Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DECOMPOSIÇÃO DE CALDERON E SUAS APLICAÇÕES NA TEORIA DA REGULARIDADE EM EQUAÇÕES ELÍPTICAS

por

MAURÍCIO ZAHN

Porto Alegre, agosto de 2005.

Dissertação submetida por Maurício Zahn* como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Dr. Jaime Bruck Ripoll
Dr. José Afonso Barrionuevo

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por estar sempre guiando os meus passos.

Um agradecimento especial à minha mãe, Nelda Maria Zahn, que sempre me apoiou, e também a todos os demais da minha família.

Ao meu orientador, prof. Leonardo Bonorino, pela sua eficiente orientação, pelo incentivo e boa vontade .

Ao prof. Eduardo Brietzke, que me deu muito apoio e incentivo logo no início do curso.

Aos meus professores da UFPel, Andrei Bourchtein e Lioudmila Bourchtein, por me incentivarem a continuar nos estudos.

Aos meus amigos da Matemática da UFRGS: Elismar Oliveira, Lisiane Zoch, Marnei Mandler, Cícero Nacthigal, Josué Jung, Edson Werle, Sabrina Zancan, Flávia Giordani, Luciano Bedin, Cleber Bisognin, Ana Potter, Gilherme Pumi, Davi Ferreira, Cleonis Figueira, Edite Taufer, Linéia Schutz, Rodrigo Vecchia, Rodrigo Proença, Adriana Neumann, Isabel Bonow e Ricardo Rutz; por tudo que passamos e também "sofremos"juntos, deixo-lhes a seguinte frase: "Sit vis vobiscum".

Aos meus amigos do finado apto 408 e do fatídico apto 301: Leonardo Soares, Luiz Fernando, Mario Lopes e Mauro Borges, deixo-vos a frase:"bonum vinum lætificat cor hominis."

À Rosane, secretária do Programa de Pós-Graduação, pela atenção, paciência e carinho(que sorte pra mim!).

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

E a todos que, de alguma maneira, ajudaram ou torceram por mim.

“Diliges Dominum Deum tuum ex toto corde tuo, et in tota anima tua, et in tota mente tua. Hoc est maximum, et primum mandatum. Secundum autem simile est huic: Diliges proximum tuum, sicut te ipsum. In his duobus mandatis universa lex pendet, et prophetæ.”

Sanctum Iesu Christi Evangelium Secundum Matthæum, 22;37b-40

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar a regularidade de soluções de Equações Diferenciais Parciais Elípticas da forma $Lu = f$, para $f \in L^p(\Omega)$, onde $p > 1$. Para isto, usamos a Decomposição de Calderon-Zygmund e um resultado que é conseqüência deste, o Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz.

Além disso, usando quocientes-diferença provamos a regularidade das soluções para o caso $p = 2$ e $L = -\Delta$ de uma forma alternativa.

Abstract

In this work we study the regularity of solutions of Elliptic Partial Differential Equations in the form $Lu = f$, where $f \in L^p(\Omega)$ and $p > 1$. For that we use the Calderon-Zygmund Decomposition and a result which is a consequence of that, the Marcinkiewicz Interpolation Theorem.

Moreover, using difference quotients we prove the regularity of the solutions for the case $p = 2$ end $L = -\Delta$, in a different way.

CONTEÚDO

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a regularidade de soluções de equações diferenciais parciais lineares elípticas da forma $Lu = f$, onde $f \in L^p$, $1 < p < \infty$ e o operador Lu é dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) D_i u + c(x) u,$$

com coeficientes a^{ij}, b^i e c definidos em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, satisfazendo hipóteses adequadas.

Mais precisamente, no capítulo 2 obtemos estimativas das derivadas de segunda ordem na norma L^p através do método de Decomposição do Cubo (de Calderon). Esta decomposição é usada juntamente com o Teorema de Marcinkiewicz [Ma], para mostrar o Teorema da Desigualdade de Calderon-Zygmund [CZ] e [St] , que estabelece que se w é o Potencial Newtoniano de f, então $w \in W^{2,p}(\Omega)$ e satisfaz

$$||D^2 w||_p \leq c||f||_p.$$

Como conseqüência desta estimativa, conseguimos provar no capítulo 3 a regularidade de $Lu = f$. Usamos [GT] como a principal referência deste trabalho.

Por fim, no capítulo 4, usando um método alternativo, obtemos regularidade de $-\Delta u = f$, com $f \in L^2(\Omega)$. Mostramos assim que a solução u está em $H^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Neste caso, a filosofia usada foi o conceito de quocientes-diferença [Ev].

No capítulo 1 introduzimos alguns conceitos e propriedades.

Algumas propriedades podem ser achadas em [Co], [Ev], [Mz] e [GT].

Capítulo 1

Alguns Conceitos e Propriedades Preliminares

Este capítulo tem por objetivo apresentar algumas definições e propriedades que servirão de ferramentas para se desenvolver o trabalho ao longo dos demais capítulos. Por se tratar de um capítulo introdutório, alguns dos teoremas aqui enunciados não são demonstrados, mas suas demonstrações podem ser encontradas em [GT].

1.1 Conceitos Preliminares

Teorema 1.1 *Sejam Ω um domínio limitado com fronteira C^1 e ν o vetor exterior unitário normal à $\partial\Omega$. Então, para qualquer campo de vetores $w : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, temos:*

$$\int_\Omega div\ w dx = \int_{\partial\Omega} w\nu dS, \tag{1.1}$$

onde dS indica o elemento de área $n-1$ dimensional em $\partial\Omega$.

Definição 1.1 Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ e u uma função em $C^2(\Omega)$. O *Laplaciano* de u, denotado por Δu, é definido por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}u = divDu. \tag{1.2}$$

Definição 1.2 Suponhamos que $u, v \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Seja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, que denominamos multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Dizemos que $v = D^\alpha u$ é a derivada de ordem $|\alpha|$ de u no sentido fraco se

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi dx,$$

para toda função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, onde

$C_c^\infty(\Omega) = \{\phi : \Omega \to \mathbb{R} | \phi$ é infinitamente diferenciável em Ω e de suporte compacto$\}$,

e

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.3 *O Espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste no conjunto de todas as funções localmente integráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, a derivada no sentido fraco $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$.
Em particular, se $p = 2$, escrevemos

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

Definição 1.4 Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Definimos a norma de u em $W^{k,p}(\Omega)$ por

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.5 Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Então $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se existem funções $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tais que

$$u_m \to u \quad \text{in} \quad W^{k,p}(\Omega).$$

Definição 1.6 Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ é *solução fraca* de $-\Delta u = f$, com $f \in L^2(\Omega)$, se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi \quad , \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definição 1.7 Dizemos que um operador diferencial parcial L é uniformemente elíptico se $\exists \theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

para quase todo $x \in \Omega$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.8 Sejam $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função localmente somável e $V \subset\subset \Omega$. Definimos então:

(i) o i-ésimo quociente diferença de *tamanho* h por

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}; i = 1, ..., n$$

$\forall x \in V$ e $h \in \mathbb{R}; 0 < |h| < \text{dist}(V, \partial\Omega)$.

(ii) $D^h u := (D_1^h u, ..., D_n^h u)$.

Teorema 1.2 *Se B é um espaço de Banach Reflexivo, qualquer seqüência limitada possui uma subseqüência fracamente convergente,i.e., se (x_n) é limitada em B, existe uma subseqüência (x_{n_k}) e $x \in B$ tal que $\ell(x_n) \to \ell(x)$, $\forall \ell \in B'$.*

Obs.: O espaço L^p $(p > 1)$ é reflexivo, pois $(L^p)'' = L^p$.

Teorema 1.3 *(i) Suponha $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, para $V \subset\subset \Omega$, existe uma constante $c = c(V, \Omega, n, p)$ tal que*

$$||D^h u||_{L^p(V)} \leq c||Du||_{L^p(\Omega)}$$

para todo $0 < |h| < \frac{1}{2}\text{dist}(V, \partial\Omega)$.

(ii)Considere $1 < p < \infty$, $u \in L^p(V)$, e que exista uma constante C tal que

$$||D^h u||_{L^p(V)} \leq C$$

para todo $0 < |h| < \dfrac{1}{2} dist(V, \partial U)$. Então $u \in W^{1,p}(V)$, com $||Du||_{L^p(V)} \leq C$.

Demonstração:

(i) Seja $1 \leq p < \infty$ e suponha que u é suave.

Então, para cada $x \in V$, $i = 1, 2, ..., n$, e $0 < |h| < \frac{1}{2}\text{dist}(V, \partial\Omega)$, temos

$$u(x + he_i) - u(x) = \int_0^1 u_{x_i}(x + t \cdot he_i) dt \cdot h,$$

logo

$$|u(x + he_i) - u(x)| \leq h \int_0^1 |Du(x + t \cdot he_i)| dt$$

então

$$|D_i^h u| = \left| \frac{u(x + h.e_i) - u(x)}{h} \right| \leq \int_0^1 |Du(x + th.e_i)| dt, \forall i = 1, ..., n \quad (I)$$

Assim, definindo[1] $|D^h u| := \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i^h u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, temos, juntamente com a desigualdade (I) vista acima que

$$|D^h u|^p = \sum_{i=1}^{n} |D_i^h u|^p \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 |Du(x+the_i)|dt\right]^p (\star)$$

Note ainda que pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_0^1 |Du(x+the_i)|dt = \int_0^1 |Du(x+the_i)| \cdot |1|dt \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 |Du(x+the_i)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 1^q dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

concluindo assim que $(\star)$ fica

$$(\star) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\int_0^1 |Du(x+the_i)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 1^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |Du(x+the_i)|^p dt \left(\int_0^1 dt\right)^{\frac{p}{q}} = c\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |Du(x+the_i)|^p dt$$

$$\Rightarrow |D^h u|^p \leq c\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |Du(x+the_i)|^p dt \quad (II)$$

Integrando em V e após aplicando o Teorema de Fubini temos que (II) fica

$$\int_V |D^h u|^p dx \leq \int_V c\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |Du(x+the_i)|^p dtdx =$$

$$= c\sum_{i=1}^{n} \int_V \int_0^1 |Du(x+the_i)|^p dtdx = c\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_V |Du(x+the_i)|^p dxdt.$$

Notemos que

$$\int_V |Du(x+the_i)|^p dx = \int_{V_t} |Du(y)|^p dy \leq \int_\Omega |Du(y)|^p dy,$$

onde $y := x + the_i$ e $V_t := V + the_i$.

[1] A igualdade definida acima por $|D^h u|$ é uma semi-norma. Para ver isto vide anexo ao fim do trabalho

Logo,

$$\int_V |D^h u(x)|^p dx \leq c \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_\Omega |Du(y)|^p dy dt = c \cdot n \int_\Omega |Du(y)|^p dy$$

ou seja, acabamos de mostrar que

$$||D^h u||_{L^p(V)} \leq C ||Du||_{L^p(\Omega)}.$$

(ii) Suponhamos que $||D^h u||_{L^p(V)} \leq C$ $(\star)$ vale para todo $0 < |h| < \frac{1}{2}\text{dist}(V, \partial\Omega)$, com $C > 0$. Escolhemos $i \in \{1, ..., n\}$ e $\phi \in C_c^\infty(V)$ e notemos para algum h pequeno que

$$\int_V u(x) \left[\frac{\phi(x + he_i) - \phi(x)}{h}\right] dx = -\int_V \left[\frac{u(x) - u(x - he_i)}{h}\right] \phi(x) dx,$$

isto é

$$\int_V u(D_i^h \phi) dx = -\int_V (D_i^{-h} u) \phi dx \quad (\star\star)$$

Esta é a fórmula de “integração por partes”para quocientes-diferença.
A estimativa $(\star)$ implica que

$$\sup_h ||D_i^{-h} u||_{L^p(V)} < \infty,$$

e além disso, como $1 < p < \infty$, existe uma função $v_i \in L^p(V)$ e uma subseqüência $h_k \to 0$ tal que $D_i^{-h_k} u \rightharpoonup v_i$ fracamente em $L^p(V)$.
Mas, então, pelo teorema da convergência dominada,

$$\int_V u\phi_{x_i} dx = \int_\Omega u\phi_{x_i} dx = \lim_{h_k \to 0} \int_\Omega u D_i^{h_k} \phi dx = -\lim_{h_k \to 0} \int_V D_i^{-h_k} u \phi dx =$$

$$= -\int_V v_i \phi dx = -\int_\Omega v_i \phi dx.$$

Então $v_i = u_{x_i}$ no sentido fraco $(i = 1, ..., n)$ e então $Du \in L^p(V)$. Como $u \in L^p(V)$, deduzimos que $u \in W^{1,p}(V)$, concluindo assim o Teorema.

q.e.d.

Teorema 1.4 *Seja Ω um domínio $C^{1,1}$ em $\mathbb{R}^n$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Então para qualquer $\alpha > 0$, $0 < |\beta| < k$,*

$$||D^\beta u||_{p;\Omega} \leq \alpha ||u||_{k,p;\Omega} + C\alpha^{\frac{|\beta|}{|\beta| - k}} ||u||_{p;\Omega}$$

onde $C = C(k, \Omega)$.

Teorema 1.5 *(Desigualdade de Poincaré) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com Ω limitado. Se $f \in H_0^1(\Omega)$, então vale a desigualdade a seguir*

$$||f||_{L^2(\Omega)} \leq c||Df||_{L^2(\Omega)},$$

onde $c = c(n, \Omega)$.

Teorema 1.6 *(Desigualdades de Cauchy) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Temos que vale a seguinte desigualdade:*

$$a \cdot b \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \tag{1.3}$$

Em particular, para $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$,

$$a \cdot b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \tag{1.4}$$

1.2 Representação de Green

Seja Ω um domínio para o qual o Teorema da Divergência valha e sejam u, v funções $\in C^2(\overline{\Omega})$. Notando que $\mathrm{div}(vDu) = v\Delta u + DvDu$ e aplicando o Teorema(1.1)(da Divergência), obteremos a *primeira identidade de Green*:

$$\int_\Omega v\Delta u dx + \int_\Omega DuDv dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \tag{1.5}$$

Note também que vale

$$\int_\Omega u\Delta v dx + \int_\Omega DvDu dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} dS. \tag{1.6}$$

Subtraindo estas duas últimas igualdades:

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dx + \int_\Omega DuDv dx - \int_\Omega DuDv dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS \tag{1.7}$$

Esta última igualdade é a *segunda identidade de Green*.

1.3 Solução Fundamental de $\Delta u = 0$

A solução fundamental da Equação de Laplace $\Delta u = 0$ é dada por

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}\,|x-y|^{2-n} \ , \ n > 2; \\ \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y| \ , \ n = 2. \end{cases} \tag{1.8}$$

Note que, para $n > 2$,

$$D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} D_i \left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right]^{\frac{2-n}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\frac{2-n}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right]^{\frac{2-n}{2}-1} 2(x_i - y_i) =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right]^{\frac{2-n-2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n}$$

$$\Rightarrow D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\cdot\omega_n}\cdot(x_i - y_i).|x-y|^{-n} \tag{1.9}$$

Note que, derivando esta última igualdade, para $i \neq j$, obtemos

$$D_{ij}\Gamma(x-y) = \frac{1}{n.\omega_n}(x_i - y_i)D_j|x-y|^{-n} =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)D_j\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right]^{-\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)(-\frac{n}{2})\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right]^{-\frac{n}{2}-1} 2(x_j - y_j) =$$

$$= -\frac{1}{\omega_n}(x_i - y_i)(x_j - y_j)|x-y|^{-n-2}(a).$$

Caso tenhamos derivado novamente em relação a i,(i.e., $i = j$), obtemos

$$D_{ii}\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}D_i\left[(x_i - y_i)|x-y|^{-n}\right] =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}\left[(x_i - y_i)(-\frac{n}{2})\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right]^{-\frac{n}{2}-1} 2(x_i - y_i) + 1|x-y|^{-n}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\omega_n}(x_i - y_i)^2|x-y|^{-n-2} + \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n} =$$

$$= \left[-\frac{1}{\omega_n}(x_i - y_i)^2 + \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^2\right]|x-y|^{-n-2} \quad \text{(b)}$$

Note que podemos juntar (a) e (b) num só caso (i.e., $\forall i, j \in \{1, .., n\}$). Assim, juntando (a) e (b) obtemos a igualdade seguinte:

$$D_{ij}\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}\left[|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i - y_i)(x_j - y_j)\right]|x-y|^{-n-2}. \quad (1.10)$$

Realizamos estes cálculos pois no próximo capítulo iremos precisar das igualdades (1.9) e (1.10).

Capítulo 2

Estimativas L^p

Neste capítulo desenvolvemos um método de decomposição do cubo e o Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz, usado na demonstração do Teorema da Desigualdade de Calderon-Zygmund. Um corolário deste último teorema é de grande importância para o próximo capítulo, que trata da regularidade das soluções de $Lu = f$, com $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$.

2.1 Decomposição do Cubo (de Calderon)

Seja K_0 um cubo do $\mathbb{R}^n$, f uma função não-negativa integrável definida em K_0 e t um número positivo satisfazendo

$$\int_{K_0} f \leq t|K_0|. \tag{2.1}$$

Por bissecção das arestas de K_0, subdividimos K_0 em 2^n subcubos com interiores disjuntos. Os subcubos K que satisfazem

$$\int_K f \leq t|K| \tag{2.2}$$

são similarmente subdivididos e o processo é repetido indefinidamente. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de subcubos K obtidos que satisfazem

$$\int_K f > t|K|. \tag{2.3}$$

Para cada $K \in \mathcal{S}$ denotamos por $\tilde{K}$ o subcubo onde a subdivisão dá K. Disso, $\frac{|\tilde{K}|}{|K|} = 2^n$, temos para qualquer $K \in \mathcal{S}$

$$t < \frac{1}{|K|}\int_K f \leq 2^n t. \tag{2.4}$$

Além disso, fazendo $F = \bigcup_{K \in \mathcal{S}} \tilde{K}$ e $G = K_0 - F$, temos

$$f \leq t \;\; q.s. \text{ em } G. \tag{2.5}$$

Esta última desigualdade é conseqüência do Teorema de Diferenciação de Lebesgue, onde cada ponto de G está numa seqüência de cubos decrescentes satisfazendo (2.2)com diâmetros tendendo a zero.

Em particular, quando f é a função característica $\mathcal{X}_A$ de um subconjunto mensurável A de $\tilde{F}$, obtemos de (2.4) e (2.5) que:

$$|A| = |A \cap \tilde{F}| \leq t|\tilde{F}| \tag{2.6}$$

2.2 O Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz

Definição 2.1 Seja f uma função mensurável num domínio Ω (limitado ou não) em $\mathbb{R}^n$. A *função distribuição* $\mu = \mu_f$ de f é definida por

$$\mu(t) = \mu_f(t) = |\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}| \tag{2.7}$$

para $t > 0$ e mede o tamanho relativo de f.

Note que μ é uma função decrescente em $(0, \infty)$, pois dados $t_1, t_2 \in (0, \infty)$, com $t_1 < t_2$, temos que $|\{x \in \Omega | f(x) > t_1\}| \geq |\{x \in \Omega | f(x) > t_2\}|$,i.e., $\mu(t_1) \geq \mu(t_2)$. As propriedades básicas da função distribuição estão no lema que segue.

Lema 2.1 *Para algum $p > 0$ e $|f|^p \in L^1(\Omega)$, temos*

$$\mu(t) \leq t^{-p} \int_\Omega |f|^p dx, \tag{2.8}$$

$$\int_\Omega |f|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(t) dt \tag{2.9}$$

Demonstração:
Temos que $\mu(t) = |\{x \in \Omega | f(x) > t\}|$.
Segue que $f \geq t \Rightarrow |f|^p \geq t^p$. Com efeito, integrando, obtemos

$$\int_{|f| \geq t} |f|^p dx \geq \int_{|f| \geq t} t^p = t^p \int_{|f| \geq t} 1 dx = t^p |\{x \in \Omega | f(x) \geq t\}| = t^p \mu(t)$$

$$\Rightarrow \int_{|f|\geq t} |f|^p dx \geq t^p \mu(t)$$

e, como

$$\int_\Omega |f|^p dx \geq \int_{|f|\geq t} |f|^p dx \geq t^p \mu(t),$$

segue que

$\mu(t) \leq t^{-p} \int_\Omega |f|^p dx$, e (2.8) fica mostrado.

Provaremos agora (2.9). Suponha que $|f|^p \in L^1(\Omega)$. Note que

$$\int_\Omega |f|^p dx = \int_\Omega \int_0^{|f(x)|^p} dtdx = \int_\Omega \int_0^\infty \mathcal{X}_{0<t<|f(x)|^p}(x,t)dtdx$$

Aplicando agora o Teorema de Fubini, temos

$$\int_0^\infty \int_\Omega \mathcal{X}_{0<t<|f(x)|^p}(x,t)dxdt = \int_0^\infty \int_{\{x:|f(x)|^p>t\}} 1.dxdt =$$

$$= \int_0^\infty |\{|f(x)|^p > t\}|dt = \int_0^\infty |\{|f(x)| > t^{\frac{1}{p}}\}|dt$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |f|^p dx = \int_0^\infty |\{|f(x)| > t^{\frac{1}{p}}\}|dt \text{ (I)}$$

Fazendo $s = t^{\frac{1}{p}}$, temos:

$$\int_0^\infty |\{|f(x)| > t^{\frac{1}{p}}\}|dt = \int_0^\infty |\{|f(x)| > s\}|ps^{p-1}ds = p\int_0^\infty \mu(s)s^{p-1}ds \text{ (II)}$$

Logo, (I) e (II) provam a identidade (2.9).

q.e.d.

A seguir provamos o Teorema de Marcinkiewicz enunciado numa forma restrita.

Teorema 2.1 *Seja* $T : L^q(\Omega)\cap L^r(\Omega) \to L^q(\Omega)\cap L^r(\Omega)$ *uma aplicação linear,* $1 \leq q < r < \infty$ *e suponha que existam constantes* T_1 *e* T_2 *tais que*

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{T_1.||f||_q}{t}\right)^q \quad e \quad \mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{T_2.||f||_r}{t}\right)^r \qquad (2.10)$$

para toda $f \in L^q(\Omega)\cap L^r(\Omega)$ *e* $t > 0$.

Então, T estende-se como aplicação linear limitada de $L^p(\Omega)$ em si mesmo para qualquer p tal que $q < p < r$, e

$$||Tf||_p \leq cT_1^{\alpha}T_2^{1-\alpha}||f||_p \tag{2.11}$$

para toda $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\alpha}{q} + \dfrac{1-\alpha}{r}$ e c depende somente de p, q e r.

Demonstração

Para $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ e $s > 0$, escrevemos: $f = f_1 + f_2$, onde

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| > s, \\ 0 & \text{se } |f(x)| \leq s. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |f(x)| > s, \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq s. \end{cases}$$

Afirmação 01: $\mu(t) = \mu_{Tf}(t) \leq \mu_{Tf_1}(\frac{t}{2}) + \mu_{Tf_2}(\frac{t}{2})$**.**

Note que, c.f. a Teoria da Medida, se $A \subset B$ segue que $\mu(A) \leq \mu(B)$, onde A e B são conjuntos mensuráveis. Assim, tomando

$$A = \{x|Tf(x) \geq t\} \text{ e } B = \left\{x|Tf_1(x) \geq \frac{t}{2}\right\} \cup \left\{x|Tf_2(x) \geq \frac{t}{2}\right\},$$

basta mostrar que $A \subseteq B$.
Por absurdo, se $A \not\subseteq B$, então $\exists \beta \in A$ tal que $\beta \notin B$.
Logo, se $\beta \notin B$, segue que $Tf_1(\beta) < \dfrac{t}{2}$ e $Tf_2(\beta) < \dfrac{t}{2}$.
Mas então $Tf(\beta) = Tf_1(\beta) + Tf_2(\beta) < \dfrac{t}{2} + \dfrac{t}{2} = t \Rightarrow Tf(\beta) < t$, pois $f = f_1 + f_2$ e T é linear, mas isso é um absurdo, pois se $\beta \in A$ deveríamos obter $Tf(\beta) \geq t$.
Logo $A \subseteq B$.
Mas, c.f. citado acima, se $A \subseteq B$, segue que $\mu(A) \leq \mu(B)$, i.e.,

$$|\{x|Tf(x) \geq t\}| \leq \left|\left\{x|Tf_1(x) \geq \frac{t}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x|Tf_2(x) \geq \frac{t}{2}\right\}\right|,$$

o que equivale à Afirmação 01, c.f. (2.7). Logo, tal afirmação é verdadeira.
Logo, com a Afirmação 01 e as hipóteses sobre as constantes T_1 e T_2 dadas no Teorema, temos

$$\mu(t) = \mu_{Tf}(t) \leq \mu_{Tf_1}\left(\frac{t}{2}\right) + \mu_{Tf_2}\left(\frac{t}{2}\right) \leq \left(\frac{T_1||f_1||_q}{\frac{t}{2}}\right)^q + \left(\frac{T_2||f_2||_r}{\frac{t}{2}}\right)^r =$$

$$= \left(\frac{2T_1}{t}\right)^q ||f_1||_q^q + \left(\frac{2T_2}{t}\right)^r ||f_2||_r^r = \left(\frac{2T_1}{t}\right)^q \int_\Omega |f_1|^q + \left(\frac{2T_2}{t}\right)^r \int_\Omega |f_2|^r$$

Logo, $\mu(t) \leq \left(\frac{2T_1}{t}\right)^q \int_\Omega |f_1|^q + \left(\frac{2T_2}{t}\right)^r \int_\Omega |f_2|^r \quad (\star)$

Pelo lema(2.1) e por $(\star)$, temos

$$\int_\Omega |Tf|^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(t)dt \leq$$

$$\leq p\int_0^\infty t^{p-1}\left(\left(\frac{2T_1}{t}\right)^q \int_\Omega |f_1|^q\right)dt + p\int_0^\infty t^{p-1}\left(\left(\frac{2T_2}{t}\right)^r \int_\Omega |f_2|^r\right)dt = (\star\star)$$

e, pela definição de f_1 e f_2 temos

$$(\star\star) \leq p\int_0^\infty t^{p-1}\frac{(2T_1)^q}{t^q}\left(\int_{|f|>s}|f|^q\right)dt + p\int_0^\infty t^{p-1}\frac{(2T_2)^r}{t^r}\left(\int_{|f|\leq s}|f|^r\right)dt$$

$$= p(2T_1)^q\int_0^\infty t^{p-1-q}\left(\int_{|f|>s}|f|^q\right)dt + p(2T_2)^r\int_0^\infty t^{p-1-r}\left(\int_{|f|\leq s}|f|^r\right)dt$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |Tf|^p \leq p(2T_1)^q\int_0^\infty t^{p-1-q}\left(\int_{|f|>s}|f|^q\right)dt +$$

$$+p(2T_2)^r\int_0^\infty t^{p-1-r}\left(\int_{|f|\leq s}|f|^r\right)dt.$$

Escolhemos agora s como função de t. Em particular, tomamos $t = As$ para algum número positivo A, fixado posteriormente. Então temos

$$\int_\Omega |Tf|^p \leq p(2T_1)^q\int_0^\infty (As)^{p-1-q}\left(\int_{|f|>s}|f|^q\right)Ads +$$

$$+p(2T_2)^r\int_0^\infty (As)^{p-1-r}\left(\int_{|f|\leq s}|f|^r\right)Ads$$

$$= p(2T_1)^qA^{p-q}\underbrace{\int_0^\infty s^{p-1-q}\left(\int_{|f|>s}|f|^q\right)ds}_{\text{(I)}} +$$

$$+p(2T_2)^rA^{p-r}\underbrace{\int_0^\infty s^{p-1-r}\left(\int_{|f|\leq s}|f|^r\right)ds}_{\text{(II)}}.$$

Mas,

$$(I) = \int_0^\infty s^{p-1-q}\left(\int_{|f|>s}|f|^q\right)ds = \int_\Omega |f|^q\left(\int_0^{|f|} s^{p-1-q}ds\right) = \int_\Omega |f|^q \frac{s^{p-q}}{p-q}\Big|_0^{|f|} =$$

$$= \int_\Omega |f|^q \frac{|f|^{p-q}}{p-q} = \frac{1}{p-q}\int_\Omega |f|^p \Rightarrow (I) = \frac{1}{p-q}\int_\Omega |f|^p$$

e também temos:

$$(II) = \int_0^\infty s^{p-1-r}\left(\int_{|f|\le s}|f|^r\right)ds = \int_\Omega |f|^r\left(\int_{|f|}^\infty s^{p-1-r}ds\right) =$$

$$= \int_\Omega |f|^r \lim_{m\to+\infty}\frac{s^{p-r}}{p-r}\Big|_{|f|}^m = \frac{1}{p-r}\int_\Omega |f|^r \lim_{m\to+\infty}(m^{p-r}-|f|^{p-r}) =$$

$$= -\frac{1}{p-r}\int_\Omega |f|^r|f|^{p-r} = \frac{1}{r-p}\int_\Omega |f|^p$$

$$\Rightarrow (\mathrm{II}) = \frac{1}{r-p}\int_\Omega |f|^p$$

Nos cálculos acima notamos que $m^{p-r} \to 0$ quando $m \to \infty$, pois temos que $p < r$, por hipótese.
Conseqüentemente, temos que a última desigualdade fica

$$\int_\Omega |Tf|^p \le p(2T_1)^q A^{p-q}\frac{1}{p-q}\int_\Omega |f|^p + p(2T_2)^q A^{p-r}\frac{1}{r-p}\int_\Omega |f|^p =$$

$$= \left\{\frac{p}{p-q}(2T_1)^q A^{p-q} + \frac{p}{r-p}(2T_2)^r A^{p-r}\right\}\int_\Omega |f|^p$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |Tf|^p \le \left\{\frac{p}{p-q}(2T_1)^q A^{p-q} + \frac{p}{r-p}(2T_2)^r A^{p-r}\right\}\int_\Omega |f|^p \quad (\mathrm{III})$$

para qualquer número A. Vamos agora tomar o valor de A para que a expressão entre chaves de (III) seja mínima.
Considere $g(A) = \dfrac{p}{p-q}(2T_1)^q A^{p-q} + \dfrac{p}{r-p}(2T_2)^r A^{p-r}$. Com isso temos que $g(A)$ é o aditivo entre chaves de (III). Calculemos $g'(A)$, com o intuito de se obter o mínimo:

$$g'(A) = \frac{p}{p-q}(2T_1)^q(p-q)A^{p-q-1} + \frac{p}{r-p}(2T_2)^r(p-r)A^{p-r-1} =$$

$$p(2T_1)^q A^{p-q-1} - p(2T_2)^r A^{p-r-1}$$

Com efeito, temos

$$g'(A) = 0 \Leftrightarrow p(2T_1)^q A^{p-q-1} - p(2T_2)^r A^{p-r-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(2T_1)^q A^{p-q-1} = p(2T_2)^r A^{p-r-1} \Leftrightarrow (2T_1)^q A^{p-q-1} = (2T_2)^r A^{p-r-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2T_1)^q}{(2T_2)^r} = \frac{A^{p-r-1}}{A^{p-q-1}} \Leftrightarrow 2^{q-r}T_1^q T_2^{-r} = A^{p-r-1}A^{-p+q+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{q-r}T_1^q T_2^{-r} = A^{p-r-1-p+q+1} = A^{q-r} \Leftrightarrow A^{q-r} = 2^{q-r}T_1^q T_2^{-r} \Leftrightarrow$$

$$(A^{q-r})^{\frac{1}{q-r}} = 2^{\frac{q-r}{q-r}} T_1^{\frac{q}{q-r}} T_2^{-\frac{r}{q-r}} \Leftrightarrow A = 2T_1^{\frac{q}{q-r}} T_2^{\frac{r}{r-q}}.$$

Este é o valor de A que dá ponto crítico. Precisamos mostrar que este valor de A é ponto de mínimo.
Sejam $A_1 = \alpha T_1^{\frac{q}{q-r}} T_2^{\frac{r}{r-q}}$ e $A_2 = \beta T_1^{\frac{q}{q-r}} T_2^{\frac{r}{r-q}}$, com $0 < \alpha < 2$ e $\beta > 2$. Temos que $A_1 < A < A_2$. Lembremos ainda que $g'(A) = p(2T_1)^q A^{p-q-1} - p(2T_2)^r A^{p-r-1}$. Temos as seguintes afirmações.

Afirmação 02: $g'(A_1) < 0$**.**

$$g'(A_1) = p.2^q T_1^q T_1^{\frac{q(p-q-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}} \alpha^{p-q-1} - p.2^r T_2^r T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-r-1)}{r-q}} \alpha^{p-r-1}$$

$$= p.2^q T_1^{\frac{q(q-r)+q(p-q-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-r-1)}{r-q}} \alpha^{p-q-1} - p.2^r T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(r-q)+r(p-r-1)}{r-q}} \alpha^{p-r-1}$$

$$= p.2^q T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-r-1)}{r-q}} \alpha^{p-1}\alpha^{-q} - p.2^r T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}} \alpha^{p-1}\alpha^{-r}$$

$$= p\left(\left(\frac{2}{\alpha}\right)^q - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^r\right) T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}} \alpha^{p-1}.$$

Note que $p > 0$, $\alpha^{p-1} > 0$, $T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} > 0$ e $T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}} > 0$. Logo, falta verificar apenas o sinal de $\left(\frac{2}{\alpha}\right)^q - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^r$.

Note que , como $q < p < r \Rightarrow q < r \Rightarrow \left(\frac{2}{\alpha}\right)^q < \left(\frac{2}{\alpha}\right)^r \Rightarrow \left(\frac{2}{\alpha}\right)^q - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^r < 0$. Logo, $g'(A_1) < 0$, provando assim a Afirmação 02.

Afirmação 03: $g'(A_2) > 0$**.**

$$g'(A_2) = p.2^q T_1^q \beta^{p-q-1} T_1^{\frac{q(p-q-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}} - p.2^r T_2^r \beta^{p-r-1} T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-r-1)}{r-q}} =$$

$$= p.2^q \beta^{p-q-1} T_1^{\frac{q(q-r)+q(p-q-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}} - p.2^r \beta^{p-r-1} T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(r-q)+r(p-r-1)}{r-q}}$$

$$p.2^q \beta^{p-q-1} T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}} - p.2^r \beta^{p-r-1} T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}}$$

$$= p\beta^{p-1}(2^q\beta^{-q} - 2^r\beta^{-r}) T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}}.$$

Novamente, temos que $p > 0$, $\beta^{p-1} > 0$, $T_1^{\frac{q(p-r-1)}{q-r}} > 0$ e $T_2^{\frac{r(p-q-1)}{r-q}} > 0$. Vamos agora analisar a diferença entre parênteses. Temos que

$$2^q\beta^{-q} - 2^r\beta^{-r} = \left(\frac{2}{\beta}\right)^q - \left(\frac{2}{\beta}\right)^r$$

Note que $\beta > 2 \Rightarrow \frac{2}{\beta} < 1$.

Além disso, como $q < r$ segue que $\left(\frac{2}{\beta}\right)^q > \left(\frac{2}{\beta}\right)^r$, ou seja, $\left(\frac{2}{\beta}\right)^q - \left(\frac{2}{\beta}\right)^r > 0$ o que mostra que tal diferença é positiva, provando assim a Afirmação 03.

Portanto, como $g'(A) = 0$ e pelas afirmações 02) e 03), $g'(A_1) < 0 = g'(A) < g'(A_2)$, onde $A_1 < A < A_2$; temos que de fato $A = 2T_1^{\frac{q}{q-r}} T_2^{\frac{r}{r-q}}$ é ponto de mínimo. E este será o valor de A a ser tomado.

Assim, com $A = 2T_1^{\frac{q}{q-r}} T_2^{\frac{r}{r-q}}$, temos que (III) fica:

$$||Tf||_p^p = \int_\Omega |Tf|^p \leq$$

$$\leq \left\{ \frac{p}{p-q}(2T_1)^q \left(2T_1^{\frac{q}{q-r}} T_2^{\frac{r}{r-q}}\right)^{p-q} + \frac{p}{r-p}(2T_2)^r \left(2T_1^{\frac{q}{q-r}} T_2^{\frac{r}{r-q}}\right)^{p-r} \right\} \int_\Omega |f|^p$$

$$= \left\{ \frac{p}{p-q} 2^q T_1^q 2^{p-q} T_1^{\frac{q(p-q)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q)}{r-q}} + \frac{p}{r-p} 2^r T_2^r 2^{p-r} T_1^{\frac{q(p-r)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-r)}{r-q}} \right\} \int_\Omega |f|^p$$

$$= \left\{ \frac{p}{p-q} 2^p T_1^{\frac{q(q-r)+q(p-q)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q)}{r-q}} + \frac{p}{r-p} 2^p T_1^{\frac{q(p-r)}{q-r}} T_2^{\frac{r(r-q)+r(p-q)}{r-q}} \right\} \int_\Omega |f|^p$$

$$= \left\{ \frac{p}{p-q} 2^p T_1^{\frac{q(p-r)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q)}{r-q}} + \frac{p}{r-p} 2^p T_1^{\frac{q(p-r)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q)}{r-q}} \right\} \int_\Omega |f|^p$$

$$= \left\{ \left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p} \right) 2^p T_1^{\frac{q(p-r)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q)}{r-q}} \right\} ||f||_p^p$$

$$\Rightarrow ||Tf||_p^p \leq \left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p} \right) 2^p T_1^{\frac{q(p-r)}{q-r}} T_2^{\frac{r(p-q)}{r-q}} ||f||_p^p$$

Elevando à potência $\frac{1}{p}$, temos:

$$\Rightarrow ||Tf||_p \leq 2 \left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p} \right)^{\frac{1}{p}} T_1^{\frac{q(p-r)}{p(q-r)}} T_2^{\frac{r(p-q)}{p(r-q)}} ||f||_p \quad \text{(IV)}$$

Chamando $c = 2 \left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p} \right)^{\frac{1}{p}}$ e $\alpha = \frac{q(p-r)}{p(q-r)}$, temos que:

$$1 - \alpha = 1 - \frac{q(p-r)}{p(q-r)} = 1 + \frac{q(p-r)}{p(r-q)} = \frac{p(r-q) + q(p-r)}{p(r-q)}$$

$$= \frac{pr - pq + pq - qr}{p(r-q)} = \frac{r(p-q)}{p(r-q)}$$

Com estas condições, notamos que (IV) fica na forma

$$||Tf||_p \leq c.T_1^\alpha T_2^{1-\alpha} ||f||_p \ ,$$

onde notamos também que

$$\frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{r} = \frac{q(p-r)}{p(q-r)} \frac{1}{q} + \frac{r(p-q)}{p(r-q)} \frac{1}{r} = \frac{p-r}{p(q-r)} + \frac{p-q}{p(r-q)} =$$

$$= \frac{p-r}{p(q-r)} + \frac{q-p}{p(q-r)} = \frac{p-r+q-p}{p(q-r)} = \frac{1}{p}$$

Isto conclui o teorema.

q.e.d.

2.3 A Desigualdade de Calderon- Zygmund

Nesta seção estabelecemos as estimativas L^p básicas para a equação de Poisson através de considerações adicionais do Potencial Newtoniano que será definido a seguir.

Definição 2.2 Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ e f uma função em $L^p(\Omega)$ para algum $p \geq 1$. Definimos o operador *Pontencial Newtoniano* de f por

$$N(f)(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy, \tag{2.12}$$

onde Γ é a solução fundamental da Equação de Laplace, c.f. (1.8).

Obs.: Muitas vezes utilizaremos, por comodidade, a notação seguinte:

$$N(f)(x) = w(x).$$

Lema 2.2 O operador Newtoniano N é um operador contínuo de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

Demonstração:
De acordo com a Definição acima, temos que $N(f)(x) = \displaystyle\int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy$. Logo,

$$||N(f)||_{L^2}^2 = \int_\Omega |N(f)(x)|^2 dx \leq \int_\Omega \left(\int_\Omega |\Gamma(x-y)| \cdot |f(y)| dy \right)^2 dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_\Omega |\Gamma(x-y)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\Gamma(x-y)|^{\frac{1}{2}} \cdot |f(y)| dy \right)^2 dx = (\star).$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy- Schwarz e notando que

$$\int_\Omega |\Gamma(x-y)| dy = C_x \leq C,$$

temos

$$(\star) \leq \int_\Omega \left[\left(\int_\Omega |\Gamma(x-y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\Gamma(x-y)| \cdot |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx$$

$$\leq C \int_\Omega \int_\Omega |\Gamma(x-y)|.|f(y)|^2 dy dx = C \int_\Omega |f(y)|^2 \int_\Omega |\Gamma(x-y)| dx dy$$

$$\leq C^2 \int_\Omega |f(y)|^2 dy = C^2 \cdot ||f||_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow ||N(f)||_{L^2}^2 \leq C^2 \cdot ||f||_{L^2}^2 \Rightarrow ||N(f)||_{L^2} \leq C.||f||_{L^2}.$$

q.e.d.

Teorema 2.2 *Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $N(f) = w$ o Potencial Newtoniano de f. Então $w \in H^2(\Omega)$, $\Delta w = f$ q.s. e*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2 w|^2 = \int_\Omega f^2, \tag{2.13}$$

onde

$$|D^2 w| = \left(\sum_{i,j=1}^n |D_{ij} w|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, se $w \in W_0^{2,2}(\Omega)$ é solução de $\Delta w = f$ q.s., então esta igualdade também é válida.

Demonstração: Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta w = f$. Conseqüentemente, para qualquer bola B_R contendo o suporte de f;

$$\int_{B_R} (\Delta w)^2 = \int_{B_R} f^2$$

Por definição,

$$\int_{B_R} |D^2 w|^2 dx = \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^n (D_{ij} w)^2 dx =$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{B_R} \sum_{i=1}^n (D_i(D_j w))^2 = \sum_{j=1}^n \int_{B_R} |\nabla D_j w|^2 dx. \text{ (I)}$$

Aplicando o Teorema da Divergência para $v = D_j w$, $j \in \{1, ..., n\}$, temos

$$\int_{B_R} |\nabla D_j w|^2 dx = \int_{B_R} |\nabla v|^2 = \int_{\partial B_R} v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_{B_R} v \Delta v dx. \text{ (II)}$$

Como $\Delta w = f$, vale

$$\Delta v = \Delta D_j w = D_j \Delta w = D_j f$$

Além disso, como $f \in C_c^\infty(B_R)$,

$$\int_{B_R} v \Delta v dx = \int_{B_R} D_j w D_j f dx = -\int_{B_R} f D_{jj} w dx. \qquad \text{(III)}$$

De (III) e (II) segue que:

$$\int_{B_R} |\nabla D_j w|^2 dx = \int_{\partial B_R} D_j w \frac{\partial D_j w}{\partial \nu} dS + \int_{B_R} f D_{jj} w dx$$

A partir disso, e de (I), temos

$$\int_{B_R} |D^2 w|^2 dx = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\partial B_R} D_j w \frac{\partial D_j w}{\partial \nu} dS + \int_{B_R} f D_{jj} w dx \right) =$$

$$= \int_{\partial B_R} \nabla w \frac{\partial \nabla w}{\partial \nu} dS + \int_{B_R} f \Delta w dx = \int_{\partial B_R} \nabla w \frac{\partial \nabla w}{\partial \nu} dS + \int_{B_R} f^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_{B_R} |D^2 w|^2 dx = \int_{\partial B_R} \nabla w \frac{\partial \nabla w}{\partial \nu} dS + \int_{B_R} f^2 dx \text{ (IV)}$$

Obs.: Caso $w \in W_0^{2,2}(\Omega)$ então $\int_{\Omega} \nabla w \frac{\partial \nabla w}{\partial \nu} dS = 0$, completando a segunda afirmação do teorema.

De acordo com (1.9),

$$D_i \Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n} (x_i - y_i)|x-y|^{-n}.$$

Logo,

$$|D_i \Gamma(x-y)| = \frac{1}{n\omega_n} |x_i - y_i| . |x-y|^{-n} \leq \frac{1}{n\omega_n} |x-y| . |x-y|^{-n} = c|x-y|^{-n+1}.$$

Então $D_i \Gamma(x-y) = O(|x-y|^{1-n})$, pois dizemos que $f = O(g)$ se $\exists c > 0$ tal que $|f| \leq c|g|$.
Também vale

$$D_{ij} \Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n} \{|x-y|^2 \delta_{ij} - n(x_i - y_i)(x_j - y_j)\}|x-y|^{-n-2}, \text{ por (1.10)}.$$

Logo,

$$|D_{ij} \Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{n\omega_n} \{|x-y|^2 + n|x-y|^2\}|x-y|^{-n-2} = \frac{1+n}{n\omega_n} |x-y|^{-n},$$

concluindo que $D_{ij} \Gamma(x-y) = O(|x-y|^{-n})$.
Ou seja, com $R = |x-y|$, temos que

$$Dw = O(R^{1-n}) \text{ e } D^2 w = O(R^{-n}) \tag{2.14}$$

uniformemente em ∂B_R quando $R \to +\infty$. Assim concluímos que

$$\int_{\partial B_R} \nabla w \frac{\partial \nabla w}{\partial \nu} dS \to 0$$

quando $R \to +\infty$ e com isto, de (IV) segue a igualdade que queríamos provar, ou seja, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2 w|^2 = \int_{\Omega} f^2.$$

Por um argumento de aproximação, podemos estender o resultado para $f \in L^2(\Omega)$.

q.e.d.

Teorema 2.3 *(Desigualdade de Calderon-Zygmund) Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e seja w o Potencial Newtoniano de f. Então $w \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta w = f$ q.s. e*

$$||D^2 w||_p \leq c||f||_p \tag{2.15}$$

onde c é uma constante que depende apenas de n e p.

Obs.: O Teorema anterior é caso particular deste quando $p = 2$.

Demonstração:

(i) Para i, j fixados, definimos o operador linear $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ por:

$$Tf = D_{ij}w$$

Por essa definição e pelo lema(2.1) temos

$$\mu(t) = \mu_{Tf}(t) = \mu_{D_{ij}w}(t) \leq t^{-2} \int_\Omega |D_{ij}w|^2 = (\star)$$

Como $|D_{ij}w|^2 \leq |D^2 w|^2$, segue que

$$(\star) \leq t^{-2} \int_\Omega |D^2 w|^2 = (\star\star)$$

e, por (2.13), segue que

$$(\star\star) = t^{-2} \int_\Omega |f|^2 = \frac{||f||_2^2}{t^2} = \left(\frac{||f||_2}{t}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mu(t) = \mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{||f||_2}{t}\right)^2 \tag{2.16}$$

para todo $t > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$.
Mostraremos agora que

$$\mu(t) \leq c\frac{||f||_1}{t} \tag{2.17}$$

para todo $t > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$, condição necessária para aplicar o Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz. Primeiro estendemos f como sendo nula fora de Ω e fixamos um cubo $K_0 \supset \Omega$ tal que para $t > 0$ fixado, temos

$$\int_{K_0} f < t|K_0|.$$

Aplicamos a decomposição do cubo K_0 de acordo com o procedimento descrito na seção (2.1), induzindo uma seqüência de subcubos paralelos $\{K_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ tal que

$$t < \frac{1}{|K_\ell|}\int_{K_\ell}|f| < 2^n t \tag{2.18}$$

e $|f| \leq t$ q.s. em $G = K_0 - \cup K_\ell$.
A função f é agora dividida em duas partes: uma "parte boa" g, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \in G, \\ \dfrac{1}{|K_\ell|}\displaystyle\int_{K_\ell} f & \text{para } x \in K_\ell, \ell = 1, 2, ... \end{cases}$$

e uma "parte ruim" $b = f - g$.
Temos a seguir as seguintes afirmações:

Afirmação 01: $|g| \leq 2^n t$ q.s.

$|g| = |f| \leq t$ q.s., se $x \in G = K_0 - \cup K_\ell$; ou
$|g| = \left|\dfrac{1}{|K_\ell|}\displaystyle\int_{K_\ell} f\right| \leq \dfrac{1}{|K_\ell|}\displaystyle\int_{K_\ell}|f| < 2^n t$, se $x \in K_\ell$, por (2.18).
Em ambos os casos, podemos escrever $|g| \leq 2^n t$, provando assim a Afirmação 01.
Afirmação 02: $b(x) = 0$ para $x \in G$.

Como $b(x) = f(x) - g(x)$ e sabendo que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in G$, segue-se o resultado.
Afirmação 03: $\displaystyle\int_{K_\ell} b(x) = 0$, $\forall \ell = 1, 2, ...$

Note que

$$\int_{K_\ell} b(x) = \int_{K_\ell} f(x) - g(x) = \int_{K_\ell} f(x) - \int_{K_\ell} g(x) = \int_{K_\ell} f(x) - \int_{K_\ell}\frac{1}{|K_\ell|}\int_{K_\ell} f(x) =$$

$$\int_{K_\ell} f(x) - \frac{1}{|K_\ell|}\int_{K_\ell} 1. \int_{K_\ell} f(x) = \int_{K_\ell} f(x) - \frac{1}{|K_\ell|}|K_\ell|\int_{K_\ell} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{K_\ell} b(x) = 0 \ , \ \forall \ell = 1, 2, ...$$

Visto que T é linear, temos $Tf = Tg + Tb$, e disso,

$$\mu_{Tf}(t) \leq \mu_{Tg}\left(\frac{t}{2}\right) + \mu_{Tb}\left(\frac{t}{2}\right) \tag{2.19}$$

(mesma estimativa feita durante a demonstração do Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz)

(ii) Estimativa de Tg:
Por (2.16), temos

$$\mu_{Tg}(\frac{t}{2}) \leq \left(\frac{||g||_2}{\frac{t}{2}}\right)^2 = \frac{4||g||_2^2}{t^2} = \frac{4}{t^2}\int g^2 = \frac{4}{t^2}\int |g||g| = (\star)$$

e, como pela Afirmação 01 vale que $|g| \leq 2^n t$ q.s. , temos

$$(\star) \leq \frac{4}{t^2}\int |g|2^n t = \frac{4.2^n}{t}\int |g| = \frac{2^{n+2}}{t}\int |g| = (\star\star)$$

e, pela definição de g, segue que

$$(\star\star) = \frac{2^{n+2}}{t}\int |f|$$

$$\Rightarrow \mu_{Tg}\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{2^{n+2}}{t}\int |f|. \tag{2.20}$$

(iii)Estimativa de Tb:
Escrevendo

$$b_\ell = b\mathcal{X}_{K_\ell} = \begin{cases} b & \text{em } K_\ell, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

temos

$$Tb = \sum_{\ell=1}^{\infty} Tb_\ell$$

Fixemos então algum ℓ e uma seqüência $\{b_{\ell_m}\} \subset C_c^\infty(K_\ell)$ convergindo a b_ℓ em L^2 satisfazendo

$$\int_{K_\ell} b_{\ell_m} = \int_{K_\ell} b_\ell.$$

Pela definição de b_ℓ e a Afirmação 03, temos

$$\int_{K_\ell} b_{\ell_m} = \int_{K_\ell} b_\ell = \int_{K_\ell} b = 0$$

Note que $Tb_{\ell_m} = D_{ij}v$, onde

$$v(x) = \int_{K_\ell} \Gamma(x-y) b_{\ell_m} dy$$

Para $x \notin K_\ell$, a aplicação $y \to \Gamma(x-y)$ não possui singularidade em K_ℓ, já que $y \neq x \quad \forall y \in K_\ell$. De fato, a função é analítica em K_ℓ. Portanto,

$$D_{ij}v(x) = D_{ij}\int_{K_\ell}\Gamma(x-y)b_{\ell_m}(y)dy = \int_{K_\ell} D_{ij}\Gamma(x-y)b_{\ell_m}(y)dy$$

Note também que, para x e $\bar{y}$ fixos,

$$\int_{K_\ell} D_{ij}\Gamma(x-\bar{y})b_{\ell_m}(y)dy = D_{ij}\Gamma(x-\bar{y})\int_{K_\ell} b_{\ell_m}(y)dy = 0,$$

pela Afirmação 03. Logo,

$$D_{ij}v(x) = \int_{K_\ell} D_{ij}\Gamma(x-y)b_{\ell_m}(y)dy =$$

$$= \int_{K_\ell} D_{ij}\Gamma(x-y)b_{\ell_m}(y)dy - \int_{K_\ell} D_{ij}\Gamma(x-\bar{y})b_{\ell_m}(y)dy =$$

$$= \int_{K_\ell} \{D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(x-\bar{y})\}\, b_{\ell_m}(y)dy$$

$$\Rightarrow |Tb_{\ell_m}(x)| \leq \int_{K_\ell} \{D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(x-\bar{y})\} b_{\ell_m}(y)dy$$

onde $\bar{y} = \bar{y}_\ell$ denota o centro de K_ℓ. Chamando de $\delta = \delta_\ell$ o diâmetro de K_ℓ, obtemos a seguinte estimativa

$$|Tb_{\ell_m}(x)| = |\int_{K_\ell} (D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(x-\bar{y}))b_{\ell_m}(y)dy|$$

$$\leq \int_{K_\ell} |D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(x-\bar{y})|.|b_{\ell_m}(y)|dy = (\star)$$

Usando o Teorema do Valor Médio, com $x-\tilde{y}$ entre $x-y$ e $x-\bar{y}$ (i.e., $\tilde{y}$ entre y e $\bar{y}$) e também a Desigualdade de Cauchy para normas, temos

$$(\star) = \int_{K_\ell} |\nabla D_{ij}\Gamma(x-\tilde{y})(x-y-x+\bar{y})|.|b_{\ell_m}(y)|dy$$

$$\leq \int_{K_\ell} |\nabla D_{ij}\Gamma(x-\tilde{y})|.|y-\bar{y}|.|b_{\ell_m}(y)|dy = (\star\star)$$

e como $|y-\bar{y}| \leq \delta$, pois δ é o diâmetro de K_ℓ, temos

$$(\star\star) \leq \delta\int_{K_\ell} |\nabla D_{ij}\Gamma(x-\tilde{y})|.|b_{\ell_m}(y)|dy = (\tilde{\star})$$

Note agora que, de acordo com (1.9),

$$\frac{\partial\Gamma(u)}{\partial u_i} = \frac{1}{n\omega_n}|u|^{-n}u_i.$$

Assim,

$$\nabla\Gamma(u) = \left(\frac{1}{n\omega_n}|u|^{-n}u_1, ..., \frac{1}{n\omega_n}|u|^{-n}u_n\right) = \frac{1}{n\omega_n}|u|^{-n}(u_1, ..., u_n).$$

$$\Rightarrow \nabla\Gamma(u) = \frac{1}{n\omega_n}|u|^{-n}u$$

onde $u \in \mathbb{R}^n$ é um ponto do $\mathbb{R}^n$ de coordenadas $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$.
Note que, como vale a igualdade $D_{ij}\nabla\Gamma(u) = \nabla D_{ij}\Gamma(u)$ para $n > 2$, temos, para $i \neq j$,

$$\nabla D_{ij}\Gamma(u) = D_{ij}\nabla\Gamma(u) = D_j(D_i(\nabla\Gamma(u))) = D_j\left(D_i\left(\frac{1}{n\omega_n}|u|^{-n}u\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}D_j(D_i(|u|^{-n}\cdot u)) = \frac{1}{n\omega_n}D_j(D_i\{(u_1^2 + ... + u_n^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot(u_1, ..., u_n)\}) =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}D_j\left(-\frac{n}{2}(u_1^2 + ... + u_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}2u_i(u_1, ..., u_n) + (u_1^2 + ... + u_n^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot e_i\right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}\left[-nu_i\left(\frac{-n-2}{2}\right)(u_1^2 + ... + u_n^2)^{\frac{-n-2}{2}-1}2u_j.(u_1, ..., u_n) + \right.$$

$$\left. +(-n)u_i(u_1^2 + ... + u_n^2)^{\frac{-n-2}{2}}e_j + e_i\cdot\left(-\frac{n}{2}\right)(u_1^2 + ... + u_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}2u_j\right]$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\left[(n+2)u_iu_j|u|^{-n-4}\cdot u - e_j|u|^{-n-2}u_i - e_i|u|^{-n-2}u_j\right]$$

onde $e_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$ é o vetor com todas entradas nulas, exceto a i-ésima componente, que vale 1.

Obs.: Nos cálculos acima consideramos $i \neq j$. Para $i = j$ ocorrerá uma situação análoga ao ocorrido na seção(1.2). Omitimos essa situação aqui apenas por comodidade.
Tomando-se o módulo, temos

$$|\nabla D_{ij}\Gamma(u)| = \frac{1}{\omega_n}|(n+2)u_iu_j|u|^{-n-4}\cdot u - e_j|u|^{-n-2}u_i - e_i|u|^{-n-2}u_j|$$

$$\leq \frac{1}{\omega_n}[(n+2)|u_i|\cdot|u_j|\cdot|u|^{-n-4}|u| + 1\cdot|u|^{-n-2}|u_i| + 1\cdot|u|^{-n-2}|u_j|]$$

$$\leq \frac{1}{\omega_n}[(n+2)|u|\cdot|u|\cdot|u|^{-n-4}|u| + |u|^{-n-2}|u| + |u|^{-n-2}|u|]$$

$$= \frac{1}{\omega_n}[(n+2)|u|^{-n-1} + |u|^{-n-1} + |u|^{-n-1}] = \frac{n+4}{\omega_n}|u|^{-n-1}.$$

Logo

$$|\nabla D_{ij}\Gamma(u)| \leq \frac{n+4}{\omega_n}|u|^{-n-1}.$$

Tomando $u = x - \tilde{y}$ e chamando $c(n) := \dfrac{n+4}{\omega_n}$, a desigualdade acima fica

$$|\nabla D_{ij}\Gamma(x-\tilde{y})| \le c(n)|x-\tilde{y}|^{-n-1}.$$

Levando esta última desigualdade para $(\tilde{\star})$, temos

$$(\tilde{\star}) = \delta \int_{K_\ell} |\nabla D_{ij}\Gamma(x-\tilde{y})|.|b_{\ell_m}(y)|dy \le \delta \int_{K_\ell} c(n)|x-\tilde{y}|^{-n-1}|b_{\ell_m}(y)|dy$$

$$= \delta c(n) \int_{K_\ell} \frac{1}{|x-\tilde{y}|^{n+1}}|b_{\ell_m}(y)|dy = (A)$$

Definindo a distância entre x e K_ℓ da forma usual

$$\mathrm{dist}(x, K_\ell) := \inf_{y\in K_\ell} |x-y|,$$

temos que

$$\mathrm{dist}(x, K_\ell) = \inf_{y\in K_\ell} |x-y| \le |x-\tilde{y}| \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{dist}(x,K_\ell)} \ge \frac{1}{|x-\tilde{y}|}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\mathrm{dist}(x,K_\ell)}\right]^{n+1} \ge \frac{1}{|x-\tilde{y}|^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{|x-\tilde{y}|^{n+1}} \le \left[\frac{1}{\mathrm{dist}(x,K_\ell)}\right]^{n+1}$$

e com isso, temos que (A) fica

$$(A) \le \delta.c(n) \int_{K_\ell} \left[\frac{1}{\mathrm{dist}(x,K_\ell)}\right]^{n+1} |b_{\ell_m}|dy$$

$$= \delta.c(n) \left[\mathrm{dist}(x,K_\ell)\right]^{-n-1} \int_{K_\ell} |b_{\ell_m}(y)|dy$$

$$\Rightarrow |Tb_{\ell_m}(x)| \le \delta.c(n)[\mathrm{dist}(x,K_\ell)]^{-n-1} \int_{K_\ell} |b_{\ell_m}(y)|dy$$

para $x \notin K_\ell$.
Sendo $B_\ell = B(\bar{y})$ a bola de raio δ concêntrica ao cubo K_ℓ, integrando a desigualdade encontrada acima, temos

$$\int_{K_0 - B_\ell} |Tb_{\ell_m}| \le c(n).\delta \int_{K_0 - B_\ell} [\mathrm{dist}(x,K_\ell)]^{-n-1} \int_{K_\ell} |b_{\ell_m}(y)|dydx$$

$$\le c(n).\delta \int_{|x|\ge\frac{\delta}{2}} |x|^{-n-1}dx \int_{K_\ell} |b_{\ell_m}(y)|dy \le$$

$$\le c(n).\delta \int_{|x|\ge\frac{\delta}{2}} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-1} dx \int_{K_\ell} |b_{\ell_m}(y)|dy$$

$$= \underbrace{c(n).\delta.\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-1}\int_{|x|\geq\frac{\delta}{2}} dx}_{C(n)} \int_{K_\ell} |b_{\ell_m}(y)|dy = C(n)\int_{K_\ell}|b_{\ell_m}(y)|dy$$

$$\Rightarrow \int_{K_0-B_\ell} |Tb_{\ell_m}| \leq C(n)\int_{K_\ell}|b_{\ell_m}(y)|dy \quad (\star)$$

Denotemos $F^* = \cup B_\ell$ e $G^* = K_0 - F^*$.
Por construção de b_{ℓ_m}, temos que $b_{\ell_m} \to b_\ell$ em L^2, logo $\int_{K_\ell}|b_{\ell_m}| \to \int_{K_\ell}|b_\ell|$.
A partir disto, de $(\star)$ e da linearidade de T, obtemos

$$\int_{K_0-B_\ell}|Tb_{\ell_m}| \to \int_{K_0-B_\ell}|Tb_\ell|.$$

Com estas informações e com a última desigualdade feita acima, temos

$$\int_{K_0-B_\ell}|Tb_\ell| \leq C(n)\int_{B_\ell}|b_\ell|.$$

Como $F^* = \cup B_\ell$, temos que $K_0 - F^* \subseteq K_0 - B_\ell$ e portanto,

$$\int_{K_0-F^*}|Tb_\ell| \leq \int_{K_0-B_\ell}|Tb_\ell| \leq C(n)\int_{K_\ell}|b_\ell|.$$

Somando em relação a todos os ℓ´s, temos

$$\sum_\ell \int_{K_0-F^*}|Tb_\ell| \leq C(n)\sum_\ell\int_{K_\ell}|b_\ell|.$$

Logo, por propriedades elementares, temos

$$\int_{K_0-F^*}|Tb| = \int_{K_0-F^*}|\sum_\ell Tb_\ell| \leq \int_{K_0-F^*}\sum_\ell|Tb_\ell| = \sum_\ell\int_{K_0-F^*}|Tb_\ell|$$

$$\leq C(n)\sum_\ell\int_{K_\ell}|b| = C(n)\int_{\cup^+K_\ell}|b|,$$

onde $\cup^+K_\ell$ representa a união disjunta dos K_ℓ's.
Com isso, segue que

$$\int_{K_0-F^*}|Tb| \leq C(n)\int_{\cup^+K_\ell}|b| \leq 2C(n)\int_{\cup^+K_\ell}|f|dx \leq c(n)\int_{K_0}|f|dx =$$

$$= c(n)\int_\Omega |f|dx \quad (\tilde{\star})$$

pois $\cup^+K_\ell \subset K_0$ e

$$\int_{\cup^+ K_\ell} |b|dx = \sum_\ell \int_{K_\ell} |b|dx,$$

onde

$$\int_{K_\ell} |b|dx = \int_{K_\ell} |f-g|dx \leq \int_{K_\ell} (|f|+|g|)dx = \int_{K_\ell} |f|dx + \int_{K_\ell} \left| \frac{1}{|K_\ell|} \int_{K_\ell} f \right| dx$$

$$\leq \int_{K_\ell} |f| + \int_{K_\ell} \frac{1}{|K_\ell|} \int_{K_\ell} |f|dx = \int_{K_\ell} |f|dx + \frac{1}{|K_\ell|} \int_{K_\ell} |f|. \int_{K_\ell} dx$$

$$\int_{K_\ell} |f|dx + \frac{1}{|K_\ell|} \int_{K_\ell} |f|.|K_\ell| = 2\int_{K_\ell} |f|dx$$

concluindo que

$$\int_{\cup^+ K_\ell} |b|dx \leq \sum_\ell 2\int_{K_\ell} |f|dx = 2\int_{\cup^+ K_\ell} |f|dx,$$

mostrando que valem as desigualdades em $(\tilde{\star})$.
Assim, lembrando que denotamos $K_0 - F^* = G^*$, temos

$$\int_{G^*} |Tb| \leq c(n) \int_\Omega |f| \quad (\star\star)$$

A partir disso, utilizando-se do Lema (2.1) com $p = 1 > 0$, concluímos que

$$|\{x \in G^* ||Tb| > \frac{t}{2}\}| = \mu_{Tb}\left(\frac{t}{2}\right) \leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-1} \int_\Omega |Tb| = (I)$$

e por $(\star\star)$, temos

$$(I) \leq \frac{2}{t}c(n)\int_\Omega |f| = \frac{c_1(n)||f||_1}{t}$$

$$\Rightarrow |\{x \in G^* ||Tb| > \frac{t}{2}\}| \leq \frac{c_1(n)||f||_1}{t}. \tag{2.21}$$

Chamando $\delta = \delta_\ell$ o diâmetro do cubo K_ℓ e ℓ a medida do seu lado, e lembrando também que, por construção feita, B_ℓ é a bola concêntrica a K_ℓ de raio δ, temos que

$$\delta = \text{diam}(K_\ell).$$

Mas $\text{diam}K_\ell = \ell\sqrt{n}$

$$\Rightarrow \ell\sqrt{n} = \delta = r_{B_\ell}.$$

Assim, sendo $|B_\ell|$ o volume da bola B_ℓ, temos

$$|B_\ell| = \omega_n r_{B_\ell}^n = \omega_n(\ell\sqrt{n})^n = \omega_n n^{\frac{n}{2}}\ell^n.$$

Como $\ell^n = |K_\ell|$ =volume do cubo K_ℓ, então

$$|B_\ell| = \omega_n n^{\frac{n}{2}} |K_\ell|.$$

Somando sob todos os ℓ's, teremos:

$$|F^*| = |\cup B_\ell| = |\sum_\ell B_\ell| \leq \sum_\ell |B_\ell| = \sum_\ell \omega_n n^{\frac{n}{2}} |K_\ell|$$

$$= \omega_n n^{\frac{n}{2}} \sum_\ell |K_\ell| = \omega_n^{\frac{n}{2}} |F|$$

$$\Rightarrow |F^*| \leq \omega_n n^{\frac{n}{2}} |F|$$

Note também que

$$||f||_1 = \int_\Omega |f| dx \geq \int_F |f| dx = \int_{\cup K_\ell} |f| dx = \sum_\ell \int_{K_\ell} |f| dx = (A)$$

e, por (2.18) temos

$$(A) \geq \sum_\ell |K_\ell| t = t \sum_\ell |K_\ell| = t|F|.$$

Assim, $||f||_1 \geq t|F| \Rightarrow |F| \leq \dfrac{||f||_1}{t}$.
Juntando esta última desigualdade com a anterior, obtemos

$$|F^*| \leq \omega_n n^{\frac{n}{2}} |F| \leq \omega_n n^{\frac{n}{2}} \frac{||f||_1}{t} = c(n) \frac{||f||_1}{t},$$

onde $c(n) := \omega_n n^{\frac{n}{2}}$. Juntando esta desigualdade com (2.21), temos que

$$\mu_{Tb}\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{c}{t} ||f||_{L^1}.$$

A partir disso e de (2.19)e de (2.20)concluímos (2.17).
(iv) Para concluir a prova do Teorema (2.3), notamos que (2.16) e (2.17), que são respectivamente:

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{1.||f||_2}{t}\right)^2 , \; \mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{c.||f||_1}{t}\right)^1$$

cumprem as hipóteses do Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz com $q = 1$, $r = 2$, $T_1 = c$ e $T_2 = 1$. Conseqüentemente, temos

$$||Tf||_p \leq c_1 T_1^\alpha T_2^{1-\alpha} ||f||_p,$$

para $1 < p < 2$, onde temos, c.f. visto na demonstração do Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz, que

$$\alpha = \frac{q(p-r)}{p(q-r)} = \frac{2-p}{p} \Rightarrow \alpha = \alpha(p).$$

Logo, α depende de p. Do mesmo modo, temos que a constante c_1 é

$$c_1 = 2\left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p}\right)^{\frac{1}{p}} = 2\left(\frac{p}{p-1} + \frac{p}{2-p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo, $c_1 = c_1(p)$, i.e., c_1 também depende de p; e finalmente, temos que $T_1 = C(n) = \omega_n n^{\frac{n}{2}}$, c.f. visto anteriormente.
Assim, $||Tf||_p \leq c_1 C(n)^{\alpha(p)} 1 ||f||_p = c(n,p)||f||_p$, onde $c(n,p) := c_1 C(n)^{\alpha(p)}$ é uma constante que depende de n e de p. Então

$$||Tf||_p \leq c(n,p)||f||_p \tag{2.22}$$

para todo $1 < p \leq 2$ e $f \in L^2(\Omega)$. Veremos agora que a desigualdade (2.22) pode ser estendida para $p > 2$ por dualidade.
Visto que se $f, g \in C_c^\infty(\Omega)$ e tendo em mente a definição dada para Tf, então

$$\int_\Omega (Tf)g = \int_\Omega (D_{ij}w)g = \int_\Omega D_i(D_j w)g = (\alpha)$$

Aplicando o Teorema da Divergência

$$(\alpha) = -\int_\Omega D_j w D_i g + \int_{\partial\Omega} D_j w.g\nu dS = (\beta)$$

Como $g \in C_c^\infty(\Omega)$, segue que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} D_j w.g\nu dS = 0$, e com isso temos

$$(\beta) = -\int_\Omega D_j w D_i g = (\gamma)$$

Aplicando novamente o Teorema da Divergência, segue que

$$(\gamma) = \int_\Omega w D_{ij} g - \int_{\partial\Omega} w D_i g \nu dS$$

Mas como $g \in C_c^\infty(\Omega)$, segue que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} w D_i g \nu dS = 0$, donde concluímos que

$$\int_\Omega (Tf)g(x)dx = \int_\Omega w(x) D_{ij} g(x) dx$$

Como $w = N(f)$,

$$\int_\Omega (Tf)g(x)dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy\right) D_{ij} g(x) dx$$

$$= \int_\Omega \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)D_{ij}g(x)dxdy = \int_\Omega f(y)(\int_\Omega \Gamma(x-y)D_{ij}g(x)dx)dy = (\star).$$

Analisemos a integral mais interna: $\int_\Omega \Gamma(x-y)D_{ij}g(x)dx$.
Como $g \in C_c^\infty(\Omega)$, podemos estender esta integral para todo o $\mathbb{R}^n$, identificando-se então uma convolução entre $\Gamma(x-y)$ e $D_{ij}g(x)$

$$\int_\Omega \Gamma(x-y)D_{ij}g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)D_{ij}g(x)dx = (\Gamma * D_{ij}g)(y)$$

e, por propriedade de convolução, temos

$$\int_\Omega \Gamma(x-y)D_{ij}g(x)dx = (\Gamma * D_{ij}g)(y) = D_{ij}(\Gamma * g)(y) =$$

$$= D_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)g(x)dx = D_{ij} \int_\Omega \Gamma(x-y)g(x)dx.$$

Como

$$Tg(y) = D_{ij}Ng(y) = D_{ij} \int_\Omega \Gamma(y-x)g(x)dx$$

$$= D_{ij} \int_\Omega \Gamma(|y-x|)g(x)dx = D_{ij} \int_\Omega \Gamma(x-y)g(x)dx,$$

concluímos que

$$\int_\Omega \Gamma(x-y)D_{ij}g(x)dx = Tg(y),$$

e com isto, mostramos que $(\star)$ fica

$$\int_\Omega (Tf)g(x)dx = \int_\Omega f(y) \left(\int_\Omega \Gamma(x-y)D_{ij}g(x)dx \right) dy$$

$$= \int_\Omega f(y)Tg(y)dy \leq (\int_\Omega |f(y)|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega |Tg(y)|^q)^{\frac{1}{q}} = ||f||_{L^p}.||Tg||_{L^q},$$

onde a última desigualdade é conseqüência da Desiguladade de Hölder com $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Assim,

$$\int_\Omega (Tf)g(x)dx \leq ||f||_{L^p}.||Tg||_{L^q}$$

Então, se $p > 2$ segue que $q < 2$ e, usando (2.22),

$$||Tf||_p = \sup\{\int_\Omega (Tf)g | ||g||_{L^q} = 1\} \leq \sup_{||g||_{L^q}=1} ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$$

$$\leq ||f||_{L^p} c(n,q) ||g||_{L^q} \leq c(n,q)||f||_{L^p}$$

logo (2.22) vale para todo $1 < p < \infty$. Note também que $||Tf||_p = ||D_{ij}w||_p$, e, além disso,

$$||D^2w||_p = \sum_{i,j=1}^{n} ||D_{ij}w||_p = \sum_{i,j=1}^{n} ||Tf||_p \leq \sum_{i,j=1}^{n} c(n,q)||f||_p$$
$$= n^2 c(n,q)||f||_p = C(n,q)||f||_p$$
$$\Rightarrow ||D^2w||_p \leq C(n,q)||f||_p$$

Como no caso $p = 2$ podemos então inferir a conclusão do Teorema 2.3 por aproximação.

q.e.d.

Corolário 2.1 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Então*

$$||D^2u||_p \leq C||\Delta u||_p \tag{2.23}$$

onde $C = C(n,p)$. Se $p = 2$, teremos

$$||D^2u||_2 = ||\Delta u||_2 \tag{2.24}$$

Demonstração:
Como $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ e $\Delta u = f$ em Ω, consideremos

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - \Omega. \end{cases}$$

Note que $\tilde{u} \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, e

$$\Delta\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - \Omega. \end{cases},$$

com $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
Seja $w = N(\tilde{f})$ em $\mathbb{R}^n$ e consideremos $\Delta w = \tilde{f}$. Seja também $v = \tilde{u} - w$.
Logo $v \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$ e $-\Delta v = 0$ q.s.
Portanto, $\Delta v = 0$ no sentido fraco, pois

$$\int \nabla\varphi\nabla v = -\int \varphi\Delta v = 0, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então, pela teoria clássica temos que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, $\Delta v = 0$, no sentido clássico.

Logo,

$$\Delta\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \in \{1, ..., n\},$$

e além disso, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ é limitada em Ω, pois Ω é limitado. De fato, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ é limitada em $\mathbb{R}^n$, pois

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega^c \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = O(R^{1-n}), \quad \text{c.f. } (2.14)\ .$$

Assim, v_{x_i} é harmônica e limitada.
Portanto, v_{x_i} é constante, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, e com isso temos que $v_{x_i x_j} = 0$, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$. Então

$$||D_{ij}u||_{L^p(\Omega)} = ||D_{ij}(v + w)||_{L^p(\Omega)} = ||D_{ij}w||_{L^p(\Omega)}$$

Assim, com auxílio do teorema precedente, temos

$$||D_{ij}u||_p = ||D_{ij}w||_p \leq c||\Delta w||_p = c||\Delta(u - v)||_p = c||\Delta u||_p,$$

ou seja,

$$||D^2 u||_p \leq c||\Delta u||_p.$$

Fazendo $p = 2$ teremos, c.f. Teorema de Calderon-Zygmund, que

$$||D^2 u||_2^2 = ||D^2 w||_2^2 = \int |D^2 w|^2 = \int f^2 = \int (\Delta u)^2 = ||\Delta u||_2^2$$

$$\Rightarrow ||D^2 u||_2 = ||\Delta u||_2,$$

provando assim (2.24). Isto conclui a demonstração do corolário.

q.e.d.

Obs.:*Este Corolário será de grande importância para o próximo capítulo.*

Capítulo 3

Regularidade de Soluções de $Lu = f$

Neste capítulo estudamos a regularidade de soluções fortes da EDP elíptica $Lu = f$. Para tanto, definimos o que é uma solução forte desta equação e a partir disso demonstramos o principal resultado deste capítulo.

Definição 3.1 Para operadores da forma geral

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b^{i}(x) D_i u + c(x)u \tag{3.1}$$

com coeficientes a^{ij}, b^i, c, onde $i, j = 1, ..., n$ definidos num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função f em Ω, dizemos que u é uma *solução forte* da equação

$$Lu = f \tag{3.2}$$

se $u \in W^{2,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ e satisfaz (3.2) para quase todo ponto.

Teorema 3.1 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, uma solução forte da equação $Lu = f$em Ω onde os coeficientes de L satisfazem, para constantes positivas λ e Λ,*

$$a^{ij} \in C^0(\Omega); b^i, c \in L^\infty(\Omega), f \in L^p(\Omega); , a^{ij} = a^{ji},$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$
$$|a^{ij}|, |b^i|, |c| \leq \Lambda,$$

onde $i, j = 1, ..., n$. Então, para qualquer domínio $\Omega' \subset\subset \Omega$,

$$||u||_{2,p;\Omega'} \leq c(||u||_{p;\Omega} + ||f||_{p;\Omega}),$$

onde c depende de $n, p, \lambda, \Lambda, \Omega, \Omega'$ e do módulo de continuidade dos coeficientes a^{ij} em Ω'.

Demonstração:
Para um ponto $x_0 \in \Omega'$ fixado, denotemos por L_0 o operador de coeficientes constantes definido por:

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) D_{ij} u.$$

Como $A := [a^{ij}(x_0)]$ é simétrica, existe uma matriz P ortogonal e uma matriz D diagonal tais que $A = P^t D P$. Note que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

onde os λ's são autovalores de A.
Fazendo a troca de variável $y = PX$, temos $dy = |\det P| dX = dX$, pois P é ortogonal. Assim,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1n} \\ ... & ... & ... \\ p_{n1} & ... & p_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} y_1 = p_{11}x_1 + ... + p_{1n}x_n \\ .... \\ y_n = p_{n1}x_1 + ... + p_{nn}x_n \end{cases}$$

Derivando parcialmente em relação a x_i, $i \in \{1, ..., n\}$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} = p_{1i} \\ ... \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = p_{ki} \\ ... \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = p_{ni} \end{cases}$$

Então

$$D_{ij}u = D_{x_i x_j} u = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial u}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1} p_{1i} + ... + \frac{\partial u}{\partial y_n} p_{ni}\right). \quad (\star)$$

Chamando $h = \dfrac{\partial u}{\partial y_1} p_{1i} + ... + \dfrac{\partial u}{\partial y_n} p_{ni}$, segue que

$$(\star) = \frac{\partial h}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial h}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}p_{1i} + ... + \frac{\partial u}{\partial y_n}p_{ni}\right)\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}p_{1i} + ... + \frac{\partial u}{\partial y_n}p_{ni}\right)\frac{\partial y_n}{\partial x_j}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}p_{1i}p_{1j} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_n}p_{ni}p_{1j}\right) + ... + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_n y_1}p_{1i}p_{nj} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}p_{ni}p_{nj}\right)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}p_{ki}p_{lj}$$

$$\Rightarrow D_{ij}u = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}p_{ki}p_{lj}.$$

Assim, temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)D_{ij}u = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}p_{ki}p_{lj} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)p_{ki}p_{lj}$$

$$= \mathrm{tr}(D^2_{yy}uPAP^t) = \mathrm{tr}(D^2_{yy}u.D) = \lambda_1 u_{y_1y_1} + ... + \lambda_n u_{y_ny_n}$$

onde $D^2_{yy}u$ representa a derivada segunda de u, na nova variável y pela mudança. Então

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)D_{ij}u = \lambda_1 u_{y_1y_1} + ... + \lambda_n u_{y_ny_n}$$

Integrando em Ω, e fazendo a troca conveniente de coordenadas $y = PX$, c.f. já discutido, temos

$$\int_\Omega |\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)D_{ij}u|^p dX = \int_{\Omega_y} |\lambda_1 u_{y_1y_1} + ... + \lambda_n u_{y_ny_n}|^p dy. \quad (\star\star)$$

Seja uma nova mudança de variável, dada por $z_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}y_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Então

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y_1} + ... + \frac{\partial u}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + 0 + ... + 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial y_i} = \frac{\partial u}{\partial z_i}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \quad , \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

Derivando-se pela segunda vez, com $i \in \{1, ..., n\}$ teremos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{\partial u}{\partial z_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{\partial u}{\partial z_i}\right)\right) = \frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}.$$

Logo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} = \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_i} \qquad i \in \{1, ..., n\}.$$

Voltando à $(\star\star)$, temos com esta segunda troca de variável

$$(\star\star) = \int_{\Omega_y} |\lambda_1 u_{y_1 y_1} + ... + \lambda_n u_{y_n y_n}|^p dy = \int_{\Omega_z} |u_{z_1 z_1} + ... + u_{z_n z_n}|^p \sqrt{\lambda_1} ... \sqrt{\lambda_n} dz$$

$$= \sqrt{\lambda_1} ... \sqrt{\lambda_n} \int_{\Omega_z} |u_{z_1 z_1} + ... + u_{z_n z_n}|^p \, dz = \sqrt{\lambda_1} ... \sqrt{\lambda_n} ||\Delta_{zz} u||_p^p \geq$$

$$\geq \sqrt{\lambda_1} ... \sqrt{\lambda_n} \frac{1}{C^p} ||D_{zz}^2 u||_p^p$$

A desigualdade acima é consequëncia do Corolário (2.1). Segue que

$$\int_{\Omega} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) D_{ij} u \right|^p dX \geq \sqrt{\lambda_1} .... \sqrt{\lambda_n} \frac{1}{C^p} ||D_{zz}^2 u||_p^p. \quad (A)$$

Note que

$$\sqrt{\lambda_1} .... \sqrt{\lambda_n} ||D_{zz}^2 u||_p^p = \int_{\Omega_z} |D_{zz}^2 u(z)|^p \sqrt{\lambda_1} ... \sqrt{\lambda_n} dz$$

$$= \int_{\Omega_y} \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} \right) \right|^p \sqrt{\lambda_1} ... \sqrt{\lambda_n} dz. \quad (1)$$

Como $dy = \sqrt{\lambda_1} ... \sqrt{\lambda_n} dz$, e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}$,

$$\int_{\Omega_y} \left| \left(\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \right) \right|^p dy \geq \int_{\Omega_y} (\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda})^p \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \right) \right|^p dy =$$

$$= \lambda^p \int_{\Omega_y} \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \right) \right|^p dy \quad (2)$$

onde $\lambda := \min\limits_{i \in \{1,..,n\}} \{\lambda_i\}$.

Como $D^2 u = P^t D_{yy}^2 u P$ e P é ortogonal, segue que as matrizes $D^2 u$ e $D_{yy}^2 u$ têm a mesma norma, ou seja,

$$|D^2 u| = |D_{yy}^2 u|$$

A partir disto, usando (1) e (2), segue que

$$\int_{\Omega_z} |D^2_{zz}u|^p \sqrt{\lambda_1} ... \sqrt{\lambda_n} dz \geq \lambda^p \int_{\Omega} |D^2 u| dX. \quad (B)$$

Juntando (A) com(B), temos

$$\int_{\Omega} |L_0 u|^p dX = \int_{\Omega} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) D_{ij} u \right|^p dX \geq \frac{1}{c^p} \lambda^p \int_{\Omega} |D^2 u|^p dX.$$

Logo

$$||D^2 u||_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |D^2 u|^p dX \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{c^p}{\lambda^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) D_{ij} u \right|^p dX \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{c}{\lambda} \left(\int_{\Omega} |L_0 u|^p dX \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{c}{\lambda} ||L_0 u||_{p,\Omega}.$$

Ou seja, temos a estimativa

$$||D^2 v||_{p;\Omega} \leq \frac{c}{\lambda} ||L_0 v||_{p;\Omega}, \tag{3.4}$$

para qualquer $v \in W^{2,p}(\Omega)$, onde $c = c(n,p)$ como em (2.20). Conseqüentemente, se v tem suporte na bola $B_R = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$, temos

$$L_0 v = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) D_{ij} v = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) D_{ij} v - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x_0) - a^{ij}) D_{ij} v + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v,$$

e, por (3.4), obtemos

$$||D^2 v||_p \leq \frac{c}{\lambda} ||L_0 v||_p = \frac{c}{\lambda} || \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x_0) - a^{ij}) D_{ij} v + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p$$

$$\leq \frac{c}{\lambda} \left[|| \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x_0) - a^{ij}) D_{ij} v||_p + || \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p \right] \leq$$

$$\leq \frac{c}{\lambda} \left(\sup_{B_R} |a - a(x_0)|.||D_{ij} v||_p + || \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p \right)$$

$$\leq \frac{c}{\lambda} \left(\sup_{B_R} |a - a(x_0)|.||D^2 v||_p + || \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p \right),$$

onde $a = [a^{ij}]$. Como a é uniformemente contínua em Ω', existe um $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$, então

$$|a - a(x)| \leq \frac{\lambda}{2c},$$

e com isso temos

$$||D^2 v||_p \leq \frac{c}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2c}||D^2 v||_p + ||\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p\right),$$

o que equivale a

$$||D^2 v||_p - \frac{1}{2}||D^2 v||_p \leq \frac{c}{\lambda}||\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}||D^2 v||_p \leq \frac{c}{\lambda}||\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p \Rightarrow ||D^2 v||_p \leq \frac{2c}{\lambda}||\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p$$

$$\Rightarrow ||D^2 v||_p \leq C||\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p,$$

onde $C = \dfrac{2c(n,p)}{\lambda}$ é uma constante que depende de n, p e λ, contanto que $R \leq \delta$.

Tomemos $\sigma \in (0,1)$. Iremos agora introduzir uma função "cutoff"$\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$0 \leq \eta \leq 1,$$

$$\eta = 1 \text{ em } B_{\sigma R},$$

$$\eta = 0 \text{ para } |x| \geq \sigma' R, \sigma' = \frac{1+\sigma}{2},$$

$$|D\eta| \leq \frac{4}{(1-\sigma)R},$$

$$|D^2\eta| \leq \frac{16}{(1-\sigma)^2 R^2}.$$

Então, se $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ satisfaz $Lu = f$ em Ω e $v = \eta u$, pela desigualdade $||D^2 v||_p \leq C||\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} v||_p$ obtida anteriormente e também pelo fato de que $\eta = 1$ em $B_{\sigma R}$, temos

$$||D^2 v||_{p,B_{\sigma R}} = ||D^2 \eta u||_{p,B_{\sigma R}} = ||D^2 u||_{p,B_{\sigma R}}$$

e

$$||D^2u||_{p,B_{\sigma R}} = ||D^2v||_{p,B_{\sigma R}} \leq c||\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}v||_{p,B_{\sigma R}} = c||\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}\eta u||_{p,B_{\sigma R}}, \ \ (\alpha)$$

Note que

$$D_{ij}(\eta \cdot u) = D_i(D_j(\eta u)) = D_i(\eta D_j u + D_j\eta \cdot u) = D_i(\eta D_j u) + D_i(D_j\eta \cdot u) =$$

$$= \eta D_{ij}u + D_i\eta D_j u + D_j\eta D_i u + D_{ij}\eta \cdot u$$

$$\Rightarrow a^{ij}D_{ij}\eta u = a^{ij}(\eta D_{ij}u + D_i\eta D_j u + D_j\eta D_i u + D_{ij}\eta \cdot u) =$$

$$= \eta a^{ij}D_{ij}u + a^{ij}(D_i\eta D_j u + D_j\eta D_i u) + ua^{ij}D_{ij}\eta$$

Juntando isto com (α) e notando que $B_{\sigma R} \subset B_R$, uma vez que $\sigma < 1$, temos

$$||D^2u||_{p,B_{\sigma R}} \leq c||\eta\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}u + \sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}D_i\eta D_j u + a^{ij}D_j\eta D_i u) + u\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}\eta||_{p,B_{\sigma R}} \leq$$

$$\leq c||\eta\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}u + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_i\eta D_j u + a^{ij}D_j\eta D_i u + u\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}\eta||_{p,B_R} \leq$$

$$\leq c[||\eta\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}u||_{p,B_R} + 2\sum_{i,j=1}^{n}||a^{ij}D_i\eta D_j u||_{p,B_R} + ||u\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}\eta||_{p,B_R}]. \ \ (I)$$

De acordo com (3.1), temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}u = f - \sum_{i=1}^{n} b^iD_iu - c.u.$$

Assim

$$(I) = c\left[||\eta(f - \sum_{i=1}^{n} b^iD_iu - c.u)||_{p,B_R} + ||2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_i\eta D_j u||_{p,B_R} + \right.$$

$$\left. + ||u\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}\eta||_{p,B_R}\right] \leq$$

$$\leq c\left[||\eta f||_{p,B_R} + ||\eta\sum_{i=1}^{n} b^iD_iu||_{p,B_R} + ||\eta cu||_{p,B_R} + ||2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_i\eta D_j u||_{p,B_R} + \right.$$

$$\left. + ||u\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}\eta||_{p,B_R}\right] \quad (\star)$$

e como $\eta = 0$ para $|x| \geq \sigma' R$, segue que

$$(\star) \leq c\left[|\eta|_\infty \cdot ||f||_{p,B_R} + \sum_{i=1}^{n} |b^i|_\infty \cdot ||\eta D_i u||_{p,B_{\sigma' R}} + ||\eta c \cdot u||_{p,B_{\sigma' R}} + \right.$$

$$\left. +2||\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_i\eta D_j u||_{p,B_{\sigma' R}} + ||u\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij}\eta||_{p,B_{\sigma' R}}\right] \leq$$

$$\leq c\left[|\eta|_\infty \cdot ||f||_{p,B_R} + \sum_{i=1}^{n} |b^i|_\infty \cdot |\eta|_\infty \cdot ||D_i u||_{p,B_{\sigma' R}} + |\eta|_\infty \cdot |c| \cdot ||u||_{p,B_{\sigma' R}} + \right.$$

$$\left. +2|\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}| \cdot |D_i\eta| \cdot ||D_j u||_{p,B_{\sigma' R}} + |\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}| \cdot |D_{ij}\eta|.||u||_{p,B_{\sigma' R}}\right] = (II)$$

onde $|\eta|_\infty = \sup\limits_{x\in B_R} |\eta(x)|$ e como

$$|\eta| \leq 1, \;\; |b^i| = |c| = |a^{ij}| \leq \Lambda \;\;,\;\; |D_i\eta| \leq |D\eta| \leq \frac{4}{(1-\sigma)R},$$

$$|D_{ij}\eta| \leq |D^2\eta| \leq \frac{16}{(1-\sigma)^2R^2} \;\;,\;\; \sum_{i=1}^{n} |b^i| \leq n\Lambda,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a^{ij}| \leq n^2\Lambda,$$

$$||D_j u|| \leq ||Du||,$$

segue que

$$(II) \leq c\left[||f||_{p,B_R} + n\Lambda.1.||Du||_{p,B_{\sigma' R}} + 1.\Lambda||u||_{p,B_{\sigma' R}} + 2n^2\Lambda\frac{4}{(1-\sigma)R}||Du||_{p,B_{\sigma' R}} + \right.$$

$$\left. + n^2\Lambda\frac{16}{(1-\sigma)^2R^2}||u||_{p,B_{\sigma' R}}\right] =$$

$$= c\left[||f||_{p,B_R} + \left(\Lambda + n^2\Lambda\frac{16}{(1-\sigma)^2R^2}\right)||u||_{p,B_{\sigma' R}} + \right.$$

$$\left. + \left(n\Lambda + n^2\Lambda\frac{8}{(1-\sigma)R}\right)||Du||_{p,B_{\sigma' R}}\right] = (III)$$

Note que, como $0 < \sigma < 1$, segue que $0 < (1-\sigma)^2 < 1$, e tomando $R \leq \delta \leq 1$, temos que $0 < (1-\sigma)^2R^2 < R^2 \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{(1-\sigma)^2R^2} \geq 1$.

Analogamente obtemos $\dfrac{1}{(1-\sigma)R} \geq 1$.

Assim, para $n > 2$, temos as majorações

$$n\Lambda \leq n^2\Lambda\frac{16}{(1-\sigma)^2R^2},$$

$$n\Lambda \leq n^2\Lambda\frac{8}{(1-\sigma)^2R^2},$$

e portanto, (III) fica

$$(III) \leq c\left[||f||_{p,B_R} + \left(n^2\Lambda\frac{16}{(1-\sigma)^2R^2} + n^2\Lambda\frac{16}{(1-\sigma)^2R^2}\right)||u||_{p,B_{\sigma'R}} + \right.$$

$$\left. + \left(n^2\Lambda\frac{8}{(1-\sigma)R} + n^2\Lambda\frac{8}{(1-\sigma)R}\right)||Du||_{p,B_{\sigma'R}}\right] =$$

$$= c\left[1.||f||_{p,B_R} + 32n^2\Lambda\frac{1}{(1-\sigma)^2R^2}||u||_{p,B_{\sigma'R}} + 16n^2\Lambda\frac{1}{(1-\sigma)R}||Du||_{p,B_{\sigma'R}}\right] = (IV)$$

Seja $M := \max\{1, 32n^2\Lambda, 16n^2\Lambda\}$. Temos que:

$$(IV) \leq c\left[M||f||_{p,B_R} + M\frac{1}{(1-\sigma)^2R^2}||u||_{p,B_{\sigma'R}} + M\frac{1}{(1-\sigma)R}||Du||_{p,B_{\sigma'R}}\right] =$$

$$= cM\left(||f||_{p,B_R} + \frac{1}{(1-\sigma)R}||Du||_{p,B_{\sigma'R}} + \frac{1}{(1-\sigma)^2R^2}||u||_{p,B_{\sigma'R}}\right),$$

onde $cM := C(n, \Lambda, p, \lambda)$ e $R \leq \delta \leq 1$.
Logo, acabamos de mostrar que

$$||D^2u||_{p,B_R} \leq C\left(||f||_{p,B_R} + \frac{1}{(1-\sigma)R}||Du||_{p,B_{\sigma'R}} + \frac{1}{(1-\sigma)^2R^2}||u||_{p,B_{\sigma'R}}\right),$$

com $C = C(n, \Lambda, p, \lambda)$ e $R \leq \delta \leq 1$.
Introduzimos agora as seminormas[1]

$$\Phi_k = \sup_{0<\sigma<1}(1-\sigma)^kR^k||D^ku||_{p,B_{\sigma R}} \quad , \quad k = 0, 1, 2.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $(1-\sigma)^2R^2$ e lembrando que $(1-\sigma)^2 < 1$, temos

$$(1-\sigma)^2R^2||D^2u||_{p,B_R} \leq C\left((1-\sigma)^2R^2||f||_{p,B_R} + (1-\sigma)R||Du||_{p,B_{\sigma'R}} + ||u||_{p,B_{\sigma'R}}\right) \leq$$

$$\leq C\left(1.R^2||f||_{p,B_R} + (1-\sigma)R||Du||_{p,B_{\sigma'R}} + ||u||_{p,B_{\sigma'R}}\right)$$

[1] A prova encontra-se no anexo

Note também que, como $\sigma^{'} = \dfrac{1+\sigma}{2}$, segue que

$$1-\sigma^{'} = 1 - \left(\frac{1+\sigma}{2}\right) = \frac{2-1-\sigma}{2} = \frac{1-\sigma}{2}$$

$$\Rightarrow 1-\sigma = 2(1-\sigma^{'}),$$

e, portanto, temos que a desigualdade acima fica

$$(1-\sigma)^2R^2||D^2u||_{p,B_{\sigma R}} \leq C\left(1.R^2||f||_{p,B_{\sigma R}} + 2(1-\sigma^{'})R||Du||_{p,B_{\sigma^{'}R}} + \right.$$

$$\left. + ||u||_{p,B_{\sigma^{'}R}}\right) \leq$$

$$\leq C\left(2.R^2||f||_{p,B_R} + 2(1-\sigma^{'})R||Du||_{p,B_{\sigma^{'}R}} + 2.||u||_{p,B_{\sigma^{'}R}}\right) =$$

$$= 2C\left(R^2||f||_{p,B_R} + (1-\sigma^{'})R||Du||_{p,B_{\sigma^{'}R}} + ||u||_{p,B_{\sigma^{'}R}}\right).$$

Chamando $c = 2C$, note que vale a majoração seguinte para qualquer $\sigma^{'}$ fixado

$$(1-\sigma)^2R^2||D^2u||_{p,B_{\sigma R}} \leq c\left(R^2||Du||_{p,B_{\sigma^{'}R}} + (1-\sigma^{'})R||Du||_{p,B_{\sigma^{'}R}} + \right.$$

$$\left. + ||u||_{p,B_{\sigma^{'}R}}\right) \leq c(R^2||f||_{p,B_R} + \Phi_1 + \Phi_0),$$

para qualquer σ. Em particular para o supremo, tem-se que

$$\Phi_2 = \sup_{0<\sigma<1}(1-\sigma)^2R^2||D^2u||_{p,B_{\sigma R}} \leq c(R^2||f||_{p,B_R} + \Phi_1 + \Phi_0)$$

$$\Rightarrow \Phi_2 \leq c(R^2||f||_{p,B_R} + \Phi_1 + \Phi_0) \tag{3.5}$$

Afirmação: A seguinte desigualdade

$$\Phi_1 \leq \varepsilon\Phi_2 + \frac{c}{\varepsilon}\Phi_0 \tag{3.6}$$

vale para qualquer $\varepsilon > 0$, onde $c = c(n)$.
Prova: Fazendo uma mudança de coordenadas, vemos que é suficiente provar para o caso $R = 1$.
Para $\gamma > 0$, fixamos $\sigma = \sigma_\gamma$ tal que

$$\Phi_1 \leq (1-\sigma_\gamma)||Du||_{p;B_\sigma} + \gamma.$$

Pelo Teorema (1.3), temos

$$||Du||_{p;B_\sigma} \leq \alpha||u||_{2,p;B_\sigma} + \frac{c}{\alpha}||u||_{p;B_\sigma} =$$

$$= \alpha \left[||D^2u||^p_{p;B_\sigma} + ||Du||^p_{p;B_\sigma} + ||u||^p_{p;B_\sigma} \right]^{\frac{1}{p}} + \frac{c}{\alpha}||u||_{p;B_\sigma} \leq$$

$$\leq \alpha(||D^2u||_{p;B_\sigma} + ||Du||_{p;B_\sigma} + ||u||_{p;B_\sigma}) + \frac{c}{\alpha}||u||_{p;B_\sigma}$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)||Du||_{p;B_\sigma} \leq \alpha||D^2u||_{p;B_\sigma} + \left(\frac{c}{\alpha} + \alpha\right)||u||_{p;B_\sigma}$$

$$\Rightarrow ||Du||_{p;B_\sigma} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}||D^2u||_{p;B_\sigma} + \frac{c+\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)}||u||_{p;B_\sigma}$$

Logo,

$$\Phi_1 \leq (1-\sigma)\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}||D^2u||_{p;B_\sigma} + \frac{c+\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)}||u||_{p;B_\sigma}\right] + \gamma =$$

$$= (1-\sigma)\frac{\alpha}{1-\alpha}||D^2u||_{p;B_\sigma} + (1-\sigma)\frac{c+\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)}||u||_{p;B_\sigma} + \gamma \quad (\star)$$

Seja $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}(1-\sigma) < \frac{1}{2}$. É possível se ε é pequeno. Logo,

$$1 - \alpha \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

então

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}(1-\sigma)}{\frac{1}{2}} = \varepsilon(1-\sigma)$$

e

$$\frac{c+\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)} \leq \frac{c+\frac{1}{4}}{\alpha(1-\alpha)} \leq \frac{2(c+\frac{1}{4})}{\alpha} = \frac{K}{\alpha} = \frac{K}{\frac{\varepsilon}{2}(1-\sigma)} = \frac{2K}{\varepsilon(1-\sigma)} = \frac{C}{\varepsilon(1-\sigma)}$$

Logo, por $(\star)$, temos

$$\Phi_1 \leq (1-\sigma)\varepsilon(1-\sigma)||D^2u||_{p;B_\sigma} + (1-\sigma)\frac{C}{\varepsilon(1-\sigma)}||u||_{p;B_\sigma} + \gamma$$

$$\Rightarrow \Phi_1 \leq (1-\sigma)^2\varepsilon||D^2u||_{p;B_\sigma} + \frac{C}{\varepsilon}||u||_{p;B_\sigma} + \gamma$$

Note que fazendo $\gamma \to 0$, obtemos a afirmação.
Continuemos a prova do Teorema. Usando (3.6) em (3.5), temos:

$$\Phi_2 \leq c\left(R^2||f||_{p,B_R} + \Phi_1 + \Phi_0) \leq c(R^2||f||_{p,B_R} + \varepsilon\Phi_2 + \frac{c}{\varepsilon}\Phi_0 + \Phi_0\right)$$

$$\Rightarrow \Phi_2 \leq cR^2||f||_{p,B_R} + c\varepsilon\Phi_2 + \frac{c+\varepsilon}{\varepsilon}c\Phi_0$$

$$\Rightarrow \Phi_2 - c\varepsilon\Phi_2 \leq cR^2||f||_{p,B_R} + \frac{c+\varepsilon}{\varepsilon}c\Phi_0$$

$$\Rightarrow (1-c\varepsilon)\Phi_2 \leq cR^2||f||_{p,B_R} + \frac{c+\varepsilon}{\varepsilon}c\Phi_0$$

tomemos $\varepsilon < \min\{\frac{1}{2c}, 1\}$. Logo, teremos que $1 - c\varepsilon > 0$ e podemos fazer a passagem seguinte:

$$\Phi_2 \leq \frac{c}{1-c\varepsilon}R^2||f||_{p,B_R} + \frac{c(c+\varepsilon)}{\varepsilon(1-c\varepsilon)}\Phi_0$$

Tome $k := \max\left\{\frac{c}{1-c\varepsilon}, \frac{c(c+\varepsilon)}{\varepsilon(1-c\varepsilon)}\right\}$, logo

$$\Phi_2 \leq kR^2||f||_{p,B_R} + k\Phi_0 = k\left(R^2||f||_{p,B_R} + \Phi_0\right)$$

$$\Rightarrow \Phi_2 \leq k\left(R^2||f||_{p,B_R} + \Phi_0\right)$$

Assim, observando que $\Phi_0 = \sup\limits_{0<\sigma<1} ||u||_{p,B_{\sigma R}} \leq ||u||_{p,B_R}$, temos

$$(1-\sigma)^2R^2||D^2u||_{p,B_{\sigma R}} \leq \Phi_2 \leq k\left(R^2||f||_{p,B_R} + \Phi_0\right) \leq k\left(R^2||f||_{p,B_R} + ||u||_{p,B_R}\right)$$

$$\Rightarrow ||D^2u||_{p,B_{\sigma R}} \leq \frac{k}{(1-\sigma)^2R^2}(R^2||f||_{p,B_R} + ||u||_{p,B_R}) \tag{3.7}$$

com $k = k(n, \Lambda, p, \lambda)$ e $0 < \sigma < 1$.
Para $R \leq \min\{\delta, \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)\}$ e $\sigma = \frac{1}{2}$, temos

$$||D^2u||_{p,B_{R/2}} \leq \frac{4k}{R^2}\left(R^2||f||_{p,B_R} + ||u||_{p,B_R}\right) \quad (A)$$

Pelo Teorema (1.3), tomando $\beta = 1$ e $k = 2$, temos

$$||Du||_{p,B_{R/2}} \leq \alpha\left(||u||^p_{p,B_{R/2}} + ||Du||^p_{p,B_{R/2}} + ||D^2u||^p_{p,B_{R/2}}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{c}{\alpha}||u||_{p,B_{R/2}}$$

$$\leq \alpha c_1\left(||u||_{p,B_{R/2}} + ||Du||_{p,B_{R/2}} + ||D^2u||_{p,B_{R/2}}\right) + \frac{c}{\alpha}||u||_{p,B_{R/2}}$$

$$\Rightarrow (1-c_1\alpha)||Du||_{p,B_{R/2}} \leq \alpha c_1||D^2u||_{p,B_{R/2}} + \left(\alpha c_1 + \frac{c}{\alpha}\right)||u||_{p,B_{R/2}}$$

chamando $k := \alpha c_1 + \frac{c}{\alpha}$ e para $\alpha = \frac{1}{2c_1}$,

$$\frac{1}{2}||Du||_{p,B_{R/2}} \leq \frac{1}{2}||D^2u||_{p,B_{R/2}} + k||u||_{p,B_{R/2}}$$

$$\Rightarrow ||Du||_{p,B_{R/2}} \leq ||D^2u||_{p,B_{R/2}} + 2k||u||_{p,B_{R/2}}$$

Fazendo $2k := k_1$ e utilizando (A), obtemos:

$$||Du||_{p,B_{R/2}} \leq \frac{4k}{R^2}\left(R^2||f||_{p,B_R} + ||u||_{p,B_R}\right) + k_1||u||_{p,B_{R/2}} \leq$$

$$\frac{4k}{R^2}\left(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R}\right)+k_1||u||_{p,B_{R/2}} \leq \frac{4k}{R^2}R^2||f||_{p,B_R}+\left(\frac{4k}{R^2}+k_1\right)||u||_{p,B_R}=(\star)$$

Tomando k grande, $k_1 \leq \dfrac{4k}{R^2}$ e então

$$(\star) \leq \frac{4k}{R^2}R^2||f||_{p,B_R}+\left(\frac{4k}{R^2}+\frac{4k}{R^2}\right)||u||_{p,B_R}=$$

$$=\frac{4k}{R^2}R^2||f||_{p,B_R}+\frac{8k}{R^2}||u||_{p,B_R} \leq \frac{8k}{R^2}R^2||f||_{p,B_R}+\frac{8k}{R^2}||u||_{p,B_R}=$$

$$=\frac{8k}{R^2}\left(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R}\right)$$

$$\Rightarrow ||Du||_{p,B_{R/2}} \leq \frac{8k}{R^2}\left(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R}\right). \quad (B)$$

Trivialmente (lembremos que consideramos k grande e R pequeno),

$$||u||_{p,B_{R/2}} \leq ||u||_{p,B_R} \leq \frac{4k}{R^2}||u||_{p,B_R} \leq \frac{4k}{R^2}\left(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R}\right)$$

$$\Rightarrow ||u||_{p,B_{R/2}} \leq \frac{4k}{R^2}\left(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R}\right) \quad (C).$$

Somando (A), (B) e (C), temos

$$||u||_{2;p,B_{R/2}} \leq c\left(||D^2u||_{p,B_{R/2}}+||Du||_{p,B_{R/2}}+||u||_{p,B_{R/2}}\right) \leq$$

$$\leq c\left[\frac{4k}{R^2}(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R})+\frac{8k}{R^2}(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R})+\right.$$

$$\left.+\frac{4k}{R^2}(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R})\right]=$$

$$=c\left(\frac{4k}{R^2}+\frac{8k}{R^2}+\frac{4k}{R^2}\right)(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R})=\frac{c_1}{R^2}(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R}).$$

Portanto

$$||u||_{2;p,B_{R/2}} \leq \frac{c_1}{R^2}(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R}).$$

Como $\Omega' \subset\subset \Omega$, considerando $\mathcal{F}$ a família finita das bolas de raio R cuja união cobre Ω, tomando $R < \min\{\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)\}$, temos

$$||u||_{2;p,\Omega'} \leq \sum_{B_R \in \mathcal{F}} ||u||_{2;p,B_R} \leq \sum_{B_R \in \mathcal{F}} \frac{c_1}{R^2}(R^2||f||_{p,B_R}+||u||_{p,B_R}) \leq$$

$$\leq N\frac{c_1}{R^2}(R^2||f||_{p,\Omega}+||u||_{p,\Omega})=k(R^2||f||_{p,\Omega}+||u||_{p,\Omega}) \leq k(||f||_{p,\Omega}+||u||_{p,\Omega})$$

$$\Rightarrow ||u||_{2;p,\Omega'} \leq k(||f||_{p,\Omega}+||u||_{p,\Omega})$$

provando assim o Teorema.

q.e.d.

Capítulo 4

Regularidade de Soluções de $-\Delta u = f$

Neste capítulo mostramos que as soluções da equação $-\Delta u = f$, onde $f \in L^2(\Omega)$, estão em $H^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Para tanto analisamos o problema de regularidade para soluções fracas. Utilizamos aqui o conceito de quociente-diferença, dado na definição (1.8), para estudar este problema.

4.1 Motivação: Derivação formal de estimativas

Para ver se existe alguma esperança de que uma solução fraca possua mais regularidade que uma função em $H^1_0(\Omega)$, consideremos o problema

$$-\Delta u = f \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Suponhamos, para propósitos heurísticos, que tanto u quanto suas derivadas parciais até a ordem 2 são suaves e anulam-se suficientemente rápido quando $|x| \to \infty$ para justificar os seguintes cálculos. Computemos então:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} dx = (\star)$$

e, pelo Teorema da Divergência,

$$(\star) = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j} dx + \lim_{R\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\partial B_R(0)} u_{x_i x_i} u_{x_j} \nu_i dS =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j} dx = (\star\star)$$

Aplicando novamente o Teorema da Divergência,

$$(\star\star) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_j x_i} dx - \lim_{R\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\partial B_R(0)} u_{x_j} u_{x_i x_j} \nu_i dS =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \tag{4.2}$$

Então vemos que a norma L^2 da segunda derivada de u pode ser estimada(e de fato é igual)pela norma L^2 de f. Note também que este é um caso particular do Teorema da Desigualdade de Calderon-Zygmund visto no capítulo 2.

4.2 Regularidade Interior

Como sempre, supomos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado. Também vamos supor que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca da EDP (4.1). Vamos também utilizar a condição de elipticidade uniforme, c.f. a definição (1.7), para o operador $L = -\Delta$.

Teorema 4.1 *(Regularidade H^2-interior) Suponhamos que $f \in L^2(\Omega)$ e que $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca da EDP elíptica $-\Delta u = f$ em Ω. Então, temos que*

$$u \in H^2_{loc}(\Omega), \tag{4.3}$$

e para todo subconjunto $V \subset\subset \Omega$ temos a estimativa

$$||u||_{H^2(V)} \leq c(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)}) \tag{4.4}$$

onde a constante c depende somente de V e Ω.

Observações:
i) Note que não exigimos $u \in H_0^1(\Omega)$, i.e., não assumimos necessariamente a condição de fronteira $u = 0$ em $\partial\Omega$ no sentido observado.
ii) Observe ainda que, já que $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, temos

$$-\Delta u = f \quad \text{q.s. em} \quad \Omega$$

e, então, u realmente resolve a EDP, pelo menos para quase todo ponto interior de Ω. Para ver isto, note que, para cada $v \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\int \nabla u \nabla v dx = \int f v dx.$$

Já que $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$, podemos integrar por partes

$$\int \nabla u \nabla v dx = -\int v \Delta u dx.$$

Então $\int(-\Delta u - f)vdx = 0$, $\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$ e então $-\Delta u = f$ q.s.

Demonstração:
01) Dado um aberto $V \subset\subset \Omega$, seja W um aberto tal que $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$. Tomemos uma função suave ζ satisfazendo:

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 \text{ em } V, \ \zeta \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}^n - W \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

Chamamos ζ de uma função *"cutoff"*. Seu propósito nos cálculos subseqüentes será o de restringir todas as expressões para o subconjunto W, que está a uma distância positiva longe de $\partial\Omega$. Isto é necessário pois não temos informações suficientes a respeito de u perto da fronteira $\partial\Omega$. Note que este raciocínio já fora utilizado no capítulo anterior.
02) Agora, já que u é solução fraca de (4.1) temos

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.5}$$

03) Fixamos $k \in \{1, 2, ..., n\}$, seja $|h| > 0$ pequeno tal que o suporte de

$$v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u) \tag{4.6}$$

está em Ω, onde $D_k^h u$ denota o quociente diferença, c.f. a definição (1.8):

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}, \ h \in \mathbb{R}; \ h \neq 0$$

Substituindo v em (4.5), podemos escrever a expressão resultante como

$$A = B \tag{4.7}$$

onde

$$A := \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i} [-D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)]_{x_i} dx \tag{4.8}$$

e

$$B := \int_\Omega f v dx \tag{4.9}$$

04) Estimativa de A:
Nós temos, por (4.8) que

$$A=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i}[-D_k^{-h}(\zeta^2D_k^hu)]_{x_i}dx=-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i}(D_k^{-h}(\zeta^2D_k^hu))_{x_i}dx=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i}D_k^{-h}(\zeta^2D_k^hu)_{x_i}dx=(\star)$$

Como vale que $\int_{\Omega}vD_k^{-h}wdx=-\int_{\Omega}wD_k^hvdx$, temos

$$(\star)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(\zeta^2D_k^hu)_{x_i}(D_k^hu_{x_i})dx.$$

$$\Rightarrow A=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(\zeta^2D_k^hu)_{x_i}(D_k^hu_{x_i})dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(D_k^hu_{x_i})(\zeta^2D_k^hu_{x_i}+2\zeta\zeta_{x_i}D_k^hu)dx$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}D_k^hu_{x_i}D_k^hu_{x_i}\zeta^2dx}_{A_1}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}D_k^hu_{x_i}2\zeta\zeta_{x_i}D_k^hudx}_{A_2}\tag{4.10}$$

Pela condição de elipticidade uniforme, c.f. definição (1.7), sendo $\xi_i=\xi_j=D_k^hu_i$ e $(a^{ij}(x))\equiv I$ temos

$$A_1=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}D_k^hu_{x_i}D_k^hu_{x_i}\zeta^2dx=\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}D_k^hu_{x_i}D_k^hu_{x_i}\right)\zeta^2dx\geq$$

$$\geq\int_{\Omega}\theta|D_k^hDu|^2\zeta^2dx=\theta\int_{\Omega}\zeta^2|D_k^hDu|^2dx$$

$$\Rightarrow A_1\geq\theta\int_{\Omega}\zeta^2|D_k^hDu|^2dx\tag{4.11}$$

Além disso, temos também que

$$|A_2|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}D_k^hu_{x_i}2\zeta\zeta_{x_i}D_k^hudx\right|\leq\left|\int_{\Omega}2D_k^hDu\zeta D\zeta D_k^hudx\right|\leq$$

$$\leq\int_{\Omega}2|D_k^hDu|\cdot|\zeta|\cdot|D\zeta|\cdot|D_k^hu|dx=2\int_{\Omega}\zeta|D_k^hDu|\cdot|D\zeta|\cdot|D_k^hu|dx$$

$$\Rightarrow |A_2| \leq 2\int_\Omega \zeta|D_k^h Du|\cdot|D\zeta|\cdot|D_k^h u|dx$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy com ε(c.f. (1.3)), segue que

$$|A_2| \leq \int_\Omega \zeta|D_k^h Du|2|D_k^h u|\cdot|D\zeta|dx \leq \int_\Omega \left(\varepsilon\zeta^2|D_k^h Du|^2 + \frac{4|D_k^h u|^2|D\zeta|^2}{4\varepsilon}dx\right) =$$

$$= \varepsilon\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |D_k^h u|^2|D\zeta|^2dx$$

Como $\zeta : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é suave e de suporte compacto, existe uma constante $k > 0$ tal que $0 \leq |D\zeta| \leq k$.
Como

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |D_k^h u|^2|D\zeta|^2dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega-W} |D_k^h u|^2|D\zeta|^2dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_W |D_k^h u|^2|D\zeta|^2dx$$

e $\displaystyle\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega-W} |D_k^h u|^2|D\zeta|^2dx = 0$ pois $\zeta = 0$ em $\Omega - W$, pela construção da ζ, segue que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |D_k^h u|^2|D\zeta|^2dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_W |D_k^h u|^2|D\zeta|^2dx \leq \frac{k}{\varepsilon}\int_W |D_k^h u|^2.1dx.$$

A partir disso, teremos que a majoração para $|A_2|$ discutida acima fica:

$$|A_2| \leq \varepsilon\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + \frac{k}{\varepsilon}\int_W |D_k^h u|^2dx \quad (I)$$

Tomemos a estimativa seguinte,

$$\int_W |D_k^h u|^2dx \leq \int_W |D^h u|^2dx \leq c\int_\Omega |Du|^2dx \quad (II)$$

onde a primeira desigualdade é evidente, pela definição de $D_k^h u$, e a segunda provém do Teorema (1.2).
Considere $\varepsilon = \dfrac{\theta}{2}$. Obteremos de (I) e (II) que:

$$|A_2| \leq \varepsilon\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + \frac{k}{\varepsilon}\int_W |D_k^h u|^2dx \leq \frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + \frac{2}{\theta}.ck\int_\Omega |Du|^2dx =$$

$$= \frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + c_1\int_\Omega |Du|^2dx$$

$$\Rightarrow |A_2| \leq \frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + c_1\int_\Omega |Du|^2dx \tag{4.12}$$

Listemos (4.10), (4.11) e (4.12), respectivamente:

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A_1 \geq \theta \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx,$$

$$-\frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - c_1 \int_\Omega |Du|^2 dx \leq A_2 \leq \frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + c_1 \int_\Omega |Du|^2 dx.$$

Com elas, podemos escrever:

$$A = A_1 + A_2 \geq \theta \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - \frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - c_1 \int_\Omega |Du|^2 dx$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - c_1 \int_\Omega |Du|^2 dx \tag{4.13}$$

05) Estimativa de B:

Lembremos que (4.9) é a seguinte igualdade: $B = \displaystyle\int_\Omega fv dx$.

Assim, tendo em vista que $|f| \leq |f| + |Du| + |u|$, temos que:

$$|B| \leq \int_\Omega |f|.|v| dx \leq \int_\Omega (|f| + |Du| + |u|)|v| dx$$

$$\Rightarrow |B| \leq \int_\Omega (|f| + |Du| + |u|)|v| dx. \tag{4.14}$$

Note também que, por (4.6) e pelo Teorema (1.3), temos

$$\int_\Omega |v|^2 dx = \int_\Omega |-D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)|^2 dx = ||D_k^{-h}(D_k^h u)||^2_{L^2(\Omega)} \leq c||D(\zeta^2 D_k^h u)||^2_{L^2(W)} =$$

$$= c\int_W |D(\zeta^2 D_k^h u)|^2 dx = c\int_W |\zeta^2 D D_k^h u + 2\zeta.D\zeta.D_k^h u|^2 dx \leq$$

$$\leq c\int_W |\zeta^2 D D_k^h u|^2 dx + 4c\int_W |\zeta|^2 |D\zeta|^2 |D_k^h u|^2 dx = (\star)$$

e, como $0 \leq \zeta \leq 1$ e $0 \leq |D\zeta| \leq k$, segue que

$$(\star) \leq c\int_W \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + 4c\int_W k^2 |D_k^h u|^2 dx =$$

$$= c\int_W \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + 4ck^2 ||D_k^h u||^2_{L^2(W)} = (\star\star)$$

Naturalmente, $||D_k^h u||_{L^2(W)} \leq ||D^h u||_{L^2(W)}$, e pelo Teorema (1.3) segue-se que

$$||D_k^h u||^2_{L^2(W)} \leq ||D^h u||^2_{L^2(W)} \leq c_1||Du||^2_{L^2(\Omega)}$$

com $W \subset\subset \Omega$.
Com isso, temos

$$(\star\star) \leq c\int_W \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + 4k^2c_1||Du||^2_{L^p(\Omega)} = (\star\star\star)$$

Tomando $c_2 = \max\{c, 4k^2c_1\}$, temos que

$$(\star\star\star) \leq c_2\int_W \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + c_2||Du||^2_{L^p(\Omega)} \leq c_2\int_W \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + c_2\int_\Omega |Du|^2dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |v|^2dx \leq c_2\int_\Omega (|Du|^2 + \zeta^2|D_k^h Du|^2)dx \quad (\alpha)$$

Em (4.14), aplicando a Desigualdade de Cauchy com ε, obtemos

$$|B| \leq \int_\Omega (|f| + |Du| + |u|)|v|dx = \int_\Omega (|f|.|v| + |Du|.|v| + |u|.|v|)dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left[\left(\varepsilon v^2 + \frac{f^2}{4\varepsilon}\right) + \left(\varepsilon v^2 + \frac{|Du|^2}{4\varepsilon}\right) + \left(\varepsilon v^2 + \frac{u^2}{4\varepsilon}\right)\right] dx =$$

$$= 3\varepsilon\int_\Omega v^2dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega (f^2 + u^2)dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |Du|^2dx.$$

Utilizando (α), obtemos:

$$|B| \leq 3\varepsilon c_2\int_\Omega (|Du|^2 + \zeta^2|D_k^h u|^2)dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega (f^2 + u^2)dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |Du|^2dx =$$

$$= k\varepsilon\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega (f^2 + u^2)dx + \left(\frac{1}{4\varepsilon} + k\varepsilon\right)\int_\Omega |Du|^2dx = (\beta)$$

e tomando $0 < \varepsilon < 1 < \frac{1}{\varepsilon}$, tem-se

$$(\beta) \leq k\varepsilon\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega (f^2 + u^2)dx + \left(\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{k}{\varepsilon}\right)\int_\Omega |Du|^2dx =$$

$$= k\varepsilon\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega (f^2 + u^2)dx + \left(\frac{1+4k}{4\varepsilon}\right)\int_\Omega |Du|^2dx = (\beta\beta)$$

Tome $c := \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{1+4k}{4}\right\} = \frac{1+4k}{4}$. Logo,

$$(\beta\beta) \leq k\varepsilon\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_\Omega (f^2 + u^2)dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_\Omega |Du|^2dx$$

Tomemos $\varepsilon = \dfrac{\theta}{4k}$ para obter

$$|B| \leq k\frac{\theta}{4k}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + c\frac{4k}{\theta}\int_\Omega (f^2+u^2)dx + c\frac{4k}{\theta}\int_\Omega |Du|^2dx$$

$$\Rightarrow |B| \leq \frac{\theta}{4}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + \tilde{c}\int_\Omega (f^2+u^2)dx + \tilde{c}\int_\Omega |Du|^2dx \qquad (4.15)$$

06) Iremos agora combinar (4.7), (4.13) e (4.15). Listando-as, temos

$$A = B$$

$$A \geq \frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx - C\int_\Omega |Du|^2dx$$

$$B \leq \frac{\theta}{4}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|2dx + \tilde{c}\int_\Omega (f^2+v^2+|Du|^2)dx$$

Assim, temos com estas informações que

$$\frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx - C\int_\Omega |Du|^2dx \leq A = B \leq \frac{\theta}{4}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|2dx +$$

$$+\tilde{c}\int_\Omega (f^2+v^2+|Du|^2)dx$$

$$\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{4}\right)\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx \leq \tilde{C}\int_\Omega (f^2+v^2)dx + (\tilde{C}+C)\int_\Omega |Du|^2dx \leq$$

$$\leq \tilde{C}\int_\Omega (f^2+v^2+|Du|^2)dx$$

$$\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx \leq \frac{4}{\theta}\tilde{C}\int_\Omega (f^2+v^2+|Du|^2)dx$$

Lembrando a definição da função cutoff, temos

$$\int_V |D_k^h Du|^2dx = \int_V \zeta^2|D_k^h Du|^2dx \leq \int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2dx \leq C\int_\Omega (f^2+v^2+|Du|^2)dx$$

$$\int_V |D_k^h Du|^2dx \leq C\int_\Omega (f^2+v^2+|Du|^2)dx,$$

isto para $k = 1,2,...,n$ e para todo h tal que $|h| \neq 0$ é suficientemente pequeno.

Assim, pelo Teorema(1.3), temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{1,2}(V)$$

e

$$\left|\left|D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|\right|_{L^2(V)} \leq c\int_\Omega (f^2+u^2+|Du|^2)dx$$

então $u \in W^{2,2}(V)$ e $||D(Du)||_{L^2(V)} \leq c\int_\Omega (f^2+u^2+|Du|^2)dx$. Logo,

$$||D^2u||_{L^2(V)} \leq c\int_\Omega (f^2+u^2+|Du|^2)dx$$

$$\Rightarrow ||u||_{H^2(V)} = \left(||D^2u||^2_{L^2(V)} + ||Du||^2_{L^2(V)} + ||u||^2_{L^2(V)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(c\int_\Omega (f^2+u^2+|Du|^2)dx + ||Du||^2_{L^2(V)} + ||u||^2_{L^2(V)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C\left(\int_\Omega (f^2+u^2+|Du|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}} + ||Du||_{L^2(V)} + ||u||_{L^2(V)} =$$

$$= C\left(||f||^2_{L^2} + ||u||^2_{L^2} + ||Du||^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} + ||Du||_{L^2(V)} + ||u||_{L^2(V)} \leq$$

$$\leq C\int_\Omega f^2dx + C\int_\Omega u^2dx + C\int_\Omega |Du|^2dx + ||Du||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)} =$$

$$= C||f||_{L^2(\Omega)} + (C+1)(||u||_{L^2(\Omega)} + ||Du||_{L^2(\Omega)}) = (\star\star\star).$$

Tendo em vista que em $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes, temos que, para um $D > 0$ adequado

$$(\star\star\star) \leq C||f||_{L^2(\Omega)} + D(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||Du||^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} = C||f||_{L^2(\Omega)} + D||u||_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq M(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{H^1(\Omega)}),$$

onde $M := \max\{CK, D\}$.

$$||u||_{H^2(V)} \leq M(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{H^1(\Omega)}) \tag{4.16}$$

07) Como $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$, pelos mesmos argumentos pode-se mostrar que (4.16) fica refinada para

$$||u||_{H^2(V)} \leq C(||f||_{L^2(W)} + ||u||_{H^1(W)}) \tag{4.17}$$

para uma constante C apropriada, dependente de V, W, etc. Agora escolhemos uma nova função cutoff ζ satisfazendo as condições:

$$\zeta = 1 \text{ em } W, \ \text{spt}\zeta \subset \Omega$$

$$0 \leq \zeta \leq 1$$

Seja agora $v = \zeta^2 u \in H_0^1(\Omega)$. Como por (4.5)

$$\int_\Omega DuDvdx = \int_\Omega fvdx,$$

segue que

$$\int_\Omega Du(D\zeta^2 u)dx = \int_\Omega f\zeta^2 udx$$

$$\int_\Omega Du(\zeta^2 Du + 2\zeta D\zeta u)dx = \int_\Omega f\zeta^2 u$$

$$\int_\Omega \zeta^2|Du|^2 + 2\zeta uD\zeta Du = \int_\Omega f\zeta^2 u.$$

Assim,

$$\int_\Omega \zeta^2|Du|^2dx = \int_\Omega f\zeta^2udx - 2\int_\Omega \zeta uD\zeta Dudx \leq$$

$$\leq \int_\Omega f\zeta^2udx + 2\int_\Omega |\zeta|.|u|.|D\zeta|.|Du|dx =$$

$$= \int_\Omega f\zeta^2udx + 2\int_\Omega (|\zeta|.|Du|)(|u|.|D\zeta|)dx = (I)$$

Aplicando-se convenientemente as Desigualdades de Cauchy, de Cauchy com ε e $ab \leq 2ab \leq a^2 + b^2$, com $a, b > 0$, obtemos os cálculos a seguir:

$$(I) \leq \int_\Omega f.\zeta^2udx + 2\left(\int_\Omega |\zeta|^2|Du|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u^2|D\zeta|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \int_\Omega f.\zeta^2udx + 2\left[\varepsilon\int_\Omega \zeta^2|Du|^2dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega u^2|D\zeta|^2dx\right]$$

$$\leq \left(\int_\Omega f^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega (\zeta^2u)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + 2\left[\varepsilon\int_\Omega \zeta^2|Du|^2dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega u^2|D\zeta|^2dx\right]$$

$$\leq \int_\Omega f^2dx + \int_\Omega (\zeta^2u)^2dx + 2\varepsilon\int_\Omega \zeta^2|Du|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega u^2|D\zeta|^2dx$$

$$\Rightarrow (1-2\varepsilon)\int_\Omega \zeta^2|Du|^2dx \leq \int_\Omega f^2dx + \int_\Omega (\zeta^2u)^2dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega u^2|D\zeta|^2dx$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ e notando que $\zeta^2 \leq 1$ e $|D\zeta| \leq c$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_W |Du|^2dx \leq \int_\Omega f^2dx + \int_\Omega u^2dx + 2c\int_\Omega u^2dx$$

$$\Rightarrow \int_W |Du|^2dx \leq 2\int_\Omega f^2dx + (2+4c)\int_\Omega u^2dx \leq$$

$$\leq (2+4c)\left[\int_\Omega f^2dx + \int_\Omega u^2dx\right] = c_1\left[\int_\Omega f^2dx + \int_\Omega u^2dx\right]$$

$$\Rightarrow \int_W |Du|^2dx \leq c_1 \int_\Omega (f^2+u^2)dx \quad (II)$$

Note também que

$$||u||_{H^1(W)} = \left(||u||^2_{L^2(W)} + ||Du||^2_{L^2(W)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq ||u||_{L^2(W)} + ||Du||_{L^2(W)} \leq$$

$$\leq ||u||_{L^2(\Omega)} + ||Du||_{L^2(\Omega)} = (\star)$$

e como Ω é limitado, temos pela Desigualdade de Poincaré (Teorema(1.5)), e por (II)

$$(\star) \leq c||Du||_{L^2(\Omega)} + ||Du||_{L^2(\Omega)} =$$

$$= (c+1)||Du||_{L^2(\Omega)} = (c+1)\left(\int_\Omega |Du|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq (c+1)\left(c_1\int_\Omega (f^2+u^2)dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= k\left(\int_\Omega f^2dx + \int_\Omega u^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = (A)$$

e como para $a, b \geq 0$ vale $\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq a+b$, temos

$$(A) \leq k\left(\left(\int_\Omega f^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right) = k(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)})$$

$$\Rightarrow ||u||_{H^1(W)} \leq k(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)}). \tag{4.18}$$

De (4.18) e (4.17) obtemos

$$||u||_{H^2(V)} \leq c(||f||_{L^2(W)} + k(||f||_{L^2(W)} + ||u||_{L^2(W)})) = (c+k)||f||_{L^2(W)} + k||u||_{L^2(W)} \leq$$

$$\leq (c+k)(||f||_{L^2(W)} + ||u||_{L^2(W)})$$

$$\Rightarrow ||u||_{H^2(V)} \leq C(||f||_{L^2(W)} + ||u||_{L^2(W)}),$$

o que conclui a prova do Teorema.

q.e.d.

Anexos

Nesta seção iremos apresentar, sob forma de afirmações, alguns fatos que foram utilizados durante o trabalho.

Afirmação 1: Seja V um compacto de Ω e $h \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |h| < \text{dist}(V, \partial\Omega)$. A aplicação $|.|_d : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$|D^h u|_d = \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i^h u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma semi-norma (chamada de norma do quociente diferença), onde $E := \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; |D_i^h u| < \infty, \forall i \in \{1, ..., n\}, h \in \mathbb{R} \mid 0 < |h| < \text{dist}(V, \partial\Omega)\}$.

Demonstração:

Iremos mostrar que valem as três propriedades de semi- norma para a aplicação dada.

(i)$|D^h u|_d \geq 0$:

$$|D^h u|_d = \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i^h u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

Isto conclui a propriedade (i) de semi-norma

(ii)$|cD^h u|_d = |c| \cdot |D^h u|_d, \forall c \in \mathbb{R}$:

$$|cD^h u|_d = \left(\sum_{i=1}^{n} |c \cdot D_i^h u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |c|^p \cdot |D_i^h u|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(|c|^p \sum_{i=1}^{n} |D_i^h u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |c| \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i^h u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |c| \cdot |D^h u|_d$$

(iii)$|D^h u + D^h v|_d \leq |D^h u|_d + |D^h v|_d$:

Note inicialmente que com o auxílio da definição de soma de funções, teremos:

$$D_i^h(u + v) = \frac{(u + v)(x + he_i) - (u + v)(x)}{h} =$$

$$= \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} + \frac{v(x+he_i)-v(x)}{h} = D_i^h u + D_i^h v.$$

Logo,

$$D^h(u+v) = (D_1^h u + D_1^h v, ..., D_n^h u + D_n^h v) =$$
$$= (D_1^h u, ..., D_n^h u) + (D_1^h v, ..., D_n^h v) = D^h u + D^h v.$$

Com efeito, podemos escrever:

$$|D^h u + D^h v|_d^p = |D^h(u+v)|_d^p = \left(\sum_{i=1}^n |D_i^h(u+v)|^p \right)^{\frac{1}{p}.p} =$$

$$= \sum_{i=1}^n |D_i^h(u+v)|^p = \sum_{i=1}^n |D_i^h u + D_i^h v|^p = \sum_{i=1}^n |D_i^h u + D_i^h v|^{p-1}.|D_i^h u + D_i^h v| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |D_i^h u + D_i^h v|^{p-1}.(|D_i^h u| + |D_i^h v|) =$$

$$= \sum_{i=1}^n |D_i^h u + D_i^h v|^{p-1}.|D_i^h u| + \sum_{i=1}^n |D_i^h u + D_i^h v|^{p-1}.|D_i^h v| = (\star)$$

Note que $\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = 1 \Rightarrow \ell = \frac{p}{p-1}$. Assim, temos que $(\star)$ fica, aplicando-se a Desigualdade de Hölder

$$(\star) \leq \left(\sum_{i=1}^n \left| |D_i^h u + D_i^h v|^{p-1} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |D_i^h u|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^n \left| |D_i^h u + D_i^h v|^{p-1} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |D_i^h v|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^n |D_i^h u + D_i^h v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{p-1} \cdot |D^h u|_d + \left[\left(\sum_{i=1}^n |D_i^h u + D_i^h v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{p-1} \cdot |D^h v|_d =$$

$$= |D^h u + D^h v|_d^{p-1} |D^h u|_d + |D^h u + D^h v|_d^{p-1} |D^h v|_d =$$
$$= |D^h u + D^h v|_d^{p-1} (|D^h u|_d + |D^h v|_d)$$

Logo, temos

$$|D^u + D^h v|_d^p = |D^u + D^h v|_d^{p-1} \cdot |D^u + D^h v|_d \leq |D^u + D^h v|_d^{p-1} (|D^h u|_d + |D^h v|_d)$$

e, simplificando, encontramos:

$$|D^h u + D^h v|_d \leq |D^h u|_d + |D^h v|_d.$$

Com isso mostramos que também vale (iii).
Logo a Afirmação 1 fica provada.

Afirmação 2: $\Phi_k = \sup\limits_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k ||D^k u||_{p;B_{\sigma R}}$, $k = 0,1,2$ são seminormas.

Demonstração: Lembremos que no texto temos $0 < \sigma < 1$ e $R > 0$. Vamos mostrar que as três propriedades para seminormas são satisfeitas.

i) $\Phi_k(u) \geq 0$: De fato, por definição

$\Phi_k(u) = \sup\limits_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k ||D^k u||_{p,B_{\sigma R}} \geq 0$, pois $(1-\sigma)^k > 0$, $R^k > 0$ e $||.||_{p;B_{\sigma R}} \geq 0$, pois $||.||_{p;B_{\sigma R}}$ é norma.

ii)$\Phi_k(\alpha u) = |\alpha|\Phi_k(u)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_k(\alpha u) = \sup_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k ||D^k(\alpha u)||_{p;B_{\sigma R}} = |\alpha| \sup_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k ||D^k u||_{p;B_{\sigma R}} =$$

$$= |\alpha|\Phi_k(u)$$

Note que acima utilizamos $||D^k(\alpha u)||_{p;B_{\sigma R}} = |\alpha|.||D^k u||_{p;B_{\sigma R}}$ pois $||.||_{p;B_{\sigma R}}$ é norma.

iii) $\Phi_k(u+v) \leq \Phi_k(u) + \Phi_k(v)$:

$$\Phi_k(u+v) = \sup_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k ||D^k(u+v)||_{p;B_{\sigma R}} = (\star)$$

como $||.||_{p;B_{\sigma R}}$ é norma, vale a desigualdade

$$||D^k(u+v)||_{p;B_{\sigma R}} \leq ||D^k u||_{p;B_{\sigma R}} + ||D^k v||_{p;B_{\sigma R}}$$

e então

$$(\star) \leq \sup_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k \left(||D^k u||_{p;B_{\sigma R}} + ||D^k v||_{p;B_{\sigma R}}\right) \leq$$

$$\leq \sup_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k ||D^k u||_{p;B_{\sigma R}} + \sup_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k ||D^k v||_{p;B_{\sigma R}} = \Phi_k(u) + \Phi_k(v),$$

o que prova iii).
Assim, (i), (ii) e (iii) provam a afirmação.

Bibliografia

[Co] J. B. Conway. A course in functional analysis. 2nd.ed. New York: Springer, 1990.

[CZ] A.P. Calderon e A. Zygmund. On the existence of certain singular integrals. Acta Math. 88,85-139 (1952).

[Ev] L.C.Evans. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics. Vol 19. American Mathematical Society. 1998.

[GT] D.Gilbarg e N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Vol 224. Segunda Edição. Ed.Springer. 1997.

[Ma] C.R. Acad. Sur l'interpolation d'operations.Sci. Paris 208, 1272-1273 (1939).

[Mz] V.G. Maz'ya. Sobolev spaces. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 1985.

[St] E.M. Stein. Singular integrals and differentiability proprieties of functions. Princenton, N.J. : Princenton Univ. Press, 1970.