UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

MARIANA LIMA DURO

ANÁLISE COMBINATÓRIA E CONSTRUÇÃO DE POSSIBILIDADES

O raciocínio formal no Ensino Médio

Porto Alegre
2012

Mariana Lima Duro

ANÁLISE COMBINATÓRIA E CONSTRUÇÃO DE POSSIBILIDADES

O raciocínio formal no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Becker

Coorientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2012

Agradecimentos

Aos meus pais, Geisa, João Renato, Rita e Raul. Aos meus irmãos, Marcelo e Marília. À minha tia, Maria Emília. Ao meu futuro marido, Maicon. À minha grande amiga, Andreia. Esses, sempre estiveram ao meu lado nos bons e maus momentos durante esta produção, auxiliando-me nas mais diferentes necessidades.

Aos meus queridos amigos e colegas, professores do Colégio de Aplicação, que abriram as portas da escola e das suas salas de aula para minha pesquisa, o meu agradecimento: Fabiana, Simone, Luiz e Lúcia.

A todos os sujeitos desta pesquisa, meus alunos ou não, que abriram mão de seus afazeres para contribuir com ela.

Aos meus colegas de orientação e de seminários, pelas incansáveis e produtivas discussões sobre a teoria piagetiana.

Aos meus grandes mestres, Tania Beatriz I. Marques e Marcus Vinicius de Azevedo Basso, que tanto contribuíram no meu processo de construção de conhecimento. Em especial, ao meu orientador, Fernando Becker, que esteve sempre disponível e disposto a contribuir com a melhoria deste trabalho, não deixando de lado o meu aprendizado.

Enfim, a todos os professores e professoras que já passaram pela minha vida, ensinando-me um pouquinho mais sobre a minha amada profissão, em ressalva, as professoras, Elisabete Z. Burigo e Maria Luiza R. Becker que, não por menos, foram convidadas a participar da banca de defesa desta dissertação.

CIP - Catalogação na Publicação

Duro, Mariana Lima

Análise Combinatória e Construção de Possibilidades: O raciocínio formal no ensino médio / Mariana Lima Duro. -- 2012.

106 f.

Orientador: Fernando Becker.

Coorientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2012.

1. Análise Combinatória. 2. Pensamento Formal. 3. Epistemologia Genética. 4. Ensino Médio. 5. Ensino de Matemática. I. Becker, Fernando, orient. II. Basso, Marcus Vinicius de Azevedo, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pela autora.

RESUMO

A presente pesquisa busca compreender a psicogênese do pensamento combinatório. São analisados os mecanismos utilizados por estudantes do ensino médio para solucionar problemas experimentais de análise combinatória. Como base teórica é utilizada a Epistemologia Genética de Jean Piaget. Ela traz subsídios para compreender como esta noção é construída pelo sujeito. As hipóteses são baseadas na maneira pela qual alguns professores abordam não só a análise combinatória, mas também a maneira como os conteúdos de matemática são trabalhados ao longo dos anos escolares. A coleta de dados é feita de modo experimental e baseada no método clínico de Piaget. O pensamento dos sujeitos é analisado ressaltando suas semelhanças, enquanto estruturas de raciocínio, na construção das possibilidades.

Palavras-chave: análise combinatória, pensamento formal, epistemologia genética, ensino médio, ensino de matemática.

ABSTRACT

This research seeks to comprehend the psychogenesis of combinatorial reasonig. We analyzed the mechanisms used by high school students to solve experimental combinatorics problems. As a theoretical basis is used Jean Piaget Genetic Epistemology. It illustrate how this concept is constructed by the subject. The hypothesis are based on manners which some teachers make the approach of combinatorics concept, and also the way mathematics contents are taught during school years. Data collection is done in on experimental way and based on Piaget clinical method. The thought of the subjects is analysed, emphasizing their likeness while reasoning structures that they show on the construction of the possibilities.

Key-words: combinatorics, formal thought, genetic epistemology, high school, mathematics teaching.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

> "[...] a lógica é como a arte poética, que codifica depois as leis de uma poesia que já foi escrita, mas preside sua criação" (INHELDER e PIAGET, 1976, p. 227).

Longe de pretender analisar o pensamento do aluno do ensino médio em toda sua complexidade, esta pesquisa pretende levantar hipóteses acerca do seu pensamento lógico, do ponto de vista da Epistemologia Genética. Para isso, serão introduzidas algumas informações a respeito das transformações neuronais e cognitivas ocorridas durante a adolescência que possibilitam a construção do pensamento operatório formal. A aquisição dessas estruturas formais possibilitará a construção do raciocínio lógico-matemático do sujeito, enquanto superação da intuição perceptiva do período pré-operatório, e da reversibilidade limitada, própria das ações operatório-concretas.

A ideia desta pesquisa originou-se de minhas experiências enquanto professora, mesmo durante minha graduação[1]. Isso se deu ao analisar o modo como eu própria havia aprendido, na escola, os conteúdos de análise combinatória e, dessa maneira, refletir sobre as possibilidades de modificar esta metodologia de ensino, de modo a possibilitar aos meus alunos esta construção.

Durante meu período de graduação, convivi com muitas ideias e teorias, encontrando, na Epistemologia Genética, os subsídios necessários para compreender como se dá a aprendizagem da análise combinatória. No senso comum, acredita-se que tanto o adolescente quanto o adulto, estudantes do ensino médio, já possuem uma organização do pensamento suficiente para a construção do pensamento formal. Essa afirmação carece de fundamento, conforme perceberemos ao longo deste trabalho.

---

[1] Graduação em licenciatura em matemática realizada de 2003 a 2008 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.

No capítulo introdutório apresenta-se a justificativa, os objetivos, a configuração do problema e as hipóteses da autora acerca do pensamento combinatório dos sujeitos. No capítulo seguinte, far-se-á um breve resumo das principais características da adolescência e de como se dá a construção do raciocínio formal neste período. No terceiro capítulo, serão detalhados os assuntos de análise combinatória utilizados neste estudo, enfocando os problemas de contagem utilizados nos experimentos de coleta de dados.

Nos capítulos subsequentes será descrita a pesquisa, destacando seus aspectos metodológicos e a análise dos dados. A coleta de dados foi realizada por meio de aplicações de experimentos concretos, sob metodologia inspirada no método clínico piagetiano. Na primeira prova experimental, trabalha-se com a noção mais primitiva da análise combinatória: o princípio multiplicativo. Nas outras duas provas subsequentes, o raciocínio exigido é o presente em cálculos de permutação, arranjo e combinação simples. Em todas as provas o foco está em compreender como o sujeito organiza a solução que encontra para os problemas propostos e as justificativas dadas para tal. A análise dos dados categoriza os diferentes níveis de pensamento, levando em conta as semelhanças estruturais, até a constituição do pensamento combinatório.

O fechamento do trabalho será tratado no capítulo das considerações finais, em que a autora dissertará sobre possíveis mudanças que faria no caso de uma nova pesquisa e trará novos questionamentos a serem desenvolvidos em pesquisas futuras.

1.1. Justificativa

Desde 2003, quando ainda era estudante de licenciatura em matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, já estava em contato direto com professores e alunos do ensino médio. Convidada pelo meu coorientador, Marcus Basso[2], a participar de uma

[2] Professor Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso, Professor Adjunto do Instituto de Matemática da UFRGS e do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática da mesma universidade.

atividade de extensão dentro do Colégio de Aplicação da UFRGS, já tive a oportunidade de conhecer, por conversas informais, a dificuldade enfrentada por professores e estudantes no ensino e na compreensão da análise combinatória.

Minha formação já se iniciava voltada a uma prática pedagógica relacionada à pesquisa, de modo que, além do domínio dos conceitos matemáticos, sentia a necessidade de adquirir habilidades para articulá-los e refletir continuamente sobre minha prática docente.

A escolha da análise combinatória, como tema desta investigação, decorre de minhas experiências como estudante, professora e, atualmente, pesquisadora. Como estudante, sempre demonstrei considerável aptidão e interesse pela matemática discreta[3], enquanto que, como professora, percebo imensa dificuldade por parte dos alunos em compreender a análise combinatória e suas técnicas de cálculo. Tenho como hipótese que isso se deve ao fato de ainda não terem organizado esquemas mentais de nível formal, necessários à compreensão da combinatória; dito de outro modo, não construíram estrutura formal em grau de complexidade suficiente para esse conhecimento matemático.

Como pesquisadora na área de educação, procurei respaldo teórico e metodológico que possibilitasse refletir acerca da sala de aula que, como ambiente de constantes trocas de experiências, se diferenciasse dos modelos que já havia visto ou vivenciado, enquanto professora da educação básica. Acredito que deva-se partir de um problema como ponto de partida para a construção de conceitos em sala de aula e, também, deva-se ter como possibilidade para que, a partir de sua resolução, novos conceitos pudessem ser construídos pelos alunos. A capacidade de realizar operações combinatórias vai muito além de saber utilizar uma ferramenta matemática; ela passa a exercer um papel fundamental para desenvolver um raciocínio lógico, à medida que possibilita a ampliação destes mecanismos de pensamento.

[3] A Matemática Discreta é um ramo da matemática a qual estuda problemas que dependem dos números inteiros; portanto, de maneira não contínua (discreta). Somatórios, seqüências, grafos, matrizes e probabilidades discretas são alguns dos conteúdos estudados pela matemática discreta.

Na medida em que dirige o foco para a aprendizagem, isto é, para a compreensão de como o sujeito aprende análise combinatória e para os pré-requisitos necessários para essa construção, esta pesquisa torna-se importante ferramenta para a reflexão acerca do ensino desse conteúdo. O objetivo de compreender a psicogênese do pensamento combinatório insere esta pesquisa no campo da educação.

1.2. Objetivos

Nesta pesquisa, procurarei investigar as estratégias utilizadas pelos estudantes durante a realização dos experimentos, levando em conta a estruturação do seu raciocínio e os esquemas previamente construídos que possibilitam ou limitam a construção da combinatória. Dessa forma, pretende-se contribuir com as pesquisas na área de ensino de matemática, à medida que o professor-leitor poderá refletir sobre os diferentes níveis de pensamento dos seus alunos, e não mais partir do pressuposto de que todos já possuam raciocínio formal estruturado para a aprendizagem da combinatória.

Subsidiada pela Epistemologia Genética de Jean Piaget, busco compreender como alunos do ensino médio (regular ou EJA[4]) aprendem combinatória. Desta maneira, o leitor é convidado a refletir acerca do ensino desse conteúdo, de modo a pensar em estratégias didáticas que favoreçam a aquisição de estruturas capazes de assimilar esse conteúdo, concebendo o aluno como sujeito ativo de sua própria aprendizagem.

Segundo Polya (1985, p.13),

> [...] a Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa, de modo que o princípio da é particularmente importante para nós, matemáticos professores, tanto mais se tivermos como objetivo principal, ou como um dos objetivos mais importantes, ensinar crianças a pensar.

Pensando dessa maneira, o estudo descrito nesta dissertação foi realizado com o objetivo de verificar como ocorre a gênese da construção do

[4] Educação de Jovens e Adultos

raciocínio combinatório. Saliento que a discussão sobre os conceitos específicos de análise combinatória e de suas subdivisões dentro da matemática não será aprofundada neste momento, visto que nosso foco estará voltado para a análise do raciocínio que leva à sua construção, independentemente de tratar-se de permutação, arranjo ou combinação.

O objetivo desta pesquisa não é analisar o ensino de análise combinatória – como uma das diversas ramificações da matemática – mas entender como o sujeito aprende matemática, e o que ele necessita previamente para que essa aprendizagem ocorra. Isso será feito numa perspectiva interacionista-construtivista, na medida em que este trabalho insere-se no campo de pesquisa voltado ao sujeito da educação.

1.3. Configuração do Problema

Durante os anos de 2009 e 2010, pude observar que muitos estudantes do terceiro ano do ensino médio, do Colégio de Aplicação da UFRGS, em Porto Alegre, demonstraram grande dificuldade na compreensão dos conceitos envolvidos na combinatória. Há diversos fatores que posso cogitar como explicação para esse fato. Porém, acredito que, por um lado, o principal seja o modo equivocado como a análise combinatória é trabalhada em sala de aula, por alguns professores, privilegiando a aplicação de fórmulas; e, por outro, por não se considerar o nível de pensamento apresentado pelo jovem que, ao chegar ao ensino médio, ainda não é capaz de operar nesse nível de formalidade exigida na dedução e compreensão das fórmulas combinatórias.

Para resolver com compreensão problemas de análise combinatória é necessário que o sujeito já tenha construído estruturas formais. Mesmo que esta aquisição não garanta a aprendizagem da combinatória, ela é condição necessária para que essa aprendizagem ocorra. Para isso, torna-se necessário que o professor conheça esses diferentes níveis de pensamento e saiba trabalhar com cada um deles dentro do seu planejamento em sala de aula, compreendendo que a combinatória utiliza procedimentos matemáticos que requerem, para a sua construção, a presença do raciocínio formal.

Diante desta configuração surgem as seguintes questões: Se um sujeito em nível médio escolar pode ainda não ter construído um nível de pensamento formal, de que maneira esse sujeito conseguirá aprender conceitos que envolvem esse tipo de raciocínio? E os que possuem esse raciocínio, teriam condições de ampliá-lo na compreensão da análise combinatória?

Diante desses questionamentos, apresento o meu problema de pesquisa: **Como se dá a construção do pensamento combinatório em alunos do ensino médio?**

A importância que atribuo à construção de tais conceitos deve-se ao fato de que a análise combinatória embasa muitas outras teorias matemáticas, sendo a sua compreensão necessária para o cálculo de probabilidades, por exemplo. Mais do que isso, a aprendizagem da combinatória permite que o sujeito amplie suas estruturas operatórias, aumentando sua generalidade, em todas as áreas em que atuar. Embora exija poucos pré-requisitos, em termos de conteúdos teóricos, a análise combinatória é um conteúdo matemático que exige técnicas de raciocínio formal para a interpretação dos problemas pertinentes.

1.4. Hipóteses

A hipótese levantada é a de que existem diferentes formas pelas quais esse raciocínio é construído, existindo diferentes níveis de compreensão em diferentes alunos de mesma etapa escolar, em direção a uma possível organização lógico-formal, que pode ser identificada e descrita.

Partindo deste princípio, minha hipótese é de que o raciocínio combinatório é construído e se dá por sucessivos níveis de pensamento, sempre em função da ação do sujeito e de seus desdobramentos, sobretudo de suas tomadas de consciência. É por esse processo que o sujeito constrói generalizações e hipóteses. Dentre os alunos pesquisados, provavelmente encontremos os três níveis de pensamento, conforme descritos por Inhelder e Piaget (1976), discriminados a seguir.

Nível I: caracterizados por estarem em um nível de pensamento pré-operatório, esses sujeitos relacionam casualmente dois ou mais elementos ao mesmo tempo, observando apenas o resultado final (tendo em vista a sua forma atual estática), não entendendo as transformações como reversíveis. Não elaboram hipóteses prévias que possibilitem levá-los a uma dedução, ficando simplesmente restritos a um pequeno conjunto de combinações aleatórias não sistematizadas.

Nível II: caracterizados por estarem em um nível de pensamento operatório concreto, esses sujeitos são capazes de fazer pequenas sistematizações relacionadas ao real observado, podendo ainda estendê-las a situações virtuais, vinculadas a suas tentativas empíricas.

Nível III: caracterizados por estarem em um nível de pensamento operatório formal, esses sujeitos apresentam como novidade, em relação aos demais, o método sistemático de obtenção de todas as combinações possíveis e a capacidade de generalização e de criação de teorias.

Na perspectiva da Epistemologia Genética, a construção da noção mais geral de análise combinatória “[...] necessita de uma maior coordenação do pensamento, porque foge da materialidade dos fatos, e dá margem para todos os tipos de noções intermediárias” (BERTOLUCCI, 2009). Mesmo que o sujeito já tenha vivenciado em sala de aula conteúdos de análise combinatória, não se pode garantir que ele conheça tais conceitos, visto que podem ter sido mera reprodução de fórmulas, sem construção e, portanto, sem compreensão.

2. ADOLESCÊNCIA E CONSTRUÇÃO DO RACIOCÍNIO FORMAL

Meu desafio neste capítulo é compreender a adolescência, sob o ponto de vista da capacidade cognitiva que se estrutura nesse período. Define-se como adolescência a integração do indivíduo na sociedade adulta, implicando as transformações cerebrais desta etapa, que possibilitarão a estruturação do pensamento formal. Distingue-se de puberdade, que significa uma maturação biológica atingida nesta fase.

2.1. Adolescência

Segundo Herculano-Houzel (2005), já há indícios científicos de que o cérebro passa por uma reorganização química e estrutural durante a adolescência, na qual a quantidade de neurotransmissores aumenta consideravelmente, tornando a troca de informações entre neurônios ainda mais eficiente.

É na adolescência que se dá o ápice das sinapses cerebrais, passando, a partir de então, a serem eliminadas as excessivas, de modo que o cérebro se reorganiza, produzindo novas estruturas cognitivas com as quais adentrará a vida adulta.

Além disso, a autora afirma que a neurociência hoje comprova, experimentalmente, a ideia apresentada por Inhelder e Piaget (1976) a respeito da capacidade cerebral na adolescência, que permite ao jovem criar situações imaginárias, eventos hipotéticos e considerar possibilidades estritamente abstratas. Ela mostra que o amadurecimento estrutural e funcional do córtex pré-frontal continua até os 30 anos e, talvez, até mais.

Ficando comprovada essa reestruturação cerebral que ocorre durante a adolescência e tendo em vista as diferentes formas de inserção social pelas quais esse jovem passa nesse período, retomemos as palavras de Inhelder e Piaget, já em 1976:

> Para que o meio social atue realmente sobre os cérebros individuais, é preciso que estes estejam em condições de assimilar as contribuições desse meio, e voltamos à necessidade de uma maturação suficiente dos instrumentos cerebrais individuais (p.251).

Para Faria (1998, p.78), é através das operações formais que passamos a pensar proposicionalmente e, assim, a produzir novas ideias. É este novo domínio mental que “liberta o pensamento dos objetos materiais e enriquece o jovem com um novo poder” (p.85). O jovem centra-se em um egocentrismo na crença de que tudo que faz e pensa é de grande importância. A partir desse novo domínio de poder, o jovem passa a tornar-se crítico frente a si mesmo. São essas novas reflexões que o levam a constituir teorias e a propor reformas sociais.

Ainda que a maturação cerebral esteja relacionada à criação destas novas estruturas de pensamento ela só ocorrerá, podendo ser acelerada ou retardada, à medida que o meio social propicie seu desenvolvimento. A equilibração se dá pela compensação entre o desejo de reforma e os planos de execução. Ou seja, existem entre o funcionamento cerebral e as influências sociais, exercícios exclusivos do indivíduo que o adaptam à nova situação orgânica e social e que criam condições para o desenvolvimento do pensamento formal.

2.2. Desenvolvimento Cognitivo

Aprender matemática, há muito tempo, vem sendo tido como uma possibilidade de poucos. Piaget e a Epistemologia Genética, no entanto, trazem uma ideia, até então desconsiderada, de que a matemática pode ser acessível a todos. A teoria “assegura às novas gerações o direito de aprender matemática, o que para muitos é um tesouro escondido, e para a grande maioria dos que têm direito a ela, inacessível” (ASSIS ET AL., 2011, p.141). Piaget propõe uma educação ativa, onde cada sujeito participa do seu próprio processo de aprendizagem. Becker (1998, p.22) afirma que “o homem se torna matemático na medida em que aprende matemática”.

> Nascer sabendo é uma limitação porque obriga apenas a repetir e, nunca, a criar, inovar, refazer, modificar. Quanto mais se nasce pronto, mais refém do que já se sabe e, portanto, do passado; aprender sempre é o que mais impede que nos tornemos prisioneiros de situações que, por serem inéditas, não saberíamos enfrentar.
>
> Diante dessa realidade, é absurdo acreditar na ideia de que uma pessoa quanto mais vive, mais velha fica; para que alguém quanto mais vivesse mais velho ficasse, teria que ter nascido pronto e ir se gastando...
>
> Isso não ocorre com gente, e sim com fogão, sapato, geladeira. Gente não nasce pronta e vai se gastando; gente nasce não pronta e vai se fazendo. Eu, no ano que estamos, sou a minha mais nova edição (revista e, às vezes, um pouco ampliada); o mais velho de mim (se é o tempo a medida) está no meu passado e não no presente (CORTELLA, 2006, p.13 apud SABO, 2010).

Os seres humanos, em geral, trazem em sua bagagem genética a capacidade de construir estruturas que “não estão dadas nos objetos, pois dependem de uma ação, e nem no sujeito, pois o sujeito deve aprender como coordenar suas ações” (PIAGET, 2005, p.73). Segundo Piaget, a busca do sujeito em assimilar o objeto a ser conhecido, e a possível acomodação dessa capacidade assimiladora, caso o objeto assimilado tenha gerado uma perturbação nos esquemas anteriores do sujeito, é o que caracteriza o processo de aprendizagem. Ao responder, por acomodação, a uma assimilação que causou desequilíbrios, o sujeito gera um novo patamar de equilíbrio, que possibilita novas assimilações de novos elementos cada vez mais complexos. Essa constante busca pelo equilíbrio, em que novos esquemas são construídos em patamares superiores, é o processo de construção do conhecimento.

Desde o nascimento, pelo menos, a criança forma estruturas que a tornam capaz de compreender o mundo em que vive. Essas significações que passam a ser criadas constituem novos esquemas de assimilação, que, por sua vez, passam a construir novos patamares de equilíbrio, até constituírem um pensamento formal. O sujeito compreende o objeto a partir do que permite seu atual esquema de assimilação. Se houver modificação nesses esquemas, significa que houve acomodação. É neste contínuo processo de assimilações e acomodações que o sujeito pode passar a compreender o mundo dos possíveis.

As estruturas de conhecimento, construídas por nós ao longo da vida, são descritas e apresentadas por Piaget, como estádios de desenvolvimento intelectual que apresentam características próprias em termos de uma estrutura de pensamento. Para a aquisição de um estádio superior é necessário a aquisição do anterior (PIAGET, 2005). Mesmo que determinadas intervenções pedagógicas aconteçam, essa ordem jamais é alterada, podendo ser acelerada, retardada ou limitada.

Quando criança sensório-motora, a atividade cognitiva do sujeito está baseada, principalmente, no imediatismo, sem que acontecimentos e ideias sejam recordados, estando limitada à atividade sensorial-motora, prática, sem representação. Esse estádio de desenvolvimento é chamado por Piaget de *sensório-motor*. Neste período, a criança constrói as noções de tempo, objeto, causalidade e espaço, tendo o universo centralizado em si próprio e nas suas ações. A inteligência sensório-motora possui uma lógica inerente à coordenação das próprias ações (PIAGET, 2005), e isto antes da aquisição da linguagem. É, portanto, a qualidade da experiência do sujeito que o prepara para passar para o estádio seguinte.

No estádio seguinte, denominado *pré-operatório*, as construções feitas até então serão reorganizadas em um patamar superior, dando origem à função simbólica. A origem da função simbólica, em conjunto com a aquisição da linguagem, ainda não possibilita que o sujeito adquira a reversibilidade do pensamento e sequer a conservação das propriedades físicas do objeto. No entanto, a partir de agora, as ações práticas poderão ser representadas mentalmente, o que potencializa a estruturação de novos esquemas de assimilação no plano do pensamento.

Segundo Becker (2008), somente no estádio *operatório concreto* dar-se-á a capacidade de reversibilidade de pensamento (operatória) e reciprocidade, após anos de ações sobre os objetos. Essa capacidade é uma primeira forma de totalidade operatória e, portanto, uma primeira forma de equilíbrio estável, o que define uma estrutura operatória de pensamento. É a reversibilidade operatória que permite ao sujeito executar a mesma ação nos dois sentidos, com a consciência que se trata da mesma ação.

A reversibilidade é formada pela negação e reciprocidade. A primeira caracteriza-se pelas operações de classes e números. A partir da operação inversa, o sujeito consegue retornar ao ponto de partida da operação, obtendo a anulação como resultado. A segunda caracteriza-se pelas operações de relações, na qual se volta ao ponto de partida anulando uma diferença. (PIAGET, 2005). A criança operatório concreta é capaz de utilizar estas duas formas complementares da reversibilidade, mas somente de forma isolada, sem uni-las a um sistema único e total (INHELDER E PIAGET, 1976). Dessa forma, a reversibilidade fica apenas no plano das ações concretas.

Em outras palavras, a reversibilidade, como estrutura, consiste na permanente possibilidade de retorno ao ponto inicial, ocorrendo de duas formas que, mesmo distintas, complementam-se. Para voltar ao ponto de partida da ação pode-se anular a operação, constituindo uma inversão ou negação, que, quando combinado com a operação inicial, resultam na operação nula ou idêntica. Outra forma de voltar ao ponto de partida da ação seria pela anulação da diferença, constituindo a reciprocidade que, quando combinado com a operação direta, resulta em uma equivalência (INHELDER e PIAGET, 1976, p. 205).

"O pensamento operatório concreto, comparado ao pensamento pré-operatório ou intuitivo, se caracteriza por uma extensão do real na direção do virtual" (INHELDER E PIAGET, 1976, p.188). Ou seja, esses elementos inexistentes no plano real passam a ser representados mentalmente, mas isso ainda não permite pensar hipoteticamente. O sujeito neste estádio consegue coordenar duas variáveis, mas não consegue criar uma sistematização, variando apenas um dos fatores, conservando os demais, o que impossibilita que encontre todos os fatores possíveis, necessários para a combinatória.

Segundo Inhelder e Piaget (1976), nas estruturas concretas de pensamento, cada vez mais são reunidas classes e relações, porém elas permanecem em grupos incompletos, sem atingir a combinatória que permite sistematizar (variar um único fator, conservando os demais) e constituir em um sistema único todos os subconjuntos possíveis das inclusões de inversões e reciprocidades. Ou seja, os sujeitos desse nível são capazes de compreender a reversibilidade como inversão ou reciprocidade, porém não as reunindo em um sistema único que caracterizaria o pensamento combinatório.

Na mesma obra os autores ainda afirmam que a capacidade de seriação e classificação permite a extensão do real para um prolongamento virtual dessas ações. Mesmo que o sujeito ainda esteja cognitivamente restrito ao real, a reversão mental já existe, o que o capacita a construir estruturas de classe, noções de conservação e seriação, reorganizando sua estrutura lógico-matemática. A superação do real é o que caracterizará o estádio seguinte, operatório formal, que será de grande importância para nosso estudo presente.

2.3. Construção do Raciocínio Formal

Piaget descreve a inteligência como um processo adaptativo. Percebemos, em um primeiro momento, a predominância da percepção, em seguida, a capacidade perceptiva une-se à função simbólica, originando a capacidade de representação. No aparecimento das estruturas operatórias, a percepção "é apenas um meio de apreensão do real, entre outros, especialmente as operações" (DOLLE, 1974, p.161). Expandindo-se da manipulação concreta surgem as operações formais, onde o real é apenas uma parte de uma totalidade possível hipotética.

Somente no estádio *operatório-formal* o sujeito é capaz de trabalhar com hipóteses e deduções, extrapolando o real, construindo uma estrutura lógica de grupo, chamado Grupo INRC (Identidade, Negação, Reciprocidade e Correlação).

> A reunião da inversão e da reciprocidade faz com que cada operação seja, ao mesmo tempo, a inversa da outra e a recíproca de uma terceira, dando, assim, quatro transformações: direta, inversa, recíproca e inversa da recíproca (correlata), ou grupo INRC (FARIA, 1998, p.80).

A construção mental sobre todas as combinações possíveis são operações que há pouco tempo o adolescente, ainda criança, não tinha capacidade para compreender; a partir de agora, o pensamento passa a operar no plano hipotético-dedutivo. Novas relações passam a ser estabelecidas, dentre elas as relações de implicação, disjunção, exclusão, incompatibilidade e implicação recíproca.

Segundo Becker (2008), as experiências lógico-matemáticas do sujeito operatório formal consistem na ação sobre o objeto para retirar, não mais dele, mas das ações e das coordenações das ações, qualidades que lhe são próprias. A lógica é uma organização do pensamento e é dessas coordenações, mediante progressivas tomadas de consciência, que nasce a matemática.

Para Inhelder e Piaget (1976, p.185), “a principal característica do pensamento formal está ligada, sem dúvida, ao papel que dá ao possível com relação às verificações de realidade”. Trata-se de uma nova forma de equilíbrio em patamar superior ao das operações concretas. É uma forma de pensamento hipotético-dedutivo, que consiste em tirar consequências de situações hipotéticas, não mais apenas de extensões do real, mas de hipóteses elaboradas mentalmente.

> Finalmente, com o pensamento formal ocorre uma inversão de sentido entre o real e o possível. Em vez de o possível se manifestar simplesmente sob a forma de um prolongamento do real ou das ações executadas na realidade, é ao contrário, o real que se subordina ao possível [...] (p.189).

A lógica das proposições também está relacionada ao pensamento formal à medida que objetos e ações sobre esses objetos passam a ser representados verbalmente, a partir das manipulações experimentais. Novas possibilidades operatórias são estabelecidas por disjunções, implicações, exclusões, etc., até a construção da lógica de todas as combinações possíveis.

Segundo Inhelder e Piaget (1976), o novo processo de equilibração estabelecido no pensamento formal permite que o sujeito passe a dominar o possível, na sua perspectiva física e lógica, nas suas conexões de pensamento. Do ponto de vista físico, o equilíbrio é dado a partir de compensações das modificações mentais, subordinando, dessa forma, o real ao possível. Ou seja, as relações reais passam a fazer parte de um conjunto maior, os possíveis.

> Para equilibrar suas afirmações sucessivas (o que significa evitar ser desmentido pelos fatos ulteriores), o sujeito tende a inserir, no conjunto das ligações reconhecidas como possíveis, as ligações inicialmente supostas como reais, de maneira a, depois, escolher as verdadeiras pelo exame de algumas transformações realizadas precisamente no interior dessas ligações possíveis (INHELDER e PIAGET 1976, p. 194).

Do ponto de vista lógico, o possível é o que não é contraditório, sendo o contraditório superado por transformações reversíveis, a tal ponto que uma operação em produto com seu inverso chegam à chamada *identidade,* concebendo a compensação das transformações.

> Mais simplesmente ainda, o sistema está em equilíbrio quando as operações de que o sujeito é capaz, constituem uma estrutura tal que essas operações sejam suscetíveis de ser realizadas nos dois sentidos (seja por inversão estrita ou negação, seja por reciprocidade). Portanto, é porque o conjunto das operações possíveis constitui um sistema de transformações virtuais que se compensam – e que se compensam na medida em que obedecem às leis da reversibilidade – que o sistema está em equilíbrio (INHELDER e PIAGET, 1976, p.200).

Piaget ressalta dois aspectos, do ponto de vista psicológico do equilíbrio: o real e o possível. No entanto, o possível teria duas significações, o que nos colocaria na presença de três planos psicológicos. No plano r*eal* o sujeito realiza operações mentais, construindo novas relações e aplicando-as ao objeto. No plano dos *materialmente possíveis,* constituem-se as operações concebidas pelo sujeito como possíveis, mas tratando-se de operações reais. O sujeito diferencia o atual e as possibilidades por ele pensadas. Finalmente, no plano dos e*struturalmente possíveis,* constituem-se as operações virtuais que o sujeito seria capaz de realizar, mas sem tomada de consciência, por falta de estrutura que o possibilite.

O pensamento formal opera em segunda, terceira, enésima... potência, através das relações das relações e das coordenações das coordenações das ações envolvidas na lógica das proposições. A construção da combinatória abrange essa totalidade, sendo ela própria operação de segunda potência: “as permutações são seriações de seriações, as combinações são multiplicações de multiplicações, etc.” (INHELDER E PIAGET, 1976, p.190). Essa nova forma de estruturação do pensamento supõe a formação de “operações combinatórias, proporções, sistemas duplos de referência, esquemas de equilíbrio mecânico (igualdade entre ação e reação), probabilidades multiplicativas, correlações, etc.” (p.190).

A capacidade de pensar formalmente não se restringe a problemas de combinatória como os propostos nesta pesquisa; ela pode manifestar-se de diferentes maneiras e situações. Piaget (1973, p.7) retoma o conceito de estádio como “aptidões progressivamente diferenciadas”. Nesse sentido, todas as pessoas, em condições estruturais e sociais normais, atingem o estádio das operações formais, mas “em diferentes áreas de acordo com suas aptidões e suas especializações profissionais”.

2.4. Pensamento Combinatório

Para fazer relações entre objetos, de forma a retirar características que só existem no pensamento do sujeito que age, e não características que estão no próprio objeto (abstração empírica), o sujeito realiza um processo, o qual Piaget chamou de abstração reflexionante. Este tipo de abstração é a base para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

É importante ressaltar que a abstração empírica só é possível com o resultado de abstrações reflexionantes prévias, pois é só pela abstração reflexionante que o sujeito torna-se capaz de retirar características físicas dos objetos, isto é, para assimilá-los.

Esse processo pode permanecer inconsciente por toda a vida ou pode vir a se tornar consciente, à medida que o sujeito apropria-se dos mecanismos das suas ações, possibilitando compreender o que fez, não só como resultado, mas como processo. Esse “dar-se conta” foi chamado por Piaget de tomada de consciência (Piaget, 1975), a qual permite ao sujeito retomar as suas ações, reconstruindo-as em um novo patamar. Ao se tornar consciente, uma abstração reflexionante passa a ser *abstração refletida* (Piaget, 1995).

É só a partir da tomada de consciência que o sujeito poderá tornar generalizável determinado conceito, aplicando-o a outros conteúdos. A abstração é condição necessária para a generalização. Ao generalizar conceitos envolvidos nos problemas de contagem ocorre uma ampliação quantitativa e qualitativa estrutural, de modo que o sujeito passa a utilizá-la nas diversas situações com as quais se depara. Sujeitos que não generalizam os processos de contagem não conseguem agir fora do plano material, limitando-se a respostas incompletas, mesmo nas provas experimentais.

Os sujeitos que operam concretamente limitam-se a agir sobre o real e não hipoteticamente, restringindo-se ao suporte material da prova, encontrando algumas possibilidades em detrimento da totalidade de possibilidades. Segundo Bertolucci (2009, p. 34):

> Neste tipo de pensamento, o real domina o pensamento e o possível está subordinado ao real porque está limitado pelas ações na sua concretude. O conjunto das operações concretas chega apenas a um conjunto restrito de transformações virtuais, e, portanto, a uma noção do possível que é apenas uma extensão (não muito grande) do real (PIAGET, 1976). Com o aparecimento do pensamento formal, o real passa a ser apenas um setor do mundo dos possíveis.

Inhelder e Piaget (1976) caracterizam o materialmente possível como o possível do ponto de vista do sujeito, ou seja, as operações ou relações que ele concebe como possível. O estruturalmente possível seriam, então, as operações ou o que o sujeito seria capaz de efetuar, mas não o faz porque ainda não tem consciência das relações e mesmo da sua capacidade, sendo este o possível do ponto de vista do observador. Superar o materialmente possível é uma condição necessária, mas não suficiente, para a construção da combinatória.

Em geral, todos os seres humanos são capazes de chegar ao nível das estruturas formais, tendo em vista que a relação estabelecida pelo sujeito entre os meios endógeno e exógeno possibilita sua construção. Sendo assim, como se dá o processo de construção da combinatória? Como o sujeito passa a distanciar-se do real e parte para o plano das possibilidades? Como se dá a ação no plano virtual? Ao pensar sobre essas questões, tomamos consciência do quanto a Epistemologia Genética pode contribuir para compreendermos o desenvolvimento das estruturas cognitivas.

Polya (1985, p.13) afirma que:

> Se quisermos desenvolver a inteligência do aluno, devemos ficar atentos para que as coisas primeiras apareçam em primeiro lugar. Certas atividades são mais fáceis e naturais que outras: adivinhar é mais fácil que demonstrar, resolver problemas concretos é mais natural do que construir estruturas conceituais. Em geral, o concreto vem antes do abstrato, a ação e a percepção, antes das palavras e dos conceitos, os conceitos, antes dos símbolos, etc.

Segundo Becker[5] uma informação somente pode ser compreendida se o sujeito possuir estruturas internas que lhe possibilitem assimilá-la. Dessa forma, torna-se impossível ensinar conceitos matemáticos complexos a crianças que ainda não desenvolveram estruturas para isso. No entanto:

> No fundo de todas as noções de aprendizagem aparece a convicção de que o conhecimento não passa de uma acumulação de aprendizagens, compreendidas como cópias; daí, a onipresença da estimulação como explicação das aprendizagens, independentes da atividade do sujeito. Piaget distingue conhecimento-conteúdo de conhecimento estrutura ou capacidade construída, embora não faça menção a ela. Considero essa distinção fundamental, pois quando Piaget afirma que o sujeito constrói conhecimento ele se refere primeiramente a conhecimento estrutura, organização, capacidade, competência, condição prévia de toda aprendizagem e só secundariamente a conhecimento-conteúdo; não significa que ele subestime o papel do conhecimento-conteúdo nesse processo (BECKER, 2008, p. 53).

Para pensar no plano hipotético e entrar no mundo das possibilidades, é necessário que o sujeito coordene suas ações, de modo a transpor a um

---

[5] Definição apresentada durante o seminário Aprendizagem Humana: Processo de Construção, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011/01.

plano mental superior o seu pensamento atual. Nesse novo plano, novas reorganizações serão estabelecidas. Nesse sentido, Piaget (1995) afirma que as estruturas de pensamento são estruturadas e estruturantes ao mesmo tempo.

3. ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória pode ser descrita como "o campo da matemática que se ocupa de estudar, examinar, descrever e determinar as diferentes e possíveis classificações que podemos obter e observar de um conjunto dado e de seus elementos constitutivos" (DORNELAS, 2004).

Esse campo da matemática é constituído, também, pelos problemas de contagem (permutações, arranjos, combinações), os quais serão abordados neste trabalho. Dornelas (2004) ainda destaca outros conteúdos que constituem o estudo da Análise Combinatória, os quais não serão aqui aprofundados:

> [...] os que tratam do número total de elementos na união de um número finito de conjuntos (Princípio da Inclusão e Exclusão), das Funções geradoras (que envolvem a seleção de objetos nos quais a repetição é permitida, em problemas da teoria aditiva dos números, especificamente na teoria das partições, das Relações de Recorrência (que partem da abordagem de problemas particulares para problemas genéricos), O Princípio de Dirichlet, também conhecido como da Casa dos Pombos ou das Gavetas (que procura determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo certas propriedades), as Permutações Caóticas (que procura determinar o número de permutações com os elementos de um conjunto dado, quando nenhum número se encontra ocupando seu lugar primitivo), os Lemas de Kaplansky (que busca obter de quantos modos é possível formar um conjunto de p elementos a partir de um outro com n elementos, $p \leq n$, no qual não haja números consecutivos) e o Princípio da Reflexão que procura estabelecer o número de trajetos possíveis de uma partícula no plano.

Segundo Tavares e Brito (2005), a análise combinatória, embora já estudado por Arquimedes e Pascal, atingiu o auge do seu desenvolvimento no século XVI, para solucionar os problemas originados dos jogos de azar; esse estudo deu origem à teoria das probabilidades.

A combinatória é uma parte fundamental da matemática discreta, sendo essencial para o desenvolvimento do cálculo de probabilidades. Segundo Souza (2010), a combinatória é um ramo da matemática de grande valor educacional, à medida que exige raciocínio sobre situações elementares, utilizando-se tanto de seus métodos próprios quanto de técnicas de contagem. Alguns problemas de combinatória podem ser facilmente resolvidos por sucessivas adições ou multiplicações, e suas fórmulas podem ser deduzidas, não necessitando memorização, conforme afirma Carneiro (1995).

As primeiras situações matemáticas envolvendo lógica quantitativa que ocorrem na vida das pessoas são por problemas de contagem, que consistem em determinar e enumerar elementos de um conjunto.

3.1. Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

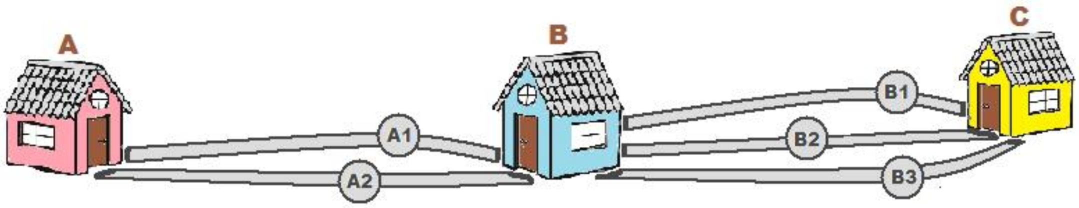
Também chamado de princípio multiplicativo, o princípio fundamental da contagem consiste em uma técnica que esquematiza a resolução de problemas que envolvem situações de contagem, sem enumeração. Sua principal ferramenta é a árvore de possibilidades que permite sistematizar o problema e, assim, chegar à sua solução. O PFC é o elemento fundamental do pensamento combinatório, pois é a partir dele que todas as construções cognitivas posteriores (permutações, arranjos e combinações) se constituirão para o sujeito.

A não compreensão do PFC poderá gerar grandes dificuldades no reconhecimento de possíveis aplicações no processo de resolução de problemas. Essa não compreensão impossibilitará, por exemplo, "[...] a identificação quando a ordem em que os elementos estão dispostos num agrupamento, irá (caso dos arranjos) ou não (caso das combinações) influir no total de agrupamentos (subconjuntos) possíveis de um dado conjunto" (DORNELAS, 2004).

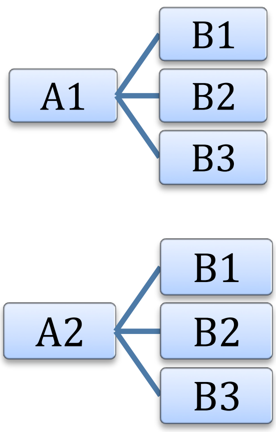
Para explicação dos procedimentos de contagem avaliados nos sujeitos pesquisados, utilizarei a própria situação problema que mais tarde será discutida junto aos participantes da pesquisa para descrever como se dá o processo de construção da árvore de possibilidades e de enumeração sistemática.

Essas técnicas são de suma importância para resolver problemas de análise combinatória, embora, quanto maior o número de possibilidades, mais trabalhosa a técnica vai se tornando. Mesmo assim, esse método de resolução possibilita a sistematização e a compreensão do princípio fundamental da contagem. A ideia de compreender os problemas de contagem, tendo como base o PFC e, levando em conta o processo de compreensão por etapas, deu-se a partir das ideias de Sabo (2010), que também a apresentou dessa maneira em sua dissertação.

Por exemplo, consideremos as casas A, B e C, conforme a figura abaixo:



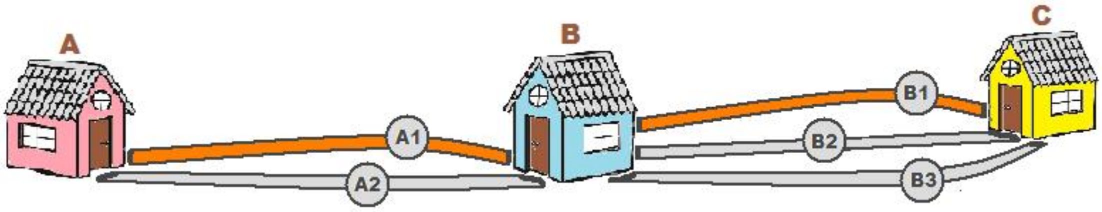
Quantas são as possibilidades de se locomover de A a C, passando por B? Sabe-se que para cada um dos dois caminhos que levam de A a B existem outros três caminhos que levam de B a C. Sistematizando este raciocínio, chamemos os caminhos que levam de A a B de A_1 e A_2, e os caminhos que levam de B a C de B_1, B_2 e B_3 e elaboremos a seguinte árvore de possibilidades (ou diagrama de árvore) [6]:



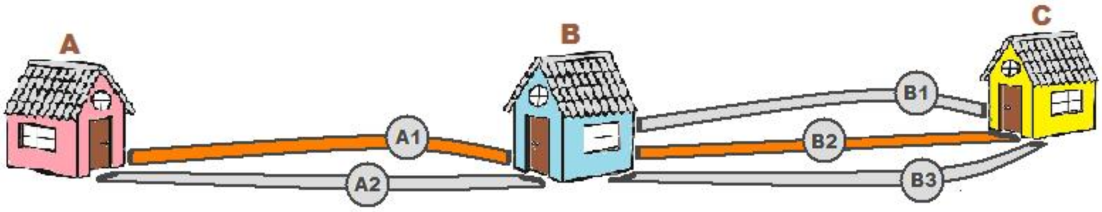
O diagrama mostra-nos o total de 2 x 3 caminhos, ou seja, 6 caminhos distintos possíveis. São eles:

[6] Árvore de possibilidades ou diagrama de árvore é uma ferramenta gráfica muito utilizada no cálculo de Análise Combinatória que permite identificar e enumerar as possibilidades de ocorrência de um evento. O nome dessa ferramenta provém da semelhança com a estrutura ramificada de uma árvore.

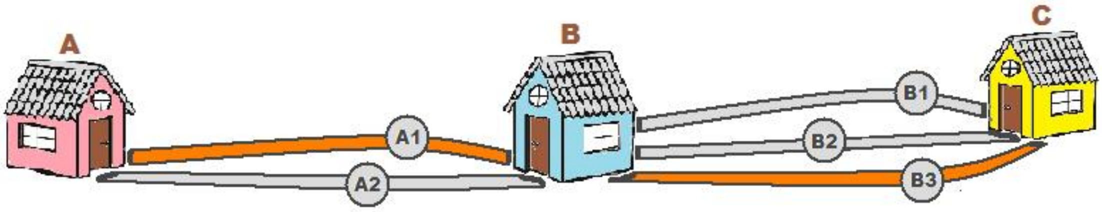
A_1B_1



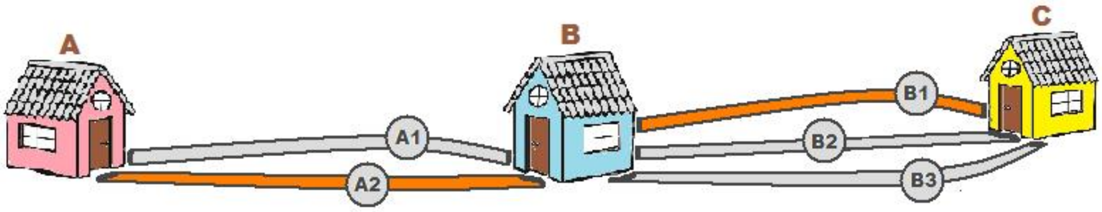
A_1B_2



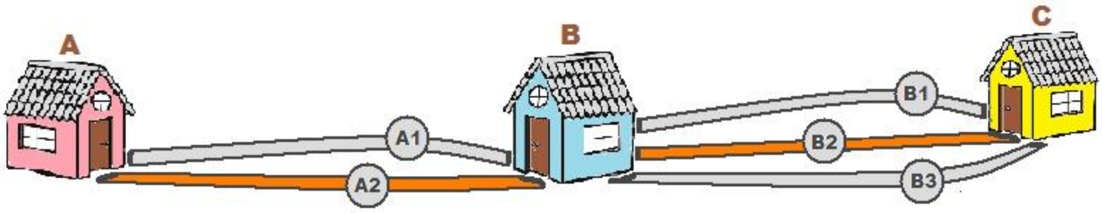
A_1B_3



A_2B_1



A_2B_2



A_2B_3

Pode-se denotar a enumeração como uma técnica eficaz para a solução deste problema, listando exaustivamente todas as possibilidades de caminhos distintos para se locomover de um ponto a outro. A árvore de possibilidades é outra técnica que esquematiza essa enumeração. Já nesse exemplo, fica claro que, se a quantidade de caminhos continuasse a aumentar, representar todos os agrupamentos seria um processo trabalhoso, e que poderia ocasionar desinteresse e dispersão do aluno, afastando-o do seu objetivo.

Para situações em que a solução por enumeração ou pela árvore de possibilidades tornar-se exaustiva, utiliza-se a terceira técnica apresentada: o PFC. Essa técnica pode ser vista como uma generalização das anteriores, a fim de resolver problemas que apresentam elevado número de soluções.

Para utilizar esta técnica é preciso identificar as etapas do problema, e, em seguida, as diferentes maneiras em que podem ocorrer cada etapa.

1ª etapa: escolha de 1 entre os dois caminhos
2ª etapa: escolha de 1 entre os próximos 3 caminhos.

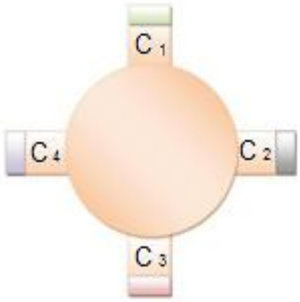
Então, pelo PFC, o número de caminhos distintos é 2 x 3 = 6, podendo prosseguir de maneira análoga para as demais etapas, caso a quantidade de caminhos aumente.

Podemos generalizar essa afirmação da seguinte maneira: dado um acontecimento A que pode ocorrer de m maneiras diferentes e para cada uma das m maneiras possíveis de ocorrer o evento A, um acontecimento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento A, seguido do acontecimento B, é dado por $m \times n$.

Para demonstrar a validade desta afirmação pode-se utilizar o princípio da indução finita; porém, este não será nosso foco neste trabalho.

3.2. Permutações

As permutações podem ser subdivididas em permutações simples e compostas. Para esta pesquisa, analisaremos como o sujeito constrói as noções de permutação simples, apenas. As permutações simples consistem em agrupar, ordenadamente, elementos distintos de um conjunto, podendo ser denotada por P_n ou ser representada por *n!* (fatorial de n). Por exemplo, de quantas maneiras pode sentar-se, a uma mesa de quatro lugares (C_1, C_2, C_3, C_4), uma família composta por mãe, pai, filho e filha?



Tendo como base o PFC, necessita-se observar quantas etapas tem o problema. Ora, se objetivo é ordenar quatro pessoas ao redor de uma mesa, encontramos, então, quatro etapas distintas e sucessivas a serem pensadas.

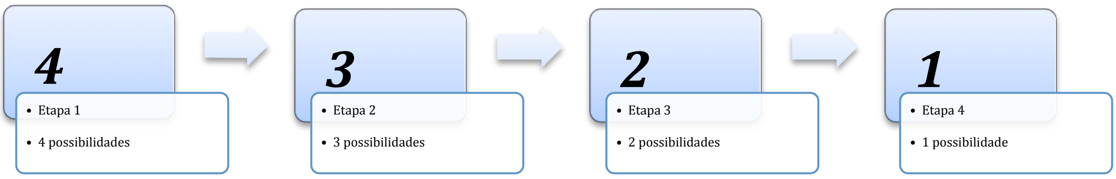
<u>1ª etapa:</u> escolher quem sentará em C_1, por exemplo. Ou seja, temos quatro possibilidades para a primeira etapa.

<u>2ª etapa:</u> escolher quem sentará na cadeira ao lado (C_2, por exemplo). Percebe-se que, ao passar para a segunda etapa, alguém já haverá de ter sido escolhido para sentar-se em C_1, restando, então, três possibilidades para C_2. Exemplificando, se na primeira etapa escolheu-se M para sentar, agora restaria P, Fa e Fo para escolher.

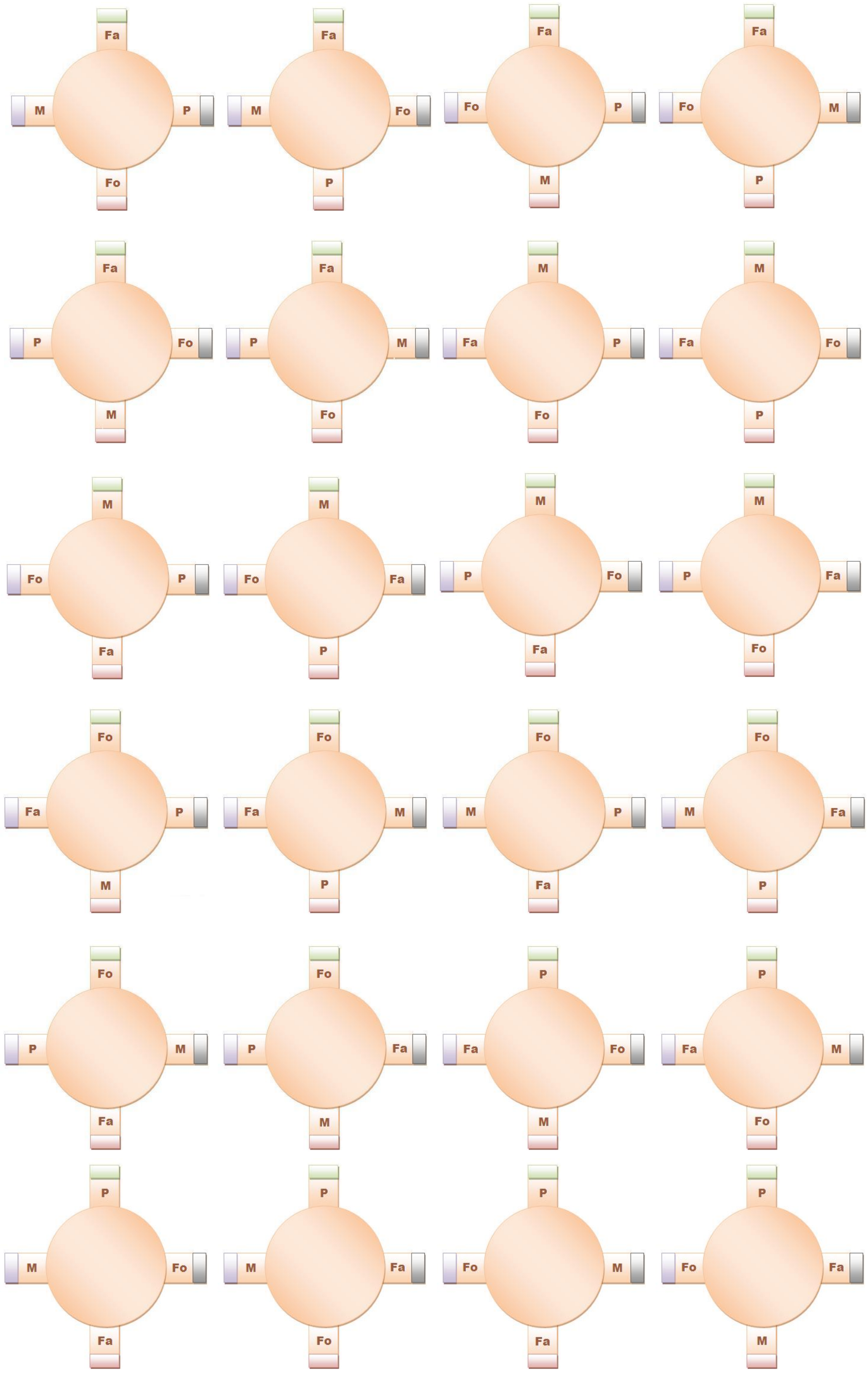
<u>3ª etapa:</u> Escolher o próximo membro da família a sentar-se, dentre os dois oriundos da etapa precedente, restando, então, apenas um para a etapa 4.

<u>4ª etapa:</u> Escolher o último familiar a sentar-se à mesa, sendo esta escolha a única possibilidade, pois os outros três já foram posicionados nas etapas anteriores.

Podemos representar o raciocínio, utilizando o PFC da seguinte forma:

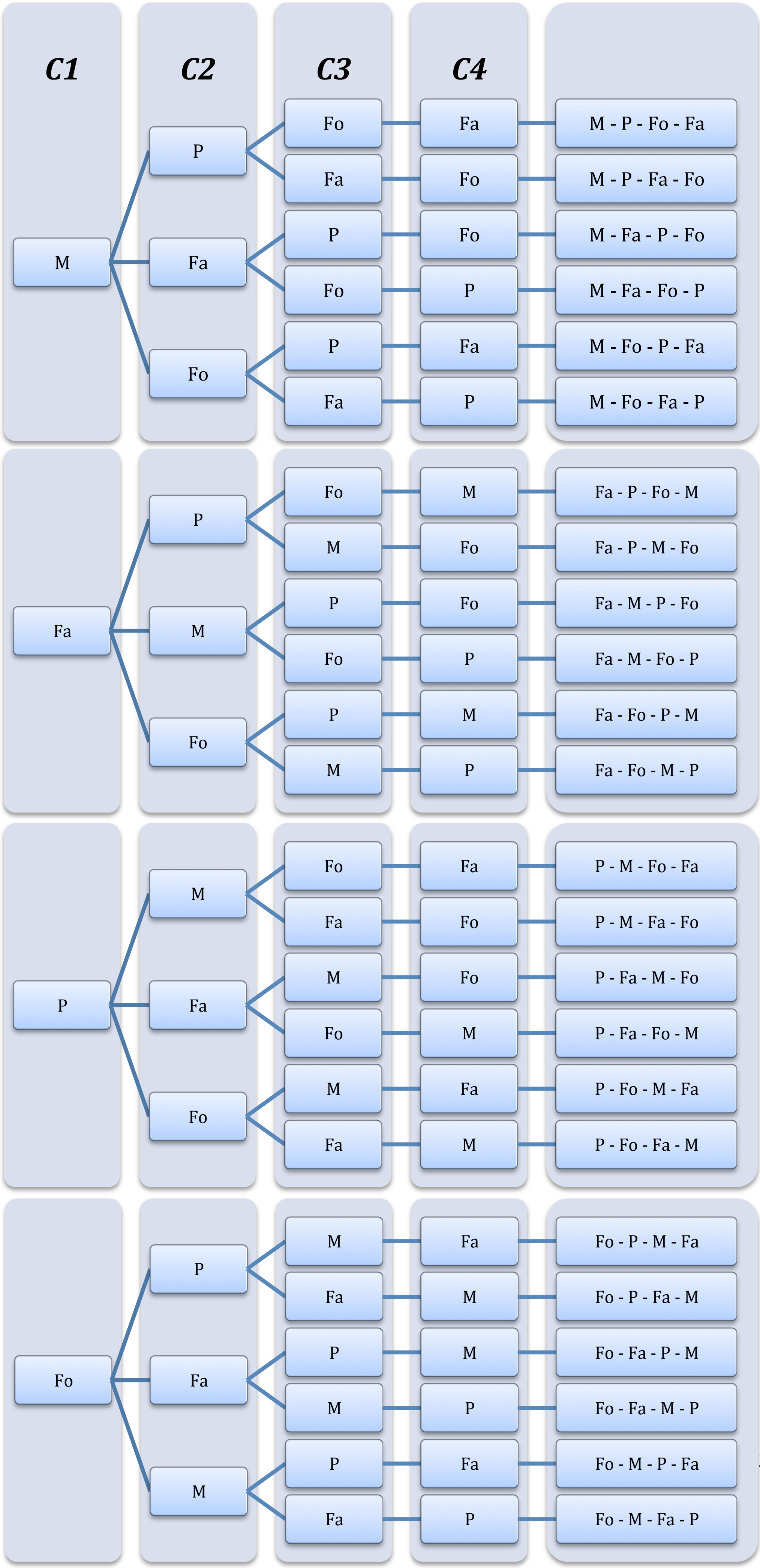


Sendo, então, 4 x 3 x 2 x 1 = 24 possibilidades distintas de distribuir a família pelas cadeiras.



Pode ser utilizada também a enumeração ou a árvore de possibilidades para resolver este problema, visto que a quantidade de respostas não é um número excessivamente grande.

Bem, elaboremos, novamente, a árvore das possibilidades denominando cada cadeira como C_1, C_2, C_3 e C_4 e os respectivos familiares como M (mãe), P (pai), Fa (filha) e Fo (filho). Em C_1 podem sentar-se M, P, Fa ou Fo, levando em conta que M tenha sentado, em C_2 podem sentar-se P, Fa ou Fo e assim sucessivamente, conforme o diagrama:


C1
C2
C3
C4
M
P
Fo
Fa
M - P - Fo - Fa
Fa
Fo
M - P - Fa - Fo
Fa
P
Fo
M - Fa - P - Fo
Fo
P
M - Fa - Fo - P
Fo
P
Fa
M - Fo - P - Fa
Fa
P
M - Fo - Fa - P
Fa
P
Fo
M
Fa - P - Fo - M
M
Fo
Fa - P - M - Fo
M
P
Fo
Fa - M - P - Fo
Fo
P
Fa - M - Fo - P
Fo
P
M
Fa - Fo - P - M
M
P
Fa - Fo - M - P
P
M
Fo
Fa
P - M - Fo - Fa
Fa
Fo
P - M - Fa - Fo
Fa
M
Fo
P - Fa - M - Fo
Fo
M
P - Fa - Fo - M
Fo
M
Fa
P - Fo - M - Fa
Fa
M
P - Fo - Fa - M
Fo
P
M
Fa
Fo - P - M - Fa
Fa
M
Fo - P - Fa - M
Fa
P
M
Fo - Fa - P - M
M
P
Fo - Fa - M - P
M
P
Fa
Fo - M - P - Fa
Fa
P
Fo - M - Fa - P

Para a primeira posição (C_1) há quatro possibilidades de ocupação (M, P, Fa, Fo); sendo esta ocupada, a próxima cadeira (C_2) terá outras três possibilidades, e assim por diante, resultando em 4 x 3 x 2 x 1 = 24 diferentes maneiras de distribuir as pessoas à mesa.

Sendo assim, partindo de casos particulares de cálculo de permutação, ampliou-se para uma situação mais geral *(n),* utilizando-se como técnica o PFC. Esta generalização obtida pode auxiliar na resolução de problemas que envolvam o cálculo de permutação de elementos.

Este cálculo de permutação pode ser generalizado (ressalta-se que, em nenhum momento desta dissertação, o verbo generalizar terá o sentido de demonstrar) da seguinte maneira:

Posições:	1ª	2ª	3ª	...	n-1	n-ésima
Possibilidades:	n	n-1	n-2	...	2	1

Para determinar a permutação de *n* elementos distintos, pode-se pensar em sentar *n* diferentes pessoas à mesa. Identificamos que há *n* etapas, pois são *n* "objetos" a serem ordenados. Denominaremos cada um dos *n* objetos/pessoas de a_1, a_2, a_3,..., a_n e as *n* diferentes posições que podem ocupar chamaremos de c_1, c_2, c_3,..., c_n. Sendo assim, teremos as seguintes etapas:

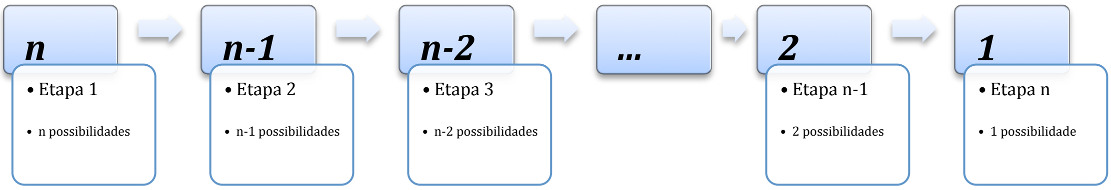
1ª etapa: escolher a pessoa que ocupará a primeira cadeira (c_1), sendo assim, qualquer uma das n pessoas poderá ocupar essa posição, havendo então n possibilidades para essa etapa.

2ª etapa: escolher a pessoa que ocupará a segunda posição (c_2). Como já há uma pessoa ocupando a primeira posição, sobram n-1 cadeiras para ocupar.

3ª etapa: escolher a pessoa que ocupará a terceira posição (c_3). Podemos continuar raciocinando de modo análogo à etapa anterior, onde concluímos que temos n-2 possibilidades de sentar-se à mesa.

Esse raciocínio pode se repetir pelas demais etapas, até chegar à enésima etapa, onde se escolherá a pessoa que ocupará a enésima posição (c_n), para a qual restará apenas 1 possibilidade, visto que as demais posições já foram ocupadas em etapas anteriores.

Podemos resumir esse raciocínio no seguinte esquema:



Utilizando o PFC, obtemos a seguinte conclusão: a permutação de n objetos, denotada por P_n é dada por:

$$P_n = n.(n-1).(n-2).(n-3).\dots.2.1 = n!$$

Então,

$$P_n = n!$$

As permutações com repetições (completas) apresentam elementos repetidos, mas ainda ordenados. Sendo assim, quando os elementos de um conjunto se repetem, as permutações entre esses elementos não geram novos agrupamentos; portanto, é necessário desconsiderar os agrupamentos repetidos no cálculo do resultado final.

O número de permutações de n elementos, com alguns repetidos (n_1, n_2, n_3,..., n_k) vezes, é calculado pela relação:

$$P_n^{(n_1,n_2,n_3,\dots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\dots n_k!}$$

Nesse caso, o denominador da fração representa os conjuntos formados pelos agrupamentos repetidos, que devem ser descontados no resultado final.

3.3. Arranjos

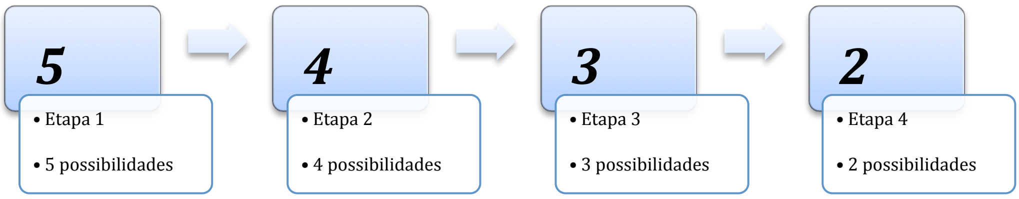
Para chegar à generalização do arranjo simples, partiremos da técnica do PFC. Entende-se por arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, qualquer conjunto ordenado de *p* elementos que não se repitam entre os *n* elementos tomados. *Arranjos simples* diferem das permutações simples por tratar-se de uma quantidade p, $p < n$, de elementos de um conjunto contendo *n* elementos. Ou seja, o número de elementos do conjunto é maior que a quantidade de elementos a ser arranjados.

Nos basearemos no problema anterior, em que uma família senta-se ao redor da mesa. Nesta segunda situação, imaginemos que a família contém *n* integrantes a mais que o número de cadeiras disponíveis. Sendo assim, de quantas maneiras distintas a família inteira poderia sentar-se ao redor da mesa? No entanto, definiremos agora que existem cinco pessoas para sentarem a uma mesa de quatro lugares. Observa-se que, neste exemplo, há mais pessoas que lugares, sendo assim, obtemos o seguinte: para C1 temos cinco opções de pessoas para sentar; sentada uma, restam quatro opções para C2, três opções para C3 e duas opções para C4. Ou seja, 5 x 4 x 3 x 2, totalizando 120 possibilidades distintas da família de sentar-se à mesa.

Utilizando o PFC para resolver esse problema, teríamos as seguintes etapas:

<u>1ª etapa:</u> escolher a primeira pessoa a sentar-se na primeira cadeira (C_1), havendo, então, cinco possibilidades.
<u>2ª etapa</u>: escolher a segunda pessoa para sentar-se em C_2, restando, então, agora quatro possibilidades.
<u>3ª etapa</u>: escolher a terceira pessoa para sentar-se em C_3, restando, então, 3 possibilidades
<u>4ª etapa</u>: nesta etapa restam apenas duas pessoas para sentar-se na última cadeira restante.

Esquematizando o raciocínio, temos:



Podemos perceber que este exemplo totaliza 120 possibilidades. Neste exemplo, percebe-se, também, que a utilização dos mecanismos de enumeração e da árvore das possibilidades torna-se inviável, por tratar-se de um número bastante grande de possibilidades. Ao perceber os padrões multiplicativos, o sujeito passa a operar no plano das ideias.

Denomina-se arranjo simples dos *n* elementos tomados *p* a *p*, ($A_{n,p}$), todos os subconjuntos ordenados, formados pelos *p* elementos pertencentes ao conjunto de *n* elementos. Em suma, dado um conjunto de *n* elementos, podem-se formar agrupamentos ordenados de até *p* elementos distintos, desde que $p \leq n$.

Esquematizando, tem-se:

Posições:	1ª	2ª	3ª	4ª	...	p-ésima
Possibilidades:	n	n-1	n-2	n-3	...	n – (p – 1)

Na generalização do problema proposto, nos deparamos com a seguinte situação: de quantas maneiras distintas podem sentar *n* pessoas em *p* cadeiras, sendo *p* < *n*?

1ª etapa: escolher a primeira pessoa a sentar-se na primeira cadeira. Teremos então, n pessoas disponíveis, então n possibilidades.

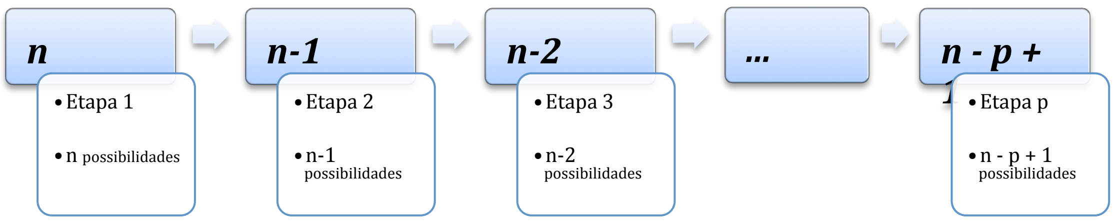
2ª etapa: escolher a segunda pessoa para sentar-se. Nesta etapa contamos com n-1 pessoas, visto que uma já ocupou uma cadeira na etapa anterior.

3ª etapa: escolher a terceira pessoa para sentar-se na terceira cadeira. Já havendo sentado duas pessoas (na primeira e na segunda etapa, respectivamente), restam n-2 possibilidades para esta etapa.

Analogamente, este raciocínio poderia ser repetido nas demais etapas, ou seja, até a p-ésima etapa que o problema propor.

p-ésima etapa: escolher a pessoa que ocupará a p-ésima cadeira. Com uma quantidade inicial de n pessoas e p-1 cadeiras já utilizadas nas etapas anteriores, ficam disponíveis n – (p - 1) cadeiras a escolher. Ou seja, n – p + 1 cadeiras.

O raciocínio descrito pode ser representado da seguinte maneira:



Utilizando o PFC fica fácil observar que a quantidade de diferentes possibilidades de arranjar *n* pessoas em *p* lugares, sendo *p* > *n*, é:

$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2) \ldots (n-p+1)$, obtendo um produto de *p* fatores.

A fim de formalizá-lo matematicamente, podemos multiplicar e dividir a expressão, de modo a não alterar seu valor final, por *(n-p)!*

$$A_{n,p} = \frac{n.(n-1).(n-2) \ldots (n-p+1).(n-p)!}{(n-p)!}$$

Obtemos, então, a seguinte fórmula para o cálculo de arranjo simples:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

De acordo com Sabo (2010), o uso da fórmula não revela os dados do problema, o que não favorece o uso do raciocínio combinatório, visto que essa representação torna-se essencial para que o sujeito construa sua própria formalização.

Note que permutação simples é um caso particular de arranjo simples em que *k* = *n.*

$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$, pois 0! = 1. Portanto $A_{n,n} = P_n$.

Arranjos com repetições (completos) diferenciam-se dos arranjos simples por permitir a reposição ordenada dos elementos extraídos.

3.4. Combinações

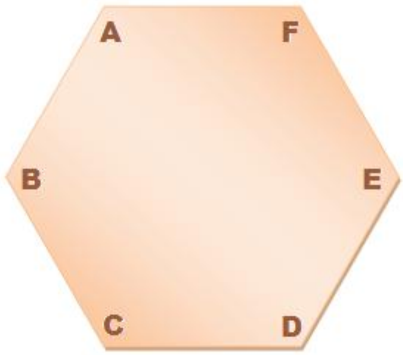
Compreender a diferença entre arranjo e combinação é a principal dificuldade enfrentada por alunos e professores. Na primeira, a ordem dos elementos dos conjuntos formados é relevante para o cálculo das possibilidades, enquanto que na segunda, não. Por exemplo, se pensarmos nos anagramas[7] que podem ser formados com as letras A, B e C, temos: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA, ou seja, a ordem desses elementos é de fundamental importância, pois se alterando a ordem, novos anagramas são formados, totalizando seis anagramas distintos. No entanto, se estivermos falando de vértices A, B e C de um triângulo, constamos que ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA refere-se a um único triângulo. Nesse sentido, a ordem dos elementos não tem relevância para o cálculo das possibilidades.

Na combinação simples, dado um conjunto A de *n* elementos distintos, seus agrupamentos são subconjuntos de *p* elementos com $p \leq n$, porém a

[7] Anagramas são palavras diferentes, mesmo que sem significado, que podem ser formas com as mesmas letras.

ordem dos elementos nos agrupamentos não é relevante, ao contrário do que acontece nos arranjos simples.

Como exemplo, determine a quantidade de triângulos que podem ser formados de maneira que seus vértices coincidam com os vértices de um hexágono regular ABCDEF, conforme figura abaixo.



Observe que os triângulos formados pelos vértices ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA, por exemplo, determinam um mesmo triângulo, não devendo ser considerado como distintos no cálculo final. Assim como esses, os outros triângulos congruentes também não devem ser considerados. É justamente esse detalhe que se observa sobre a relevância da ordem dos elementos agrupados que diferencia as combinações dos arranjos.

A tarefa que o problema nos propõe é a seguinte: dado um conjunto com seis elementos, quantos subconjuntos de três elementos é possível formar? Para resolver esta questão, podemos utilizar as técnicas do PFC e descobriremos que há 6 x 5 x 4 = $A_{6,3}$= 120 possibilidades de agrupar os seis vértices, tomados três a três. Enumerando-os, obtemos:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A B C	A B D	A B E	A B F	A C D	A C E	A C F	A D E	A D F	A E F	B C D	B D E	B C F	B D E	B D F	B E F	C D E	C D F	C E F	D E F
A C B	A D B	A E B	A F B	A D C	A E C	A F C	A E D	A F D	A F E	B D C	B E D	B F C	B E D	B F D	B F E	C E D	C F D	C F E	D F E
B A C	B A D	B A E	B A F	C A D	C A E	C A F	D A E	D A F	E A F	C B D	D B E	C B F	D B E	D B F	E B F	D C E	D C F	E C F	E D F
B C A	B D A	B E A	B F A	C D A	C E A	C F A	D E A	D F A	E F A	C D B	D E B	C F B	D E B	D F B	E F B	D E C	D F C	E F C	E F D
C A B	D A B	E A B	F A B	D A C	E A C	F A C	E A D	F A D	F A E	D B C	E B D	F B C	E B D	F D B	F B E	E C D	F C D	F C E	F D E
C B A	D B A	E B A	F B A	D C A	E C A	F C A	E D A	F D A	F E A	D C B	E D B	F C B	E D B	F B D	F E B	E D C	F D C	F E C	F E D

Analisando a tabela acima, temos:

Coluna 1: 6 combinações = 3! Combinações de triângulos com os vértices A, B e C, em diferentes ordens.

Coluna 2: 6 combinações = 3! Combinações de triângulos com os vértices A, B e D, em diferentes ordens.

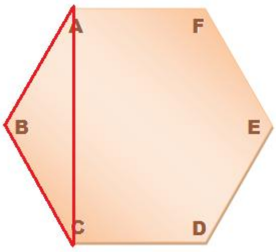
Coluna 3: 6 combinações = 3! Combinações de triângulos com os vértices A, B e E, em diferentes ordens.

...

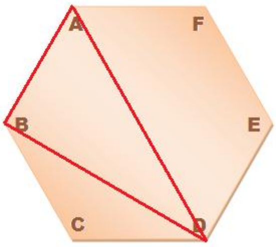
Coluna 20: 6 combinações = 3! Combinações de triângulos com os vértices D, E e F, em diferentes ordens.

Utilizando a técnica da enumeração, conseguimos formar 20 diferentes triângulos. São eles:

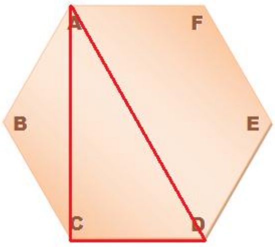
ABC



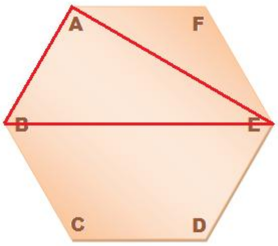
ABD



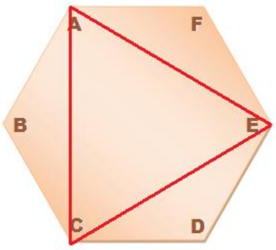
ACD



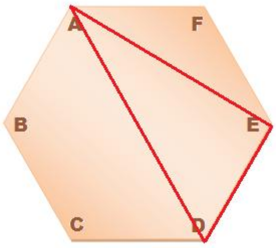
ABE



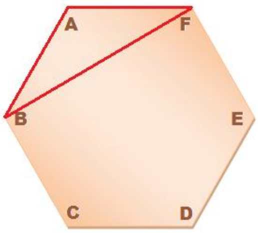
ACE



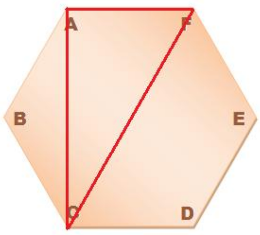
ADE



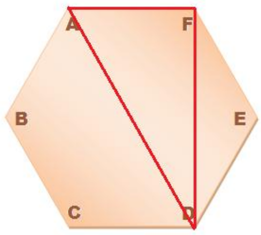
ABF



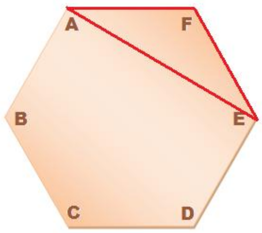
ACF



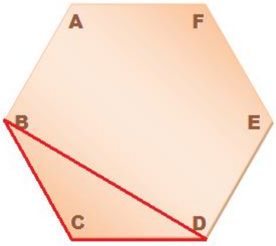
ADF



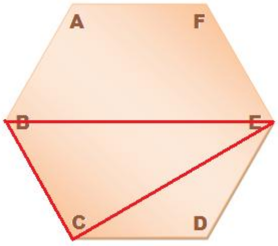
AEF



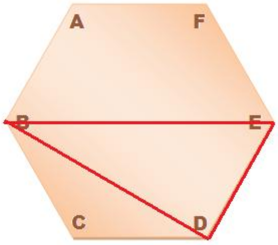
BCD



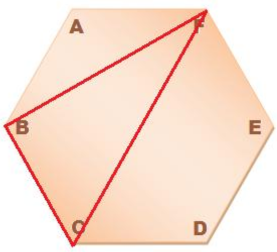
BCE



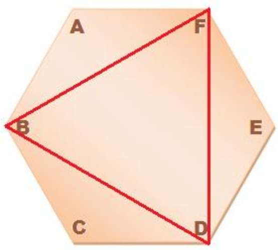
BDE



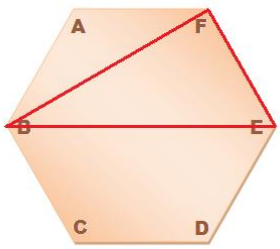
BCF



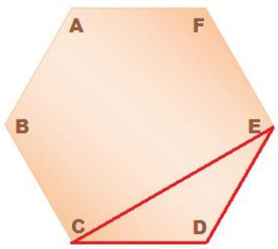
BDF



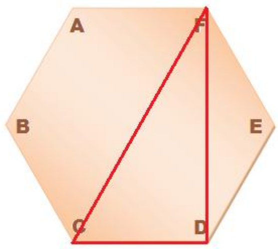
BEF



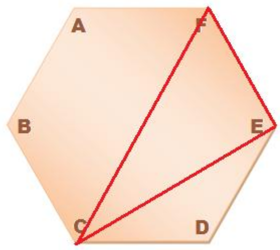
CDE



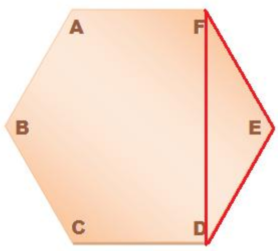
CDF



CEF



DEF



Pelo que foi apresentado, podemos determinar 20 subconjuntos distintos de triângulos formados, cada um contendo três elementos. A permutação desses três elementos (P_3) determina as seis combinações de triângulos, cujos vértices coincidem. Então, das 120 possibilidades de agrupamento listadas na tabela, percebemos que 20 delas foram contadas repetidamente 3! (três fatorial) vezes.

Podemos ver que

$$20 = \frac{120}{6} = \frac{6.5.4}{3!} = \frac{A_{6,3}}{P_3}$$

Pode-se concluir que a divisão do número total de agrupamentos (arranjo) pela permutação da quantidade de elementos repetidos em cada coluna determina o número de agrupamentos para os quais a ordem é relevante.

Denomina-se combinação simples dos *n* elementos de A, tomados *p* a *p* *($C_{n,p}$)*, todos os subconjuntos formados por *p* elementos distintos escolhidos do conjunto A de *n* elementos, valendo a seguinte relação:

Posições:	1ª	2ª	3ª	4ª	...	p-ésima
Possibilidades:	n	n-1	n-2	n-3	...	n – (p – 1)

Sendo assim, obtemos a seguinte relação para a quantidade de grupos compostos por *p* elementos, tomados a partir de um grupo de *n* elementos distintos:

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n.(n-1).(n-2)...(n-p+1).(n-p)!}{(n-p)!}}{p!}$$

Então,

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Observação: Pode-se representar a combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, pelas seguintes notações:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = C_{n,p}$$

As combinações com repetições (completas) diferenciam-se das combinações simples por calcular o número de subconjuntos de *p* elementos que se podem formar de um conjunto de *n* elementos, com possibilidade de existirem elementos repetidos.

Pelos problemas propostos nos itens anteriores, fica fácil observar o quão sutil é a diferença entre problemas de arranjo e combinação. Para solucioná-los, é necessário muito mais que a mera aplicação de fórmulas, é preciso que o sujeito compreenda o problema e tenha certeza de seus mecanismos de cálculo.

3.5. Análise Combinatória no Ensino Médio

> De fato, a pesquisa psicológica mostra que entre os 12 e os 15 anos o pré-adolescente e o adolescente começam a realizar operações envolvendo análise combinatória, sistemas de permutação, etc. (independente do treinamento escolar). Eles não podem, é claro, resolver fórmulas matemáticas, mas podem descobrir, experimentalmente, métodos exaustivos de trabalhar com elas (PIAGET, 1973, p.4).

Sabo (2010) afirma que o cálculo da combinatória exige familiaridade do sujeito com a recursividade e com o princípio de indução matemática.

> [...] analisando a árvore de possibilidades, podemos observar que, para construir os 'ramos' posteriores, necessitamos das estruturas dos 'ramos' antecedentes. Dessa forma, o procedimento de construção repete-se sucessivamente no processo de formação da árvore, ou seja, podemos destacar um procedimento recursivo nesta construção (p.101).

Da mesma maneira, esse raciocínio recursivo acontece quando utilizamos o cálculo do PFC, visto que a identificação da quantidade de possibilidades de cada etapa do cálculo vem de uma análise das possibilidades de uma etapa que se dá de modo análogo à análise da etapa posterior.

Diferentemente do que se pensa, a multiplicação é muito mais que a adição repetida de parcelas iguais. Essa definição por si só não explica a amplitude do conceito multiplicativo. Segundo Backendorf (2010, p. 52-53):

> Pode-se utilizar a adição repetida nos cálculos de multiplicação onde um dos fatores é inteiro, pois a multiplicação é distributiva em relação à adição; no entanto, a adição e a multiplicação são operações com significados distintos e que envolvem também raciocínio de natureza distinta. [...] Enquanto o invariante conceitual do raciocínio aditivo é a relação parte-todo, o invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é a existência de uma relação fixa entre duas variáveis.

Nesse sentido, a relação da multiplicação relaciona constantes de maneira proporcional. Essa proporção está baseada na replicação de aumentar proporcionalmente no outro conjunto cada unidade aumentada no anterior. É isso que caracteriza a relação um-para-muitos do raciocínio multiplicativo.

Para aprender análise combinatória e desenvolver seus algoritmos, é preciso levar tudo isso em consideração; isto é, considerar desde os processos sistemáticos de enumeração até a compreensão de que o raciocínio multiplicativo difere do aditivo e compreender os processos de recursividade envolvidos em cada etapa da resolução do problema.

> [...] os problemas de combinatória são tidos como difíceis de serem ensinados e aprendidos na escola, apesar de resultados promissores de pesquisa sobre o aparecimento dessa forma de raciocínio em crianças pequenas. Além de não ter estratégias imediatas de solução, acarretam incertezas em relação às formas de abordá-los (SOARES e MORO, 2011).

O que também deve ser levado em conta é a dificuldade da própria verificação da solução, uma vez que, dependendo da interpretação que se dá ao problema, a resposta encontrada é diferente e, do mesmo modo, convincente.

Estabelecer as relações entre os elementos que compõem uma situação, levando em conta suas transformações e não apenas o produto final obtido, possibilita a coordenação de conceitos em um raciocínio hipotético-dedutivo, próprio do pensamento formal. Essas relações estabelecidas passam a exigir que o sujeito dissocie os fatores envolvidos isolando-os ou conservando-os um a um, variando-se os demais. Essa sistematização permite que as relações sejam englobadas em um conjunto com todas as possibilidades de combinação e sem que o sujeito tenha dúvida quanto a isso. A combinatória passa a ser realizada de um modo exaustivo, o que não acontece empiricamente, permitindo, então, que o sujeito elabore hipóteses.

Segundo Morgado et al. (1991, p.2),

> Embora a análise combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para a solução.

O raciocínio lógico-matemático é resultado das coordenações das ações ou operações do sujeito sobre os objetos e sobre as próprias ações. É por isso que é impossível ensiná-lo por repetição ou verbalização. A nova estrutura lógica que caracteriza a adolescência, em forma de operações formais, é necessária para resolver problemas de forma sistemática, de modo a obter todos os possíveis resultados e certificar-se de que todos os resultados estão contemplados em sua resolução. Dessa maneira, essa estrutura possibilita a criação de teorias e a constituição do raciocínio dedutivo, partindo de hipóteses prévias, lançadas pelo próprio sujeito, visando a resolver um problema ou uma situação. Da necessidade de resolver problemas percebe-se a grande importância da compreensão da análise combinatória como estrutura formal necessária à ampliação dos mecanismos do pensamento.

Segundo Inhelder e Piaget (1976), a compreensão das operações combinatórias permite o desenvolvimento cognitivo em direção ao pensamento formal. Desta maneira, acredito ser de grande relevância refletir sobre a introdução desse assunto já nos anos escolares iniciais, a fim de que a criança tenha contato com problemas de contagem, iniciando desde já um processo de descrição e enumeração dos casos particulares, a fim de criar suas próprias estratégias de sistematização para que futuramente (no ensino médio ou até antes) formalize suas generalizações.

Em algumas escolas isso já é feito quando se introduz o trabalho com a multiplicação. No entanto, não se percebe essa atividade como comum, visto que os próprios professores podem não se sentir seguros para compreender os mecanismos necessários para se chegar a uma solução.

Trabalhar com a análise combinatória, por meio de resolução de problemas, pode auxiliar os alunos a desmistificarem esse conteúdo, já que utilizam esse tipo de raciocínio para elaborar atividades cotidianas, como tabelas de jogos de futebol. Essa capacidade de tabelar situações se dá sem que os estudantes compreendam formalmente esse conteúdo matemático e sem a intervenção do professor. A sistematização combinatória virá mais tarde, à medida que as estruturas de seu pensamento se modificarem e se reconstruírem, mediante atividades inteligentes organizadas com essa finalidade.

A matemática exige abstrações por parte do sujeito, inclusive sistematizações que facilitem e agilizem a resolução de seus problemas. Essa é uma construção que deve ser feita pelo próprio sujeito; o ensino pode ser importante, mas de forma alguma é suficiente.

Para Becker[8], precisa-se compreender que a capacidade intelectual do adolescente vai muito além do que a escola atual pressupõe. "O adolescente é capaz de raciocínios - combinações de operações - muito mais interessantes, criativos, inventivos e poderosos do que a escola costuma pressupor". É preciso que essa escola passe a levar em consideração essas capacidades e permita aos jovens pensar, discutir e formular hipóteses sobre qualquer tema que atinja, de alguma forma, suas próprias vidas.

Segundo Inhelder, Bovet e Sinclair (1976, p.263), "Aprender é proceder a uma síntese indefinidamente renovada entre a continuidade e a novidade". O grande desafio do professor é elaborar atividades e questionamentos que tenham o intuito de gerar perturbações nas estruturas cognitivas dos alunos, em suas atuais capacidades de assimilação, criando oportunidades de transformação dessas capacidades.

A possibilidade de favorecer o raciocínio sobre problemas elementares pode ser facilmente enfraquecida à medida que alguns professores acreditam estar ajudando seus alunos dando-lhes receitas prontas, passos e regras durante a resolução de problemas combinatórios, não exigindo que o aluno pense sobre eles, inventando estratégias de resolução. Mesmo com a pouca exigência de pré-requisitos técnicos, e suas diversas aplicações empíricas, a resolução de problemas de combinatória fica fadada à aplicação de simples algoritmos.

A combinatória é um conteúdo às vezes considerado difícil, tanto por parte dos alunos, quanto dos professores. Atribuo essa dificuldade a uma possível falha na sua abordagem em sala de aula, desde seus conceitos mais

---

[8] Em e-mail enviado em 22 de novembro de 2010.

elementares, levando em conta a resolução de problemas de modo intuitivo, descrevendo os possíveis agrupamentos e enumerando-os. A construção da árvore das possibilidades ou tabelas de dupla entrada desde os primeiros anos escolares também podem favorecer a construção dessa aprendizagem e o estabelecimento de estratégias de contagem. Essa construção pode permitir que o aluno compreenda, futuramente, a necessidade do uso de fórmulas ou de técnicas cada vez mais sistemáticas, para alguns casos em que o número de elementos envolvidos nos agrupamentos é grande demais para ser calculado de modo exaustivo.

Para explorar esse conhecimento de forma eficiente, é preciso que, ao chegar ao ensino médio, os estudantes já tenham tido experiências intuitivas de contagem como um pré-requisito para a elaboração de raciocínio mais estruturado. Permitir que os alunos pensem e promover o exercício do pensar possibilita que os alunos se tornem construtores de seu próprio conhecimento e, através dele, de seu destino.

4. METODOLOGIA DA PESQUISA

A coleta de dados para esta pesquisa se deu por meio de provas experimentais concretas, que favorecessem ao sujeito a construção de cálculos combinatórios. A aplicação desses experimentos teve inspiração no método clínico piagetiano, que permite intervenções do experimentador questionando o sujeito em busca da compreensão da gênese do seu pensamento a respeito da noção ou conceito em pauta.

As questões formuladas estão de acordo com as respostas dadas pelo sujeito ou por suas atitudes, nas diferentes situações a que estiver exposto, devendo ser analisados todos os aspectos considerados relevantes para a pesquisa.

O método clínico prevê coleta e análise de dados feitos de maneira que possibilite compreender, através da fala e do comportamento, o pensamento dos sujeitos. Compreender o seu pensamento significa compreender "como ele organiza seu pensamento, como ele percebe, age e sente" (DELVAL, 2002, p.67).

O objetivo das perguntas estava voltado a descobrir como o sujeito pensa. A liberdade limitada – no sentido de não fugir dos objetivos – que o método possibilita, permite à entrevistadora dar conta da grande diversidade de possibilidade de respostas e de intervenções que surgiram durante as experiências. A metodologia escolhida para a aplicação e análise dos experimentos exige um grande domínio teórico da experimentadora e uma objetividade segura quanto a sua investigação, à medida que suas hipóteses, acerca do pensamento do sujeito, estiverem em constantes reformulações.

Entendo que investigar com experimentos práticos ativa a operatoriedade do sujeito, favorecendo a sistematização do pensamento, além de possibilitar a compreensão, com maior clareza, dos mecanismos que levam o sujeito à determinada solução. Além disso, possibilita a reflexão do sujeito sobre sua própria ação e, mais ainda, sobre as coordenações de suas ações.

A manipulação dos experimentos permite aos alunos testarem suas hipóteses, refletirem sobre suas ideias e modificá-las, caso entrem em contradições. Além disso, a ação concreta pode auxiliá-los na criação de novas conjecturas que servirão de patamares para novos saberes. A contradição é outra técnica utilizada, para que o próprio sujeito aceite ou refute a nova informação. É papel da experimentadora, acompanhar o desenvolvimento do pensamento do sujeito e ter em mente o objetivo de sua busca.

Dolle e Bellano (2002, p.113) comentam sobre o método clínico como uma evolução da observação pura, pela qual Piaget iniciou suas pesquisas, que procurou, de forma sistematizada, proporcionar conversas livres. Mas não são, unicamente, as respostas dadas pelas crianças às perguntas propostas, mesmo que de forma espontânea, que bastam para Piaget. É importante interferir nessas respostas de modo oportuno, expondo-as a novas perguntas, "tentado sempre clarificar as estruturas de seus pensamentos". As perguntas devem ser feitas de maneira diferente a cada vez, de modo a não induzir determinada resposta, sequer sugeri-la.

O objetivo desta pesquisa é compreender a psicogênese do pensamento combinatório em alunos do ensino médio. Ou seja, compreender como se dá esse pensamento em seus diferentes níveis estruturais. Para isso, observaram-se as tentativas, sejam elas exitosas ou não, na busca pela solução dos problemas apresentados. A hipótese mais geral é de que o pensamento combinatório é construído, passando por diferentes níveis até chegar a sua mais refinada generalização.

4.1. Sujeitos

O método clínico utiliza o critério da saturação para determinar a quantidade de sujeitos. Dessa maneira, foram entrevistados 18 sujeitos, sendo oito alunos de EJA e 10 alunos do ensino médio regular. A partir do momento em que nada de novo, em termos de estrutura, apareceu nas explicações dadas pelos sujeitos, foi encerrada a coleta de dados.

Para registro de imagens e dados, foi solicitada autorização dos responsáveis pelos alunos, sujeitos da pesquisa, em um documento escrito e disponibilizado em anexo, levando em consideração a preservação de sua privacidade e identidade.

Os sujeitos da pesquisa foram selecionados entre os alunos regularmente matriculados no ensino médio regular ou EJA, de uma escola da rede pública; não se fez restrição à idade dos sujeitos participantes. Independentemente de esses sujeitos já terem tido contato com o conteúdo de análise combinatória em qualquer tempo e espaço, o nosso objetivo era compreender como esse raciocínio se desenvolve no sujeito. Ter estudado análise combinatória não pressupõe ter aprendido análise combinatória.

As idades dos alunos pesquisados variavam entre 14 e 47 anos. Todos os sujeitos encontravam-se em processo de escolarização formal, estando em uma das três séries do ensino médio, seja ele regular ou EJA. O convite para participar da coleta de dados desta pesquisa levou em consideração a disponibilidade dos sujeitos.

Tabela 1

Sujeitos da pesquisa por idade, série e nível de ensino

Sujeito	Idade	Ano	Modalidade
A	14	1º	Regular
B	14	1º	Regular
C	15	1º	Regular
D	15	1º	Regular
E	16	2º	Regular
F	16	2º	Regular
G	16	2º	Regular
H	17	3º	Regular
I	17	3º	Regular
J	17	3º	Regular
K	18	1º	EJA
L	22	1º	EJA
M	27	2º	EJA
N	32	3º	EJA
O	36	3º	EJA
P	42	2º	EJA
Q	44	1º	EJA
R	47	2º	EJA

4.2. Procedimentos para coleta de dados

A coleta de dados realizou-se por aplicação e análise de provas experimentais concretas, as quais buscavam criar condições para que o sujeito construísse estratégias combinatórias para suas soluções. Esta metodologia é inspirada no método clínico piagetiano, e, desta forma, as questões efetuadas aos sujeitos estavam relacionadas às respostas dadas anteriormente. O objetivo principal desta escolha é a possibilidade de descobrir como o sujeito pensa, além de acreditar que investigar o pensamento com experimentos práticos possibilita que o sujeito reflita sobre sua própria ação, teste suas hipóteses e as modifique, caso entrem em contradição, surgindo assim, a possibilidade da criação de novas conjecturas.

A coleta de dados foi feita individualmente, com registro de imagens e falas, por meio de filmagem, as quais foram degravadas. As entrevistas foram feitas na escola, durante o período de aula, com a devida autorização do professor responsável. Foi necessária uma sessão para cada sujeito, com duração média de uma hora cada.

Para a coleta de dados foram elaborados três diferentes experimentos, aplicados individualmente em alunos estudantes do ensino médio regular e EJA. As entrevistas foram filmadas a fim de obter maior fidelidade em suas transcrições. Com intervenções constantes, sujeito e entrevistadora mantiveram uma conversa livre, porém com o devido cuidado, da parte desta, de não sugerir respostas, corretas ou não.

Durante a aplicação das provas combinatórias, foram feitos questionamentos e contra-argumentações que exigiam dos entrevistados organizar suas ações em nível mental, recriando-as e modificando-as quando julgavam necessário. A contra-argumentação consiste em argumentar determinada resposta de modo contrário à resposta dada pelo sujeito.

Os alunos foram todos convidados a participar, cabendo a eles a decisão de colaborar ou não com a pesquisa. O aluno que manifestasse interesse em contribuir com a pesquisa era conduzido a outro ambiente, onde permanecia a sós com a experimentadora. Durante o deslocamento, eram explicados os procedimentos práticos para os alunos, como os objetivos da pesquisa, a filmagem da mesma e a necessidade de assinar o termo de consentimento (se maior de idade) ou de levar para os pais assinarem (se menor de idade).

Os experimentos utilizados na coleta de dados estão diretamente relacionados com os exemplos explicados durante a explanação do capítulo referente à análise combinatória, levando em conta a relevância dada pela experimentadora ao desenvolvimento do raciocínio exigido deles.

Após as entrevistas, a experimentadora acompanhava os alunos de volta à sala de aula, retirando mais um aluno que desejasse participar da pesquisa.

4.3. Instrumentos de coleta de dados

A criação das quatro provas se deu a partir de três experimentos por mim criados. A ideia de partir de um problema de menor complexidade para um de maior complexidade possibilitaria que os sujeitos esquematizassem seu pensamento e construíssem sua própria formalização acerca do problema, saindo do plano concreto e avançando para o mundo das hipóteses.

As atividades experimentais privilegiam as ações do sujeito, não só as ações práticas, mas também as ações mentais que vão acontecendo à medida que novos desafios se propõem. Mesmo com as dificuldades e limitações que a materialidade oferece, os questionamentos e proposições podem seguir indefinidamente, em pensamento.

Os instrumentos de coleta de dados têm o propósito de compreender como pensa o sujeito da pesquisa. Foram construídas quatro provas que utilizam material concreto, totalizando três instrumentos distintos. A intenção foi construir provas que levassem ao pensamento combinatório, com suas particularidades em termos de PFC, arranjo, permutação e combinação.

A primeira prova consiste no Princípio Fundamental da Contagem, na qual o sujeito tem de pensar nas possibilidades de caminhos distintos para se locomover de um lugar a outro, variando-se a quantidade de estradas. As duas provas seguintes envolvem os conceitos de arranjo e permutação. Nessa prova, o sujeito depara-se com as possibilidades de distribuir membros de uma família em cadeiras ao redor de uma mesa. Na última prova verifica-se o raciocínio combinatório mais refinado, a combinação, na qual a ordem dos agrupamentos não é relevante. Para isso, o sujeito deve construir as possibilidades de formar triângulos, cujos vértices coincidissem com os cinco vértices de um pentágono.

Diferentemente dos experimentos utilizados por Inhelder e Piaget (1976), os experimentos utilizados nesta pesquisa não permitem que o sujeito tenha conhecimento do seu sucesso ou fracasso por observação empírica. O sujeito age de tal forma para obter as combinações que considera possível, de acordo com seu estádio de desenvolvimento, mas apenas tem certeza disso se conseguir sistematizar sua ação.

Nenhum raciocínio iguala-se, em sua totalidade, de um sujeito para outro. As categorias foram estabelecidas de acordo com as semelhanças de pensamento apresentadas durante as entrevistas.

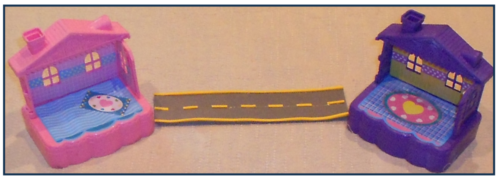
Experimento 1:

Material utilizado: O material utilizado para a confecção desse experimento consiste em quatro representações de casas de material plástico, cada uma de uma cor: Amarela (A), Azul (Z), Rosa (R) e Roxa (X). As estradas que delineiam os caminhos que ligam uma casa a outra são móveis (não-fixas[9]) e foram confeccionados de E.V.A.[10], dando a possibilidade de o sujeito segui-los com o auxílio de um carrinho de brinquedo.

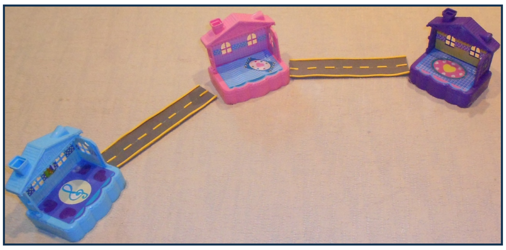
Procedimento: Primeiramente distribuem-se três casas sobre a mesa (A, Z e R), em seguida, coloca-se uma estrada entre A e Z e outra entre Z e R. Sucessivamente vai sendo colocadas mais estradas entre elas. O objetivo desta primeira etapa é que o sujeito compreenda a diferença entre “estradas” e “caminhos”, visto que ligando mais de uma estrada podemos obter um único caminho.

[9] Sugestão dada pelo Prof. Dr. Marcus Basso, a fim de possibilitar a criação de novos questionamentos ao alterar a quantidade de estradas disponíveis entre uma casa e outra.
[10] E.V.A. é a sigla de "Etil Vinil Acetato". É um composto químico de diversos materiais que configuram uma lâmina de borracha não-tóxica que pode ser usada em diversas atividades artesanais.

Etapa 1: Dispostas sobre a mesa as casas R e X e uma estrada entre elas, pergunta-se: quantas estradas existem ligando as casas R e X? E quantos caminhos? Repetem-se com duas, três, quatro estradas até que a experimentadora tenha certeza de que o sujeito compreendeu a diferença entre estradas e caminhos, o que será de fundamental importância para o seguimento da entrevista.



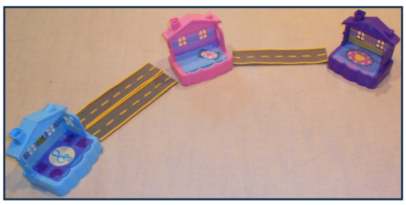
Etapa 2: Dispondo mais uma casa (Z) sobre a mesa, coloca-se uma estrada entre Z e R e outra entre R e X. Pergunta-se: Quantas estradas existem? Quantos caminhos existem que levem de Z a X, passando por R? O sujeito deverá responder, justificando sua resposta e contra-argumentando quando necessário.

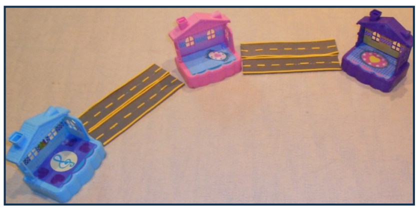


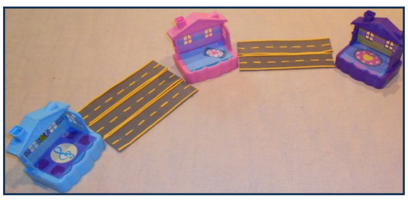
Etapa 3: Colocam-se diferentes quantidades de estradas entre as casas e solicita-se que o sujeito determine a quantidade de possibilidades de caminhos que levem a primeira à última, passando pela do meio.

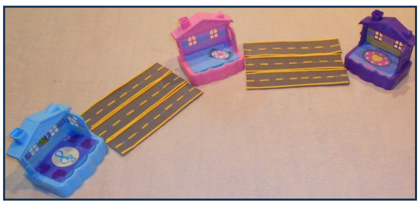
- Qual a maior quantidade de caminhos que podemos ter?

- E se tivéssemos mais estradas?



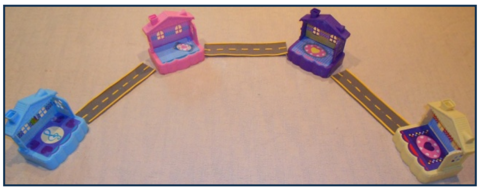
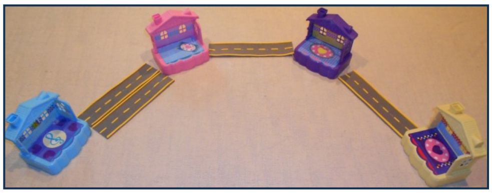
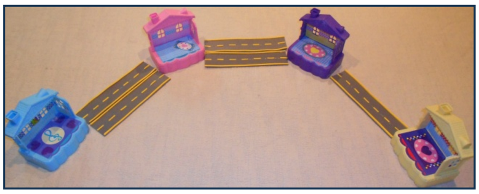
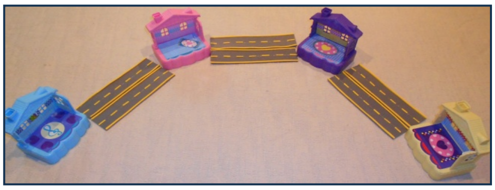
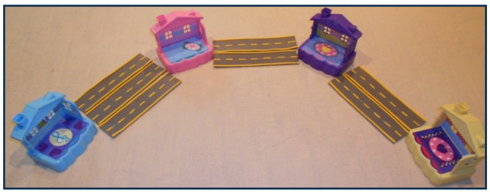






Etapa 4: Coloca-se a quarta casa sobre a mesa e novas estradas que a liguem às demais casas. Repetem-se os questionamentos das etapas anteriores, a fim de compreender a organização do pensamento do sujeito.

- Qual a quantidades de caminhos possíveis?
- Existe alguma relação entre as respostas dadas nas situações?

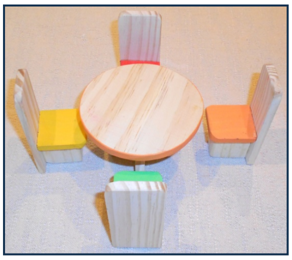







No primeiro experimento, chega um momento em que fica inviável representar a grande quantidade de caminhos de modo empírico. Para ter certeza da quantidade de caminhos que materialmente é capaz de construir, o sujeito precisa, em nível mais elementar, sistematizar seu pensamento por meio de uma representação em forma de árvore ou, em nível mais elevado, estruturar seu pensamento a fim de construir um raciocínio multiplicativo e, assim, generalizá-lo para quantos caminhos seu pensamento é capaz de criar. É essa possibilidade de continuar o pensamento sem o material concreto que caracterizaria um pensamento combinatório formalmente construído.

Para realizar este experimento, no entanto, não se exige que o sujeito já tenha estudado o conteúdo matemático de análise combinatória, requer-se apenas que o sujeito elabore um raciocínio baseado no PFC.

Experimento 2:

Material utilizado: O material utilizado consiste de uma mesa e quatro cadeiras confeccionadas em madeira e cinco bonecos que deverão ocupá-las.



Procedimento: O experimento 2 consiste nas Provas 2 e 3, que buscam determinar a quantidade de maneiras de um grupo de quatro (permutação) ou cinco (arranjo) pessoas sentarem-se a uma mesa de quatro lugares. Para efeito de maior esclarecimento sobre o experimento, discutiremos sobre o primeiro caso (distribuir quatro pessoas em quatro lugares), levando em conta que o raciocínio referente a cinco pessoas é feito de modo análogo. O experimento permite ainda que se trabalhe com uma quantidade menor de elementos, a fim de adequar ao nível de pensamento do sujeito.

Etapa 1: Distribuem-se sobre a mesa quatro cadeiras e quatro bonecos diferentes. Em seguida, pede-se que o sujeito distribua um boneco para cada cadeira. A partir daí pergunta-se: quantas são as possibilidades de configuração diferentes para a família sentar-se à mesa? Caso o sujeito não compreenda a atividade, pode iniciar com duas ou três pessoas e cadeiras.

Etapa 2: altera-se o primeiro problema de modo que haja mais pessoas que cadeiras. Dessa forma faz-se a mesma pergunta: quantas são as possibilidades de configuração diferentes para a família sentar-se à mesa?

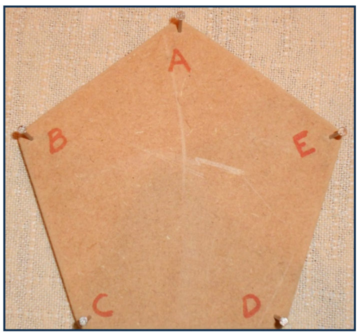
- Existe mais alguma possibilidade que você não contou?
- Como você tem certeza de que contemplou todas as possibilidades?
- É possível saber quantas são as diferentes permutações de pessoas?
- E se houvesse mais cadeiras? E mais pessoas?
- E se não houvesse limitação material?

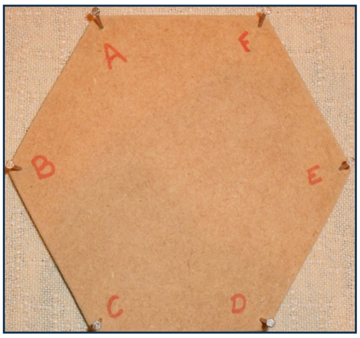
Percebi que esta foi a atividade na qual os entrevistados tiveram maior dificuldade. Acredito que isso se deve ao fato de que os elementos de contagem se movem, permanecendo apenas na memória o registro de cada configuração. É difícil verificar as configurações já formadas quando não esquematizadas de outra maneira, como no papel.

Este experimento está relacionado aos conteúdos de arranjo e permutação, porém não é necessário que o sujeito conheça esses conceitos para desenvolver eficientes mecanismos de cálculo.

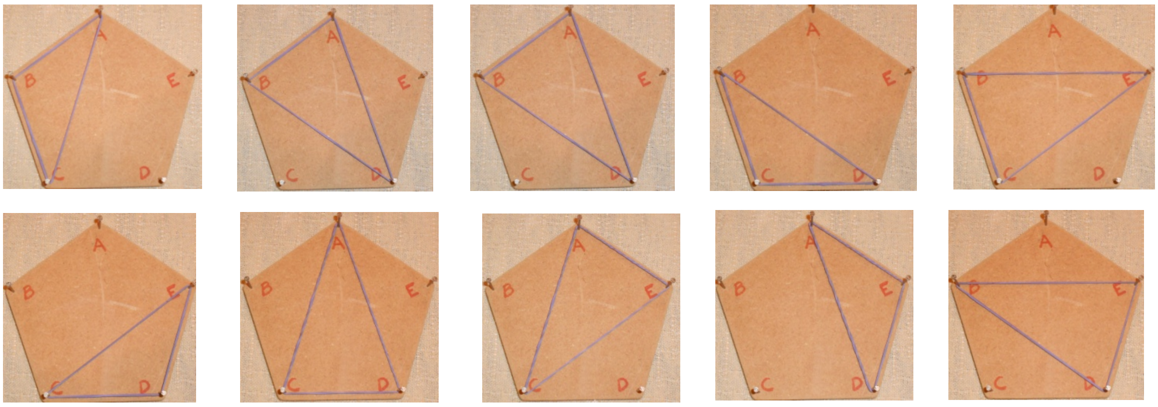
Experimento 3:

Material utilizado: Um pentágono, um hexágono, um heptágono e um octógono regulares, confeccionados em madeira, contendo pregos em seus vértices e atilhos.





Procedimento: Esse material permite que o sujeito, com auxílio de um atilho, consiga formar triângulos, cujos vértices coincidam com os vértices do hexágono. O objetivo é descobrir a quantidade de triângulos diferentes (com vértices distintos) capazes de serem compostos, unindo os vértices de um dos polígonos escolhidos.



- É possível formar mais algum triângulo?
- Como você sabe?
- Nesta conta, há triângulos repetidos?
- Quantos?

– Qual seria a estratégia para contar apenas os triângulos não repetidos?

– Qual a semelhança deste experimento com os anteriores?

O terceiro experimento desenvolvido prevê um raciocínio que exclua as possibilidades que geram resultados equivalentes, conforme já explicado no subcapítulo referente à combinação simples. Esta prova pode ter continuidade com os polígonos com maior quantidade de lados, e, assim, mais vértices disponíveis para a combinação.

É através da estratégia de contagem e da explicação que é possível verificar como o sujeito concebe a enumerabilidade da quantidade de triângulos distintos. Embora os experimentos estejam restritos a situações de quantidades finitas, é possível verificar até que ponto o sujeito consegue trabalhar no plano das ideias, generalizando o seu pensar a fim de aplicar a forma estabelecida e um novo conteúdo apresentado.

A finalidade de questionar sobre as possibilidades para além das que o material permite fazer é observar como os sujeitos fazem a distinção entre o possível real e virtual. Alguns não conseguem fazer essa relação e só conseguem responder à pergunta, utilizando-se do concreto; outros passam a relacionar real e virtual a partir do experimento.

Acredito que com os experimentos elaborados seja possível investigar a maneira como o sujeito estrutura seu raciocínio e como resolve contradições que surgem. A generalização das ações efetuadas durante os experimentos é realizada por tomadas de consciência do sujeito, que, agindo sobre o objeto, possibilita a transformação de esquemas de ação em noções e em operações, que constituem o pensamento combinatório.

5. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

O procedimento de análise dos dados foi feito a partir dos pressupostos da Epistemologia Genética, em se tratando do pensamento combinatório formal descrito por Inhelder e Piaget (1976). Os instrumentos utilizados tiveram grande importância, cumprindo o papel de auxílio na investigação do pensamento combinatório, através da observação interpretativa do pensamento acerca da solução dada pelo sujeito a cada problema proposto.

A partir dos dados coletados com os experimentos, foi possível analisar as respostas de cada sujeito e agrupá-las de acordo com as semelhanças, subdividindo-as em categorias de níveis de pensamento. O mais complicado é perceber quando uma resposta é dada com compreensão ou não.

O Método Clínico tornou cada entrevista única, sendo um desafio tanto para o entrevistado, que se vê diante de uma situação diferente das que está acostumado, quanto para a entrevistadora que se vê tentando acompanhar o pensamento do sujeito, questionando-o e contra-argumentando-o quando necessário.

Conforme decorriam as entrevistas, foram percebidos momentos em que poderiam ter sido feitas intervenções que não foram feitas, ou que, talvez, respostas tenham sido sugeridas. Pequenos detalhes que nos fazem retomar as nossas práticas e reformulá-las nas demais oportunidades. Certamente, se houvesse mais tempo, as entrevistas seriam mais aprimoradas, inclusive a própria análise. Isso não significa negativismo, pois esta é mais uma prova de nosso inacabamento e da necessidade humana de sempre aprender mais.

A análise dos dados coletados, durante as aplicações dos experimentos, ocorreu, após um agrupamento inicial, levando em conta as semelhanças de raciocínio expostos pelos entrevistados no cálculo das possibilidades. Pelas mesmas semelhanças os níveis e subníveis foram delimitados. Nenhum dos entrevistados obteve solução alheia ao contexto proposto. Todos compreenderam a atividade e se utilizaram dos seus mecanismos internos para solucioná-los.

5.1. Apresentação dos dados

Seguem, abaixo, pequenos trechos das entrevistas, partes que considero conterem o cerne da categoria de pensamento do sujeito. Em “itálico e negrito” apresentar-se-á a fala do sujeito, com as devidas correções linguísticas, para facilitar a leitura, mas sem comprometer seu conteúdo. Sublinhados, apresentar-se-ão os questionamentos sugeridos pela pesquisadora no ato da entrevista.

A (14 anos)

Não consegue esquematizar seu pensamento, fazendo algumas combinações aleatórias ou totalmente fixadas no real observado por ele. ***“Eu posso pegar a primeira estrada (A1) e depois a segunda (B1), ou eu posso pegar a segunda estrada daqui (A2) e depois a outra do outro lado (B2)”.*** Não percebe a possibilidade A1B2 e A2B1. No problema das estradas calcula os caminhos sem ter a certeza de estar contemplando todas as possibilidades. ***“Se tem três estradas daqui pra cá*** **(casa Azul à casa Amarela)** ***e mais três estradas daqui pra cá*** **(casa Amarela à Roxa)**, ***tem quatro ou seis caminhos no total, eu acho”.*** Quando solicitado a refazer os caminhos que havia pensado, não consegue chegar à quantidade inicial relatada ou encontra um maior número de caminhos. O seu pensamento é focado no que pode ver e nos caminhos que consegue, aleatoriamente, perceber. Apresenta um raciocínio disjuntivo, no qual ou fixa todas os elementos ou varia-os ao mesmo tempo. No segundo experimento, age da mesma maneira: ***“A mãe senta-se próximo ao filho, porque tem que cuidar dele, mas, às vezes, o pai também pode cuidar, então eles podem trocar de lugar”***. E se o filho não precisar de cuidados especiais, ele pode também sentar-se afastado dos pais, alteraria a quantidade de possibilidades? ***“Acho que não, não sei”***. Vamos tentar? ***“Tá, acho que são três”***. Quais? ***“A mãe aqui (cadeira vermelha), depois o pai aqui (cadeira vermelha) e depois o filho (cadeira vermelha)”.*** No experimento 3, diz que são cinco triângulos, um para cada vértice do pentágono.

B (14 anos)

Esquematiza o pensamento do ponto de vista aditivo, mas não o sistematiza do ponto de vista multiplicativo. À medida que aumenta o número de estradas, consegue perceber que as possibilidades são proporcionais ao aumento, mas quando se aumenta uma casa, por exemplo, a construção tem de ser refeita e percebe-se tratar-se de uma proporção aditiva. ***"Com duas estradas de um lado e duas de outro há quatro caminhos"****.* E se colocar mais uma deste lado? ***"Aí são seis, duas vezes três".*** Agora vamos acrescentar mais uma casa e mais duas estradas. Quantas possibilidades de caminhos ficariam? **"*Ah, não sei, tenho que pensar de novo, daí... Acho que aumentando duas estradas aumentam-se dois caminhos, oito então".*** B ainda consegue organizar seu pensamento de modo a construir as possibilidades quando se trata de até duas variáveis, o que poderia caracterizar um pensamento de relação multiplicativa. No entanto, percebe-se que a esquematização aditiva do seu pensamento permanece quando as possibilidades aumentam. No experimento 2, contendo três cadeiras e três pessoas, afirma que cada pessoa pode sentar em cada cadeira uma vez, o que resulta em ***"três, mais três, mais três. Nove possibilidades"****.* No experimento 3, faz alguns triângulos aleatórios e não consegue afirmar se tem certeza de que são todas as possibilidades.

C (15 anos)

Chega ao Princípio Multiplicativo durante a aplicação do primeiro experimento e nos demais faz combinações com indícios de tentar uma sistematização mais segura. Não vê como suficiente o cálculo aleatório e faz uma leitura sistemática da ação física efetuada, mas sem verificação de hipóteses. Não encontra semelhanças entre os experimentos a não ser o fato de ter que calcular as possibilidades**. *"Eu posso deixar a mãe na primeira cadeira sempre, daí troco os outros, assim* [mostra com os objetos], *depois faço a mesma coisa com o pai e o filho".***

D (15 anos)

D consegue sistematizar seu pensamento de modo a encontrar todas as possibilidades e acredita existir uma lei geral. No experimento 1, consegue sistematizar de modo a encontrar solução a todos os problemas semelhantes. ***“Com três casas multiplica-se a quantidade de estradas entre elas”.*** E com mais casas? ***“Continuo a multiplicar”.*** Como é que tu explicas isso? ***“Para cada nova estrada aumenta outra possibilidade de caminho para cada estrada já existente”.*** E se contássemos de trás para frente [iniciando da última casa], alteraria a quantidade de caminhos? Inverte as estradas e, ao perceber manter a relação, generaliza a nova construção. Nos demais experimentos, consegue chegar ao êxito pela sistematização e pela combinação de combinações entre elementos, mas não encontra lei única que os explique.

E (16 anos)

Ao pensar que, se houvesse mais estradas, tantos mais caminhos haveria, de modo proporcional, indica que já pensa por hipótese e busca a formalização do seu pensar em uma relação proporcional. Quantas estradas precisas para ter nove caminhos? ***“Três de um lado e três de outro”.*** Teria outra maneira? ***“Não, pois o nove só é divisível por três e por nove”.*** Embora não tenha pensado na relação um para nove, o sujeito demonstra que compreendeu e generalizou a situação, estendendo sua solução para além do observável. Fez o mesmo no experimento 2, onde **“*Posso fixar um familiar em uma cadeira e variar os outros*”**, mas quando outra variante era acrescentada, o raciocínio era reconstruído. Ou seja, as situações não eram consideradas como pertencentes a um conjunto maior e, sim, como situações isoladas. E se aumentarmos a quantidade de vértices, como neste hexágono, por exemplo? ***“Quanto mais vértices mais triângulos”.*** Quantos mais? ***“Daí preciso contar”.*** **Mas tu achas que existe uma maneira de calcular sem precisar contar*?*** *“Acho que sim, mas não sei qual é”.* Faz uma leitura sistemática dos fatos**.** ***“Todos começam com A, pois é o sentido que eu tô fazendo aqui. No sentido deles. Daí comecei a ver as possibilidades com o A e depois com o B que não tinham lá e algumas situações diferentes também”.*** Tu achas que

repetiu algum triângulo? ***“Tenho certeza que não repeti, pois dei uma olhada nas palavras [sequência de letras formada pelos vértices], mas eu tô me achando e vendo mais algumas possibilidades”.*** Quantas tu achaste? ***”Dez possibilidades, mas agora fiquei na dúvida se tem mais alguma”.***
F (16 anos) Apresenta clara sistematização das combinações encontradas, mas não sente necessidade de generalizá-la. **“*Sei que se eu for sempre por [estrada] poderei ir pelas outras, depois posso trocar*”**. E se contasses ao contrário [da direita para a esquerda]? ***“Posso contar daqui pra cá ou de lá pra cá que dá na mesma”.*** Demonstrando a relação de reciprocidade. ***“Preciso cuidar para não contar a mesma forma [disposição dos bonecos] duas vezes”.*** E como tu podes ter certeza? ***“Tenho que cuidar para não repetir”.*** No último experimento consegue sistematizar a solução, embora não encontrando todas as possibilidades. ***“Primeiro vou fazer os triângulos com [vértice] A”.*** Faz ABC, ABD, ABE, ignorando os triângulos ACD, ACE e ADE.
G (16 anos) Conseguiu operar além do real observado no experimento 1, chegando até uma pequena extensão do real, multiplicando a quantidade de estradas para encontrar a quantidade de caminhos, enquanto havia três casas. Mas, nos experimentos 2 e 3, fez apenas combinações aleatórias. Como tu pensas para fazer? ***“Nada, eu só vou trocando [os bonecos de lugar], cuidando para não repetir”.*** As possibilidades são as possíveis de serem apontadas.
H (17 anos) Está transitando em momentos de sistematizações de pensamento e formulação de lei geral, mas sua estrutura de pensamento parece ainda não permitir pensar hipoteticamente. Escolhe um dos caminhos para fixar e modifica os demais, mas esquece de variar inclusive o caminho fixado, combinando com os demais. ***“Esse caminho eu deixo parado, só combinando com os outros, pois este não faz nada”.*** Como é que tu sabes que esse caminho não faz nada? ***“Não sei, acho que deve haver uma regra, mas não é sempre a mesma”.***

I (17 anos)

O pensamento sistemático já demonstra a necessidade de não contradição. ***“São dois*** **[caminhos]** ***para cada uma dessas*** **[estradas]”.** E se eu colocar mais uma? ***“Nove, por que para cada uma dessas vou ter três dessas” [explicação espontânea]****.* Tem algum jeito de organizar teu pensamento sem ter que contar toda vez? ***“Acho que é questão de multiplicar”.*** A necessidade do registro em papel já demonstra a vontade de organizar as possibilidades, de maneira a contemplar todas ou mesmo para não repeti-las. Faz as mudanças no material concreto e verifica no papel. Quantas possibilidades? ***“Seis”*****.** E se houvesse mais um boneco? ***“Daí, para cada troca ele poderia estar em um lugar diferente, totalizando seis vezes quatro”.*** E dá para generalizar esse pensamento para um monte de bonecos e cadeiras? Pensa muito, mas não consegue chegar a uma conclusão precisa. Na atividade dos triângulos tem um raciocínio sistemático, mas ainda não encontra todas as possibilidades.

J (17 anos)

Na situação três casas e três estradas, utiliza a estratégia da multiplicação. ***“Para cada uma [estrada] eu posso pegar outra de três maneiras”.*** E a lógica continua quando a quantidade de caminhos não for igual? ***“Sim, neste caso, quatro vezes três, dá doze caminhos”.*** *No experimento 2, diz****: “é como as estradas, mantém-se a primeira e mudam-se as outras duas, depois se volta para mudar a primeira”.*** Enumera as possibilidades. Manipulando o hexágono consegue chegar à conclusão de que a quantidade de triângulos está relacionada com a quantidade de vértices, a partir do cálculo das possibilidades de criação de triângulos, mas ainda não chega a uma fórmula combinatória para o último experimento.

K (18 anos)

K não descola da materialidade em nenhuma das provas, apresentando respostas mágicas, de combinação aleatória. Desviou do problema inventando novos problemas relacionados ao real. ***“Não sei bem quantos caminhos, pois depende também se as estradas estão boas”.*** E se todas estiverem boas, o que preciso fazer para ter mais caminhos? ***"Mas nunca todas vão estar boas***". O mesmo tipo de pensamento surgiu no experimento seguinte: ***"Para sentarem-se à mesa eles precisam ter afinidade um com o outro. Não é bem assim, para sentá-los em qualquer lugar".***

L (22 anos)

L descola seu pensamento da materialidade, porém não admite a infinidade de possibilidades: ***"Podes fazer mais, talvez mais umas dez, vinte vezes, até mais".***

M (27 anos)

Com quatro faixas, duas entre cada duas das três casas, o sujeito encontra dois caminhos. ***"Dois caminhos, pois são dois diferentes e este é igual".*** Relatando que pegar a mesma estrada implicaria em um caminho igual ao anterior, mesmo que a outra estrada fosse diferente. ***"Os caminhos são este ou este, pois iria passar pelo mesmo".*** Depois de várias tentativas com diferentes quantidades de estradas, consegue: ***"são nove caminhos, pois tem três estradas aqui, daí cada estrada dá pra pôr estas três*** **[estradas]*, daí multiplica".*** Com quatro casas não consegue utilizar o mesmo pensamento sistemático. Responde com êxito, utilizando-se do Princípio Multiplicativo, mas não consegue apontar a quantidade total de caminhos. ***"A lógica existe... Multiplicar. A regra é continuar multiplicando. Mostrar é bem difícil".*** *Não teria como mostrar os caminhos?* "***Falta mostrar dois. Eu estava comparando, mas não consigo".*** No experimento 2, começa a trocar os membros da família de lugar para ver as possibilidades. ***"Existem três maneiras".*** Mostra quatro. Passa a anotar suas relações ao mesmo tempo em que manipula os bonecos. ***"É, são quatro maneiras".*** Existem mais algumas? ***"Não tem mais".*** E como tu pensaste isso? ***"Fui trocando pra saber".*** No experimento 3, encontra oito triângulos.

N (32 anos)

Prende-se ao real, organizando seu pensamento de acordo com situações reais de direção. ***"Não posso mudar a faixa, pois não há rotatória".*** Vamos imaginar que ela existe, pois aqui nossa preocupação é encontrar possibilidades. ***“Então são dois caminhos”.*** Podes me mostrar? ***“Tô fazendo um pensamento de estrada, de trânsito. Aí tem duas situações: eu poderia usar uma faixa destas duas pra ir e as outras duas pra voltar ou eu posso usar, como se tivesse um rio aqui no meio e usar as faixas separadas, daí eu teria praticamente dois caminhos”.*** Então são quantos caminhos? ***“Dois caminhos. Não vejo mais nenhum que seja claro”.*** E se aumentarmos uma estrada? ***“Agora tem três caminhos, aliás, pode ter até seis se contar ida e volta”.*** Não consegue antecipar. Quando solicitado que faça, precisa constatar empiricamente no experimento. **“Deve ter uns doze caminhos. Não, nove caminhos [após testar possibilidades]”.** No experimento 2, procura respostas que considera matematicamente coerentes, mas não se prende ao raciocínio combinatório. Para sentar de maneiras distintas três pessoas em três cadeiras, ***“existe cinco maneiras, pois se tivesse uma cadeira sobrando seria seis”.*** Consegue mostrar cinco possibilidades. Como tu fizeste isso? **“*Só troquei eles de lugar. Eu pensei na matemática, pois tem três lugares, eles têm que estar sempre num número ímpar. Nunca vai dar número par*”.** No experimento 3, faz alguns triângulos aleatórios e afirma não saber encontrar todos.

O (36 anos)

Depois de algumas tentativas empíricas: ***“Tô multiplicando, pois achei mais fácil. Tô usando uma teoria que para cada caminho eu multiplico por um destes. Foi daí que eu parti para a multiplicação”.*** Mesmo quando a quantidade de caminhos aumenta, o aluno tem dificuldade em mostrar os caminhos, mas segue convicto da quantidade que deve ser e vai em busca da verificação. Quando acrescentada mais uma casa, pergunta-se se ele calcularia da mesma maneira. ***“A regra continua valendo”.*** No segundo experimento, verifica que: ***“São três lugares e um lugar pode estar sempre com a mesma pessoa”.*** Há uma tentativa de criação de regra, mas ainda muito frágil por não compreender os fatores envolvidas. Quero que me digas inicialmente (depois de tentativas) quais são os fatores que intervêm neste cálculo. ***“A quantidade de pontas”.***

P (42 anos) Começa a construir seu raciocínio já sobre um pensamento multiplicativo. Na situação de organizar três pessoas em três cadeiras, utiliza o cálculo de permutação de modo correto e sabe enumerar sistematicamente, mas não tem certeza se funciona para qualquer quantidade de pessoas e cadeiras. Faz o cálculo dos triângulos utilizando a fórmula de combinação, encontra vinte, e não dez. Não consegue sistematizar para fazer empiricamente. Percebe-se que o êxito está relacionado à memorização, mas o raciocínio combinatório até então construído não acompanha os cálculos. ***"Acho que deveriam ser cinco, pois não pode repetir as letras [vértices]".***
Q (44 anos) Confunde a quantidade de estradas com a quantidade de caminhos*. "***Na real só tem dois caminhos: ou saindo pela frente ou pelo lado dela [casa]"*. Mas digamos que só podemos sair pela frente. O que está em questão é a quantidade de caminhos relacionados à quantidade de estradas. ***"Até a [casa] roxa tu tens dois caminhos, mas até a [casa] amarela tu tens um [caminho], então tu tens três caminhos ao total".*** Com dois caminhos entre cada uma das três casas ele afirma ter quatro caminhos, mas, ao mostrá-los, encontra apenas dois. As possibilidades aumentam a cada caminho a mais, mas não há uma proporção nesse aumento. A totalidade está relacionada às possibilidades que o sujeito consegue observar. No segundo experimento, parte para combinações aleatórias, repetindo diversas vezes o mesmo arranjo, mas não se desequilibra com as contradições. ***"Tenho certeza de que não estou repetindo. Estou indo pelo tamanho, pela classificação: masculina, feminina".*** Como tu estás pensando para formar os triângulos? ***"Eu penso como se eu estivesse fatiando a peça. Sim, tô usando uma lógica, mas tá difícil, acho que são poucas".***
R (47 anos) R não consegue nem perceber que a quantidade de caminhos está relacionada à quantidade de estradas. *Quantos caminhos**?*** ***"Não sei, depende por aonde***

se quer ir". Por qualquer um. ***"Ah, não sei, eu viria por aqui, pela frente. Acho que não teria outro caminho"***.

5.2. Análise dos dados

Deparei-me, no início da análise, com a seguinte dificuldade: as respostas dos sujeitos revelavam um raciocínio construído, o resultado de uma memorização mecânica ou simplesmente uma resposta sem reflexão? A resposta a essa pergunta poderia ser dada por intervenção baseada no método clínico, pois se tratava de verificar como os sujeitos constroem o raciocínio combinatório. As noções que apareceram na análise dos dados são muito distintas entre os sujeitos e mesmo entre as provas. Para que essa noção se tornasse um conceito, era necessária uma tomada de consciência da ação (PIAGET, 1975).

Para categorizar as respostas dos sujeitos e separá-las em níveis de raciocínio, foi necessário rever todas as gravações das entrevistas por diversas vezes, olhando cada detalhe da fala e do comportamento dos sujeitos, para, somente então, chegar aos três níveis distintos, conforme a semelhança dos pensamentos dos sujeitos, o que leva à confirmação da hipótese inicial da pesquisa. Piaget utiliza modelos lógicos para representar a estrutura do pensamento. "Os modelos são abstrações que visam apreender a essência do pensamento" (PARRA, 1983, p.21). Ou seja, os modelos lógicos por ele estudados tendem a representar a essência e não cópias do pensamento do sujeito.

Conforme relatam no prefácio de seu livro, Inhelder e Piaget (1976) verificaram a possibilidade de criar categorias que caracterizassem as modificações de pensamento ocorridas na adolescência, utilizando-se de métodos experimentais e verificações sistemáticas. Dessa maneira, foi possível configurar uma estruturação operatória "fundada sobre a lógica das proposições e sobre um pensamento 'formal'". Deixa-se claro que os níveis e subníveis estão relacionados às noções avaliadas (e não outras), podendo o sujeito estar em diferentes níveis de pensamento tratando-se de noções diferentes.

Ou seja, nesta pesquisa, não foi feita uma avaliação para verificar o nível de pensamento do sujeito em toda sua complexidade, mas que os níveis, abaixo descritos, referem-se à noção estudada através dos experimentos. Embora, muito provavelmente, os níveis encontrados em relação às noções de combinatória repitam-se em outras áreas, estas não foram avaliadas de forma sistemática e, por isso, não podemos afirmar que aconteçam. Ou seja, não interessa, aqui, analisar os sujeitos, mas o que interessa é analisar as respostas do sujeito quanto à noção de análise combinatória.

NÍVEL I

Ausência de sistematização multiplicativa

Os sujeitos do Nível I contextualizam suas respostas, embora sem indícios de raciocínio combinatório em seu esforço para encontrar a solução do problema. Neste nível, os sujeitos baseiam-se em abstrações empíricas e pseudo-empíricas, muitas vezes de maneira aleatória. Os elementos são associados dois a dois, não havendo indícios de sistematizações multiplicativas. As explicações são pré-causais, vinculadas ao mundo real.

Os sujeitos descrevem o que podem ver (abstração empírica e pseudo-empírica), não se utilizando de organizações seriadas ou classificatórias. Para os casos mais simples, as multiplicações se dão, de certa forma, por pequenas organizações estruturadas. No entanto, cada vez menos sistemáticas, quanto maior o número de variáveis a ser dissociadas. Os sujeitos se satisfazem com explicações diferentes e, até, contraditórias entre si. Ficam indiferentes frente à contradição, pois, mesmo testando suas hipóteses em diversas tentativas, os sujeitos não coordenam estes resultados. Não procuram tornar dedutível o real. Acreditam que o acaso é que determina as possibilidades, e nem imaginam que situações semelhantes geram resultados semelhantes.

Os sujeitos deste nível de pensamento não buscam, ainda, uma explicação única e não contraditória para os problemas de combinatória. Estando em um nível de pensamento pré-operatório, tratando-se das noções avaliadas pelo experimento, esses sujeitos podem apresentar êxito ou fracasso na ação prática, porém, desconsideram os mecanismos que os levaram para tal solução. Buscam o resultado, não mostrando consciência do processo. Não buscam a interiorização de suas ações (INHELDER e PIAGET, 1976, p.4).

Subnível IA: ausência de sistematização

Os sujeitos do subnível IA fazem associações aleatórias, relacionando combinações de modo não sistemático. O sujeito **A** só admite caminhos “retos”, deixando de lado algumas combinações: **“*Eu posso pegar a primeira estrada (A1) e depois a segunda (B1), ou eu posso pegar a segunda estrada daqui (A2) e depois a outra do outro lado (B2)”.*** Não consegue sistematizar seu pensamento a fim de afirmar o conjunto de possibilidades e verificá-las, não encontrando as possibilidades A1B2 e A2B1, por exemplo. **“*Se tem três estradas daqui pra cá* (casa Azul à casa Amarela) *e mais três estradas daqui pra cá* (casa Amarela à Roxa)*, tem quatro ou seis caminhos no total, eu acho”.*** Saberias me mostrar estes caminhos? ***“Ih, acho que só tem três mesmo”.*** **A** não é capaz de retomar seu pensamento, enumerando as mesmas combinações, cada vez que solicitado.

Esse pensamento não consegue trabalhar com hipóteses, nem formalizar uma comprovação. No segundo experimento, **A** dá explicações totalmente empíricas e pré-causais. **“*A mãe senta-se próximo ao filho, porque tem que cuidar dele, mas às vezes o pai também pode cuidar, então eles podem trocar de lugar”.***

K desviou do problema, inventando novos problemas relacionados ao real. ***“Não sei bem quantos caminhos, pois depende também se as estradas estão boas”.*** E se todas estiverem boas, o que preciso fazer para ter mais caminhos? ***“Mas nunca todas vão estar boas”.*** O mesmo tipo de pensamento surgiu no experimento seguinte: ***“Para sentarem-se à mesa eles precisam ter afinidade um com o outro. Não é bem assim, para sentá-los em qualquer lugar”.***

No segundo experimento, parte para combinações aleatórias, repetindo diversas vezes o mesmo arranjo, mas não se desequilibra com as contradições. ***“Tenho certeza de que não estou repetindo. Estou indo pelo tamanho, pela classificação: masculina, feminina”.***

R não consegue nem perceber que a quantidade de caminhos está relacionada à quantidade de estradas. ***“Quantos caminhos? Não sei, depende por aonde se quer ir”.*** Por qualquer um. ***“Ah, não sei, eu viria por aqui, pela frente. Acho que não teria outro caminho”.*** Os outros experimentos não foram feitos, visto que, sem uma pequena noção de princípio multiplicativo, torna-se inviável pensar nos demais problemas.

Subnível IB: sistematização aditiva

Os sujeitos deste nível utilizam a adição como técnica de sistematização. À medida que são acrescentados elementos, o sujeito soma essa quantidade às combinações já efetuadas. As soluções se limitam a uma adição sem compreensão. Neste nível, os sujeitos mantêm um raciocínio subordinado ao conteúdo concreto, uma vez que as combinações possíveis são as que pode ver, mesmo que não fisicamente, mas enquanto pensamento.

Esse pensamento está, pois, dominado pela percepção. Os sujeitos não se afetam com a contradição ao perceberem a existência de outro caminho, não contabilizados anteriormente como possibilidade. Explicações diferentes, e mesmo contraditórias satisfazem, embora muito menos que no subnível IA. A sistematização aditiva vem de uma indiferenciação entre as variáveis.

B esquematiza o pensamento do ponto de vista aditivo: ***“Acho que aumentando duas estradas, aumentam-se dois caminhos, oito então”.*** **B** ainda consegue organizar seu pensamento de modo a construir possibilidades, quando se trata de até duas variáveis, mas quando essas quantidades aumentam, não consegue pensar da mesma forma, tendo certeza de que não existe nenhuma outra possibilidade de caminho. ***“Não, são só esses [caminhos] mesmo, eu contei.”*** No experimento 2, contendo três cadeiras e três pessoas, afirma que cada pessoa pode sentar em cada cadeira uma vez, o que resulta em ***“três, mais três, mais três. Nove possibilidades”.*** No experimento 3, faz alguns triângulos aleatórios e não consegue afirmar se tem certeza de que são todas as possibilidades.

Q reconhece que as possibilidades de caminhos aumentam a cada nova estrada acrescentada, mas não há uma proporção multiplicativa neste aumento, já que "[...] as proporções supõem as operações de segunda potência e podemos dizer o mesmo da lógica das proposições" (INHELDER e PIAGET, 1976, p.191). A totalidade restringe-se às possibilidades que o sujeito consegue observar.

N prende-se ao real, organizando seu pensamento de acordo com situações reais de direção. ***"Não posso mudar a faixa, pois não há rotatória".*** Vamos imaginar que ela exista, pois aqui nossa preocupação é encontrar possibilidades. ***"Então são dois caminhos".*** Podes me mostrar? ***"Tô fazendo um pensamento de estrada, de trânsito".*** Então são quantos caminhos? ***"Dois caminhos. Não vejo mais nenhum que seja claro".*** E se aumentarmos uma estrada? ***"Agora tem três caminhos, aliás, pode ter até seis, se contar ida e volta"*****.**

Mesmo que se tente mostrar para o sujeito do nível I mais uma possibilidade, isso não basta para que modifique sua estrutura lógica. A experiência física pode ser importante, mas nunca suficiente para modificar uma estrutura de pensamento, ou seja, ela não pode ser obtida por reforço externo, pois o sujeito deve estar pronto também internamente para responder ao estímulo externo, por ocasião da experiência. Dessa forma, os experimentos, por si só, não são capazes de alterar ou corrigir o pensamento do sujeito. Para conciliar suas explicações em uma única totalidade que englobe todas as possibilidades, é necessário que suas ações sejam interiorizadas e que essas operações se tornem conscientes.

A experimentação é dada por tentativa e erro e de forma não sistematizada, da mesma maneira como demonstrado por Inhelder e Piaget (1976), quando os sujeitos do nível I não dissociavam os fatores envolvidos, apenas os agrupavam em determinada classe ou ordem, conforme a observação dos seus resultados, sem que nenhuma técnica de restrição de variáveis fosse aplicada. As relações entre os caminhos, lugares ou triângulos são construídas pelas próprias ações, mas sem consciência das mesmas. Os sujeitos realizam as atividades, às vezes até com êxito, mas não compreendem os processos que os levaram ao êxito. Às vezes se contradizem, preferindo fugir do problema a responder à contradição.

A preocupação desses sujeitos restringe-se a responder o que lhe for perguntado e não a refletir sobre sua própria resposta. É o fazer antes do compreender (PIAGET, 1978). "A necessidade é a expressão de uma lacuna, ou, em outras palavras, de um desequilíbrio, enquanto que a satisfação da necessidade consiste em uma reequilibração" (PIAGET, 1978, p.182). Neste nível, o sujeito não sente necessidade de compreender suas ações; centra-se apenas nos seus resultados.

NÍVEL II

Início da sistematização multiplicativa

Enquanto operatório concreto, em relação a este problema, o sujeito deste nível é capaz de ordenar e seriar adequadamente as variáveis, mas não consegue dissociá-las, fazendo-as variar ao mesmo tempo; isso torna impossível a verificação correta da solução. Os sujeitos do nível II, diferentemente dos do nível I, não ficam limitados apenas à ação prática e buscam interiorizar os mecanismos utilizados nesta ação na medida em que buscam apropriar-se das próprias ações. Mas, "a ausência de um sistema combinatório faz com o que o sujeito desse estádio caminhe passo a passo, realizando ligações parciais, sem chegar a relacionar cada uma dessas reuniões com as demais" (PARRA, 1983, p.23). Ou seja, da mesma forma que o sujeito operatório concreto não chega a retirar dessas ações uma correspondência geral que possa levá-lo a uma organização combinatória formal.

É no Nível II que ocorrem as primeiras aproximações da solução combinatória mais geral, embora ainda não sejam utilizados procedimentos de enumeração sistemática. Os sujeitos possuem um pensamento parcial, ou seja, conseguem esquematizar seu pensamento de modo a encontrar todas as possibilidades, mas a forma encontrada ainda não pode ser aplicada a diferentes conteúdos.

Os avanços em relação ao nível anterior são notáveis. Suas aplicações atingem uma lógica clara e coerente no âmbito multiplicativo, no entanto, ainda não conseguem generalizá-la. Cognitivamente, os estudantes vão, progressivamente, automatizando suas operações e tornando suas decisões conscientes, percebendo os valores de cada variável em cada situação. Então, já tendo automatizado um novo esquema, é possível aplicá-lo em outra situação.

Mesmo com o auxílio do material manipulativo, os sujeitos separam as situações em partes, não chegando a uma totalidade generalizadora. As explicações se dão a partir de suas observações e testes; no entanto, há visível progresso na busca da não-contradição, de explicações únicas ou complementares entre si.

Considera-se importante destacar que, se os conflitos a que o sujeito for exposto não estiverem relacionados à estrutura do seu pensamento, eles jamais servirão de estímulo para aprendizagem. Dessa maneira, a controvérsia por ela mesma não cria condições de desequilíbrio no sujeito. As condições externas somente passam a ser interiorizadas à medida que o sujeito encontra-se em situação de poder enfrentar tal desafio.

Subnível IIA: **pequena sistematização sem dissociação de fatores (correspondência biunívoca entre variáveis)**

O sujeito em transição para o nível IIA apresenta seu estado de desequilíbrio no momento em que não vê como suficiente o cálculo aleatório de combinações, estando no início das operações concretas. Para superar tais contradições, e com real esforço para isso, é que esses sujeitos passam a buscar a lei.

> [...] a leitura da experiência bruta se torna possível graças a classificações, seriações e correspondências coerentes e

> diferenciadas, mas isso de forma alguma é suficiente para assegurar a dissociação de fatores, isto é, para assegurar a organização de uma experiência verdadeira (INHELDER e PIAGET, 1976, p.36).

O sujeito faz uma leitura sistemática da experiência física, sem objetivar a verificação de hipóteses sobre dissociação de fatores. A sua estrutura mental concreta é suficiente para ler os fatos, mas não para organizá-los em termos de dissociação. O sujeito busca a verificação, mas não possui a estrutura completa de operações interproposicionais. Ele passa a sistematizar seu pensamento, embora essa sistematização seja precária, no sentido de não contemplar todas as combinações. Apenas um fator é escolhido para combinar com os demais, enquanto ele mesmo não varia, combinando-se com os demais. Quando solicitado a fazer novas combinações com as combinações já efetuadas, regride ao caráter empírico e às combinações casuais próprias do nível I.

L afirma ter feito todas as combinações no primeiro experimento, mas não consegue mostrá-las, encontrando um número diferente de possibilidades a cada tentativa. ***"Acho que fiz todas".*** Daria para fazer mais alguma? "*Não sei*". Recomeçam as tentativas, uma vez que as combinações já efetuadas não podem ser coordenadas com as novas. Se não está dando certo o número que tu encontras com o número que achas que deveria ser, o que poderias fazer diferente? **L** continua não fazendo combinações de combinações. Poderíamos continuar a aumentar a quantidade de caminhos? ***"Sim".*** Quantos mais poderias fazer? ***"Podes fazer mais, talvez mais umas dez, vinte vezes, até mais".*** Esta resposta mostra que, em seu pensamento, a infinidade não existe. Embora seja possível criar muitos caminhos, ainda não é possível compreender a infinidade, que só existe no pensamento.

G consegue perceber a relação multiplicativa envolvida no experimento 1, mas nos experimentos 2 e 3 faz apenas combinações aleatórias, somando as combinações de elementos semelhantes. Como tu pensas para fazer as combinações? ***"Nada, eu só vou trocando [os bonecos de lugar], cuidando para não repetir".*** O número de possibilidades são as que são possíveis de serem apontadas.

M, no entanto, com quatro casas não consegue utilizar o mesmo pensamento sistemático, responde com êxito, utilizando-se do Princípio Multiplicativo, mas não consegue apontar a quantidade total de caminhos*.* ***“A lógica existe... multiplicar. A regra é continuar multiplicando. Mostrar é bem difícil”.*** *Não teria como mostrar os caminho?.* ***“Falta mostrar dois. Eu estava comparando, mas não consigo.”*** Ou seja, **M** consegue combinar fatores de modo a relacioná-los dois a dois, mas ainda não consegue operar sobre operações, combinando as combinações já efetuadas e, muitas vezes, voltando a realizar combinações aleatórias.

O sujeito apresenta sua lógica relacional de correspondência biunívoca, um para um. Não consegue fazer combinações de segunda, terceira, quarta ordem, por falta de estrutura de pensamento. Algumas destas relações são até possíveis, mas não sistematizáveis. Essas combinações limitadas, que associam um termo a cada um dos outros, não permitem que, sozinho, o sujeito chegue às demais combinações. As operações apenas de primeira potência denotam capacidade de correspondência e seriação, mas não a capacidade combinatória que buscamos.

Assis et al. (2011, p.28) afirmam que a própria forma de correspondência uma a uma é útil, inclusive para a construção do número. É este princípio de conservação da quantidade que tornará possível a construção do conceito de número. Esta ideia de correspondência retorna aos problemas de combinatória, na tentativa de compreender o mundo dos possíveis. É a partir desta correspondência que o sujeito parte para as combinações de ordem n, rumo à generalização.

Estes sujeitos, “embora em posse das operações de multiplicação lógica de correspondência biunívoca” (INHELDER e PIAGET, 1976, p.84) não constroem uma estratégia de solução que englobe combinações n a n, visto que ainda não possuem estruturas lógicas que lhes possibilite combinar os fatores entre si de forma completa. As combinações encontradas correspondem a seriações e não configuram uma combinatória propriamente dita, pois se compõem apenas de combinações de primeira potência (INHELDER e PIAGET, 1976, p.85). A chegada à lei multiplicativa que envolve os experimentos pode apenas estar relacionada com uma operação concreta de multiplicação lógica, e não de uma lógica formal. Para ter certeza disso, é preciso que o sujeito explique os processos utilizados para tal construção.

Subnível IIB: dissociação dos fatores empíricos (combinações n a n)

Os sujeitos deste nível apresentam considerável progresso se o assunto é superar as contradições, na busca de uma solução única; no entanto, nem sempre se veem livres das contradições, à medida que não possuem os esquemas operatórios necessários para isso. Isolam adequadamente as variáveis, porém, se utilizam de operações concretas (de seriação e correspondência), não procurando razão para a utilização dos mecanismos utilizados, não demonstrando possuir estruturas formais de implicação para a solução (INHELDER e PIAGET, 1976, p.7,8).

Esses sujeitos organizam suas operações concretas a partir da observação dos fatos, o que não acontece no nível I, mas que ainda não é suficiente para levar a uma decomposição, como no nível III. Em suma, não há esquemas operatórios suficientes para verificar o caráter integrador das operações efetuadas.

> Em outros termos, se os sujeitos do nível IIB não chegam ainda a dissociar os fatores, mas simplesmente estabelecem as correspondências dadas na experiência imediata, isso se deve ao fato de não serem capazes dessa combinatória que constitui a lógica das proposições: disso resulta, de um lado, que não sabem combinar as situações experimentais de maneira a evidenciar as situações reais, entre as possíveis; de outro lado, não saber raciocinar por implicações, etc., de maneira a compor de maneira necessária e demonstrativa os diversos dados do fato que observam (INHELDER e PIAGET, 1976, p.40).

Mesmo em posse de todos os elementos necessários para a criação da lei geral da combinatória, ainda lhes faltam as operações formais para a criação de uma hipótese explicativa. O ponto de partida para a descoberta desta lei é a necessidade de uma reciprocidade advinda das correspondências concretas. Uma estrada a mais implica mais caminhos, em proporção, tantos quantos forem as demais estradas, e reciprocamente. Trocar um familiar de lugar exige sua recíproca; outro também deverá ser trocado de lugar. As contradições mais simples são afastadas apenas pela ação concreta. As mais sutis pressupõem implicações, isto é, exigem uma lógica formal.

> [...] as explicações do estádio II não são absurdas e nem são imediatamente desmentidas pelos fatos; para eliminá-las, é necessário, antes de tudo, sentir a insuficiência de sua coerência, isto não pode ser feito a não ser por um pensamento que sabe deduzir, com necessidade, as consequências de hipóteses simples (INHELDER e PIAGET, 1976, p.26).

No experimento 1, as combinações possíveis de serem realizadas com o material disponível são pouco numerosas. Então, para que tenhamos certeza de que o sujeito já adquiriu toda a sua generalidade em termos de pensamento combinatório, partiremos para o experimento seguinte, em busca de explicações que justifiquem seu pensamento.

Esse sujeito encontra-se em um nível intermediário, entre o II e o III, visto que não chega a formular uma lei única, mas não aceita que ela não exista. Consegue testar suas hipóteses, mas não chega à solução geral. Neste nível, os sujeitos já chegam às combinações n a n através das sistematizações das multiplicações. O pensamento concreto e sem interesse na generalização se mantém igual ao nível IIA. A diferença está relacionada à abertura para as combinações de combinações, resultantes de combinações de segunda potência.

C mostra sinais de busca, de certa forma, de uma sistematização mais segura, mas sem a verificação de hipóteses. ***"Eu posso deixar a mãe na primeira cadeira sempre, daí troco os outros, assim [mostra concretamente], depois faço a mesma coisa com o pai e o filho".***

F diz: **"*Sei que se eu for sempre por esta [estrada] poderei ir pelas outras, depois posso trocar*".** <u>E se contasses ao contrário [da direita para a esquerda]?</u> ***"Posso contar daqui pra cá ou de lá pra cá que dá na mesma".*** Demonstrando a relação de reciprocidade. ***"Preciso cuidar para não contar a mesma forma [disposição dos bonecos] duas vezes".*** <u>E como tu podes ter certeza?</u> ***"Tenho que cuidar para não repetir".*** No último experimento consegue fazer novas combinações n a n, embora não encontrando todas as possibilidades. ***“Primeiro vou fazer os triângulos com [vértice] A”.*** Faz ABC, ABD, ABE, ignorando os triângulos ACD, ACE e ADE.

O método sistemático de obtenção das possibilidades permitiu a **H** pensar que pudesse haver uma regra, mas estava distante de suas possibilidades cognitivas. ***“Esse caminho eu deixo parado, só combinando com os outros, pois este não faz nada”.*** <u>Como é que tu sabes que esse caminho não faz nada?</u> ***“Não sei, acho que deve haver uma regra, mas não é sempre a mesma”.*** **H** é um exemplo de sujeito em transição em termos de nível de pensamento. Embora algumas vezes demonstre não fazer combinações sobre combinações, em outros momento parece ir ao encontro de uma lei geral que dê conta dos conflitos encontrados.

A novidade do subestádio IIB é que, além de multiplicar todos os elementos por outro, espontaneamente esses sujeitos passam a realizar combinações 2 a 2 ou 3 a 3. Porém, ainda não atingem o estádio III por ainda faltar-lhes a sistematização destas combinações, ou seja, unir estas combinações em um sistema único e geral.

NÍVEL III

Sistematizações generalizadoras

Inhelder e Piaget (1976, p.80) denominaram “esquemas operatórios” as novas operações encontradas nos sujeitos de nível III, contando com a sistematização para a descoberta das combinações n a n. A combinatória passa a constituir o pensamento, não apenas como estrutura proposicional, mas de forma geral. Na solução encontrada estão presentes todos os casos possíveis de combinações.

> [...] a novidade característica do estádio III é que o sujeito, depois de verificar esta situação complexa, e de fazê-lo através de operações concretas, não considera tais conjuntos de fatos como uma ordenação final, da qual seria suficiente retirar tais ou quais relações e correspondências, mas como um ponto de partida de combinações novas (INHELDER e PIAGET, 1976, p.44).

A principal propriedade do pensamento formal é a inserção da realidade como subconjunto de um conjunto maior de possibilidades. Em lugar de “teorizar” sobre dados empíricos (concretos), o pensamento formal permite que o sujeito teorize sobre possibilidades. Neste estádio, o sujeito é capaz de relacionar variáveis, utilizando-se da experimentação (ou não), apenas para testar, sobre um padrão sistemático, se suas hipóteses se mantêm verdadeiras (PARRA, 1983, p.15). Esse raciocínio, que relaciona proposições e não conteúdos, caracteriza-se como hipotético-dedutivo.

Os sujeitos deste nível tentam compreender o resultado dentro de um universo de possibilidades. Concebem o real como uma organização de conjuntos possíveis. Segundo Piaget, é muito longo o caminho que o pensamento percorre até a teorização, mediante raciocínios hipotético-dedutivos. Neste nível, os sujeitos conseguem chegar à lei geral da combinatória. Alguns, inclusive, tomam consciência de suas ações, durante a entrevista, por verificação ou rejeição de hipóteses.

Somente as hipóteses muito elementares são afastadas sem experimentação prévia, porém as demais são cada vez mais testadas em busca de uma solução única. A generalização é dada a partir das comparações efetuadas ainda no nível II. Nos experimentos 2 e 3, essas comparações ficam dificultadas em virtude de não ficarem afixadas a hipóteses já testadas. Além disso, nenhum dos experimentos dá certeza de êxito nas soluções.

Os sujeitos que serão analisados a seguir são mais capazes no momento de raciocinar combinatoriamente, talvez por estarem em um nível escolar no qual a combinatória já foi formalizada. Porém, se no momento do ensino, esses sujeitos ainda não operassem em nível formal, os conceitos envolvidos na análise combinatória não seriam compreendidos. Nesse caso, deveríamos constatar isso durante o interrogatório. Neste nível, há uma relação causal estabelecida por correspondência; por exemplo, quanto mais estradas mais caminhos, ou quanto mais cadeiras mais organizações possíveis, ou quanto mais vértices mais triângulos, em uma proporção multiplicativa.

Com o pensamento formal, a forma do sistema operatório combinatório é constituída e dissociada do conteúdo. Essa forma encontra-se em um último patamar de equilíbrio, podendo ser integrada a outros sistemas mais amplos, mas jamais modificada (INHELDER e PIAGET, 1976, p.247).

Subnível IIIA: combinação sistemática n a n

Esses sujeitos acreditam na existência de uma lei única e geral capaz de explicar o resultado obtido na ação empírica, mas ainda não sentem a necessidade dessa formulação, obtendo êxito através de combinações n a n e de modo sistemático.

> [...] as operações formais já estão suficientemente esboçadas, para que sejam possíveis algumas inferências, mas não ainda suficientemente organizadas para funcionar como esquema antecipatório (INHELDER e PIAGET, 1976, p.53).

D consegue encontrar todas as possibilidades de modo sistemático. ***"Com três casas multiplica-se a quantidade de estradas entre elas".*** E com mais casas? ***"Continuo a multiplicar*"**. Como é que tu explicas isso? ***"Para cada nova estrada aumenta outra possibilidade de caminho para cada estrada já existente".*** Sempre vai ser assim? ***"Sim".*** Então qual é o maior número de caminhos que podemos ter? ***"Se tivéssemos infinitas estradas, infinitos caminhos".*** Nos demais experimentos, consegue chegar ao êxito pela sistematização, mas não encontra lei única que os explique. **"*Preciso escrever para lembrar as [combinações] que já fiz".*** Por quê? ***"É preciso usar todas".***

É esta necessidade de organização que diferencia o nível II do nível III. **D** necessita escrever, e essa necessidade deu-se de forma espontânea. Ter a certeza de que todas as possibilidades foram contempladas também é um salto qualitativo bastante grande nesses sujeitos. Ao combinar os fatores, os sujeitos deste subnível realizam as operações de conjunção, implicação, exclusão, dentre outras, o que possibilita um futuro progresso generalizador.

Para chegar à solução, os sujeitos não se contentam em encontrar algumas possibilidades, a perceber que cada uma delas faz parte de um todo maior. **E** mostra um pensamento proporcional relacionado à quantidade de estradas e caminhos possíveis. Quantas estradas precisas para ter nove caminhos? ***"Três de um lado e três de outro. Posso fixar um familiar em uma cadeira e variar os outros. Quanto mais vértices mais triângulos".*** Tu achas que existe uma maneira de calcular sem precisar contar? ***"Acho que sim, mas não sei qual é"***. Quantas tu achaste? ***"Dez possibilidades, mas agora fiquei na dúvida se tem mais alguma".***

O (36 anos) afirma que: ***"São três lugares e um lugar pode estar sempre com a mesma pessoa".*** Há uma tentativa de criação de regra, mas ainda muito frágil por não compreender os fatores envolvidos. Em **P** verifica-se que, em alguns momentos, o êxito está relacionado à memorização de fórmulas combinatórias, mas o raciocínio combinatório, até então construído, não acompanha os cálculos. ***"Acho que deveriam ser cinco, pois não pode repetir as letras [vértices]".***

O sujeito **I** demonstra sentir necessidade de não contradição ou de superar a contradição. E, por solicitação da experimentadora, percebe semelhanças entre suas construções. ***"Acho que é questão de multiplicar. Agora eu tenho que multiplicar de novo. Acho que é a mesma regra"*** (depois, de explicações análogas, dá-se conta de que é a mesma lei). O que preciso fazer para ter mais caminhos? ***"Colocar mais estradas, é proporcional".*** De quantas maneiras diferentes os quatro bonecos podem sentar-se nas quatro cadeiras? ***"Cada boneco pode sentar nas quatro cadeiras, mas cada vez que um trocar de cadeira o outro tem que trocar também, então as opções são trocar 2, 3 ou 4".*** Manipula fazendo várias tentativas. Passa a fazer trocas duas a duas, encontrando quatro possibilidades para cada duas cadeiras. ***"Acho que vou ter que fazer diferente: fixando uma das cadeiras, quantas chances as outras três tem de trocar?. Posso escrever?".*** A necessidade do registro já demonstra a necessidade de organizar as possibilidades, de maneira a contemplar todas ou para não repeti-las.

I faz diversas tentativas utilizando-se do experimento. Ainda sem utilizar o papel, testa sua teoria, mas troca os três elementos aleatoriamente de lugar. Começa a se perder nas tentativas e procura reproduzi-las no papel. ***"Vou***

usar só três bonecos, depois é só multiplicar por quatro”. Por que isolar um boneco? ***“Por que daí vai ter x mudanças com os três outros e é só multiplicar por quatro, que são os lugares que o boneco isolado pode assumir”.*** Faz as mudanças no material concreto e verifica no papel. Quantas possibilidades? ***“Seis”.*** E se houvesse mais um boneco? ***“Daí, para cada troca ele poderia estar em um lugar diferente, totalizando seis vezes quatro”.*** E dá para generalizar esse pensamento para um monte de bonecos e cadeiras? Pensa muito, mas não consegue chegar a uma conclusão precisa. Na atividade dos triângulos pensa por segmentos; tem um raciocínio sistemático, mas ainda não encontra todas as possibilidades. Fica claro que **I** já estudou combinatória na escola, mas reconstruiu, durante o experimento, seu próprio pensamento para pensar sobre os problemas.

O método de obtenção dos resultados possíveis progride na direção da construção de uma combinatória sistemática n a n, comprovada pelo medo de esquecer certas combinações, explicitando a necessidade de listá-las graficamente. “É apenas depois de ter feito isso, que eles [sujeitos] começam a testá-las, tentando progressivamente dissociar os fatores envolvidos e estudar os efeitos um a um – permanecendo constantes todos os outros fatores” (PIAGET, 1973, p.3).

As combinações empíricas passam a ser parte integrante do conjunto das combinações possíveis. “As combinações não se tratam de operações matemáticas determinadas, elas determinam uma estrutura lógica geral” (INHELDER e PIAGET, 1976, p.88).

Ao pensar hipoteticamente, o sujeito não tem mais necessidade de comprovação prática de suas hipóteses, elas passam a existir no plano das possibilidades. Nesses sujeitos, é possível perceber que possuem um método sistemático próprio, utilizado na resolução dos problemas; no entanto, essa sistematização só ocorre em um plano inconsciente. Acredito que, a partir do momento em que estes sujeitos forem capazes de tomar consciência do processo mental efetuado antes de encontrar a sua resposta, estarão muito perto de estabelecer uma combinatória completa.

Subnível IIIB: necessidade de generalização

Os sujeitos deste nível também sabem da existência de um fator geral, mas o que os diferencia dos sujeitos do nível IIIA é que sentem a necessidade dessa formulação. Necessidade "[...] que seja capaz de exprimir, além das relações constantes, a razão de tais relações" (INHELDER e PIAGET, 1976, p.9). O pensamento hipotético possibilita a certificação da generalidade da lei, sendo esta, agora, necessária. É importante para o sujeito verificar a veracidade da lei, mesmo que as condições empíricas sejam modificadas. As operações combinatórias, que tratam dos "conjuntos das partes", constituem a lógica das proposições; distinguem-se elas dos agrupamentos de classes e relações próprios das operações concretas.

> O raciocínio por hipóteses e a necessidade de demonstração sucedem à simples verificação de relações, [...] a partir de agora o pensamento utiliza juntamente o possível e o necessário, em vez de limitar-se a uma dedução a partir apenas da situação real (INHELDER e PIAGET, 1976, p.12).

Os sujeitos do Nível II notam a existência de diversas correspondências, enquanto os do nível III procuram estabelecer o que implica estas correspondências. É neste nível que os fatores são dissociados, substituindo a correspondência pela implicação. Mesmo sem verificação quantitativa, os sujeitos percebem a equivalência de fatores em termos de compensação, caracterizando o raciocínio hipotético, demonstrado pelo "se isso, então aquilo".

O sujeito que apresenta um nível formal de pensamento, após algumas tentativas experimentais, interrompe sua ação material e passa a operar no plano das ideias, listando as hipóteses possíveis de maneira sistemática e generalizada. Depois das hipóteses criadas é que o sujeito as testa de modo a confirmá-las ou não. Para os sujeitos do nível III, fica claro que, mesmo com a limitação material dos experimentos, o pensamento não tem esse limite. O sujeito é capaz de operar para além do real, estendendo seu raciocínio ao plano das ideias. A conduta do experimentador é fundamental, no caso de instigar e questionar de forma adequada.

No nível IIIB, o sujeito realiza a equilibração do sistema. É neste nível que ocorre o pensamento matemático mais refinado. Talvez por isso, tenham sido encontrados apenas um sujeito que contemplou essas características. Ele apresentou uma elaborada maneira de sistematizar e de representar graficamente seu raciocínio, apresentando, inclusive, um conceito para tal. O próprio sujeito elaborou uma estratégia de transformação do experimento em um problema mais simples, a fim de enquadrá-lo no seu atual esquema assimilador. No entanto, para compreender a equivalência de raciocínio entre um problema mais simples e outro mais complexo, estendendo seu pensamento a fim de aplicá-lo a um novo conteúdo, não é um pressuposto o sujeito já saber solucionar o primeiro problema? Essa estrutura, construída espontaneamente pelo sujeito, que alcançou esse estado de equilíbrio, mantém-se por toda a vida.

J é o único exemplo desse nível que, embora não deduza as fórmulas próprias da Análise Combinatória, cria leis aplicáveis a diferentes conteúdos. **J** combina todos os fatores entre si, fazendo todas as ligações possíveis. Para ter certeza de que os elementos não foram apenas colocados em correspondência a partir, puramente, de observação ou experiência física, coloca-se o sujeito em uma situação em que os fatores necessariamente devem ser combinados, e são as suas justificativas que esclarecerão o nível de pensamento em que se encontra.

Na situação em que três estradas levam a casa amarela à rosa e outras três estradas levam a rosa à azul, utiliza a estratégia da multiplicação. ***“Para cada uma [estrada] eu posso pegar outra de três maneiras”.*** E a lógica continua quando a quantidade de caminhos não for igual? ***“Sim, neste caso, quatro vezes três, dá doze caminhos”.*** No acréscimo de uma casa teve de reconstruir seu raciocínio. Faz combinações de combinações e encontra, novamente, o PFC na solução dos problemas. E se tivéssemos, por exemplo, cinquenta, trinta e vinte estradas? ***“Daí multiplica cinquenta por vinte por trinta”.*** *No* segundo experimento: ***“continua a mesma lógica, cada um pode sentar em três lugares diferentes, então é nove”.*** *T*u podes mostrar as nove? Faz no papel, utilizando uma estratégia em que cada elemento troca de cadeira três vezes. Uma amiga tua disse que em algum momento os três estarão sentados na mesma cadeira. O que tu pensas disso que ela disse? **“*É***

verdade, são seis, pois quando uma pessoa senta, não tenho mais essa cadeira para contar". <u>Tu achas que são seis ou nove possibilidades?</u> ***"Seis".*** <u>Podes mostrar as seis?</u> Sistematicamente, começa a fazer as trocas.

É importante destacar que, embora no nível IIIB, o sujeito **J** não conseguiu construir as fórmulas algébricas utilizadas pela análise combinatória. Penso que a falta dessa última forma em nada reduz o pensamento combinatório enquanto estrutura, visto que ela é dada a partir de transformações unicamente algébricas. Para Inhelder e Piaget (1976, p.228), se o sujeito opera em um sistema proposicional que pode ser enunciado algebricamente, "[...] os raciocínios de nossos sujeitos correspondem diretamente às transformações que ligam essas operações entre si, e essas transformações correspondem, então, ao próprio cálculo que é intrínseco à própria álgebra". Mais adiante, os autores ainda acrescentam que "[...] podemos considerar o cálculo (matemático) das combinações como a aquisição primitiva, e a combinatória proposicional como uma aplicação secundária desse cálculo" (INHELDER e PIAGET, 1976, p.232). Continuando,

> [...] esta álgebra não constitui, para a psicologia, mais que uma tradução simbólica, cuja utilidade essencial é a de um cálculo. Mas a realidade dos fatos que recobre essa tradução simbólica é a de um campo de ações coordenadas" (INHELDER e PIAGET, 1976, p.248).

As tomadas de consciência são claras durante a prova, permitindo que **J** apresente um raciocínio combinatório completo. ***"É como as estradas, mantém-se a primeira e mudam-se as outras duas, depois se volta para mudar a primeira".*** Enumera as possibilidades. <u>E se eu colocar mais um membro na família?</u> ***"Daí é quatro vezes três vezes, duas vezes um".*** <u>E com cinco pessoas e quatro cadeiras?</u> ***"É o mesmo, mas sempre duas pessoas ficarão disputando onde sentar, tipo dança das cadeiras".*** No experimento 3, faz ABC, ABD, ABE e diz: ***"esses são os triângulos que posso formar com A".*** **J** corrige-se espontaneamente: ***"não, com A e B, depois posso ter os AC. O ACB não pode, pois já fizemos todos os com B".*** Passa a fazer no papel e depois verifica os 10 triângulos. ***"Mas deve haver uma regra".*** Manipulando o hexágono consegue chegar à conclusão de que a quantidade de triângulos está relacionada com a quantidade de vértices, mas ainda não chega a uma fórmula para o último experimento.

Segundo Piaget, o pensamento dedutivo, característica do pensamento operatório formal, parte de uma ideia particular para sua generalização, dando-se no plano do possível. Desta forma, nesta estrutura de pensamento, o real observado está subordinado às hipóteses possíveis. É justamente a capacidade de pensar hipoteticamente que viabiliza ao sujeito a unir todas as possibilidades entre si.

Para Piaget (1975), a tomada de consciência é o resultado de um processo construtivo, que leva o sujeito a pensar sobre o seu próprio pensamento, tomando consciência da coordenação de suas ações e das relações estabelecidas até a chegada ao resultado final. É pela tomada de consciência que o sujeito constrói conceitos. Conceitos são construídos a partir de significados que são, inicialmente, individuais para cada pessoa. Ao relacionar um conceito com outro, passamos à generalização, na qual são necessárias abstrações reflexionantes. A análise combinatória é o resultado de generalização feita a partir da ação e das coordenações das ações do sujeito, o que implica o sentimento de necessidade. Essa necessidade só vem a desempenhar seu papel quando há a tomada de consciência, que permite ao sujeito compreender os mecanismos das suas ações e, assim, chegar ao conceito – que funciona sempre como totalidade operatória.

A generalização se dá de maneira construtiva, a partir de abstrações reflexionantes, apoiadas sobre as coordenações das ações do sujeito. Ao pensar uma forma geral que represente, em cálculo, qualquer situação semelhante, o sujeito opera sobre o mundo dessas coordenações, e não mais apenas sobre o mundo empírico. “Uma operação [...] é uma ação interiorizada que modifica o objeto do conhecimento” (PIAGET, 1972, p.1).

Somente com o surgimento da necessidade o sujeito passa a buscar explicações ou a razão dos fatos. “À medida que o sujeito vai tomando consciência dos processos, vai construindo mais necessidade lógica, não bastando saber como, mas querendo saber o porquê das coisas” (BERTOLUCCI, 2009).

Quadro-Síntese dos Níveis, quanto à construção da combinatória:

Nível I	**CARACTERÍSTICAS:** - Combinações aleatórias e não sistemáticas; - Foco no resultado, e não no processo; - Indiferença frente a contradições; - Ausência de tomada de consciência sobre as ações. - Pensamento opera sobre a materialidade (as possibilidades se esgotam em algum momento); - Necessidade do concreto.
Nível II	**CARACTERÍSTICAS:** - Explicação presa ao concreto, podendo estender-se a um virtual vinculado ao concreto; - Teste de hipóteses sem consideração à lei geral.
Nível III	**CARACTERÍSTICAS:** - Pensamento hipotético-dedutivo, não mais preso ao real; - Foco no processo e não no resultado; - Teste de hipóteses em nível mental ou para simples verificação; - Tomada de consciência do processo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal desta pesquisa consistia em investigar o desenvolvimento do pensamento combinatório, enquanto constituinte de um sistema operatório formal. A capacidade de pensar formalmente permite ao jovem discutir, adotando como hipótese, além do seu o ponto de vista, o ponto de vista alheio, analisando as consequências dessa implicação, e assim julgá-la. Além disso, os interesses dos jovens passam a extrapolar as experiências físicas, compreendendo e formulando teorias, para, assim, fazer parte do mundo adulto.

Não foi detalhada neste trabalho a possibilidade de promover ou acelerar o processo de formação do pensamento formal; no entanto, como educadora, me vejo na obrigação em me preocupar com esta questão. Concordo com Parra (1983, p.56) quando afirma que:

> Se aceitarmos o pressuposto de que educar é conduzir o aluno até o nível mais elevado de desenvolvimento, isto é, segundo Piaget, até o domínio do pensamento formal, então não podemos deixar de admitir a possibilidade de a escola fazer alguma coisa a esse respeito.

No momento em que o aluno se sente provocado por determinado problema ou situação, pode-se dizer que se ligou o motor da aprendizagem. São essas situações conflituosas que tendem a mobilizar o interesse do educando para aprender. Quando entra em conflito cognitivo, o sujeito se abre para um mundo de novas descobertas. O conflito cognitivo instaura um campo de significado.

> Já que o aluno deve aprender não receptivamente, mas por seu próprio esforço, comecemos no lugar onde o esforço é menor e o resultado mais compreensível do ponto de vista do aluno: ele deve se familiarizar inicialmente com o concreto, posteriormente com o abstrato [formal]; inicialmente com a variedade de experiência e posteriormente com a unificação de conceitos, etc. (POLYA, 1985, p.13).

O uso do conflito e da contra-argumentação na educação pode ajudar a desenvolver no sujeito a capacidade de assumir perspectivas diferentes frente a uma mesma situação. Essa perspectiva alheia desafia sua atual estrutura, podendo conduzi-lo à reorganização de suas estruturas cognitivas, em patamares superiores e por essa, à reformulação de suas ideias.

Tendo em vista a hipótese central deste estudo, pode-se constatar que pensamento combinatório é construído, passando por diferentes níveis de equilíbrio até a sua formalização. Investigou-se o conhecimento combinatório em diferentes idades, sendo que todos os participantes da pesquisa já haviam concluído o ensino fundamental e estavam frequentando o ensino médio, regular ou EJA. Conforme já relatado por Piaget (1973, p.8-9), os adultos “são menos criativos e já fazem parte de uma sociedade organizada que não apenas os limita e os torna mais lentos, mas que, algumas vezes, ainda, incita-os à revolta”.

Aprender combinatória, assim como os demais conteúdos matemáticos, exige muito mais que apenas um processo de ensino. O professor deve ter pleno conhecimento de que esses conceitos, “embora sejam influenciados pela experiência adquirida e pelas interações sociais, resultam de um processo interno de pensamento” (ASSIS et al., 2011, p.41). Esse processo é construído, passando de conhecimentos menos complexos para outros de maior complexidade em todos os seres humanos, mas segundo a hipótese de Inhelder e Piaget, ele ocorre de maneira peculiar em cada pessoa.

Analisar como se dá o pensamento combinatório em estudantes do ensino médio não foi tarefa fácil. A própria escolha do tema passou por diversas reformulações até chegar a sua forma final. Esta pesquisa funcionou para mim como um processo de construção. Precisei tomar consciência de que o que buscava era entender os mecanismos de raciocínio do sujeito, e não ensinar análise combinatória. Foram muitas tomadas de consciência para chegar a ter clareza da minha função de pesquisadora.

Pensar nos instrumentos investigativos foi outra tarefa construída a partir de diversas formulações e reformulações, devido à própria falta de clareza quanto ao objeto de estudo: a construção do pensamento humano no que concerne à combinatória. Findo esse processo, passo agora a tomar consciência de novos processos que, durante a pesquisa, passaram despercebidos ou carentes de uma análise mais aprofundada.

Uma de minhas reflexões opõe-se ao uso do instrumento 2 como ferramenta para a análise de permutação e arranjo simples. Ora, se o instrumento é o mesmo, e as perguntas, de certa forma, também, uma vez investigado um destes conteúdos, o outro já estaria contemplado. Outro fator interessante que passei a refletir, já na análise dos dados, foi o seguinte: a concretude dos instrumentos teria limitado o pensamento do sujeito ao materialmente possível? Acredito que não, pois essa limitação só ocorreu quando as estruturas de pensamento do sujeito estavam limitadas a essa concretude.

A coleta de dados e o estudo sobre a profundidade do Método Clínico foi outro desafio a ser enfrentado. Ter em mente o objetivo e, ao mesmo tempo, "mergulhar" na mente do sujeito, a fim de, não só compreender, mas juntar-se a ele naquela caminhada processual em busca do resultado, constituiu um grande desafio. Mesmo não exercendo, naquele momento, minha função de professora, não pude afastar-me desse papel ao presenciar os diversos processos de tomada de consciência de cada sujeito.

A conceituação se dá por tomadas de consciência, a qual se configura como um processo longo e trabalhoso no que tange às reconstruções estruturais. Construir um pensamento combinatório exige não só uma estrutura formal de pensamento, mas uma estruturação mental que possibilite ampliar este mecanismo até chegar a essa compreensão. Para isso, o raciocínio deve passar por abstrações reflexionantes realizadas pelo sujeito no plano dos possíveis. Ou seja, o sujeito deve trabalhar com hipóteses, sobre eventos inexistentes no mundo dos observáveis: as possibilidades. Os possíveis englobam os concretos reais, mas não se compõem unicamente deles. Os possíveis consideram as infinitas possibilidades em nível de pensamento, ultrapassando infinitamente o real.

Diferentes organizações de pensamento foram apresentadas nas categorias de análise, classificadas em função da complexidade dessa organização. A partir desta pesquisa, sinto-me convencida de que o raciocínio combinatório é construído, passando por sucessivos níveis até chegar a sua forma mais geral e universal. Observa-se desde a combinação aleatória de variáveis, passando por um nível intermediário onde ocorrem sucessivas sistematizações até, finalmente, a construção de um pensamento mais geral, com a necessidade da elaboração de uma lei única.

> Combinatória completa é precisamente o que caracteriza o pensamento formal, cuja estrutura ultrapassa os agrupamentos aditivos ou multiplicativos de classes e de relações (com suas inferências simples e concretas fundadas sobre a transitividade das inclusões de classes ou de encadeamentos de relações) e cria a estruturação de uma lógica de proposições (INHELDER e PIAGET, 1976, p.39).

Para agrupar as combinações é necessário variar apenas um fator, invariando os demais. A lei geral é construída a partir de uma longa estruturação mental, até que atinja seu nível de equilíbrio no patamar das operações formais. A subordinação do real ao possível é uma das características do pensamento formal; todas as demais características a incluem (PARRA, 1983 p. 54). Neste estádio, os sujeitos operam sobre hipóteses, pensam em termos proposicionais, isolam e analisam variáveis de modo a obter todas as combinações possíveis.

“O possível, para o sujeito operatório formal, é tudo que não é contraditório” (INHELDER e PIAGET, 1976, p.193). Uma hipótese é verdadeira, do ponto de vista formal, se for coerente do ponto de vista lógico, independente de sua natureza, seja ela correta ou não. As operações matemáticas de combinação referem-se às unidades, enquanto que a combinatória estrutural se refere à qualidade dos objetos. Dessa forma, “é pouco provável que formação das operações matemáticas das combinações preceda à da combinatória lógica” (INHELDER e PIAGET, 1976, p.233).

O sujeito constrói, no nível das operações concretas, as possibilidades termo a termo, desconsiderando em cada uma delas as demais. Nas operações formais, todas as combinações possíveis são analisadas, etapa por etapa, agrupando as partes em uma totalidade única e não contraditória, efetuando operações de segunda potência.

> O exame dos processos de verificação utilizados pelos sujeitos confirma inteiramente o que precede e permite, especificamente, controlar o fato de os raciocínios do sujeito não serem mais simples estabelecimentos de relações ou correspondências concretas, mas suporem necessariamente a combinação formal. Enquanto que no nível pré-operatório I, o sujeito não é capaz de qualquer prova, no nível das operações concretas (IIA e, sobretudo, IIB) não sente espontaneamente a necessidade delas, mas, se as pedimos, torna-se capaz de apresentá-las. No entanto, de acordo com toda lógica das operações concretas, que consiste apenas em organizar a leitura da experiência bruta (por classificações, estabelecimento de relações, etc.), a única verificação então imaginada é acumular fatos, até a certeza mais ou menos completa, mas sem ultrapassar o geral, isto é, sem introduzir elos de necessidade por dissociação desses fatos e dedução das relações assim dissociadas (INHELDER e PIAGET, 1976, p.30).

O resultado obtido nos experimentos mostra que uma combinatória sistemática só aparece nos sujeitos a partir do nível IIIA. A tentativa de dissociar os fatores só é generalizada no nível formal (INHELDER e PIAGET, 1976, p.213). Além disso, a lógica operatória formal "é um sistema complexo, porém coerente, que é relativamente diferente da lógica da criança, e constitui a essência da lógica dos adultos cultos e ainda proporciona a base para as formas elementares do pensamento científico" (PIAGET, 1973, p.4). Mesmo sem descobrir as fórmulas matemáticas do cálculo das combinações, nosso sujeito do nível IIIB encontrou "um processo operatório que, praticamente, equivale à aplicação da fórmula [...]" (INHELDER e PIAGET, 1976, p.233).

Os sujeitos do nível II chegam por associação e correspondências sucessivas a isolar alguns dos fatores, mas ainda não são capazes de descobrir todos os fatores a menos que presentes no real observado. Além disso, ainda não são capazes de refletir sobre a ação feita e delas tomar consciência. Essas incapacidades se devem ao fato de ainda não terem construído, estruturalmente, um método sistemático de obtenção de todas as possibilidades. O que se pode observar é que em cada nível, o sujeito estrutura seu pensamento "da maneira mais completa que lhe é acessível" (INHELDER e PIAGET, 1976, p. 212).

Sujeitos do Nível I não sistematizam seu pensamento. Derrapam em contradições e permanecem indiferentes a elas. Constroem combinações aleatórias, tornando impossível a construção dos possíveis, mesmo que em concretude. Pequenas sistematizações sobre o real apareceram como estrutura de pensamento dos sujeitos do Nível II. A combinação dos elementos foi construída, mas não estendida a uma lei geral. No momento em que os sujeitos passam a utilizar-se dessa nova organização sistemática, em busca de uma formalização que leve a solucionar qualquer problema semelhante, os consideramos pertencentes ao Nível III.

Uma das observações mais importantes está relacionada à continuidade demonstrada na passagem das sucessivas etapas. Percebe-se, claramente, que a transição de um nível de simples observação dos fatos a outro que opera em nível hipotético é dada de forma contínua e gradual. Em um primeiro momento, as tentativas do sujeito são de eliminar as contradições que são expostos, para, em seguida, passar a coordenar as ações entre si. A partir daí o sujeito passa a constituir uma lógica formal de pensamento em que se torna capaz de dissociar a realidade bruta, coordenando suas ações nas diversas combinações possíveis e agrupando-as em um sistema único (INHELDER e PIAGET, 1976, p.212).

A construção da combinatória passa por patamares de equilíbrio que independem da idade ou série do aluno. O ensino escolar não garante a construção da combinatória, sobretudo se a aprendizagem, dele decorrente, consistiu em uma experiência de memorização mecânica, sem maior significado cognitivo. Os sujeitos mais jovens demonstraram maior quantidade e qualidade nas tomadas de consciência, enquanto os mais velhos (alunos da EJA) tentavam relacionar as situações com situações concretas e de sua vida real, mas isso não redundava em melhor qualidade argumentativa.

Foi muito interessante, prazeroso e produtivo para a pesquisa estender a idade dos sujeitos analisados, trabalhando com adolescentes e adultos. A Epistemologia Genética, utilizada como embasamento teórico da investigação, permitiu desligarmo-nos do fator idade e nos concentrarmos e entendermos como vão se estruturando esses raciocínios.

Piaget (1972) nos mostra que o desenvolvimento cognitivo de cada sujeito é único. A partir de suas ações, o sujeito tende a coordená-las de modo a estruturar sua própria realidade. Pensando dessa maneira, fica claro que o conhecimento jamais se dará por mera cópia mental da realidade. Somente agindo sobre o objeto (modificando-o e transformando-o) é que se torna possível compreendê-lo. As explicações que o sujeito dá sobre o que pensa baseiam-se na forma como está organizado o seu pensamento.

Os níveis e subníveis identificados e analisados demonstram desde uma ausência total de sistematização, até a construção da combinatória formal. Aparecem, nitidamente, entre esses sujeitos, pensamentos que privilegiam a ausência de combinações, passando por sujeitos que relacionam variáveis, efetuando dissociações e controles progressivos, até sujeitos que, por necessidade, sistematizam e unem as soluções em um sistema único e global.

Ressalta-se quão pouco numerosas foram as soluções correspondentes ao nível mais avançado de pensamento combinatório encontrados neste estudo, apesar das idades e da escolarização dos sujeitos da pesquisa. Além disso, durante a aplicação dos experimentos podemos perceber que, ao modificar as tarefas a fim de aplicar a nova forma a outro conteúdo, os sujeitos mostram diferenças em sua organização mental, revelada em sua capacidade explicativa. Os experimentos apresentavam diferentes graus de dificuldade quanto ao aumento sistemático do número de fatores envolvidos e quanto à complexidade do problema proposto.

Observando as explicações dadas pelos sujeitos, observamos uma progressiva abertura do pensamento na descoberta de novas possibilidades, partindo de uma relação “um para um” para uma relação “um para muitos” entre os fatores envolvidos. No entanto, novos questionamentos passam a povoar meu pensamento. Será que obteríamos os mesmos resultados se o instrumento de coleta de dados fosse outro? Isto é, quando aplicado a diferentes conteúdos, o mesmo raciocínio pode variar sua forma?

No âmbito da educação matemática, fica evidente a necessidade de que professores passem a envolver problemas de contagem, os quais exigem um pensamento combinatório mais elementar, já no ensino fundamental. Justifico isso, não apenas por sua utilidade em diferentes áreas, mas também por serem importantes no preparo da aquisição de estruturas formais de pensamento.

Esse processo todo deixou claro para mim que é a partir da ação que se dá a aprendizagem. É na interação entre sujeito e meio físico e social que o conhecimento se faz. Por esse motivo, posso dizer que minha própria maneira de ver o longo processo que constitui o processo de aprendizagem reconstruiu-se, e ainda irá se reconstruir inúmeras vezes. Agora entendo o que significa pensar que o conhecimento se dá, unicamente, por fatores externos e a refutar totalmente esta hipótese. A minha própria aprendizagem foi, sem dúvida, o melhor resultado de toda a pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

ASSIS, Orly Z. Mantovani de; MOLINÁRI, Adriana Cirder; ZAIA, Lia Leme; RABIÓGLIO, Marta; BESSA, Sônia. *O desafio de ensinar e aprender matemática na educação básica.* Campinas: UNICAMP, 2011.

ASSIS, Orly Z. Mantovani de; MOLINÁRI, Adriana Cirder; ZAIA, Lia Leme; RABIÓGLIO, Marta; BESSA, Sônia. *Jogar e aprender matemática*. Campinas: UNICAMP, 2010.

BACKENDORF, Viviane Raquel. *Uma seqüência didática de medidas de comprimento e superfície no 5º ano do ensino fundamental: um estudo de caso.* Porto Alegre: IM/UFRGS. Dissertação de mestrado, 2010.

BECKER, Fernando. Aprendizagem – concepções contraditórias*. Revista Scheme – Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas*. Volume I nº 1 – Jan/Jun, 2008 53. http://www.marilia.unesp.br/scheme acesso em dezembro de 2010.

BECKER, Fernando. *Educação e Construção do Conhecimento.* Porto Alegre: ARTMED, 2001.

BECKER, Fernando. Epistemologia genética e conhecimento matemático*.* In: BECKER, Fernando; FRANCO, Sérgio Roberto K. (orgs.). *Revisitando Piaget.* 3. Ed. Porto Alegre: Mediação, 1998.

BERTOLUCCI, Cristina Cavalli. *Noções de infinito matemático em adolescentes e adultos.* Porto Alegre: UFRGS/FACED, 2009. Dissertação de Mestrado.

CARNEIRO, Vera Clotilde. Colorindo Mapas. *Revista do Professor de Matemática*, n. 29. São Paulo: SBM, 1995, p. 31-35.

DELVAL, Juan. *Introdução à prática do método clínico: descobrindo o pensamento das crianças.* Porto Alegre: Artmed, 2002.

DELVAL, Juan. Aprender investigando*.* In: BECKER, Fernando e MARQUES, Tania B. I. (org.) *Ser professor é ser pesquisador*. Porto Alegre: Mediação, 2007.

DOLLE, Jean–Marie. *Para compreender Jean Piaget: uma iniciação à psicologia genética piagetiana.* Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1974.

DOLLE, Jean–Marie; BELLANO, Denis. *Essas crianças que não aprendem: diagnósticos e terapias cognitivas.* Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

DORNELLAS, Augusto César Barbosa. *Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio.* SBEM: VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

FARIA, Anália Rodrigues. *O desenvolvimento da criança e do adolescente segundo Piaget.* São Paulo: Ática, 1998.

HERCULANO-HOUZEL, Suzana. *O cérebro em transformação.* Rio de Janeiro: Objetiva, 2005.

INHELDER, Bärbel; BOVET, Magali; SINCLAIR, Hermine [1974]. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento*. São Paulo: Saraiva, 1977.

INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. [1970] *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo: Pioneira, 1976.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

PARRA, Nélio. *O adolescente segundo Piaget.* São Paulo: Pioneira, 1983.

PIAGET, Jean [1977] et al. *Abstração Reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, Jean. *A tomada de consciência.* São Paulo: EDUSP, 1975.

PIAGET, Jean. Development and learning. In LAVATTELLY, C. S. e STENDLER, F. *Reading in child behavior and development*. New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972. (Trad.: Paulo F. Slomp). <http://www6.ufrgs.br/psicoeduc/piaget/desenvolvimento-e-aprendizagem/>. Acesso em dezembro de 2011.

PIAGET, Jean. *Fazer e compreender*. São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1978.

PIAGET, Jean. [1964]. *Seis estudos de psicologia.* Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2005.

PIAGET, Jean. *Intellectual Evolution from Adolescence to adulthood.* In <http://www.zunal.com/zunal_uploads/files/20100425032446yGagu.pdf>, 1973. (Trad.: Fernando Becker e Tania B. I. Marques)

PIAGET, Jean. *Recherches sur la généralisation*. Paris, Presses Universitaires de France, 1978. p.5-8 e p. 219-247.Tradução: Fernando Becker. Revisão: Rosangela A. de Almeida. Porto Alegre, maio 1991.

POLYA, George. O Ensino por meio de problemas. *Revista do Professor de Matemática*, n. 7. São Paulo: SBM, 1985, p. 11-16.

SABO, Ricardo Dezso. *Saberes docentes: a análise combinatória no ensino médio.* São Paulo: PUC, 2010. Dissertação de Mestrado.

SOARES, Maria Tereza Carneiro; MORO, Maria Lucia Faria. *Raciocínio por combinatória e produto cartesiano na escola fundamental.* UFP. < revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/543/431> Acesso em setembro de 2011.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. *Análise combinatória no Ensino Médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.* Rio Claro: UNESP. Dissertação de Mestrado, 2010.

TAVARES, Cláudia; BRITO, Frederico Reis Marques de. Contando a história da contagem. *Revista do Professor de Matemática*, n. 57. São Paulo: SBM, 2005, p. 33 – 40.

SANTOS, J. Plínio O. et al. *Introdução à análise combinatória.* São Paulo, Ed. da UNICAMP, 2002.

8. APÊNDICE

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACED- PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Consentimento Informado

Pelo presente termo, declaro que fui informado, de forma clara e detalhada, dos objetivos e da justificativa do Projeto de Pesquisa, intitulado: *A análise Combinatória Construção de Possibilidades; um estudo sobre o raciocínio formal no Ensino Médio*, a ser realizado pela mestranda Mariana Lima Duro, sob a orientação do Professor Dr. Fernando Becker e coorientação do Professor Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Tenho o conhecimento de que receberei resposta a qualquer dúvida sobre os procedimentos e outros assuntos relacionados com esta pesquisa. Entendo que não serei identificado e que se manterá o caráter confidencial das informações registradas relacionadas com minha privacidade.

Concordo em participar deste estudo, bem como autorizo, para fins exclusivos desta pesquisa, a utilização das imagens e dados coletados em observações.

A pesquisadora responsável por este Projeto de Pesquisa é Mariana Lima Duro, que poderá ser contatada pelo telefone (xx) xxxxxxxx ou pelo e-mail profmarianaduro@yahoo.com.br

Porto Alegre, ______ de ______________ de 2012

______________________________ ______________
Nome completo do entrevistado **RG ou CPF**

______________________________ ______________
Nome completo do responsável RG ou CPF

__________________________ __________________________
Assinatura do responsável **Assinatura da pesquisadora**