reduzido.

Claramente (6) $\Rightarrow$ (7).

Notamos que (7) $\Rightarrow$ (11) e, pelo Lema 3.2.4, A é um anel duo à direita. Além disto, pelo Teorema 3.1.21, temos que A é um anel de Bezout à direita. Logo (7) $\Rightarrow$ (1). Como todo anel duo à direita é um anel quasi-duo à direita, então (1) $\Rightarrow$ (3). Pela Proposição 1.6.15, todo anel de Bezout à direita e quasi-duo à direita é um anel distributivo à direita e, por isto, (3) $\Rightarrow$ (7).

Já observamos que (7) $\Rightarrow$ (1) e (7) $\Rightarrow$ (6) e, portanto, (7) $\Rightarrow$ (2). Além disto, todo anel reduzido é um anel semicomutativo e, segue que (2) $\Rightarrow$ (4).

Se A é um anel semicomutativo então $R \subseteq A$ é um anel semicomutativo. Assim, pelo Teorema 3.1.21, temos que (4) $\Rightarrow$ (7).

Mostraremos que as afirmações (9) e (10) são equivalentes. Observamos que todo anel duo à direita é um anel semicomutativo e, em particular, é um anel abeliano. Por isto, pela Proposição 3.2.1, temos que (9) $\Rightarrow$ (10). Reciprocamente, assumimos a afirmação (10). Como (10) $\Leftrightarrow$ (11) então, pelo Lema 3.2.4, A é duo à direita e, portanto, temos (9).

Desta maneira, as afirmações de (1) a (11) são equivalentes.

Como todo anel duo à direita é um anel quasi-duo à direita, então (12) $\Rightarrow$ (14). Pelo Teorema 3.1.21, temos que (14) $\Rightarrow$ (16). Desde que todo anel fortemente regular é um anel duo, então (16) $\Rightarrow$ (12).

Novamente, pelo Teorema 3.1.21, as afirmações (7), (15) e (16) são equivalentes. Como todo anel reduzido é semicomutativo, então (13) $\Rightarrow$ (15).

Além disto, como todo anel fortemente regular é um anel reduzido então (16) $\Rightarrow$ (13). Logo, as afirmações (13) e (15) são equivalentes.

Para concluir, mostraremos que (17) e (11) são equivalentes. Suponhamos que vale a afirmação (17). Então R é um anel $\aleph_0$-injetivo von Neumann regular e duo à direita. Como todo anel duo à direita é abeliano, então pela Proposição 1.6.19, temos que R é um anel fortemente regular. Assim, obtemos (11).

Suponhamos que a afirmação (11) seja verdadeira. Então, por hipótese, R é um anel $\aleph_0$-injetivo fortemente regular. Em particular, R é um anel duo e, pelo Lema 1.6.19, R é anel abeliano von Neumann regular. Por isto, obtemos a afirmação (17).

A prova está completa. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] F. Abadie, Enveloping actions and Takai duality for partial action, Journal of Functional Analysis 197(2003), 14-67.

[2] S. S. Bedi, J. Ram, Jacobson radical of skew polynomial rings and skew group rings, Israel J. of Math. 35(4)(1980) 327-337.

[3] W. Cortes; M. Ferrero, Partial skew polynomial rings: prime and maximal ideals, Communications in Algebra, 35(2007) 1183-1199.

[4] N. J. Divinsky, Rings and Radicals, Mathematical Expositions nº 14 (1965).

[5] M. Dokuchaev; R. Exel, Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations, Trans. Amer. Math. Soc. 357(5)(2005), 1931-1952.

[6] M. Dokuchaev; M. Ferrero; A. Paques, Partial actions and Galois theory, Journal of Pure and applied Algebra, 208(2007), 77-87.

[7] M. Dokuchaev; A. Rio; J. J. Simon, Globalizations of partial actions on non-unital rings. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 135, p. 343-352, 2007.

[8] R. Exel, The Bunce-Deddens algebras as crossed products by partial automorphisms, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática (N.S) 25(1994), 173-179.

[9] R. Exel, Approximately finite C^*-algebras and partial automorphisms, Mathematica Scandinavica 77(1995), 281-288.

[10] R. Exel, Partial actions of groups and actions of inverse semigroups, Proceedings of Amererican Mathematical Society 126 (12)(1998), 3481-3494.

[11] R. Exel; M. Laca; J. Quigg, Partial dynamical systems and C^*-algebras generated by partial isometries, Journal of Operator Theory 47(2002), 169-186.

[12] M. Ferrero; J. Lazzarin, Partial actions and partial skew group rings, Journal of Algebra 319 (2008) 5247-5264.

[13] B. J. Gardner; R. Wiegandt, Radical theory of rings, Pure and Appl. Math. (A Dekker Series of Monographs and Textbooks). Marcel Dekker, Inc. New York, 2004.

[14] K. R. Goodearl, Von Neumann regular rings, Krieger (1991)

[15] C. Huh; S. H. Jang; C. On Kim; Y. Lee, Rings whose maximal one-sided ideals are two-sided, Bull. Korean Math. Soc. 39(3)(2002)411-422.

[16] T. Y. Lam, A first course in noncommutative rings. Springer-Verlang, 1991.

[17] T. Y. Lam; A. S. Dugas, Quasi-duo rings and stable range descent, J. Pure and Appl. Alg. 195 (2005) 243-259.

[18] J. Lazzarin, Ações parciais de grupos sobre anéis: o skew anel de grupo parcial e o subanel dos invariantes, Tese de Doutorado (UFRGS) (2006).

[19] A. Leroy; J. Matczuk; E. R. Puczylowski, Quasi-duo skew polynomial rings, J. Pure and Appl. Alg. 212(2008) 1951-1959.

[20] A. Leroy; J. Matczuk; E. R. Puczylowski, A description of quasi-duo $\mathbb{Z}$-graded rings, preprint.

[21] R. Mazurek; M. Ziembowski, Duo, bezout and distributive rings of skew power series, Publ. Mat. 53(2009), 257-271.

[22] K. McClanahan, K-theory for partial crossed products by discrete groups, Journal of Functional Analysis 130 (1995), 77-117.

[23] S. Montgomery, Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings, Lecture Notes in Math. Springer-Verlang, 1980.

[24] A. A. Tuganbaev, Distributive modules and related topics, Algebra, Logic and Applications 12, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1999.

[25] W. Xue, On strongly right bounded finite rings, Bull. Austral. Math. Soc., 44(1991), 353-355

[26] H. P. Yu, On quasi-duo rings, Glasgow Math. J. 37(1995), 21-31.

Lista de Definições

- Dizemos que um anel R é *abeliano* se todo elemento idempotente de R é um elemento central de R.

- Um R-módulo à direita M é um módulo $\aleph_0$-*algebricamente compacto* se todo sistema $L(a_{ij}, m_i, M)$ com um número enumerável de equações lineares

$$\{\sum_{j=0}^{t(i)} x_j a_{ij} = m_i\}_{i=0}^{\infty}$$

  com coeficientes $a_{ij} \in R$, $m_i \in M$ e com um número contável de incógnitas $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ assumindo valores em M tal que todo subsistema finito deste sistema tem solução, então $L(a_{ij}, m_i, M)$ tem solução em M.

- Dizemos que um R-módulo à direita M é um módulo $\aleph_0$-*injetivo* se, para qualquer ideal à direita B de R gerado por um conjunto enumerável de elementos, todo homomorfismo $B_R \to M$ pode ser estendido a um homomorfismo $R_R \to M$.

- Sejam R um anel e M um R-módulo à direita. Dizemos que M é um *módulo de Bezout* se cada submódulo finitamente gerado de M é cíclico.

- Seja α uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R. Dizemos que R é um anel α-*fortemente regular* se, para quaisquer $a \in R$ e $j \neq 0$, existe $b_j \in R$ tal que $\alpha_j(a1_{-j}) = \alpha_j(a1_{-j})^2 b_j$.

- Seja I um ideal de R. Dizemos que I é um ideal α-*invariante* se $\alpha_g(I \cap S_{g^{-1}}) = I \cap S_g$, para todo $g \in G$.

- Dizemos que um ideal P de um anel R é *completamente primo* se R/P é um domínio.

- Consideramos um anel R e um R-módulo à direita M. Dizemos que M é um *módulo distributivo* se $(N + P) \cap Q = (N \cap Q) + (P \cap Q)$, para quaisquer R-submódulos N, P e Q de M.

- Dizemos que um anel R é *duo à direita* se todo ideal à direita de R é um ideal bilateral. Analogamente se define anel duo à esquerda. Dizemos que R é um anel duo se R é um anel duo à direita e duo à esquerda

- Dizemos que R é um anel *fortemente regular* se $a \in a^2R$, para todo $a \in R$. Ou seja, R é um anel fortemente regular se, para todo $a \in R$, existe $r \in R$ tal que $a = a^2r$.

- Dizemos que um anel L é $\mathbb{Z}$-graduado se $L = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n$ é uma soma direta de subgrupos aditivos L_n, satisfazendo $L_nL_m \subseteq L_{n+m}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. Se $L_nL_m = L_{n+m}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, então L é denominado um anel fortemente $\mathbb{Z}$-graduado

- Dizemos que um ideal I do anel L é *homogêneo* se $I = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(I \cap L_n)$.

- Dizemos que uma ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre um anel R é parcialmente α-rígida se $a\alpha_j(a.1_{-j}) \neq 0$, para quaisquer $a \in S_j$ não-nulo e $j \in \mathbb{Z}$.

- Um R-módulo à direita E é um *módulo plano* se, para cada monomorfismo de R-módulos à esquerda $u : M_1 \to M_2$, o homomorfismo de grupos $f : E \otimes M_1 \to E \otimes M_2$ definido por

$$f(a \otimes b) = (id_E \otimes u)(a \otimes b) = a \otimes u(b)$$

é um monomorfismo.

- Sejam S, $\{S_i | i \in \mathcal{I}\}$ anéis e $\varepsilon : S \to \prod_{i\in\mathcal{I}} S_i$ um homomorfismo injetivo de anéis. Dizemos que ε representa S como um *produto subdireto* dos anéis S_i,

$i \in \mathcal{I}$, se cada uma das aplicações $S \to S_i$ (obtida pela composição de ε com as projeções nas coordenadas) é sobrejetiva.

- Dizemos que um anel R é *quasi-duo à direita* se todo ideal maximal à direita de R é um ideal bilateral. Analogamente, definimos anéis quasi-duo à esquerda. Dizemos que R é um anel quasi-duo se R é um anel quasi-duo à direita e quasi-duo à esquerda.

- Um anel S é *reduzido* se S não contém elementos nilpotentes não-nulos.

- Dizemos que um anel S é *semicomutativo* se o anulador à direita (ou à esquerda) de cada elemento de S é um ideal bilateral.

- Um anel R é *von Neumann regular* se, para todo $a \in R$, existe $r \in R$ tal que $a = ara$.