NÚMEROS NORMAIS

Bolsista CNPq: Eduardo Paiva Scarparo
Orientador: Cydara Cavedon Ripoll
Co-orientador: Jairo Krás Mengue
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Introdução

Dado $x \in \mathbb{R}$, podemos nos perguntar com que frequência um certo dígito ou um certo bloco de dígitos aparece na parte fracionária da expansão decimal de x. Tomemos como exemplo π, cuja expansão decimal é da forma:

$$3.14159265358979323846264\ldots$$

Note que até a 23^a posição o dígito 6 aparece 3 vezes, enquanto que o bloco 26 aparece 2 vezes. Generalizando isto, denotamos o número de vezes que um bloco de k dígitos, B_k, ocorre na parte fracionária da expanão decimal de x até a posição N por $\#(B_k; N; x)$. Assim, $\#(6; 23; \pi) = 3$ e $\#(26; 23; \pi) = 2$. Definimos a frequência de B_k na expansão decimal de x como sendo o seguinte limite (cuja existência, a princípio, não está garantida):

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \#(B_k; N; x)$$

Note que, no sistema decimal, existem 10 dígitos, 100 blocos de 2 dígitos,..., 10^k blocos de k dígitos. Estas observações motivam a definição de número normal, um conceito introduzido por Borel em 1909. Dizemos que um número real x é normal em base 10 se na sua expansão decimal vale, dado qualquer blobo B_k, o seguinte:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \#(B_k; N; x) = \frac{1}{10^k}$$

Analogamente, dado outro $b \geq 2$ inteiro, define-se número normal em base b. Vamos apresentar alguns fatos sobre números normais e alguns problemas em aberto.

Propriedades dos números normais

Vamos denotar a parte inteira de um número real não-negativo x por $[x]$. Sejam $b \geq 2$ um inteiro e $T : [0, 1) \to [0, 1)$ dada por $T(x) = bx - [bx]$. Denotaremos o j-ésimo iterado de T por T^j. Prova-se que os números normais na base b contidos no intervalo $[0, 1)$ são precisamente os x tais que para toda função contínua e limitada $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ vale que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \int_{[0,1)} f \, d\mu$$

onde μ denota a medida de Lebesgue. Prova-se também que μ é ergódica para T e então é uma consequência do Teorema Ergódico de Birkhoff que o conjunto dos números que não são normais na base b tem medida zero, apesar de a condição para um número ser normal ser aparentemente bastante restritiva.

Assim, o conjunto dos números que não são normais em alguma base, por ser uma união enumerável de conjuntos de medida zero, tem medida zero. Apesar disso, ainda não se sabe se constantes como e, π ou qualquer irracional algébrico são normais em alguma base. No entanto, existem conjecturas de que estes números são normais em todas as bases (números com esta propriedade são chamados de absolutamente normais).

Obviamente, os racionais, por terem expansão periódica em qualquer base, não são normais em nenhuma base.

O primeiro exemplo simples de número normal (em base 10) foi dado por Champernowne em 1933 e é a chamada constante de Champernowne, obtida pelo encadeamento dos números naturais:

$$0.123456789101112131415161718192021\ldots$$

Em 1946, Copeland e Erdös provaram que o decimal formado pelo encadeamento dos números primos é normal. Este número é a chamada constante de Copeland-Erdös:

$$0.23571113171923293137414347\ldots$$

Para provar isso, Copeland e Erdös mostraram que se uma sequência crescente de números naturais satisfaz a uma certa condição assintótica, então o número formado pelo encadeamento desta sequência é normal. E é uma consequência do Teorema dos Números Primos que a sequência dos números primos satisfaz a essa condição assintótica.

Em 1952, Davenport e Erdös provaram que dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função polinomial não-constante satisfazendo $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ então o seguinte decimal é normal em base 10:

$$0.f(1)f(2)f(3)\ldots$$

Na demonstração deste resultado, Davenport e Erdös usaram a chamada Desigualdade de Weyl, um teorema de Teoria dos Números.

Podemos nos perguntar se existe algo de tão especial com funções polinomiais satisfazendo $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$. Mais exatamente, será que dado um polinômio não-constante satisfazendo $f(\mathbb{N}) \subset [0, +\infty)$ vale que o decimal

$$\alpha = 0.[f(1)][f(2)][f(3)]\ldots$$

é normal em base 10? (Aqui denotamos novamente a parte inteira de x por $[x]$). Analisando a demonstração de Copeland e Erdös, e fazendo algumas adaptações óbvias, percebemos que isto é verdade no caso em que o coeficiente líder de f é um racional. Se fôssemos tentar adaptar a prova de Copeland e Erdös também para o caso geral de coeficiente líder irracional, teríamos problemas na hora de aplicar a Desigualdade de Weyl, pois teríamos que começar a nos preocupar com aproximações diofantinas para o coeficiente líder.

Em 1990, Nakai e Shiokawa resolveram o problema e provaram que o decimal $0.[f(1)][f(2)][f(3)]\ldots$ é normal mesmo que o coeficiente líder da função polinomial f seja irracional.

Bibliografia

- Mengue, J. "Uma coleção de resultados sobre Números Normais". Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática da UFRGS, Porto Alegre, 2008.
- Davenport, H. e Erdös, P. "Note on Normal Decimals". Canadian J. Math. 4 (1952), 58-63.