

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**OTIMIZAÇÃO EM DOIS NÍVEIS DA ORIENTAÇÃO E DA TOPOLOGIA DE  
CASCAS LAMINADAS**

por

Carlos Eduardo de Souza  
Engenheiro Mecânico

Dissertação para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Porto Alegre, abril de 2003

# **OTIMIZAÇÃO EM DOIS NÍVEIS DA ORIENTAÇÃO E DA TOPOLOGIA DE CASCAS LAMINADAS**

por

Carlos Eduardo de Souza  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Área de concentração: Mecânica dos sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Co-orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca  
Coordenador do PROMEC

## AGRADECIMENTOS

A quantidade de pessoas a quem eu poderia agradecer aqui é muito grande, pois inclui todos os interessados em manter a pesquisa no Brasil e todos aqueles que contribuem para a manutenção da Universidade Pública, direta ou indiretamente. Como é impossível nomear todos estes, agradeço às pessoas mais próximas que de alguma maneira ajudaram na conclusão deste trabalho.

Agradeço inicialmente ao Prof. Jun pela excelente orientação, imprescindível nas muitas encruzilhadas encontradas no caminho, e também pelo interesse na realização e continuação deste trabalho. Também agradeço ao Rogério Marczak, pela ajuda com o elemento de casca e pela grande quantidade de artigos emprestados, além das histórias contadas. Espero algum dia saber tanto quanto vocês!

Ao colega de muitos anos Hervandil Morosini, fundamental pela ajuda com o Maple, com o código em Matlab, apostilas emprestadas e mais ainda pelas discussões "filosóficas" nos mais diversos momentos. Aos colegas Vinícius e Ruben Galeano, grandes parcerias, que apreciam muito as coisas boas da vida.

A todo o pessoal do GMAp, ao Eduardo Lenz Cardoso, quase co-orientador, ao Carlos Guilherme, e ao inestimável Prof. Ignacio Iturrioz, exemplo como professor e como pessoa. Impossível deixar de agradecer ao amigo Charles Rech, que acabou dando o incentivo final para minha escolha pelo mestrado.

Não há como deixar de agradecer também à turma do Rosário, ao Claudio Bonini, ao Diego Bento, ao Danilo Dantas e à Ingrid Lermen. Pela descontração, conversas, viagens, incentivos, fundamentais sempre.

Finalmente, dedico este trabalho à minha família, minha mãe Fátima e meu irmão Bernardo, sem os quais não seria possível nem pensar em fazer esta caminhada. Aos meus avós, em sua memória, e a todos em Uruguaiana, especialmente aos mais jovens, a quem desejo o melhor futuro do mundo. Espero que esse seja mais um passo para contribuir nesse sentido.

## RESUMO

Este trabalho é uma contribuição para o conhecimento de metodologias de projeto de estruturas de material composto, aplicando métodos de otimização estrutural a cascas laminadas e apresentando uma estratégia em dois níveis.

No primeiro nível é realizada a minimização da flexibilidade da estrutura, tendo como variável de projeto a orientação de cada lâmina da estrutura. Utiliza-se Programação Linear Seqüencial (SLP) e direção de tensão principal para otimização da orientação. No segundo nível minimiza-se o volume de cada lâmina, usando a flexibilidade total da estrutura como restrição e a densidade relativa como variável de projeto, também através de SLP. Para evitar aparecimento de áreas com densidades intermediárias, utiliza-se um Método de Continuação, dividindo o nível de otimização topológica em duas ou mais etapas. As formulações desenvolvidas permitem a solução de problemas com múltiplos casos de carregamento.

Para a solução da equação de equilíbrio de casca laminada, utiliza-se um elemento finito de casca degenerado de oito nós com integração explícita na direção da espessura. A implementação desse elemento é feita de modo a facilitar a obtenção das derivadas da matriz de rigidez, necessárias na linearização das funções objetivo e restrições. Evita-se assim o uso de derivadas numéricas.

Resultados para vários tipos de estrutura são apresentados, incluindo comparações entre diferentes carregamentos, condições de contorno, número de lâminas, espessuras, etc. As soluções obtidas, formas de análise e possíveis aplicações são discutidas.

## **ABSTRACT**

### **“TWO-LEVEL OPTIMIZATION OF ORIENTATION AND TOPOLOGY OF LAMINATED SHELLS”**

This work is a contribution to the knowledge of design methods for composite structures, applying structural optimization techniques to laminated shells. A two level strategy is presented.

The structure compliance is minimized in the first level, using the ply orientation as design variable. Sequential Linear Programming (SLP) and the main stress directions are used to optimize the orientation. In the second level the volume of each ply is minimized, using the structure compliance as constraint and the relative density as design variable, also through SLP. A Continuation Method is used to avoid the problem of intermediate densities, dividing the topology optimization level in two or three steps. The formulation developed allows the solution of multiple load cases problems.

An eight node degenerated shell finite element with explicit integration on the thickness direction is used to obtain the solution of the laminated shell equilibrium equation. This particular element was chosen to ease the calculation of stiffness matrix sensitivities, needed for the objective function and constraints linearization, thus avoiding the use of numerical differentiation.

Results for many types of structures are shown, including comparisons between different loads, boundary conditions, number of plies, thickness, etc. The solutions obtained, analysis approaches and possible applications are discussed.

## ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO .....	1
1.1.	OBJETIVOS .....	3
1.2.	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	4
1.3.	MATERIAL COMPOSTO LAMINADO .....	5
2.	SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO .....	7
2.1.	ELASTICIDADE LINEAR INFINITESIMAL.....	7
2.2.	ELEMENTO FINITO DE CASCA LAMINADA .....	9
2.3.	SISTEMAS DE COORDENADAS.....	13
2.4.	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS .....	14
2.4.1.	TENSÕES CISALHANTES TRANSVERSAIS .....	16
2.5.	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS .....	17
2.6.	FORMULAÇÃO DO ELEMENTO .....	21
2.6.1.	GEOMETRIA E CINEMÁTICA DO ELEMENTO .....	21
2.6.2.	MATRIZ DE RIGIDEZ PARA CASCAS LAMINADAS.....	22
2.6.3.	VETOR DE FORÇAS.....	24
2.6.4.	SOLUÇÃO DO PROBLEMA .....	25
2.6.5.	DEFORMAÇÃO E TENSÃO.....	26
3.	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	27
3.1.	BREVE HISTÓRICO DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	27
3.2.	ALGUNS CONCEITOS MATEMÁTICOS DE OTIMIZAÇÃO.....	29
3.3.	MÉTODOS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	31
3.3.1.	PROGRAMAÇÃO LINEAR .....	33
3.3.2.	PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQÜENCIAL.....	34
3.4.	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	37
3.4.1.	PROBLEMAS NUMÉRICOS .....	42
4.	ESTRATÉGIAS IMPLEMENTADAS.....	45
4.1.	HISTÓRICO .....	45
4.2.	DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS UTILIZADOS.....	50
4.3.	MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE.....	52
4.3.1.	CASOS DE CARREGAMENTOS MÚLTIPLOS.....	59
4.3.2.	CÁLCULO DA DIREÇÃO PRINCIPAL DE TENSÃO.....	60
4.4.	MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE FLEXIBILIDADE.....	61
4.4.1.	CASOS DE CARREGAMENTOS MÚLTIPLOS.....	64

5.	RESULTADOS NUMÉRICOS .....	66
5.1.	MODELOS E CASOS RODADOS.....	66
5.1.1.	ELASTICIDADE PLANA.....	68
5.1.2.	PLACAS.....	69
5.1.3.	CASCAS .....	70
5.2.	OTIMIZAÇÃO DA ORIENTAÇÃO .....	71
5.2.1.	INFLUÊNCIA DA ORIENTAÇÃO INICIAL .....	73
5.3.	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA - MC .....	75
5.4.	OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COM UMA LÂMINA.....	78
5.5.	OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COM VÁRIAS LÂMINAS.....	84
5.6.	CASOS DE MÚLTIPLOS CARREGAMENTOS .....	89
6.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	93
6.1.	CONCLUSÕES .....	93
6.2.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	95
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	97
APÊNDICE A.	TESTES DO ELEMENTO FINITO IMPLEMENTADO.....	107
A.1	VIGA RETA E VIGA CURVA.....	107
A.2	PLACA PLANA .....	108
A.3	TELHADO DE SCORDELIS-LO.....	109
A.4	CILINDRO PUNÇIONADO .....	110
APÊNDICE B.	OBTENÇÃO DOS SISTEMAS DE COORDENADAS.....	112
B.1	SISTEMA LOCAL DA LÂMINA .....	112
B.2	SISTEMA LOCAL DA CASCA .....	112
B.3	SISTEMA NODAL .....	113
APÊNDICE C.	COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO .....	115

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\cdot^{-1}$	Inversa de uma matriz quadrada	
$\cdot^T$	Transposta de uma matriz ou vetor	
$:$	Operador tensorial de contração	
$ \cdot ^2$	Norma euclidiana	
$ \mathbf{J} $	Determinante da matriz jacobiana	
$\nabla$	Operador gradiente	
$\times$	Operador produto vetorial	
$\cap$	Interseção de conjuntos	
$\alpha$	Parâmetro de penalização da função objetivo	
$\Delta$	Variação do valor da variável de projeto entre iterações	
$\delta$	Operador diferencial de Gateaux	
	Fator de variação do limite móvel	
$\delta \mathbf{u}$	Deslocamento virtual	[m]
$\varepsilon$	Campo de deformações infinitesimal	
$\varepsilon_{ij}$	Componente do campo de deformações infinitesimal	
$\phi$	Função de interpolação	
$\phi_I$	Função de interpolação associada ao nó I	
$\Gamma_n$	Superfície de aplicação das condições de contorno de Neumann	[m <sup>2</sup> ]
$\Gamma_t$	Superfície de aplicação de trações	[m <sup>2</sup> ]
$\Gamma_u$	Superfície de aplicação das condições de contorno de Dirichlet	[m <sup>2</sup> ]
$\gamma$	Parâmetro para otimização da orientação por DDP	
	Produto entre diferenças do valor da variável de projeto	
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange	
$\mu$	Multiplicador de Lagrange	
$\rho$	Densidade de material; densidade relativa	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Tensor de Tensões de Cauchy	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_{ij}$	Tensão na direção de $j$ perpendicular ao eixo $i$	[N/m <sup>2</sup> ]
$\nu_{ij}$	Coefficiente de Poisson	
$\Omega$	Domínio de projeto	[m <sup>3</sup> ]
$\Omega^e$	Domínio do elemento	[m <sup>3</sup> ]
$\psi$	Ângulo extremo no estudo de Petersen, 1989.	[rad]
$\xi_i$	Componentes do sistema de coordenadas paramétrico	
$\mathbf{A}$	Matriz dos coeficientes da restrições linearizadas	
$\mathbf{a}_i^L, \mathbf{a}_i^U$	Limites móveis (LP)	
$\mathbf{B}$	Matriz de transformação de coordenadas	
$\mathbf{b}$	Vetor das forças de corpo	[N/m <sup>3</sup> ]
	Vetor da restrições linearizadas (LP)	
$b_{1,\dots,6}$	Coefficientes da matriz $\mathbf{B}$	
$\mathbf{C}_{ijkl}^0$	Tensor constitutivo do material de base	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{C}_{ijkl}$	Tensor constitutivo homogeneizado	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{C}^{ts}$	Tensor constitutivo considerando efeitos de tensão cisalhante transversal	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{C}^{gl}$	Tensor constitutivo no sistema global de coordenadas	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{C}^{lc}$	Tensor constitutivo no sistema local de coordenadas	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{C}_{1,2,3}$	Componentes do tensor constitutivo decomposto para cálculo de $\mathbf{K}$	
$c$	Cosseno de $\theta$	
$\mathbf{c}$	Vetor dos coeficientes da função objetivo linearizada (LP)	
$E_i$	Módulo de elasticidade longitudinal	[N/m <sup>2</sup> ]



$f$	Variável de folga	
$G_{ij}$	Módulo de elasticidade transversal	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{g}$	Vetor da aceleração da força de campo (gravidade)	[m/s <sup>2</sup> ]
$g(\mathbf{x})$	Restrição de desigualdade	
$h$	Espessura de cada lâmina	[m]
$h(\mathbf{x})$	Restrição de igualdade	
$\mathbf{I}$	Matriz identidade	
$\mathbf{J}$	Matriz jacobiana	
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global	
$\mathbf{K}_e$	Matriz de rigidez local	
$\mathbf{L}$	Matriz triangular inferior na decomposição por Cholesky	
$\mathcal{L}$	Lagrangiano	
$l_i$	Tamanho do limite móvel (LP)	
$\mathbf{n}$	Vetor unitário normal a uma superfície	
$n$	Número de variáveis de projeto.	
$n_{casos}$	Número de casos de carregamento	
$n_e$	Número de restrições de igualdade	
$n_{elem}$	Número de elementos da malha	
$n_g$	Número de restrições de desigualdade	
$n_l$	Número de lâminas em cada elemento	
$n_{lyrotm}$	Número de lâminas a otimizar	
$p$	Parâmetro de penalização da função objetivo	
$\mathbf{Q}$	Matriz de rotação genérica	
	Força distribuída aplicada na superfície da casca.	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{Q}_{es}$	Matriz de rotação no espaço (entre o sistema local da casca e o global)	
$\mathbf{Q}_{pl}$	Matriz de rotação no plano (entre o sistema local da lâmina e local da casca)	
$\mathbf{q}$	Vetor de incógnitas, incluindo deslocamentos nodais e rotações	
$s$	Seno de $\theta$	
$s(\mathbf{x})$	Função objetivo	
$\mathbf{t}$	Vetor de trações superficiais	[N/m <sup>2</sup> ]
$t_l$	Espessura total do elemento em cada nó	
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos	[m]
$\mathbf{u}^0$	Vetor de deslocamentos prescritos	
$\mathbf{v}_{nl}$	Vetor normal à superfície média da casca em cada nó	
$W$	Flexibilidade da estrutura	[Nm]
$W_0$	Flexibilidade inicial da estrutura	[Nm]
$W_{lim}$	Limite de flexibilidade	[Nm]
$w_j$	Pesos das flexibilidades associado a cada caso $j$ de carregamento	
$\mathbf{x}$	Vetor de coordenadas de um ponto do domínio após a deformação	[m]
	Vetor de variáveis de projeto	
$\mathbf{x}^*$	Ponto extremo de um funcional	
$z$	Coordenada real na direção da espessura da casca	[m]

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. (a) Lâmina com fibras unidirecionais. (b) Lâmina em tecido com fibras transversais.	6
Figura 1.2. Um laminado com lâminas com diferentes orientações.	6
Figura 2.1. Problema de elasticidade linear infinitesimal.	8
Figura 2.2. Elemento de casca com posição dos nós e dos pontos de integração no plano.	12
Figura 2.3. Sistemas de coordenadas envolvidos na formulação do elemento neste trabalho.	13
Figura 2.4. Fluxograma mostrando as transformações de coordenadas durante o processo de montagem da matriz de rigidez para cálculo dos deslocamentos (a) e do cálculo das deformações e tensões (b).	18
Figura 2.5. Versores de dois sistemas de coordenadas cartesianos com orientação arbitrária.	18
Figura 2.6. Representação do ângulo entre o sistema da lâmina e do sistema local da casca.	19
Figura 2.7. Definição das rotações nos nós do elemento.	22
Figura 2.8. Notação utilizada no presente trabalho para definir as coordenadas na direção da espessura da base e do topo de cada lâmina.	23
Figura 3.1. Tipos de otimização: (a) otimização dimensional, (b) otimização de forma, (c) otimização topológica.	28
Figura 3.2. Alguns exemplos de microestruturas e seu parâmetros. Em (a) célula quadrada com furo retangular, em (b) material laminado rank-2 e em (c) célula para microestruturas tridimensionais de placa/casca [Min, 1997].	38
Figura 3.3. Problema de otimização topológica.	39
Figura 3.4. Exemplo de estrutura otimizada com muitas áreas com densidade intermediária.	41
Figura 3.5. Penalização da densidade.	41
Figura 3.6. À esquerda, penalização do volume conforme eq. (2.78) com $\alpha = 0$ e à direita para diferentes valores de $\alpha$ , com $p = 1/8$ .	42
Figura 3.7. Resultado da otimização topológica de uma placa com aparecimento de instabilidade de tabuleiro.	43
Figura 4.1. Fluxograma da estratégia de otimização em dois níveis: no primeiro nível é minimizada $W$ ( a flexibilidade) e no segundo nível $s$ (o volume penalizado). $\text{Conv}\theta$ e $\text{conv}\rho$ são “flags” que indicam se a convergência da otimização de $\theta$ ou $\rho$ foi alcançada, e $p$ é expoente de penalização de $s$ . No alto à direita a história de interações de um caso otimizado com 3 etapas do MC.	52
Figura 4.2. Acima, geometria básica e condições de contorno do problema. Abaixo, primeiras cinco iterações da otimização da orientação de um problema 2D (malha 12x12 elementos), utilizando direção principal de deformação.	53
Figura 4.3. Gráfico da flexibilidade relativa para o caso da otimização da orientação de um problema bidimensional utilizando a direção de deformação principal como critério para determinar a variável $\theta$ .	54
Figura 4.4. Campo de orientação nas iterações 3,4 e 5, em malha 16 x 16.	54
Figura 4.5. Gráfico da história das iterações para o caso da Figura 4.4.	55
Figura 4.6. Pontos de integração para cálculo da deformação e da tensão. Em (a), quatro pontos de integração no plano médio da camada, em (b) quatro pontos em um plano abaixo da superfície média e em (c) um ponto de integração no centro da superfície média.	60
Figura 4.7. Vetores obtidos do cálculo das tensões principais em uma camada do elemento, com magnitudes proporcionais aos valores das tensões.	61
Figura 4.8. Possibilidade de aparecimento de buracos entre camadas, se a otimização topológica for aplicada a todas as camadas ao mesmo tempo.	64
Figura 5.1. Geometria e condições de contorno dos problemas de viga engastada.	69
Figura 5.2. Geometria de placa quadradas com um único caso de carga. Em (a) apoio apenas nas pontas e em (b) apoio simples em toda a borda.	69

Figura 5.3. Geometria e condições de contorno para placa retangular engastada, com comprimento igual a 1m e largura igual a 0,5m, espessura variável para cada caso testado.	70
Figura 5.4. Geometria e condições de contorno para o problema da casca cilíndrica, em (a) com restrição de deslocamento de membrana na borda curva e em (b) apenas apoiado na pontas. $L=300$ , $R=300$ , $h=3$ , o ângulo de abertura é de $40^\circ$ , $P=1e+6$ .	71
Figura 5.5. Geometria e condições de contorno do caso de casca esférica. Apenas um quarto do modelo foi simulado. Aqui, $R=10m$ , $a=5m$ , $P=1e3N$ . A espessura total é de 0,1 m.	71
Figura 5.6. Topologia final da viga engastada para malha com 12x12 elementos. Material: Gr-Ep. (a) Apenas otimização topológica ( $V_f = 0,45 V_0$ ). (b) Otimizando antes a orientação com DPT-SLP ( $V_f = 0,27V_0$ ).	72
Figura 5.7. Gráfico da história de iterações para a otimização topológica da viga engastada e malha 12x12. Em (a) apenas otimização topológica e em (b) com otimização da orientação antes da topológica.	72
Figura 5.8. Orientações e topologias obtidas para casos de viga em balanço com carga na ponta inferior direita. Em (a), otimização da orientação apenas com a DPT, em (b) com DPT-SLP e em (c) apenas SLP.	73
Figura 5.9. Comparação entre as orientações finais de uma placa com duas lâminas, para diferentes orientações iniciais. Em (a) $\theta_0=0^\circ$ , em (b) $\theta_0=30^\circ$ e em (c) $\theta_0=45^\circ$ . Em (d), geometria e c.c. do problema.	74
Figura 5.10. Resultados para placa apoiada nos lados, feita de material isotrópico, com carga no centro. Em (a), geometria do problema, em (b), resultado após 2 etapas do MC para uma malha 10x10, e em (c), malha 16x16, com topologia após final da 1ª etapa do MC, após final da 2ª etapa e após o final da 3ª etapa.	77
Figura 5.11. História das iterações para a otimização topológica de placa isotrópica discretizada numa malha 16x16. São observados as 3 etapas do MC.	77
Figura 5.12. Influência do refino da malha sobre a solução final. Em (a) malha 08x08 em 1/4 do domínio (com $V_f / V_0 = 0,6321$ ), em (b) malha 12x12 ( $V_f / V_0 = 0,6220$ ), e em (c) malha 16x16 ( $V_f / V_0 = 0,6178$ ). O material é ortotrópico e a direção principal do material está na horizontal. Geometria e c.c.: ver Figura 5.5.	78
Figura 5.13. Orientação e topologia obtida para o caso de uma placa feita de uma única lâmina de material ortotrópico (Gr-Ep), com espessura de 0,01m, com $W_{lim} = 1,5W_0$ e $V_f=0,255V_0$ . Malha 16x16 no quadrante.	79
Figura 5.14. Gráfico da história das iterações do caso apresentado na Figura 5.13.	79
Figura 5.15. Resultado para o mesmo problema da Figura 5.13, mas com $W_{lim} = 0,4 W_0$ .	80
Figura 5.16. Topologia e orientação final para caso com apenas uma camada de Gr-Ep, orientada originalmente em direção paralela ao lado curvo, e otimização da orientação apenas por DPT. À direita, geometria e c.c.	81
Figura 5.17. História das iterações para o caso da Figura 5.16.	81
Figura 5.18. Topologia interpretada para uma casca apoiada nas pontas e com carga central.	82
Figura 5.19. Topologia interpretada para o problema de uma casca feita de apenas uma lâmina de material ortotrópico.	82
Figura 5.20. Resultado da otimização por SLP da orientação em um telhado esférico, referente à Figura 5.19. Acima à esquerda a orientação inicial, acima à direita a orientação após 10 iterações, abaixo à esquerda após 20 iterações e abaixo à direita após a convergência na iteração 30. Vista superior da malha com 16x16 elementos no quadrante.	83
Figura 5.21. À esquerda, apenas orientação final e, à direita, topologia e orientação finais sobrepostas, para o caso de uma casca feita de uma lâmina material ortotrópico, com orientação inicial da camada a $45^\circ$ no quadrante e $W_{lim} = 0,4W_0$ .	84
Figura 5.22. Topologia interpretada em 3D do problema da Figura 5.21.	84

Figura 5.23. Topologia obtida para a otimização da lâmina superior de uma placa feita de duas lâminas de material ortotrópico. Em (a) geometria e condições de contorno, em (b) solução após a primeira etapa do MC, com densidades intermediárias, e em (c) a solução final. ....	85
Figura 5.24. Orientação ótima obtida para o problema da Figura 5.23.....	85
Figura 5.25.: Topologia interpretada de um telhado esférico (ver Figura 5.5), com duas lâminas, com a otimização da orientação e da topologia de ambas. A volume final é 55,15% do volume inicial, para metade da flexibilidade inicial.....	86
Figura 5.26. Topologia e orientação de cada lâmina da Figura 5.25. Aqui se verifica que a quantidade de elementos com densidade intermediária é muito pequena, mesmo penalizando apenas com $\alpha = 0$ e $p = 1/8$ . ....	87
Figura 5.27. Topologia interpretada de um telhado esférico com duas lâminas, com a otimização apenas da lâmina superior. ....	87
Figura 5.28. História de iterações para a otimização da lâmina superior de uma casca feita de duas lâminas (Figura 5.27). As três etapas do MC estão bem definidas. ....	88
Figura 5.29. Orientação e topologia finais sobrepostas para (a) a lâmina inferior e (b) a lâmina superior de uma placa laminada com 4 camadas. Em (c), geometria e c.c. As 2 lâminas intermediárias estão orientadas paralelamente à borda horizontal. ....	89
Figura 5.30. Solução do problema da placa engastada para problema com dois casos de cargas iguais nas pontas. Em (a) a representação em 3D da placa deformada sob cada um dos carregamentos e em (b) as soluções para a orientação e para a topologia sobrepostas. ....	90
Figura 5.31. Solução para a otimização topológica de uma casca submetida a dois casos de carregamento. Em (a) vista superior mostrando a orientação ( $45^\circ$ no quadrante) e em (b) representação em 3D indicando a posição das forças concentradas ( $F_1$ é maior do que $F_2$ ). ..	91
Figura 5.32. Representação explodida em 3D de uma casca com 3 lâminas de Gr-Ep, com otimização duas lâminas externas. À direita, geometria e c.c, mostrando os dois casos de carregamento, semelhantes aos da Figura 5.31. ....	92
Figura 5.33. História das interações para o caso apresentado na Figura 5.32. Observar os gráficos para as flexibilidades associadas a cada um dos casos de carga. ....	92
Figura A.1. As diferentes malhas para o testes da viga reta.....	107
Figura A.2. Problema da viga curva. Raio interno: 4,12, raio externo: 4,32, espessura: 0,1, $E = 1,0 \times 10^7$ , $\nu = 0,25$ , carregamento: forças unitárias na ponta [MacNeal e Harder, 1985]. ....	108
Figura A.3. Geometria do problema de placa plana, onde a razão $H=2$ , $L=2$ ou $10$ , a espessura vale $0,01$ , $E=1,7472e7$ , $\nu=0,3$ . A placa pode estar simplesmente apoiada ou engastada nas bordas. A carga pode ser concentrada, valendo $4e-4$ , ou distribuída, valendo $1e-4$ .....	108
Figura A.4. Resultados normalizados, placa <u>apoiada</u> . “+”: $H/L=1$ , carga concentrada; “*”: $H/L=1$ , carga distribuída; “o”: $H/L=5$ , carga concentrada; “□”: $H/L=5$ , carga distribuída. Ver MacNeal e Harder, 1985.....	109
Figura A.5. Resultados normalizados, placa <u>engastada</u> . “+”: $H/L = 1$ , carga concentrada; “*”: $H/L=1$ , carga distribuída; “o”: $H/L=5$ , carga concentrada, “□”: $H/L=5$ , carga distribuída. Ver MacNeal e Harder, 1985.....	109
Figura A.6. Geometria e condições de contorno do telhado de Scordelis-Lo. As dimensões são: $R=300$ , $L=600$ , $h=3$ , $E=3e6$ , $\nu=0$ , $q=0,625$ [Vlachoutsis, 1990].....	110
Figura A.7. Resultados normalizados para o caso do telhado de Scordelis-lo. “+”: deslocamento vertical do centro da borda livre; “□”; deslocamento do ponto central do telhado. Ver Vlachoutsis, 1990. ....	110
Figura A.8. Geometria e condições de contorno para o caso do cilindro puncionado. Os pontos a e b são os pontos de verificação do deslocamento. ....	111
Figura A.9. Resultados normalizados para o caso do cilindro puncionado. “+”: deslocamento axial do ponto a; “o”: deslocamento radial do ponto b. Ver Vlachoutsis, 1990.....	111

Figura C.1. Comparação de resultados de otimização topológica de viga em balanço feita de material isotrópico: em (a) e em (b), resultado apresentado em Hassani e Hinton, 1998c. Em (c), resultado obtido no presente trabalho para malha 16x16. Em (d), geometria e c.c. ....	115
Figura C.2. Comparação de resultados de otimização topológica de placas planas: em (a) e em (b), resultado apresentado em Bendsøe, 1995. Em (c), resultado obtido no presente trabalho. Em (d), geometria e c.c.....	116
Figura C.3. Resultados para a otimização da orientação da direção de maior módulo de elasticidade para materiais ortotrópicos. Em (a) solução para malha com 72 elementos triangulares e em (b) para 720 elementos [Pedersen, 1991]. Em (c), presente formulação e em (d), geometria e c.c. ....	117

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1. Localização de extremos locais e globais pela otimização do parâmetro $\gamma$ [Pedersen, 1990].....	47
Tabela 5.1: propriedades de alguns materiais [Reddy, 1997] convertidos para o SI (1 psi = 6.895 E6 N / m <sup>2</sup> ).....	67
Tabela 5.2. Casos rodados com solução apresentada no presente trabalho (Nº lam. = número de lâminas). ....	68
Tabela 5.3. Comparações entre resultados para diferentes orientações iniciais de placa laminada. ....	75
Tabela A. 1. Resultados normalizados para os testes da viga reta e viga curva (ver MacNeal e Harder, 1985).....	107

## 1. INTRODUÇÃO

As crises econômicas que se sucedem no mundo inteiro nas últimas décadas têm acelerado a busca de métodos e processos que venham a gerar a melhor relação custo-benefício nas mais diversas áreas, tais como a econômica, a produtiva, a administrativa, etc. Isso leva, por exemplo, à construção de motores mais eficientes e menos poluentes, ao projeto de estruturas com menores coeficientes de segurança, ao desenvolvimento de materiais sintéticos que tenham as propriedades específicas para cada aplicação às quais eles se destinam, e como consequência, ao desenvolvimento de métodos de projeto mais eficientes.

No campo dos novos materiais estão a ganhar importância os materiais compostos, em que se combinam materiais com diversas propriedades. Estas, quando em conjunto, permitem obter o melhor comportamento da estrutura para determinado tipo de aplicação. O uso de materiais compostos é uma das técnicas usadas pelo homem e que pode ser observada na natureza. Através dos milhões de anos de evolução das espécies animais e vegetais, pode-se observar uma série de exemplos em que estruturas são feitas de materiais compostos, e que têm suas propriedades definidas de acordo com a aplicação a que se destinam. Músculos, ossos, fibras vegetais em bambus, etc. são exemplos claros de materiais compostos por fibras que têm uma resistência maior na direção em que são mais solicitadas, e muito menores nas outras direções.

Mas apesar de o homem usar materiais compostos por milhares de anos, apenas na última metade do século XX é que se viu o desenvolvimento de materiais compostos com alta tecnologia [Tsai, 1992]. Filamentos de boro, por exemplo, foram desenvolvidos nos anos 60 em programas da Força Aérea Americana para promover o uso de materiais compostos em estruturas aeronáuticas. O estabilizador horizontal do F-14A foi o primeiro componente capacitado a uso em vôo [Dastin, 1979]. O emprego em outras aeronaves militares se seguiu, e nos anos 80 o Boeing 767 apresentava aproximadamente 2 toneladas de material composto nas vigas do piso e nas suas superfícies de comando. O cargueiro soviético Antonov 124 tem um total de 5,5 toneladas de material composto na sua estrutura, sendo 2,5 toneladas de compostos de carbono.

Em 1986, a Voyager, uma aeronave totalmente feita de material composto, bateu um record de volta ao mundo sem pousar. Seu principal projetista, Burt Rutan, se tornou conhecido por este e vários outros projetos de aeronaves em material composto. As novas aeronaves leves projetadas (destinadas a competições, lazer e transporte de pequeno número de passageiros) têm toda a estrutura ou grande parte dela fabricada em fibra de carbono ou fibra de vidro. Entre estas

podem-se citar o Cirrus SR-20/22, Lancair 300 Columbia e Diamond Star DA40. Na área de vôo-a-vela, o uso maciço desse tipo de material já é comum há muito tempo, e praticamente não se encontram mais planadores que não sejam fabricadas com material composto.

Dastin, em 1979, já apresentava um valor típico para a redução de peso em aeronaves militares na ordem de 20% devido ao emprego de material composto, além de apresentar diversos exemplos de aplicação de material composto na aviação. No final da década de 60 as aplicações de material composto eram feitas quase que exclusivamente na indústria aeronáutica, como pode ser visto nos trabalhos apresentados na primeira ASTM Conference on Composite Materials, em 1969 [Tsai, 1978]. Já na quinta conferência, em 1978, aplicações automotivas começam a aparecer. Além disso, a tecnologia desenvolvida levou também ao emprego em diversas outras áreas, como na fabricação de equipamentos esportivos (raquetes, bicicletas de alta performance, esquis, tacos de golf, pranchas de surf, entre outros).

É de se notar também que na década de 60, o projeto de estruturas de material composto tinha uma característica mais heurística que científica, o que talvez se explique pela forma de pensar dos projetistas, ainda acostumada a trabalhar com metais isotrópicos. O projeto dessas estruturas laminadas, portanto, era feita de maneira heurística, muito rudimentar, e dependendo bastante da experiência do projetista. Essa maneira de projetar não permitia utilizar todas as vantagens oferecidas pelos materiais compostos laminados.

Os métodos de otimização estrutural são outra forma de melhorar a fase de projeto de estruturas. Ao otimizar uma estrutura, o engenheiro deixa de apenas analisar um projeto na tentativa de evitar que aconteça a falha no tempo de serviço especificado. Essa ferramenta de projeto permite não apenas diminuir custos de fabricação, mas também diminuir custos de operação, ao melhorar a performance dos componentes e sistemas sendo criados. A otimização em geral é uma ferramenta bastante flexível pois é possível melhorar o projeto em vários sentidos, dependendo do que se escolhe como objetivo, restrições, variáveis de projeto, etc.

A aplicação desses métodos encontra um campo muito fértil na área de materiais compostos, devido à grande quantidade de parâmetros que estão envolvidos no projeto. É possível, por exemplo, buscar a melhor orientação de cada lâmina de material composto para cada tipo de carregamento aplicado à estrutura, além de também buscar a melhor espessura de cada camada, ou ainda a melhor seqüência de laminação. Esse tipo de estudo ainda está em aberto, permitindo avanços em várias direções. Diversos métodos de otimização continuam sendo desenvolvidos, disponibilizando muitas formas de aplicação ao projeto de materiais compostos laminados.



O problema de redução de peso de aeronaves foi enfrentado pelo autor durante o período em que trabalhou na indústria aeronáutica, no desenvolvimento de uma aeronave de treinamento feita de material composto. Isso motivou a realização deste trabalho, que foi norteado pela necessidade de que os métodos a serem desenvolvidos pudessem ser aplicados a problemas reais encontrados na indústria, e não apenas acadêmicos.

Deve ser ressaltado também que este trabalho foi feito dentro de um grupo de pesquisa em otimização topológica, pertencente ao GMAp, Grupo de Mecânica Aplicada, do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRGS. A parte de otimização topológica aqui desenvolvida pode ser considerada como uma extensão de trabalhos de outros pesquisadores do GMAp, como os de Fonseca, 1997, Cardoso e Fonseca, 1999, Cardoso, 2000, Guilherme, 2001, e Sant'Anna, 2002.

### 1.1. OBJETIVOS

Este trabalho tem como um objetivo geral contribuir para o conhecimento na área de otimização estrutural de cascas laminadas, através da determinação de estratégias alternativas para tal. Os objetivos específicos podem ser então listados da seguinte maneira:

- a) implementar um elemento finito para cálculo de cascas laminadas que possa ser usado em algoritmos de otimização estrutural;
- b) implementar a otimização da orientação de cada lâmina de uma casca laminada, considerando múltiplos casos de carregamento;
- c) implementar a otimização topológica de cada de cada lâmina de uma casca laminada, também considerando múltiplos casos de carregamento;
- d) desenvolver uma estratégia de otimização em dois níveis, onde cada nível compreende um dos dois itens acima;
- e) testar os métodos desenvolvidos em diversos tipos de estruturas, comprovando assim a eficiência da metodologia proposta.

Ao ter como objetivo a análise de cascas, espera-se ser possível com a mesma metodologia analisar estruturas mais simples. Isto porque cascas podem apresentar comportamento de estruturas como membranas e placas planas, sendo que uma metodologia que possibilite o estudo de um campo mais amplo de estruturas é interessante para o projetista. Para a solução da equação de equilíbrio de casca laminada, é utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF), através de um elemento finito de casca degenerado com oito nós e com integração explícita na espessura.

São discutidos aqui alguns métodos de otimização, tanto dimensional como topológica, permitindo que sejam desenvolvidas estratégias próprias para a busca de um projeto com o menor volume possível das lâminas otimizadas, respeitando restrições de flexibilidade. Resolve-se então o problema de otimização da orientação e da topologia de cada lâmina da casca laminada. Para tanto foi implementada uma estratégia em dois níveis, com objetivos e variáveis de projeto diferentes em cada nível. Em um primeiro nível minimiza-se a flexibilidade da estrutura, permitindo que a minimização do volume no nível seguinte seja mais eficaz, ao considerar restrições de flexibilidade máxima desejada.

## 1.2. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido basicamente em três partes: a formulação do elemento finito de casca utilizado para a solução de equilíbrio de cascas laminadas, a apresentação e desenvolvimento dos métodos de otimização utilizados e a apresentação dos resultados.

No capítulo dois apresenta-se a formulação do elemento finito utilizado. Inclui uma revisão rápida de elasticidade linear infinitesimal, definição dos sistemas de coordenadas e uma revisão sobre relações constitutivas para materiais ortotrópicos.

No capítulo três é feita uma revisão sobre otimização estrutural, dando ênfase à otimização topológica, com apresentação de conceitos básicos e de alguns dos métodos de solução mais utilizados. É incluída também uma apresentação de alguns problemas encontrados na otimização topológica. No quarto capítulo está o desenvolvimento dos diferentes métodos de otimização utilizados no presente trabalho, com desenvolvimento da formulação e obtenção das diversas derivadas. Antes de passar à descrição das estratégias em si, uma pesquisa sobre trabalhos relacionados com o assunto é apresentada.

Os resultados obtidos estão no capítulo 5, buscando mostrar a aplicação a vários tipos de estruturas. São comparados valores obtidos para a redução da flexibilidade e do volume, de acordo com a variação de diversos parâmetros de cálculo. São também discutidos problemas surgidos na análise e algumas maneiras de evitá-los.

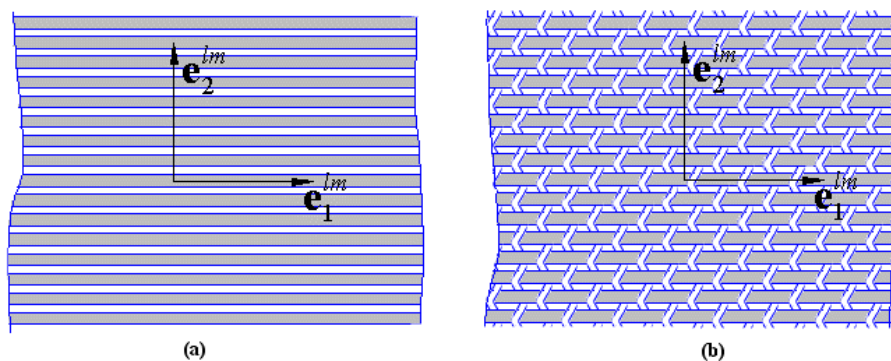
Nos apêndices estão apresentados os resultados dos testes realizados para validação do elemento finito implementado, assim como a forma de obtenção dos diversos sistemas de coordenadas envolvidos no cálculo por elementos finitos e uma comparação com alguns resultados de otimização topológica e da orientação encontrados na literatura.

### 1.3. MATERIAL COMPOSTO LAMINADO

Materiais compostos podem ser considerados aqueles formados por dois ou mais materiais ou fases de diferente constituição e com propriedades físicas e mecânicas diferentes entre si. Essas combinações são feitas de modo a se obter um material com um comportamento resultante que não podem ser satisfeitas pelos materiais convencionais [Agarwal e Broutman, 1990]. Existem ligas metálicas que resultam da combinação de materiais metálicos diferentes, mas estes possuem propriedades aproximadamente iguais. Alguns plásticos que são misturados com aditivos por questões de custos só são considerados materiais compostos se suas propriedades físicas forem afetadas substancialmente.

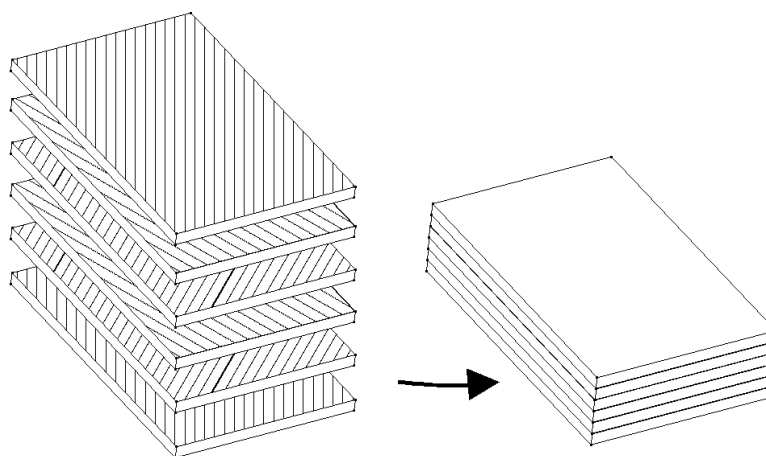
Os compostos apresentam uma fase descontínua, chamada de reforço, embebida em uma fase contínua, chamada de matriz, e sua distribuição e interação vão determinar as propriedades finais do material. Esses materiais normalmente são classificados de acordo com a geometria do material de reforço, e diversas classificações semelhantes podem ser encontradas, como por exemplo a de Callister, 1985 (citado por Tita, 1999), que os divide em compostos reforçados por partículas, compostos reforçados por fibras e compostos estruturais. Uma subdivisão desses últimos separa em compósitos estruturais do tipo sanduíches e compósitos estruturais laminados. Agarwal e Broutman, 1990, dividem os materiais compostos em compostos reforçados por partículas e compostos reforçados por fibras. Os materiais compostos laminados fazem parte desse último grupo. A classificação de Dietz, 1969 [Cardoso e Fonseca, 2000], separa os materiais compostos em três grupos, os materiais fibrosos, materiais particulados e materiais laminados.

São de interesse para este trabalho apenas os materiais compostos laminados, que consistem de diversas lâminas fibrosas simples onde a orientação e o material de cada uma varia de acordo com o projeto estrutural. Em Jones, 1975, há uma definição da terminologia utilizada no estudo de materiais compostos laminados reforçados por fibras. A lâmina é definida como sendo um arranjo plano (ou curvo, no caso de cascas) de fibras unidirecionais ou tecidos em uma matriz (Figura 1.1). Um laminado é uma seqüência de lâminas com diversas orientações das direções principais do material, como na Figura 1.2. Laminados podem ser compostos de camadas de diferentes materiais ou camadas de diferentes lâminas reforçadas por fibras. Nesse último caso, as lâminas são normalmente coladas juntas usando o mesmo material da matriz das lâminas. As fibras e as matrizes usadas em material composto podem ser tanto metálicas como não-metálicas, sendo que as fibras normalmente usadas são metais como alumínio, cobre, ferro, níquel, aço e titânio ou materiais orgânicos como vidro, carbono, bóro e grafite [Reddy, 1997].



**Figura 1.1. (a) Lâmina com fibras unidirecionais. (b) Lâmina em tecido com fibras transversais.**

Os materiais compostos laminados têm grande aplicação na indústria aeroespacial como estruturas primárias ou secundárias devido à sua alta razão resistência / peso. Há uma relação entre a resistência e rigidez do material e a orientação e espessura de cada camada. Com um projeto apropriado da seqüência de laminação, é possível construir laminados que resistam da melhor maneira possível aos diversos carregamentos aplicados sobre determinado elemento estrutural. Assim, os fatores de segurança serão menores, mais satisfatórios, e não haverá sobra de material na estrutura. Isso leva, portanto, à redução de peso da estrutura em relação ao uso de materiais isotrópicos, como é o caso de metais.



**Figura 1.2. Um laminado com lâminas com diferentes orientações.**

Os métodos e estratégias adotadas no restante do trabalho foram implementados com o objetivo de trabalhar com materiais compostos laminados, tendo como uma de suas aplicações mais comuns, as superfícies aerodinâmicas de uma aeronave. Estas são tipicamente cascas, devido à sua curvatura. Entretanto, tudo pode ser estendido ao projeto de outros tipos de estruturas, como placas ou vigas, e com materiais laminados com qualquer tipo de lâmina ortotrópica.

## 2. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma das formas de se solucionar as equações de equilíbrio da elasticidade linear infinitesimal, que é coberta por este trabalho. Para a compreensão do que está sendo resolvido pelo MEF, é necessário uma breve descrição das equações de equilíbrio e de sua obtenção. Uma boa fonte de consultas a respeito da teoria de Mecânica dos Sólidos e elasticidade linear pode ser encontrada em Spencer, 1980 e Atkin e Fox, 1980. Em relação ao método dos elementos finitos, bons textos podem ser encontrados em Hughes, 1987, Zienkiewicz e Taylor, 1991 e Bathe, 1995.

### 2.1. ELASTICIDADE LINEAR INFINITESIMAL

O problema de elasticidade linear infinitesimal pode ser identificado na Figura 2.1: um corpo ocupando um domínio  $\Omega$ , sujeito a carregamento em tração  $\mathbf{t}$  na sua superfície  $\Gamma_t$ , com condições de contorno determinadas em sua superfície  $\Gamma_u$ , e com força de corpo  $\mathbf{b}$  sendo aplicada em todo o domínio  $\Omega$ , apresenta um campo de deformação  $\varepsilon$ , de tensão  $\sigma$  e de deslocamento  $\mathbf{u}$ . As seguintes equações podem então expressar as variáveis o corpo definido dessa maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{em } \Omega \\ u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2, x_3), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_u \\ \sigma_{ij} n_j = t_i(x_1, x_2, x_3), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_t \end{array} \right. , \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes de  $\sigma$ , que é o tensor de tensões de Cauchy,  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes de  $\varepsilon$ , o tensor de deformações específicas,  $x_i$  são as coordenadas de um ponto qualquer do corpo,  $u_i$  são as componentes de  $\mathbf{u}$ , o vetor de deslocamento de um ponto no corpo,  $u_i^0$  são os componentes do vetor  $\mathbf{u}^0$  de deslocamentos prescritos em  $\Gamma_u$ ,  $n_i$  são as componentes de  $\mathbf{n}$ , o vetor normal à superfície em  $\Gamma_t$ . A primeira equação em (2.1) é a equação de equilíbrio, a segunda equação é a relação constitutiva, a terceira é a relação cinemática, e as duas últimas são as condições de contorno. Como se está considerando deformações infinitesimais, não se faz distinção entre as coordenadas de um ponto antes e depois da deformação.

O princípio dos trabalhos virtuais (PTV) fornece meios para a obtenção de equações governantes de sistemas estruturais, dados em (2.1). Para demonstrar isto, se multiplica a equação de equilíbrio por um deslocamento virtual  $\delta \mathbf{u}$ . Ao integrar no domínio, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho b_i \right) \delta \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad , \quad \forall \delta \mathbf{u} . \quad (2.2)$$

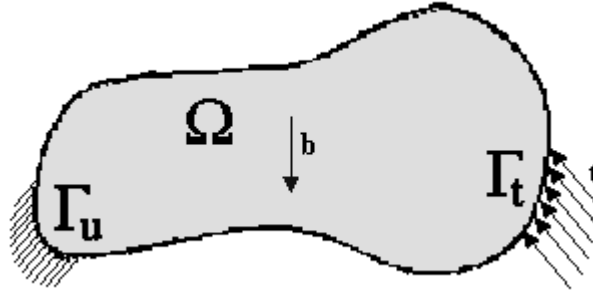


Figura 2.1. Problema de elasticidade linear infinitesimal.

Aplicando integração por partes generalizada ao primeiro termo entre parênteses de (2.2), de modo a baixar a ordem da derivada de  $\sigma$ , obtém-se:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad , \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.3)$$

onde o termo do lado esquerdo é o trabalho virtual interno e o do lado direito é o trabalho virtual externo. Mostrando-se que ambos são iguais, o equilíbrio é satisfeito. Inserindo a relação constitutiva e a relação cinemática de (2.1) no primeiro termo de (2.3) chega-se a:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) C_{ijkl} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad , \quad \forall \delta \mathbf{u} . \quad (2.4)$$

Para a elasticidade anisotrópica, aonde se consideram as diversas simetrias de  $C_{ijkl}$ , é possível simplificar a expressão acima escrevendo-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad , \quad \forall \delta \mathbf{u} . \quad (2.5)$$

Utilizando o MEF, o domínio é dividido em elementos, cada um ocupando um domínio  $\Omega^e$ , e contendo um determinado número de nós. Através do método de Galerkin [Zienkiewicz e Taylor, 1991] o campo de deslocamentos reais  $\mathbf{u}$  e virtuais  $\delta \mathbf{u}$  é interpolado em função de seus valores nos nós de cada elemento. Muitas vezes, entretanto as incógnitas do problema não são apenas os deslocamentos nodais, mas podem ser também rotações definidas em cada nó, como é

o caso do elemento implementado neste trabalho. Então, no lugar de  $\mathbf{u}$  e  $\delta\mathbf{u}$ , passa-se a utilizar aqui  $\mathbf{q}$  e  $\delta\mathbf{q}$ , sendo que o vetor de incógnitas inclui as seguintes variáveis:

$$\mathbf{q} = \{u_1, u_2, u_3, \theta_1, \theta_2\}^T, \quad (2.6)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações no nós, definidas na seção 2.6.1.

As funções interpoladas são dadas então por:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\approx \mathbf{q}_I \phi_I \\ \delta\mathbf{q} &\approx \delta\mathbf{q}_I \phi_I \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde o índice maiúsculo “ $I$ ” indica o nó em questão. A forma das funções  $\phi_I$ , chamadas de funções de interpolação, dependem do tipo de elemento finito utilizado. Inserindo (2.7) e eliminando  $\delta\mathbf{q}$ , a equação (2.5) fica simplificada para:

$$\mathbf{K}_{ijJ} \mathbf{q}_{jJ} = \mathbf{f}_{iI}, \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{K}_{ijJ}$  é a matriz de rigidez do sistema, expressa por:

$$\mathbf{K}_{ijJ} = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_{iI}}{\partial x_j} C_{ijkl} \frac{\partial \phi_{kJ}}{\partial x_l} d\Omega, \quad (2.9)$$

e  $\mathbf{f}_{iI}$  é o vetor de forças aplicadas sobre o corpo, incluindo forças externas e forças de corpo:

$$\mathbf{f}_{iI} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \phi_{iI} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \phi_{iI} d\Gamma. \quad (2.10)$$

Resolvendo-se a equação (2.8), obtém-se o campo de deslocamentos. A partir daí, é possível obter também os campos de deformação e de tensão. O campo de deformação de cada elemento é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B} \mathbf{q}^e, \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a chamada matriz de transformação de coordenadas, calculada em cada elemento do domínio. Essa matriz é muito importante para a formulação de cada tipo de elemento finito, pois é na sua montagem que estarão definidas as estratégias para uma boa performance do elemento, como a aplicação de integração reduzida, seletiva, etc. [Hughes, 1987]. A montagem da matriz utilizada neste trabalho está na seção 2.6.2.

## 2.2. ELEMENTO FINITO DE CASCA LAMINADA

Os primeiros trabalhos sobre cálculo de cascas apareceram ainda no século XIX, com Love, 1944. Na formulação de sua teoria, várias hipóteses simplificadoras foram utilizadas, como por exemplo: considerava-se que a casca é fina, ou seja, que sua espessura é muito pequena em comparação com seu menor raio de curvatura; as deflexões são pequenas, de ordem de grandeza menor que a espessura; as tensões normais transversais são desconsideradas; as

normais à superfície média permanecem normais e inextensíveis após a deformação. Mais tarde, na metade do século XX, Reissner, 1945, e Mindlin, 1951, apresentaram teorias na qual se consideravam as tensões normais transversais e as normais às superfícies médias deixavam de ser normais após a deformação.

Os primeiros elementos finitos de casca se basearam nas teorias de Love, mas estes se mostraram limitados, se aplicando unicamente ao cálculo de cascas finas, com cisalhamento transversal desprezível [Mourão, 1991, Donea e Belytschko, 1992]. O principal problema é que Love utilizou equações de quarta ordem, o que implica na necessidade de derivadas de segunda ordem nas relações deformação-deslocamento, exigindo funções de interpolação com primeira derivada contínua, ou seja, campos  $C^1$ . No caso de elementos quadrilaterais, isso significa o uso de polinômios de Hermite.

Uma classe de elementos, chamados de elementos discretos de Kirchhoff (ou “discrete Kirchhoff elements”) foi desenvolvido como alternativa para solucionar alguns desses problemas. Nesses elementos, se assumem campos separados para as curvaturas  $\alpha$  e  $\beta$  (sendo  $\alpha$  igual à derivada da deflexão em relação a  $x_1$  e  $\beta$  a derivada da deflexão em relação a  $x_2$ ) e as restrições são aplicadas apenas em determinados pontos, eliminando variáveis nodais [MacNeal, 1998]. Alguns elementos bem sucedidos incluem triângulos (DKT, “discrete Kirchhoff triangles”) [Strincklin *et al.*, 1969] e quadriláteros (DKQ, “discrete Kirchhoff quadrilaterals”) [Lyons, 1977, apud Hrabok e Hrudey, 1984], mas o mais conhecido é o elemento *semiloof* de Irons, 1976.

No final da década de 60 surgiu o conceito de análise de cascas através de elementos sólidos degenerados, que permitem resolver muitos dos problemas acima citados, e também conseguem evitar o uso de complexas teorias de casca. Ahmad *et al.*, 1970, partiram de elementos tridimensionais quadráticos e cúbicos e montaram elementos de 9 a 12 nós, considerando ainda a hipótese de Love, em que as normais à superfície média permanecem normais após a deformação, e não há tensões normais transversais. Os resultados, entretanto, ainda eram deficientes para cascas finas, resultando em excessiva rigidez e baixa taxa de convergência.

Zienkiewicz *et al.*, 1971, inseriu a integração reduzida do cisalhamento transversal, utilizando um elemento de 8 nós, numa continuação do trabalho do Ahmad. A partir daí houve um grande aumento de trabalhos tratando de elementos de casca, estudando diversos aspectos, como não-linearidade geométrica e material, controle de modos espúrios e controle de travamento de cisalhamento e de membrana. Pode-se citar Hughes *et al.*, 1977, Tessler e Hughes, 1983, e Stolarski *et al.*, 1985.



Outros trabalhos estenderam os conceitos acima para cascas laminadas. Panda e Natarajan, 1991, utilizaram integração numérica tridimensional ( $2 \times 2 \times 2$ ) em cada camada do elemento. A matriz de rigidez de cada camada é então somada para a obtenção da matriz completa do elemento e posterior sobreposição para obtenção da matriz global. Isto resulta em um considerável aumento no tempo computacional, o qual é linearmente proporcional ao número de camadas, fazendo com que esse método seja ineficaz quando o número de camadas é grande.

Estruturas com grande número de camadas são bastante comuns, e portanto torna-se atrativo o uso de esquemas de integração explícita na direção da espessura. Isso torna-se possível através de uma aproximação das componentes do inverso do Jacobiano em relação à sua variação através da espessura, que podem ser consideradas constantes ou que variem linearmente. O nível de aproximação dependerá de parâmetros geométricos, particularmente da relação raio-espessura.

Milford e Schnobrich, 1986, consideraram uma variação linear do inverso do Jacobiano e apresentaram a formulação de integração explícita na direção da espessura. Eles aplicaram essa formulação a casos isotrópicos, homogêneos e a problemas não-lineares geométricos. Vlachoutsis, 1990, estendeu a integração explícita para o caso de cascas de material composto laminado. Para os exemplos numéricos, ele considerou o inverso do Jacobiano constante. Ele comparou a performance de elementos baseados na integração explícita com outros baseados na formulação de Ahmad. Apesar de apresentar a formulação para cascas laminadas, ele não apresentou resultados para esses casos.

Yunus *et al.*, 1989, estudou o mesmo problema quase simultaneamente, e apresentou expressões para matrizes de rigidez linear, não-lineares geometricamente, matriz de massa e vetor de cargas térmicas, considerando variação linear do inverso do Jacobiano. A eficiência computacional foi estudada através da comparação de tempo de CPU para cada matriz de rigidez obtida pela integração explícita com o da integração numérica na direção da espessura.

No presente trabalho, será apresentada a formulação de Kumar e Palaninathan, de 1997. Eles apresentaram três modelos de cálculo, fazendo considerações a respeito dos componentes do inverso do Jacobiano na espessura. No primeiro modelo apresentado, considera-se que há variação linear, o que leva à decomposição da matriz de derivação simbólica  $\mathbf{B}$  em três componentes, cada uma independente da coordenada da espessura. Há a necessidade de cálculo do Jacobiano apenas nas duas superfícies externas da casca. No segundo modelo apresentado, considera-se que os componentes do inverso do Jacobiano são constantes, tornando necessário o cálculo do Jacobiano apenas na superfície de referência. A matriz  $\mathbf{B}$  é decomposta então em apenas duas componentes, independentes da coordenada da espessura. Há ainda um terceiro

modelo, que é uma simplificação do primeiro, através da desconsideração da terceira componente de  $\mathbf{B}$ , mas ainda com a necessidade de cálculo do Jacobiano nas duas superfícies externas.

O segundo modelo é o que apresenta melhor resposta em termos de eficiência computacional, e em relação à eficiência numérica, mostra resultados muito satisfatórios. Considerando o que é proposto para o presente trabalho, que é a análise de problemas com médias e grandes relações entre raio de curvatura e espessura total da casca discretizadas com malhas grandes, essa formulação é bastante satisfatória.

Neste trabalho é montado então um elemento de casca baseado em um elemento isoparamétrico de 8 nós (*serendipity*). Pode-se dividir a formulação em duas partes: a parte da casca em si, cuja formulação se baseia no elemento degenerado de Ahmad, e a parte do material composto laminado, utilizando integração explícita na espessura.

O elemento degenerado de Ahmad é construído partindo de um elemento tridimensional, com nós posicionados nas superfícies externas da casca. Passa-se a trabalhar com nós posicionados na superfície de referência, normalmente a superfície média. Na Figura 2.2 está a representação desse elemento com a posição dos nós e a posição dos pontos de integração em coordenadas paramétricas. Com essa premissa básica, define-se a cinemática do elemento. Uma boa descrição desse elemento pode ser encontrada no artigo original de Ahmad *et al.*, 1970, e em livros posteriores, como Zienkiewicz, 1991.

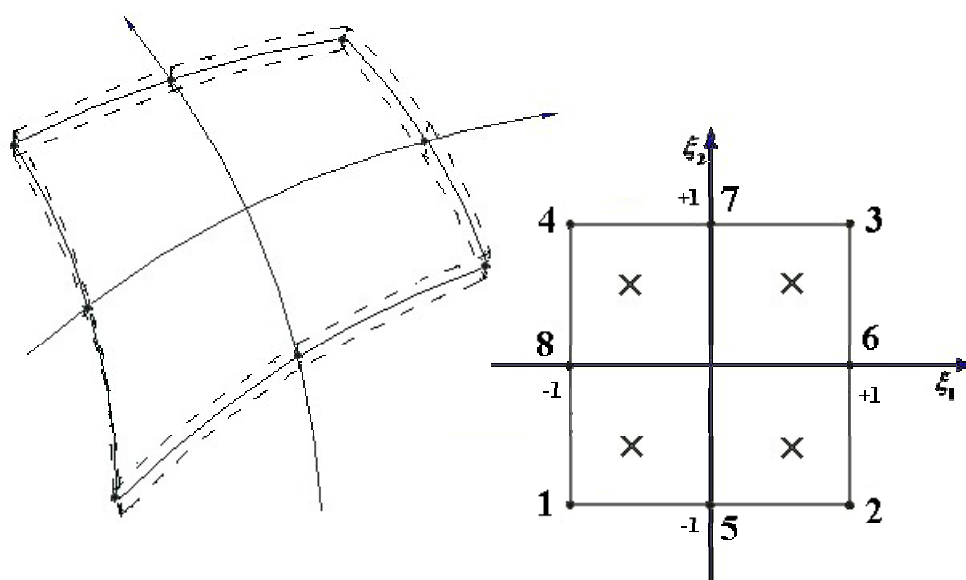


Figura 2.2. Elemento de casca com posição dos nós e dos pontos de integração no plano.

Antes da formulação do elemento, é necessário fazer uma descrição dos sistemas de coordenadas, das relações constitutivas e das transformações de coordenadas envolvidas nesse

trabalho. São informações importantes não apenas para o MEF mas para os métodos de otimização aqui aplicados.

### 2.3. SISTEMAS DE COORDENADAS

Para a implementação apropriada de um elemento finito de casca, é necessário que se defina os diferentes sistemas de coordenadas envolvidos na formulação da geometria e cinemática desse elemento. Isso se torna ainda mais importante quando se está calculando cascas laminadas, com camadas ortotrópicas. Por isso se apresenta aqui, antes da descrição das relações constitutivas utilizadas (e para uma melhor compreensão das mesmas), a descrição dos sistemas de coordenadas utilizados no trabalho, que podem ser vistos na Figura 2.3. No APÊNDICE B se descreve como se obtém esses sistemas partindo do vetor normal em cada nó do elemento. Uma notação semelhante a esta pode ser encontrada em Mourão, 1991, sem a definição de um sistema local da lâmina.

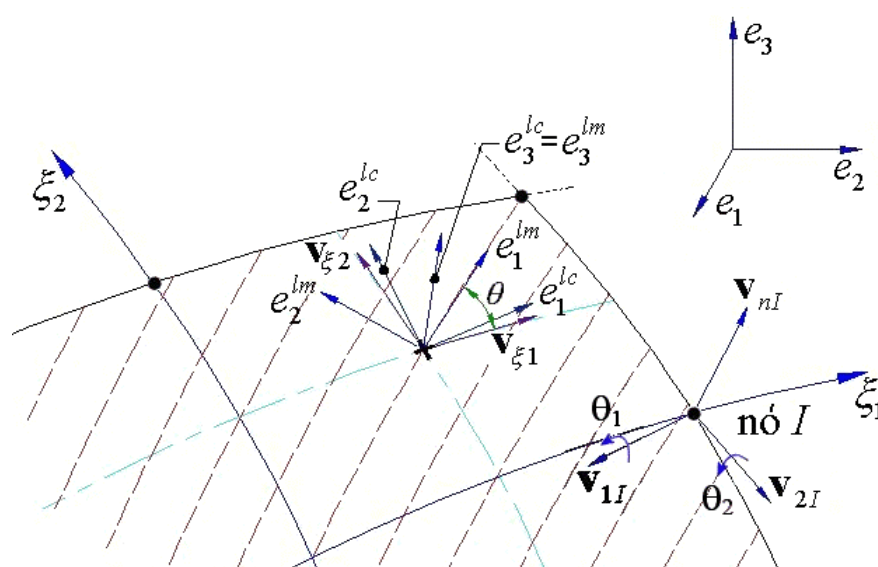


Figura 2.3. Sistemas de coordenadas envolvidos na formulação do elemento neste trabalho.

Os sistemas definidos no presente trabalho são então os seguintes:

**Sistema local da lâmina:** definido a partir do vetor normal à superfície média da casca, com origem em cada ponto de integração, mas rotacionado em torno do vetor normal, segundo o ângulo de orientação da direção de maior módulo longitudinal do material da lâmina (chamado mais simplesmente de *direção da lâmina*). Os versores são  $\{e_1^{lm}, e_2^{lm}, e_3^{lm}\}$  e a definição desse sistema é necessária para a análise de lâminas de material ortotrópico.

**Sistema local da casca:** partindo do sistema local da lâmina, com versores  $\{\mathbf{e}_1^{lc}, \mathbf{e}_2^{lc}, \mathbf{e}_3^{lc}\}$ .

Nesse sistema são apresentadas as tensões e deformações na casca, de modo a facilitar a compreensão dos valores obtidos. A orientação de cada camada está definida em relação a esse sistema de coordenadas.

**Sistema global :** define-se o sistema global de coordenadas com direções  $x_1, x_2, x_3$ , e segundo os versores  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . É nesse sistema de referência que os deslocamentos são apresentados.

**Sistema nodal:** esse sistema tem origem em cada nó do elemento, e é definido partindo do vetor normal à superfície média em cada nó ( $\mathbf{v}_{nl}$ ) e relacionando a normal com os versores do sistema global de coordenadas. Os versores são  $\{\mathbf{e}_1^N, \mathbf{e}_2^N, \mathbf{e}_3^N\}$ , obtidos através dos vetores  $\mathbf{v}_{1l}$  e  $\mathbf{v}_{2l}$  em torno dos quais são definidas as rotações em cada nó.

Como os deslocamentos da estrutura, que são as incógnitas do problema no elemento finito aqui implementado, são apresentados no sistema de coordenadas global, é necessário determinar o sistema local e o sistema da lâmina em função do sistema global, durante a rotina de cálculo da matriz de rigidez de cada elemento.

## 2.4. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

No presente trabalho utiliza-se materiais ortotrópicos em geral e elasticidade linear, e essa escolha define o uso das relações constitutivas desenvolvidas a seguir. Parte-se então da relação constitutiva dada na equação (2.1):  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ . O tensor constitutivo de quarta ordem se aplica a materiais anisotrópicos em geral. No entanto, levando em consideração a simetria das tensões, chega-se a  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ ; a simetria das deformações leva a  $C_{ijkl} = C_{jilk}$ . Essas considerações possibilitam utilizar a seguinte notação compacta para a relação constitutiva em (2.1):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1313} & C_{1323} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1213} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.12)$$

O tensor constitutivo acima tem 36 constantes independentes. A forma quadrática da energia de deformação leva a mais uma simplificação, na qual  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , o que permite deduzir que o tensor constitutivo em (2.12) é simétrico, com apenas 21 constantes elásticas independentes. Materiais caracterizados por tensores dessa forma são considerados *anisotrópicos*

(*triclínicos*), por não apresentarem planos de simetria de suas propriedades materiais. Para simplicidade, será utilizado nesse trabalho uma notação contraída para o tensor constitutivo, da seguinte maneira:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{25} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sim. & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Uma boa discussão sobre o uso e aplicação desse tipo de notação pode ser encontrada em Tsai, 1992. Se o material apresentar um plano de simetria em relação a um dos eixos coordenados, pode-se considerar que o material é *monoclínico*. Essa simetria pode ser caracterizada pela cristalografia, ou então pela presença de alguma microestrutura periódica ou estaticamente periódica. O tensor constitutivo para esse caso é dado, havendo simetria em relação a um plano 1-2 e em  $x_3 = 0$ , por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Se há dois planos ortogonais de simetria para as propriedades materiais existirá simetria em relação a um terceiro plano ortogonal e o material é dito ortotrópico, apresentando apenas 9 coeficientes elásticos independentes. O tensor constitutivo para a relação tensão-deformação na direção principal do material é dado por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Há dois casos particulares de ortotropia. Um deles é formado por materiais transversalmente isotrópicos, caracterizados pela isotropia em um plano, com o tensor constitutivo sendo dado por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{55} & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Nesse caso há apenas 5 coeficientes elásticos independentes. Se o material apresentar simetria com relação aos planos bissectores dos coordenados, o material apresenta simetria cúbica com três coeficientes independentes.

No presente trabalho a formulação estará baseada em materiais ortotrópicos em geral, conforme expressão (2.15), que representa bem as placas e cascas de material composto em estudo. Os casos particulares podem ser obtidos através de uma apropriada definição das propriedades da estrutura em análise.

#### 2.4.1. TENSÕES CISALHANTES TRANSVERSAIS

No presente trabalho, estão sendo considerados também os efeitos das tensões cisalhantes transversais. O tratamento dos efeitos da tensão cisalhante transversal em placas feitas de material isotrópico aparecem nos artigos clássicos de Reissner, 1945, e Mindlin, 1951. Extensões da teoria de Reissner para placas de material ortotrópico se deve a Girkmann e Beer, 1958, citados em Jones, 1975. A deformação normal pode ser determinada através da relação constitutiva usando o tensor para o caso ortotrópico, da seguinte maneira [Ashton e Whitney, 1970, apud Jones, 1975]:

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{C_{33}}(\sigma_{33} - C_{13}\varepsilon_{11} - C_{23}\varepsilon_{22}). \quad (2.17)$$

Isso servirá para eliminar o  $\varepsilon_{33}$  da relação tensão-deformação, chegando-se à seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{lm} & C_{12}^{lm} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22}^{lm} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{44}^{lm} & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & C_{55}^{lm} & 0 \\ & & & & C_{66}^{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Nesse caso continua não havendo acoplamento entre as tensões normais e as tensões de cisalhamento fora do plano. Considerando que  $\sigma_{33}$  é nula, a expressão (2.17) pode ser simplificada para:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22}). \quad (2.19)$$

Em (2.18), o tensor constitutivo  $\mathbf{C}^{lm}$  é montado da seguinte forma:

$$\begin{cases} C_{ij}^{lm} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} & \text{se } i, j = 1, 2, \\ C_{ij}^{lm} = C_{ij} & \text{se } i, j = 4, 5, 6. \end{cases} \quad (2.20)$$

Essa formulação é apresentada em Jones, 1975, e Hughes, 1987.

## 2.5. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Para o cálculo dos deslocamentos, que estão expressos no sistema global de coordenadas, é necessário inicialmente rotacionar o tensor constitutivo no plano de acordo com a orientação da lâmina (passando então do sistema local da lâmina para o sistema local da casca) e a seguir rotacioná-lo para o sistema global. Isso deve ser feito em cada um dos pontos de integração de cada elemento. Para a primeira rotação é necessário conhecer apenas o ângulo de orientação da lâmina. Essa é uma rotação que se aplica também para o caso de elementos de placa, com materiais ortotrópicos. Já as deformações serão obtidas inicialmente no sistema de coordenadas global. Mas é necessário passar para o sistema de coordenadas local da casca, de modo que cada componente possa ser interpretada facilmente. No caso de cálculo de tensões, o tensor constitutivo precisa ser rotacionado apenas do sistema local da lâmina para o sistema local da casca. Todas essas rotações acima podem ser melhor compreendidas através da Figura 2.4.

A matriz de rotação do tensor constitutivo pode ser descrita como a matriz que muda o tensor constitutivo de sistema de coordenadas de um sistema para outro. Por exemplo, ao se passar do sistema definido por  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  para o sistema global  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , os componentes da matriz de rotação são então os componentes de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  no sistema global (ver Figura 2.5):

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = l_1\mathbf{e}_1 + m_1\mathbf{e}_2 + n_1\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_2 = l_2\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + n_2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_3 = l_3\mathbf{e}_1 + m_3\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (2.21)$$

A matriz de rotação tem então a seguinte forma, levando em conta a ordem dos componentes do tensor constitutivo:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & m_1n_1 & l_1n_1 & l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & m_2n_2 & l_2n_2 & l_2m_2 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & m_2n_3 + m_3n_2 & l_2n_3 + l_3n_2 & l_2m_3 + l_3m_2 \\ 2l_1l_3 & 2m_1m_3 & 2n_1n_3 & m_1n_3 + m_3n_1 & l_1n_3 + l_3n_1 & l_1m_3 + l_3m_1 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & m_1n_2 + m_2n_1 & l_1n_2 + l_2n_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Essa matriz teria 6 linhas, mas a terceira linha é retirada devido à hipótese de que as tensões normais à superfície média são desconsideradas.

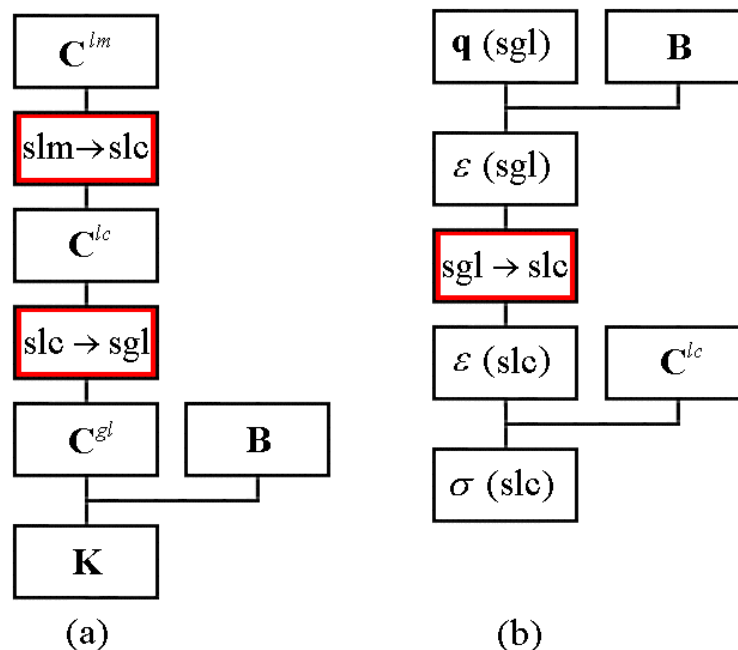


Figura 2.4. Fluxograma mostrando as transformações de coordenadas durante o processo de montagem da matriz de rigidez para cálculo dos deslocamentos (a) e do cálculo das deformações e tensões (b).

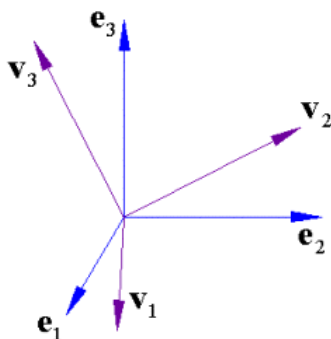


Figura 2.5. Versores de dois sistemas de coordenadas cartesianos com orientação arbitrária.

A rotação no plano está representada na Figura 2.6. Os componentes do sistema da lâmina representados em função do sistema local têm o seguinte valor:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{k1}^{lm} = (\cos\theta)_k \mathbf{e}_1^{lc} + (\sin\theta)_k \mathbf{e}_2^{lc} \\ \mathbf{e}_{k2}^{lm} = (-\sin\theta)_k \mathbf{e}_1^{lc} + (\cos\theta)_k \mathbf{e}_2^{lc} \\ \mathbf{e}_{k3}^{lm} = \mathbf{e}_3^{lc} \end{cases} \quad (2.23)$$

Os vetores  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  são dados então por:



$$\begin{cases} \mathbf{l} = \{\cos\theta_k & -\sin\theta_k & 0\}^T \\ \mathbf{m} = \{\sin\theta_k & \cos\theta_k & 0\}^T \\ \mathbf{n} = \{0 & 0 & 1\}^T \end{cases} \quad (2.24)$$

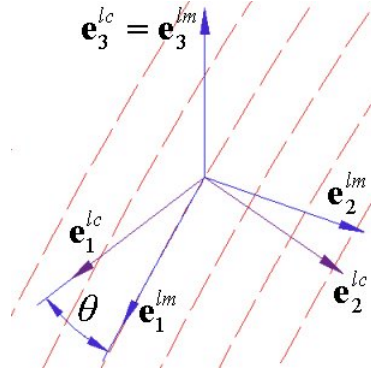


Figura 2.6. Representação do ângulo entre o sistema da lâmina e do sistema local da casca.

Substituindo os valores da equação (2.24) na matriz de rotação apresentada em (2.22), se obtém a matriz de rotação no plano  $\mathbf{Q}_{pl}$ :

$$\mathbf{Q}_{pl} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

onde  $c = \cos\theta_k$  e  $s = \sin\theta_k$ . Como pode ser visto, a terceira coluna é nula, e pode ser eliminada dessa matriz, permitindo sua multiplicação pelo tensor constitutivo  $\mathbf{C}^{lm}$ , levando ao tensor  $\mathbf{C}^{lc}$ :

$$\mathbf{C}_k^{lc} = \mathbf{Q}_{pl}^T \mathbf{C}^{lm} \mathbf{Q}_{pl} \Big|_k = \begin{bmatrix} C_{k11}^{lc} & C_{k12}^{lc} & 0 & 0 & C_{k15}^{lc} \\ C_{k21}^{lc} & C_{k22}^{lc} & 0 & 0 & C_{k25}^{lc} \\ 0 & 0 & C_{k33}^{lc} & C_{k34}^{lc} & 0 \\ 0 & 0 & C_{k43}^{lc} & C_{k44}^{lc} & 0 \\ C_{k51}^{lc} & C_{k52}^{lc} & 0 & 0 & C_{k55}^{lc} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

É interessante explicitar os termos não-nulos de  $\mathbf{C}_k^{lc}$ , pois há economia de tempo de cálculo e para um futuro cálculo da derivada desses termos em relação a  $\theta$ . Esses termos têm o seguinte valor:

$$\begin{cases} C_{k11}^{lc} = \left[ (c^2 C_{11}^{lm} + s^2 C_{12}^{lm}) c^2 + (c^2 C_{12}^{lm} + s^2 C_{22}^{lm}) s^2 + 4c^2 s^2 C_{66}^{lm} \right]_k, \\ C_{k21}^{lc} = \left[ (s^2 C_{11}^{lm} + c^2 C_{12}^{lm}) c^2 + (s^2 C_{12}^{lm} + c^2 C_{22}^{lm}) s^2 - 4c^2 s^2 C_{66}^{lm} \right]_k, \\ C_{k51}^{lc} = \left[ (cs C_{11}^{lm} - cs C_{12}^{lm}) c^2 + (cs C_{12}^{lm} - cs C_{22}^{lm}) s^2 - 2cs C_{66}^{lm} (c^2 - s^2) \right]_k. \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} C_{k12}^{lc} = \left[ (c^2 C_{11}^{lm} + s^2 C_{12}^{lm}) s^2 + (c^2 C_{12}^{lm} + s^2 C_{22}^{lm}) c^2 - 4c^2 s^2 C_{66}^{lm} \right]_k, \\ C_{k22}^{lc} = \left[ (s^2 C_{11}^{lm} + c^2 C_{12}^{lm}) s^2 + (s^2 C_{12}^{lm} + c^2 C_{22}^{lm}) c^2 + 4c^2 s^2 C_{66}^{lm} \right]_k, \\ C_{k52}^{lc} = \left[ (cs C_{11}^{lm} - cs C_{12}^{lm}) s^2 + (cs C_{12}^{lm} - cs C_{22}^{lm}) c^2 + 2cs C_{66}^{lm} (c^2 - s^2) \right]_k. \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} C_{k33}^{lm} = \left[ c^2 C_{44}^{lm} + s^2 C_{55}^{lm}, \quad C_{43}^{lm} = -cs C_{44}^{lm} + cs C_{55}^{lm} \right]_k, \\ C_{k34}^{lm} = \left[ -cs C_{44}^{lm} + cs C_{55}^{lm}, \quad C_{44}^{lm} = s^2 C_{44}^{lm} + c^2 C_{55}^{lm} \right]_k, \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} C_{k15}^{lc} = \left[ (c^2 C_{11}^{lm} + s^2 C_{12}^{lm}) cs - (c^2 C_{12}^{lm} + s^2 C_{22}^{lm}) cs - 2cs C_{66}^{lm} (c^2 - s^2) \right]_k, \\ C_{k25}^{lc} = \left[ (s^2 C_{11}^{lm} + c^2 C_{12}^{lm}) cs - (s^2 C_{12}^{lm} + c^2 C_{22}^{lm}) cs + 2cs C_{66}^{lm} (c^2 - s^2) \right]_k, \\ C_{k55}^{lc} = \left[ (cs C_{11}^{lm} - cs C_{12}^{lm}) cs + (cs C_{12}^{lm} - cs C_{22}^{lm}) cs + C_{66}^{lm} (c^2 - s^2) \right]_k. \end{cases} \quad (2.30)$$

Há a necessidade de se realizar mais uma rotação, agora passando para o sistema de coordenadas global a partir do sistema local  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  estabelecido na superfície da casca. Os versores desse sistema local representados no sistema global de coordenadas têm o seguinte valor:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1^{lc} = e_{11}^{lc} \mathbf{e}_1 + e_{21}^{lc} \mathbf{e}_2 + e_{31}^{lc} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2^{lc} = e_{12}^{lc} \mathbf{e}_1 + e_{22}^{lc} \mathbf{e}_2 + e_{32}^{lc} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^{lc} = e_{13}^{lc} \mathbf{e}_1 + e_{23}^{lc} \mathbf{e}_2 + e_{33}^{lc} \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (2.31)$$

Os vetores  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  são dados então por:

$$\begin{cases} \mathbf{l} = \{e_{11}^{lc} & e_{12}^{lc} & e_{13}^{lc}\}^T \\ \mathbf{m} = \{e_{21}^{lc} & e_{22}^{lc} & e_{23}^{lc}\}^T \\ \mathbf{n} = \{e_{31}^{lc} & e_{32}^{lc} & e_{33}^{lc}\}^T \end{cases} \quad (2.32)$$

Basta então substituir os valores acima na matriz de rotação em (2.22) para se obter a matriz de rotação no espaço  $\mathbf{Q}_{es}$ , representada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{Q}_{es} = \begin{bmatrix} (e_{11}^{lc})^2 & (e_{21}^{lc})^2 & (e_{31}^{lc})^2 & e_{21}^{lc} e_{31}^{lc} & e_{11}^{lc} e_{31}^{lc} & e_{11}^{lc} e_{21}^{lc} \\ (e_{12}^{lc})^2 & (e_{22}^{lc})^2 & (e_{32}^{lc})^2 & e_{22}^{lc} e_{32}^{lc} & e_{12}^{lc} e_{32}^{lc} & e_{12}^{lc} e_{22}^{lc} \\ 2e_{12}^{lc} e_{13}^{lc} & 2e_{22}^{lc} e_{23}^{lc} & 2e_{32}^{lc} e_{33}^{lc} & e_{22}^{lc} e_{33}^{lc} + e_{23}^{lc} e_{32}^{lc} & e_{12}^{lc} e_{33}^{lc} + e_{13}^{lc} e_{32}^{lc} & e_{12}^{lc} e_{23}^{lc} + e_{13}^{lc} e_{22}^{lc} \\ 2e_{11}^{lc} e_{13}^{lc} & 2e_{21}^{lc} e_{23}^{lc} & 2e_{31}^{lc} e_{33}^{lc} & e_{21}^{lc} e_{33}^{lc} + e_{23}^{lc} e_{31}^{lc} & e_{11}^{lc} e_{33}^{lc} + e_{13}^{lc} e_{31}^{lc} & e_{11}^{lc} e_{23}^{lc} + e_{13}^{lc} e_{21}^{lc} \\ 2e_{11}^{lc} e_{12}^{lc} & 2e_{21}^{lc} e_{22}^{lc} & 2e_{31}^{lc} e_{32}^{lc} & e_{21}^{lc} e_{32}^{lc} + e_{22}^{lc} e_{31}^{lc} & e_{11}^{lc} e_{32}^{lc} + e_{12}^{lc} e_{31}^{lc} & e_{11}^{lc} e_{22}^{lc} + e_{12}^{lc} e_{21}^{lc} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

A rotação é representada então pela seguinte equação:

$$\mathbf{C}_k^{gl} = \mathbf{Q}_{es}^T \mathbf{C}_k^{lc} \mathbf{Q}_{es}. \quad (2.34)$$

Como é citado anteriormente, há a necessidade de se representar a deformação nas coordenadas do sistema local da casca para que seja possível compreender seu significado físico. Para evitar a definição do sistema global em função do sistema local, utiliza-se a mesma matriz de rotação  $\mathbf{Q}_{es}$  definida em (2.33), da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^{gl} = \mathbf{Q}_{es}^T \boldsymbol{\varepsilon}_k^{lc}. \quad (2.35)$$

Invertendo então essa relação, chega-se a:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^{lc} = \mathbf{Q}_{es} \boldsymbol{\varepsilon}_k^{gl}. \quad (2.36)$$

Após essa rotação o cálculo das tensões é feito sem necessidade de aplicar rotações.

## 2.6. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

Nas seções abaixo é apresentada a formulação do elemento, através da definição da geometria e cinemática do elemento, dos elementos do Jacobiano, da matriz de rigidez do elemento, da matriz de derivação simbólica e dos vetores de força. Mostra-se como é obtida a solução do problema estático, e como é feito o cálculo das deformações e tensões. As considerações a respeito de cada lâmina são feitas na montagem da matriz de rigidez do elemento, do vetor de forças de corpo e no cálculo da tensão.

### 2.6.1. GEOMETRIA E CINEMÁTICA DO ELEMENTO

As coordenadas de um ponto qualquer de um elemento são dadas por:

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_I(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_I + \frac{\xi_3}{2} t_I \phi_I(\xi_1, \xi_2) \mathbf{v}_{nl}, \quad (2.37)$$

onde  $\phi_I(\xi_1, \xi_2)$  são as funções de interpolação para cada nó,  $\mathbf{x}_I$  são as coordenadas de cada nó do elemento, representadas no sistema global,  $t_I$  é a espessura total do elemento em cada nó,  $\mathbf{v}_{nl}$  é o vetor que dá a direção da normal à superfície média do elemento em cada nó (também no sistema global), e  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  são as coordenadas paramétricas. Os deslocamentos são então obtidos através da diferença entre a coordenada do ponto após (índice sobrescrito 1) e antes (índice sobrescrito 0) da deformação:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = \phi_I \left[ \mathbf{u}_I + \frac{\xi_3}{2} t_I (\mathbf{v}_{nl}^1 - \mathbf{v}_{nl}^0) \right]. \quad (2.38)$$

A diferença entre os vetores normais antes e depois da deformação é dada por

$$\mathbf{v}_{nl}^1 - \mathbf{v}_{nl}^0 = -\mathbf{v}_{2I} \theta_{2I} + \mathbf{v}_{1I} \theta_{1I}. \quad (2.39)$$

A definição das rotações em torno de  $\mathbf{v}_{1I}$  e  $\mathbf{v}_{2I}$  estão apresentadas na Figura 2.7. A expressão (2.38) pode ser representada então por

$$\mathbf{u} = \phi_I \left[ \mathbf{u}_I + \frac{\xi_3}{2} t_I (\mathbf{v}_{1I} \theta_{1I} - \mathbf{v}_{2I} \theta_{2I}) \right] \quad (2.40)$$

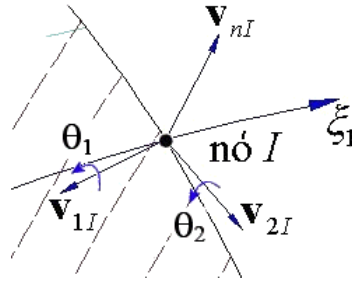


Figura 2.7. Definição das rotações nos nós do elemento.

Para fazer as devidas mudanças de coordenadas e mapeamento do elemento mestre, é necessário o cálculo do Jacobiano de cada elemento, que é dado pela seguinte expressão:

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} . \quad (2.41)$$

Utilizando as definições para  $x_i$  dadas na seção anterior, chega-se a:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \left( x_{1I} + \frac{\xi_3}{2} t_I v_{n1I} \right) \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_1} & \left( x_{1I} + \frac{\xi_3}{2} t_I v_{n1I} \right) \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_2} & \phi_I \frac{\xi_3}{2} t_I v_{n1I} \\ \left( x_{2I} + \frac{\xi_3}{2} t_I v_{n2I} \right) \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_1} & \left( x_{2I} + \frac{\xi_3}{2} t_I v_{n2I} \right) \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_2} & \phi_I \frac{\xi_3}{2} t_I v_{n2I} \\ \left( x_{3I} + \frac{\xi_3}{2} t_I v_{n3I} \right) \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_1} & \left( x_{3I} + \frac{\xi_3}{2} t_I v_{n3I} \right) \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_2} & \phi_I \frac{\xi_3}{2} t_I v_{n3I} \end{bmatrix} , \quad (2.42)$$

## 2.6.2. MATRIZ DE RIGIDEZ PARA CASCAS LAMINADAS

Na montagem da matriz de rigidez de um elemento de casca laminada é necessário levar em conta as propriedades de cada lâmina. Isso pode ser feito de uma maneira simples do ponto de vista analítico, bastando fazer uma mudança de variáveis da seguinte forma:

$$d\xi_3 = h_k \frac{1}{t} d\xi_{3k} , \quad (2.43)$$

onde  $h_k$  é a espessura de cada lâmina (ver notação na Figura 2.8). O cálculo da matriz de rigidez do elemento é feito da seguinte maneira:

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 . \quad (2.44)$$

Inserindo (2.43) em (2.44), se obtém:

$$\mathbf{K}_e = \sum_{k=1}^{nl} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{B}_k |\mathbf{J}_k| \frac{h_k}{t} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_{3k} , \quad (2.45)$$

e faz-se então a integração numérica em cada uma das três direções. Isso, no entanto, leva a um grande custo computacional, uma vez que dependendo da quantidade de lâminas, o número de pontos em que deve ser calculado o valor das matrizes de rigidez pode ser excessivamente grande.

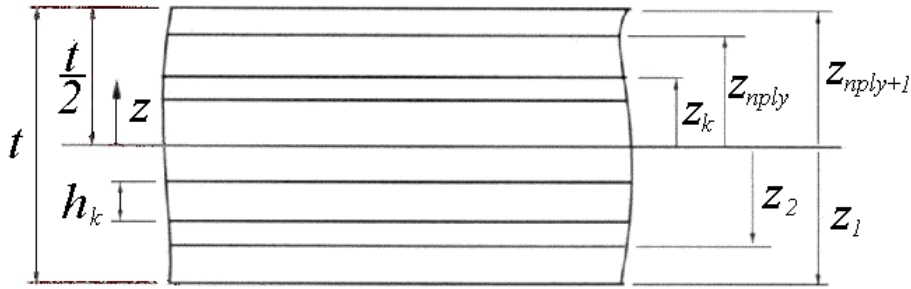


Figura 2.8. Notação utilizada no presente trabalho para definir as coordenadas na direção da espessura da base e do topo de cada lâmina.

No modelo apresentado por Kumar e Palaninathan, 1997, para computação de cascas de material composto utilizando integração explícita na espessura,  $z$  substitui  $(\xi_3/2)t_l$  em (2.40) e se considera que os elementos do inverso do Jacobiano são constantes na direção da espessura. Essas considerações permitem que a matriz de derivação simbólica seja decomposta em componentes independentes da coordenada na direção da espessura. Assim, a integração na espessura é calculada analiticamente de forma independente da integração numérica na superfície de referência. A matriz  $\mathbf{B}$  assume então a seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + z\mathbf{B}_2 \quad (2.46)$$

A expressão para cada um dos componentes  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  acima é dada por

$$\mathbf{B}_{1l} = \begin{bmatrix} b_4 & 0 & 0 & b_1 v_{1l_1} & -b_1 v_{2l_1} \\ 0 & b_5 & 0 & b_2 v_{1l_2} & -b_2 v_{2l_2} \\ 0 & 0 & b_6 & b_3 v_{1l_3} & -b_3 v_{2l_3} \\ 0 & b_6 & b_5 & b_2 v_{1l_3} + b_3 v_{1l_2} & -b_2 v_{2l_3} - b_3 v_{2l_2} \\ b_6 & 0 & b_4 & b_1 v_{1l_3} + b_3 v_{1l_1} & -b_1 v_{2l_3} - b_3 v_{2l_1} \\ b_5 & b_4 & 0 & b_1 v_{1l_2} + b_2 v_{1l_1} & -b_1 v_{2l_2} - b_2 v_{2l_1} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{B}_{2l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b_4 v_{1l_1} & -b_4 v_{2l_1} \\ 0 & 0 & 0 & b_5 v_{1l_2} & -b_5 v_{2l_2} \\ 0 & 0 & 0 & b_6 v_{1l_3} & -b_6 v_{2l_3} \\ 0 & 0 & 0 & b_5 v_{1l_3} + b_6 v_{1l_2} & -b_5 v_{2l_3} - b_6 v_{2l_2} \\ 0 & 0 & 0 & b_4 v_{1l_3} + b_6 v_{1l_1} & -b_4 v_{2l_3} - b_6 v_{2l_1} \\ 0 & 0 & 0 & b_4 v_{1l_2} + b_5 v_{1l_1} & -b_4 v_{2l_2} - b_5 v_{2l_1} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

onde o sub-índice  $I$  indica que a matriz é calculada em cada nó do elemento. Os coeficientes que aparecem nas expressões acima são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= J_{13}^{-1} \phi_I \frac{t}{2}, \\
 b_2 &= J_{23}^{-1} \phi_I \frac{t}{2}, \\
 b_3 &= J_{33}^{-1} \phi_I \frac{t}{2}, \\
 b_4 &= \left( J_{11}^{-1} \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_1} + J_{12}^{-1} \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_2} \right), \\
 b_5 &= \left( J_{21}^{-1} \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_1} + J_{22}^{-1} \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_2} \right), \\
 b_6 &= \left( J_{31}^{-1} \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_1} + J_{32}^{-1} \frac{\partial \phi_I}{\partial \xi_2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Assim, a matriz de rigidez passa a ser calculada como segue

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_3 \mathbf{B}_2 \right) \frac{2}{t} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2, \tag{2.50}$$

onde  $|\mathbf{J}|$  é o determinante do Jacobiano e

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_1 &= \sum_{k=1}^{nl} \mathbf{C}_k^{lc} (z_t - z_b)_k, \\
 \mathbf{C}_2 &= \sum_{k=1}^{nl} \mathbf{C}_k^{lc} (z_t^2 - z_b^2)_k, \\
 \mathbf{C}_3 &= \sum_{k=1}^{nl} \mathbf{C}_k^{lc} (z_t^3 - z_b^3)_k.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

O próximo passo após a obtenção da matriz de rigidez de cada elemento é a montagem da matriz de rigidez global da estrutura. Isso é feito através de uma rotina que sobrepõe essa matriz do elemento dentro da matriz global levando em consideração os nós de cada elemento e a ordem dos graus de liberdade de cada nó.

### 2.6.3. VETOR DE FORÇAS

O cálculo do vetor de forças dependerá do tipo de carregamento atuando sobre a estrutura. No caso de forças ou momentos concentrados atuando sobre a superfície da estrutura, basta aplicar o valor equivalente na devida posição dentro do vetor de forças. Já no caso de forças distribuídas ou de forças de corpo, é necessário realizar a integração dentro de cada elemento e posteriormente sobrepor essas cargas no vetor de forças global.

O vetor força de corpo é definido através da seguinte equação:

$$\mathbf{f}_b = \int_{\Omega} \mathbf{b} d\Omega, \quad (2.52)$$

onde  $\mathbf{b}$  representa a força de corpo que atua em cada ponto do domínio. Para o caso de força da gravidade,  $\mathbf{b}$  vale  $\rho \mathbf{g}$  onde  $\rho$  é a densidade do material e  $\mathbf{g}$  o vetor da aceleração da força de campo (gravidade);  $\mathbf{b}$  tem portanto dimensão de força por volume [ $\text{kg}(\text{m}/\text{s}^2)/\text{m}^3$ ]. Como a densidade varia de camada do elemento, a força de corpo de cada elemento será calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_b^e = \sum_{k=1}^{nl} \rho_k \int_{\Omega^e} \mathbf{g} d\Omega^e. \quad (2.53)$$

No caso de cargas distribuídas na superfície da casca, o vetor força distribuída é dada por

$$\mathbf{f}_d = \int_{\Gamma} \mathbf{Q} \phi d\Gamma, \quad (2.54)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é a força distribuída aplicada. Da mesma maneira que as forças de corpo, quando há carga distribuída aplicada sobre determinada estrutura, há a necessidade de integrar essa carga em cada elemento da região carregada e então sobrepor no vetor força distribuída global.

O vetor força global é finalmente dado por

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_d, \quad (2.55)$$

onde  $\mathbf{f}_c$  é o vetor de forças concentradas global, com carregamentos definidos em cada nó da malha para cada grau de liberdade.

#### 2.6.4. SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Tendo a matriz de rigidez global e vetor de forças global montados, deve-se aplicar as condições de contorno. Isso é feito zerando a linha e a coluna da matriz de rigidez referente a cada grau de liberdade, tornando o valor da diagonal principal igual a 1 e ainda fazendo o valor no vetor de forças global igual ao deslocamento prescrito.

Após isso, basta resolver o seguinte sistema:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (2.56)$$

Existem diversos métodos possíveis para a solução da equação acima, como eliminação de Gauss, Cholesky, gradientes conjugados, etc. Através da fatorização por Cholesky, a solução é obtida através de duas etapas. A matriz de rigidez é decomposta da seguinte forma

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T, \quad (2.57)$$

onde  $\mathbf{L}$  é uma matriz triangular inferior, em que todos os elementos acima da diagonal principal são zeros. Maiores detalhes sobre decomposição de matrizes podem ser encontrados no livro de Bathe, 1995. Dessa forma, o problema se torna:

$$\mathbf{L} \mathbf{L}^T \mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (2.58)$$

Na primeira etapa, resolve-se a seguinte equação:

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{f} . \quad (2.59)$$

Com esse resultado, calcula-se finalmente o vetor deslocamento:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{q} = \mathbf{y} . \quad (2.60)$$

### 2.6.5. DEFORMAÇÃO E TENSÃO

Com a obtenção do vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{q}$ , pode-se então efetuar o cálculo da deformação e da tensão. A deformação é obtida da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{B}_1 + z\mathbf{B}_2) \mathbf{q} . \quad (2.61)$$

A deformação calculada dessa maneira está apresentada no sistema global de coordenadas. Há a necessidade de se representar esse valores no sistema local da casca, o que é feito através da expressão (2.36), para facilitar o cálculo posterior da direção de tensão principal.

A tensão é dada então por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{lc} = \mathbf{C}^{lc} \boldsymbol{\varepsilon}^{lc} . \quad (2.62)$$

No presente trabalho, esse valores são calculados nos mesmos pontos de integração utilizados para a obtenção da matriz de rigidez de cada elemento. Quanto à posição na direção da espessura, o cálculo pode ser feito fazendo  $z$  em (2.61) igual a qualquer valor entre  $z_b$  e  $z_t$  de cada camada. Para fins de utilização nas rotinas de otimização, uma discussão a respeito da obtenção desses valores é feita na seção 4.3.2. Alguns testes deste elemento na análise de placas e cascas são apresentados no APÊNDICE A.



### 3. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A otimização sempre esteve, mesmo que inconscientemente, presente na vida do homem, através de palavras como “melhor”, “mínimo”, “máximo”. Conceitos de otimização são encontrados em diversos campos da ciência, como biologia, química, física, estatística, economia, etc. Na evolução animal, uma espécie que não se adapta ao seu meio ambiente se extingue, e segundo Darwin apenas as espécies que melhor se adaptaram às mudanças ocorridas na geologia e clima da Terra sobreviveram [Ronan, 1991]. Critérios de mínima energia estão presentes também em diversas teorias fundamentais da física e química, como no caso dos modelos atômicos atualmente aceitos. Dentro de uma empresa, pode-se verificar a otimização em diversos níveis, desde gerenciais, incluindo métodos e processos, até a otimização funcional do próprio produto final, por exemplo.

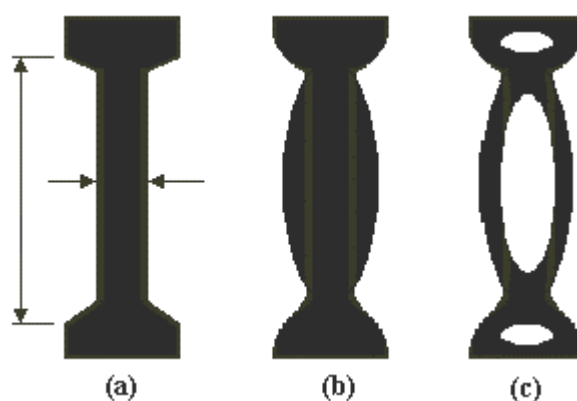
A otimização estrutural é o enfoque principal desse trabalho, e neste capítulo será apresentado um breve histórico a seu respeito, incluindo sua classificação principal e sua utilização. Alguns conceitos básicos para melhor compreensão dos capítulos subseqüentes são dados na seção 3.2, os principais algoritmos de solução de problemas de otimização estrutural utilizados atualmente são discutidos, e uma descrição da Programação Linear Seqüencial (SLP) é feita com maiores detalhes. Por último, discute-se a otimização topológica, incluindo conceitos, formulações penalizadas e alguns problemas numéricos.

#### 3.1. BREVE HISTÓRICO DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

O objetivo da otimização estrutural consiste na busca dos melhores valores de certas variáveis que levem a projetos ótimos ao mesmo tempo que todas as restrições impostas sejam satisfeitas [Cheng, 1992]. A determinação desses projetos ótimos é feita de acordo com os mais diversos critérios, utilizando leis matemáticas e mecânicas originando estruturas completas ou elementos estruturais. Dessa forma, a otimização estrutural se torna uma ferramenta poderosa para o engenheiro durante a fase de projeto de um produto.

Problemas de otimização estrutural podem ser classificados de acordo com as seguintes categorias tradicionais, baseado nas variáveis de projeto, e que diferem em seu grau de complexidade: otimização dimensional, otimização de forma e otimização topológica (ver Figura 3.1). Nos problemas de otimização dimensional a forma da estrutura não muda, e as variáveis de projeto são propriedades da rigidez do elemento, como a área da seção transversal de barras, espessura de placas, momentos de inércia ou propriedades do material (quantidade e

direção da fibra). Não há modificação na topologia da estrutura ou na sua forma, sendo um problema típico a busca das áreas ótimas de barras de uma estrutura para diminuir a flexibilidade da mesma. Nos problemas de otimização de forma, os limites e interfaces das estruturas são controlados como variáveis de projeto que geralmente são contínuas. Problemas de otimização de forma geralmente são mais complicados do que otimização dimensional pois requerem técnicas sofisticadas para geração de malha automatizada e derivadas bastante precisas para a determinação da sensibilidade. A otimização topológica introduz uma estrutura base de elementos estruturais possíveis, e escolhe a melhor distribuição possível dentro desse universo. Em estruturas do tipo treliças a otimização topológica se refere à determinação da seqüência espacial de componentes, através da determinação da sua dimensão final, que pode ser nula. No caso contínuo, um domínio fixo é dividido em vários elementos, e se determina quais deles devem ser mantidos na estrutura.



**Figura 3.1. Tipos de otimização: (a) otimização dimensional, (b) otimização de forma, (c) otimização topológica.**

Geralmente se aceita que o primeiro trabalho no sentido de determinar a forma de uma estrutura com base em sua resistência foi realizado por Galileu, 1638. O projeto de estruturas com resistência uniforme foi estudado por vários pesquisadores, como Bernoulli (1687), Lagrange (1770), Maxwell (1869) e Lévy (1875), entre outros. As primeiras estratégias de otimização estrutural podem ser encontradas na década de 1860, quando Maxwell achou os princípios fundamentais para a forma de estruturas de barra com peso mínimo e máxima tensão prescrita [Maute *et al.*, 1999]. Michell, 1904, apresentou trabalhos no campo de otimização de topológica de estruturas discretas (barras, vigas). Muito mais tarde, pesquisadores como Hemp, 1973, e Prager e Rozvany, 1977, estenderam o trabalho de Michell para problemas de otimização mais complexos com restrições e carregamentos múltiplos assim como a problemas de placa, utilizando métodos analíticos.

A disponibilidade de computadores digitais e o desenvolvimento de otimização de componentes em estruturas aeronáuticas levaram à aplicação de técnicas de programação matemática desenvolvidas por grupos de pesquisa envolvidos em projeto estrutural. Algumas das primeiras aplicações numéricas podem ser encontradas no trabalho de Heyman, 1951, no qual técnicas de programação matemática foram aplicadas ao projeto de pórticos no regime plástico.

Estudos mais modernos em otimização topológica foram iniciados por Schmit, 1960, introduzindo métodos de programação não-linear. O método de projeto estrutural proposto por Schmit foi reconhecido depois que Fox, 1965, apresentou o conceito e análise de sensibilidade [Min, 1997]. A análise de sensibilidade é um procedimento para obter derivadas da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto.

Um grande avanço em otimização estrutural pode ser encontrado em um artigo sobre projeto de forma ótima de Zienkiewicz e Campbell, 1973. Até essa época, a otimização estrutural foi usada principalmente para determinar tamanhos de elementos estruturais como a espessura de placas e parâmetros para a seção transversal de treliças. Estes pesquisadores estenderam a área de aplicação de otimização estrutural para o projeto de forma através do uso das coordenadas nodais do modelo de elementos finitos como variáveis no problema de otimização da forma de uma turbina rotativa.

Nos anos 70, a otimização estrutural foi largamente aplicada em muitos campos da engenharia, mas não houve muito progresso por quase 10 anos. A razão para isso foi que o desenvolvimento do projeto ótimo era tão primitivo que só podia ser aplicado a estruturas simples. Enquanto isso, o MEF teve um desenvolvimento muito grande tanto na teoria como na prática, fornecendo a engenheiros programas para solução de problemas de caráter geral. No começo dos anos 80, entretanto, sistemas de otimização estrutural de caráter geral associados com o MEF foram desenvolvidos entre grupos de pesquisa europeus para otimizar tamanhos de estruturas. O conceito de Computer-Aided Engineering (CAE) introduzido no início dos anos 80 teve um grande impacto no desenvolvimento de sistemas de otimização estrutural [Min, 1997]. Nos anos 90, a otimização estrutural foi bastante utilizada em aplicações práticas de projeto. Isso trouxe de volta o interesse no projeto ótimo de estruturas de modo que problemas de otimização estrutural previamente discutidos foram reexaminados para gerar formas e topologias ótimas.

### 3.2. ALGUNS CONCEITOS MATEMÁTICOS DE OTIMIZAÇÃO

Há diversos textos que apresentam conceitos básicos de otimização estrutural, como Haftka e Gürdal, 1992, ou Secchi, 2001. De uma maneira geral, um problema de otimização com restrições pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \text{extremizar } s(\mathbf{x}) \\
& \text{sujeito a } g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1..n_g, \\
& h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1..n_h
\end{aligned} \tag{2.63}$$

onde  $s$  é o funcional a extremizar,  $g_j$  são as restrições de desigualdade do problema, em número de  $n_g$ ,  $h_k$  são as  $n_h$  restrições de igualdade e  $\mathbf{x}$  é um vetor definindo as variáveis de projeto. Estas podem ser de natureza discreta, assumindo valores pré-determinados dentro de um conjunto do tipo  $\{x \in X | x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\}$  ou contínua, assumindo quaisquer valores dentro de um intervalo definido como  $\{x \in X | x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}}\}$ . No caso do estudo deste trabalho, poderia se desejar que a orientação de cada camada assumisse valores discretos, dentro de um conjunto do tipo  $\{\theta \in \Theta | \theta = (-90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)\}$ , ou então pode-se trabalhar com variáveis contínuas, permitindo que a orientação assumira qualquer valor no intervalo  $\{\theta \in \Theta | -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ\}$ , por exemplo.

A função  $s(x)$  também é chamada de função objetivo. Em problemas de otimização estrutural, peso, deslocamentos, tensões, frequências de vibração, cargas de flambagem, flexibilidade, custo ou qualquer combinação dessas quantidades pode ser usada como função objetivo e sua escolha tem papel fundamental na determinação e sucesso das estratégias a serem seguidas para o processo de otimização. Através de uma definição matemática apropriada dessa função, o manejo das variáveis de projeto pode se tornar bastante fácil e haverá conseqüente diminuição no tempo de computação e diminuição de erros.

A solução do problema (2.63) passa pela construção do Lagrangiano aumentado:

$$\mathcal{L} = s(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j [g_j(\mathbf{x}) + t_j^2] + \sum_{k=1}^{n_h} \mu_k h_k(\mathbf{x}) \tag{2.64}$$

onde  $\lambda_j$  e  $\mu_k$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente, e  $t_j$  são as variáveis de folga (*slack*), introduzidas para transformar a restrição de desigualdade em uma de igualdade [Cardoso, 2000]. Partindo de (2.64), as condições de ótimo de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) são as seguintes [Haftka e Gürdal, 1992]:

$$\begin{cases}
\nabla s(\mathbf{x}^*) + \lambda_n \nabla h(\mathbf{x}^*) + \mu_m \nabla g(\mathbf{x}^*) = 0 \\
h(\mathbf{x}^*) = 0 \\
g(\mathbf{x}^*) \leq 0 \\
\mu_n \geq 0 \\
\mu_m g_m(\mathbf{x}^*) = 0, \quad m = 1..ng
\end{cases} \tag{2.65}$$

Estas condições estabelecem que em um ponto de ótimo, a equação acima deve ser satisfeita e os multiplicadores de Lagrange das restrições não ativas devem ser nulas nesse ponto. A condição KKT é uma condição necessária de primeira ordem para que o ponto seja extremo da função objetivo [Cardoso, 2000]. Nas seções seguintes são mostradas então alguns dos métodos para a obtenção desse ponto extremo.

### 3.3. MÉTODOS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Atualmente pode-se dizer que a literatura divide os algoritmos de otimização estrutural em dois métodos: Programação Matemática (PM) e Critérios de Ótimo (CO) [Cheng, 1994]. Os métodos de CO se originaram da filosofia heurística de projeto de modo de falha simultâneo e no projeto completamente tensionado (ou FSD - “*fully stressed design*”), e tentam explorar o problema de otimização indiretamente através da busca de um conjunto de soluções possíveis que satisfazem o critério de ótimo. Este critério pode ser baseado na intuição a respeito das propriedades físicas ou através de derivações matemáticas, como as condições KKT, com algumas considerações físicas. O primeiro critério intuitivo para métodos de CO foi o FSD usado por Michell, 1904, para estruturas discretas determinadas estaticamente. Prager e Taylor, 1968, e Sheu e Prager, 1968, estabeleceram os fundamentos teóricos para os métodos de CO, mostrando que os critérios de ótimo de problemas contínuos simples podem ser definidas através de equações diferenciais, e que a solução dessas equações podem definir a forma de estruturas.

Métodos de CO baseados no trabalho de discretização de Prager e Taylor foram largamente utilizados nos anos 70 e 80. Mais recentemente Zhou e Rozvany, 1992, 1993, apresentaram as técnicas DCOC (*Discretized Continuum-based Optimality Criteria*), utilizando uma formulação de elementos finitos, o que permitiu a solução de problemas com um grande número de variáveis de projeto. Posteriormente, estes autores reformularam o algoritmo [Zhou e Rozvany, 1996], que apresentava problemas de convergência em alguns casos.

De um modo geral, para um problema de otimização não linear com restrição, os métodos de CO podem ser aproximados pela transformação do problema primal em uma seqüência de problemas explícitos aproximados. O critério de ótimo pode ser então construído através do uso das condições de KKT. Adicionalmente, esse critério inclui a relação explícita entre as variáveis de projeto e os multiplicadores de Lagrange.

Antes da introdução do método dual [Fleury, 1979, apud Cheng, 1994], este problema de acoplamento entre as variáveis de projeto e os multiplicadores de Lagrange podiam ser resolvidos iterativamente através da determinação do conjunto de restrições ativas antecipadamente, e empregando um procedimento de atualização para os multiplicadores de

Lagrange. Uma vez que o número de ciclos de análise nos métodos de CO é independente do número de variáveis de projeto, estes métodos servem muito bem a problemas de larga escala. Também há, entretanto, pontos negativos nesses métodos, como por exemplo a deficiência na generalidade, o que torna necessário montar critérios de ótimo específicos para cada problema específico, e a falta de fundamentação matemática, o que pode levar a problemas de convergência não preditos. Uma extensa revisão dos métodos de critério de ótimo pode ser encontrada em Venkayya, 1978, e Khot, 1981, citados por Min, 1997.

Já os métodos de PM procuram obter a solução ótima usando diretamente um método de programação não-linear, e procurando a melhor direção de busca via uma técnica de busca em 1D. As vantagens proclamadas para os métodos de PM são a fundamentação sólida, propriedades de garantia de convergência e a capacidade de lidar com problemas genéricos. A otimização estrutural foi formulada e resolvida através de Programação Matemática pela primeira vez por Schmit, 1960. Ele introduziu a idéia de acoplar a análise por elementos finitos com um método de maior direção de descida (método de programação matemática não-linear) para criar uma capacidade de projeto de ótimo automatizada.

O desenvolvimento inicial de métodos de PM foi lento devido à sua falta de capacidade de lidar com problemas de larga escala, complicados e com muitas variáveis de projeto. Se o número de variáveis de projeto aumenta, então o número de análises estruturais e as possíveis direções de busca aumentam de forma correspondente. Além disso, a expansão de direções de busca implica dificuldade para que a solução permaneça numa região viável uma vez que os problemas de otimização estrutural são em geral altamente não-lineares, com restrições não-lineares. Schmit e Farshi, 1974, sugeriram a transformação do problema não-linear primal em um conjunto de subproblemas aproximados baseados em derivação matemática ou em uma consideração física para reduzir o número de análises estruturais.

Estes problemas aproximados podem então ser resolvidos no espaço primal usando método de programação não-linear. Mais tarde, esse conceito foi transformado em várias técnicas de aproximação, como [Secchi, 2001]:

- programação linear: função objetivo e restrições lineares;
- programação quadrática: função objetivo quadrática e restrições lineares;
- programação não-linear: função objetivo e/ou restrições não-lineares;
- programação inteira: variáveis de decisão pertencem ao campo dos números inteiros;
- programação mista: é uma combinação da programação inteira com as demais.

Uma técnica de programação matemática muito utilizada e difundida na comunidade de otimização estrutural é a programação sequencial. Nesta técnica de programação, a solução do

problema original de programação não-linear é resolvido através de uma seqüência de soluções de uma de programação aproximada. A programação seqüencial usualmente é muito mais simples e fácil de resolver que a programação não-linear original. Dependendo do tipo de aproximação, têm-se programação linear seqüencial, programação quadrática seqüencial, programação seqüencial convexa e método das assíntotas móveis. Modernos algoritmos de otimização, como o CONLIN, o MMA e o DDU, foram desenvolvidos para implementar estas idéias [Cheng 1992].

A relação entre os métodos de PM e CO foram esclarecidos pela primeira vez por Fleury e Geradin [1977] e Fleury e Sander [1977]. Na seqüência, com o entendimento dessa relação, Sander e Fleury [1977] propuseram um método misto, que integrava ambos os métodos usando um parâmetro de controle. Se os métodos de PM aplicam as mesmas técnicas de aproximação dos métodos de CO, e resolvem estas aproximações no espaço dual [Schmit e Fleury, 1980, apud Cheng 1994], então ambos os métodos são obviamente idênticos.

### 3.3.1. PROGRAMAÇÃO LINEAR

A programação linear (ou LP – “*linear programming*”) trabalha com problemas em que a função objetivo e as restrições são funções lineares. O problema de otimização para a programação linear pode ser definido na seguinte forma [Secchi, 2001, Cheng, 1992, Haftka e Gürdal, 1992 ]:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & s(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis de projeto, definido como  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}^T$ , e com cada  $x_i$  podendo assumir qualquer valor no intervalo  $\{x_i \in X \mid (x_{\text{inf}})_i \leq x_i \leq (x_{\text{sup}})_i\}$ . O vetor  $\mathbf{c}$  contém os coeficientes que multiplica cada variável de projeto,  $\mathbf{A}$  é a matriz dos coeficientes das restrições, tendo dimensão  $m \times n$ , sendo  $m$  o número de restrições (considerando tanto de igualdade como de desigualdade), e  $\mathbf{b}$  é o vetor de dimensão  $m \times 1$ .

As restrições de desigualdades são transformadas em restrições de igualdade pela inclusão das variáveis de folga (“*slack*” ou “*surplus*”). Ou seja, considerando uma restrição do tipo:

$$ax \leq b, \quad (2.67)$$

ao se inserir a variável de folga  $f \geq 0$ , tem-se a igualdade:

$$ax + f = b, \quad b \geq 0. \quad (2.68)$$

A programação linear é uma programação convexa, e seu mínimo local é também o mínimo global [Cheng, 1992]. O domínio viável da programação linear é um polígono de dimensão  $n$  e o contorno do objetivo é um hiperplano de dimensão  $n-1$ . O projeto ótimo está localizado ao menos em um de seus vértices. Um vértice do domínio viável da programação linear corresponde então a uma solução viável básica sua. Portanto, a solução ótima de PL é ao menos uma de suas soluções viáveis.

O método *simplex* é um método da classe dos conjuntos ativos (“*active set*”) [Dantzig, 1963, apud Secchi, 2001], e é um dos mais populares métodos de solução de problemas de programação linear devido à sua eficiência e confiabilidade. Este método disponibiliza uma maneira sistemática de busca no espaço de projeto, movendo o projeto de um vértice a outro do domínio viável, sempre mantendo viável o ponto de projeto e diminuindo gradualmente os valores correspondentes da função objetivo. Mover o projeto de um vértice para outro é equivalente algebricamente a escolher outro conjunto de  $m$  incógnitas e zerando o restante das  $(n-m)$  incógnitas ao invés das originais.

No presente trabalho, foi utilizado o MATLAB para resolver o problema de programação linear, através da função *linprog*. Para problemas de larga escala, o método de solução é baseado no LIPSOL (Linear Interior Point Solver [Zhang, 1995]), que é uma variante do algoritmo preditor-corretor de Mehtotra [Mehtotra, 1992]. Este é um método de ponto interior primal-dual, o que quer dizer que ambos os problemas primal e dual são resolvidos simultaneamente. Antes do início da iteração do algoritmo, são necessários certos passos de pré-processamento, como por exemplo, todas as variáveis são limitadas inferiormente por zero, todas as restrições são transformadas em igualdades, variáveis fixas, com limites inferiores e superiores iguais, são removidas, linhas de zeros na matriz  $A$  são removidas, etc.

### 3.3.2. PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL

A convexidade da função objetivo é uma condição que facilita a localização e obtenção das condições de ótimo. Isso, entretanto, é dificilmente encontrado nos problemas apresentados em otimização estrutural, e os casos deste trabalho não fogem à regra. A técnica mais direta para resolver um problema de programação não-linear em geral é a linearização do problema e a aplicação de técnicas de programação linear [Secchi, 2001], tais como linearizar sucessivamente o problema não-linear na medida em que melhores soluções viáveis são obtidas por métodos de programação linear. Utilizando expansão em série de Taylor ao redor do ponto ótimo  $\mathbf{x}^*$ , o problema de otimização apresentado em (2.63) assume a seguinte forma:



$$\begin{aligned}
&\text{extremizar } s(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}^*) + \left[ \frac{ds(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}} \right]^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\
&\text{s. a } \quad g_j(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^*) + \left[ \frac{dg(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}} \right]^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq 0 \quad , \quad j = 1..n_g \quad , \quad (2.69) \\
&\quad \quad h_k(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}^*) + \left[ \frac{dh(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}} \right]^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = 0 \quad , \quad k = 1..n_h \\
&\quad \quad \mathbf{x}_{\text{inf}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\text{sup}}
\end{aligned}$$

onde a última restrição é adicionada artificialmente pois a aproximação de primeira ordem por série de Taylor dá bons resultados apenas na vizinhança de  $\mathbf{x}^*$  [Cheng, 1992]. O conjunto  $(\mathbf{x}_{\text{inf}}, \mathbf{x}_{\text{sup}})$  é chamado de limite móvel.

Com uma atualização constante das variáveis de projeto, tem-se o método de programação linear seqüencial (ou SLP – “*sequential linear programming*”). A atualização das variáveis é necessária porque a linearização é uma aproximação, e então não se garante a obtenção de um mínimo global, mas apenas de um mínimo local, dentro do espaço definido. O espaço de soluções definido varia então constantemente, através da atualização dos limites móveis. Os passos de solução através do SLP são então os seguintes:

- 1 - definem-se as variáveis de projeto iniciais  $\mathbf{x}^0$ ;
- 2 - calcula-se a resposta estrutural, assim como as sensibilidades em relação às variáveis de projeto;
- 3 - resolve-se o problema de programação linear e se obtém  $\mathbf{x}^n$ , que é uma solução aproximada do problema não-linear original;
- 4 - verifica-se a convergência; se for satisfeita,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^n$  e pára o processo; se não for satisfeita, faz-se  $i=i+1$  e  $\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^n$  e volta-se ao passo 2.

O grande problema associado ao uso da programação linear seqüencial é a escolha adequada dos limites móveis [Cardoso, 2000]. Uma escolha equivocada pode acarretar a não convergência do algoritmo, independente do tamanho dos limites móveis. Limites grandes podem acarretar instabilidade, com a oscilação do ponto extremo, pois a solução do LP está sempre em um vértice do domínio viável, e duas soluções adjacentes em seqüência podem estar associadas com dois vértices diferentes. Por outro lado, limites pequenos tendem a tornar o algoritmo muito lento, talvez levando a uma convergência prematura. Uma boa estratégia é então começar o processo com limites relativamente grandes e reduzi-los à medida que o processo convirja.

Devido à sua importância, o tratamento apropriado do limites móveis recebeu a atenção de diversos pesquisadores. Segundo Cheng, 1992, o sucesso do uso do SLP depende da

experiência do usuário, e é sabido em programação matemática que mesmo algoritmos cuja convergência é provada ainda deixa alguns parâmetros para serem escolhidos pelo usuário. Chen, 1993, Wujek e Renaud, 1998a e 1998b, utilizaram algum critério matemático para a determinação do limites móveis, incluindo gradientes da função objetivo e restrições.

Outros autores como Petersson e Sigmund, 1998, Haftka e Gürdal, 1992, Fonseca, 1997, Cardoso, 2000 e Sant'Anna, 2002, utilizaram métodos heurísticos para a determinação desses limites. No presente trabalho é utilizado um estratégia semelhante ao utilizado por Sant'Anna, 2002, baseada na história das iterações, aumentando ou reduzindo o valor dos limites dependendo do comportamento das variáveis de projeto. Inicialmente se calcula a variação na variável nas três últimas iterações:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (x_{i-1} - x_{i-2}) \\ \Delta_2 &= (x_{i-2} - x_{i-3})\end{aligned}\quad (2.70)$$

onde  $\Delta_1$  é diferença entre o valor da variável de projeto obtido na iteração anterior ( $x_{i-1}$ ) e o valor obtido há duas iterações ( $x_{i-2}$ ) e  $\Delta_2$  é diferença e entre o valor obtido há duas iterações ( $x_{i-2}$ ) e o valor obtido há três iterações ( $x_{i-3}$ ), considerando que a iteração atual é a iteração  $i$ . De acordo com o valor do produto  $\gamma$  entre essas diferenças, o limite móvel é aumentado ou diminuído:

$$\begin{aligned}\gamma &= \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{se } \gamma \leq 0, l_i = (1 + \delta)l_{i-1} \\ \text{se } \gamma > 0, l_i = (1 - \delta)l_{i-1} \end{array} \right. & , \end{aligned}\quad (2.71)$$

onde  $\delta$  é o fator escolhido para a variação (tipicamente 0,2 neste trabalho), e  $l_i$  é o tamanho do novo limite móvel e  $l_{i-1}$  é o tamanho do limite móvel utilizado na iteração anterior. São determinados então os valores mínimo e máximo que cada variável de projeto independentemente pode assumir pelo LP na equação (2.69) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{\text{inf}})_i = x_i - l_i \\ (x_{\text{sup}})_i = x_i + l_i \end{array} \right. \quad (2.72)$$

onde  $x_i$  é cada variável de projeto,  $(x_{\text{inf}})_i$  é o valor inferior do limite associado a essa variável,  $(x_{\text{sup}})_i$  é valor superior do limite.

Apesar dessa dificuldade no tratamento de limites móveis, os métodos de otimização utilizando SLP têm se mostrado bastante eficientes, e com o uso de novas técnicas de programação linear que vem sido desenvolvidas nos últimos anos, também bastante rápidas se comparadas com os métodos de critério de ótimo. Além disso, apresenta a grande vantagem da generalidade. Especialmente no caso das estratégias implementadas no presente trabalho, minimização do volume com restrição de flexibilidade [Sant'Anna, 2002] e no caso de

minimização de flexibilidade considerando casos de múltiplos carregamentos [Krog e Olhoff, 1997], as rotinas de programação para o SLP são basicamente as mesmas. Essa facilidade de implantação do método quando comparado a algum método de CO tornam o uso de SLP preferível.

### 3.4. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Em estruturas contínuas, a otimização topológica introduz então um universo de elementos estruturais possíveis (“ground structure”) em um dado domínio, e escolhe a melhor distribuição possível de material dentro desse universo [Fonseca, 1997]. Na projeto da topologia de estruturas contínuas, a idéia de considerar a formulação relaxada baseada em microestruturas, surgiu na década de 70. Este trabalho foi realizado independentemente por vários grupos, e alguns de seus representantes são Cheng e Olhoff, 1981 e 1982, Murat e Tartar, 1985, Lurie *et al.*, 1982, Rattin, 1979, e Kohn e Strang, 1986. Cheng e Olhoff, 1981, foram os primeiros a tentar otimizar um contínuo sobre topologias variáveis baseando-se em partições macroscópicas do domínio da estrutura em regiões sólidas e vazias. Eles descobriram que uma formulação do tipo nervuras aparece na solução elástica se a espessura da placa for limitada por valores mínimos e máximos e o número de elementos finitos for suficientemente grande. Este resultado levou a uma série de trabalhos de otimização topológica, através de uma formulação relaxada por exemplo com a introdução de compósitos no domínio de projeto. Os trabalhos de outros grupos de pesquisa citados eram orientados mais na direção de teoremas de existência do que na computação do projeto ótimo.

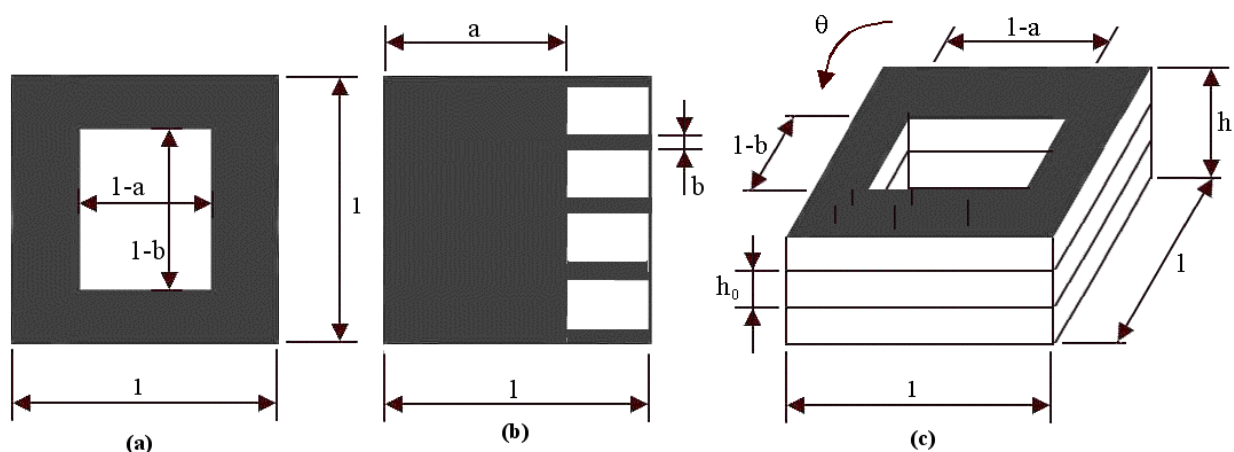
A idéia de homogeneização, na qual a propriedade efetiva de uma microestrutura espacialmente periódica pode ser obtida [Bensoussan, *et al.*, 1978, Sanchez-Palencia, 1980 e Lions, 1981, apud Park, 1995], foi discutida para uso no projeto de topologia de estruturas por Cea *et al.*, 1973, e Tartar, 1977. De um ponto de vista matemático, a teoria de homogeneização é uma teoria limite que usa expansão assintótica e o pressuposto de periodicidade para substituir equações diferenciais com coeficientes de oscilação muito rápida por outras equações diferenciais cujos coeficientes são constantes ou variem lentamente de maneira que as soluções estejam próximas às iniciais [Hassani e Hinton, 1998]. Murat e Tartar, em 1985, sugeriram o projeto ótimo de forma através da distribuição de dois materiais em um domínio fixo. Kohn e Strang, 1986, introduziram uma formulação bem posta, relaxando o problema através do uso de um material perfurado microscopicamente e homogeneizando as propriedades.

Um impulso grande na otimização topológica foi dado pelo trabalho de Bendsøe e Kikuchi, 1988, no qual a implementação numérica da idéia de homogeneização foi descrita pela

primeira vez em problemas genéricos de elasticidade bidimensional. Eles introduziram o tipo de microestrutura retangular e quadrada para relaxar o problema ótimo, o que é descrito como relaxação parcial. Essas microestruturas continham furos retangulares e as variáveis de projeto eram então as dimensões dos furos e a orientação dos mesmos. Esse tipo de microestrutura é rica o suficiente para relaxar o problema, e apresentou resultados com pequenas áreas compostas.

Suzuki e Kikuchi, 1991, estenderam o método para o caso de placas e a problemas tridimensionais, considerando também casos de carregamentos múltiplos. Díaz e Bendsøe, 1992, desenvolveram outra técnica para carregamentos múltiplos, utilizando uma média das flexibilidades. Vários outros trabalhos foram publicados nos anos seguintes estendendo o trabalho à solução de problemas como autovalores, autovalores múltiplos, flambagem, expansão térmica, etc. Uma boa revisão da teoria de homogeneização e otimização topológica pode ser encontrada em Bendsøe, 1995.

A relaxação do problema de otimização topológica através da introdução de uma microestrutura parametrizada é muito importante para a solução do problema, ao invés de se trabalhar apenas com a distribuição de materiais básicos [Fonseca, 1997]. Muitos tipos de microestruturas foram usadas, e uma rápida análise mostra que um atrativo dos laminados do tipo rank-n [Díaz *et al.*, 1995, Jog *et al.*, 1994] é a possibilidade de derivar as propriedades analiticamente e não fazer uso de homogeneização numérica. Pode-se provar também que esse tipo de microestrutura leva à solução ótima para muitos casos, já que ele produz mais áreas de densidade intermediária do que a microestrutura com furo retangular. Exemplos de microestruturas são apresentadas na Figura 3.2.



**Figura 3.2.** Alguns exemplos de microestruturas e seu parâmetros. Em (a) célula quadrada com furo retangular, em (b) material laminado rank-2 e em (c) célula para microestruturas tridimensionais de placa/casca [Min, 1997].

A introdução de microestruturas trouxe alguns problemas. Um deles é a presença de áreas de densidade intermediária na solução ótima, o que pode vir a ser muito difícil de construir, se não impossível. Se a busca está sendo feita por uma solução sem áreas com mistura de dois materiais, então é necessário aplicar algum procedimento de penalização. Esses procedimentos buscam aumentar o custo de soluções intermediárias, de modo que o processo de otimização evite a criação dessas áreas. Isto pode ser feito das seguintes maneiras [Fonseca, 1997]:

- incluindo explicitamente expoentes de penalização na função custo [Rozvany, 1997];
- escolhendo microestruturas que naturalmente evitem densidades intermediárias [Suzuki e Kikuchi, 1991, Park, 1995];
- aplicando funções de penalização no perímetro [Haber *et al.*, 1996, Ambrosio e Butazzo, 1993].
- otimizando o problema binário (existência ou inexistência com restrição de perímetro) [Beckers, 1997].

Para melhor entendimento dessa forma de colocação do problema de otimização topológica e da forma de evitar densidades intermediárias, é necessário mostrar a formulação matemática do problema. No projeto de topologia de uma estrutura, se deseja determinar da melhor distribuição de um dado material isotrópico no espaço, ou seja, deve-se determinar pontos aonde deve haver material e pontos que devem permanecer vazios (ver Figura 3.3).

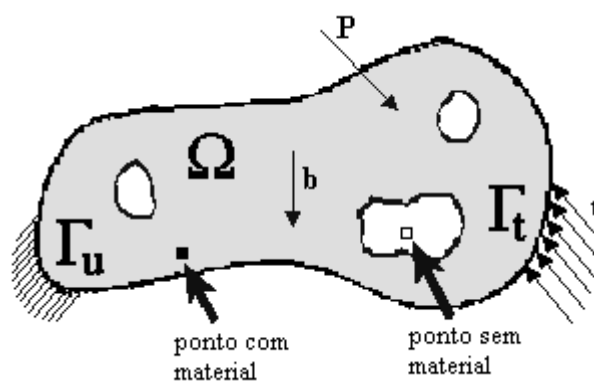


Figura 3.3. Problema de otimização topológica.

Restringindo o espaço ao domínio de referência  $\Omega$ , deve-se determinar o subconjunto ótimo  $\Omega^m$  de pontos materiais. Isto implica que o conjunto de tensores constitutivos admissíveis  $C_{adm}$  é definido da seguinte forma [Bendsøe, 1995]:

$$\begin{cases} C_{ijkl} \in L^\infty \\ C_{ijkl} = 1_{\Omega^m} C_{ijkl}^0 \quad \text{onde} \quad 1_{\Omega^m} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^m \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega^m \end{cases}, \\ \int_{\Omega^m} 1_{\Omega^m} d\Omega = \text{vol}(\Omega^m) \leq V = \text{vol}(\Omega) \end{cases} \quad (2.73)$$

onde a última integral calcula a quantidade de material disponível, considerando um domínio inicial fixo,  $C_{ijkl}^0$  é o tensor constitutivo linear de quarta ordem, que define o material isotrópico de base e  $L^\infty$  é o espaço das funções integráveis limitadas segundo Lebesgue, descartando as funções de medida zero [Sant'Anna, 2002].

Ao introduzir um material de densidade relativa  $\rho$  através da construção de um material composto consistindo de um número infinito de pequenos furos distribuídos periodicamente pelo material base (dentro de cada célula de material), a natureza discreta do problema (um problema 0-1) é evitada com a inserção dessa densidade relativa. Desse modo,  $\rho = 0$  corresponde a ausência de material e  $\rho = 1$  à presença de material. Valores de  $\rho$  entre 0 e 1 correspondem ao material composto poroso, com vazios num nível microscópico.

Assim, são utilizadas dois tipos de variáveis: a densidade relativa do material e os parâmetros geométricos da célula unitária. Os tensores constitutivos são então parametrizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}(x) &= \tilde{C}_{ijkl}(a(x), b(x), \dots, \theta(x)) \\ \rho(x) &= \rho(a(x), b(x), \dots), \\ \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V; \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde  $(a, b, \dots, \theta)$  são os parâmetros geométricos (como pode ser visto na Figura 3.2),  $\tilde{C}_{ijkl}$  é o tensor constitutivo equivalente homogeneizado e  $\rho$  é a densidade relativa de material na célula. O problema colocado dessa forma, como falado anteriormente, tende a gerar muitas áreas com densidades intermediárias. Um exemplo de uma solução obtida com essa formulação para uma casca cilíndrica é apresentada na Figura 3.4.

Uma das possibilidades para evitar as densidades intermediárias é o uso da seguinte relação [Bendsøe, 1995]:

$$\begin{aligned} \rho(x) &\in L^\infty(\Omega) \\ C_{ijkl}(x) &= \rho^n(x) C_{ijkl}^0 \\ \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V; \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde  $\rho(x)$  passa a ser a função de projeto, e  $n$  é o expoente de penalização. Ao escolher  $n > 1$ , as densidades intermediárias são desfavorecidas no sentido que a rigidez obtida é pequena comparada com o custo do material. Entretanto, o uso de expoentes  $n$  maiores que 1 tornam o problema não-convexo, e valores elevados podem retornar ao problema de não-unicidade da solução do problema discreto [Cardoso, 2000]. O uso de expoentes de pequeno valor são então desejáveis do ponto de vista matemático. A representação dessa formulação é vista na Figura 3.5.

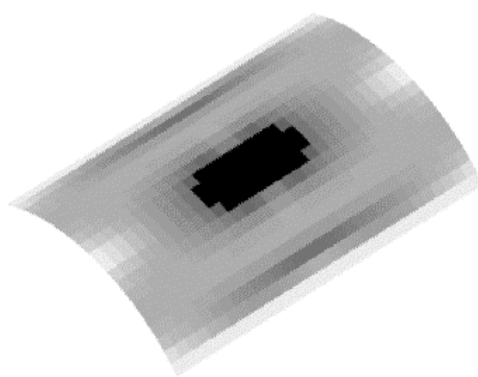


Figura 3.4. Exemplo de estrutura otimizada com muitas áreas com densidade intermediária.

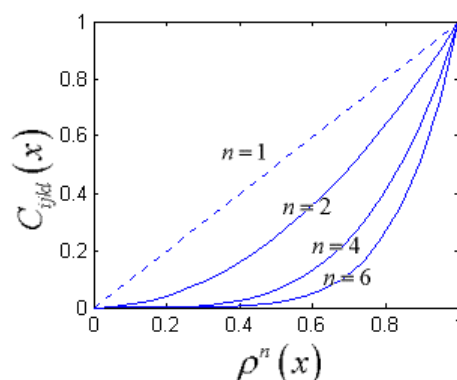


Figura 3.5. Penalização da densidade.

Uma estratégia que permite contornar esses problemas é o uso do “**Método da Continuação**” (a partir daqui chamado simplesmente de **MC**) [Rozvany *et al.*, 1993, Rozvany *et al.*, 1995, Swan e Kosaka, 1997, Duysinx e Bendsøe, 1998, e Sigmund e Petersson, 1998, apud Cardoso, 2000] Por este método, o problema de otimização é resolvido em duas etapas. O problema é iniciado com uma aproximação linear para a densidade, numa formulação que garanta a unicidade do problema, mesmo que resulte em muitas áreas com densidades intermediárias. A solução obtida é então usada como ponto de partida para uma nova etapa de otimização, utilizando uma formulação modificada como, por exemplo, aplicando algum tipo de penalização.

Ao considerar uma aproximação linear para a densidade, o problema fica parametrizado na forma da aproximação dada em (2.75), mas com o expoente  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} \rho(x) &\in L^\infty(\Omega) \\ C_{ijkl}(x) &= \rho(x) C_{ijkl}^0 \\ \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V; \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (2.76)$$

Para uma segunda etapa de otimização pelo MC, uma possibilidade é a penalização da função objetivo. Cardoso e Fonseca, 1999, Cardoso, 2000, e Sant'Anna, 2002, penalizam a função objetivo através de uma relação exponencial da seguinte forma:

$$s(\rho) = \int_{\Omega} \rho^p d\Omega. \quad (2.77)$$

onde  $p \leq 1$ . Na primeira etapa da otimização faz-se  $p = 1$ , o que garante a existência de solução, não havendo diferença entre a função objetivo original e a penalizada. A partir do resultado obtido, ao valor do expoente vai sendo reduzido, gerando novas topologias com cada vez menos áreas com densidades intermediárias. Uma forma de reforçar esta penalização é a formulação:

$$s(\rho) = \int_{\Omega} [\rho^p + \alpha\rho(1-\rho)] d\Omega. \quad (2.78)$$

onde o parâmetro  $\alpha$  é escolhido heurísticamente. Obviamente para  $\alpha = 0$  a expressão (2.78) é igual a (2.77). Essa penalização é aplicada no caso de ser necessário “limpar” ainda mais a topologia final. Na Figura 3.6 pode ser vista o comportamento da função objetivo em função da densidade para o caso da aplicação dessas penalizações. Maiores detalhes da aplicação desse método no presente trabalho encontram-se na seção 4.4.

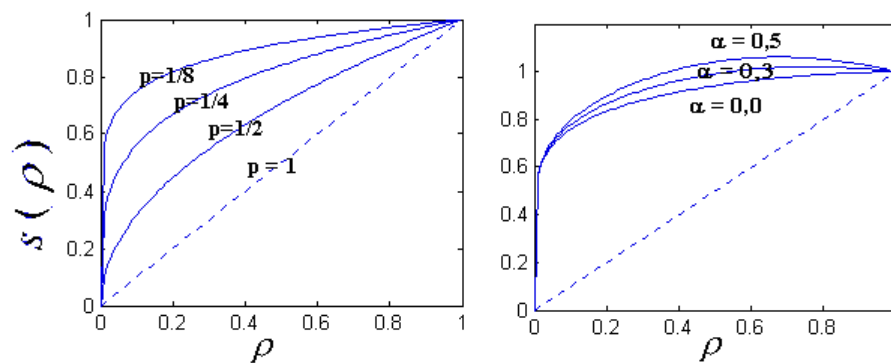


Figura 3.6. À esquerda, penalização do volume conforme eq. (2.78) com  $\alpha = 0$  e à direita para diferentes valores de  $\alpha$ , com  $p = 1/8$ .

### 3.4.1. PROBLEMAS NUMÉRICOS

Muitos problemas relativos à otimização topológica de estruturas vêm sendo discutidos por autores como Kirsch, 1989, que estudou estruturas discretas (treliças e pórticos) e Rozvany *et al.*, 1995, que fez uma excelente revisão sobre vários aspectos pertinentes à otimização



topológica. Bendsøe, 1995, Sigmund e Petersson, 1998 e Rozvany *et al.*, 1995, discutem problemas decorrentes da modificação do problema binário (equação (2.73)) na forma discretizada em (2.75) ou (2.76).

Um desses problemas é a **instabilidade xadrez** (ou “*checkerboards*”), o aparecimento de regiões da malha que alternam elementos com material e sem material lado a lado, e que é bastante comum na otimização topológica de estruturas contínuas. Até pouco tempo atrás, suas causas não eram muito conhecidas, mas o mesmo não podia ser dito das suas conseqüências, pois se sabia que a topologia final na forma de um tabuleiro aumentava a rigidez da estrutura.

Provou-se que esse fenômeno é decorrente da discretização do modelo contínuo, e decorre principalmente devido a problemas numéricos na convergência do método dos elementos finitos, sendo causado pelo mau-condicionamento das soluções das equações de equilíbrio [Díaz e Sigmund, 1995; Jog e Haber, 1996]. O grande mérito desses trabalhos foi conjecturar que tanto o método da homogeneização quanto o uso de microestruturas artificiais estão sujeitos ao aparecimento de checkerboards. Estes autores mostraram também que o uso de elementos finitos de alta ordem (como os quadriláteros de 8 e 9 nós, que é o caso elemento utilizado no presente trabalho) podem prevenir esse fenômeno, devido ao enriquecimento do campo de deslocamentos (se o expoente utilizado na parametrização do tensor constitutivo não for muito elevado).

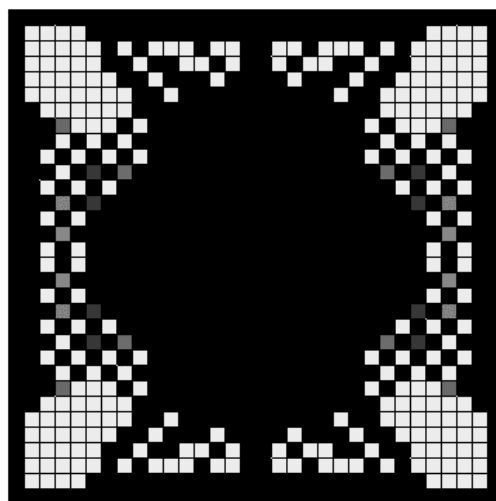


Figura 3.7. Resultado da otimização topológica de uma placa com aparecimento de instabilidade de tabuleiro.

Outro problema comum na otimização topológica é a **convergência do problema discretizado** (dependência da malha), que leva a diferentes soluções finais para diferentes discretizações. Esse problema surge justamente do fato de se discretizar o domínio. Intuitivamente espera-se que quanto maior o refino da malha de elementos finitos, a topologia ótima deveria ser uma estrutura que descreva com maior fidelidade as condições de contorno do problema. Entretanto, não é isso que ocorre. Em muitos problemas, malhas mais refinadas

resultam em topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo resultante de uma malha mais grosseira. De acordo com Sigmund e Petersson, 1998, o problema da dependência da malha pode ser dividido em duas categorias:

- obtenção de topologias finais cada vez mais complexas a medida que a malha de elementos finitos vai sendo refinada. Nesse caso, malhas mais refinadas produzem estruturas “melhores” (ou seja, com valores cada vez menor na função objetivo, se o problema for a minimização do volume) quando comparadas com estruturas geradas a partir de malhas menos refinadas;
- obtenção de diversas soluções ótimas com mesmo valor da função objetivo. Este problema aparece devido a não-unicidade da solução do problema discretizado e ocorre, por exemplo, no projeto de uma estrutura uniaxial sob tensão em uma dada área.

Apesar de não existirem maneiras de resolver diretamente o problema da não-existência da solução única, uma restrição na complexidade da topologia final pode minimizar a aparição desse fenômeno. Algumas soluções normalmente utilizadas são a restrição global do gradiente das densidades [Bendsøe, 1995], restrição local do gradiente das densidades [Niordson, 1983, Petersson e Sigmund, 1998] e filtragem [Sigmund, 1994 e 1997]. Uma breve descrição dessas soluções é apresentada em Sant’Anna, 2002.

Outro problema de natureza numérica que pode aparecer é o caso de obtenção de soluções em **mínimos locais**. Isso se deve à não-convexidade das funções envolvidas no processo de otimização, no caso de não-linearidades da função objetivo e das restrições. O problema é extremamente sensível a pequenas modificações em parâmetros como número de elementos, limites móveis e geometria inicial, por exemplo. A experiência mostra que a modificação do valor dos limites móveis no SLP pode levar a soluções completamente diferentes, ou mesmo causar a não convergência do problema, quando o problema em questão for não-convexo.

Esse problema está geralmente relacionado aos algoritmos utilizados, pois, buscando um ponto de mínimo, o algoritmo de programação convexa pode ignorar que o problema é não-convexo podendo existir um mínimo “melhor” do que aquele encontrado pelo algoritmo. O uso do MC parece evitar o problema dos mínimos locais, geralmente convergindo para melhores projetos finais [Sigmund e Petersson, 1998].

## 4. ESTRATÉGIAS IMPLEMENTADAS

Ao formular um problema de otimização estrutural deve-se definir o método de análise estrutural, as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições impostas ao projeto [Cheng, 1992]. O primeiro ponto já está definido, com a escolha do MEF para a solução da equação de equilíbrio de casca laminada. A definição do restante e da estratégia geral de otimização foi feita após uma pesquisa sobre o que tem sido feito nessa área nos últimos anos, o que é apresentado na seção 4.1 abaixo. Nas outras seções deste capítulo são apresentadas as estratégias utilizadas para a resolução dos problemas de otimização, assim como os métodos de otimização implementados.

### 4.1. HISTÓRICO

Os primeiros trabalhos de otimização de estruturas de material composto laminado apareceram apenas no final da década de 60. Schmit e Farshi, 1973, citaram exemplos desses trabalhos iniciais, como os de Foye, 1968, e Waddoups, 1969, ambos ligados à construção aeronáutica. Foye estudou o peso mínimo de laminados com projeto ótimo para resistência e rigidez, considerando carregamento múltiplos no plano. Um método de busca aleatória foi utilizado para definir as orientações das camadas de modo que as restrições fossem satisfeitas com o menor número de camadas. Waddoups obteve projetos com peso mínimo considerando restrições de resistência sob casos de carregamentos múltiplos distintos, usando tanto o critério de falha de máxima deformação ou de Tsai-Hill, e como variável de projeto a orientação da camada. A busca, entretanto, é muito lenta, pois testa todas as possibilidades.

Schmit e Farshi, 1973, apresentaram um método para obtenção do projeto ótimo com peso mínimo para laminados de material composto simétricos sujeitos a carregamento múltiplos no plano. As variáveis de projeto eram as espessuras de cada camada, que apresentam orientação pré-determinada. O algoritmo de otimização usado era uma adaptação do chamado “método de hiper-esferas inscritas”, e consistia numa seqüência de programação linear que leva a uma rápida convergência. A cada iteração apenas as restrições mais críticas são levadas em conta. Em 1977 Schmit e Farshi, dão continuidade ao trabalho de 1973, incluindo restrições de rigidez, resistência e estabilidade elástica. Uma análise de flambagem era feita baseada em uma aproximação de placa ortotrópica equivalente levando a dois problemas de autovalores desacoplados para cada condição de carregamento.

Schmit e Mehrinfar, em 1982, apresentaram um trabalho de otimização multi-nível de estruturas com painéis reforçadores com material composto fibroso. Nesse trabalho, voltado diretamente ao projeto de componentes estruturais de asas de aeronaves, os níveis de otimização compreendiam o “sistema” e os “componentes”, em duas etapas distintas. Este método pode ser interpretado como uma decomposição heurística, com a formulação sendo dada pelo desacoplamento do comportamento estrutural dos componentes.

Kam e Lai, 1989, trabalharam com otimização multi-nível de placas de material composto laminado, tendo como variáveis de projeto a espessura e a direção das fibras de cada camada, de modo a minimizar o volume das estruturas sujeitas a restrições de comportamento assim como limites laterais. No primeiro nível se procura a melhor orientação de cada camada segundo a qual se maximiza a rigidez e a resistência da estrutura para determinadas condições de carregamento e além disso maximiza a frequência de vibração do primeiro modo. O problema multi-objetivo era então transformado em otimização escalar, através da criação de uma única função objetivo total, com restrições laterais apenas. No segundo nível eram mantidas constantes as orientações obtidas no nível anterior e o objetivo era determinar a espessura de cada camada de modo que o peso total da estrutura fosse minimizado e as restrições satisfeitas. Essas restrições podiam ser de deslocamento, critério de falha com deformação, frequência do primeiro modo e limites de espessura.

Um trabalho importante para o estudo da otimização da orientação das fibras de estruturas feitas de material composto é o trabalho de Pedersen, 1989, que é citado em diversos trabalhos de otimização posteriores. Ele extremizou a densidade de energia em estruturas feitas de material ortotrópico, trabalhando apenas com a orientação das fibras. Resolvendo problemas de elasticidade plana, concluiu que a orientação ótima depende apenas da relação entre as duas deformações principais e de parâmetros adimensionais invariantes do material, dados por Tsai e Pagano, 1968. Resultados analíticos completos são derivados, incluindo máximos e mínimos locais e globais. A rigidez ao cisalhamento tem importante papel na definição da orientação ótima, e para um mesmo ângulo pode-se ter energia máxima ou mínima dependendo da relação entre a deformação máxima e mínima e dos parâmetros do material.

Em um artigo de 1990, o assunto acima foi retomado por Pedersen, e uma análise levando em consideração o MEF foi feita. Através de uma mudança no sinal no cálculo da sensibilidade da energia em relação ao ângulo de orientação das fibras em cada elemento, os resultados se invertem em relação ao artigo anterior. Uma tabela com resultados que podem ser utilizados diretamente em processos de otimização foi apresentada, aonde se verifica que para materiais com relativamente baixa rigidez ao cisalhamento no plano, a rigidez máxima se obtém alinhando

a direção de maior módulo de elasticidade do material com a direção de maior deformação principal (ver Tabela 4.1). Foi citado o trabalho de Banichuk, 1983, que obteve resultados semelhantes em um trabalho independente, com uma formulação praticamente paralela.

**Tabela 4.1. Localização de extremos locais e globais pela otimização do parâmetro  $\gamma$  [Pedersen, 1990].**

ângulo extremo $\psi$	baixa rigidez a cisalhamento no plano $\alpha_3 > 0$		alta rigidez a cisalhamento no plano $0 > \alpha_3$	
	$0 < \gamma < 1$	$\gamma > 1$	$\gamma < -1$	$-1 < \gamma < 0$
<b>0°</b>	mín. global	mín. global	mín. global	máx. local
<b>90°</b>	mín. local	máx. global	máx. global	máx. global
<b><math>\cos 2\psi = -\gamma</math></b>	máx. global			mín. global

Outra extensão do trabalho de 1989 feito por Pedersen foi o artigo de 1991, aonde ele incluiu a espessura como variável de projeto na otimização de membranas laminadas. Ele utilizou gradientes de primeira ordem da energia elástica total em um método de critério de ótimo. Como houve lenta convergência em relação às variáveis de projeto, derivadas de segunda ordem foram incluídas, obtidas da análise de sensibilidade de primeira ordem. Trabalhos semelhantes foram citados, como os de Landriani e Rovati, 1991, e Thomsem, 1991. Pedersen concluiu que a otimização da distribuição da espessura para materiais anisotrópicos não é mais complicada do que para materiais isotrópicos lineares.

Cheng, 1994, discutiu os resultados obtidos por Pedersen em relação ao uso das direções de deformação principal para atualizar a orientação, e comparou com métodos apresentados por Suzuki e Kikuchi, 1991, e por Díaz e Bendsøe, 1992, onde se utilizam as direções principais de tensão. O método de Pedersen apresenta um acoplamento entre a direção de deformação principal e a variável de projeto  $\theta$ , enquanto que utilizando os métodos baseados na tensão o acoplamento com a variável de projeto se torna mais fraco. No caso de Díaz e Bendsøe, era possível resolver problemas de carregamentos múltiplos. Cheng apresentou então um método melhorado baseado na tensão, utilizando uma formulação com uma tensão generalizada, e não apenas as tensões principais.

Mota Soares *et al.*, 1995, apresentaram um modelo para a otimização de estruturas do tipo placa ou casca fina de material composto, usando também uma estratégia de dois níveis. No primeiro nível se procurava a minimização do deslocamento máximo ou a maximização da frequência natural de determinado modo de vibração, utilizando como variáveis de projeto os ângulos de orientação de cada camada, sujeitas a restrições laterais. O objetivo do segundo nível era a minimização do volume do material sujeito a restrições de deslocamentos, tensões e/ou

critério de falha de Tsai-Hill, frequências naturais de determinados modos de vibração e constantes laterais. Nesse caso, as variáveis de projeto eram as espessuras de cada camada. Uma outra contribuição desse trabalho foi um método de análise de sensibilidade usando diferenças finitas, sem apresentar instabilidade numérica.

Conceição António *et al.* 1995, resolveram um problema de otimização de cascas e placas laminadas usando também uma estratégia de dois níveis. Seu objetivo era obter uma estrutura com o peso mínimo e que fosse capaz de suportar um determinado conjunto de forças estáticas externas sem falha. Para isso o domínio era separado em macro-elementos, dentro de cada um dos quais havia uma determinada seqüência de laminação, orientação e espessura das lâminas e propriedades dos materiais. Em um primeiro nível se maximizava a eficiência da estrutura, usando como variável de projeto a orientação de cada lâmina e utilizando programação matemática. Em um segundo nível se minimizava o peso da estrutura, usando como variável de projeto as espessuras das lâminas dentro de cada elemento e critério de ótimo como método de otimização. O modelo apresentado diferia portanto de trabalhos como os de Weiji e Boohua, 1986, e Watkins e Morris, 1987, porque nestes os dois níveis estavam relacionados com a decomposição dos objetivos. Além disso, não havia restrições adicionais ou variáveis intermediárias.

Stok e Mihelic, 1996, trabalharam também na otimização de estruturas de casca em dois níveis, identificando primeiramente regiões aonde reforçadores deviam ser localizados e num segundo passo procurando por uma solução ótima para o projeto da estrutura que foi reforçada. Para evitar grande tempo de computação ao usar um método de programação matemática, esse trabalho era baseado em um critério de ótimo discretizado, em que o tamanho do problema de otimização não depende explicitamente do número de variáveis de projeto.

Mota Soares *et al.*, em 1997, otimizaram estruturas laminadas utilizando modelos de deformação de alta ordem, com 7, 9 e 11 graus de liberdade por nó, incluindo variação não linear do campo de deslocamentos, o que tornou possível analisar estruturas de placa laminadas finas e espessas. Um enfoque grande foi dado à apresentação da teoria estrutural e base da elaboração dos elementos finitos utilizados para a otimização. O método das direções viáveis foi utilizado para a solução de problemas de otimização estrutural com restrição e o método BFGS (Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno) para os problemas sem restrição, tendo como função objetivo o peso ou o volume estrutural, os deslocamentos generalizados em determinado nó, a energia de deformação elástica, a frequência natural de um dado modo de vibração ou parâmetro de carga de flambagem. Também se utilizou uma estratégia de dois níveis como a de Mota Soares *et al.*, 1995, para a determinação da orientação e espessura das camadas.

Outro exemplo de otimização com uma estratégia de dois níveis foi dado por Mateus *et al.*, 1997, buscando a análise de sensibilidade de flambagem de estruturas laminadas finas. Eles utilizaram um elemento de placa/casca triangular simples com 18 graus de liberdade. As sensibilidades foram avaliadas analiticamente, semi-analiticamente e por diferenças finitas globais, tendo como variáveis de projeto o ângulo e a espessura de cada camada.

Maute e Ramm, 1997, apresentaram um trabalho sobre otimização topológica adaptativa de estruturas de cascas. Nesse trabalho, fez-se a otimização de forma de cascas, e se aplicou otimização topológica para determinar a configuração básica, ou seja, inserindo ou eliminando buracos na estrutura no domínio de projeto. Para resolver problemas de otimização de cascas em três dimensões, eles recomendaram modelar a estrutura em um espaço paramétrico bidimensional. As relações entre o espaço físico e o paramétrico são afetadas apenas por duas operações básicas: mapeamento de um vetor de um espaço para o outro e vice-versa. Problemas de máxima rigidez com restrições de massa foram discutidos, utilizando critérios de ótimo. No cálculo da energia de deformação, as contribuições de flexão, forças de membrana e forças de cisalhamento transversais foram consideradas separadamente. Se verificou que no caso de cascas finas, quando ocorria travamento por cisalhamento, a energia de deformação por cisalhamento transversal levava à formação de checkerboards.

Kere e Koski, 1999, resolveram um problema de otimização multicritério da seqüência de laminação para máxima margem de segurança em relação à falha. Eles partiram de ângulos pré-estabelecidos para a orientação das camadas e procuraram uma seqüência simétrica e equilibrada com o número mínimo de camadas de modo que o fatores de reserva para falha inicial devido a um conjunto de carregamentos aplicados ao laminado fosse maximizado.

Ramm *et al.*, 2000, apresentaram a obtenção da forma e otimização de estruturas de casca, comparando dois métodos numéricos para a obtenção da forma de cascas, um deles tradicional, baseado em métodos experimentais, e outro utilizando conceitos de otimização estrutural, permitindo o uso de vários critérios de ótimo. Outros trabalhos nos últimos anos seguem uma linha de algoritmos genéticos de otimização, como Soremekum, 1997, Callahan e Weeks, 1992, Nagendra *et al.*, 1996 e Gürdal *et al.*, 1994. Esse tipo de algoritmo, entretanto, ainda é extremamente caro computacionalmente, e foge do interesse do presente trabalho.

Com essa pesquisa bibliográfica apresentada acima, tornou-se possível delinear uma estratégia utilizando métodos de otimização estrutural como SLP e otimização multi-nível. A descrição desses métodos é feita na seção abaixo.

## 4.2. DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS UTILIZADOS

As variáveis de projeto utilizadas no presente trabalho são a orientação de cada lâmina em cada elemento e a densidade relativa de cada lâmina. Com a escolha dessas duas variáveis, a aplicação de uma otimização em dois níveis é uma boa opção. Esse tipo de estratégia permite simplificar o processo de otimização, evitando a implementação de otimização multi-objetivo e também leva à diminuição do número de variáveis de projeto durante o processo de otimização [Conceição António *et al.*, 1995].

Ao se trabalhar com a orientação, uma função objetivo apropriada é uma que esteja relacionada com a energia de deformação da estrutura, tal como a flexibilidade da estrutura. Ao utilizar a flexibilidade, é possível derivar expressões em função da orientação de cada camada tanto para a função objetivo como para o caso de uso de restrições de tensão, por exemplo. Ao trabalhar com a densidade relativa, a escolha da função objetivo recai naturalmente sobre o volume. Dando continuidade aos trabalhos de Sant'Anna, 2002, e Cardoso, 2000, escolhe-se a minimização do volume de cada lâmina a ser otimizada, o que permite utilizar como restrição a flexibilidade total da estrutura, a tensão admissível, ou algum critério de falha para material composto, com o de Tsai-Hill [Jones, 1975]. No presente trabalho, entretanto, aplica-se apenas a restrição de flexibilidade.

Os dois níveis implementados são então:

- otimização da orientação de cada camada do elemento no primeiro nível, tendo como função objetivo a flexibilidade da estrutura;
- no segundo nível, se otimiza a topologia da lâmina em questão, e o objetivo é a minimização do volume, com restrição de flexibilidade.

Da maneira como o algoritmo foi implementado, qualquer dos níveis acima pode ser utilizado individualmente, ou seja, pode-se aplicar apenas a otimização topológica sem otimizar a orientação, e vice-versa. Isto permite aplicar o algoritmo no cálculo estruturas com material isotrópico, em que não faz sentido otimizar a orientação, por exemplo.

Para simplificar o algoritmo, trabalha-se com estruturas tendo um único tipo de laminação (ou seja, seqüência de lâminas com determinada orientação e espessura de cada uma), e determina-se no arquivo de dados de entrada quais dessas lâminas devem ser otimizadas. Com isso, o número de variáveis de projeto ( $n_{desvar}$ ) será igual ao número de elementos ( $n_{elem}$ ) da estrutura multiplicado pelo número de lâminas que se deseja otimizar ( $n_{omtlvr}$ ).

A inserção de malhas com diferentes tipos de laminação, como em Conceição António *et al.*, 1995, traz uma série de problemas de organização do algoritmo, que foram deixados para uma continuação desse trabalho. Outra simplificação adotada é o fato de se considerar as



espessuras das camadas fixas. Vale lembrar que no mercado só existem determinadas espessuras de tecido, o que limita naturalmente a escolha do projetista. A otimização da espessura considerando uma lista de possíveis espessuras para cada camada levaria à implementação de algoritmos de programação inteira, e a uma estratégia totalmente diferente da implementada.

Além do mais, o uso da espessura de cada camada como variável de projeto já foi bastante explorada em diversos trabalhos da área como por exemplo Schmit e Farshi, 1973, Kam e Lai, 1989, Mota Soares *et al.*, 1995, entre vários outros. O mesmo se aplica ao caso da orientação de toda uma camada, como os trabalhos de Foye, 1968 e Waddoups, 1969, Kam e Lai, 1989, Haftka e Gürdal, 1992, etc. No sentido de se buscar uma nova contribuição para o conhecimento, o estudo de diferentes estratégias de otimização como as implementadas é de maior interesse.

Na Figura 4.1 é mostrado um fluxograma simplificado da estratégia em dois níveis implementada no presente trabalho. Da forma como está apresentado, cada nível de otimização roda apenas uma vez. O segundo nível, entretanto, está dividido em duas ou mais etapas, pelo uso do MC. Na primeira etapa do segundo nível, o valor do expoente de penalização  $p$  é 1 e o de  $\alpha$  é 0 sempre, e na segunda etapa esses valores são modificados, diminuindo o valor de  $p$  para  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ , etc. e aumentando  $\alpha$  para algum valor menor que 1, como 0,3 (ver equação (3.40) na seção 4.4). Na segundo nível minimiza-se a função  $s$ , ficando claro que não se trata da minimização do volume simplesmente, mas do volume penalizado, como será visto em detalhes na seção 4.4.

Algumas pequenas variações do algoritmo mostrado neste fluxograma foram implementadas, permitindo, por exemplo, que entre uma etapa e outra do segundo nível a otimização da orientação fosse realizada. Não se verificou, entretanto, ganho no valor do volume final da estrutura com a utilização dessa estratégia.

Também foram incluídas rotinas para registro dos resultados (deslocamentos, deformações, tensões, histórico do valor das funções objetivo e restrições, valor das variáveis de projeto nas últimas iterações, etc.) ocasionalmente durante o processo de cálculo, permitindo não só o reinício do processo após alguma parada (involuntária ou não) ou ainda o acompanhamento da variação da orientação ou da topologia da estrutura. Da maneira como esses registros foram elaborados, torna-se bastante fácil modificar o processo sem a necessidade de reinício, podendo ser modificada a flexibilidade limite, critérios de convergência, etc., com base no comportamento dos resultados obtidos a cada iteração.

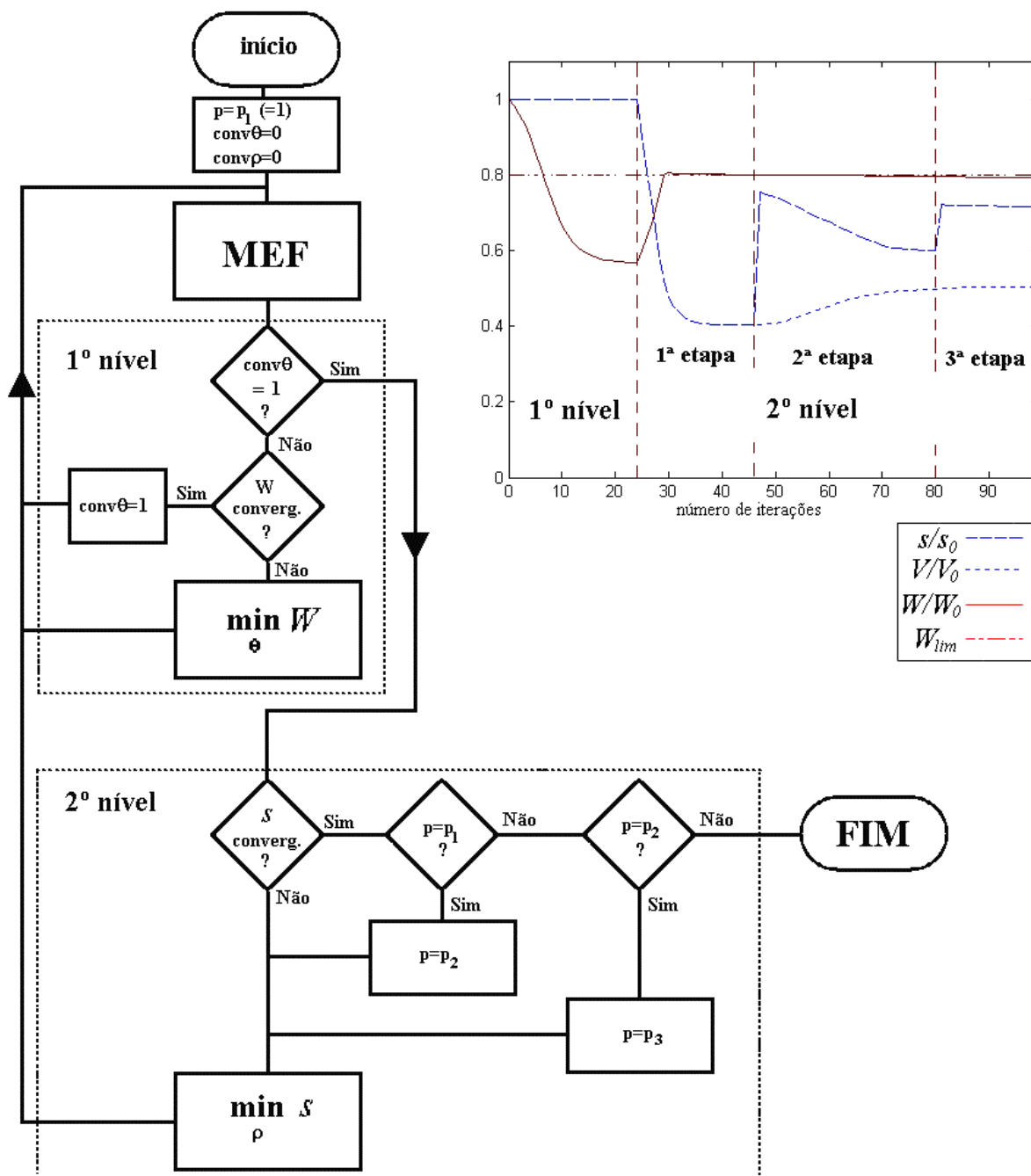


Figura 4.1. Fluxograma da estratégia de otimização em dois níveis: no primeiro nível é minimizada  $W$  ( a flexibilidade) e no segundo nível  $s$  (o volume penalizado).  $Conv\theta$  e  $conv\rho$  são “flags” que indicam se a convergência da otimização de  $\theta$  ou  $\rho$  foi alcançada, e  $p$  é expoente de penalização de  $s$ . No alto à direita a história de interações de um caso otimizado com 3 etapas do MC.

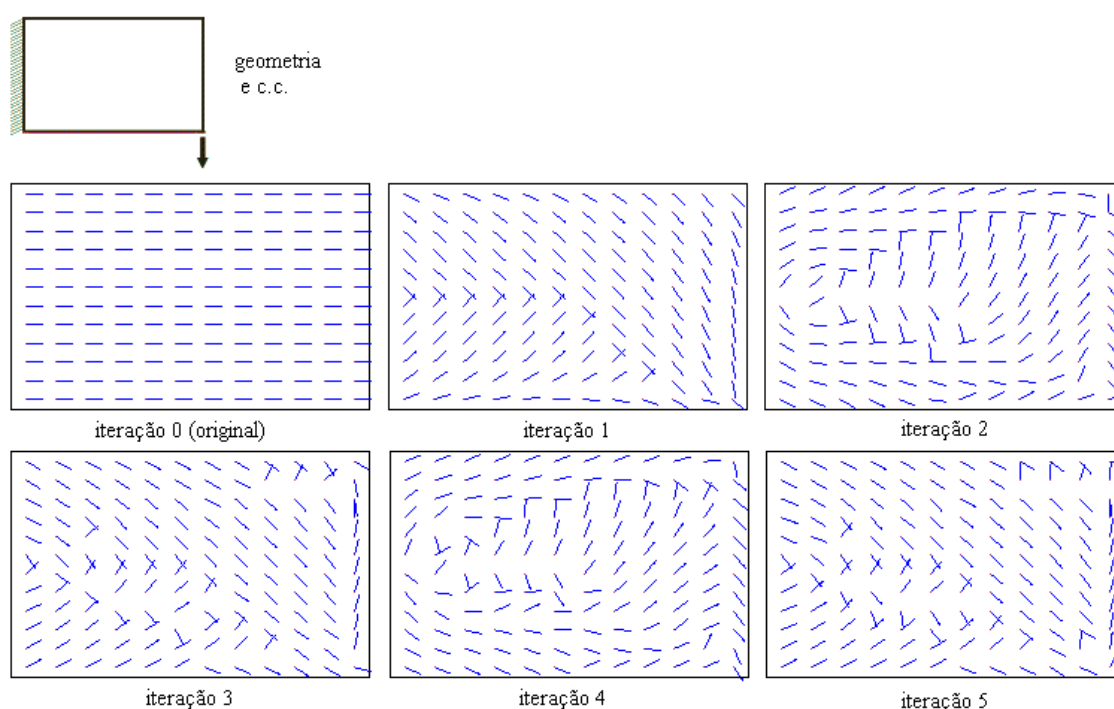
#### 4.3. MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE

Ao minimizar a flexibilidade da estrutura trabalhando com a orientação como variável de projeto, algumas estratégias diferentes podem ser implementadas, além do SLP. Uma dessas estratégias consiste em utilizar diretamente os resultados de Pedersen, 1989 e 1990, que

apresentou um método analítico para a obtenção da orientação ótima em uma placa de material ortotrópico, considerando estado plano de tensões e usando como função objetivo a máxima rigidez da estrutura. Isso foi feito por exemplo por Park, 1995, e Min, 1997.

A aplicação da direção principal de deformação (chamado a partir daqui de DPD) de em cada elemento, entretanto, levou a resultados não convergentes, devido ao seu acoplamento com o ângulo  $\theta$ . Isso levou ao uso da direção principal de tensão (ou DPT) como critério de alinhamento da direção de maior módulo de elasticidade do material. Os resultados não foram dos melhores, pois ainda há um pequeno acoplamento entre a variável de projeto e a direção de tensão principal.

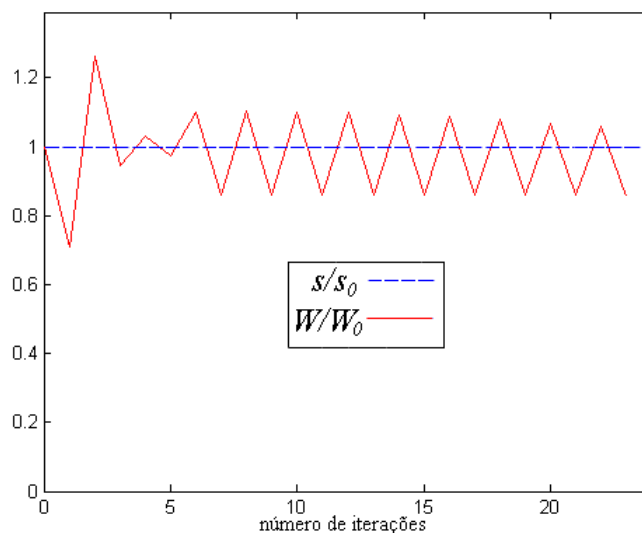
Uma formulação utilizando a DPD foi implementada no presente trabalho, e os efeitos do acoplamento se fazem notar claramente. Como pode ser visto na Figura 4.2 para um caso de elasticidade plana, ocorre forte variação na orientação da direção de maior módulo de elasticidade ao se considerar simplesmente a DPD, pois o que é direção de maior deformação após uma iteração passa a ser direção de menor deformação na iteração seguinte. Isso reflete no gráfico da flexibilidade relativa na Figura 4.3, com oscilação na flexibilidade.



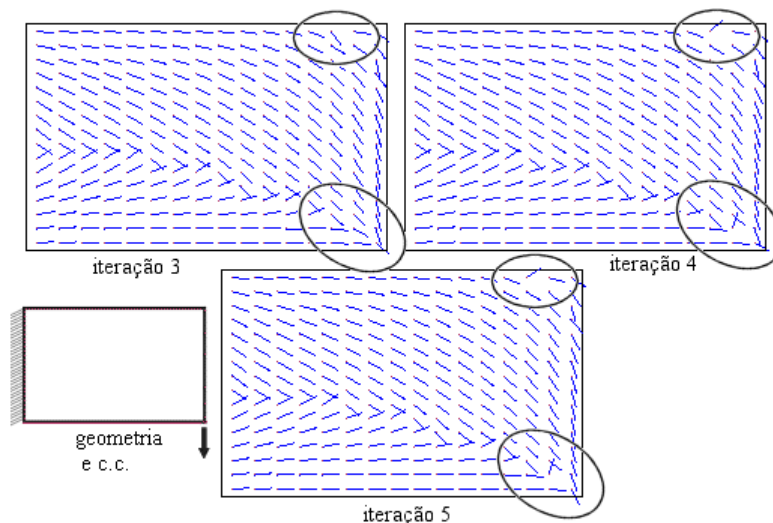
**Figura 4.2.** Acima, geometria básica e condições de contorno do problema. Abaixo, primeiras cinco iterações da otimização da orientação de um problema 2D (malha 12x12 elementos), utilizando direção principal de deformação.

Também foi implementada a otimização da orientação alinhando a orientação da direção de maior módulo de elasticidade do material com a DPT. Os resultados são muito mais satisfatórios, mas ainda ocorre um certo acoplamento com a variável de projeto, que nem sempre

é perceptível. Na Figura 4.4 é apresentado o campo de orientações nas iterações 3, 4 e 5, podendo-se verificar a variação bastante grande na orientação em alguns elementos. São poucos elementos, mas o reflexo no valor da flexibilidade é bastante grande, como se vê na Figura 4.5. Entre a segunda e a quinta iterações há uma oscilação no gráfico da flexibilidade, que ocorre devido à essa variação exagerada na orientação daqueles elementos.



**Figura 4.3.** Gráfico da flexibilidade relativa para o caso da otimização da orientação de um problema bidimensional utilizando a direção de deformação principal como critério para determinar a variável  $\theta$ .



**Figura 4.4.** Campo de orientação nas iterações 3,4 e 5, em malha 16 x 16..

Uma estratégia intuitiva, mas muito eficiente foi introduzida por Suzuki e Kikuchi, 1991, baseado no trabalho de Pedersen e no de Gibiansky e Cherkaev, 1988. Eles afirmam que a orientação ótima de um material ortotrópico com relativamente baixa resistência ao cisalhamento (“*low shear stiffness*” - [Pedersen, 1990]) pode ser alinhada com sua direção de maior tensão principal. Esta estratégia intuitiva implica a consideração física de que, se o campo de tensões é constante com relação à variável de orientação, o eixo principal do material deveria estar

alinhado com a DPT. Além do mais, é relativamente simples de determinar a orientação ótima em comparação com outros métodos (como o próprio Pedersen, 1989, ou Díaz e Bendsøe, 1992). Este método é bastante eficiente, especialmente para casos em que as tensões principais estão disponíveis, como no problema de otimização linear elástico tendo como função objetivo a flexibilidade. Este método, entretanto, carece de uma base matemática, e não pode ser estendido para a solução de problemas com carregamentos múltiplos ou multi-modal, da mesma maneira que a estratégia de Pedersen.

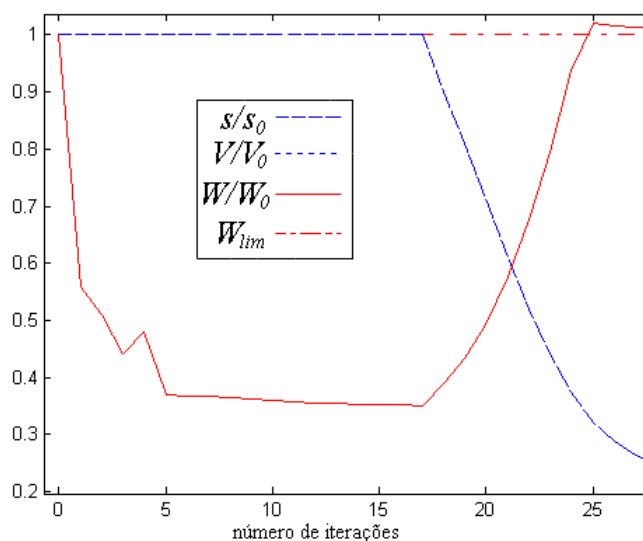


Figura 4.5. Gráfico da história das iterações para o caso da Figura 4.4.

Uma extensão dos trabalhos de Pedersen e Kikuchi foi apresentada por Díaz e Bendsøe, 1992 para o caso de otimização linear elástico e com carregamento múltiplo. Neste trabalho, primeiramente foi obtida a sensibilidade da função objetivo (flexibilidade) em relação à variável de orientação  $\theta$  para um dado caso de carregamento em uma formulação baseada em tensão. As direções de tensão principal podem então ser determinadas com respeito a cada caso de carregamento. Através da solução de uma média ponderada, que é função dessas direções de tensão principal, eles obtiveram a orientação ótima do material perfurado, que é um material ortotrópico. Este método funcionou razoavelmente bem para o problema de otimização com carregamentos múltiplos, mas não explica porque esta formulação baseada na tensão foi aplicada.

No presente trabalho se buscou um método alternativo aos apresentados acima para a minimização da flexibilidade da estrutura usando como variável de projeto a orientação de cada camada do elemento. É possível expressar o problema de otimização da flexibilidade como um problema simples de minimização sem restrição:

$$\min_{\theta} W(\theta). \quad (3.1)$$

Não está sendo considerando restrição alguma pois o que se quer é uma estrutura o mais rígida possível, uma vez que no segundo nível de otimização essa flexibilidade irá aumentar, ao se minimizar o volume. É interessante a inclusão de algum critério de falha como restrição, por exemplo, o que não foi implementado no presente trabalho.

A flexibilidade total da estrutura é dada por

$$W = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{q}$  é o vetor de deslocamentos globais e  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global. Utilizando programação linear para minimizar a flexibilidade, há a necessidade de calcular a derivada da flexibilidade em relação ao ângulo  $\theta$ :

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial (\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q})}{\partial \theta} = \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \mathbf{q} + 2 \mathbf{q}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta}. \quad (3.3)$$

A variável de projeto  $\theta$  é definida em cada camada de cada elemento. Ou seja, a derivada da matriz de rigidez deve ser calculada a nível de camada, de maneira semelhante ao que será feito nas equações (3.46) a (3.49) para obter a derivada da matriz de rigidez em relação a  $\rho$ . Dessa forma, a derivada  $\partial W / \partial \theta$  será um vetor de dimensão  $n_{desvar}$  ( $= n_{elem} \times n_{lyrom}$ ; número de elementos vezes o número de lâminas a otimizar), sendo obtida da seguinte maneira dentro de cada elemento:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_k}{d\theta} &= \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{B}_1^T \frac{d\mathbf{C}_{1k}}{d\theta} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \frac{d\mathbf{C}_{2k}}{d\theta} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \frac{d\mathbf{C}_{2k}}{d\theta} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \frac{d\mathbf{C}_{3k}}{d\theta} \mathbf{B}_2 \right) \frac{2}{t} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $k$  varia de 1 até  $n_{lyrom}$  (número de lâminas a otimizar). Posteriormente cada  $d\mathbf{K}_k / d\theta$  é montado dentro de um vetor  $d\mathbf{K} / d\theta$  de dimensão  $n_{desvar}$ . As derivadas de  $\mathbf{C}_{1k}$ ,  $\mathbf{C}_{2k}$  e  $\mathbf{C}_{3k}$  são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{C}_{1k}}{d\theta} = \rho (z_t - z_b)_k \frac{d\mathbf{C}_k^{lc}}{d\theta} \\ \frac{d\mathbf{C}_{2k}}{d\theta} = \rho (z_t^2 - z_b^2)_k \frac{d\mathbf{C}_k^{lc}}{d\theta} \\ \frac{d\mathbf{C}_{3k}}{d\theta} = \rho (z_t^3 - z_b^3)_k \frac{d\mathbf{C}_k^{lc}}{d\theta} \end{cases}. \quad (3.5)$$

O tensor  $\mathbf{C}_k^{lc}$  tem o seguinte formato:

$$\mathbf{C}_k^{lc} = \begin{bmatrix} C_{k11}^{lc} & C_{k12}^{lc} & 0 & 0 & C_{k15}^{lc} \\ C_{k21}^{lc} & C_{k22}^{lc} & 0 & 0 & C_{k25}^{lc} \\ 0 & 0 & C_{k33}^{lc} & C_{k34}^{lc} & 0 \\ 0 & 0 & C_{k43}^{lc} & C_{k44}^{lc} & 0 \\ C_{k51}^{lc} & C_{k52}^{lc} & 0 & 0 & C_{k55}^{lc} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Cada componente de  $\mathbf{C}_k^{lc}$  é função de  $\theta$ . A derivada de cada termo não-nulo de  $\mathbf{C}_k^{lc}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{k11}^{lc}}{d\theta} &= (-4c^3s)C_{k11}^{lm} + (8c^3s - 4cs)C_{k12}^{lm} + \\ &+ (4cs - 4c^3s)C_{k22}^{lm} + (-8cs + 16c^3s)C_{k66}^{lm} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{k21}^{lc}}{d\theta} &= (4c^3s - 2cs)C_{k11}^{lm} + (4cs - 8c^3s)C_{k12}^{lm} + \\ &+ (4c^3s - 2cs)C_{k22}^{lm} + (8cs - 16c^3s)C_{k66}^{lm} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{k51}^{lc}}{d\theta} &= (4c^4 - 3c^2)C_{k11}^{lm} + (-8c^4 + 8c^2 - 1)C_{k12}^{lm} + \\ &+ (1 - 5c^2 + 4c^4)C_{k22}^{lm} + (-16c^4 + 16c^2 - 2)C_{k66}^{lm} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{k21}^{lc}}{d\theta} &= (4c^3s - 2cs)C_{11}^{lm} + (-8c^3s + 4cs)C_{12}^{lm} + \\ &+ (4c^3s - 2cs)C_{22}^{lm} + (-16c^3s + 8cs)C_{66}^{lm} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{k22}^{lc}}{d\theta} &= (-4c^3s + 4cs)C_{k11}^{lm} + (8c^3s - 8cs)C_{k12}^{lm} + \\ &+ (-4c^3s)C_{k22}^{lm} + (16c^3s - 8cs)C_{k66}^{lm} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{k52}^{lc}}{d\theta} &= (5c^2 - 4c^4 - 1)C_{k11}^{lm} + (8c^4 - 8c^2 + 1)C_{k12}^{lm} + \\ &+ (-4c^4 + 3c^2)C_{k22}^{lm} + (16c^4 - 16c^2 + 2)C_{k66}^{lm} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\frac{dC_{k33}^{lc}}{d\theta} = (-2cs)C_{k44}^{lm} + (2cs)C_{k55}^{lm} \quad (3.13)$$

$$\frac{dC_{k34}^{lc}}{d\theta} = (-2c^2 + 1)C_{k44}^{lm} + (2c^2 - 1)C_{k55}^{lm} \quad (3.14)$$

$$\frac{dC_{k43}^{lc}}{d\theta} = (-2c^2 + 1)C_{k44}^{lm} + (2c^2 - 1)C_{k55}^{lm} \quad (3.15)$$

$$\frac{dC_{k44}^{lc}}{d\theta} = (2cs)C_{k44}^{lm} + (-2cs)C_{k55}^{lm} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{C}_{k51}^{lc}}{d\theta} = & (4c^4 - 3c^2)C_{k11}^{lm} + (-8c^4 + 8c^2 - 1)C_{k12}^{lm} + \\ & + (1 - 5c^2 + 4c^4)C_{k22}^{lm} + (-16c^4 + 16c^2 - 1)C_{k66}^{lm} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{C}_{k52}^{lc}}{d\theta} = & (5c^2 - 4c^4 - 1)C_{k11}^{lm} + (8c^4 - 8c^2 + 1)C_{k12}^{lm} + \\ & + (-4c^4 + 3c^2)C_{k22}^{lm} + (16c^4 - 16c^2 + 1)C_{k66}^{lm} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{C}_{k55}^{lc}}{d\theta} = & (4c^3s - 2cs)C_{k11}^{lm} + (-8c^3s + 4cs)C_{k12}^{lm} + \\ & + (4c^3s - 2cs)C_{k22}^{lm} + (16c^3s + 8cs)C_{k66}^{lm} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Agora é calculada a derivada do deslocamento em relação a  $\theta$ . Ao se derivar a expressão:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} , \quad (3.20)$$

se obtém:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \theta} \mathbf{f} + \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \quad (3.21)$$

A derivada do vetor força externa em relação a  $\theta$  é nula, eliminando o segundo termo da direita. Nesse ponto é importante utilizar uma importante propriedade da matriz de rigidez, pelo fato de ser simétrica:

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{I} . \quad (3.22)$$

Isso leva a:

$$\frac{\partial (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K})}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \theta} \mathbf{K} + \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} = 0 , \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \theta} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \mathbf{K}^{-1} . \quad (3.24)$$

Inserindo (3.24) em (3.21), chega-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} , \quad (3.25)$$

ou, simplificando:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \mathbf{q} . \quad (3.26)$$

Finalmente, se inverte a relação acima, da seguinte forma:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \mathbf{q} \quad (3.27)$$

Inserindo essa expressão em (3.3), chega-se a:



$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial(\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q})}{\partial \theta} = \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \mathbf{q} + 2\mathbf{q}^T \left( -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \mathbf{q} \right), \quad (3.28)$$

e portanto o cálculo da derivada da flexibilidade em relação a  $\theta$  é feito somente através da derivada do tensor constitutivo nas coordenadas locais da casca:

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = -\mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \mathbf{q} \quad (3.29)$$

A flexibilidade linearizada em relação à variável de projeto  $\theta$  é dada então pela seguinte expressão:

$$W = W^0 - \left( \frac{\partial W^0}{\partial \theta} \right)^T \boldsymbol{\theta}^0 + \left( \frac{\partial W^0}{\partial \theta} \right)^T \boldsymbol{\theta}, \quad (3.30)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}^0$  é o vetor da variável de projeto com os valores da iteração anterior,  $W^0$  e  $\partial W^0/\partial \theta$  são respectivamente o valor da flexibilidade e da derivada da flexibilidade calculada com  $\theta = \boldsymbol{\theta}^0$ . Pelo algoritmo de programação linear que está sendo utilizado no presente trabalho, só é necessário então o termo que multiplica  $\theta$ . O primeiro termo é necessário apenas para calcular o valor da flexibilidade após a obtenção do novo valor da variável de projeto, ou seja, após a saída do LP.

#### 4.3.1. CASOS DE CARREGAMENTOS MÚLTIPLOS

Ao se utilizar programação linear para otimizar a orientação, surge a possibilidade de resolver casos com carregamentos múltiplos, ou seja, carregamentos aplicados à estrutura em diferentes situações. Uma estratégia sugerida por Krog e Olhoff, 1997, é a de minimizar a soma ponderada das flexibilidades associadas a cada caso de carregamento independentemente. O problema de otimização é expresso então da seguinte maneira:

$$\text{Min}_{\boldsymbol{\theta}} w_j W_j, \quad j = 1..n_{\text{casos}}. \quad (3.31)$$

onde  $w_j$  é o peso associado a cada caso  $j$  de carregamento,  $W_j$  é a flexibilidade associada a cada caso de carregamento e  $n_{\text{casos}}$  é o número de casos de carregamento aplicados sobre a estrutura. Para definição desse pesos, após o primeiro rodada do MEF é calculada a flexibilidade associada a cada caso, e divide-se esse valor pela soma do valor absoluto das flexibilidades:

$$w_j = \frac{|W_j|}{\sum_{j=1}^{n_{\text{casos}}} |W_j|} \quad (3.32)$$

Com isso, a forma linearizada do problema se torna:

$$w_j W_j = w_j \left[ W_j^0 - \left( \frac{\partial W_j^0}{\partial \theta} \right)^T \boldsymbol{\theta}^0 \right] + w_j \left( \frac{\partial W_j^0}{\partial \theta} \right)^T \boldsymbol{\theta}. \quad (3.33)$$

Para fins de aplicação do algoritmo de otimização do MATLAB, só interessa o termo que multiplica  $\boldsymbol{\theta}$ , que é calculado da seguinte maneira:

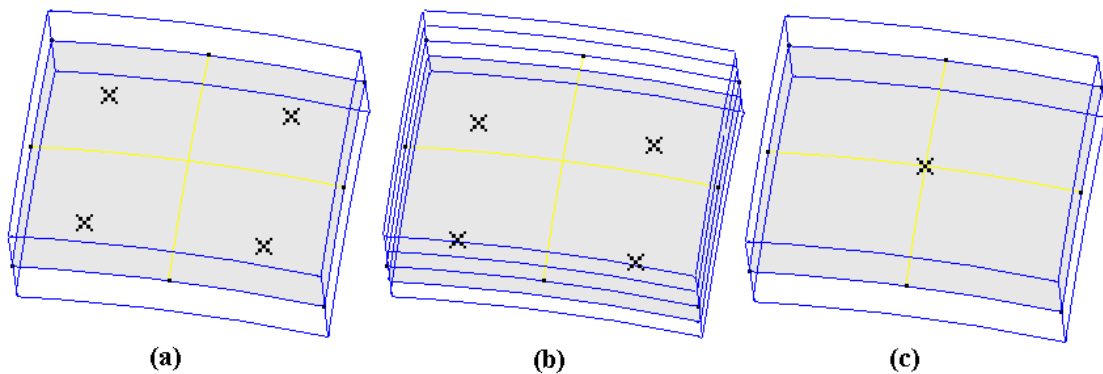
$$\left[ \frac{\partial W}{\partial \theta} \right]_j = -\mathbf{q}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \mathbf{q}_j, \quad \text{sem soma em } j, \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{q}_j$  é o vetor de deslocamentos calculado para cada caso de carga independente.

#### 4.3.2. CÁLCULO DA DIREÇÃO PRINCIPAL DE TENSÃO

Como discutido anteriormente, o uso apenas da direção principal de deformação (DPD) ou da direção principal de tensão (DPT) para a minimização da flexibilidade não apresenta resultados satisfatórios. Foi implementada, entretanto, uma estratégia na qual se usa DPT para a definição de uma primeira aproximação para o ângulo de orientação do material.

Por simplicidade, na implementação da otimização da orientação pela tensão principal no presente trabalho calculou-se a tensão apenas no centro do elemento (situação (c) da Figura 4.6). Se fossem utilizados quatro pontos de integração, seriam quatro tensores de deformação em cada lâmina a ser otimizada de cada elemento, o que levaria à necessidade de calcular uma tensão média e só então calcular a orientação principal de deformação em cada elemento. Isso aumenta bastante o tempo de cálculo. Se as tensões fossem calculadas em mais pontos na direção da espessura da lâmina, o aumento do tempo de cálculo se tornaria mais crítico.



**Figura 4.6. Pontos de integração para cálculo da deformação e da tensão. Em (a), quatro pontos de integração no plano médio da camada, em (b) quatro pontos em um plano abaixo da superfície média e em (c) um ponto de integração no centro da superfície média.**

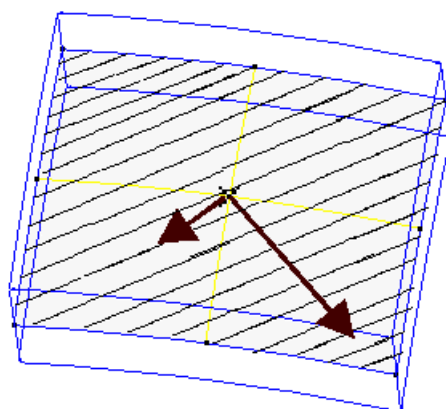
São consideradas apenas as tensões no plano paralelo à superfície média, e o tensor de tensões utilizado é o seguinte:

$$\boldsymbol{\sigma}_{pl} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Resolvendo então o problema de autovalores abaixo, se obterá os valores das duas tensões principais e os vetores indicando a orientação de cada uma dessas tensões.

$$(\sigma_{pl} - \lambda_j \mathbf{I}) \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2., \quad (3.36)$$

onde  $\lambda_j$  são os valores das tensões principais,  $\Phi_j$  são vetores associados à tensão principal  $j$ , indicando sua direção e  $\mathbf{I}$  é a matriz de identidade. O próximo passo é a verificação de qual das duas tensões  $\lambda_j$  tem maior módulo. Na Figura 4.7 se vê um elemento com uma orientação qualquer e com a representação das direções principais de tensão no plano. A nova orientação da camada será dada pela direção do vetor de maior magnitude.



**Figura 4.7. Vetores obtidos do cálculo das tensões principais em uma camada do elemento, com magnitudes proporcionais aos valores das tensões.**

#### 4.4. MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE FLEXIBILIDADE

O problema de otimização para o caso de minimização do volume com restrição de flexibilidade é escrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & s(\rho) = \rho^T \mathbf{V} \\ \text{s. a} \quad & W(\rho) - W_{lim} \leq 0. \\ & 0 < \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde  $W_{lim}$  é a flexibilidade limite determinada para a solução final, o que no presente trabalho determinou-se sempre como um fator da flexibilidade inicial da estrutura,  $W_0$  (flexibilidade da estrutura original, antes de qualquer passo de otimização). O vetor  $\rho$  tem dimensão  $n_{desvar}$  e contém a densidade relativa  $\rho_n$  de cada lâmina a ser otimizada dentro de cada elemento. O vetor  $\mathbf{V}$  tem essa mesma dimensão, e contém o volume de cada lâmina a ser otimizada dentro de cada elemento, calculado da seguinte forma:

$$V_n = \int_{\Omega} |\mathbf{J}| d\Omega_n, \quad (3.38)$$

O cálculo desse volume depende da forma como está montada a rotina de elementos finitos. No presente caso, o Jacobiano é calculado apenas no meio do elemento para cada ponto de integração, e a expressão (3.38) é calculada da seguinte forma:

$$V_n = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (z_t - z_b)_n |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.39)$$

onde  $z_t$  e  $z_b$  são os valores das coordenadas reais na direção da espessura da superfície superior e inferior de cada camada. Essa integração é feita numericamente.

Ao penalizar a função objetivo, conforme a expressão (2.78), o problema de otimização em (3.37) passa a ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & s(\rho) = \sum_{n=1}^{n_{\text{des var}}} [\rho_n^p + \alpha \rho_n (1 - \rho_n)] V_n \\ \text{s.a} \quad & W(\rho) - W_{\text{lim}} \leq 0 \\ & 0 < \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

É necessário então linearizar a função objetivo e as restrições. A linearização da função objetivo é feita da seguinte maneira:

$$s = s^0 - \left[ \frac{\partial s^0}{\partial \rho} \right]^T \boldsymbol{\rho}^0 + \left[ \frac{\partial s^0}{\partial \rho} \right]^T \boldsymbol{\rho}. \quad (3.41)$$

onde  $s^0$  e  $\partial s^0 / \partial \rho$  são respectivamente o valor da função objetivo e sua derivada em relação a  $\rho$  para  $\rho = \rho^0$ . Partindo da expressão (3.40), se tem a derivada da função objetivo, para inserir em (3.41):

$$\frac{\partial s_n}{\partial \rho} = [p \rho_n^{p-1} + \alpha (1 - 2\rho_n)] V_n \quad (3.42)$$

Para linearizar a restrição, parte-se da equação de equilíbrio

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (3.43)$$

com  $\mathbf{f}$  sendo o vetor de forças global, a equação (3.2) pode ser reescrita como:

$$W = \mathbf{f}^T \mathbf{q}. \quad (3.44)$$

A derivada da flexibilidade é dada então por:

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \mathbf{q}. \quad (3.45)$$

Aqui, torna-se necessário levar em conta que o cálculo da matriz de rigidez é realizada de forma explícita, então deve-se abrir essa expressão. A derivada da matriz de rigidez do elemento deve estar expressa apenas em cada lâmina otimizada, o que é feito da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_{1k} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_{2k} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_{2k} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_{3k} \mathbf{B}_2 \right) \frac{2}{t} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.46)$$

onde  $k$  varia de 1 até  $n_{lyrotm}$  (número de camadas a otimizar) e

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{1k} = \rho \mathbf{C}_k^{lc} (z_t - z_b)_k \\ \mathbf{C}_{2k} = \rho \mathbf{C}_k^{lc} (z_t^2 - z_b^2)_k \\ \mathbf{C}_{3k} = \rho \mathbf{C}_k^{lc} (z_t^3 - z_b^3)_k \end{cases} \quad (3.47)$$

Ou seja, deixa de haver somatório nas camadas (o que é feito na expressão (2.51)). Agora então define-se a derivada de  $\mathbf{K}_k$  em relação à variável de projeto  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_k}{d\rho} &= \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{B}_1^T \frac{d\mathbf{C}_{1k}}{d\rho} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \frac{d\mathbf{C}_{2k}}{d\rho} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \frac{d\mathbf{C}_{2k}}{d\rho} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \frac{d\mathbf{C}_{3k}}{d\rho} \mathbf{B}_2 \right) \frac{2}{t} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{C}_{1k}}{d\rho} = \mathbf{C}_k^{lc} (z_t - z_b)_k \\ \frac{d\mathbf{C}_{2k}}{d\rho} = \mathbf{C}_k^{lc} (z_t^2 - z_b^2)_k \\ \frac{d\mathbf{C}_{3k}}{d\rho} = \mathbf{C}_k^{lc} (z_t^3 - z_b^3)_k \end{cases} \quad (3.49)$$

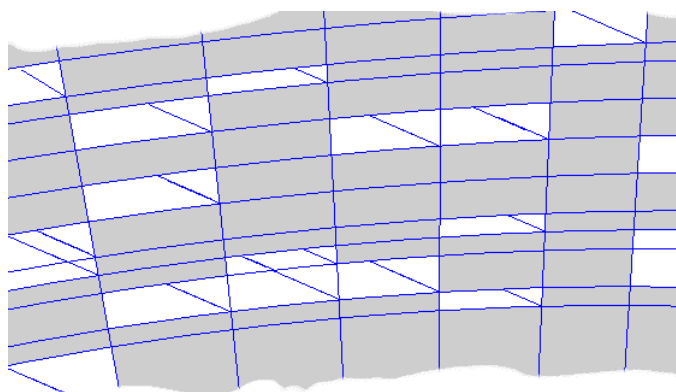
As integrações em (3.48) são feitas numericamente, nos mesmos pontos de integração utilizados do MEF. Da mesma maneira que na minimização da flexibilidade, na seção 4.3, cada  $d\mathbf{K}_k/d\rho$  será inserido dentro do vetor  $d\mathbf{K}/d\rho$ , de dimensão  $n_{desvar}$ .

A expressão linearizada da restrição é finalmente escrita da seguinte maneira, para ficar nos moldes da equação (2.66):

$$\left[ \frac{\partial W^0}{\partial \rho} \right]^T \boldsymbol{\rho} = W_{\text{lim}} - W^0 + \left[ \frac{\partial W^0}{\partial \rho} \right]^T \boldsymbol{\rho}^0. \quad (3.50)$$

Um problema prático surge da implementação do algoritmo através das considerações acima. Ao se aplicar a otimização topológica a todas as lâminas, pode ocorrer que lâminas internas venham a sumir parcial ou totalmente, como no caso de placas em flexão. Isso implicaria em impossibilidade construtiva, pois haveria “buracos” internos, sem nada mantendo a distância entre as duas lâminas externas, como se vê na Figura 4.8. Se fossem eliminadas camadas internas que atinjam densidade mínima em todos os elementos, um outro problema adviria disso, com a modificação brusca da distância das camadas externas à superfície média e

conseqüente aumento brusco da flexibilidade. Assim, as camadas externas teriam seu volume aumentado de modo a voltar a manter a flexibilidade limite determinada.



**Figura 4.8.** Possibilidade de aparecimento de buracos entre camadas, se a otimização topológica for aplicada a todas as camadas ao mesmo tempo.

Duas formas de tratar esse problema podem ser determinadas: uma é a aplicação de algum tipo de filtro ou controles de gradiente na direção da espessura. A escolha de filtros ou controles de gradientes requer que ao se determinar a densidade de determinada camada dentro do elemento, sejam levadas em conta as densidades da camada inferior e da superior à camada em questão. Isso aumenta o tempo de análise, especialmente para o caso de laminados com grande quantidade de camadas.

Outra forma de resolver o problema buracos entre camadas é aplicar a otimização topológica apenas a determinadas camadas, mais especificamente as externas. Essa segunda estratégia é muito mais simples de implementar, pois requer apenas que se determine antecipadamente quais camadas serão otimizadas. Assim, a estratégia de otimização topológica implementada permite que se determine a topologia de reforçadores de estruturas de casca laminada.

#### 4.4.1. CASOS DE CARREGAMENTOS MÚLTIPLOS

A extensão do problema de otimização do volume com restrição de flexibilidade para múltiplos casos de carregamento é feita de uma maneira bastante simples, atuando sobre as restrições. A expressão (3.50) deve incluir os diversos casos de carregamento, da seguinte maneira:

$$\left[ \frac{\partial W_j^0}{\partial \rho} \right]^T \mathbf{\rho} = W_{\text{lim}} - W_j^0 + \left[ \frac{\partial W_j^0}{\partial \rho} \right]^T \mathbf{\rho}^0. \quad (3.51)$$

onde  $W_j^0$  e  $\partial W_j^0 / \partial \rho$  são respectivamente o valor da flexibilidade e a sua derivada em relação a  $\rho$  para cada caso independente de carregamento  $j$ , calculadas para o vetor de variáveis de projeto  $\rho^0$  da seguinte maneira:

$$\begin{cases} W_j^0 = \mathbf{f}_j^T \mathbf{q}_j, & \text{sem soma em } j \\ \frac{\partial W_j^0}{\partial \rho} = -\mathbf{q}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \mathbf{q}_j \end{cases} \quad (3.52)$$

Com isso, o problema de otimização topológica com minimização do volume e restrição de flexibilidade, incluindo múltiplos casos de carregamentos, é expresso como:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & s = s^0 - \left[ \frac{\partial s^0}{\partial \rho} \right]^T \boldsymbol{\rho}^0 + \left[ \frac{\partial s^0}{\partial \rho} \right]^T \boldsymbol{\rho} \\ \text{s. a} \quad & \left[ \frac{\partial W_j^0}{\partial \rho} \right]^T \boldsymbol{\rho} = W_{\text{lim}} - W_j^0 + \left[ \frac{\partial W_j^0}{\partial \rho} \right]^T \boldsymbol{\rho}^0, \quad j = 1..n_{\text{casos}}, \\ & 0 < \rho_n \leq 1 \end{aligned} \quad (3.53)$$

O número de restrições é dado então pelo número de casos de carregamento ( $n_{\text{casos}}$ ), não havendo modificação sobre a função objetivo.

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos obtidos utilizando os métodos desenvolvidos nos capítulos anteriores deste trabalho. Foram testados casos de elasticidade plana, casos de placas com carregamento transversal e alguns casos típicos de casca, como cascas cilíndricas e esféricas de pequena curvatura. Também casos de carregamento múltiplo são apresentados, aplicando tanto otimização topológica quanto otimização da orientação.

Os seguintes aspectos são discutidos:

- vantagem da aplicação da otimização da orientação em relação à diminuição do volume final da estrutura;
- influência da orientação inicial sobre a solução final para a orientação e para o volume;
- comparação entre otimização da orientação através de DPT apenas e através da combinação DPT-SLP;
- interpretação dos resultados da otimização topológica;
- aplicação do MC e comparação entre o uso de duas ou mais de suas etapas no resultado final na otimização topológica;
- influência do refino da malha sobre a topologia final;
- influência da definição da flexibilidade limite ( $W_{lim}$ ) sobre a solução final ao utilizar a estratégia em dois níveis;
- comportamento do problema na otimização de lâminas externas em uma estrutura com várias lâminas, utilizando a estratégia em dois níveis;
- comportamento do problema em casos de carregamentos múltiplos.

Esses itens são apresentados dentro das seções 5.2 a 5.6. Com isso, procura-se validar os métodos propostos através da discussão das diversas possibilidades de aplicação da estratégia em dois níveis estabelecida no presente trabalho e de alguns problemas que apareceram durante os testes realizados.

### 5.1. MODELOS E CASOS RODADOS

Cada tipo de modelo testado é descrito nas subseções 5.1.1 a 5.1.3. As propriedades dos materiais utilizados estão apresentados na Tabela 5.1. Nesta tabela, Gr-Ep = grafite-epóxi (AS/3501) e Gl-Ep = fibra de vidro – epóxi. Nos casos de otimização de laminados, rodaram-se casos com lâminas de espessuras arbitrárias mas também casos com lâminas de espessuras



dentro do que pode ser encontrado na indústria, especialmente na estrutura de aeronaves leves. Algumas espessuras típicas de lâminas utilizadas foram: para Gr-Ep - 0,10mm, 0,13mm, 0,20mm; para - Gl-Ep: 0,25mm, 0,30mm, 0,35mm. Estas espessuras são mencionadas em sites de fornecedores de material composto, como <http://www.swiss-composite.ch>, no manual de manutenção da aeronave AMT-200 Super Ximango, ou por exemplo Soremekun, 1997.

**Tabela 5.1: propriedades de alguns materiais [Reddy, 1997] convertidos para o SI (1 psi = 6.895 E6 N / m<sup>2</sup>).**

Material	E <sub>1</sub> [GPa/(psi)]	E <sub>2</sub> [GPa/(psi)]	E <sub>3</sub> [GPa/(psi)]	G <sub>23</sub> [GPa/(psi)]	G <sub>13</sub> [GPa/(psi)]	G <sub>12</sub> [GPa/(psi)]	v <sub>23</sub>	v <sub>13</sub>	v <sub>12</sub>
Alumínio	73,087 (10,6)	73,087 (10,6)	73,087 (10,6)	23,305 (3,38)	23,305 (3,38)	23,305 (3,38)	0,33	0,33	0,33
Aço	206,850 (30,0)	206,850 (30,0)	206,850 (30,0)	77,5 (11,24)	77,5 (11,24)	77,5 (11,24)	0,29	0,29	0,29
Gr-Ep	137,9 (20,0)	8,963 (1,3)	8,963 (1,3)	6,205 (0,9)	7,101 (1,03)	7,101 (1,03)	0,49	0,30	0,30
Gl-Ep	53,78 (7,8)	17,927 (2,6)	17,927 (2,6)	3,44 (0,5)	8,963 (1,3)	8,963 (1,3)	0,34	0,25	0,25

A flexibilidade limite da estrutura ( $W_{lim}$ ) foi sempre determinada como um fator da flexibilidade inicial da estrutura ( $W_0$ ), calculada após a primeira rodada do MEF. Os resultados em relação à diminuição do volume são expressos em função do volume inicial ( $V_0$ ).

Nos testes realizados, procurou-se penalizar a função objetivo na segunda etapa de otimização topológica fazendo o expoente de penalização  $p = 1/8$ , e o coeficiente  $\alpha = 0$  (ver equação (3.40)), salvo em alguns casos aonde se modificaram esses parâmetros, de modo a tentar diminuir ainda mais a presença de densidades intermediárias. O uso de valores menores para  $p$  foi testado por Cardoso, 2000, que identificou resultados satisfatórios dentro da faixa de 1/6 a 1/12. Em relação à distribuição de densidades, utilizou-se sempre densidade uniforme unitária para a estrutura inicial. Ou seja, a estrutura inicial foi sempre uma estrutura “completa”, não sendo investigada a influência de diferentes distribuições de densidade inicial.

Para auxiliar na compreensão dos resultados obtidos, a Tabela 5.2 apresenta uma listagem dos casos rodados cujas soluções são discutidas neste capítulo. O carregamento indica a quantidade de casos e a posição da carga. A condição de contorno é indicada para diferenciar principalmente os problemas de placas e de casca cilíndrica, que apresentam diferentes formas de apoio, o que é refletido na solução obtida para a topologia. A quarta coluna indica o número de lâminas em cada modelo, enquanto a descreve quais níveis de otimização foram aplicados. Finalmente, são indicadas as figuras com a solução obtida para cada caso.

**Tabela 5.2. Casos rodados com solução apresentada no presente trabalho (Nº lam. = número de lâminas).**

Modelo	Carregamento	Condição de contorno	Nº lam.	Níveis de otimização	Figura c/ solução
Viga em balanço (Figura 5.1)	Único, na ponta.	Engaste	1	Só topológica	Figura 5.6
Viga em balanço (Figura 5.1)	Único, na ponta.	Engaste	1	Dois níveis	Figura 5.6
Viga em balanço (Figura 5.1)	Único, na ponta.	Engaste	1	Dois níveis	Figura 5.8
Placa plana (Figura 5.2)	Único, no centro	Apoio nos 4 lados	2	Só orientação	Figura 5.9
Placa plana (Figura 5.2)	Único, no centro	Apoio nos 4 lados	1	Só topológica	Figura 5.10
Placa plana (Figura 5.2)	Único, no centro	Apoio nos 4 pontas	1	Dois níveis	Figura 5.13 Figura 5.15
Placa plana (Figura 5.2)	Único, no centro	Apoio nos 4 lados	2	Dois níveis	Figura 5.23 e Figura 5.24
Placa plana (Figura 5.2)	Único, no centro	Apoio nos 4 lados	4	Dois níveis	Figura 5.29
Placa retangular ( Figura 5.3)	Dois casos, nas pontas	Engaste em um lado	1	Dois níveis	Figura 5.30
Casca cilíndrica (Figura 5.4)	Único, no centro	Membrana na borda	1	Dois níveis	Figura 5.16
Casca cilíndrica (Figura 5.4)	Único, no centro	Apoio nas 4 pontas	1	Dois níveis	Figura 5.18
Casca esférica ( Figura 5.5)	Único, no centro	Apoio nas 4 pontas	1	Só topológica	Figura 5.12
Casca esférica ( Figura 5.5)	Único, no centro	Apoio nas 4 pontas	1	Dois níveis	Figura 5.19 e Figura 5.20
Casca esférica ( Figura 5.5)	Único, no centro	Apoio nas 4 pontas	1	Dois níveis	Figura 5.21 e Figura 5.22
Casca esférica ( Figura 5.5)	Único, no centro	Apoio nas 4 pontas	2	Dois níveis	Figura 5.25 e Figura 5.26
Casca esférica ( Figura 5.5)	Único, no centro	Apoio nas 4 pontas	2	Dois níveis	Figura 5.27
Casca esférica ( Figura 5.5)	Dois casos, no centro e nas bordas	Apoio nas 4 pontas	1	Só topológica	Figura 5.31
Casca esférica ( Figura 5.5)	Dois casos, no centro e nas bordas	Apoio nas 4 pontas	3	Dois níveis	Figura 5.32

### 5.1.1. ELASTICIDADE PLANA

Os casos de elasticidade plana são muito comuns na literatura que trata de otimização topológica. Devido à sua simplicidade, esses modelos foram utilizados durante a implementação das estratégias escolhidas para teste inicial do algoritmo a cada implementação de nova rotina. É possível comparar alguns resultados obtidos para casos de elasticidade plana com material isotrópico e ortotrópico, comparando o volume final da estrutura com o volume inicial, testadas apenas estruturas feitas de uma única lâmina. A viga em balanço é um dos testes padrões em otimização topológica bidimensional e sua geometria pode ser vista na Figura 5.1 [Bendsøe, 1995].

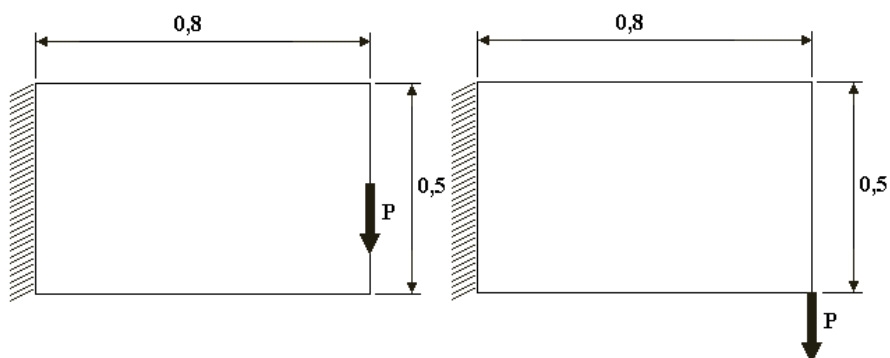


Figura 5.1. Geometria e condições de contorno dos problemas de viga engastada.

### 5.1.2. PLACAS

A implementação de um elemento finito de casca apresenta uma grande vantagem que é o fato de possibilitar também a solução de problemas de outros tipos de estruturas mais simples, como é o caso de elasticidade plana, citados acima, e o de placas planas. Os tipos de problemas de placa aqui estudados são então os seguintes:

- placa quadrada apoiada nas quatro pontas;
- placa quadrada apoiada nos quatro lados;
- placa retangular engastada em um lado.

Entre um e outro modelo testado variou-se o tipo de laminação, incluindo diferentes espessuras, orientações iniciais e materiais de cada lâmina, além do tipo de carregamento, incluindo também diversos casos de carregamento. A geometria das placas quadradas está apresentada na Figura 5.2. Apenas  $\frac{1}{4}$  da placa foi modelado nesse caso, aplicando simetrias nas bordas internas. Entre os casos de carregamento múltiplo rodados, está o caso de uma placa retangular engastada em um dos lados, vista na Figura 5.3. As forças representadas na figura são aplicadas separadamente sobre a estrutura.

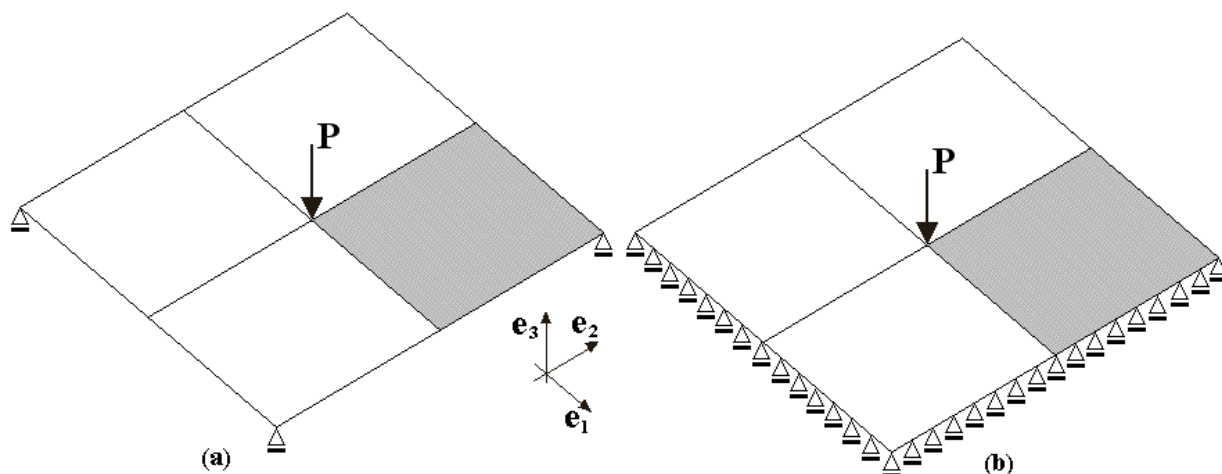
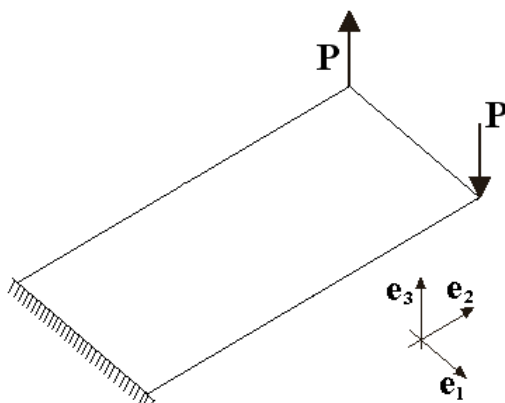


Figura 5.2. Geometria de placa quadradas com um único caso de carga. Em (a) apoio apenas nas pontas e em (b) apoio simples em toda a borda.



**Figura 5.3. Geometria e condições de contorno para placa retangular engastada, com comprimento igual a 1m e largura igual a 0,5m, espessura variável para cada caso testado.**

### 5.1.3. CASCAS

A aplicação da estratégia de otimização em dois níveis aos casos de estrutura de casca constituem o objetivo final do presente trabalho. Comparadas com outros tipos de estrutura, as cascas são sinônimo de extrema eficiência. Se projetadas apropriadamente, elas podem suportar grandes cargas em grandes vãos com pouco material na sua construção. Este comportamento se deve ao efeito de dupla curvatura, o qual, em contraste com arcos unidimensionais, pode suportar diferentes casos de carregamento praticamente através apenas de esforços de membrana e quase nenhuma flexão [Ramm *et al.*, 2000]. No caso da casca esférica, apresentada abaixo, os efeitos de flexão que existem em uma placa plana de dimensões semelhantes se transformam em esforços de membrana devido à curvatura da estrutura. Já no caso da casca cilíndrico, esforços de membrana aparecem muito mais fortemente próximo as bordas livres, enquanto que próximo à borda circular, efeitos de flexão são mais pronunciados, devido à curvatura única, apenas em torno do eixo  $x_2$ .

Na Figura 5.4 está a geometria e condições de carregamento da casca testada, utilizando condições de contorno semelhantes ao caso do telhado de Scordelis-Lo [Vlachoutsis, 1990], utilizado para verificação da validade do elemento finito testado (APÊNDICE A). Alternativamente, testou-se também um telhado com geometria semelhante, mas com condições de contorno diferentes: apoios simples apenas nas pontas, restringindo apenas o deslocamento na direção de  $x_3$ . Também se variou a laminação de cada modelo testado, buscando testar estruturas de uma única lâmina isotrópica, assim como com mais de uma lâmina de material ortotrópico, otimizando então tanto orientação como topologia.

Outro dos problemas típicos de casca rodados é o caso da casca esférica. Resultados de otimização desse tipo de estrutura foram apresentados por Maute e Ramm, 1997. Eles, entretanto, usaram a otimização topológica adaptativa, onde após cada nível de otimização

topológica foi aplicada uma otimização de forma, com refinamento da malha a cada passo. A geometria desse tipo de estrutura está na Figura 5.5. Além do caso com carregamento único, também foram rodados casos com mais de um caso de carregamento, o outro carregamento consistindo em duas cargas concentradas aplicadas sobre o centro das bordas.

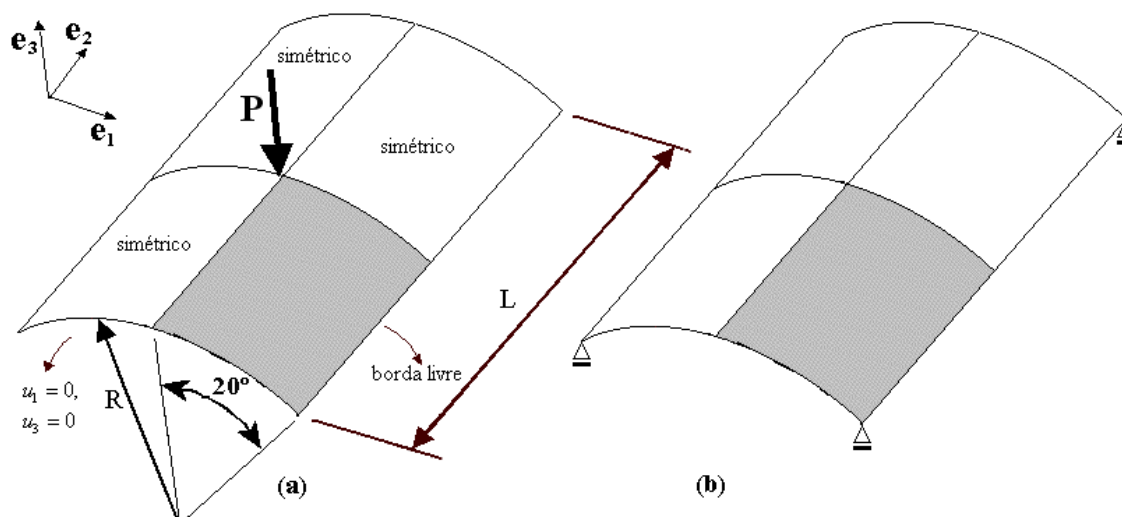


Figura 5.4. Geometria e condições de contorno para o problema da casca cilíndrica, em (a) com restrição de deslocamento de membrana na borda curva e em (b) apenas apoiado nas pontas.  $L=300$ ,  $R=300$ ,  $h=3$ , o ângulo de abertura é de  $40^\circ$ ,  $P=1e+6$ .

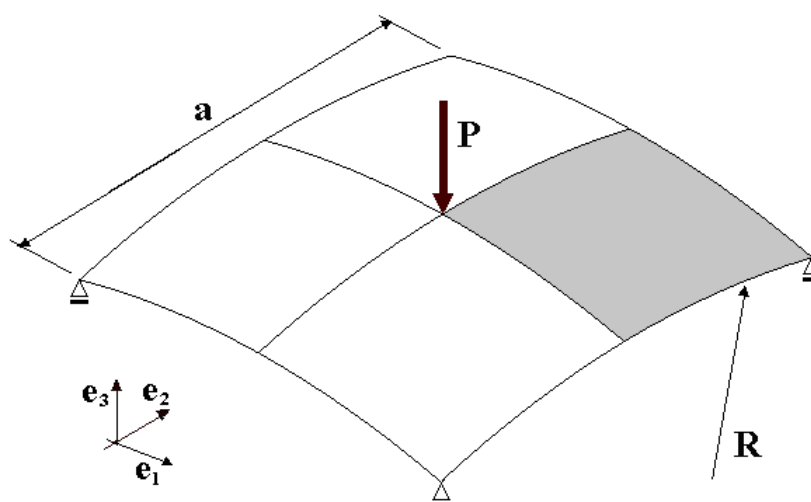


Figura 5.5. Geometria e condições de contorno do caso de casca esférica. Apenas um quarto do modelo foi simulado. Aqui,  $R=10\text{m}$ ,  $a=5\text{m}$ ,  $P=1e3\text{N}$ . A espessura total é de  $0,1\text{ m}$ .

## 5.2. OTIMIZAÇÃO DA ORIENTAÇÃO

Em um primeiro momento, mostra-se a vantagem de aplicar a otimização da orientação antes da otimização topológica em estruturas feitas de material ortotrópico, com um caso de elasticidade plana. São comparadas soluções obtidas apenas com a otimização topológica, e

soluções obtidas com um nível de otimização de orientação antes da otimização topológica (ver Figura 5.6 e Figura 5.7). Foi utilizado um fator de  $2W_0$  como restrição para a otimização topológica, ou seja, a flexibilidade final da estrutura deveria ser menor ou igual a duas vezes a flexibilidade inicial. O volume final obtido apenas com otimização topológica ficou em 45% do volume original, enquanto que ao se otimizar a orientação, o volume baixou para 27% do volume original.

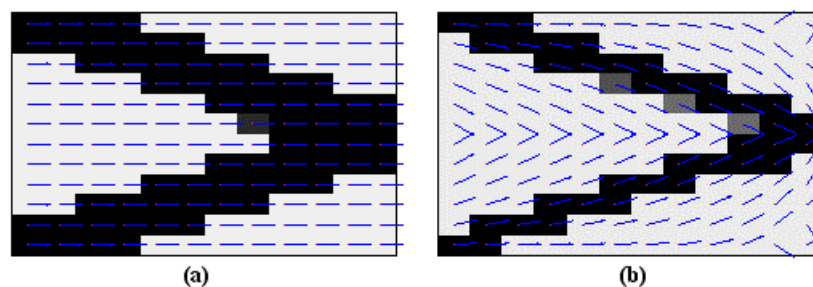


Figura 5.6. Topologia final da viga engastada para malha com 12x12 elementos. Material: Gr-Ep. (a) Apenas otimização topológica ( $V_f = 0,45 V_0$ ). (b) Otimizando antes a orientação com DPT-SLP ( $V_f = 0,27V_0$ ).

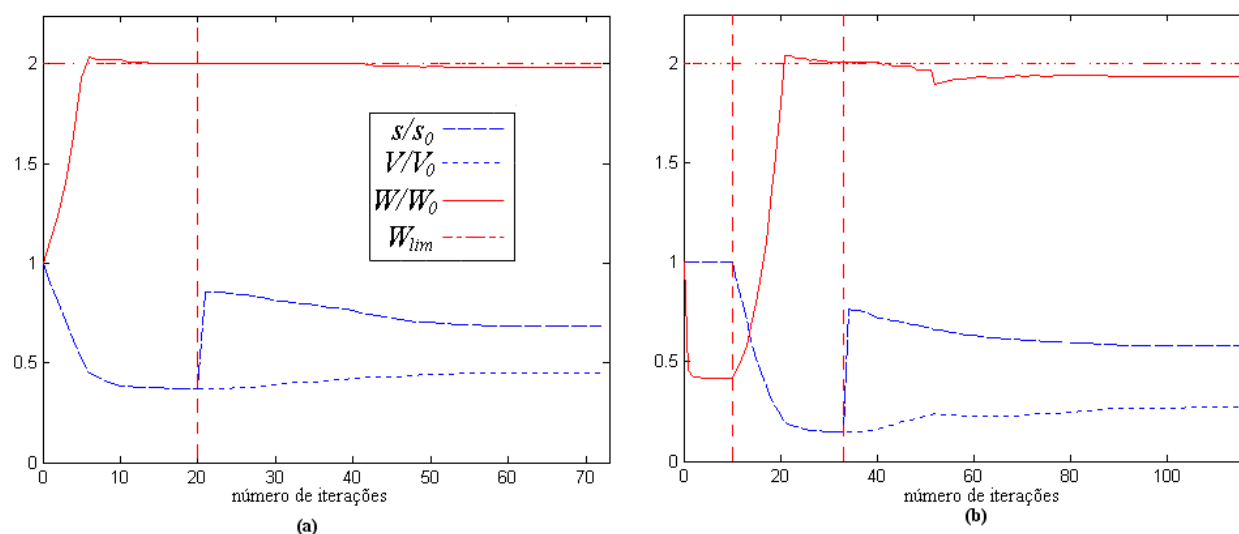


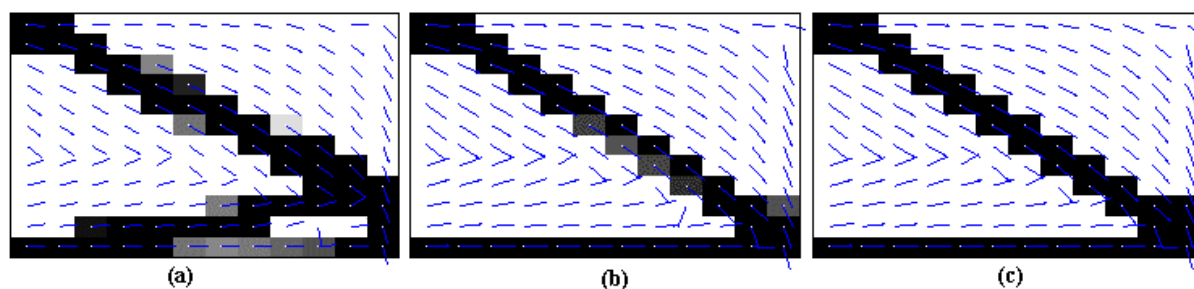
Figura 5.7. Gráfico da história de iterações para a otimização topológica da viga engastada e malha 12x12. Em (a) apenas otimização topológica e em (b) com otimização da orientação antes da topológica.

As linhas verticais nos gráficos da Figura 5.7 representam a separação entre os níveis de otimização e entre as etapas do MC. No gráfico à esquerda, como há apenas um nível de otimização (apenas otimização topológica), é marcada a separação entre a primeira e a segunda etapa do MC. O gráfico da função objetivo ( $s/s_0$ ) é o mesmo do volume real da estrutura na primeira etapa de otimização topológica, pois o fator de penalização  $p$  é igual a 1. Na segunda etapa, a função objetivo é penalizada com  $p = 1/8$ , e portanto difere do valor do volume da estrutura. Também se verifica que na configuração final a flexibilidade se apresenta um pouco

abaixo do valor limite, no caso o dobro da flexibilidade inicial. No gráfico à direita, a primeira parte do gráfico corresponde à otimização da orientação, com o volume da estrutura constante. Como essas divisões entre os dois níveis de otimização e entre as etapas do MC são facilmente identificáveis através do comportamento das curvas de flexibilidade e função objetivo, nos gráficos apresentados a partir daqui não serão utilizadas as linhas verticais tracejadas.

Na Figura 5.8 são apresentados resultados para o caso da viga em balanço com carga na sua ponta inferior direita. Foram aplicados métodos diversos para a otimização da orientação, (a) apenas DPT, (b) rodada inicial com DPT e o restante da otimização por SLP e (c) apenas SLP.

Na solução do caso (a), obteve-se um volume final de 33% do volume inicial e vários elementos com densidade intermediária. Nos casos (b) e (c) o volume final foi praticamente igual entre si, de aproximadamente 25% do volume inicial (em (b)  $V_f = 0,2459V_0$  e em (c)  $V_f = 0,2508V_0$ ), e a topologia igual. Há algumas diferenças apenas na orientação de alguns elementos. Isso mostra que a solução dos dois casos é equivalente para o caso bidimensional. A vantagem de rodar a iteração inicial com a direção de tensão principal é que o número de iterações necessárias para atingir a convergência da flexibilidade é menor: em (b) a convergência ocorreu na 20ª iteração e em (c) ocorreu na 24ª iteração. Essa diferença tende a ser maior no caso de malhas mais refinadas e no caso de placas e cascas, como se verificou em diversos casos rodados.

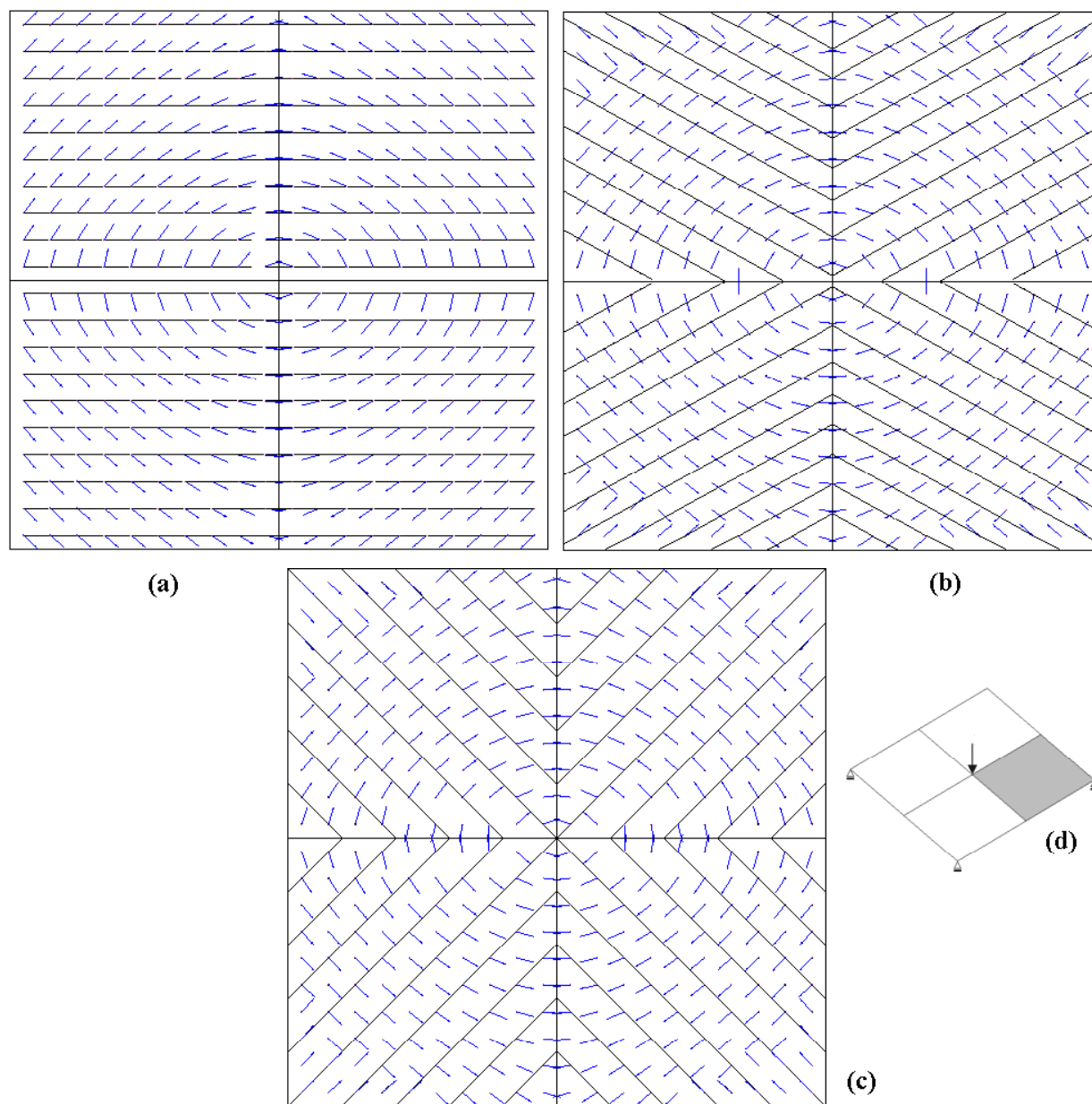


**Figura 5.8.** Orientações e topologias obtidas para casos de viga em balanço com carga na ponta inferior direita. Em (a), otimização da orientação apenas com a DPT, em (b) com DPT-SLP e em (c) apenas SLP.

### 5.2.1. INFLUÊNCIA DA ORIENTAÇÃO INICIAL

Da mesma forma que no caso de elasticidade plana, foram comparados resultados para diversas estratégias de otimização da orientação, sendo testado um caso de placa apoiada nos quatro lados, feita de duas lâminas de Gl-Ep, com soluções apresentadas na Figura 5.9. Otimizou-se a orientação da lâmina superior, mantendo a orientação da lâmina inferior constante, alinhada com a direção  $x_I$ . Ao aplicar a otimização da orientação a placas e cascas laminadas com material ortotrópico, obteve-se um erro muito pequeno para o valor final da

função objetivo, que é a flexibilidade, apesar de se ter obtido soluções levemente diferentes para a orientação.



**Figura 5.9. Comparação entre as orientações finais de uma placa com duas lâminas, para diferentes orientações iniciais. Em (a)  $\theta_0=0^\circ$ , em (b)  $\theta_0=30^\circ$  e em (c)  $\theta_0=45^\circ$ . Em (d), geometria e c.c. do problema.**

No primeiro teste utilizou-se apenas DPT. Partindo de  $\theta = 0^\circ$  (ou alinhado com  $x_1$ ) a convergência foi obtida após 8 iterações, chegando a uma flexibilidade de 85,3 % da inicial. Partindo de  $\theta = 30^\circ$ , a convergência foi obtida após 9 iterações, com 77,21% de  $W_0$ . Para  $\theta = 45^\circ$ , a convergência foi obtida também após 9 iterações, com 75,54%  $W_0$ . Em um segundo teste, utilizou-se o SLP, com rodada inicial pela DPT, partindo de  $\theta = 0^\circ$  (ou alinhado com  $x_1$ ). A convergência foi obtida após 16 iterações, chegando a uma flexibilidade de 85,17 % da inicial. Partindo de  $\theta = 30^\circ$ , a convergência foi obtida após 21 iterações, com 77,11% de  $W_0$ . Partindo de



$\theta = 45^\circ$ , a convergência foi obtida também após 19 iterações, com 75,4 % de  $W_0$ . Todos os valores de flexibilidade final, entretanto ficaram em torno de 0,29 N.m. Na Tabela 5.3 está apresentado um resumo destes resultados.

**Tabela 5.3. Comparações entre resultados para diferentes orientações iniciais de placa laminada.**

$\theta_0$	DPT			DPT-SLP		
	iterações até conv.	$W_f$ [N.m]	$W_f/W_0$	iterações até conv.	$W_f$ [N.m]	$W_f/W_0$
0°	8	0,2982	85,30 %	16	0,2978	85,17%
30°	9	0,3041	77,21 %	21	0,2981	77,11%
45°	9	0,2984	75,54%	19	0,2978	75,40%

A orientação final varia mesmo para o uso apenas de DPT, e que portanto não lineariza o problema. A falta de simetria em relação ao centro da placa é esperada, devido à presença da lâmina inferior, a qual está orientada na direção de  $x_l$ . Há influência também no número de iterações necessárias para a obtenção da convergência, devido à proximidade entre as orientações inicial e final.

A variação na razão entre a flexibilidade final e inicial é previsível, uma vez que estão sendo comparados valores calculados com diferentes geometrias iniciais. O valor final da flexibilidade, entretanto, ficou praticamente igual para todos os casos rodados, especialmente no caso da aplicação do SLP. Com isso pode-se concluir que o ótimo do problema convexo de otimização da orientação é uma área plana [Cardoso, 2000, Sigmund e Petersson, 1998], pois apresenta valores da função objetivo praticamente iguais para diferentes orientações finais.

### 5.3. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA - MC

Nesta seção são discutidos alguns aspectos relativos ao método de otimização topológica implementado, como interpretação dos resultados, uso do MC e refinamento da malha. Como pode ser visto nas figuras que apresentam a solução para a topologia, o contorno dos furos internos que aparecem após a otimização topológica não é suave, e depende da malha de elementos finitos utilizada [Sant'Anna, 2002]. Como isso implica em dificuldade, ou mesmo impossibilidade, de construção da estrutura assim definida, é necessário que se faça uma interpretação dos resultados obtidos. Existem diversas maneiras de fazer isso, levando em consideração que a densidade é uma função contínua, mas com seu valor calculado apenas no centro de cada camada de cada elemento finito

Alguns trabalhos [Papalambros e Chirehdast, 1990, Bendsøe e Rodriguez, 1991, e Olhoff, Bendsøe e Rasmussen, 1992, apud Sant'Anna, 2002] aplicam uma otimização de forma após a otimização topológica, conseguindo assim suavizar o contorno. Ramm *et al.*, 1998, aplicam sucessivamente otimização topológica e otimização de forma, com refinamento da malha entre as etapas, chamando o processo de “otimização topológica adaptativa”. A topologia final não apresenta nenhuma forma de serrilhado. Também é possível suavizar o contorno utilizando programas específicos para isso, como o desenvolvido por Marsan *et al.*, 1996, baseado nas rotinas de Papalambros e Chirehdast, 1990. Este programa efetua a filtragem dos elementos com densidades intermediárias, eliminando elementos conectados por um único nó e elementos isolados. O contorno é suavizado utilizando splines. Outra maneira é extrapolar as densidades dos elementos para os nós, como é feito por Hsu *et al.*, 2001, gerando um contorno suavizado que respeita as restrições impostas. No presente trabalho nenhum deste métodos foi aplicado, ficando como uma sugestão para trabalhos futuros.

Na Figura 5.10 estão resultados da otimização de uma placa feita de material isotrópico, com força aplicada no centro e apoiada em toda a borda. É possível verificar que o resultado final obtido para uma malhas de diferentes tamanhos é bastante parecido, mas certamente sofreu influência da linearização do problema. A flexibilidade limite para ambos os casos foi de  $1,5 W_0$ , e para a malha com  $10 \times 10$  elementos obteve-se um volume final igual a 58,65% do volume inicial, e para a malha  $16 \times 16$  o volume final foi de 57,83% do volume inicial, ou seja, uma diferença de menos de 1%.

Para a obtenção do resultado em (b) foram utilizadas apenas duas etapas do MC, a primeira etapa com  $p = 1$  e  $\alpha = 0$  e na segunda  $p = 1/8$  e  $\alpha = 0,3$ . Em (c) está o resultado após cada uma das três etapas do MC utilizadas, para a malha discretizada com  $16 \times 16$  elementos no quadrante. A convergência na primeira etapa foi obtida após 22 iterações, para  $p = 1$  e  $\alpha = 0$ , e se verifica a simetria da topologia. A segunda etapa foi rodada com  $p = 1/8$  e  $\alpha = 0,3$ , e a convergência foi obtida após mais 50 iterações. Não há nenhuma diferença visível entre esta topologia e a da apresentada mais à direita, equivalente ao final da terceira etapa, rodada com parâmetros  $p = 1/12$  e  $\alpha = 0,5$  tendo levado apenas 10 iterações para convergir. Neste caso não se verificou então nenhuma influência do uso da terceira etapa do MC. O uso dessa terceira etapa foi feita apenas em alguns casos mais específicos, como visto abaixo, mas de um modo geral a penalização com  $p = 1/8$  e  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 0,3$  se mostrou suficiente com apenas duas etapas do MC. A história das iterações para este caso está na Figura 5.11, aonde é possível observar claramente o comportamento da função objetivo nas 3 etapas.

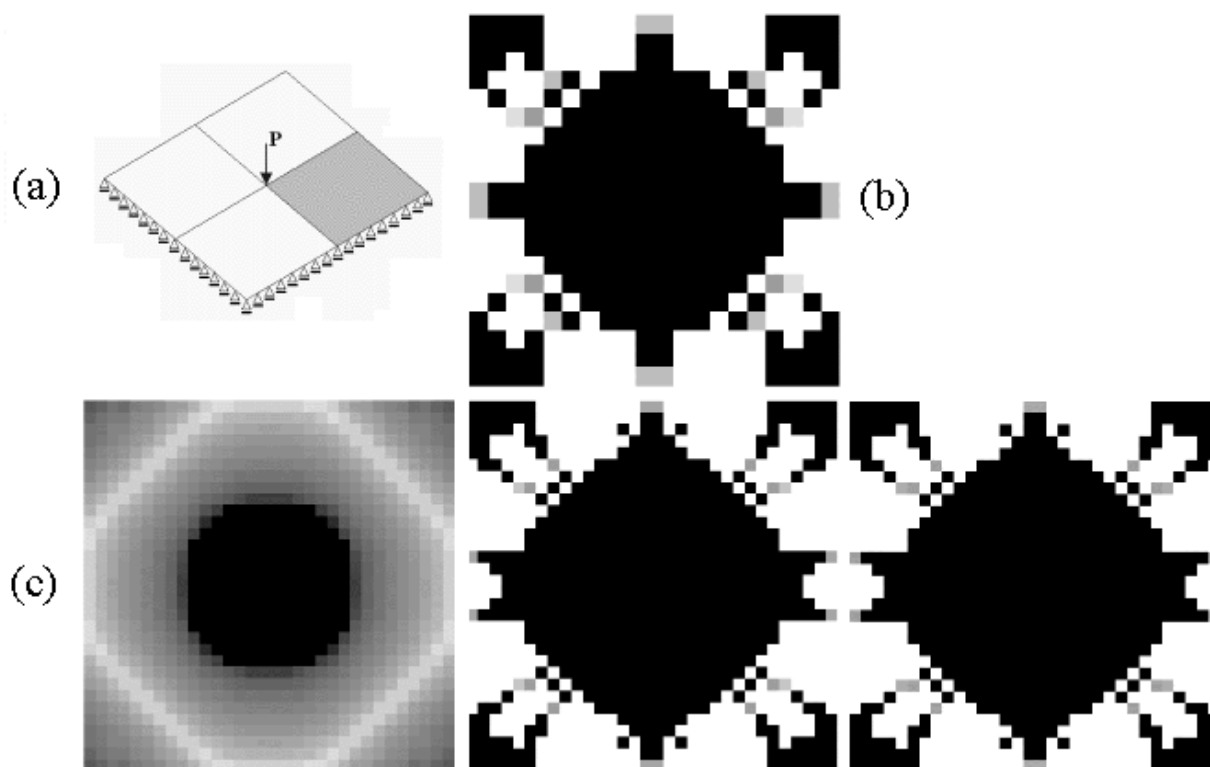


Figura 5.10. Resultados para placa apoiada nos lados, feita de material isotrópico, com carga no centro. Em (a), geometria do problema, em (b), resultado após 2 etapas do MC para uma malha 10x10, e em (c), malha 16x16, com topologia após final da 1ª etapa do MC, após final da 2ª etapa e após o final da 3ª etapa.

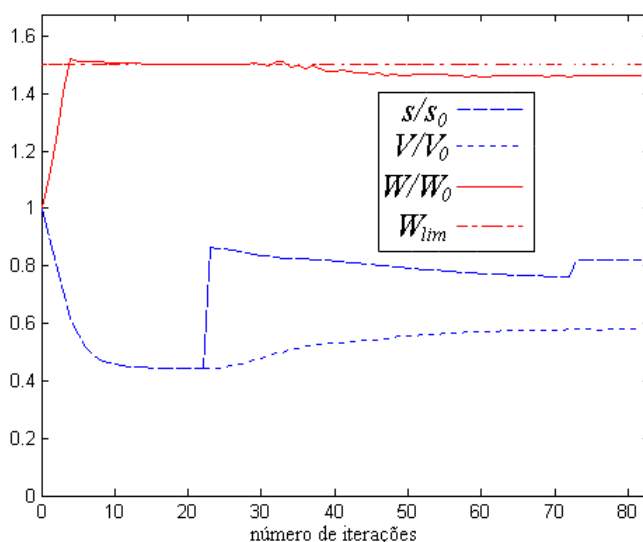


Figura 5.11. História das iterações para a otimização topológica de placa isotrópica discretizada numa malha 16x16. São observados as 3 etapas do MC.

Na Figura 5.12 são apresentados resultados para a otimização de uma casca esférica com diferentes tamanhos de malhas, para uma carga aplicada no centro e apoio simples nas pontas. A estrutura é feita de apenas uma lâmina de Gr-Ep, alinhada na horizontal e não foi aplicado o nível de minimização da flexibilidade. Considerou-se um flexibilidade limite de  $1,5W_0$ . A

topologia da estrutura não apresentou diferenças, e mesmo o volume final variou menos de 1,5% entre os três modelos. Mesmo os elementos que ficaram com densidade intermediária são bem poucos, e não criam dificuldade para a interpretação da topologia.

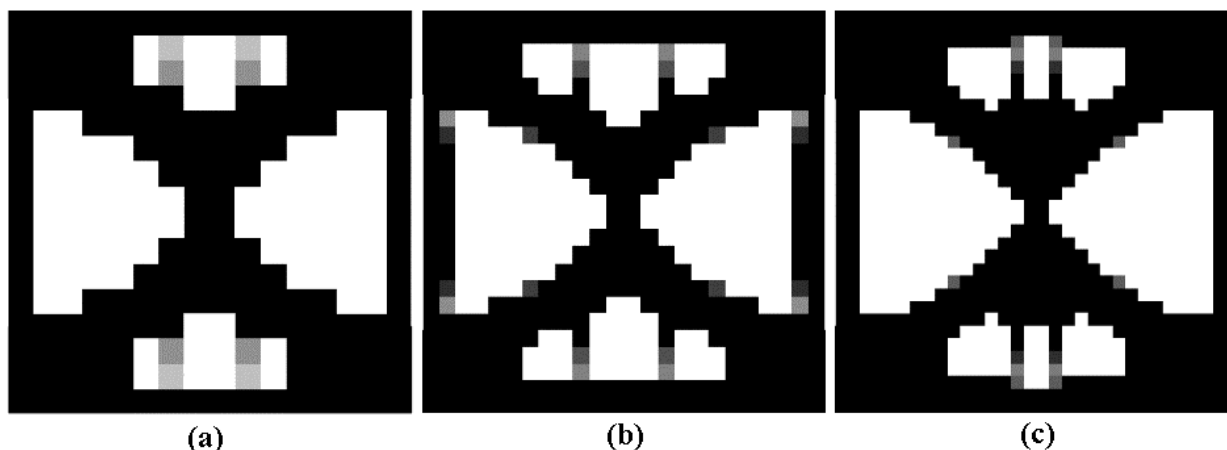


Figura 5.12. Influência do refino da malha sobre a solução final. Em (a) malha 08x08 em 1/4 do domínio (com  $V_f/V_0 = 0,6321$ ), em (b) malha 12x12 ( $V_f/V_0 = 0,6220$ ), e em (c) malha 16x16 ( $V_f/V_0 = 0,6178$ ). O material é ortotrópico e a direção principal do material está na horizontal. Geometria e c.c.: ver Figura 5.5.

#### 5.4. OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COM UMA LÂMINA

São discutidos aqui resultados obtidos para a otimização da orientação e topológica de estruturas feitas de apenas uma lâmina de material ortotrópico. Como visto anteriormente para o caso de elasticidade plana, o primeiro nível de otimização, compreendendo a minimização da flexibilidade, permite que a redução de volume no segundo nível seja mais eficaz, como se vê a seguir.

Na Figura 5.13 é mostrada a topologia obtida na análise de uma placa plana feita de uma lâmina de Gr-Ep, com espessura de 0,01m (ou 0,5% da largura da placa). A flexibilidade limite determinada foi de 1,5 vezes a flexibilidade inicial ( $W_0 = 488,473$  N.m) e o volume final obtido foi de 25,5% do volume inicial, para duas etapas do MC na parte da otimização topológica ( $p = 1$  e  $p = 1/8$ ), como pode ser visto no gráfico da Figura 5.14. Ao otimizar um material ortotrópico, conseguiu-se baixar a flexibilidade da estrutura até um valor de 86,156 N.m ao final do primeiro nível de otimização (ou menos de 20% do valor inicial). A restrição imposta sobre a flexibilidade foi de  $1,5W_0$ , o que quer dizer que no segundo nível a flexibilidade da estrutura deveria aumentar mais do que sete vezes e meia (ou seja, igual a  $1,5W_0 / 0,2W_0$ ). A otimização topológica tenta então retirar muito material da estrutura tentando cumprir a restrição, chegando a um ponto limite em que a retirada de mais material deixará a estrutura hipo-estática. Densidades intermediárias acabam sendo necessárias para manter ainda alguma estabilidade na

estrutura. Tentando resolver isto, o problema foi rodado novamente com a aplicação do parâmetro de penalização  $\alpha = 0,3$  na segunda etapa do MC, juntamente com  $p = 1/8$ . A topologia final, entretanto, foi muito semelhante ao caso com  $\alpha = 0$ .

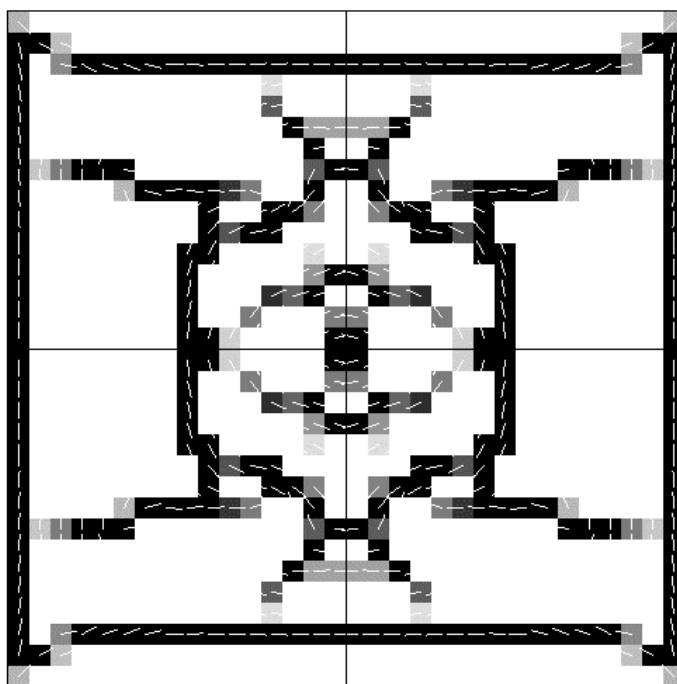


Figura 5.13. Orientação e topologia obtida para o caso de uma placa feita de uma única lâmina de material ortotrópico (Gr-Ep), com espessura de 0,01m, com  $W_{lim} = 1,5W_0$  e  $V_f = 0,255V_0$ . Malha 16x16 no quadrante.

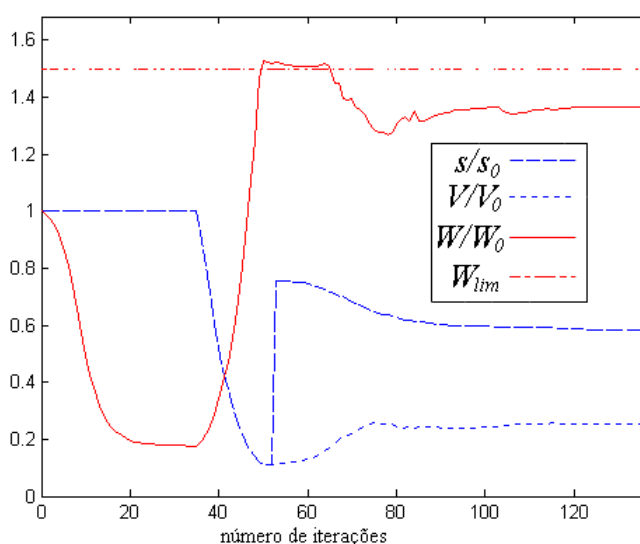


Figura 5.14. Gráfico da história das iterações do caso apresentado na Figura 5.13.

Uma conclusão que se tira disso é que, ao se otimizar a orientação, é recomendável verificar o quanto a flexibilidade da estrutura irá diminuir antes de determinar a flexibilidade limite para a restrição da otimização topológica. No caso de um projeto real, em que se deseja obter determinado valor de flexibilidade na estrutura final, é necessário que o projetista utilize de sua experiência para balancear a orientação final e a retirada de material da estrutura. Seria

possível também aplicar uma restrição de flexibilidade sobre a otimização da orientação por SLP. Ou seja, se determina que a flexibilidade a ser alcançada deve ser igual a um certo valor, inserindo uma restrição de igualdade no problema (3.1), que assumiria a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{\theta} \quad & W(\theta) \\ \text{s. a} \quad & W(\theta) - W_{\min} = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $W_{\min}$  é a flexibilidade mínima desejada para a estrutura, menor do que a inicial. Isso permitiria controlar a diferença entre a flexibilidade ao final do primeiro nível de otimização e a flexibilidade no final de todo o processo, dada por  $W_{\lim} - W_{\min}$ .

Mantendo, entretanto, a formulação atual, sem restrição para a otimização da orientação, mas determinando uma flexibilidade limite menor para a estrutura final, obteve-se uma topologia mais limpa, com poucos elementos com densidade intermediária, como pode ser visto na Figura 5.15. Neste caso, utilizou-se uma flexibilidade limite de apenas 0,4 vezes a flexibilidade inicial, chegando a um equivalente a 65,3 % do volume inicial. A orientação de cada elemento é a mesma do caso anterior, pois o nível de otimização da orientação se mantém inalterado.

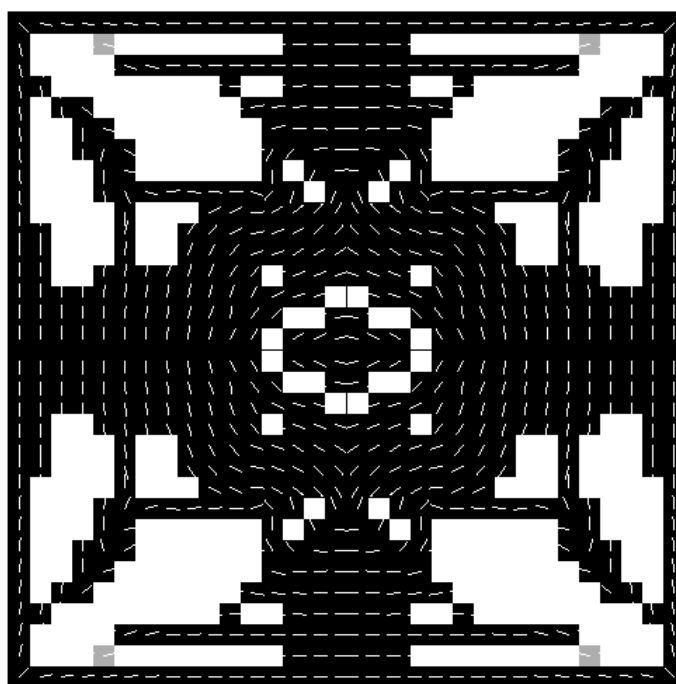
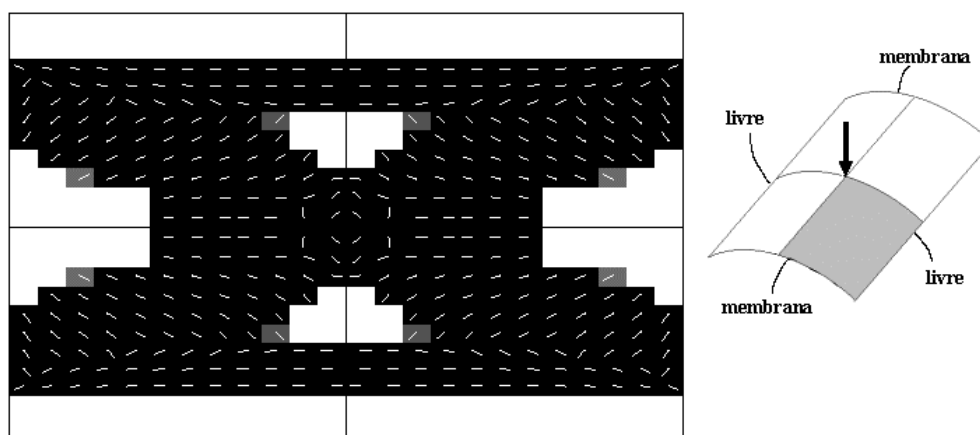


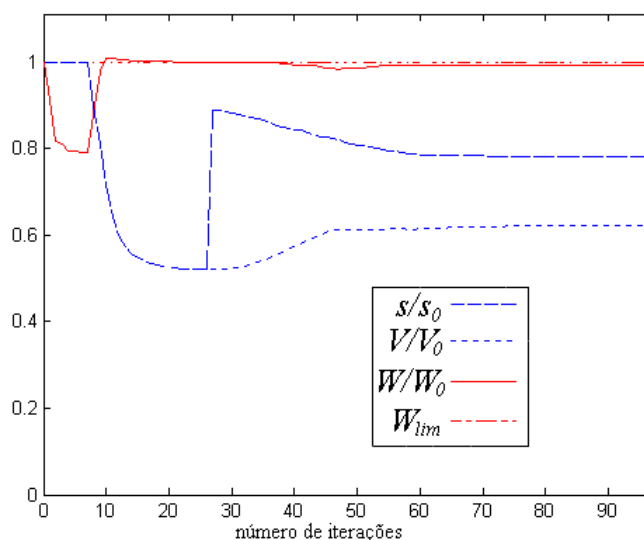
Figura 5.15. Resultado para o mesmo problema da Figura 5.13, mas com  $W_{\lim} = 0,4 W_0$ .

Na Figura 5.16 está a solução final obtida para o caso de um telhado feito com uma única lâmina de material ortotrópico (Gr-Ep), carga única no centro e apoio do tipo membrana nas bordas curvas. Aplicou-se a otimização da orientação através da DPT-SLP e na otimização topológica foram rodados duas etapas do MC, terminando com  $p = 1/8$  e  $\alpha = 0$ , com o gráfico sendo mostrado na Figura 5.17. O volume final obtido foi de 62,1% do volume inicial, utilizando

como restrição uma flexibilidade limite igual à flexibilidade inicial. Neste caso pode-se verificar que, como não houve diminuição excessiva da flexibilidade durante o processo de otimização da orientação, o algoritmo não precisou tirar material demais da estrutura, praticamente não gerando áreas com densidades intermediárias. Além disso, a flexibilidade final resultou muito próxima da flexibilidade limite. Isso resulta em uma topologia bastante “limpa”, com furos bem definidos na estrutura.

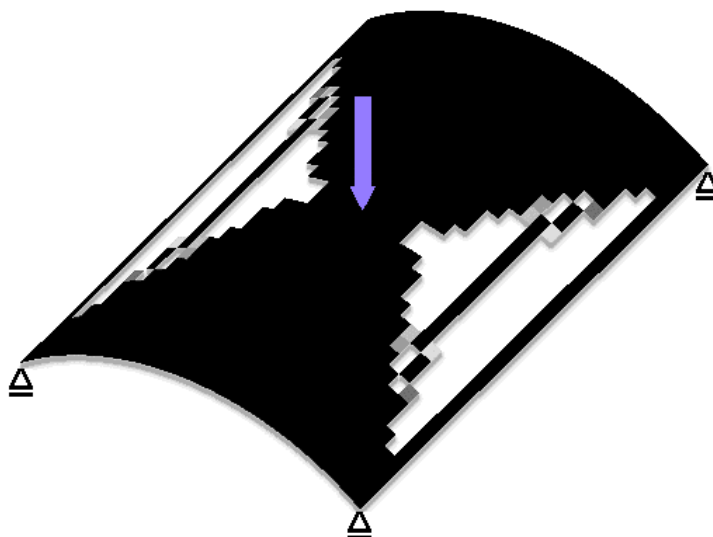


**Figura 5.16.** Topologia e orientação final para caso com apenas uma camada de Gr-Ep, orientada originalmente em direção paralela ao lado curvo, e otimização da orientação apenas por DPT. À direita, geometria e c.c.



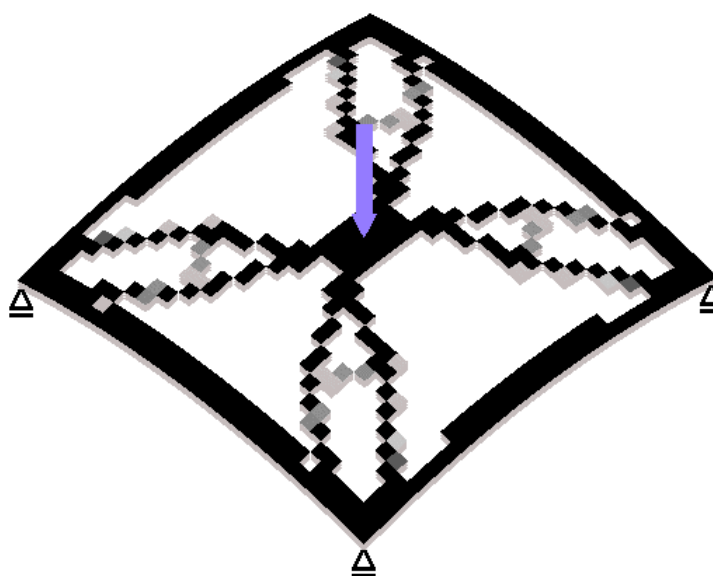
**Figura 5.17.** História das iterações para o caso da Figura 5.16.

Ao rodar um problema de telhado apoiado apenas nas pontas, também se obteve bons resultados em relação à obtenção de densidades intermediárias e ao aparecimento de checkerboards. Para a solução apresentada na Figura 5.18 otimizou-se a orientação através de DPT-SLP. A flexibilidade limite determinada foi igual à flexibilidade inicial, e na segunda etapa do MC utilizou-se  $p = 1/8$  e  $\alpha = 0,3$ . Com isso tudo, o volume final obtido foi de 76,6% do volume inicial.



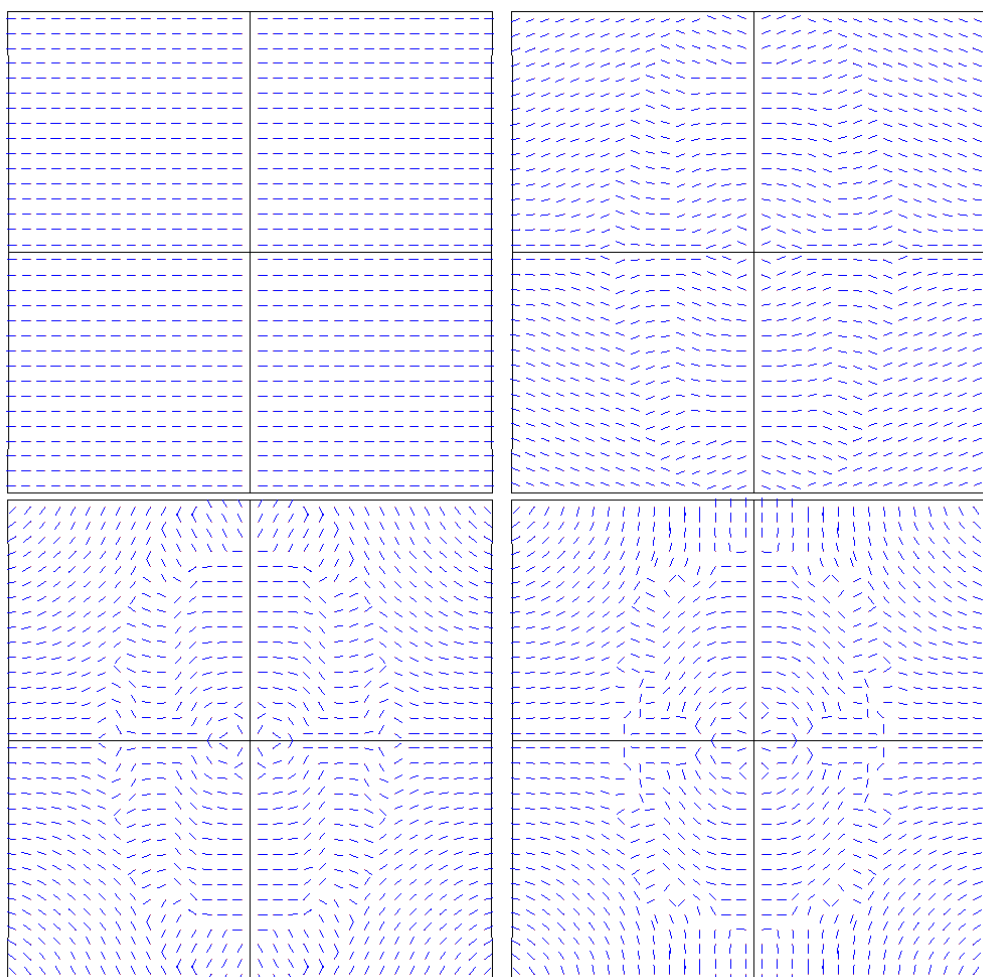
**Figura 5.18.** Topologia interpretada para uma casca apoiada nas pontas e com carga central.

Na Figura 5.19 está o resultado da otimização topológica e na Figura 5.20 é apresentada a orientação em diversas iterações para uma casca esférica feita de uma só lâmina de material ortotrópico. Na otimização da orientação, foi utilizada apenas SLP, e na otimização topológica, duas etapas do MC, com  $p = 1$  e  $p = 1/8$ . O limite de flexibilidade escolhido foi o próprio valor da flexibilidade inicial da estrutura, reduzindo o volume da estrutura a 32,05% do valor inicial. Também aqui observou-se a influência da orientação inicial da lâmina em relação à resposta final, pois o resultado da orientação não é simétrico como seria de se esperar. Há também influência do problema de função objetivo com uma área plana próximo ao ótimo na simetria da solução da otimização topológica.



**Figura 5.19.** Topologia interpretada para o problema de uma casca feita de apenas uma lâmina de material ortotrópico.





**Figura 5.20. Resultado da otimização por SLP da orientação em um telhado esférico, referente à Figura 5.19. Acima à esquerda a orientação inicial, acima à direita a orientação após 10 iterações, abaixo à esquerda após 20 iterações e abaixo à direita após a convergência na iteração 30. Vista superior da malha com 16x16 elementos no quadrante.**

A solução de um problema semelhante ao testado acima é mostrado na Figura 5.21. A orientação inicial da lâmina, entretanto, era  $45^\circ$ , e determinou-se uma flexibilidade limite menor, de  $0,4 W_0$ . O volume final resultou em 75,67% do volume inicial, tendo sido utilizadas três etapas no MC:  $p = 1$  e  $\alpha = 0$ ,  $p = 1/8$  e  $\alpha = 0,3$  e finalmente  $p = 1/12$  e  $\alpha = 0,5$ . Essas modificações implicaram em grandes diferenças nos resultados obtidos, tanto para otimização da orientação como topológica. Os novos parâmetros do MC não interferem na orientação, e portanto a diferença aí encontrada se deve unicamente à orientação inicial da lâmina. A orientação resultante, entretanto, influencia no resultado da topologia da lâmina. Mesmo com o uso de mais uma etapa no MC ( ao invés de apenas duas etapas, com  $p = 1$  e  $p = 1/8$ ), não foram eliminadas todas as densidades intermediárias. As que restaram, entretanto, são de valor bastante baixo, próximo ao mínimo, e poderiam ser retiradas da estrutura em uma etapa de interpretação da topologia. Na Figura 5.22 é apresentada a topologia em 3D para o mesmo problema.

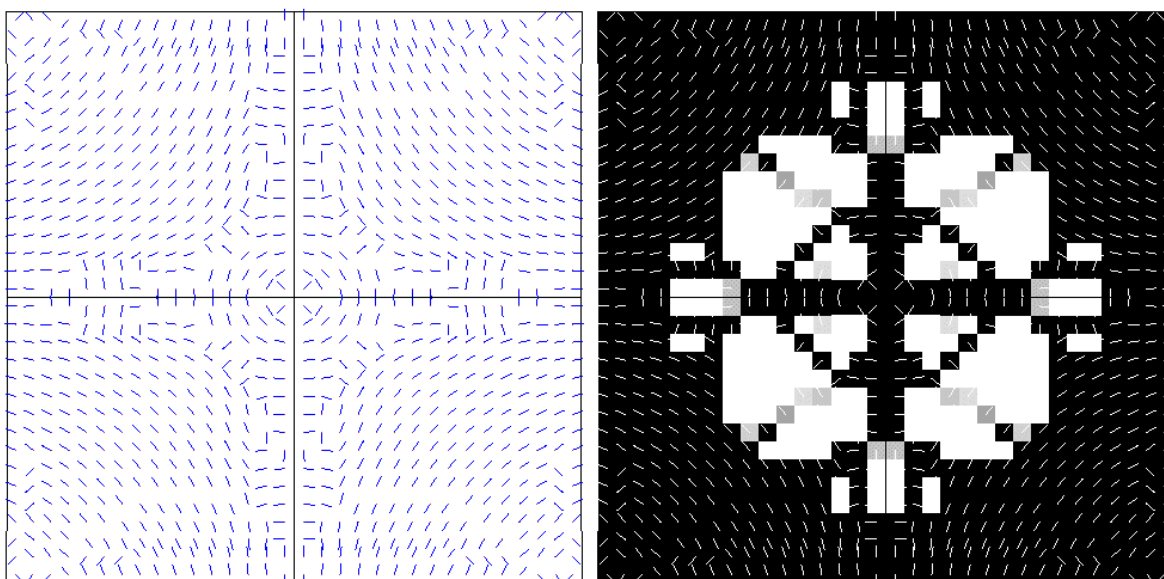


Figura 5.21. À esquerda, apenas orientação final e, à direita, topologia e orientação finais sobrepostas, para o caso de uma casca feita de uma lâmina material ortotrópico, com orientação inicial da camada a  $45^\circ$  no quadrante e  $W_{lim} = 0,4W_0$ .

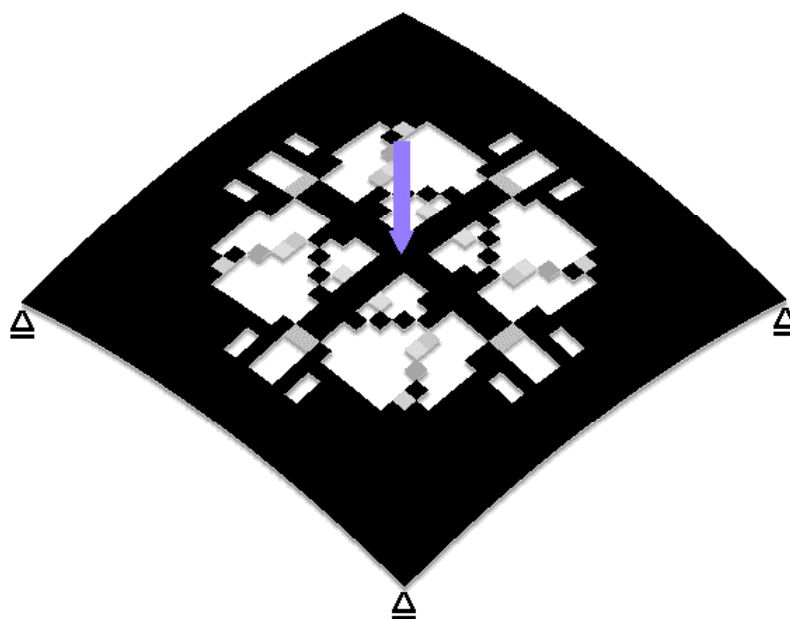
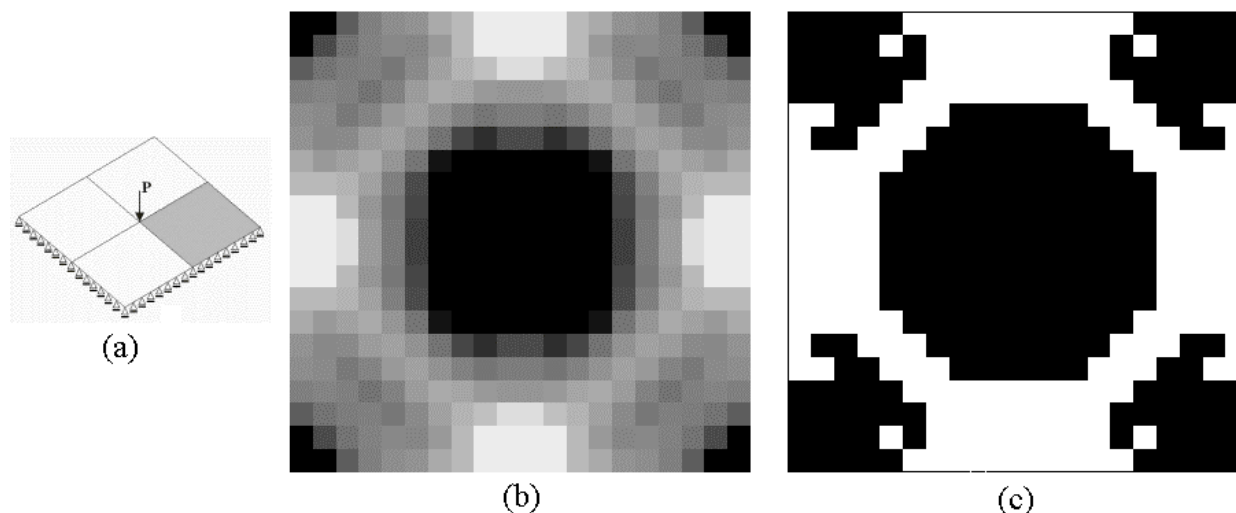


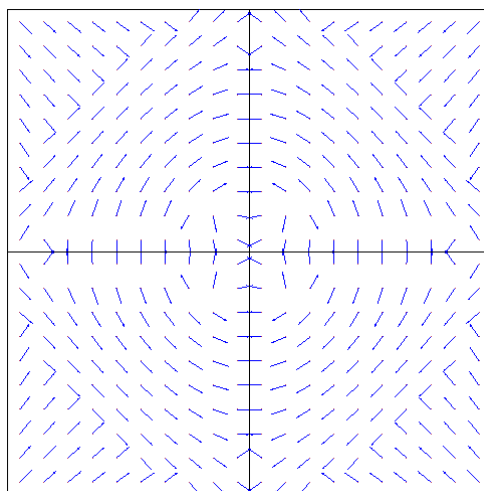
Figura 5.22. Topologia interpretada em 3D do problema da Figura 5.21.

## 5.5. OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COM VÁRIAS LÂMINAS

Aplicando as estratégias implementadas à placas com mais de uma lâmina, pode-se obter resultados equivalentes à topologia de lâminas que podem ser encaradas como reforçadores. Ou seja, se aplica a otimização apenas às camadas externas, não se preocupando com as camadas internas. Na Figura 5.23 está a solução obtida na otimização da lâmina superior de uma placa apoiada no quatro lados e na Figura 5.24 está a solução para a orientação.



**Figura 5.23.** Topologia obtida para a otimização da lâmina superior de uma placa feita de duas lâminas de material ortotrópico. Em (a) geometria e condições de contorno, em (b) solução após a primeira etapa do MC, com densidades intermediárias, e em (c) a solução final.

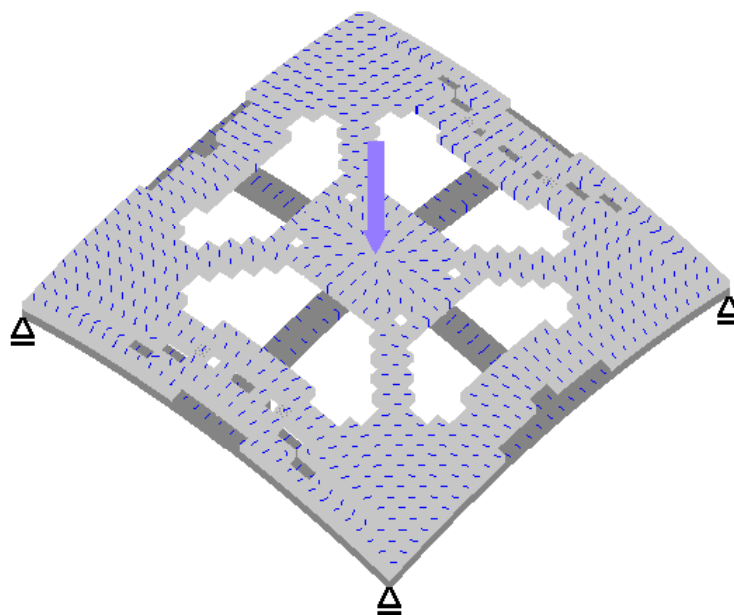


**Figura 5.24.** Orientação ótima obtida para o problema da Figura 5.23.

A estrutura é feita de duas lâminas de GI-Ep, alinhadas inicialmente a  $45^\circ$  no quadrante, com espessura de 3 mm cada uma, sendo que o lado da placa mede 2 m. Nesse tipo de problema, o volume é calculado apenas nas lâminas otimizadas, o que resultou num volume final dessa lâmina de 55,05% do volume inicial, mantendo a flexibilidade da estrutura igual. A estratégia aplicada foi de DPT-SLP para a otimização da orientação e no MC utilizou-se  $p = 1$  na primeira etapa e  $p = 1/8$ , com  $\alpha = 0,3$  na segunda etapa. Verificando a solução obtida ao final da primeira etapa do MC, ou seja, obtida com uma formulação convexa, a topologia da estrutura é simétrica em relação ao centro da placa. Mesmo considerando que a orientação da lâmina inferior é igualmente simétrica, isso demonstra a capacidade de solução do SLP. A solução final, entretanto, não apresenta total simetria, resultado da convexidade do problema penalizado.

Em relação à orientação, na Figura 5.24, observa-se também simetria em relação ao centro da placa. Da mesma maneira que as soluções apresentadas na Figura 5.9, há influência da orientação da lâmina inferior, que não foi otimizada. Se esta lâmina tivesse uma orientação diferente, o resultado da orientação da lâmina superior seria diferente.

Na Figura 5.25 está representado o resultado um caso de otimização de um telhado esférico com lâminas de material ortotrópico, com a lâmina inferior alinhada perpendicularmente à lâmina superior, sendo ambas as lâminas feitas do mesmo material (Gr-Ep). Para diferenciar bem uma lâmina da outra, cada uma está apresentada em um tom diferente de cinza, e todos os elementos acima da densidade mínima foram considerados. Isso não representa grande erro, pois como pode ser visto na Figura 5.26, há pouquíssimos elementos com densidade intermediária. Neste caso otimizou-se a orientação e topologia das duas lâminas. Para a otimização da orientação utilizou-se apenas o método da direção de tensão principal, e para a otimização topológica a flexibilidade limite estabelecida foi de 50% da flexibilidade inicial, com duas etapas MC:  $p = 1$  e  $p = 1/8$ . O volume final obtido foi de 55,13% de  $V_0$ .



**Figura 5.25.: Topologia interpretada de um telhado esférico (ver Figura 5.5), com duas lâminas, com a otimização da orientação e da topologia de ambas. A volume final é 55,15% do volume inicial, para metade da flexibilidade inicial.**

A construção de tal estrutura, entretanto, não é tarefa trivial, pois determinadas áreas da camada superior não estarão “apoiadas” sobre áreas da lâmina inferior. A construção de um laminado assim exigiria, portanto, diversas etapas de laminação. Esse é um exemplo claro da aplicação de otimização a todas as lâminas de determinada casca laminada, aonde problemas de aparecimento de “furos” entre lâminas pode vir a aparecer.

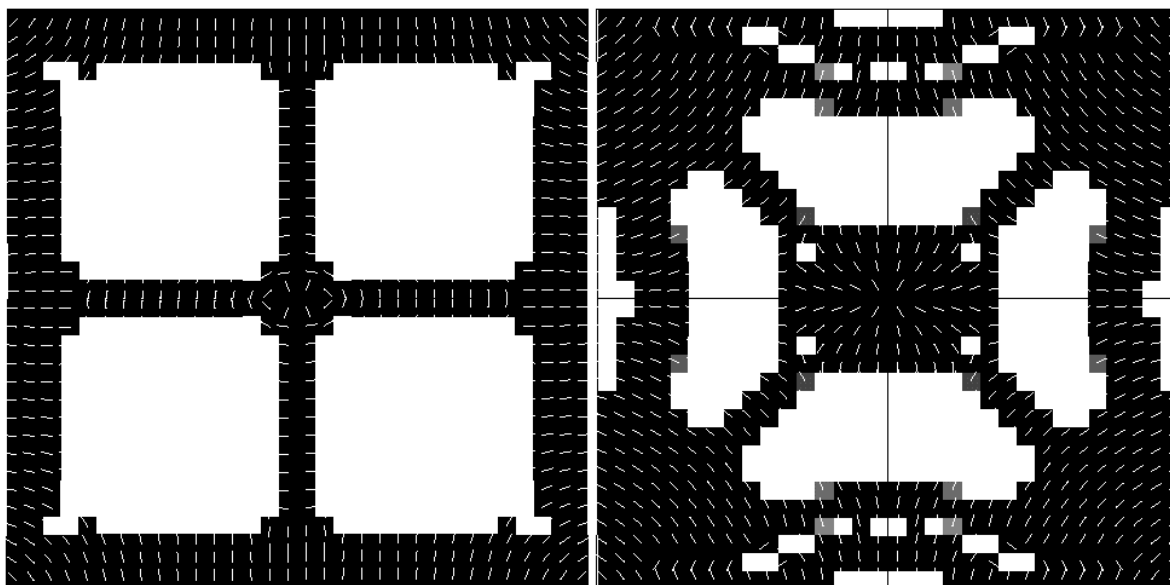


Figura 5.26. Topologia e orientação de cada lâmina da Figura 5.25. Aqui se verifica que a quantidade de elementos com densidade intermediária é muito pequena, mesmo penalizando apenas com  $\alpha = 0$  e  $p = 1/8$ .

Na Figura 5.27 apresenta-se a solução para um problema com a mesma estrutura otimizada da Figura 5.25, mas com a otimização apenas da lâmina superior. O problema foi rodado considerando uma flexibilidade limite de  $0,8 W_0$ . Uma vez que se está otimizando apenas uma camada, após a otimização da orientação a flexibilidade caiu para 56,77% da inicial. Para que o processo de otimização topológica tenha início é preciso que se estabeleça uma  $W_{lim}$  acima desse valor. Já valores muito elevados de  $W_{lim}$  fariam com que a lâmina desaparecesse por completo, pois o algoritmo iria retirar todo o material da lâmina de modo a tentar alcançar um alto limite de flexibilidade.

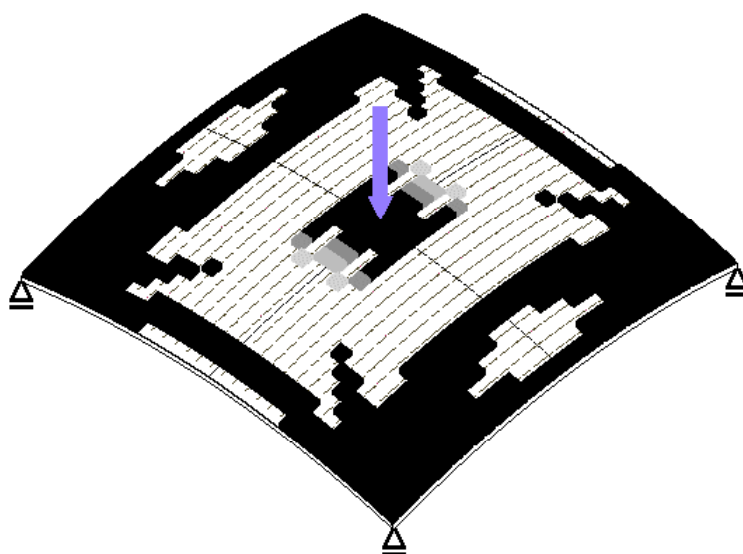
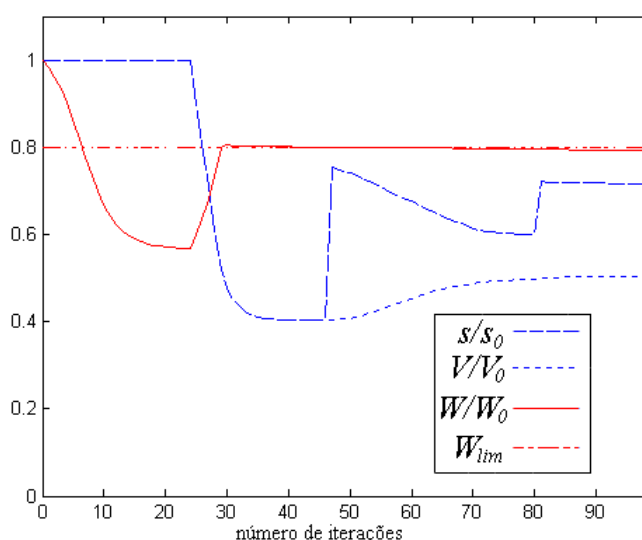


Figura 5.27. Topologia interpretada de um telhado esférico com duas lâminas, com a otimização apenas da lâmina superior.

Na Figura 5.28 está apresentada a história das iterações para esse problema, e pode ser observado o comportamento da função objetivo da minimização do volume em cada etapa do MC, com  $p = 1$ ,  $p = 1/4$  e  $p = 1/8$ . O valor da função objetivo varia bastante entre um nível e outro, mas a influência sobre o volume é pequeno no terceiro nível, o que mostra que a penalização busca modificar apenas as densidades intermediárias, que neste ponto do processo já estão próximas dos limites inferiores ou superiores. Assim, o volume final da lâmina otimizada foi reduzido para 50,36%. Mais uma vez pode-se notar a influência da camada inferior, não otimizada na topologia da camada superior, que procura se alinhar com essa direção. Este tipo de estrutura é muito mais fácil de construir, pois a lâmina superior estará sempre apoiada sobre a lâmina inferior.

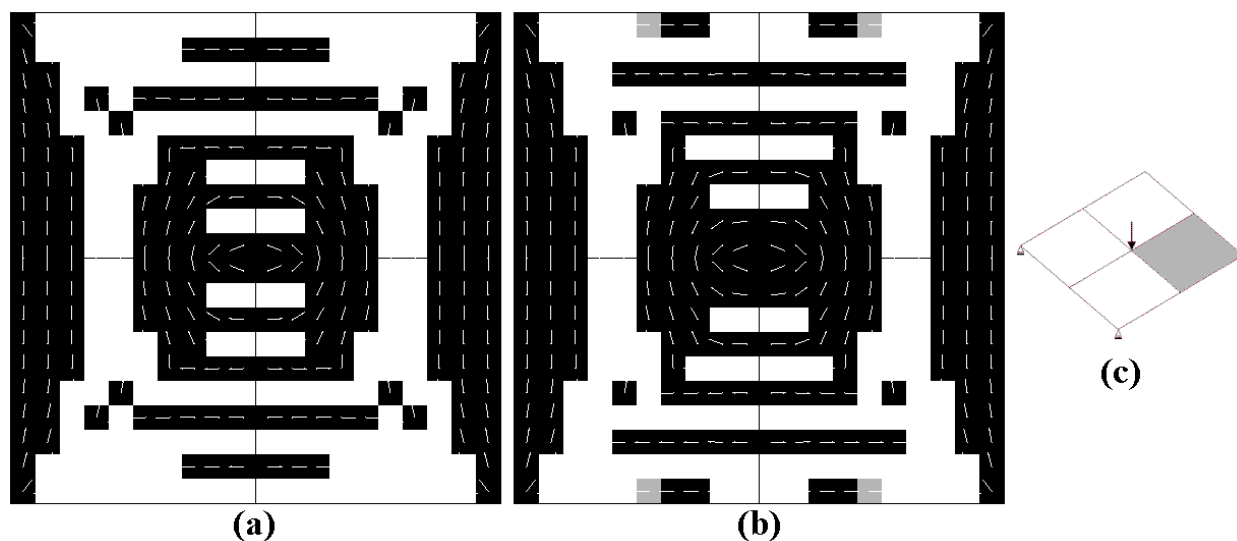


**Figura 5.28. História de iterações para a otimização da lâmina superior de uma casca feita de duas lâminas (Figura 5.27). As três etapas do MC estão bem definidas.**

Na Figura 5.29 se apresenta a solução obtida para a orientação e topologia de uma placa apoiada nas quatro pontas, feita de quatro lâminas de Gr-Ep, com espessuras 0,25mm, 0,35mm, 0,35mm e 0,25mm, respectivamente, e orientações alinhadas com  $x_1$  (ou com a borda horizontal, na figura). Foram otimizadas apenas as lâminas externas, usando DPT-SLP na otimização da orientação e duas etapas no MC ( $p = 1/8$  e  $\alpha = 0,3$  na 2ª etapa). A flexibilidade limite determinada foi de apenas  $0,3 W_0$ .

O volume foi reduzido a 50,6% do volume inicial das lâminas otimizadas. A redução de volume foi bastante grande, apesar do pequeno fator utilizado para limitar a flexibilidade. Isso porque a otimização da orientação das lâminas externas levou a uma grande diminuição da flexibilidade total da estrutura, chegando a menos de 20 % de  $W_0$ . Isso é de se esperar, pois no caso de flexão de placas, quanto mais longe a lâmina estiver da superfície média da placa, maior

será sua contribuição para a rigidez da estrutura. A otimização dessas duas camadas já se mostrou bastante eficiente tanto na modificação da flexibilidade quanto no volume da estrutura.



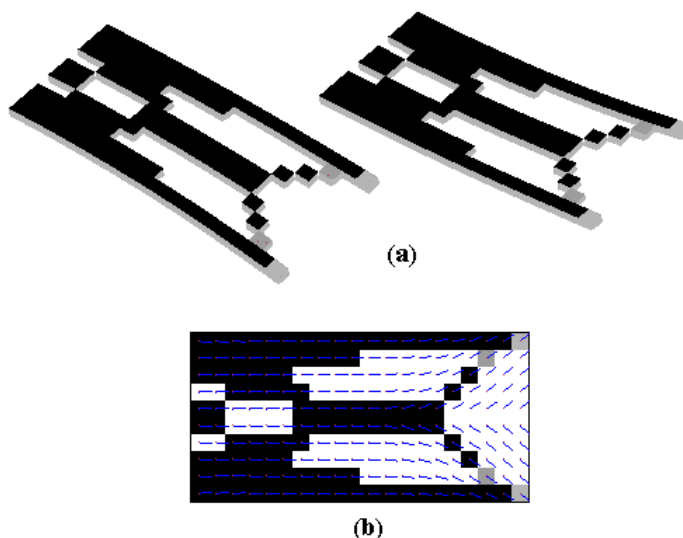
**Figura 5.29. Orientação e topologia finais sobrepostas para (a) a lâmina inferior e (b) a lâmina superior de uma placa laminada com 4 camadas. Em (c), geometria e c.c. As 2 lâminas intermediárias estão orientadas paralelamente à borda horizontal.**

## 5.6. CASOS DE MÚLTIPLOS CARREGAMENTOS

Aqui são apresentados alguns problemas rodados com aplicação de mais de um caso de carregamento. Nos problemas abaixo, são apenas dois casos diferentes de cargas concentradas, mas isso é suficiente para validar o método, tanto para a otimização da orientação, em que se aplica apenas SLP, como para a otimização topológica. Neste tipo de problema, a flexibilidade limite é determinada sempre em função da maior flexibilidade inicial. Isso não necessariamente quer dizer a maior força aplicada, pois dependendo da geometria da estrutura, as deflexões podem ser maiores para cargas com relativamente pequeno módulo. Isso fica bastante evidente no caso de vigas em balanço, por exemplo, onde pequenas cargas na ponta causam maiores deflexões que cargas próximas ao engaste.

Para o caso de uma placa engastada com forças iguais mas em direções contrárias aplicadas nas pontas (ver Figura 5.3), a solução está apresentada na Figura 5.30. O volume foi reduzido a 53% do inicial, considerando flexibilidade limite de  $2W_0$ . A orientação foi otimizada usando SLP e foram usadas duas etapas no MC, com  $p = 1/8$  e  $\alpha = 0,3$  na segunda etapa. Como a estrutura é simétrica e as forças aplicadas são de igual valor, a flexibilidade é sempre igual para ambos os casos de carregamento, e a solução final reflete essa simetria, tanto na orientação quanto na topologia. Não se verificaram problemas de checkerboard, e os elementos com

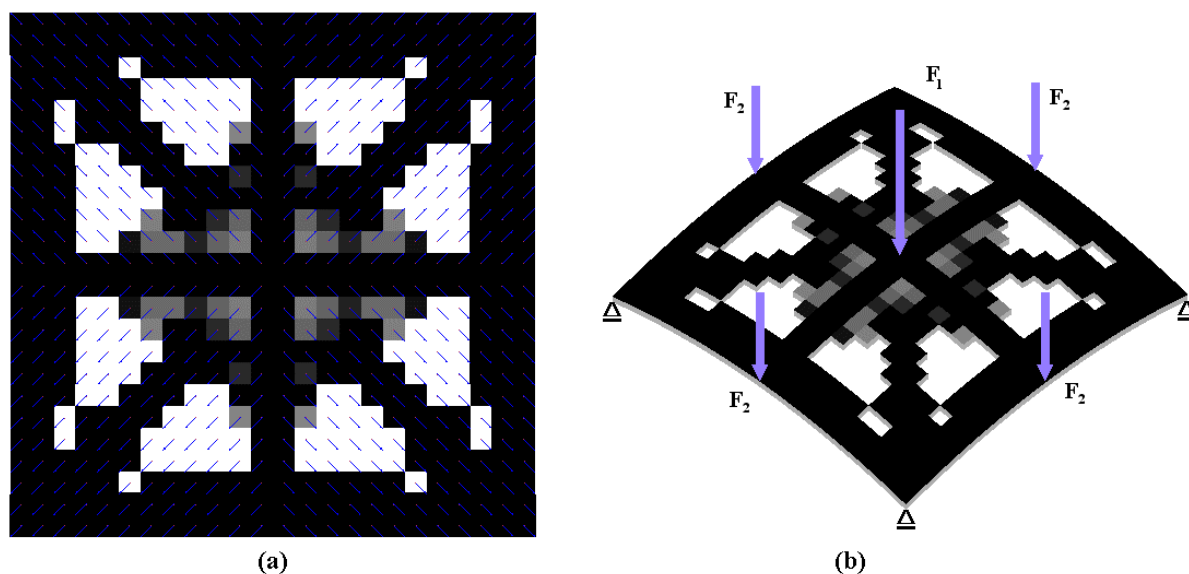
densidade intermediária são poucos. Mais uma vez, é bom frisar que a topologia obtida deve receber um correto tratamento de suavização de contorno para que possibilite sua construção.



**Figura 5.30.** Solução do problema da placa engastada para problema com dois casos de cargas iguais nas pontas. Em (a) a representação em 3D da placa deformada sob cada um dos carregamentos e em (b) as soluções para a orientação e para a topologia sobrepostas.

O método foi aplicado também a problemas de casca esférica, com uma ou mais lâminas. Para o caso de apenas uma lâmina, feita de Gr-Ep, a solução aparece na figura Figura 5.31. Nesse caso a orientação da lâmina era de  $45^\circ$  com a horizontal, e aplicou-se apenas otimização topológica à estrutura, determinando-se uma flexibilidade limite de  $1,5 W_0$ , o volume reduziu-se a  $75,77\%$  do volume inicial. Cada força ( $F_2$ ) na borda vale  $0,7 F_1$ , mas o maior valor de flexibilidade se deve à força no centro. E é a flexibilidade devido a essa força que serve então de principal restrição ao projeto, pois ela chega antes ao valor limite pré-determinado.





**Figura 5.31. Solução para a otimização topológica de uma casca submetida a dois casos de carregamento. Em (a) vista superior mostrando a orientação ( $45^\circ$  no quadrante) e em (b) representação em 3D indicando a posição das forças concentradas ( $F_1$  é maior do que  $F_2$ ).**

Também é apresentado aqui o resultado obtido para um problema semelhante a este acima, incluindo dimensões e forças aplicadas, mas com três lâminas de Gr-Ep, sendo otimizadas a lâmina inferior e a superior, como pode ser visto na Figura 5.32. Como no nível de otimização da orientação a flexibilidade associada à força aplicada no centro chegou a cerca de 30 % do seu valor inicial, determinou-se uma flexibilidade limite de 40% de  $W_0$ . Isso resultou em um volume igual a 48% do volume inicial para as lâminas otimizadas, com  $p = 1/8$  e  $\alpha = 0,3$  na segunda etapa do MC. A otimização topológica levou a que cada lâmina fosse responsável pela resistência a cada um dos carregamentos impostos, com a lâmina inferior reforçando a estrutura apenas nas bordas e com a lâmina superior reforçando a estrutura para suportar a força no centro.

É interessante observar na história das iterações, na Figura 5.33, o comportamento da flexibilidade associada a cada uma das forças aplicadas independentemente. No nível de otimização da orientação, o SLP faz com que ambas as flexibilidades diminuam sensivelmente. Essa etapa é bastante longa, como era de se esperar, pois o algoritmo precisa satisfazer a minimização de uma função que leva em contar dois casos bem diferentes de deslocamento da estrutura. No nível de otimização topológica, ambas as flexibilidades acabam atingindo o mesmo patamar. Isso ocorre aqui porque se determinou um valor pequeno para a flexibilidade limite. Em casos em que se determinam valores maiores, as menores flexibilidades atingem um patamar máximo do qual não conseguem ultrapassar. A restrição nesse nível fica em função de apenas um dos casos de carregamento, normalmente o associado à maior flexibilidade inicial.

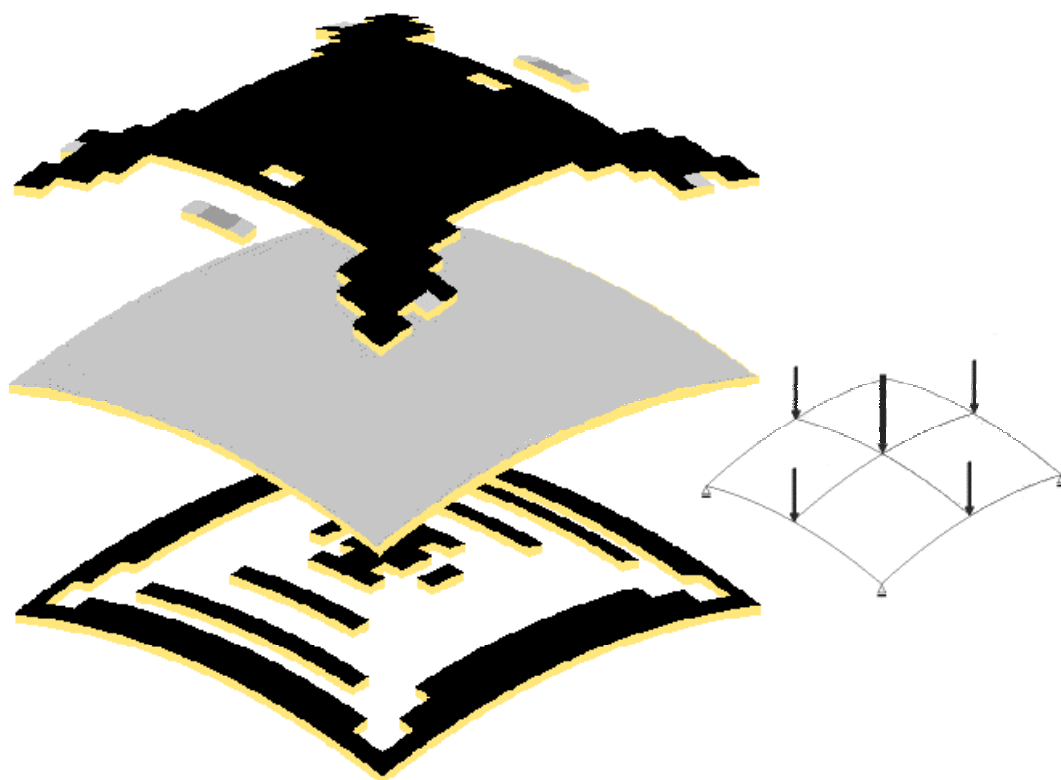


Figura 5.32. Representação explodida em 3D de uma casca com 3 lâminas de Gr-Ep, com otimização duas lâminas externas. À direita, geometria e c.c, mostrando os dois casos de carregamento, semelhantes aos da Figura 5.31.

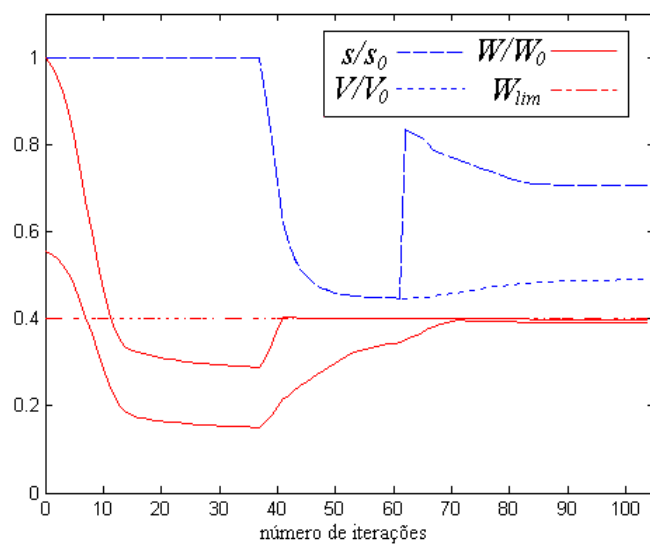


Figura 5.33. História das interações para o caso apresentado na Figura 5.32. Observar os gráficos para as flexibilidades associadas a cada um dos casos de carga.

## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 6.1. CONCLUSÕES

A determinação de estratégias alternativas para a otimização de cascas laminadas é o objetivo geral deste trabalho. Isso incluiu a discussão de diversos métodos já conhecidos na literatura, e a adaptação de alguns desses métodos para a montagem de uma estratégia que resolvesse problemas práticos. Buscou-se então implementar um processo em dois níveis, sendo o primeiro nível a otimização da orientação de cada lâmina de uma casca laminada e no segundo nível a otimização topológica de cada uma dessas lâminas, permitindo a solução de problemas com múltiplos casos de carregamento.

A seguir, são comentados as conclusões obtidas para os objetivos específicos listados na seção 1.1:

- a) a implementação de um algoritmo de elementos finitos para cálculo de cascas laminadas que possa ser usado em algoritmos de otimização estrutural foi feita. O elemento finito utilizado é um elemento clássico, que apresenta uma grande vantagem que é a facilidade para aplicar as derivadas analíticas na formulação da sua matriz de rigidez, sem a necessidade de cálculo por diferenças finitas, por exemplo. Como ele não apresenta complicados esquemas para evitar aparecimento de modos espúrios de energia ou travamento por cisalhamento, a tarefa de modificar a rotina de montagem da matriz de rigidez para o cálculo das derivadas em relação às variáveis de projeto se tornou bastante trivial. Para a solução dos problemas apresentados aqui, este elemento se mostrou bastante eficiente.
- b) para a otimização da orientação de cada lâmina de uma casca laminada, considerando múltiplos casos de carregamento, buscou-se a obtenção do ângulo de orientação da direção de maior módulo de elasticidade do material de cada lâmina (ou simplesmente chamado de direção da lâmina) de modo a obter a menor flexibilidade possível da estrutura associada aos carregamentos aplicados. Para isso foram testados métodos utilizando a direção de deformação principal (DDP), a direção de tensão principal (DPT) ou ainda a utilização de um método de Programação Linear Seqüencial (SLP). Descartou-se o uso da DDP apenas, devido ao forte acoplamento com a orientação original da lâmina, o que impedia ou retardava muito a

convergência da função objetivo. A utilização da DPT não se mostrou totalmente satisfatória, apesar de exigir relativamente poucas iterações para atingir a convergência, pois ainda se verificou um certo acoplamento entre a orientação anterior da lâmina e a atual e também por não permitir a inclusão de vários casos de carregamento. Escolheram-se então dois métodos para o nível de otimização topológica: uma combinação de DPT-SLP ou apenas SLP. No primeiro caso a primeira iteração é feita por DPT e depois se aplica SLP até atingir a convergência. Para rodar problemas com vários casos de carregamento, entretanto, deve-se aplicar apenas SLP.

- c) para a otimização topológica minimizou-se o volume de cada lâmina, usando como restrição a flexibilidade total da estrutura, para cada caso de carregamento independente. Utilizou-se apenas SLP nesse nível de otimização, penalizando a função objetivo. De modo a evitar áreas com densidades intermediárias na solução final, um Método de Continuação (MC) foi aplicado. Através desse método, o nível de otimização topológica pode ser dividido em duas ou mais etapas. Na primeira etapa resolve-se um problema de otimização convexo, que gera soluções com muitas áreas com densidade intermediária. Nas etapas seguintes modificam-se os parâmetros de penalização, tornando a formulação não-convexa, de modo a “encarecer” estas áreas de densidades intermediárias, e fazendo com que o algoritmo busque soluções contendo apenas áreas com densidade mínima ou máxima. Verificou-se que apenas duas etapas do MC são suficientes para a obtenção de uma solução ótima.
- d) uma estratégia de otimização em dois níveis foi implementada, onde o primeiro nível compreende a otimização da orientação e o segundo nível compreende a otimização topológica. A integração de ambos os níveis foi feita com eficácia, permitindo uma grande redução do volume da estrutura, sempre respeitando os limites de flexibilidade determinados como restrições de projeto. Cada nível de otimização é rodado apenas uma vez, pois não se verificou diminuição no volume ao rodar novamente o primeiro nível após a convergência do segundo nível.
- e) as estratégias implementadas foram testadas em casos de elasticidade plana, placas e cascas, com uma ou várias lâminas ortotrópicas, gerando resultados satisfatórios,

tanto em relação à redução de volume como à facilidade de construção das topologias e orientações obtidas. Estes testes permitiram também a discussão de alguns problemas surgidos da formulação e formas de contorná-los, como por exemplo no caso de determinação de uma flexibilidade limite ( $W_{lim}$ ) muito grande.

Utilizou-se o MATLAB para a implementação do MEF e dos métodos de otimização, principalmente devido às facilidades oferecidas por tal software. Entre elas, está a disponibilidade de rotinas para operações com matrizes (multiplicação, soma, inversão, etc.), rotinas como o fatoramento por Choleski (*chol*), ou então rotinas de otimização por programação linear (*lp*, *linprog*), o que poupa muito trabalho de solução de problemas montagem do código. O uso do MATLAB, entretanto, apresenta um ponto negativo muito grande que é a sua (relativa) lentidão para a solução dos problemas, tornando difícil a solução de casos com malhas muito refinadas. É preciso levar em conta, entretanto, que se buscava a implantação de uma nova estratégia de otimização. Após a comprovação da capacidade dessa estratégia, um passo seguinte pode ser a “tradução” do código para alguma linguagem compilada, o que já representaria um grande ganho em velocidade.

## 6.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como este trabalho apresenta uma estratégia nova para a otimização de cascas laminadas, muita coisa pode ser feita a partir disso. Neste primeiro momento, foi possível preocupar-se apenas com a montagem de um algoritmo funcional, e os passos seguintes devem levar à aplicação prática disso, estendendo a um maior número de problemas. Pode-se listar as sugestões da seguinte maneira:

- traduzir o código para uma linguagem compilada, de modo a aumentar a velocidade de processamento. Isso permitiria que se rodem casos com malhas mais refinadas, com maior número de camadas e com maior número de casos de carregamento.
- uma extensão natural desse trabalho, e muito necessária para o caso de cascas laminadas, é a introdução de restrições considerando critérios de falha, como o de Tsai-Hill. Pode-se dizer que esse passo é de fundamental importância para um uso mais prático dessa metodologia.
- aplicação a casos reais. Problemas de peso em estruturas aeronáuticas são muito comuns, e uma aplicação em pequenas estruturas é útil do ponto de vista prático.

- a inserção da otimização de malhas com diferentes tipos de laminação é necessária, pois estruturas apresentando áreas fabricadas com diferente número de lâminas e mesmo com tecidos diferentes são comuns.
- implementação da otimização da espessura de cada lâmina, trabalhando em um novo nível de otimização, por exemplo.
- a aplicação de algum método de suavização de contorno é interessante para a interpretação de resultados no caso de problemas reais.
- inclusão da não-linearidade, tanto geométrica quanto física. Este campo já está sendo bem estudado no caso de materiais compostos laminados, e a otimização desse estruturas com este comportamento será importante no futuro.
- inserção de outras funções objetivo, como a maximização de determinados frequências de vibração, ou então a minimização da flexibilidade com restrição de volume, o que pode ser acrescentado em futuros estudos.

Estas sugestões foram ordenadas de acordo com o que o autor acredita serem de maior importância para a aplicação na prática dos métodos desenvolvidos, e que motivaram a realização deste trabalho.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Agarwal, B.D., Broutman, L.J., “**Analysis and performance of fiber composites**”, Wiley, 1990.
- [2] Ahmad, S., Irons, B.M., Zienkiewics, O. C., “Analysis of thick and thin shells structures by curved finite elements”, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, 2, 419-451, 1970.
- [3] Ambrosio, L., Butazzo, G., “An optimal design problem with perimeter penalization”, **Calc. Var.**, 1, 55-69, 1993.
- [4] Ashton, J.E., Whitney, J.M., “**Theory of laminated plates**”, Technomic Publishing Co., Westport, 1970.
- [5] Atkin, R. J., Fox, N., “**Introduction to the theory of elasticity**”, Longman, New York, 1980.
- [6] Banichuk, N.V., “**Problems and methods of optimal structural design**”, New york, Plenum Press, 1983.
- [7] Bathe, K. J., “**Finite element procedures**”, Prentice-Hall, nglewood Cliffs, 1995.
- [8] Beckers, M., “**Optimisation de Structures en Variables Discrètes**”, Tese de Doutorado, Universite de Liege, Bélgica, 1997.
- [9] Beckers, M., “**Optimisation de structures en variables discrètes**”, Tese de Doutorado, Universite de Liege, Bélgica, 1997.
- [10] Bendsøe, M. P. e Kikuchi, N., “Generating Optimal Topologies in Structural Design Using Homogenization Method”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71, nº 2, pp. 197-224, 1988.
- [11] Bendsøe, M. P., “**Optmization of structural topology, shape and material**”, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 1995.
- [12] Bendsøe, M. P., Rodriguez, H. C., “Integrated topology and boundary shape optimization of 2-D solids”, **Comp. Meth. Appl. Mech Engng.**, vol. 87, pp. 15-34, 1991.
- [13] Bensoussan, A., Lions, J.L., Papanicolau, G., “**Asymptotic analysis for periodic structures**”, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [14] Bernoulli, J., “**Letter to Leibnitz on the beams of uniform strenght**”, 1687.
- [15] Callahan, K. J., Weeks, G. E., “Optimum design of composite laminates using genetic algorithm”, **Composite Engineering**, 2, 3, 149-160, 1992.

- [16] Callister, Jr., W.D., “**Materials science and engineering**”, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [17] Cardoso, E. L., “**Controle de complexidade na otimização topológica de estruturas contínuas**”, Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2000.
- [18] Cardoso, E. L., Fonseca, J. S. O., “**Intermediate density reduction and complexity control in the topology optimization**”, 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, São Paulo, Brazil 1999.
- [19] Cardoso, E. L., Fonseca, J. S. O., “**Mecânica dos sólidos III**”, apostila do curso, GMAP-UFRGS, 2000.
- [20] Cea, J., Gioan, A., Michel, J., “**Quelques resultat sur l’identification de domaines**”, *Calcolo* III/IV, 1973.
- [21] Cheng, G., “**Introduction to structural optimization: theory, methods and solution**”, Lecture Notes, Dalian University of Technology, 1992.
- [22] Cheng, G., Olhoff, N., “**An investigation concerning optimal design of solid elastic plates**”, *Int. J. Solids and Structures*, 16, 305-323, 1981.
- [23] Cheng, H.C., “**The optimal shape/topology design of structures for dynamic problems using a homogenization method**”, Tese de Doutorado, The University of Michigan, 1994.
- [24] Conceição António, C.A., Torres Marques, A., Soeiro, A.V., “**Optimization of laminated composite structures using a bilevel strategy**”, *Composite Structures*, 33, 193-200, 1995.
- [25] Dantzig, G., “**Linear programming and extensions**”, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
- [26] Dastin., S.J., “**Composites for aerospace applications**”, *Composite Materials: Testing and Design (Fifth Conference)*, ASTM STP 674, S.W. Tsai, Ed., American Society for Testing and Materials, 1979, 5-13.
- [27] Díaz, A. R., Sigmund, O., “**Checkerboard patterns in layout optimization**”, *Structural Optimization*, vol. 10, pp. 40-45, 1995.
- [28] Díaz, A.R., Bendsøe, M.P., “**Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method**”, *Structural Optimization*, 4, 17-22, 1992.
- [29] Díaz, A.R., Lipton, R.P., Soto, C.A., “**A new formulation of the problem of optimum reinforcement of Reissner-Mindlin plates**”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, 123, 121-139, 1995.
- [30] Dietz, A. G. H., “**Composite engineering laminates**”, MIT Press ,1969.



- [31] Duysinx, P., Bendsøe, M. P., “Topology optimization of continuum structures with local stress constraints”, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, vol. 43, pp. 1453-1478, 1998.
- [32] Fleury, C., “Structural weight optimization by dual methods of convex programming”, **Int. J. Num. Meth. Engng.**,14,1761-1783,1979.
- [33] Fleury, C., Braibant, V., “Structural optimization: a new dual method using mixed variables”, **Int. J. Num. Meth. Engng.**, vol. 23, pp. 409-428, 1986.
- [34] Fleury, C., Geradin, M., “Optimally criteria and mathematical programming in structural weight optimization”, **Computers and Structures**, 23, 409-428, 1977.
- [35] Fleury, C., Sander, G., “Relationships between optimally criteria and mathematical programming in structural optimization”, **Proc. Symp. Applications of computer Methods in Engnrng.**(Ed. C.Wellford Jr.), University if Southern California, 1, 507-520, 1977.
- [36] Fonseca, J. S. O., “**Design of microstructures of periodic composite materials**”, Tese de Doutorado, The University of Michigan, 1997.
- [37] Fox, R.L., “Constraint surface normals for structural synthesis techniques”, **AIAA Journal**, 3, 1516-1517, 1965.
- [38] Foye, R., “**Advanced design concepts for advanced composite air frames**”, Report, Vol I-II, Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFML-TR-68-91, 1968.
- [39] Galileu, G.L., “**Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno, à due nuevo scienze attenenti alla mecanica et i movimenti locali**”, Leida, 1638.
- [40] Gibiansky, L.V., Cherkaev, A.V., “**Microstructures of composites of external and exact estimates of provided energy density**”, Technical report, Ioffe Science and Technology Institute, Leningrado (em russo), 1988.
- [41] Girkmann, K., R. Beer, “Application of Eric Reissner’s refined plates theory to orthotropic plates”, **Osterr. Ingenieur-Archiv**, vol 12, 101-110, 1958.
- [42] Guilherme, C. E. M., “**Otimização Topológica de Treliças com Restrições de Flambagem e Flexibilidade**”, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2001.
- [43] Gürdal, Z., Haftka, R. T., Nagendra, S., “Genetic algorithm for the design of laminated composite panels”, **SAMPE Journal**, 30, 3, May/June, 29-35, 1994.
- [44] Haber, R. B., Bendsøe, M. P. e Jog, C., “A new approach to variable-topology shape design using a constraint on the perimeter”, **Structural Optimization**, vol. 11, pp. 1-12, 1996.

- [45] Haftka, R., Gürdal, Z., “**Elements of structural optimization**”, Kluwer Academic Publishers, 3ª edição, 1992.
- [46] Hassani, B., Hinton, E., “A review of homogenization and topology optimization, I – homogenization theory for media with periodic structure”, **Computers & Structures**, vol. 69, pp. 707-717, 1998a.
- [47] Hassani, B., Hinton, E., “A review of homogenization and topology optimization, II - analytical and numerical solution of homogenization equations”, **Computers & Structures**, vol. 69, pp. 719-738, 1998b.
- [48] Hassani, B., Hinton, E., “A review of homogenization and topology optimization, III - topology optimization using optimality criteria”, **Computers & Structures**, vol. 69, pp. 739-756, 1998c.
- [49] Hemp, W.S., “**Optimum structures**”, Clarendon Press, Oxford, 1973.
- [50] Hrabok, M.M., Hrudý, T.M., “A review and catalogue of plate bending finite elements”, **Computers & Structures**, 19, 3, 479–495, 1984.
- [51] Hsu, Y-L., Hsu, M-S. e Chen, C-T., “Interpreting results from topology optimization using density contours”, **Computers & Structures**, vol. 79, pp. 1049-1058, 2001.
- [52] Hughes, T. J., “**Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [53] Irons, B.M., “The semiloof shell element”, **Finite Elem. For Thin Shells and Curved Members**, 11, 197-222, 1976.
- [54] Jog, C. S., Haber, R. B., “Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, vol. 130, pp. 203-226, 1996.
- [55] Jog, C., Haber, R. B. e Bendsøe, M. P., “**Variable-topology shape optimization with a constraint on the perimeter**”, Proc. 20<sup>th</sup> ASME Design Automation Conference, Minneapolis, ASME Publication DE-Vol. 69-2, 261-272, 1994.
- [56] Jones, R.M., “**Mechanics of composite materials**”, Scripta Book Company, Washington, 1975.
- [57] Kam, T.Y, Lai, M.D., “Multilevel optimal design of composite plate structures”, **Comput. & Struct.**, 31, 197-202, 1989.
- [58] Kere, P., Koski J., “Multicriterion stacking sequence optimization of composite laminates for maximum failure margins”, **The 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO/3)**, Buffalo /Niagara Falls, 1999.

- [59] Khot, N.S., “Algorithms based on optimality criteria to design minimum weight structures”, **Engineering Optimization**, 5, 73-90, 1981.
- [60] Kirsch, U., “Optimal topologies of structures”, **Appl. Mech. Rev.**, vol. 42, n° 8, pp. 223-238, 1989.
- [61] Kohn, R. V., Strang, G., “Optimal design and relaxation of variational problems, I”, **Comm. On Pure and Appl. Math.**, vol. XXXIX, pp. 113-137, 1986.
- [62] Kohn, R. V., Strang, G., “Optimal design and relaxation of variational problems, II”, **Comm. On Pure and Appl. Math.**, vol. XXXIX, pp. 139-182, 1986b.
- [63] Kohn, R. V., Strang, G., “Optimal design and relaxation of variational problems, III”, **Comm. On Pure and Appl. Math.**, vol. XXXIX, pp. 353-377, 1986c.
- [64] Kohn, R. V., Strang, G., “Optimal design for torsional rigidity”, In: Atluri, S. N., Gallagher, R. H. e Zienkiewicz, O. C. (eds.) “**Hybrid and Mixed Finite Element Methods**”, pp. 281-288. Wiley & Sons, Chichester, 1983.
- [65] Krog, L.A., Olhoff, N., “Topology and reinforcement layout optimization of disk, plate and shell structures”, em “**Topology Optimization in Structural Mechanics**”, ed. Rozvany, G. I. N., Courses and Lectures 374, Springer-Verlag, 1997.
- [66] Kumar, W.P.P. , Palaninathan, R., “Finite element analysis of laminated shells with exact through-thickness integration”, **Computers & Structures**, 63, 173-184, 1997.
- [67] Lagrange, J.L., “**Sur la figure des collones**”, Miscellanea Taurinensia, 1770-1773.
- [68] Landriani, G.S., Rovati, M., “Optimal design for 2-D structures made of composite materials”, **ASME J. Engnr. Mat. Tech**, 1991.
- [69] Lévy, M., “**La statique graphique et ses applications aux constructions**”, Comptes Rendues, l'Acad. des Sciences, Paris, 1875.
- [70] Lions, J.L., “**Some methods in the mathematical analyses of systems and their control**”, Science Press, Beijing, China, Gordon and Breach, New York, 1981.
- [71] Love, A. E., “**A treatise on the mathematical theory of elasticity**”, 4th Edition, Dover, New York, 1944.
- [72] Lurie, K.A., Fedorov, A.V., Cherkaev, A.V., “Regularization of optimal design problems for bars and plates, Part I and II”, **J. Optimization and Theory and Applications**, 37.4, 499-521, 523-543, 1982.
- [73] Lyons, L.P.R., “**A general finite element system with special reference to the analysis of cellular structures**”, Tese de PhD, Imperial College of Science, London, 1977.
- [74] MacNeal, R.H., “Perspective on finite elements for shell analysis”, on **Stability Analysis of Plates and Shells**, NASA/CP-1998-206280, 1998.

- [75] MacNeal, R.H., Harder, R.L., "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", **Finite Elements in Analysis and Design**, 1, 3-20, 1985.
- [76] Maute, K., e Ramm, E., "Adaptive topology optimization of shell structures", **AIAA J.**, 35, 11, 1767-1773, 1997.
- [77] Maute, K., Schwarz, S., Ramm, E., "Structural optimization – the interaction between form and mechanics", **Z. Angew. Math. Mech.**, 79, 10, 651-673, 1999.
- [78] Maxwell, C., "**Scientific Papers**" II. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1869.
- [79] Michell, A. G. M., "The limits of economy of material in frame structures", **Philosophical Magazine**, 8, 589-597, 1904.
- [80] Milford, R.V., Schnobrich, W.C., "Degenerated isoparametric finite elements using explicit integration". **Inter. J. Num. Meth. Engrn.**, 23, 133-154, 1986.
- [81] Min, S., "**Optimum structural topology design for multiobjective, stability, and transient problems using the homogenization design method**", Tese de Doutorado, The University of Michigan, 1997.
- [82] Mindlin, R.D., "Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic elastic plates", **Journal of Appl. Mech.**, 18, 31-38, 1951.
- [83] Mota Soares, C.M., Franco Correia, V., Mateus, H., Herskovits, J., "A discrete model for the optimal design of thin composite plate-shell type structures using a two-level approach", **Composite Structures**, 30, 147-157, 1995.
- [84] Mota Soares, C.M., Mota Soares, C.A., Franco Correia, V.M., "Optimization of multilaminated structures using higher-order deformation models", **Comp. Methods Appl. Engrn.**, 149, 133-152, 1997.
- [85] Mourão, R. P., "**Um elemento finito de casca para a análise de problemas com não-linearidade geométrica**", Dissertação de mestrado, UFSC, 1991.
- [86] Murat, F., Tartar, L., "**Calcul des variations et homogénéisation, les méthodes de l'homogénéisation: théorie et applications en physique**", Coll. De la Di. De Etudes et Recherches de Elec. De France, Eyrolles, Paris, pp. 319-370, 1985.
- [87] Nagendra, S., Jestin, D., Gürdal, Z., Watson, L. T., "Improved genetic algorithm for the design of stiffened composite panels", **Computers & Structures**, 58, 3, 543-555, 1996.
- [88] Panda, S., Natarajan, R., "Analysis of Laminated composite shell structures by finite element method", **Computers & Structures**, 14, 225-230, 1981.
- [89] Papalambros, P. Y., Chirehdast, M., "An integrated environment for structural configuration design", **J. Engng. Design**, vol. 1, pp. 73-96, 1990.

- [90] Park, Y.K., “**Extensions of optimal layout design using homogenization method**”, Tese de Doutorado, The University of Michigan, 1995.
- [91] Pedersen, P., “Bounds on elastic energy in solids of orthotropic materials”, **Structural Optimization**, 2, , 55-63, 1990.
- [92] Pedersen, P., “On optimal orientation of orthotropic materials”, **Structural Optimization**, 1, 101-106, 1989.
- [93] Pedersen, P., “On thickness and orientational design with orthotropic materials”, **Structural optimization**, 3, 69-78, 1991.
- [94] Petersson, J., Sigmund, O., “Slope constrained topology optimization”, *Int. Journal for Numer. Meth. In Engng.*, vol. 41, pp. 1417-1434, 1998.
- [95] Prager, W., Rozvany, G.I, “Optimization of structural geometry”, **Dynamical systems**, Bednarek, A.R., Cesari, L. (eds.),. Academic Press, New York, 265-293, 1977.
- [96] Prager, W., Taylor, J. E., “Problems of optimal structural design”, **Trans. ASME J. Appl. Mech.**, vol. 35, pp. 102-106, 1968.
- [97] Ramm, E., Kemmler, R., Schwarz, S., “Formfinding and optimization of shell structures”, **Proc. of 'IASS-IACM 2000'**, Fourth International Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures, Chania, Crete, Greece, 4-7 June 2000.
- [98] Ramm, E., Maute, K. e Schwarz, S., “Adaptative topology and shape optimization”, em **Idelsohn et al. (WCCM IV – 1998)**, 1998.
- [99] Ratum, U.E., “On optimal control problems for linear elliptic equations”, **Soviet Math. Dokl.**, 20, 1342-1345, 1979.
- [100] Reddy, J.N., “A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates”, **Inter. J. Num. Meth. Engnr.**, 15, 1187-1206, 1980.
- [101] Reddy, J.N., “**Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis**”, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.
- [102] Reissner, E., “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, **Journal of .Appl. Mech.**, 12, 69-76, 1945.
- [103] Ronan, C.A., “**História ilustrada da ciência da universidade de cambridge**”, Vol IV, ed. Jorge Zahar, Círculo do Livro, São Paulo, 1991.
- [104] Rozvany, G. I. N., “**Topology optimization in structural mechanics**”, Courses and Lectures 374, Springer-Verlag, 1997.
- [105] Rozvany, G. I. N., Sigmund, O. e Birker, T., “Optimal Design of Composite and Fibre-Reinforced Plates”, **Optimal Design with Advanced Materials**, pp. 293-309, 1993.

- [106] Rozvany, G. I. N., Bendsøe, M. P. e Kirsch, U., "Layout Optimization of Structures", **Appl. Mech. Rev.**, vol. 48, nº 2, pp. 41-119, 1995.
- [107] Sanchez-Palencia, E., "Non homogeneous and vibration theory", Lecture notes in physics, no. 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [108] Sander, G., Fleury, C., "A mixed method in structural optimization", **ASME Energy Technology Conf. and Exhibition**, Houston, Texas, 1977.
- [109] Sant'Anna, H. M., "Otimização topológica de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão", Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2002.
- [110] Schmit, L. A., "Structural design by systematic synthesis", Preceedings **2nd ASCE Conference on Electronic Computation**, pp. 105-132, 1960.
- [111] Schmit, L., Farshi, B., "Some approximation concepts for structural synthesis", **AIAA Journal**, vol. 12, pp. 692-699, 1974.
- [112] Schmit, L.A., Farshi, B., "Optimum design of laminated fiber composite plates", **Inter. J. Num. Meth. Engnr.**, 11, 623-40, 1977.
- [113] Schmit, L.A., Farshi, B., "Optimum laminate design for strength and stiffness", **Inter. J. Num. Meth. Engnr.**, 7, 519-536, 1973.
- [114] Schmit, L.A., Fleury, C., "Structural synthesis by combining approximation concepts and dual method", **AIAA Journal**, 18, 1252-1354, 1980.
- [115] Schmit, L.A., Mehrinfar, M., "Multilevel optimum design of structures with fiber-composite stiffened panel components", **AIAA Journal**, 20, 138-147, 1982.
- [116] Secchi, A.R., "Otimização de processos", apostila do curso Otimização de Processos, CPGEQ-UFRGS, 2001.
- [117] Sheu, C.Y., Prager, W., "Recent developments in optimal structural design", **Applied Mechanics Reviews**, 21, 10, 985-992, 1968.
- [118] Sigmund, O., Petersson, J., "Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima", **Structural Optimization**, 16, 68-75, 1998.
- [119] Sigmund, O., "Design of material structures using topology optimization", Ph.D. Thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.
- [120] Sigmund, O., "On the design of compliant mechanisms using topology optimization", **Mech. Struct. Mach.**, vol. 25, pp. 495, 526, 1997.

- [121] Soremekun, G.A.E., “**Genetic algorithms for composite laminate design and optimization**”, Tese de Mestrado, the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.
- [122] Spencer, A. J. M., “**Continuum mechanics**”, Longman Inc., New York, 1980.
- [123] Stolarski, H., Carpenter, N., e Belytschko, T., “A flat triangular shell element with improved membrane interpolation”, **Communications in Applied Numerical Methods**, 1, 161-168, 1985.
- [124] Suzuki, K., Kikuchi, N., “A homogenization method for shape and topology optimization”, **Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.**, 93, 291-318, 1991.
- [125] Swan, C.C., Kosaka, I., “Homogenization-based analysis and design of composites”, **Computers and Structures**, 64, 1-4, 603-621, 1997.
- [126] Tartar, L., “Estimation de coefficients homogénéisés”, **Computing Methods in Applied Sciences and Engineering**, Springer-Verlag Berlin, 364-373, 1977.
- [127] Tessler, A., Hughes, T.J.R., “An improved treatment of transverse shear in the mindlin-type four-node quadrilateral element”, **Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.**, 39, 311-335, 1983.
- [128] Thomsem, J., “Optimization of composite discs”, **Structural Optimization**, 1991.
- [129] Tita, V., “**Análise dinâmica teórica e experimental de vigas fabricadas a partir de materiais compósitos poliméricos reforçados**”, Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1999.
- [130] Tsai, S.W., “Introduction”, in **Composite Materials: Testing and Design (Fifth Conference)**, ASTM Special Technical Publication 674, S.W. Tsai, Ed., ASTM, New Orleans, 1-2, 1979.
- [131] Tsai, S.W., “**Theory of Composites Design**”, Think Composites, Dayton, 1992.
- [132] Tsai, S.W., Pagano, N. J., “Invariant properties of composite materials”, **Composite materials workshop**, Technomic, Westport Com., 1968.
- [133] Vlachoutsis, S., “Explicit integration for three-dimensional degenerated shell finite element”, **Inter. J. Num. Meth. Engnr.**, 29, 861-880, 1990.
- [134] Waddoups, M.E., “Structural airframe application of advanced composite materials-analytical methods”, **Report, Vol VI**, Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFML-TR-69-101, 1969.
- [135] Watkins, R.I., Morris, A., “A multicriteria objective function optimization scheme for laminated composites for use in multilevel structural optimization schemes”. **Computer Meth. Appl. Mech. Engng**, 60, 233-251, 1987.

- [136] Weiji, L., Boohua, S., "Multilevel optimization procedure of composite structures", **Computers & Structures**, 26, 1357-1367, 1986.
- [137] Wujek, B. A., Renaud, J. E., "New Adaptive Move-Limit Management Strategy for Approximate Optimization, Part I", **AIAA Journal**, vol. 36, n° 10, pp. 1911-1921, 1998.
- [138] Yunus, S.M. , Kohnka, P.C., Saigal, S., "An efficient trough-thickness integration scheme in an unlimited layer doubly curved isoparametric composite shell element", **Inter. J. Num. Meth. Engr.**, 28, 2777-2793, 1989.
- [139] Zhang, Y., "Solving Large-Scale Linear Programs by Interior-Point Methods Under the MATLAB Environment," **Technical Report TR96-01**, Department of Mathematics and Statistics, University of Maryland, Baltimore County, Baltimore, MD, July 1995.
- [140] Zhou, M., Rozvany, G. I. N., "An improved approximation technique for the DCOC method of sizing optimization", **Computer & Structures**, vol. 60, n°5, 763-769, 1996.
- [141] Zhou, M., Rozvany, G. I. N., "DCOC: an optimality criteria method for large systems. part I: theory", **Structural Optimization**, vol. 5, 12-25, 1992.
- [142] Zhou, M., Rozvany, G. I. N., "DCOC: an optimality criteria method for large systems. part I: algorithm", **Structural Optimization**, vol. 6, 250-262, 1993.
- [143] Zienkiewicz, O.C. Taylor, R.L., Too, J.M., "Reduced Integration technique in general analysis of plates and shells", **Inter. J. Num. Meth. Engr.**, 3, 275-290, 1971.
- [144] Zienkiewicz, O. C., Campbell, R. L., "Shape optimization and sequential linear programming ", **Optimum Structural Design**, London: Wiley, 109-126, 1973.
- [145] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., "**The Finite Element Method**", 4<sup>a</sup> ed., Mc Graw Hill, vol. I, 1989, vol. II, 1991.



## APÊNDICE A. TESTES DO ELEMENTO FINITO IMPLEMENTADO

Para a verificação da precisão do elemento finito implementado neste trabalho, alguns testes foram realizados, baseados principalmente nos testes apresentados em MacNeal e Harder, 1985. O objetivo da implementação do elemento finito deste trabalho era apenas facilitar o trabalho na implementação da parte de otimização, de modo que alguns casos específicos pudessem ser analisados, especialmente placas planas e cascas de pequena curvatura. Portanto não se deu atenção excessiva à solução de alguns problemas normais a elementos de casca, como o uso de malhas muito distorcidas, ou com grandes curvaturas.

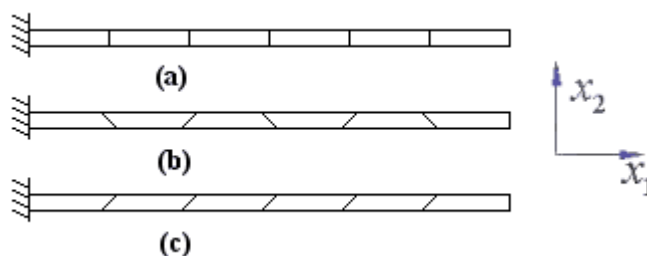
Os resultados aqui apresentados são os do caso da viga reta, a viga curva, a placa plana com carregamento concentrado no centro e carregamento distribuído uniformemente, o telhado de Scordelis-Lo e o telhado esférico

### A.1 VIGA RETA E VIGA CURVA

No caso dos testes das vigas, conforme as malhas apresentadas na Figura A.1, os resultados normalizados são apresentados na Tabela A. 1.

**Tabela A. 1. Resultados normalizados para os testes da viga reta e viga curva (ver MacNeal e Harder, 1985).**

Tipo de carregamento	VIGA RETA			VIGA CURVA
	malha "a"	malha "b"	malha "c"	
Extensão	0,9994	0,9996	0,9996	-
Cisalhamento no plano	0,9868	0,9667	0,9972	1,0077
Cisalhamento transversal	0,9925	0,9861	0,9850	0,9731
Torção	1,054	1,0496	1,0496	-



**Figura A.1. As diferentes malhas para os testes da viga reta.**

Como pode ser visto pelos valores acima, o maior erro ocorre no caso de aplicação de momentos em torno de  $x_1$ , e os mesmos não passam de 5,4%. Isso demonstra que o elemento consegue captar os importantes modos de deformação, como variações lineares de deformação e

curvatura, e também combinações de cisalhamento no plano e transversal. Na viga curva também é possível verificar a influência de pequenas distorções no elemento.

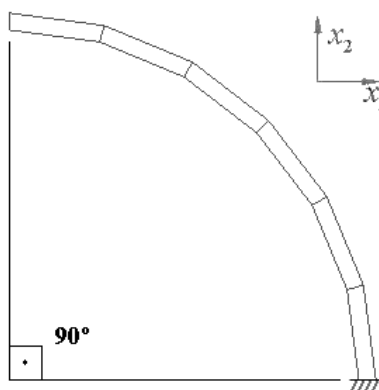


Figura A.2. Problema da viga curva. Raio interno: 4,12, raio externo: 4,32, espessura: 0,1,  $E = 1,0 \times 10^7$ ,  $\nu = 0,25$ , carregamento: forças unitárias na ponta [MacNeal e Harder, 1985].

## A.2 PLACA PLANA

O teste da placa plana permite verificar os resultados do elemento para flexão. Também se verifica a convergência dos resultados em relação ao tamanho da malha. No caso de pequenas espessuras, o elemento tende a travar. Na Figura A.3 apresentam-se os tipos de problemas a serem resolvidos.

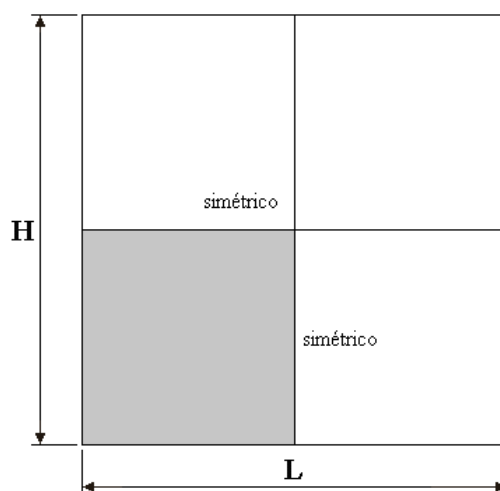
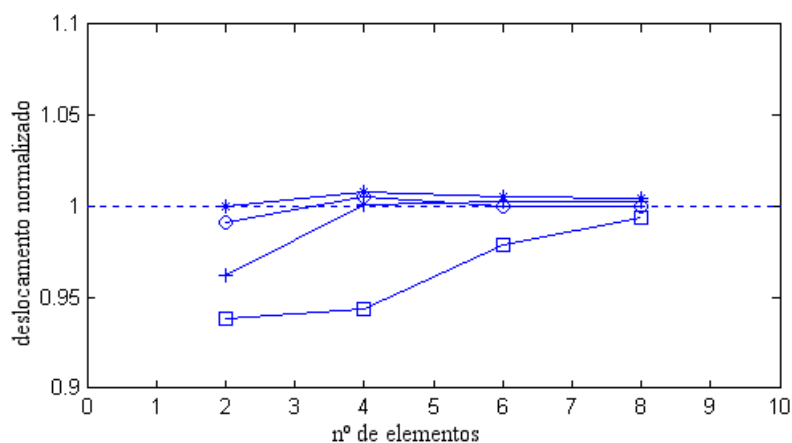


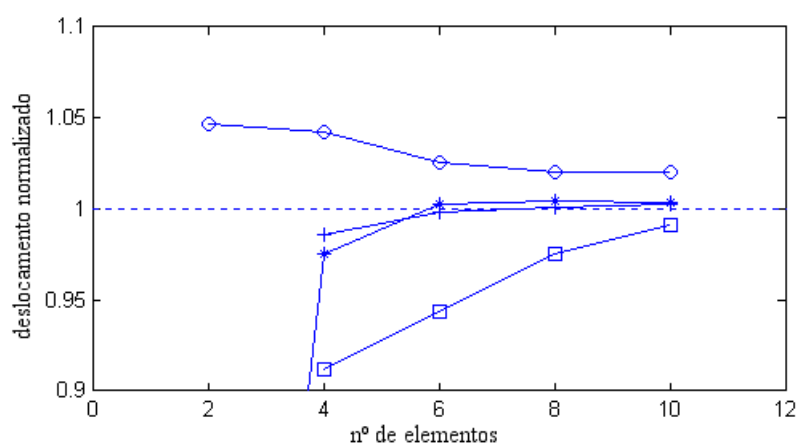
Figura A.3. Geometria do problema de placa plana, onde a razão  $H=2$ ,  $L=2$  ou  $10$ , a espessura vale  $0,01$ ,  $E=1,7472e7$ ,  $\nu=0,3$ . A placa pode estar simplesmente apoiada ou engastada nas bordas. A carga pode ser concentrada, valendo  $4e-4$ , ou distribuída, valendo  $1e-4$ .

Nas duas figuras abaixo estão os resultados obtidos para estes casos. A convergência para placas com razão  $H/L=1$  é bastante rápida e boa. Isso acontece tanto para os casos de placa apoiada, na Figura A.4, como engastada, na Figura A.5. Com uma malha de  $8 \times 8$  elementos em

um quarto da placa, o erro é menor que 2% para todos os casos. Já no caso da placa engastada, a convergência é obtida um pouco mais lentamente.



**Figura A.4. Resultados normalizados, placa apoiada.** “+”: H/L=1, carga concentrada; “\*”: H/L=1, carga distribuída; “o”: H/L=5, carga concentrada; “□”: H/L=5, carga distribuída. Ver MacNeal e Harder, 1985.



**Figura A.5. Resultados normalizados, placa engastada.** “+”: H/L=1, carga concentrada; “\*”: H/L=1, carga distribuída; “o”: H/L=5, carga concentrada, “□”: H/L=5, carga distribuída. Ver MacNeal e Harder, 1985.

### A.3 TELHADO DE SCORDELIS-LO

O telhado de Scordelis-Lo é uma casca de curvatura simples, cilíndrica, que permite visualizar resultados combinados de deformações de membrana e flexão. Também se verifica a convergência dos resultados em razão do refinamento da malha. A geometria de testes está apresentada na Figura A.6, e as dimensões e resultados são os mesmos apresentados por Vlachoutsis, 1990. Novamente apenas um quadrante é analisado, devido à simetria do modelo.

Os valores estão levemente abaixo do valor teórico, mas com erro menor que 6% para o caso do deslocamento vertical do centro do telhado, e apresentando convergência já a partir da malha com 6x6 elementos. Isso condiz com os resultados de Vlachoutsis para o caso de um

elemento com integração usando 2x2 pontos de Gauss no plano e integração explícita na espessura.

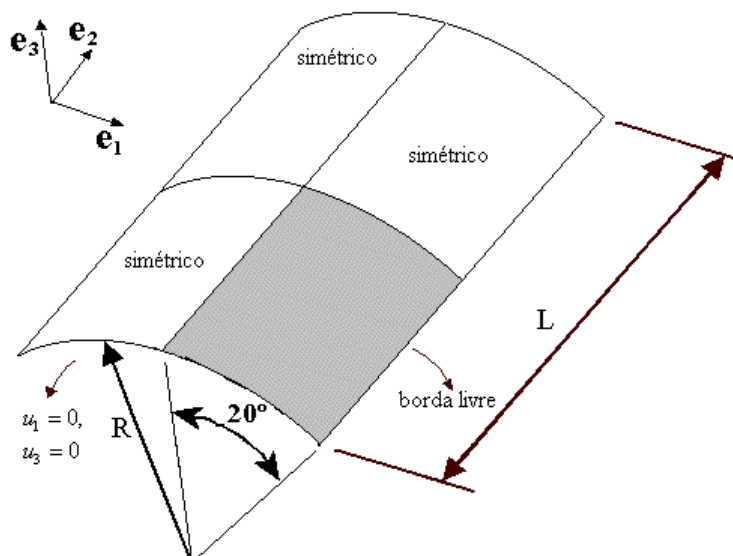


Figura A.6. Geometria e condições de contorno do telhado de Scordelis-Lo. As dimensões são:  $R=300$ ,  $L=600$ ,  $h=3$ ,  $E=3e6$ ,  $\nu=0$ ,  $q=0,625$  [Vlachoutsis, 1990].

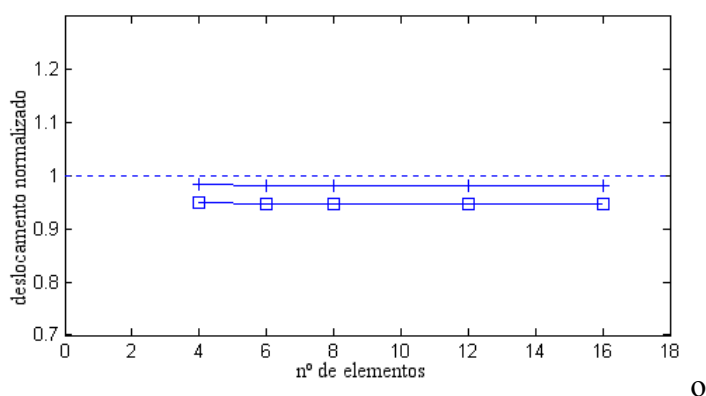


Figura A.7. Resultados normalizados para o caso do telhado de Scordelis-lo. “+”:deslocamento vertical do centro da borda livre; “□”; deslocamento do ponto central do telhado. Ver Vlachoutsis, 1990.

#### A.4 CILINDRO PUNÇIONADO

O último caso testado para verificação da eficiência do algoritmo para cálculo de cascas foi o caso do cilindro puncionado (Figura A.8). Da mesma maneira que o telhado de Sordelis-Lo, as dimensões do cilindro e os resultados são os mesmos apresentados por Vlachoutsis, 1990,e apenas um oitante é modelado.

Os resultados para o caso do cilindro puncionado estão apresentados na Figura A.9, para o deslocamento axial do ponto “a” e para o deslocamento radial no ponto “b”. Como se vê, os

resultados para os pontos “a” e “b” são muito bons, com convergência rápida em relação à malha utilizada.

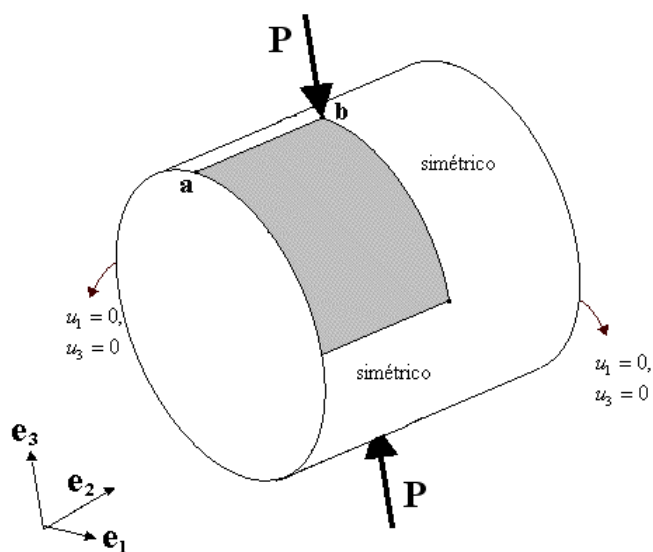


Figura A.8. Geometria e condições de contorno para o caso do cilindro puncionado. Os pontos a e b são os pontos de verificação do deslocamento.

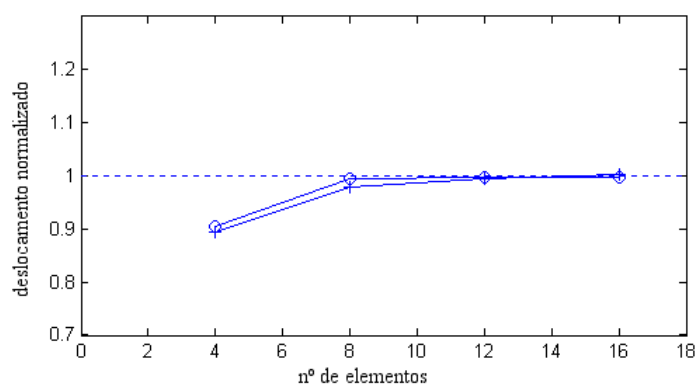


Figura A.9. Resultados normalizados para o caso do cilindro puncionado. “+”:deslocamento axial do ponto a; “o”: deslocamento radial do ponto b. Ver Vlachoutsis, 1990.

## APÊNDICE B. OBTENÇÃO DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

Abaixo são apresentadas as formas de obtenção do Sistema Local da Lâmina, do Sistema Local da Casca e do Sistema Nodal, que são sistemas de coordenadas envolvidos no cálculo por elementos finitos. Os dois primeiros sistemas tem importância também na parte da otimização da orientação, pois a variável de projeto  $\theta$  é igual ao ângulo entre estes dois sistemas.

### B.1 SISTEMA LOCAL DA LÂMINA

Este sistema é paralelo ao sistema local da casca, e apenas diferem pela rotação em torno do eixo normal de acordo com o ângulo  $\theta$  definido pela orientação da direção principal do material de cada lâmina. Para a definição do sistema local da lâmina deve-se antes definir o sistema local da casca e então aplicar uma rotação conforme apresentado na seção 2.5.

### B.2 SISTEMA LOCAL DA CASCA

Em cada ponto de integração é montado um sistema de referência de modo que dois eixos sejam tangentes à superfície média da casca, e o terceiro perpendicular à mesma. A primeira coisa a fazer é a obtenção de dos vetores tangentes à superfícies média da casca e paralelos aos eixos  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , os quais podem ser obtidos partindo do Jacobiano calculado no ponto em questão (equação (2.42)):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\xi_1} &= \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \end{array} \right\}^T \\ \mathbf{v}_{\xi_2} &= \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \end{array} \right\}^T \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Esses vetores não serão necessariamente perpendiculares entre si, o que acontecerá apenas se o elemento for retangular. Eles não podem então ser usados com base de um sistema de coordenadas e outros vetores precisam ser determinados para essa função. Calcula-se então o versor na direção de cada um desses vetores acima:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\xi_1} = \mathbf{v}_{\xi_1} / \|\mathbf{v}_{\xi_1}\| \\ \mathbf{e}_{\xi_2} = \mathbf{v}_{\xi_2} / \|\mathbf{v}_{\xi_2}\| \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

O vetor normal a esses dois será o vetor normal à superfície média no ponto de integração em análise, calculado através do produto externo entre esses dois vetores:

$$\mathbf{e}_{\xi_3} = \frac{\mathbf{e}_{\xi_1} \times \mathbf{e}_{\xi_2}}{\|\mathbf{e}_{\xi_1} \times \mathbf{e}_{\xi_2}\|} \quad (\text{B.3})$$

O versor acima é o mesmo versor perpendicular ao plano do sistema de coordenadas da lâmina,  $\mathbf{e}_3^{lm}$ , e do sistema de coordenadas local,  $\mathbf{e}_3^{lc}$ . Os outros dois versores do sistema local da casca serão dados por

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1^{lc} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\beta) \\ \mathbf{e}_2^{lc} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{e}_{\xi_1} + \mathbf{e}_{\xi_2})}{\left\| \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{\xi_1} + \mathbf{e}_{\xi_2}) \right\|} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{e}_\beta = \frac{\mathbf{e}_3^{lc} \times \mathbf{e}_\alpha}{\|\mathbf{e}_3^{lc} \times \mathbf{e}_\alpha\|} \quad (\text{B.6})$$

Utilizando essa formulação, o ângulo entre  $\mathbf{e}_1^{lc}$  e  $\mathbf{e}_{\xi_1}$  (ou  $\mathbf{v}_{\xi_1}$ ) é igual ao ângulo entre  $\mathbf{e}_2^{lc}$  e  $\mathbf{e}_{\xi_2}$  (ou  $\mathbf{v}_{\xi_2}$ ) e então a base  $\mathbf{e}_1^{lc}, \mathbf{e}_2^{lc}$  é a mais próxima possível de  $\mathbf{e}_{\xi_1}$  e  $\mathbf{e}_{\xi_2}$ , conforme Hughes, 1987.

### B.3 SISTEMA NODAL

Os sistemas determinados acima são utilizados para a determinação dos tensores constitutivos de cada elemento adequadamente rotacionados e calcular a matriz de rigidez em cada ponto de integração. É necessário ainda definir um sistema de coordenadas em cada nó que sirva de base para representar as rotações da superfície naquele nó (dois dos cinco graus de liberdade de cada nó).

Esse sistema de coordenadas deve ser montado levando em conta a orientação dos eixos  $\xi_1$  e  $\xi_2$  do elemento mestre e os versores do sistema global de coordenadas. Uma condição desse sistema é que um dos eixos deve coincidir com o vetor normal à superfície no nó em questão. Isso difere levemente de alguns textos, como Hughes, 1987, os quais falam da direção da fibra e não da normal, o que ocorre no caso de se considerar cascas com espessuras variáveis, não cobertas no presente trabalho.

Essas condições, no entanto, não são suficientes para definir uma base. Hughes, 1987, apresenta um algoritmo que permite obter essa base. Considere-se então  $\mathbf{v}_n$  o vetor normal no nó e suas componentes no sistema global são descritas por  $\mathbf{v}_{ni}$ , com  $i=1,2,3$ . Faz-se:

1. Faz-se  $a_i = |\mathbf{v}_{ni}|$ ,  $i=1,2,3$ .
2.  $j=1$ ;
3. Se  $a_1 > a_3$ , então  $a_3 = a_1$ , e  $j=2$ .
4. Se  $a_2 > a_3$ ,  $j=3$ .
5.  $\mathbf{v}_{2I} = (\mathbf{v}_{ni} \times \mathbf{e}_j) / \|\mathbf{v}_{ni} \times \mathbf{e}_j\|$ .
6.  $\mathbf{v}_{1I} = (\mathbf{v}_{2I} \times \mathbf{v}_{ni}) / \|\mathbf{v}_{2I} \times \mathbf{v}_{ni}\|$ .

A base ortonormal obtida  $\{\mathbf{v}_{1I}, \mathbf{v}_{2I}, \mathbf{v}_{ni}\}$  satisfaz a condição de que se  $\mathbf{v}_{ni}$  é próxima a  $\mathbf{e}_3$  então  $\mathbf{v}_{1I}, \mathbf{v}_{2I}, \mathbf{v}_{ni}$  serão próximos a  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , respectivamente.

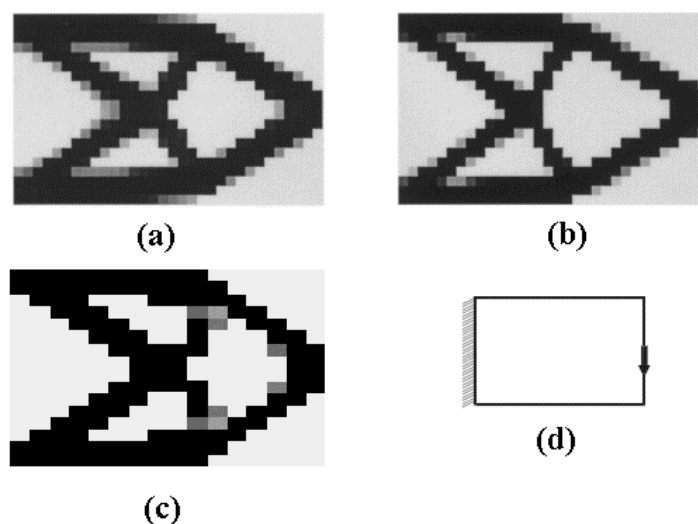
Esse algoritmo, entretanto, não é robusto e pode levar a definição de vetores orientados e maneira inversa à esperada na montagem do modelo. Uma possibilidade é o uso de um vetor definido pelo usuário, no lugar de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  ou  $\mathbf{e}_3$ , como sugerido em Vlachoutsis, 1990. Neste trabalho as duas estratégias foram utilizadas, e nos casos de geometrias simples, como as que tiveram os resultados apresentados no capítulo 5, calculou-se antecipadamente os versores do sistema nodal e se incluiu no arquivo de dados de entrada.



## APÊNDICE C. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO

Durante a montagem do algoritmo de otimização, buscou-se aplicar os métodos a alguns tipos de estruturas cujo resultado otimizado já tinham sido apresentados em alguns trabalhos, de modo ir corrigindo e ajustando o algoritmo. Isso foi necessário basicamente durante a implementação da orientação topológica simples aplicada a uma camada apenas, e na implementação da otimização da orientação. Não foram encontrados na literatura resultados para casos semelhantes aos casos mais complexos aqui encontrados. Neste apêndice são apresentados então alguns desses casos simples utilizados.

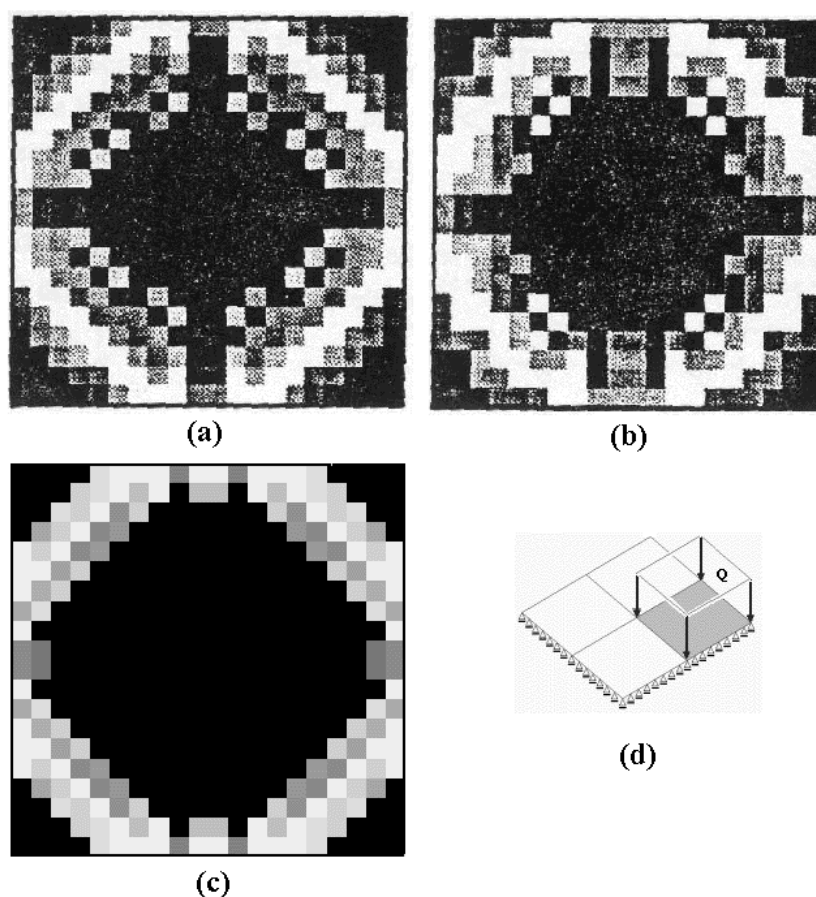
Inicialmente, apresenta-se na Figura C.1 o caso clássico da viga engastada, com carga aplicada na ponta. O resultado comparativo abaixo é o apresentado por Hassani e Hinton, 1998c, mas esse exemplo é dado em diversas outras publicações, como em Bendsøe, 1995. O material é isotrópico, diferentemente do caso com material ortotrópico, cuja solução é apresentada na seção 5.2. No casos (a) está a solução para um esquema de otimização topológica chamado por Hassani e Hinton de Esquema Suzuki-Kikuchi, e em (b) um esquema modificado. Essas duas primeiras solução foram obtidas após 120 iterações, enquanto que o resultado pela presente formulação foi obtido após 63 iterações.



**Figura C.1. Comparação de resultados de otimização topológica de viga em balanço feita de material isotrópico: em (a) e em (b), resultado apresentado em Hassani e Hinton, 1998c. Em (c), resultado obtido no presente trabalho para malha 16x16. Em (d), geometria e c.c.**

Para a comparação da otimização topológica de placas, na Figura C.2 são apresentadas soluções para o caso de placa simplesmente apoiada com carga transversal uniformemente distribuída. Em (a) está a solução para uma placa de Mindlin com uma microestrutura do tipo

reforçada por vigas, com  $h_{\max}/h_{\min} = 5,0$  e  $h_{\max}/h_{\text{unif}} = 2,0$ . Em (b), é utilizado um modelo de placa laminada de Mindlin, com microestrutura do tipo rank-2 e com integração da característica efetiva da microestrutura em elasticidade plana na espessura. Em (c) está a solução utilizando a presente formulação, para um material isotrópico e utilizando apenas um quarto da malha na análise. Mais uma vez nota-se a grande semelhança entre os resultados obtidos para a topologia.



**Figura C.2.** Comparação de resultados de otimização topológica de placas planas: em (a) e em (b), resultado apresentado em Bendsøe, 1995. Em (c), resultado obtido no presente trabalho. Em (d), geometria e c.c.

Os resultados para comparação da otimização da orientação da direção de maior módulo de elasticidade de materiais ortotrópicos estão apresentados na Figura C.3. Os resultados para comparação forma tirados do trabalho de Pedersen, 1991, aonde é realizada a otimização da espessura e da orientação de lâminas de uma viga engastada em na ponta esquerda, com a ponta esquerda livre e com carregamento uniforme na direção  $x_2$ . Escolheram-se, entretanto, resultados apenas da orientação. Pode-se observar uma semelhança de resultados entre a presente formulação, em (c), e os de Pedersen, especialmente para o caso (b), com malha de 720 elementos triangulares. O resultado do presente trabalho foi obtido com uma malha de 08x20 elementos retangulares.

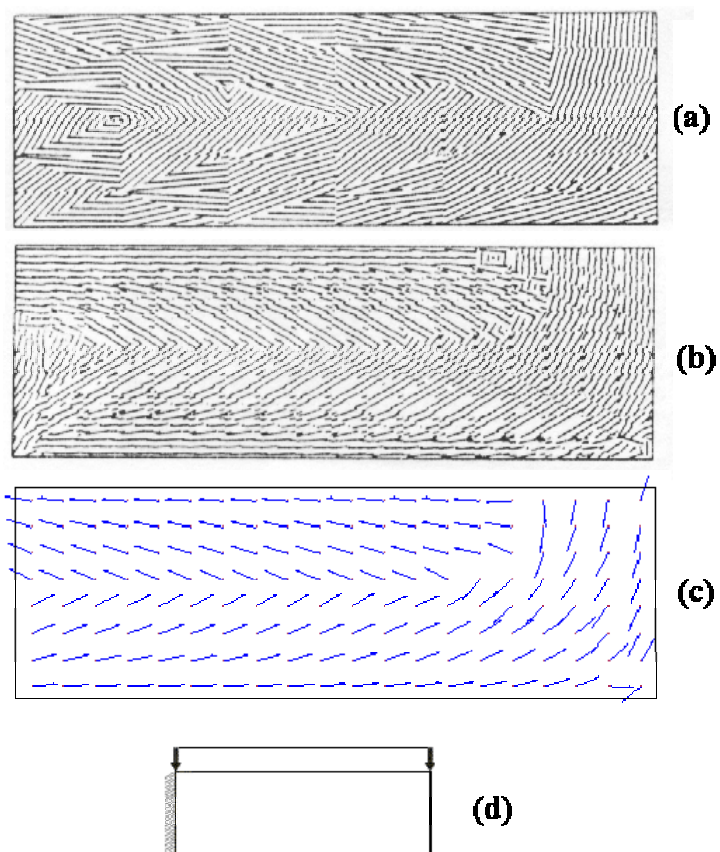


Figura C.3. Resultados para a otimização da orientação da direção de maior módulo de elasticidade para materiais ortotrópicos. Em (a) solução para malha com 72 elementos triangulares e em (b) para 720 elementos [Pedersen, 1991]. Em (c), presente formulação e em (d), geometria e c.c.