

Motivação

- *Dosagem de radioterapia*, na medicina.

Aspectos Físicos

Ao se emitir partículas contra um meio material, notamos que essas partículas interagem com o núcleo do meio material causando espalhamento e absorção. Para maioria dos espalhamentos envolvendo fótons, predominam três interações [1], a serem consideradas:

Efeito Fotoelétrico:

Este efeito ocorre com a interação entre o fóton e o átomo. O fóton é absorvido pelo meio, sendo toda ou quase toda a sua energia depositada no meio.

Produção de Par:

O fóton incidente é absorvido na interação e toda sua energia é convertida em massa de repouso e energia cinética de um par partícula-antipartícula, ambas carregadas.

Espalhamento Compton:

O modelo consiste em uma colisão entre o fóton e um elétron livre. Para fótons com energia entre 1 Mev e 10 Mev, e para elementos com baixo e intermediário número atômico o espalhamento Compton é predominante.

Para os problemas de interesse neste trabalho, a energia incidente é próximo de 1 Mev, assim pode-se considerar, na descrição do transporte de fótons, apenas o espalhamento Compton.

Balanco de Partículas

Na figura 1, temos uma ideia física, onde podemos ver as partículas no volume dV com centro na posição dada pelo vetor \mathbf{r} e componentes (x,y,z) , com deslocamento nas direções $d\Omega$ em torno de Ω .

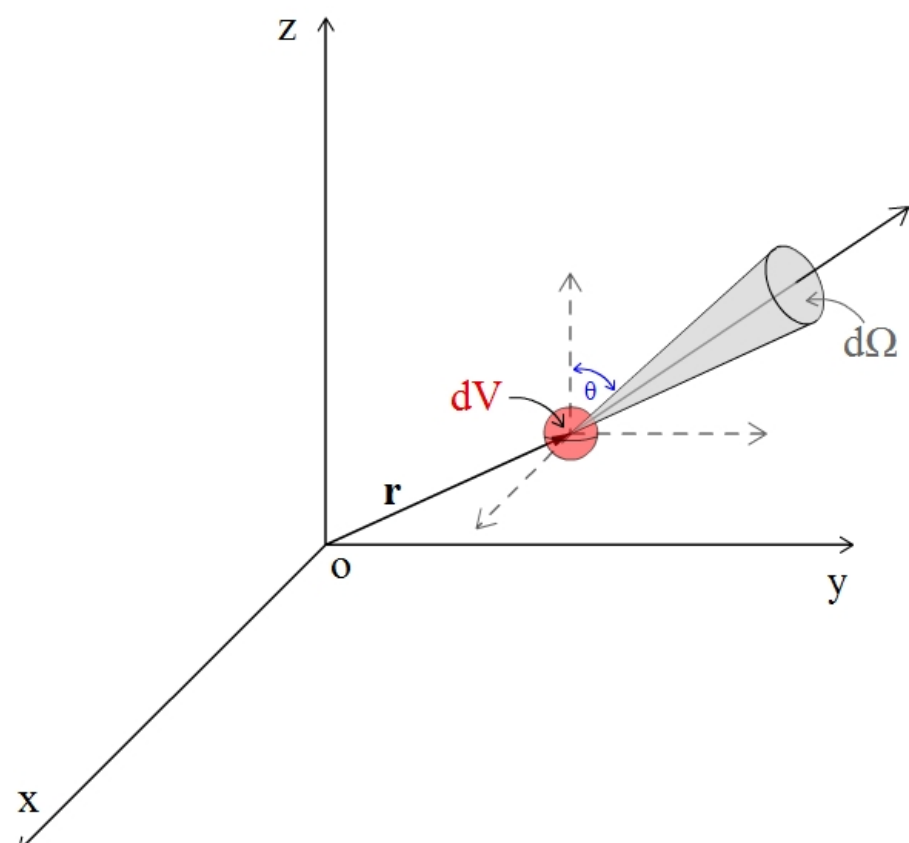


Figura 1: Deslocamento da partícula.

A figura 2, mostra a região de espalhamento de todas as partículas. Ainda podemos ver que pode ser conveniente especificar o vetor unitário, Ω , em um sistema de coordenadas polares, ou seja, dado o ângulo polar θ e o ângulo azimutal ϕ .

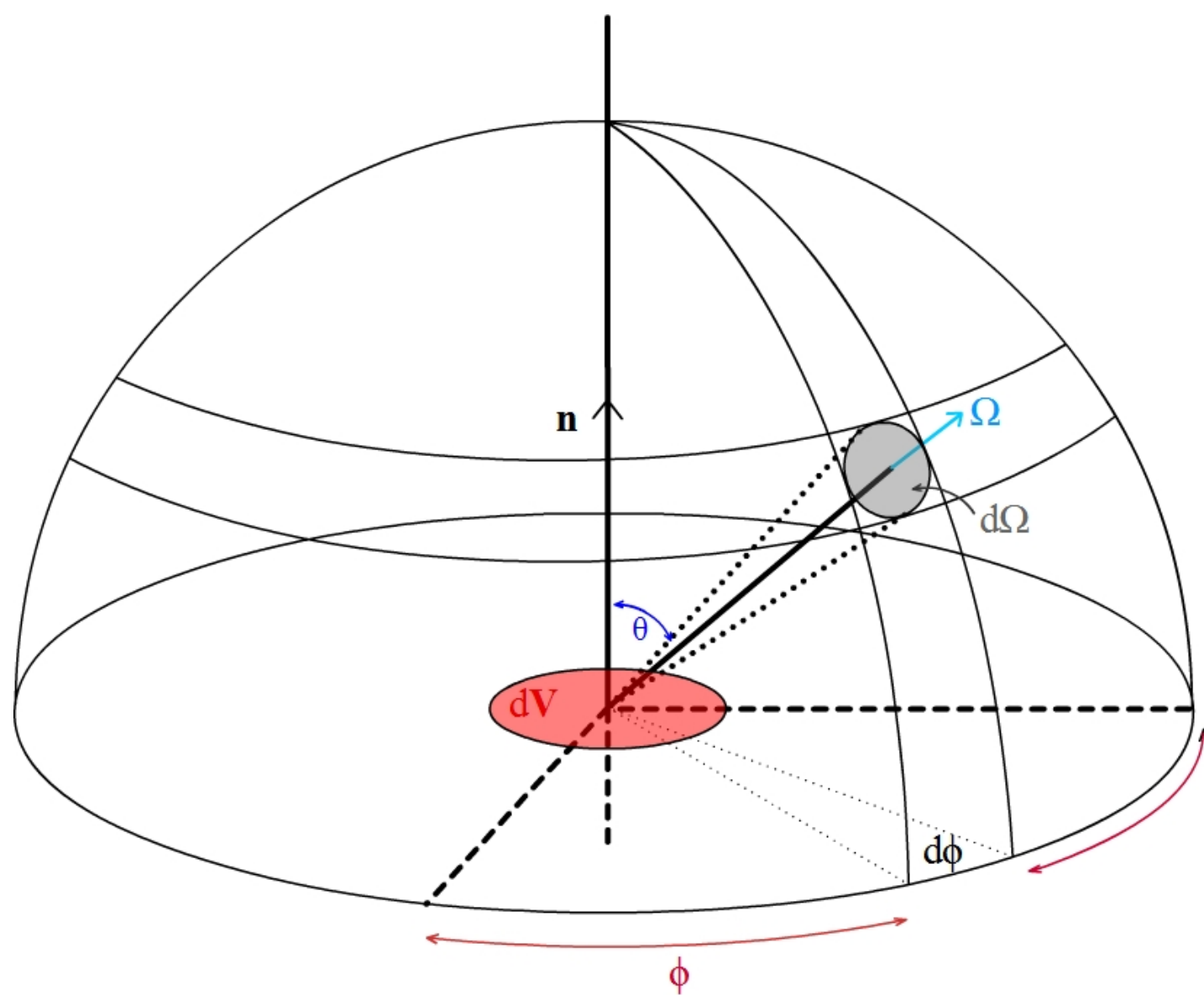


Figura 2: Região de espalhamento das partículas.

Dedução da equação [2]:

- (a) Taxa de fuga + (b) Taxa de perda por espalhamento = (c) Taxa de produção + (d) Taxa de produção por outras fontes

- Problema estacionário

- (a) Taxa de fuga, n° de Fótons que saem de V:

$$\Omega \cdot \nabla \Psi(\mathbf{r}, \Omega, E);$$

- (b) Taxa em que partículas secundárias com energia E e direção Ω são produzidas:

$$\sigma(\mathbf{r}, E)\Psi(\mathbf{r}, \Omega, E);$$

- (c) n° de partículas secundárias em dE sobre E movendo-se em $d\Omega$ sobre Ω que são espalhadas em V:

$$\int_{E'} \int_{\Omega'} \sigma(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) \Psi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE';$$

- (d) n° de partículas sobre dE sobre E movendo-se em $d\Omega$ sobre Ω que são produzidas em V, por outras fontes:

$$S(\mathbf{r}, \Omega, E).$$

Equação de Transporte Integro-Diferencial de Fótons

Assim pelo balanço de partículas, temos a equação:

$$\Omega \cdot \nabla \Psi(\mathbf{r}, \Omega, E) + \sigma(\mathbf{r}, E)\Psi(\mathbf{r}, \Omega, E) = \int_{E'} \int_{\Omega'} \sigma(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) \Psi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' + S(\mathbf{r}, \Omega, E), \quad (1)$$

- Chamamos o termo $\sigma(\mathbf{r}, E)$ de **coeficiente total de atenuação**;

- E termo $\Psi(\mathbf{r}, \Omega, E)$ de **fluxo angular**

- Tem-se interesse na quantificação da intensidade da radiação, onde,

$$I(\mathbf{r}, \Omega, E) \equiv E\Psi(\mathbf{r}, \Omega, E) \quad (2)$$

$$dE = -m_e C^2 \frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad (3)$$

- E é a energia do fóton em Mev, $m_e C^2 = 0.511 \text{ Mev}$ ou $8.1871 \times 10^{-14} \text{ J}$,

$$\lambda = \frac{m_e C^2}{E} \quad (4)$$

$$\frac{E}{E'} = \frac{\lambda'}{\lambda} \quad (5)$$

Assim temos a equação:

$$\Omega \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \Omega, \lambda) + \sigma(\mathbf{r}, \lambda)I(\mathbf{r}, \Omega, \lambda) = \int_{\Omega'} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \Sigma'(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega, \lambda' \rightarrow \lambda) I(\mathbf{r}, \Omega', \lambda') d\lambda' d\Omega' + S(\mathbf{r}, \Omega, \lambda) \quad (6)$$

Núcleo de Klein-Nishina

- Espalhamento dado por:

$$\Sigma'(\Omega' \rightarrow \Omega, \lambda' \rightarrow \lambda) = K(\lambda', \lambda) \delta(1 + \lambda' - \lambda - \Omega' \Omega) \quad (7)$$

$$\Omega' \Omega = \cos \theta = \omega_0 \quad (8)$$

- Com ângulo de espalhamento $\lambda - \lambda' = 1 - \cos(\theta)$;

- $K(\lambda', \lambda)$ é o núcleo de Klein-Nishina para o espalhamento Compton [3]

$$K(\lambda', \lambda) = \frac{3}{8} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right) \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - 2(\lambda - \lambda') + (\lambda - \lambda')^2 \right], \lambda' \leq \lambda \leq \lambda' + 2$$

$$K(\lambda', \lambda) = 0, C.C. \quad (9)$$

pois, $\lambda - \lambda' = 1 - \cos \theta$, de onde $0 \leq \lambda - \lambda' \leq 2$, isto é $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda' + 2$.

- Desta forma, considerando o problema homogêneo (termo fonte nulo), tem-se,

$$\Omega \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \Omega, \lambda) + \sigma(\mathbf{r}, \lambda)I(\mathbf{r}, \Omega, \lambda) = \alpha \sum_{n=0}^L \left(\frac{2n+1}{2} \right) P_n(\mu) \int_{\lambda_n}^{\lambda} \int_{-1}^1 K(\lambda', \lambda) P_n(1 + \lambda' - \lambda) P_n(\mu') I(\mathbf{r}, \Omega', \lambda') d\mu' d\lambda' \quad (10)$$

Devido a característica do espalhamento Compton, pelo núcleo de Klein-Nishina, o limite de integração passa a ir de $\max\{\lambda_0, \lambda - 2\}$ até λ [4].

Conclusões

Com o estudo teórico empregado, foi deduzido o modelo matemático na forma de uma equação integro-diferencial para o transporte de partículas de fótons. Devido às características do transporte de fótons, vemos que existe uma dificuldade em tratar o termo integral da equação. Na continuação do projeto, entramos no estudo de quadraturas diferenciadas para o tratamento do termo integral e respectiva solução.

Referências

- [1] Okuno, E. and Yoshimura, E. *Física das Radiações*, Oficina de Textos, Brasil (2010).
- [2] Bell, G. I. e Glasstone, S. *Nuclear Reactor Theory*, Van Nostrand Reinhold; New York, USA (1970).
- [3] Wood, J. *Computational Methods in Reactor Shielding*, Pergamon Press, USA (1982).
- [4] Fano, Spencer, L. V., and Berger, M. *Encyclopedia of Physics - Volume XXXVIII/2, Neutrons and Related Gamma Ray Problems*, Springer-Verlag, Berlin (1959).