

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**CINÉTICA PONTUAL COM REALIMENTAÇÃO DE TEMPERATURA  
CONSIDERANDO UM GRUPO DE PRECURSORES DE NÊUTRONS ATRASADOS**

por

Jeronimo Junior Araujo Silva

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Novembro de 2011

CINÉTICA PONTUAL COM REALIMENTAÇÃO DE TEMPERATURA  
CONSIDERANDO UM GRUPO DE PRECURSORES DE NÊUTRONS ATRASADOS

por

Jeronimo Junior Araujo Silva

Bacharel em Física

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Marques Alvim

Aprovada por:

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha - UFRGS

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas - PUC/RS

Prof. Dr. Luiz Paulo Luna de Oliveira - UNISINOS

Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves - UFPEL

Prof. Dr. Francis H. R. França

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 30 de Novembro de 2011

## RESUMO

Recentemente, surgiu na literatura uma solução analítica das equações de cinética pontual que considera a reatividade como função do tempo, utilizando o método da decomposição. O presente trabalho dá um passo a frente, considerando as equações de cinética pontual em conjunto com efeitos de realimentação de temperatura. Mas, primeiro, uma breve introdução do modelo de cinética pontual e dos aspectos relevantes desta abordagem são apresentados. O trabalho prossegue acrescentando a realimentação de temperatura como uma perturbação de primeira ordem na equação reatividade, e através de manipulações algébricas, o conjunto de equações de cinética pontual passa a ser expresso como uma equação diferencial não linear de segunda ordem. Esta equação é, então, resolvida pelo método de decomposição, ou seja, expandindo as variáveis dependentes como séries infinitas, construindo-se então um sistema recursivo que permite calcular cada um dos termos destas séries. A não linearidade é tratada utilizando os polinômios Adomian. Os resultados aqui obtidos são comparados com a literatura, apresentando variações percentuais máximas da ordem de [0,1%]. Faz-se uma breve análise da convergência e da estabilidade da solução, usando um método baseado no critério de Lyapunov.

Palavras-chave: Cinética pontual; realimentação de temperatura; reatividade não linear.

## ABSTRACT

An analytical solution of the point kinetics equations to calculate reactivity as a function of time by the decomposition method has recently appeared in the literature. The present work goes one step forward, by considering the neutron point kinetics equations together with temperature feedback effects. But first, a brief introduction of the point kinetics model and the relevant aspects of this approach are presented. The work proceeds adding the temperature feedback as a first order perturbation in the reactivity equation, and using algebraic manipulation, the set of point kinetics equations becomes expressed as a non linear second order differential equation. This equation is then solved by the decomposition method, that is, expanding the dependent variables as infinite series, building a recursive system that allows the evaluation of each term of these series. The non linearity is treated using the Adomian polynomials. The results obtained are compared with literature, with maximum percentage changes of about [0,1%]. A brief analysis of the convergence and stability of the solution is made, using a method based on the Lyapunov criterion.

Keywords: Point kinetics; temperature feedback; non linear reactivity.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REAÇÕES NUCLEARES CONTROLADAS</b>	<b>4</b>
2.1	Reações em cadeia . . . . .	4
2.2	Densidade e fluxo de nêutrons; taxa de interação. . . . .	5
<b>3</b>	<b>CINÉTICA PONTUAL</b>	<b>7</b>
3.1	Cinética sem nêutrons atrasados . . . . .	8
3.1.1	Reatividade . . . . .	9
3.2	Cinética com nêutrons atrasados . . . . .	9
3.2.1	Parâmetros dos nêutrons atrasados . . . . .	9
3.2.2	Aspectos qualitativos . . . . .	10
3.3	Potência . . . . .	11
<b>4</b>	<b>O MODELO CINÉTICO COM REALIMENTAÇÃO DE TEMPERATURA</b>	<b>12</b>
4.1	Decomposição . . . . .	14
4.1.1	Método da decomposição e polinômios de Adomian . . . . .	16
4.1.2	Geração dos polinômios $A_j$ . . . . .	18
4.1.3	Aplicação à não linearidade $n^2$ . . . . .	18
4.2	Convergência e estabilidade: o critério de Lyapunov . . . . .	20
4.3	A distância relativa $\Delta$ . . . . .	21
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>22</b>
5.1	Resultados para $\rho(0) = 0,8\beta$ . . . . .	23
5.2	Resultados para $\rho(0) = 0,5\beta$ . . . . .	30
5.3	Resultados para $\rho(0) = 0,2\beta$ . . . . .	37
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>42</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>43</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Densidade de nêutrons para diferentes valores de $k_{eff}$ .....	7
Figura 5.1	$n(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,8\beta$ até $t = 400s$ .....	24
Figura 5.2	Distância relativa da potência, caso $\rho(0) = 0,8\beta$ até $t = 155s$ .....	24
Figura 5.3	Valores de $\Lambda$ , caso $\rho(0) = 0,8\beta$ até $t = 400s$ .....	26
Figura 5.4	Detalhe de $\Lambda$ , caso $\rho(0) = 0,8\beta$ até $t = 80s$ .....	26
Figura 5.5	$T(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,8\beta$ até $t = 400s$ .....	27
Figura 5.6	Distância relativa da temperatura, caso $\rho(0) = 0,8\beta$ até $t = 155s$ .....	27
Figura 5.7	$C(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,8\beta$ até $t = 400s$ .....	28
Figura 5.8	$\rho(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,8\beta$ até $t = 400s$ .....	28
Figura 5.9	$n(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,5\beta$ até $t = 400s$ .....	30
Figura 5.10	Distância relativa da potência, caso $\rho(0) = 0,5\beta$ até $t = 150s$ .....	32
Figura 5.11	Valores de $\Lambda$ , caso $\rho(0) = 0,5\beta$ até $t = 400s$ .....	32
Figura 5.12	Detalhe de $\Lambda$ , caso $\rho(0) = 0,5\beta$ até $t = 80s$ .....	33
Figura 5.13	$T(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,5\beta$ até $t = 400s$ .....	33
Figura 5.14	Distância relativa da temperatura, caso $\rho(0) = 0,5\beta$ até $t = 150s$ .....	34
Figura 5.15	$C(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,5\beta$ até $t = 400s$ .....	34
Figura 5.16	$\rho(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,5\beta$ até $t = 400s$ .....	35
Figura 5.17	$n(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,2\beta$ até $t = 200s$ .....	38
Figura 5.18	Distância relativa da potência, caso $\rho(0) = 0,2\beta$ até $t = 98s$ .....	38
Figura 5.19	Valores de $\Lambda$ , caso $\rho(0) = 0,2\beta$ até $t = 200s$ .....	39
Figura 5.20	$T(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,2\beta$ até $t = 200s$ .....	39
Figura 5.21	Distância relativa da temperatura, caso $\rho(0) = 0,2\beta$ até $t = 98s$ .....	40
Figura 5.22	$C(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,2\beta$ até $t = 200s$ .....	40
Figura 5.23	$\rho(t) \times t$ , caso $\rho(0) = 0,2\beta$ até $t = 200s$ .....	41

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	$n(t)$ caso $\rho(0) = 0,2\beta$ .....	25
Tabela 5.2	$T(t)$ caso $\rho(0) = 0,2\beta$ .....	29
Tabela 5.3	$n(t)$ caso $\rho(0) = 0,5\beta$ .....	31
Tabela 5.4	$T(t)$ caso $\rho(0) = 0,5\beta$ .....	36
Tabela 5.5	$n(t)$ caso $\rho(0) = 0,8\beta$ .....	37
Tabela 5.6	$T(t)$ caso $\rho(0) = 0,8\beta$ .....	41

## LISTA DE SÍMBOLOS

$k_{eff}$	Fator de multiplicação efetivo [adimensional]
$n$	Densidade de nêutrons $[\frac{1}{cm^3}]$ (capítulos 2 a 4) ou potência $[MW]$ (capítulo 5)
$\bar{v}$	Velocidade média dos nêutrons $[\frac{cm}{s}]$
$L$	Tempo de vida médio de um nêutron na criticalidade ( $k_{eff} = 1$ ) $[s]$
$C$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados $[\frac{1}{cm^3}]$
$P$	Potência do reator $[MW]$
$T$	Temperatura $[K]$
$H$	Constante de proporcionalidade entre temperatura e potência $[\frac{K}{MW s}]$
$\Sigma_r$	Seção de choque macroscópica específica da reação $r$ $[\frac{1}{cm}]$
$R_r$	Taxa da reação $r$ $[\frac{1}{cm^3 s}]$
$\rho$	Reatividade [adimensional]
$\Phi$	Fluxo de nêutrons $[\frac{1}{cm^2 s}]$
$\theta$	Tempo de vida médio de um nêutron $[s]$
$\beta$	Fração de nêutrons atrasados [adimensional]
$\lambda$	Constante de decaimento $[\frac{1}{s}]$
$\tau$	Tempo de vida médio de um grupo de precursores $[s]$
$\gamma$	Energia aproveitada por fissão $[J]$ ou $[eV]$
$\alpha$	Coefficiente de temperatura da reatividade $[\frac{1}{K}]$
$\Lambda$	Coefficiente de Lyapunov [adimensional]



# 1 INTRODUÇÃO

As experiências adquiridas ao longo da história dos reatores nucleares reforçaram severamente as regras e regulamentos que levam ao comissionamento de tecnologia nuclear de última geração. Uma das questões é a exploração das leis da física em favor do controle do reator. Embora exista uma variedade de aspectos que devam ser levados em conta, o presente trabalho foca-se na influência da temperatura do núcleo do reator como fator de realimentação da densidade de nêutrons no sistema.

As equações de cinética pontual com realimentação de temperatura correspondem a um sistema não linear e do tipo *stiff* (rígido) para a densidade de nêutrons e a concentração de precursores de nêutrons atrasados. Essas variáveis determinam o comportamento da potência de um reator nuclear em função do tempo e são influenciadas, por exemplo, pela posição das barras de controle. As soluções das equações de cinética pontual fornecem informações quanto à dinâmica em um reator nuclear em operação e são úteis, por exemplo, para compreensão das flutuações de potência ocorridas durante a partida ou o desligamento do reator, quando as barras de controles são ajustadas. Recentemente, um grande número de estudos em cinética têm sido publicados, os quais modelam o comportamento dependente do tempo do reator, usando as equações de cinética pontual.

A operação de um reator nuclear envolve dois tipos de problemas, o estado estacionário, no qual a produção de energia é constante, e o estado transiente no qual há alterações, como nos casos de partida (*start-up*), desligamento (*shut-down*) ou mudanças no nível de potência. Enquanto no estado estacionário um reator está operando na criticalidade, ou seja, o fator de multiplicação de nêutrons  $k_{eff}$  é exatamente igual à unidade, as mudanças na potência são caracterizadas pela reatividade  $\rho = \frac{(k_{eff}-1)}{k_{eff}}$  (Lamarsh, 1966). Note que a reatividade é uma quantidade definida matematicamente, mas não pode ser medida diretamente na prática. No entanto, o fator de multiplicação de nêutrons ou a reatividade dependem de diversas variáveis, tais como a temperatura do núcleo do reator, a sua composição química e também a energia.

Um modelo simplificado do comportamento da densidade de nêutrons durante um transiente é a chamada aproximação de cinética pontual, a qual assume que o fluxo de nêutrons tenha uma distribuição espacial fixa, e que apenas sua amplitude varie no tempo, fazendo com que sua validade fique limitada a casos muito específicos onde os parâmetros nucleares variam muito lentamente em função das coordenadas espaciais. Nas situações onde essas mudanças são fundamentais, o modelo torna-se inadequado, fato destacado por vários autores. Ainda assim, diversos trabalhos recentes têm considerado a variação da reatividade com o tempo usando o modelo de cinética pontual. Dentre esses, é possível citar (Petersen *et al.*, 2011; Li *et al.*, 2009; Kinard & Allen, 2004; Aboanber & Hamada, 2002). Mesmo que a aplicabilidade desse modelo tenha sido severamente restringida devido à importância crescente da otimização da potência, ele permanece útil em termos de estudos preliminares, especialmente quando consideram-se aspectos de controle. A inclusão da realimentação de temperatura no modelo introduz uma es-

timativa do comportamento transiente da potência e de outras variáveis do reator, as quais estão fortemente acopladas.

Normalmente, um único valor de reatividade é utilizado em toda a faixa de energia. Especialmente em situações de variação de potência, o espectro de energia do nêutron muda, assim como as quantidades físicas, tais como as seções de choque médias.

Entretanto, mesmo sabendo da importância dos efeitos da temperatura no controle da potência do reator, o caráter não linear do conjunto de equações que governa esse sistema dificulta a obtenção de uma solução puramente analítica. Ainda assim, trabalhos têm sido publicados sobre esse tópico, utilizando abordagens numéricas ou mistas, nas quais a solução do problema é analítica e a obtenção dos resultados é avaliada numericamente.

Aboanber e Nahla (2002) resolveram o problema de cinética pontual com realimentação de temperatura numericamente, por aproximações de Padé, invertendo as matrizes de forma analítica. Os trabalhos de Aboanber e Hamada (2002 e 2003) apresentam uma solução do sistema de cinética pontual pelo método de séries de potências considerando 6 grupos de precursores, sem e com realimentação de temperatura respectivamente. Kinard e Allen (2004) obtiveram uma solução numérica, para 6 grupos de precursores, sem feedback de temperatura, pelo método numérico que denominaram PCA (Piecewise Constant Approximation).

Em (Chen *et al.*, 2007) o autor faz uma análise da precisão de alguns métodos analíticos para o problema de cinética pontual, apontando limites de validade de cada um dos métodos estudados. (Aboanber, 2009) atacou o problema de cinética de dois pontos, acoplando condições do núcleo do reator e do moderador sem incluir as dimensões espaciais, utilizando dois métodos: AIM (Analytical Inversion Method) e expansão em funções de base exponencial. Em (Li *et al.*, 2009) o autor resolveu o sistema de cinética pontual numericamente sem a realimentação de temperatura, por uma técnica que ele denominou BBF (Best Basis Function), uma formulação implícita que contorna a característica stiff do problema. Tashakor *et al.* (2010) desenvolveram uma solução numérica bastante completa, considerando, além da realimentação de temperatura, a queima de combustível, mas levando em conta apenas um grupo de precursores. Os trabalhos de (Nahla & Zayed, 2010) e (Nahla, 2010) resolvem, respectivamente, parametrizando as equações da variável tempo para a variável reatividade, expandindo em séries de Taylor; e com um modelo baseado na equação inhour.

No presente trabalho, a derivação da solução é totalmente analítica, sem necessidade de recorrer a aproximações inerentes aos métodos numéricos. Para tal, usa-se o método da decomposição, que já foi utilizado com sucesso para o problema de cinética pontual (Petersen *et al.*, 2011). Além disso, após a obtenção dos resultados, prova-se que a solução é estável, garantindo a validade da solução em qualquer intervalo de tempo, utilizando um critério baseado no método de Lyapunov (Boichenko *et al.*, 2005; Mello, 2010).

No segundo capítulo apresentam-se os parâmetros nucleares relevantes para o estudo de cinética, utilizados no capítulo seguinte, que apresenta de forma sucinta o modelo de cinética pontual. No capítulo 4, a contribuição devida à temperatura é adicionada ao conjunto de equações

como uma perturbação na reatividade, e após algumas operações algébricas, obtém-se o conjunto final de equações que caracteriza o problema de cinética pontual com realimentação de temperatura e um grupo de precursores de nêutrons atrasados. Ainda no mesmo capítulo, apresenta-se o método da decomposição e os polinômios de Adomian, ferramentas principais na solução do referido problema. O critério de convergência e estabilidade de Lyapunov é apresentado logo em seguida, agregando confiabilidade ao método. Enfim, apresentam-se os resultados obtidos para três casos supercríticos presentes na literatura, comparando-os no capítulo 5. No capítulo final 6, apresentam-se as conclusões e as direções que o trabalho pode tomar no futuro.

## 2 REAÇÕES NUCLEARES CONTROLADAS

A teoria de reatores nucleares trata do controle de reações em cadeia para a produção de energia através de processos nucleares. A operação de um reator nuclear é uma tarefa complexa, por ser dominada por reações nucleares, i.e. fenômenos em escala subatômica que liberam altas energias em comparação a reações químicas, resultando em processos termo-hidráulicos em escala macroscópica, como a transferência de energia cinética entre os fragmentos da fissão e o material moderador e refrigerador da estrutura. O presente trabalho é focado na parte neutrônica e na realimentação de temperatura como aspectos de balanço ou equilíbrio térmico em um reator nuclear.

### 2.1 Reações em cadeia

Reações em cadeia são processos multiplicativos que podem aumentar, reduzir, ou manter a população de nêutrons em determinado nível. Para que uma reação nuclear em cadeia seja estacionária, o fator de multiplicação (razão entre nêutrons produzidos na fissão e nêutrons absorvidos pelo combustível para que ocorra a fissão),  $k_{eff}$ , deve ser exatamente igual a um. Este controle da reação em cadeia é o papel principal que o sistema de controle desempenha. Entretanto, para geração de potência, existem efeitos relacionados à variação de temperatura, que também influenciam na produção de nêutrons.

Uma grandeza relevante no controle do reator é a chamada reatividade,  $\rho$ , que fornece uma medida do quanto o fator de multiplicação afasta-se da criticalidade. A reatividade pode ser relacionada com uma variedade de grandezas como concentração de venenos de nêutrons, temperatura, e outras. O presente trabalho visa analisar os transientes de potência através de um modelo simplificado, onde os aspectos dominantes são a densidade de nêutrons e a temperatura (como característica termo-hidráulica). No entanto, a influência da temperatura sobre a reatividade introduz um termo não linear no conjunto de equações que descreve o sistema, não havendo, até o presente momento, uma forma fechada de representar a realimentação de temperatura em reatores nucleares, mesmo para os modelos mais simples.

A descrição do comportamento dos nêutrons no reator é feita com uma abordagem mista entre as escalas macro e microscópicas. Em termos gerais, descreve-se a interação entre os nêutrons e o núcleo dos átomos que constituem a matéria. Uma abordagem mista tipicamente utiliza a equação de transporte de Boltzmann. O estudo e o processamento numérico da equação de Boltzmann são tais que, até o momento, aproximações diversas são utilizadas a fim de resolver um problema simplificado.

O caminho que determinado nêutron percorre desde sua produção até sua absorção consiste em uma combinação de trechos retilíneos sem interação com a matéria (em termos técnicos, isso é conhecido como transporte de nêutrons) e interações com um núcleo atômico (as colisões, análogas a um projétil atingindo um alvo). O aspecto microscópico do problema é

relevante para se tratar das colisões. Para escrever e resolver a equação de Boltzmann colisional, usa-se um modelo fenomenológico, baseado em seções de choque. Expressos em ordem de grandeza, existem cerca de  $10^{24}$  núcleos atômicos por  $cm^3$  de matéria, e apenas  $10^{12}$  nêutrons por  $cm^3$  em um reator nuclear de alta potência.

Ao considerar as interações do nêutron com a matéria, é importante distinguir reações que mantêm a densidade de nêutrons inalterada (espalhamentos elásticos e inelásticos) daquelas que alteram a densidade de nêutrons (absorção). Os espalhamentos podem ocorrer de duas formas: em uma delas não há contato direto entre o nêutron e o núcleo alvo (i.e. não há interações devidas às forças nucleares, onde a onda associada ao nêutron é espalhada pela força nuclear forte, de curto alcance). Tal processo ocorre, fenomenologicamente, de maneira similar à colisão entre duas bolas de bilhar. A outra forma consiste na formação de um núcleo composto, que reemite o nêutron retornando à sua composição anterior à absorção. Em ambos os processos, há conservação de momentum e energia cinética.

## 2.2 Densidade e fluxo de nêutrons; taxa de interação.

Mesmo que a quantidade de nêutrons livres seja muito menor que a da população atômica, ela ainda é muito alta, na ordem de  $10^{12}$  nêutrons por  $cm^3$  num reator de potência. Portanto, trata-se dessa população através de conceitos estatísticos, como o de densidade. A densidade de nêutrons é o número de nêutrons observados em uma unidade de volume. Mais precisamente: seja um pequeno elemento de volume  $d^3r$  localizado em um ponto  $\vec{r}$  do sistema. O número médio de nêutrons encontrados nesse volume é  $n(\vec{r})d^3r$ . Obviamente, a densidade pode variar tanto no espaço quanto no tempo. Se necessário, poder-se-ia distinguir-se as velocidades dos nêutrons em termos de seus módulos e direções. Assim, uma representação estatística completa da população de nêutrons no sistema requer sete variáveis: três para as coordenadas espaciais (indicam a posição da partícula no sistema), duas variáveis angulares (indicam a direção do movimento da partícula), uma para a energia cinética (indica a velocidade da partícula), e uma temporal (indica o instante que a observação foi realizada).

Por simplicidade, seja  $n(t)$  independente das variáveis espaciais (o que não afeta o raciocínio seguinte). Seja  $\bar{v}$  a velocidade média dos nêutrons. Durante um intervalo de tempo  $dt$ , cada nêutron percorre um percurso  $dx = \bar{v} dt$ , tendo probabilidade  $\Sigma dx = \Sigma \bar{v} dt$  de interagir com a matéria, onde  $\Sigma$  representa a seção de choque macroscópica, expressa em  $[\frac{1}{cm}]$ , que representa a probabilidade de ocorrer uma interação em um percurso de um centímetro. Multiplicando pelo número de nêutrons no volume  $n(t)d^3r$ , obtém-se a taxa de interação dos nêutrons com a matéria  $n(t)\Sigma\bar{v} d^3r dt$ , i.e. o número provável de interações em determinado volume  $d^3r$  contendo  $n(t)$  nêutrons com velocidade  $v$ , em um intervalo de tempo  $dt$ . O parâmetro  $R = n(t)\Sigma\bar{v}$  representa o número de interações por unidade de volume e por unidade de tempo, e é denominado taxa de reação.

Na prática, é útil fazer-se uma distinção entre diferentes tipos de reações (fissão, es-

palhamento, captura, etc) dividindo  $\Sigma$  em seções de choque parciais  $\Sigma_r$  e  $R$  em taxas de reação parciais  $R_r = n\Sigma_r\bar{v}$ . O produto  $n\bar{v}$  aparece frequentemente nas fórmulas, portanto define-se  $\Phi(t) = n(t)\bar{v}$  como o fluxo de nêutrons.

Em suma, taxas de reação são representadas pela seguinte expressão:  $R_r = \Sigma_r\Phi$ , onde  $\Sigma_r$  representa a seção de choque do material para determinada reação  $r$ , e  $\Phi$  a população de nêutrons movendo-se através da matéria.

### 3 CINÉTICA PONTUAL

Como mencionado no capítulo anterior, o fator de multiplicação efetivo informa o comportamento da densidade de nêutrons em um reator nuclear em função do tempo. Pode-se expressar esse comportamento como:

$$n(t) = n(0)k_{eff}^m \quad (3.1)$$

onde  $m$  é o número de gerações transcorridas a partir do instante  $t = 0$ .

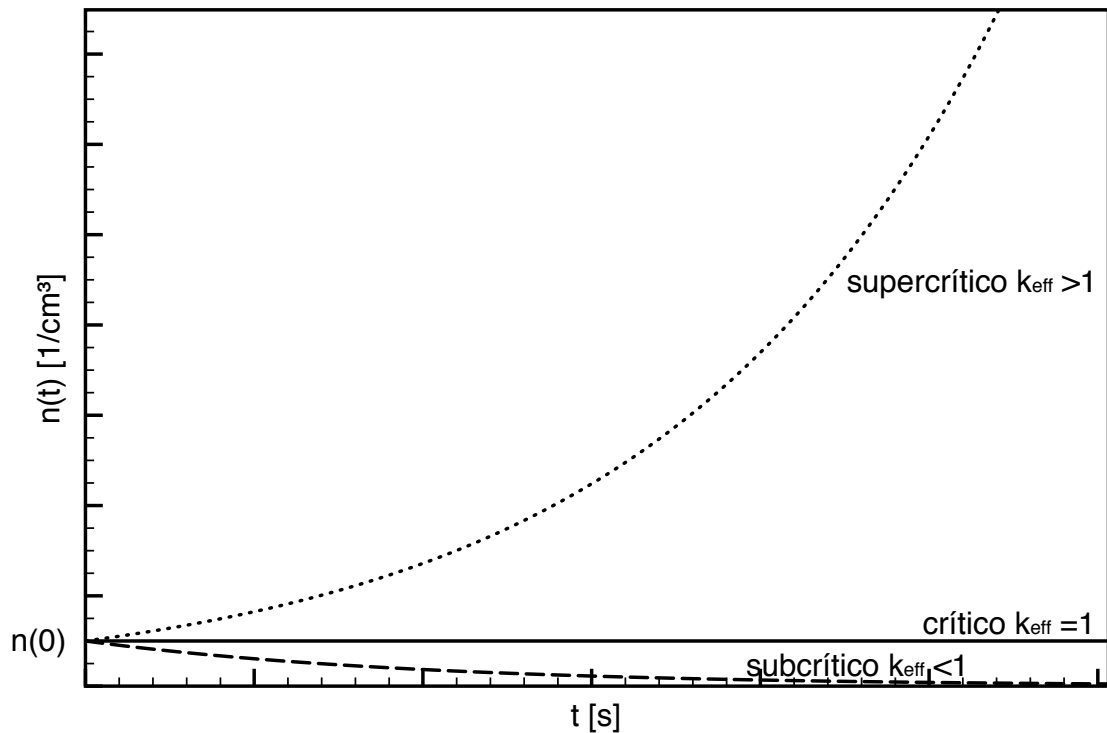


Figura 3.1: Densidade de nêutrons para diferentes valores de  $k_{eff}$

Assim, em uma reação em cadeia, o número de fissões ou o número de nêutrons é multiplicado por um fator  $k_{eff}$  de uma geração para a seguinte, conseqüentemente, o comportamento do reator é exponencial. Anteriormente, não foi calculada a duração de uma geração de nêutrons, e esse é o objetivo desse capítulo: determinar a velocidade do crescimento exponencial de acordo com o valor do fator de multiplicação  $k_{eff}$ .

Ainda que a expressão (3.1) tenha sido intuitiva, ela é muito simples, dado que o aumento da taxa de fissões e do número de nêutrons não ocorre de maneira discreta (com um valor inteiro de  $m$ ), mas continuamente em um intervalo  $t$ . Além disso, esse raciocínio despreza o fato que existem duas populações de nêutrons: prontos e atrasados, e que os nêutrons atrasados mudam drasticamente o comportamento do sistema.

No estudo de problemas de cinética, é aceitável considerar que o fluxo de nêutrons varia sua amplitude sem alterar sua distribuição espacial, i.e., que pode ser como  $\Phi = \phi(\vec{v}, \Omega) \times n(t)$ , onde  $\vec{r}$  contém as coordenadas espaciais e  $\Omega$  contém as variáveis angulares (polar e azimutal). O símbolo "×" foi utilizado, durante todo o trabalho, para enfatizar a separação entre os termos, não denotando um produto vetorial. Assim, a análise cinética limita-se apenas ao parâmetro temporal, i.e. a análise pode ser feita como se o reator fosse apenas um ponto no espaço. Daí o nome cinética pontual. Note que, em decorrência dessas simplificações, a validade do modelo restringe-se a situações onde o reator opera sob condições específicas, onde os parâmetros nucleares variam muito lentamente em função das variáveis espaciais.

### 3.1 Cinética sem nêutrons atrasados

Segundo a expressão (3.1), a população de nêutrons é multiplicada por um fator  $k_{eff}^m$  após  $m$  gerações. Cálculos mostram que a duração de uma geração é extremamente curta, da ordem de  $10^{-7}s$  em reatores rápidos e entre  $10^{-5}s$  e  $10^{-3}s$  em reatores térmicos dependendo da escolha do moderador (aproximadamente  $2,5 \times 10^{-5}s$  nos reatores de água pressurizada, "Pressurized Water Reactors", abreviados como PWRs). (O tempo é curto devido à velocidade dos nêutrons: mesmo em reatores térmicos, os nêutrons percorrem cerca de  $3km$  por segundo.)

Assim, em um segundo, transcorrem cerca de 40000 gerações em um PWR. Para dar uma ideia da rapidez dessas reações, seja  $k_{eff}$  apenas 0,01% maior ou menor que no estado de criticalidade. Pode-se ver que a potência varia, em um segundo, por um fator de  $1,0001^{40000} = 55$  para uma diferença positiva e  $0,9999^{40000} = 0,018$  caso a diferença seja negativa. Sob essas condições, é difícil imaginar como é possível monitorar e manter a reação em cadeia.

Sejam  $n(t)$  o número de nêutrons em função do tempo  $t$  e  $\theta$  o tempo de vida médio de um nêutron, desde sua emissão até sua absorção. Assumindo que a probabilidade de absorção não é influenciada pela "idade" do nêutron, a probabilidade de cada nêutron de desaparecer (i.e. sofrer uma reação de absorção) durante um intervalo  $dt$  é  $\frac{dt}{\theta}$ , sendo o número de nêutrons que desaparecem em  $dt$  é igual a  $n \frac{dt}{\theta}$ .

Cada desaparecimento tem probabilidade  $w$  de ser uma fissão e, se a fissão realmente ocorre,  $\nu$  nêutrons são gerados em média no processo. Portanto cada desaparecimento contribui, em média, com  $w\nu = k_{eff}$  novos nêutrons. Assim, os  $n \frac{dt}{\theta}$  desaparecimentos observados no intervalo  $dt$  contribuem com  $k_{eff} n \frac{dt}{\theta}$  nêutrons.

Desse modo, a variação do número de nêutrons durante um intervalo  $dt$  é

$$dn = -n \frac{dt}{\theta} + k_{eff} n \frac{dt}{\theta} \quad (3.2)$$

i.e.:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k_{eff} - 1}{\theta} n \quad (3.3)$$



e integrando:

$$n(t) = n(0) \exp\left(\frac{(k_{eff} - 1)t}{\theta}\right) \quad (3.4)$$

Utilizando os mesmos valores do exemplo acima, pode-se confirmar que os resultados são quase idênticos, i.e. essa abordagem mais sofisticada em nada muda as conclusões intuitivas.

### 3.1.1 Reatividade

Antes de inserir os nêutrons atrasados nesse contexto, faz-se necessário introduzir o conceito de reatividade, frequentemente utilizado em cinética. A reatividade  $\rho$  é definida como

$$\rho = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}} \quad (3.5)$$

e apesar de ser uma grandeza adimensional, pode ser expressa em *pcm* (por cem mil,  $\times 10^5$ ), porcentagem ( $\times 100$ ), ou em unidades de variação de  $k_{eff}$  ( $\frac{\Delta k_{eff}}{k_{eff}}$ ), que costumam ser omitidas).

A reatividade é nula na criticalidade. Seu sinal define a tendência da reação em cadeia: aumento da densidade de nêutrons se o sinal é positivo (estado supercrítico), redução se negativo (subcrítico). Note que a reatividade é muito próxima a  $k_{eff} - 1$  na vizinhança da criticalidade.

A reatividade de um reator está diretamente relacionada a variações na taxa de absorção, já que um aumento na absorção reduz o fator de multiplicação (i.e. são inversamente proporcionais).

Se a absorção aumenta, nêutrons desaparecem mais rapidamente, e seu tempo de vida médio também decresce de maneira inversamente proporcional à absorção. Pode-se então relacionar  $\theta$  com  $k_{eff}$  através da expressão  $\theta = Lk_{eff}$ , onde  $L$  é o tempo de vida médio de um nêutron na criticalidade. Introduzindo a definição de reatividade (3.5) na equação (3.3) pode-se simplificar as equações de cinética:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho}{L}n \quad (3.6)$$

e integrando:

$$n(t) = n(0) \exp\left(\frac{\rho t}{L}\right) \quad (3.7)$$

## 3.2 Cinética com nêutrons atrasados

### 3.2.1 Parâmetros dos nêutrons atrasados

Como mencionado, alguns nêutrons são emitidos com um atraso em relação à fissão devido ao decaimento beta dos precursores de nêutrons atrasados que precede emissão de nêutrons. Esses são os dois principais meios pelos quais os nêutrons são gerados. Cerca de uma centena

de processos semelhantes ocorrem, e estes são agrupados de acordo com características semelhantes (obtidas experimentalmente).

Para dado núcleo fissil, cada grupo  $i$  de nêutrons atrasados é caracterizado por dois parâmetros nucleares:  $\beta_i$  é a proporção de nêutrons atrasados neste grupo em comparação com todos os nêutrons emitidos por fissão (prontos e atrasados), e a constante de decaimento radioativo  $\lambda_i$  do grupo de precursores, ou seja, o decaimento beta que levará o núcleo a emitir um nêutron (quase instantaneamente) ou, equivalentemente, o tempo de vida médio de um grupo  $\tau_i = \frac{1}{\lambda_i}$ .

### 3.2.2 Aspectos qualitativos

Como primeira aproximação, o raciocínio anterior permanece válido mesmo levando em conta os nêutrons atrasados no cálculo do tempo médio de uma geração, ou seja, fazer a seguinte substituição para os nêutrons atrasados:  $L$  substituído por  $\tau_i + L$ :

$$\bar{L} = (1 - \beta) \times L + \sum_i \beta_i \times (\tau_i + L) = L + \beta\bar{\tau} \quad (3.8)$$

Tomando por exemplo um PWR com urânio 235, o valor de  $L$  altera-se de  $2,5 \times 10^{-5} s$  para  $\bar{L} = 2,5 \times 10^{-5} + 679 \times 10^{-5} \times 11,31 = 0,077 s$  (parâmetros nucleares obtidos em Reuss, 2008; o termo  $\beta\bar{\tau}$  adicionado devido aos nêutrons atrasados domina o fator  $L$ ). Assim, não há 40000, mas apenas cerca de 13 gerações “efetivas” por segundo para serem computadas. Se o fator de multiplicação varia em 0,01% com respeito à criticalidade, a potência não aumenta por um fator de 55, mas apenas um milésimo do valor inicial. Portanto, é evidente que a presença dos nêutrons atrasados altera drasticamente o comportamento do reator, tornando-o mais fácil de monitorar e controlar, suprimindo quaisquer alardes gerados pelos cálculos da seção (2.1).

Essa abordagem é correta em termos qualitativos, mas não quantitativamente para casos em que a reatividade é muito alta. Portanto, um modelo mais preciso se faz necessário. Ainda no modelo de cinética pontual, sejam  $n$  a densidade de nêutrons e  $C_i$  a densidade de precursores do grupo  $i$ .

Para nêutrons, a taxa de desaparecimento continua como antes, mas pode-se distinguir entre os nêutrons gerados diretamente da fissão da fração de  $\beta$  nêutrons atrasados, gerados a partir do decaimento radioativo e caracterizados pelo termo  $\lambda C$ .

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k_{eff}(1 - \beta) - 1}{\theta} n + \sum_i \lambda_i C_i \quad (3.9)$$

Para precursores, a taxa de desaparecimento é expressa pelo decaimento radioativo (termo  $\lambda_i C_i$ ), e a taxa de produção é igual ao número de nêutrons emitidos com atraso pela

cadeia em questão.

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{k_{eff}\beta_i}{\theta}n - \lambda_i C_i \quad (3.10)$$

Assim, com  $\theta = k_{eff}L$  e introduzindo a reatividade, pode-se simplificar as equações para (Lamarsh, 1966; Reuss, 2008):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{L}n + \sum_i \lambda_i C_i \quad (3.11)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{L}n - \lambda_i C_i \quad (3.12)$$

No presente trabalho, utilizou-se apenas um grupo de precursores de nêutrons atrasados, caracterizado pelos parâmetros  $\beta = 0,0065$  e  $\lambda = 0,07741s^{-1}$ . Esses valores são obtidos respectivamente através da soma dos  $\beta_i$  e pelas médias ponderadas dos  $\lambda_i$  no caso de 6 grupos de precursores e Urânio 235 como combustível (Lamarsh, 1966).

### 3.3 Potência

No estudo de reatores, a potência fornecida é definida em função do fluxo como (Lamarsh, 1966):

$$P = \gamma \bar{\Sigma}_f \int_{dV} \Phi dV \quad (3.13)$$

onde  $\gamma$  é a energia aproveitada por fissão (em Joules [ $J$ ] ou elétron-volts [ $eV$ ]), e  $\bar{\Sigma}_f$  é a seção de choque de fissão média (ambas constantes). Lembrando que no modelo de cinética pontual o fluxo é dividido em uma parte espacial e uma parte temporal  $\Phi = \phi(\bar{v}, \Omega) \times n(t)$ , tem-se:

$$P = n(t) \times \left( \gamma \bar{\Sigma}_f \int_{dV} \phi dV \right) \quad (3.14)$$

Note que o termo  $\gamma \bar{\Sigma}_f \int_{dV} \phi dV$  independe do tempo, podendo ser considerado uma constante de proporcionalidade entre a potência e a densidade de nêutrons  $n(t)$ .

Assim, no estudo de cinética pontual, é comum assumir que a densidade de nêutrons e a potência tenham a mesma magnitude, e expressar  $n(t)$  não em unidades de densidade, mas em unidades de potência ( $MW$ ).

## 4 O MODELO CINÉTICO COM REALIMENTAÇÃO DE TEMPERATURA

O modelo utilizado neste estudo inicia pelas equações de cinética pontual com um grupo de precursores de nêutrons atrasados, conforme (Nahla & Zayed, 2010), onde  $n(t)$  é a população de nêutrons,  $C(t)$  é a concentração de precursores de nêutrons atrasados,  $T(t)$  é a temperatura do núcleo,  $\rho(T)$  é a reatividade (a qual depende da temperatura  $T$ ),  $\beta$  é a fração de nêutrons atrasados,  $L$  é o tempo de geração médio de nêutrons prontos e  $\lambda$  é a constante de decaimento média dos precursores.

$$n'(t) = \left( \frac{\rho(T) - \beta}{L} \right) n(t) + \lambda C(t) \quad (4.1)$$

$$C'(t) = \frac{\beta}{L} n(t) - \lambda C(t) \quad (4.2)$$

Esse sistema de equações é estendido por uma perturbação na forma de uma realimentação de temperatura, onde a perturbação pode ser interpretada como uma mudança na configuração do sistema nuclear, que tem como consequência a alteração de um fluxo de calor específico, o qual induz uma variação de temperatura. Sendo os processos nucleares a fonte de produção de calor, assume-se que a taxa de variação térmica possa estar relacionada à densidade de nêutrons de forma simples, linear.

$$T'(t) = Hn(t) \quad (4.3)$$

Nesse sentido, a equação para a taxa de variação da temperatura é uma perturbação onde a constante de proporcionalidade  $H$  representa um parâmetro ligado à influência da mudança de fluxo de calor na taxa de variação da temperatura. Assim, a relação linear entre a variação de temperatura e a densidade de nêutrons é suprida com um mecanismo de realimentação.

Sendo o sistema de equações formado por equações diferenciais de primeira ordem, é necessário conhecer as condições iniciais de cada uma das variáveis a fim de determinar uma solução única para o problema. Portanto, considerou-se o reator inicialmente em equilíbrio ( $n'(0) = 0$ ), com potência e temperatura iniciais conhecidos ( $n(0)$ ,  $T(0)$ ). A condição de equilíbrio nos permite calcular a concentração inicial de precursores como:

$$C(0) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\beta - \rho}{L} \right) n(0) \quad (4.4)$$

No modelo aqui discutido, a variação da reatividade com a temperatura é dada por uma perturbação de primeira ordem, expressa pela seguinte equação:

$$\rho(T) = \rho(0) - \alpha[T - T(0)] \quad (4.5)$$

onde  $\rho(0)$  é a reatividade inicial e  $\alpha$  é o coeficiente de temperatura da reatividade.

Substituindo (4.5) em (4.1) resulta em:

$$n' = \left( \frac{\rho(0) - \alpha [T - T(0)] - \beta}{L} \right) n + \lambda C \quad (4.6)$$

É inconveniente representar tal sistema em forma matricial devido a presença do produto  $Tn$  na equação acima. Assim, escolhe-se desacoplar o sistema formado por (4.1) e (4.2). Isolando-se  $\lambda C$  na equação (4.1), tem-se

$$\lambda C = n' - an \quad (4.7)$$

onde  $a = \frac{\rho(T) - \beta}{L}$ . Derivando (4.7) no tempo obtém-se:

$$\lambda C' = n'' - an' - a'n \quad (4.8)$$

e multiplicando (4.2) por  $\lambda$ , obtém-se uma segunda expressão para  $\lambda C'$ :

$$\lambda C' = \frac{\beta\lambda}{L}n - \lambda(\lambda C) \quad (4.9)$$

igualando as expressões (4.8) e (4.9) e substituindo  $\lambda C$  por (4.7) obtém-se:

$$n'' + (\lambda - a)n' - \left( a' + \frac{\beta\lambda}{L} + \lambda a \right) n = 0 \quad (4.10)$$

e substituindo (4.5) de volta em  $a$ :

$$a = \frac{\rho(0) - \alpha [T - T(0)] - \beta}{L} \quad (4.11)$$

$$a' = \frac{-\alpha T'}{L} = \frac{-\alpha H n}{L} \quad (4.12)$$

Substituindo  $a$  e  $a'$  em (4.10) resulta em uma equação diferencial não linear de segunda ordem para a densidade de nêutrons:

$$\begin{aligned} n'' + \left( \lambda + \frac{\beta - \rho(0)}{L} \right) n' - \left( \frac{\lambda\rho(0)}{L} \right) n + \\ + \left( \frac{\alpha [T - T(0)]}{L} \right) n' + \left( \frac{\lambda\alpha [T - T(0)]}{L} \right) n + \left( \frac{\alpha H}{L} \right) n^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Subtraindo de ambos os lados os termos não lineares ou com produtos  $Tn$ , obtém-se:

$$n'' + bn' + cn = \mathbb{S}(n, n', T, n^2) \quad (4.14)$$

Portanto o sistema que representa o problema é dado por:

$$n'' + bn' + cn = \mathbb{S} \quad (4.15)$$

$$T' = Hn \quad (4.16)$$

com  $b = \lambda + \frac{\beta - \rho(0)}{L}$ ,  $c = -\frac{\lambda\rho(0)}{L}$  e  $\mathbb{S}$  dado por:

$$\mathbb{S} = - \left( \frac{\alpha[T - T(0)]}{L} \right) (n' + \lambda n) - \left( \frac{\alpha H}{L} \right) n^2 \quad (4.17)$$

Dessa forma, o sistema a ser resolvido passa a ser representado por um par de equações. Além disso, a concentração de precursores não aparece explicitamente, mas pode ser calculada em qualquer instante  $t$  utilizando os valores de densidade, temperatura e reatividade pela expressão:

$$C(t) = \frac{1}{\lambda} \left( n'(t) - \frac{\rho(t) - \beta}{L} n(t) \right) \quad (4.18)$$

sendo a reatividade calculada pela expressão (4.5). Entretanto torna-se necessário lidar com as não linearidades presentes no termo de fonte  $\mathbb{S}$  da equação (4.15). Para resolver este problema, utilizou-se o método da decomposição e os polinômios de Adomian.

## 4.1 Decomposição

O método da decomposição já é aplicado com sucesso a problemas de cinética pontual (Petersen *et al.*, 2011). O procedimento consiste em expandir em séries a densidade de nêutrons, a temperatura e o termo não linear da fonte de maneira ordenada, rearranjando os sistemas de maneira conveniente para a construção da solução. Há diversas maneiras de efetuar este rearranjo, e a utilizada neste trabalho foi a mais estável encontrada pelo autor.

Primeiramente, definiu-se:

$$n = \sum_{j=0}^{R-1} n_j \quad (4.19)$$

$$T = \sum_{j=0}^{R-1} T_j \quad (4.20)$$

$$\mathbb{S} = S_0 + \sum_{j=1}^{R-1} S_j - \left(\frac{\alpha H}{L}\right) A_{j-1} \quad (4.21)$$

onde os  $A_j$  são os polinômios de Adomian (que substituem a não linearidade  $n^2$ ) e os  $S_j$  são dados pela equação (4.17) e dependem apenas dos termos já determinados nos passos recursivos anteriores com sub-índices ( $r < j$ ), i.e.  $S_1 = S_1(n_0, n'_0, T_0)$ ,  $S_2 = S_2(n_0, n'_0, T_0, n_1, n'_1, T_1)$ , ...,  $S_j = S_j(n_0, n'_0, T_0, \dots, n_{j-1}, n'_{j-1}, T_{j-1})$ . Para garantir essa dependência, agrupou-se  $S_{j>0}$  de acordo com a seguinte expressão recursiva:

$$S_{j>0} = \frac{-\alpha}{L} \left[ \sum_{p=0}^{j-1} [T_p - T_p(0)] \right] \left[ \sum_{p=0}^{j-1} [n'_p + \lambda n_p] \right] - \sum_{p=0}^{j-1} S_p \quad (4.22)$$

e escolheu-se  $S_0 = 0$  como condição de inicialização.

Dessa maneira, para cada valor do sub-índice  $j$  constrói-se um sistema de duas equações diferenciais. Começando com  $j = 0$ :

$$n''_0 + bn'_0 + cn_0 = S_0 = 0 \quad (4.23)$$

$$T'_0 = Hn_0 \quad (4.24)$$

O primeiro sistema é resolvido utilizando-se as condições iniciais  $n(0)$ ,  $\rho(0)$  e  $T(0)$ , assim como os parâmetros cinéticos  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $L$  e  $H$ . Da primeira equação, tem-se:

$$n_0(t) = \left( \frac{n_0(0)}{k_2 - k_1} \right) (k_2 e^{k_1 t} - k_1 e^{k_2 t}) \quad (4.25)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são as raízes da equação característica associada a  $n_0(t)$ . Usando esse resultado, computa-se  $T_0(t)$  como:

$$T_0(t) = T_0(0) + H \int_0^t n_0(\tau) d\tau \quad (4.26)$$

Conhecidos  $n_0$  e  $T_0$ , torna-se possível calcular  $S_1$  usando (4.22). Desse modo, o se-

gundo sistema fica:

$$n_1'' + bn_1' + cn_1 = S_1 - \left(\frac{\alpha H}{L}\right) A_0 \quad (4.27)$$

$$T_1' = Hn_1 \quad (4.28)$$

Cabe ressaltar que, por construção, as condições iniciais para todos os sistemas de sub índice  $j > 0$  são:

$$n_{j>0}(0) = 0 \quad (4.29)$$

$$n'_{j>0}(0) = 0 \quad (4.30)$$

$$T_{j>0}(0) = 0 \quad (4.31)$$

isto é, toda a condição inicial do problema é utilizada para resolver o primeiro sistema ( $j = 0$ )

#### 4.1.1 Método da decomposição e polinômios de Adomian

O método da decomposição (Adomian, 1989, 1994) tem por objetivo solucionar equações diferenciais não lineares sem a necessidade de linearizações, perturbações, aproximações fechadas ou discretizações. Além disso, quando a solução obtida por esse método converge, ela é exata. Infelizmente, a convergência do método não é garantida, devendo ser avaliada caso a caso.

Em linhas gerais, o método consiste em aproximar o termo não linear da equação por uma série infinita, definida de acordo com a forma da não linearidade. Assim, tem-se a necessidade de truncar a série em um número  $r$  de termos. Cabe ressaltar que a validade restringe-se às regiões dentro do raio de convergência da série.

Seja

$$\mathcal{L}y(t) = G(t) \quad (4.32)$$

uma equação onde um operador diferencial não linear  $\mathcal{L}$  é aplicado sobre a função  $y(t)$ , e  $G(t)$  é o termo de fonte. Pode-se decompor o operador  $\mathcal{L}$  em  $\mathcal{L}_N + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R$ , onde  $\mathcal{L}_N$  é a parte não linear,  $\mathcal{L}_L$  é a parte linear com inversão conhecida, e  $\mathcal{L}_R$  é a parte restante. Por conveniência, escolhe-se  $\mathcal{L}_L$  como o operador de maior ordem. Assim, pode-se reescrever a equação anterior isolando-se a parte linear:

$$\mathcal{L}_L y = G - \mathcal{L}_N y - \mathcal{L}_R y \quad (4.33)$$

Sendo o operador inverso de  $\mathcal{L}_L$  conhecido, pode-se aplicá-lo à equação, obtendo-se:

$$\mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_L y = \mathcal{L}_L^{-1} G - \mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_N y - \mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_R y \quad (4.34)$$



No caso específico tratado neste trabalho, tem-se:

$$\mathcal{L}_L [\cdot] = \frac{d^2}{dt^2} [\cdot] \quad (4.35)$$

$$\mathcal{L}_L^{-1} [\cdot] = \int_{\kappa_1=0}^t \int_{\kappa_2=0}^t [\cdot] \quad (4.36)$$

onde  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são variáveis de integração, de modo que

$$\mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_L y = \int_{\kappa_1=0}^t \int_{\kappa_2=0}^{\kappa_1} \frac{d^2}{d\kappa_2^2} y(\kappa_2) d\kappa_2 d\kappa_1 \quad (4.37)$$

$$= \int_{\kappa_1=0}^t \left( \left. \frac{d}{d\kappa_2} y(\kappa_2) \right|_{\kappa_2=\kappa_1} - \left. \frac{d}{d\kappa_2} y(\kappa_2) \right|_{\kappa_2=0} \right) d\kappa_1 \quad (4.38)$$

$$= \int_{\kappa_1=0}^t \left( \frac{d}{d\kappa_1} y(\kappa_1) \right) d\kappa_1 - \frac{d}{dt} y(0) \int_{\kappa_1=0}^t d\kappa_1 \quad (4.39)$$

$$= y(t) - y(0) - \frac{dy(0)}{dt} t \quad (4.40)$$

Assim, resolvendo a equação (4.33) para  $y$ , tem-se:

$$y(t) = y(0) + \frac{dy(0)}{dt} t + \mathcal{L}_L^{-1} G - \mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_N y - \mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_R y \quad (4.41)$$

O termo não linear  $\mathcal{L}_N y$  passará a ser expresso por  $\sum_{j=0}^{\infty} A_j$ , onde os  $A_j$  são polinômios especiais (discutidos mais adiante) e a função  $y$  será decomposta numa soma infinita  $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ , onde o primeiro termo é definido como  $y_0 = y(0) + \frac{dy(0)}{dt} t + \mathcal{L}_L^{-1} G$ . Fazendo essas substituições na equação (4.41)

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_j = y_0 - \mathcal{L}_L^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} A_j - \mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_R \sum_{j=0}^{\infty} y_j$$

Assim, define-se cada um dos termos da série de  $y$  como

$$y_0 = y(0) + \frac{dy(0)}{dt} t + \mathcal{L}_L^{-1} G \quad (4.42)$$

$$y_1 = -\mathcal{L}_L^{-1} A_0 - \mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_R y_0 \quad (4.43)$$

$$y_2 = -\mathcal{L}_L^{-1} A_1 - \mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_R y_1 \quad (4.44)$$

$\vdots$

$$y_j = -\mathcal{L}_L^{-1} A_{j-1} - \mathcal{L}_L^{-1} \mathcal{L}_R y_{j-1} \quad (4.45)$$

$\vdots$

A geração dos polinômios  $A_n$  é tal que cada um deles depende apenas dos termos previamente calculados de  $y$ , i.e.  $A_0 = A_0(y_0)$ ,  $A_1 = A_1(y_0, y_1)$ ,  $A_2 = A_2(y_0, y_1, y_2)$ ,  $\dots$ ,  $A_j = A_j(y_0, \dots, y_j)$ , de modo que os  $y_j$  dependam apenas dos  $y_{j-1}$  e anteriores, ou seja,  $y_j = y_j(y_0, \dots, y_{j-1})$ .

### 4.1.2 Geração dos polinômios $A_j$

Seja o termo não linear de (4.33) expresso como função de  $y$ , isto é

$$\mathcal{L}_N y = \sum_{j=0}^{\infty} A_j = f(y) \quad (4.46)$$

Expandindo  $f(y)$  em série de Taylor em torno de  $y_0$ :

$$\mathcal{L}_N y = \sum_{j=0}^{\infty} A_j = f(y_0) + (y - y_0) f'(y_0) + \frac{(y - y_0)^2}{2!} f''(y_0) + \dots \quad (4.47)$$

$$= f(y_0) + \left( \sum_{p=1}^{\infty} y_p \right) f'(y_0) + \frac{1}{2!} \left( \sum_{p=1}^{\infty} y_p \right)^2 f''(y_0) + \dots \quad (4.48)$$

$$= \frac{1}{0!} \left( \sum_{p=1}^{\infty} y_p \right)^0 f(y_0) + \frac{1}{1!} \left( \sum_{p=1}^{\infty} y_p \right)^1 f'(y_0) + \frac{1}{2!} \left( \sum_{p=1}^{\infty} y_p \right)^2 f''(y_0) + \dots \quad (4.49)$$

e por construção, pode-se expressar o termo não linear de forma geral como:

$$\mathcal{L}_N y = \sum_{j=0}^{\infty} A_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(y_0) \left( \sum_{p=1}^{\infty} y_p \right)^j \quad (4.50)$$

onde a notação  $f^{(j)}(y_0)$  representa a  $j$ -ésima derivada da função não linear  $f$  no ponto  $y_0$ .

Dessa forma, é possível construir cada um dos  $A_j$  como:

$$\begin{aligned} A_0 &= f(y_0) \\ A_1 &= y_1 f^{(1)}(y_0) \\ A_2 &= y_2 f^{(1)}(y_0) + \frac{1}{2!} (y_1)^2 f^{(2)}(y_0) \\ A_3 &= y_3 f^{(1)}(y_0) + \frac{1}{2!} ((y_1 + y_2)^2 - (y_1)^2) f^{(2)}(y_0) + \frac{1}{3!} (y_1)^3 f^{(3)}(y_0) \\ &\vdots \\ A_{j>0} &= \sum_{p=0}^{j-1} \frac{1}{(p+1)!} \left[ \left( \sum_{m=1}^{j-p} y_m \right)^{p+1} - \left( \sum_{m=1}^{j-p-1} y_m \right)^{p+1} \right] f^{(p+1)}(y_0) \end{aligned} \quad (4.52)$$

### 4.1.3 Aplicação à não linearidade $n^2$

Neste trabalho, o termo não linear  $\mathcal{L}_N n = n^2 = \sum_{j=0}^{\infty} A_j$  é expandido em termos de polinômios de Adomian de acordo com as expressões (4.51) e (4.52), mas “adiantando” alguns dos termos (pela formulação anterior, os termos  $n_j^2$  deveriam aparecer nos  $A_{j+1}$ , mas

foram utilizados já em  $A_j$ ; Adomian (1989) se refere a essas manipulações como “polinômios acelerados”):

$$A_0 = n_0^2 \quad (4.53)$$

$$A_1 = n_1^2 + 2n_1n_0 \quad (4.54)$$

$$A_2 = n_2^2 + 2n_2(n_0 + n_1) \quad (4.55)$$

$$A_3 = n_3^2 + 2n_3(n_0 + n_1 + n_2) \quad (4.56)$$

$$A_4 = n_4^2 + 2n_4(n_0 + n_1 + n_2 + n_3) \quad (4.57)$$

A expansão foi truncada em 5 termos ( $j_{max} = 4$ ), mas percebe-se que uma forma geral de representar essa não linearidade específica mais simples do que (4.52) é:

$$A_0 = n_0^2 \quad (4.58)$$

$$A_j = n_j^2 + 2n_j \sum_{p=0}^{j-1} n_p \quad (4.59)$$

Conhecidas as expressões de  $T_0$ ,  $n_0$ ,  $n'_0$ ,  $A_0$  e  $S_1$ , substitui-se em (4.27) (4.28), obtendo o sistema para  $j = 1$  em uma forma mais explícita:

$$\begin{aligned} n''_1 + bn'_1 + cn_1 &= -n_0(0) \left( \frac{\alpha H}{L} \int_0^t n_0(\tau) d\tau \right) \left\{ \left[ \left( \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \right) (e^{k_1 t} - e^{k_2 t}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left[ \left( \frac{1}{k_2 - k_1} \right) (k_2 e^{k_1 t} - k_1 e^{k_2 t}) \right] \right\} - \\ &\quad - \left( \frac{\alpha H}{L} \right) \left[ \left( \frac{n_0(0)}{k_2 - k_1} \right) (k_2 e^{k_1 t} - k_1 e^{k_2 t}) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$T'_1 = Hn_1 \quad (4.61)$$

O método tem como característica o rápido crescimento de sua complexidade, e para lidar com esse problema, optou-se por dividir a variável temporal em intervalos de igual duração  $\omega$ , procedendo da seguinte forma:

1. Calcula-se  $n_0(t)$  utilizando sua equação homogênea (4.23).
2. Usando  $n_0(t)$ , calcula-se  $T_0(t)$ , de acordo com (4.26).
3.  $S_1(\omega)$  e  $A_0(\omega)$  são calculados usando os valores de  $T_0(\omega)$  e  $n_0(\omega)$ , de modo que  $S_1$  e  $A_0$  serão constantes (e não expressões dependentes do tempo).
4. Resolve-se a primeira equação de (4.27). Esta é uma equação diferencial não homogênea de segunda ordem, da qual apenas a solução particular tem interesse (pois a homogênea já foi resolvida no sistema anterior)

5.  $T_1(\omega)$ ,  $S_2(\omega)$  e  $A_1(\omega)$  são calculados conforme os passos 2 e 3. O procedimento é repetido até que se alcance a convergência.
6. Finalmente, tem-se:
- (a)  $n(\omega) = \sum_j n_j(\omega)$
  - (b)  $n'(\omega) = \sum_j n'_j(\omega)$
  - (c)  $T(\omega) = \sum_j T_j(\omega)$
  - (d)  $\rho(\omega) = \rho(0) - \alpha[T(\omega) - T(0)]$
  - (e)  $C(\omega) = \frac{1}{\lambda} \left( n'(\omega) - \frac{\rho(\omega) - \beta}{L} n(\omega) \right)$
7. Esses valores são usados como condições iniciais para o próximo passo de tempo, repetindo-se até um tempo final  $t_{max}$ .

## 4.2 Convergência e estabilidade: o critério de Lyapunov

Como mencionado anteriormente, a convergência dos polinômios de Adomian não é garantida. Além disso, critérios de convergência simples, como os de Cauchy, de D'Alambert e de Leibnitz são inadequados, uma vez que a equação resolvida é não linear.

Assim, um método baseado no critério de Lyapunov (Boichenko *et al.*, 2005) foi utilizado para verificar tanto a convergência quanto a estabilidade da solução obtida, procedendo-se da seguinte forma: primeiro, define-se

$$|\delta Z_j| = \left\| \sum_{p=j+1}^{\infty} n_p \right\| \quad (4.62)$$

que expressa a diferença máxima entre a solução obtida com o truncamento em  $j$  termos, i.e.  $\Gamma = \sum_{r=0}^j n_r$ , e a solução exata (infinitos termos), sendo  $\|\cdot\|$  a representação da norma máxima. Assim, tem-se que:

$$|\delta Z_j| = e^{\Gamma \Lambda} |\delta Z_0| \quad (4.63)$$

irá convergir se o valor de  $\Lambda$  for negativo. Isolando  $\Lambda$  em (4.63) tem-se:

$$\Lambda = \frac{1}{\left\| \sum_{p=0}^j n_r \right\|} \ln \left( \frac{\delta Z_n}{\delta Z_0} \right) \quad (4.64)$$

Originalmente, usa-se critério de Lyapunov para avaliar a influência da condição inicial na solução. Aqui, tal critério tem por propósito avaliar se as soluções obtidas têm comportamento caótico ou se convergem para uma única solução. Portanto, um valor de  $\Lambda > 0$ , um aumento no número de termos não garante a convergência da solução. Caso  $\Lambda < 0$  a partir de um número  $j$  de termos da solução, esta converge e é bem comportada, podendo-se tomar

$n = \sum_{p=0}^j n_p$  como solução (os termos restantes são considerados apenas correções pouco significativas).

Desse modo, o primeiro termo da solução,  $n_0$ , assemelha-se a uma condição inicial, sendo acrescido dos outros termos. Obtendo-se um valor negativo de  $\Lambda$ , comprova-se que há estabilidade da solução.

### 4.3 A distância relativa $\Delta$

O problema de cinética pontual com realimentação de temperatura ainda não conta com uma base de dados completamente confiável para a validação dos resultados. Ainda assim, sendo um tópico em desenvolvimento, a literatura contém resultados que aproximam-se bastante entre si.

Assim, ao invés de tomar os resultados da literatura como corretos, e medir o erro em relação a estes, o autor optou por utilizar a definição de *mutual assymetry*  $\Delta$ , a partir de agora referida como “distância relativa”, que consiste numa medida do afastamento dos resultados de ambos os métodos em relação à média entre estes, i.e.:

$$\Delta = \left\| \frac{Decomp - Numérico}{\frac{Decomp + Numérico}{2}} \times 100 \right\| [\%] \quad (4.65)$$

Dessa maneira, o autor não considera nem o próprio método, nem o método numérico de referência como o mais preciso. E já que ambos os métodos se propõem a solucionar o mesmo problema, espera-se que a medida da distância relativa tenha, em todos os pontos, valores semelhantes (exceto no caso de uma das soluções divergir bruscamente).

## 5 RESULTADOS

Aplicando o método previamente apresentado, os casos presentes em (Nahla & Zayed, 2010) foram resolvidos, utilizando os seguintes parâmetros nucleares:

- $\beta = 0,0065$
- $L = 0,0001s$
- $\lambda = 0,07741s^{-1}$
- $H = 0,05\frac{K}{MWs}$ ,
- $\alpha = 5 \times 10^{-5}K^{-1}$

sendo as condições iniciais:

- $n(0) = 10 MW$
- $n'(0) = 0$
- $T(0) = 300 K$
- $C(0) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\beta - \rho(0)}{L} \right) n(0)$

e os três valores da reatividade inicial  $\rho(0) = 0,2\beta$ ,  $\rho(0) = 0,5\beta$  e  $\rho(0) = 0,8\beta$ . O passo de tempo escolhido foi  $\omega = 0.01s$ , e a recursividade foi truncada em  $j = 4$  (i.e. 5 termos).

Para validação dos cálculos, os valores obtidos foram comparados aos valores numéricos presentes na literatura (Nahla & Zayed, 2010), e calculou-se a distância relativa  $\Delta$  entre o método da decomposição e a média entre este e os dados numéricos conforme a expressão (4.65).

Primeiro são analisados os resultados para a reatividade inicial  $\rho(0) = 0,8\beta$ , caso que apresentou as maiores distâncias relativas quando comparado aos resultados numéricos. Em seguida, o caso com  $\rho(0) = 0,5\beta$ , que também exibe um aumento nos valores das distâncias relativas próximo ao fim do intervalo considerado. Enfim, apresentam-se os resultados para  $\rho(0) = 0,2\beta$ , onde o valor de  $\Delta$  não apresenta variações bruscas.

Os valores presentes na literatura e aqueles obtidos pelo método da decomposição, tanto para a potência quanto para a temperatura (assim como os respectivos  $\Delta$ ) em cada caso constam nas tabelas do Apêndice A. Também no Apêndice A encontram-se os valores médios e máximos de  $\Delta$ .

## 5.1 Resultados para $\rho(0) = 0,8\beta$

A figura (5.1) representa os resultados obtidos com o método da decomposição (linha cheia) e os obtidos numericamente (círculos). Os dados numéricos disponíveis eram discretos, obtidos em intervalos de  $10s$  até  $150s$ , e o valor numérico final fornecido é para  $t = 155s$ , mas a solução obtida via decomposição foi calculada até  $t = 400$ .

Na figura (5.2) estão os valores da distância relativa  $\Delta$  da potência, representados pelas barras verticais, em [%].

Observa-se um comportamento inesperado de  $\Delta$ : até o ponto em  $t = 150s$ ,  $\Delta$  tem um valor máximo de  $0,1374\%$  em  $t = 150s$ . Mas no último ponto, a distância relativa cresce abruptamente, chegando a  $0,4886\%$  em  $t = 155s$ .

Esses fatos levaram o autor a ponderar sobre uma possível divergência da solução obtida e extrapolar essa solução até valores bem além daqueles fornecidos pelos dados numéricos, a fim de observar se, a partir de determinado ponto, a solução obtida pelo método da decomposição apresenta alguma anomalia. Eis o motivo pelo qual a figura (5.1) apresenta a extrapolação dos valores de potência até um tempo máximo  $t = 400s$ . Como pode ser visto na mesma figura, a solução obtida pelo método da decomposição mantém-se bem comportada, não apresentando indicações de divergir ou resultar em valores sem interpretação física nesse intervalo, aproximando assintoticamente de um valor mínimo.

No entanto, para uma análise mais rigorosa tanto da convergência quanto da estabilidade da solução da potência, o critério de Lyapunov (apresentado na seção 4.3) foi utilizado, sendo  $\Lambda$  calculado para um tempo máximo de  $t = 400s$ . Os resultados obtidos estão nas figuras (5.3) e (5.4), onde se pode ver claramente que em momento algum o valor de  $\Lambda$  é positivo (o que indicaria um ponto de possível divergência).

Logo a seguir, nas figuras (5.5) e (5.6), os resultados obtidos para a temperatura, seguido dos valores de  $\Delta$ . Extrapolando a solução até  $t = 400s$ , nota-se, como no caso da potência, ausência de anomalias (divergências, valores negativos ou imaginários de temperatura).

A figura (5.7) mostra os valores da concentração numéricos e pelo método da decomposição, já extrapolando a solução até  $t = 400s$ . A análise da distância relativa não é feita, pois a concentração de precursores foi calculada a partir dos valores de  $n$  e  $T$ , conforme a expressão (4.18). Na figura (5.8), a reatividade em função do tempo.

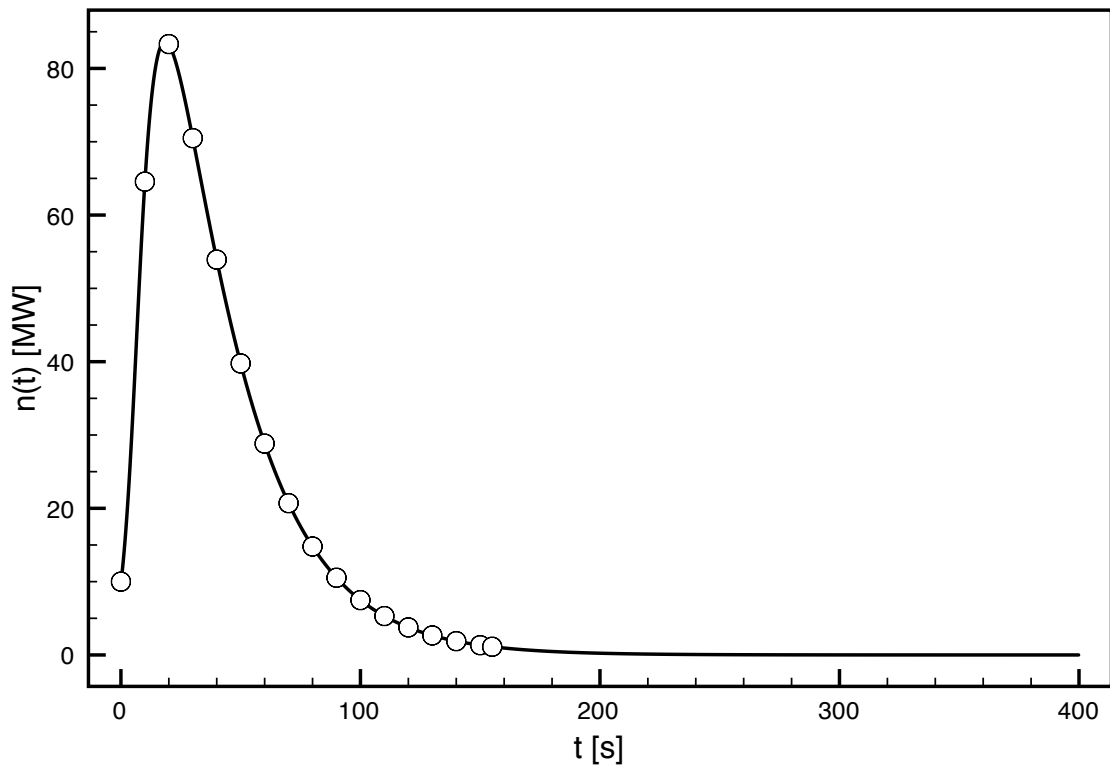


Figura 5.1:  $n(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ , até  $t = 400s$

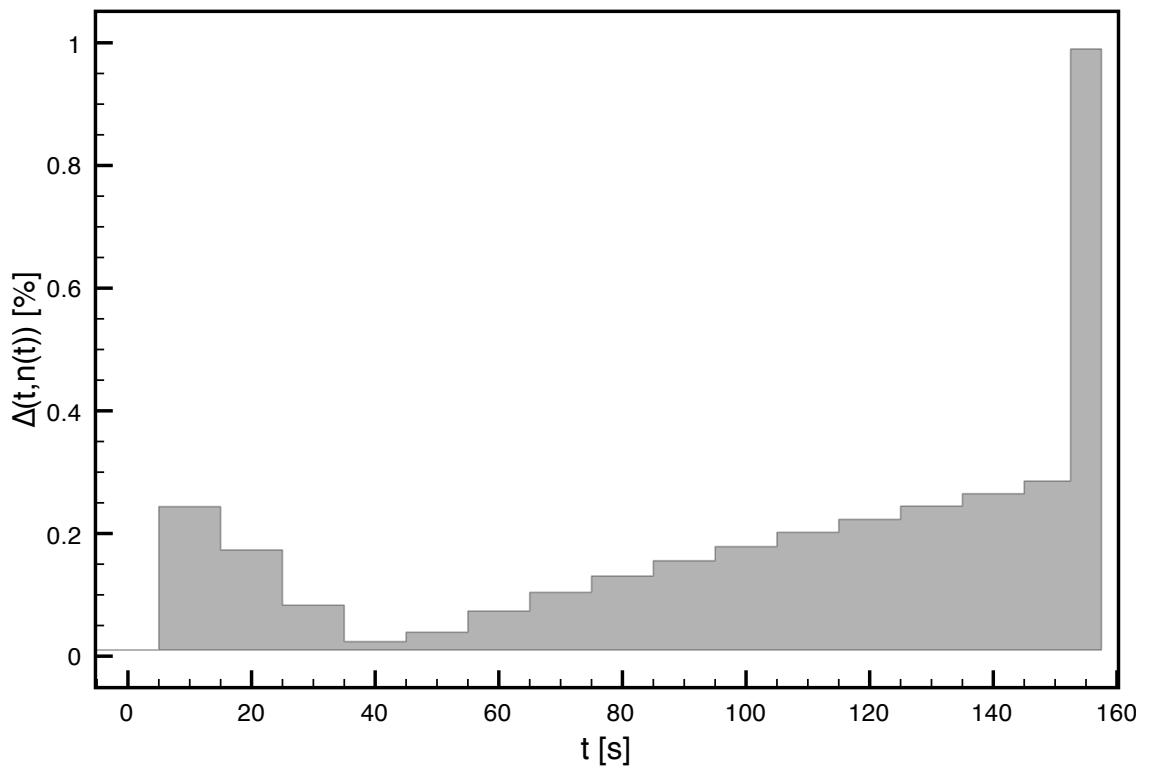


Figura 5.2: Distância relativa da potência, caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ , até  $t = 155s$



**Tabela 5.1:**  $n(t)$  caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ 

Tempo [s]	Numérico [MW]	Decomposição [MW]	$\Delta$ [%]
0	10,000000	10,000000	-
10	64,557487	64,482282	0,1166
20	83,320236	83,252406	0,0814
30	70,490250	70,464534	0,0365
40	53,917503	53,913786	0,0069
50	39,760925	39,766702	0,0145
60	28,824406	28,833550	0,0317
70	20,703527	20,713236	0,0469
80	14,789428	14,798334	0,0602
90	10,528523	10,536173	0,0726
100	7,478508	7,484798	0,0841
110	5,304107	5,309185	0,0957
120	3,758143	3,762135	0,1062
130	2,660907	2,664022	0,1170
140	1,883123	1,885519	0,1272
150	1,332234	1,334066	0,1374
155	1,116575	1,122044	0,4886
160	-	0,943672	-
170	-	0,667411	-
180	-	0,471970	-
190	-	0,333733	-
200	-	0,235972	-
210	-	0,166841	-
220	-	0,117959	-
230	-	0,083398	-
240	-	0,058961	-
250	-	0,041685	-
260	-	0,029470	-
270	-	0,020835	-
280	-	0,014730	-
290	-	0,010413	-
300	-	0,007362	-
310	-	0,005205	-
320	-	0,003680	-
330	-	0,002601	-
340	-	0,001839	-
350	-	0,001300	-
360	-	0,000919	-
370	-	0,000650	-
380	-	0,000459	-
390	-	0,000325	-
400	-	0,000230	-

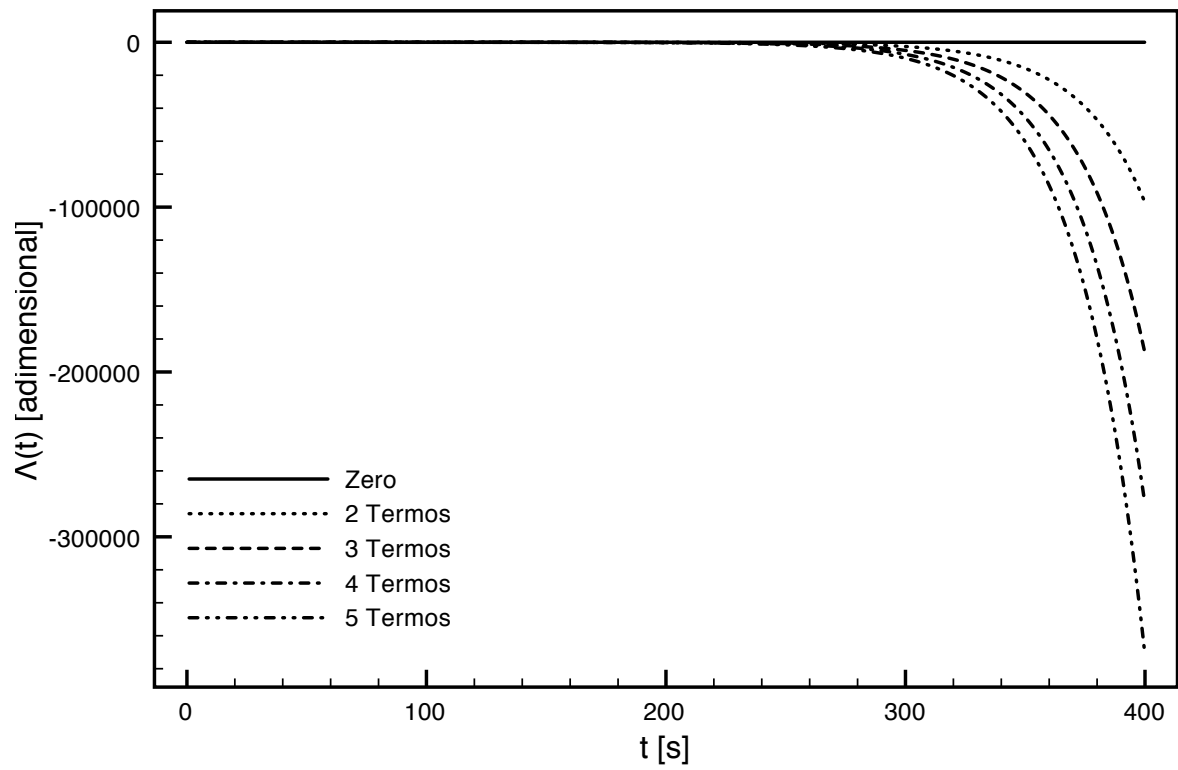


Figura 5.3: Valores de  $\Lambda$ , caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ , até  $t = 400s$

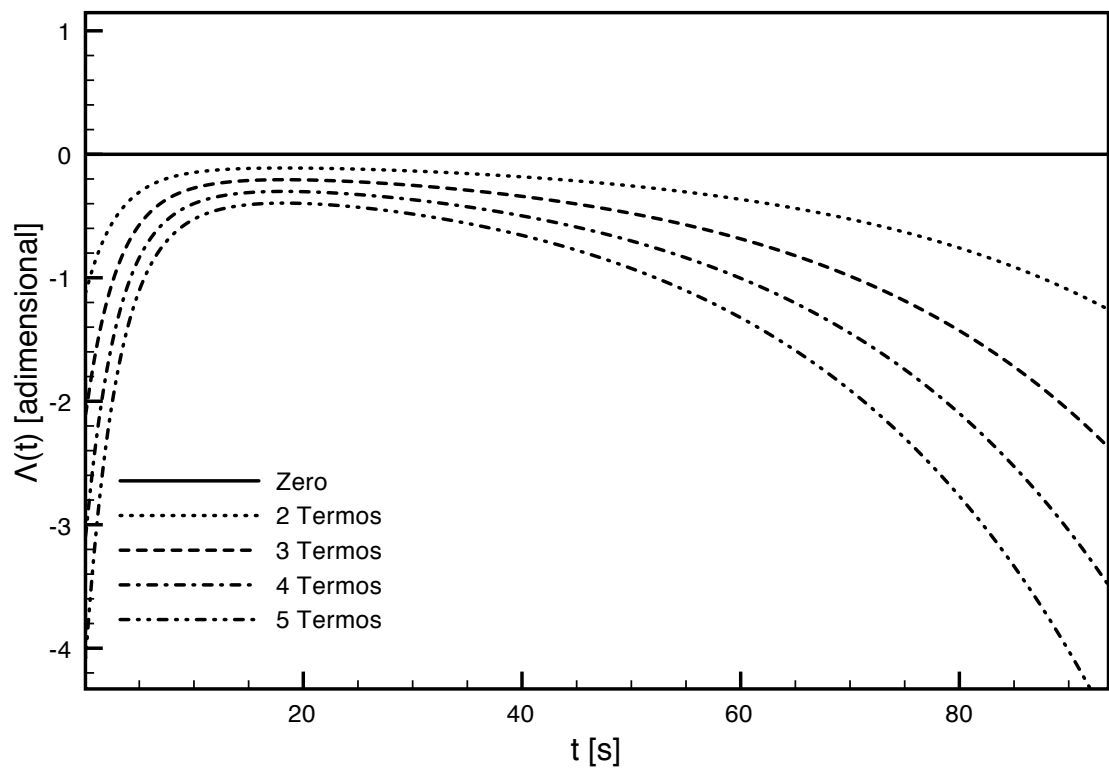


Figura 5.4: Detalhe de  $\Lambda$ , caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ , até  $t = 80s$

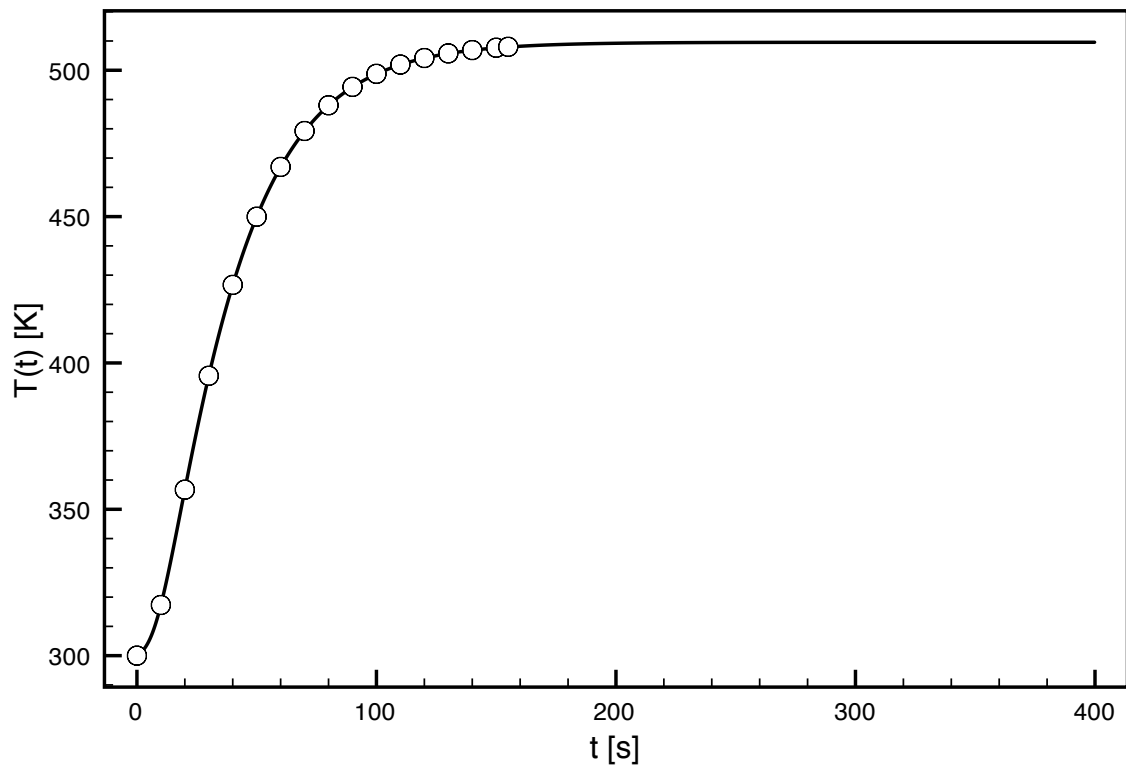


Figura 5.5:  $T(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ , até  $t = 400s$

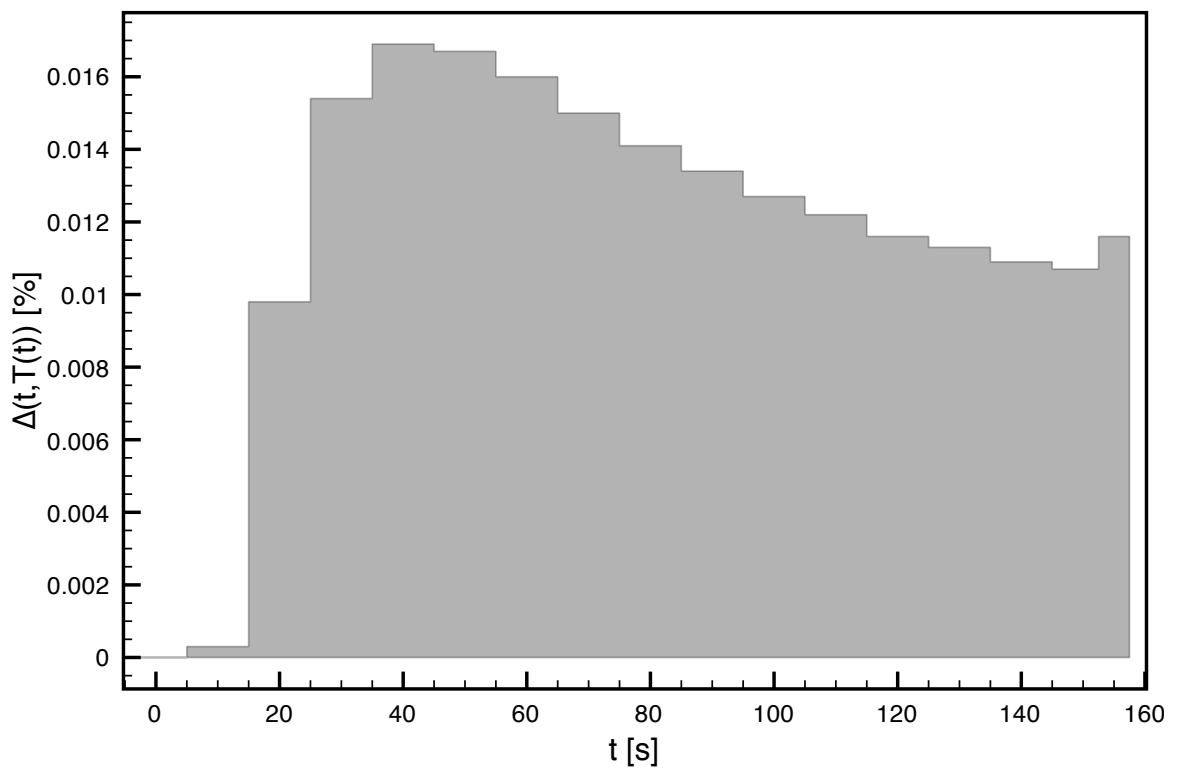


Figura 5.6: Distância relativa da temperatura, caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ , até  $t = 155s$

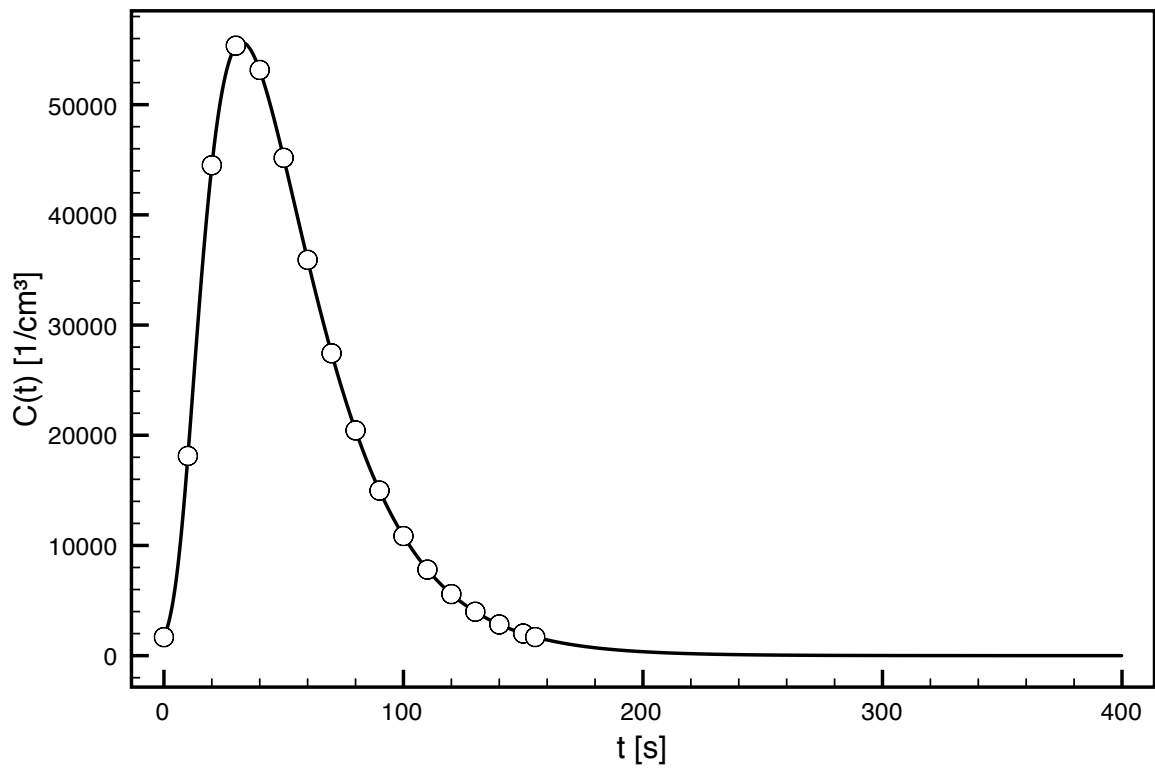


Figura 5.7:  $C(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ , até  $t = 400s$

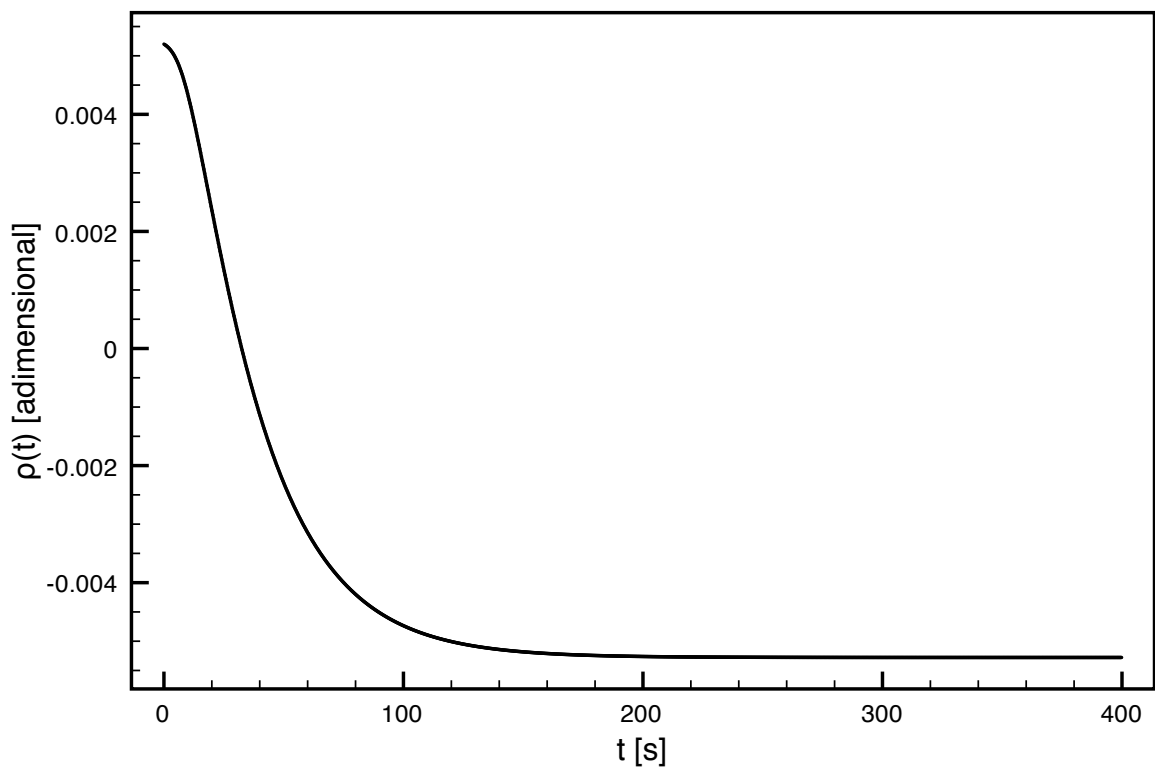


Figura 5.8:  $\rho(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ , até  $t = 400s$

**Tabela 5.2:**  $T(t)$  caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ 

Tempo [s]	Numérico [K]	Decomposição [K]	$\Delta$ [%]
0	300,000	300,000	-
10	317,305	317,306	0,0003
20	356,699	356,664	0,0098
30	395,611	395,550	0,0154
40	426,669	426,597	0,0169
50	449,955	449,880	0,0167
60	466,973	466,898	0,0161
70	479,250	479,178	0,0150
80	488,044	487,975	0,0141
90	494,315	494,249	0,0134
100	498,774	498,711	0,0126
110	501,939	501,87	0,0122
120	504,182	504,123	0,0117
130	505,771	505,714	0,0113
140	506,895	506,840	0,0109
150	507,691	507,637	0,0106
155	508,002	507,943	0,0116
160	-	508,201	-
170	-	508,599	-
180	-	508,881	-
190	-	509,081	-
200	-	509,222	-
210	-	509,321	-
220	-	509,392	-
230	-	509,442	-
240	-	509,477	-
250	-	509,502	-
260	-	509,519	-
270	-	509,532	-
280	-	509,541	-
290	-	509,547	-
300	-	509,551	-
310	-	509,554	-
320	-	509,557	-
330	-	509,558	-
340	-	509,559	-
350	-	509,560	-
360	-	509,561	-
370	-	509,561	-
380	-	509,561	-
390	-	509,561	-
400	-	509,562	-

## 5.2 Resultados para $\rho(0) = 0,5\beta$

A figura (5.9) apresenta os valores de potência e a (5.10) as distâncias relativas. Nota-se novamente que  $\Delta$  aumenta conforme a solução assintótica se aproxima, embora a variação observada não seja tão abrupta quanto no caso anterior. A estabilidade da potência pelo método da decomposição também pode ser observada na figura (5.9), até  $t = 400s$ .

Novamente, a análise pelo critério de Lyapunov evidencia a ausência de divergências ou instabilidades em todo o intervalo até  $t = 400s$ , como se pode ver nas figuras (5.11) e (5.12).

Quanto à temperatura, a distância relativa apresenta-se mais bem comportada, com um máximo de 0,0058% em  $t = 100s$ , na figura (5.14). Mesmo assim, a extrapolação é feita na figura (5.13).

Enfim, a representação da concentração de precursores e da reatividade, até  $t = 400s$ , nas figuras (5.15) e (5.16).

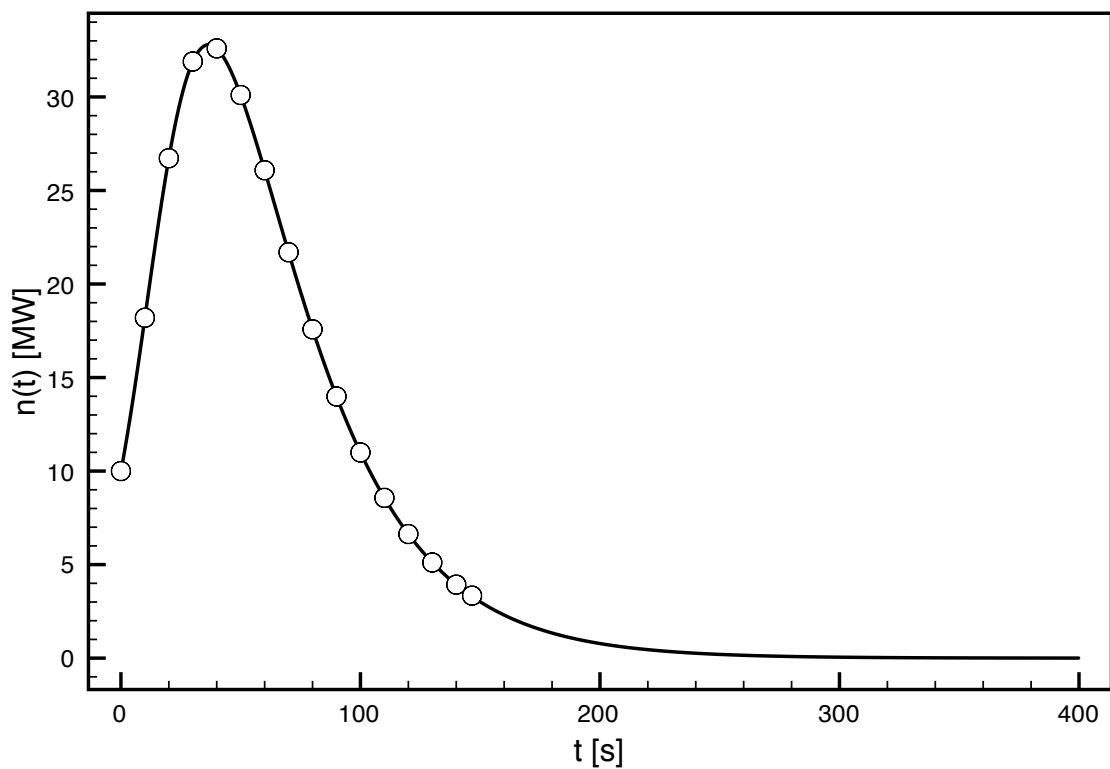


Figura 5.9:  $n(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ , até  $t = 400s$

**Tabela 5.3:**  $n(t)$  caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ 

Tempo [s]	Numérico [MW]	Decomposição [MW]	$\Delta$ [%]
0	10,000000	10,000000	-
10	18,195158	18,192858	0,0126
20	26,726191	26,719004	0,0269
30	31,895273	31,884462	0,0339
40	32,597210	32,585985	0,0344
50	30,103104	30,094202	0,0296
60	26,081541	26,075600	0,0228
70	21,698225	21,694910	0,0153
80	17,578548	17,577274	0,0072
90	13,988706	13,988750	0,0003
100	10,995258	10,996057	0,0073
110	8,567273	8,568453	0,0138
120	6,633668	6,635031	0,0205
130	5,113089	5,114456	0,0267
140	3,927845	3,929129	0,0327
146,1	3,339961	3,341170	0,0362
150	-	3,011002	-
160	-	2,303130	-
170	-	1,759224	-
180	-	1,342359	-
190	-	1,023465	-
200	-	0,779863	-
210	-	0,593974	-
220	-	0,452238	-
230	-	0,344235	-
240	-	0,261973	-
250	-	0,199340	-
260	-	0,151664	-
270	-	0,115380	-
280	-	0,087772	-
290	-	0,066766	-
300	-	0,050785	-
310	-	0,038629	-
320	-	0,029381	-
330	-	0,022347	-
340	-	0,016997	-
350	-	0,012928	-
360	-	0,009832	-
370	-	0,007478	-
380	-	0,005688	-
390	-	0,004326	-
400	-	0,003290	-

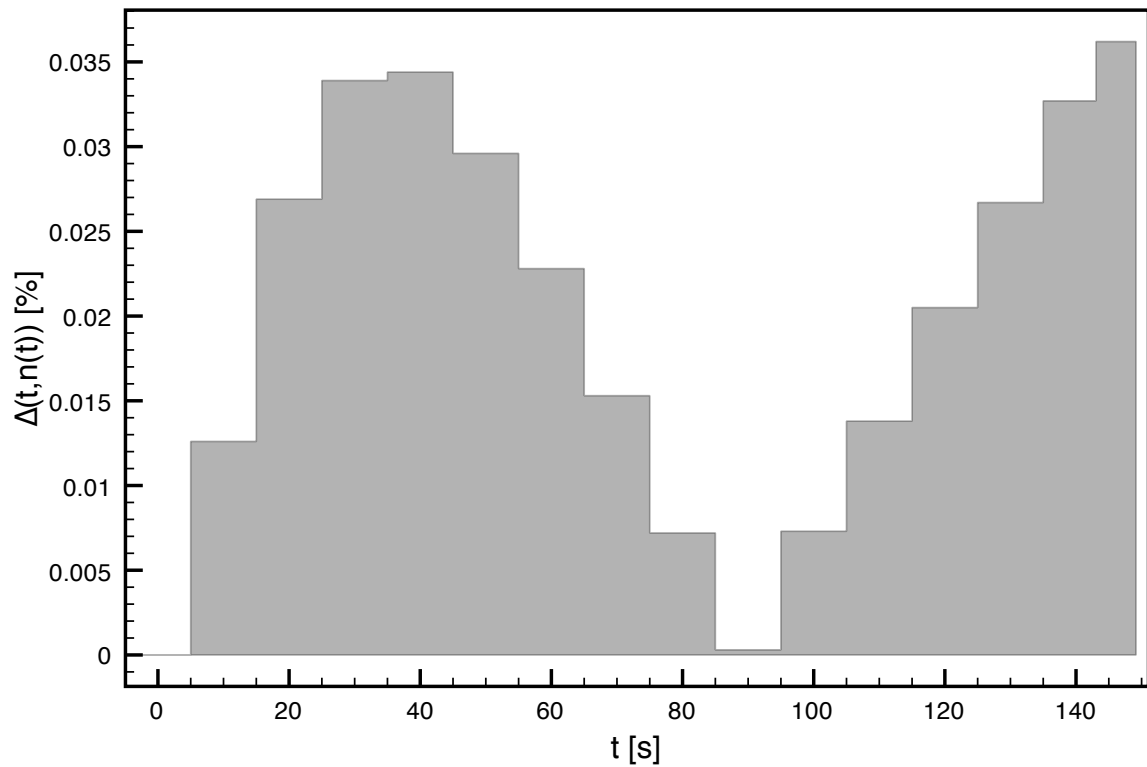


Figura 5.10: Distância relativa da potência, caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ , até  $t = 150s$

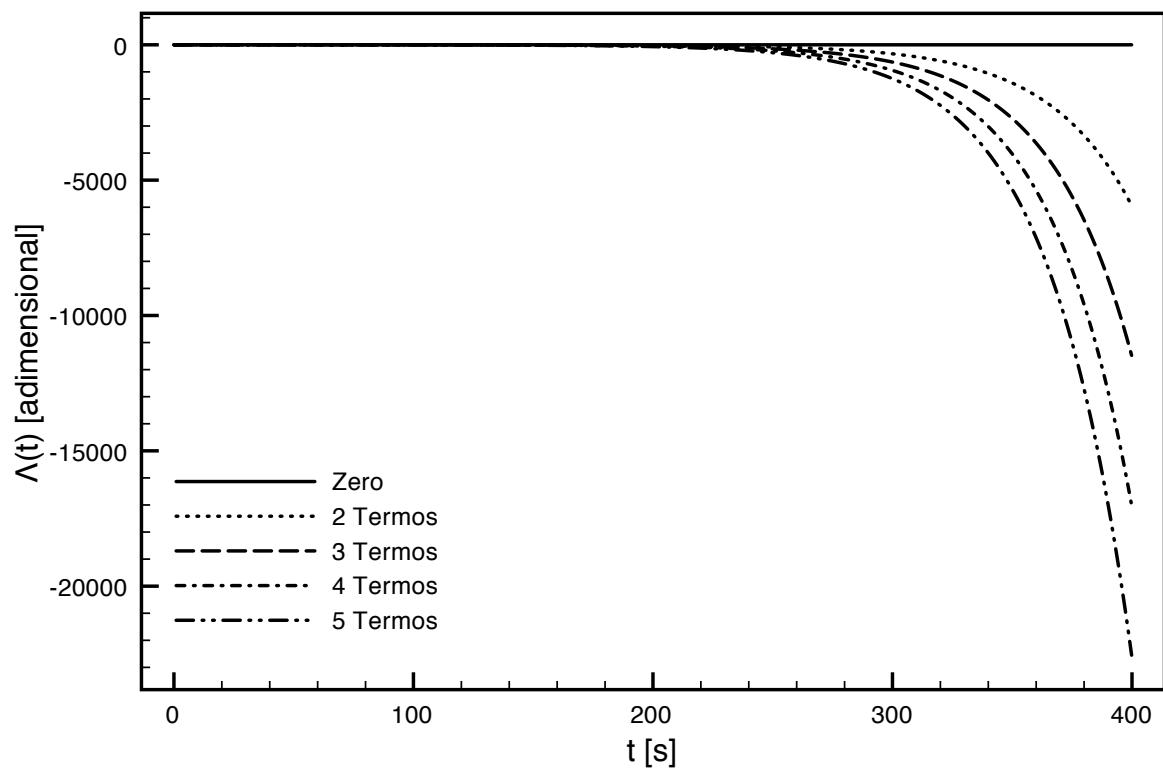


Figura 5.11: Valores de  $\Lambda$ , caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ , até  $t = 400s$



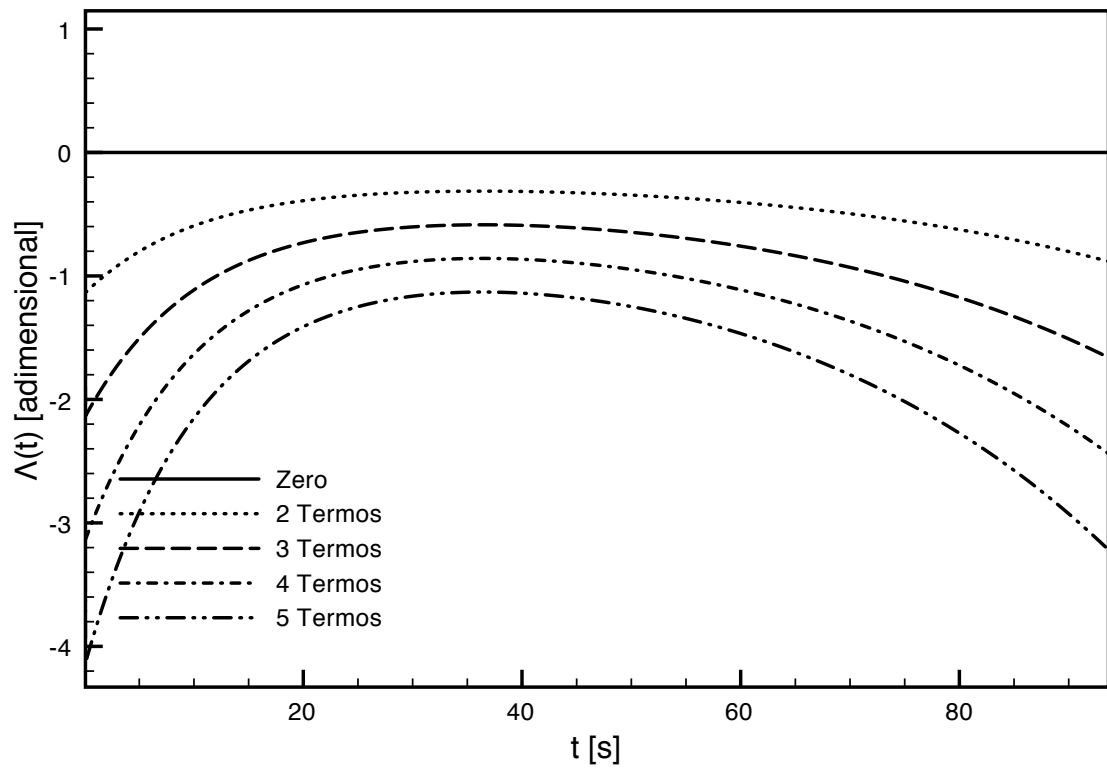


Figura 5.12: Detalhe de  $\Lambda$ , caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ , até  $t = 80s$

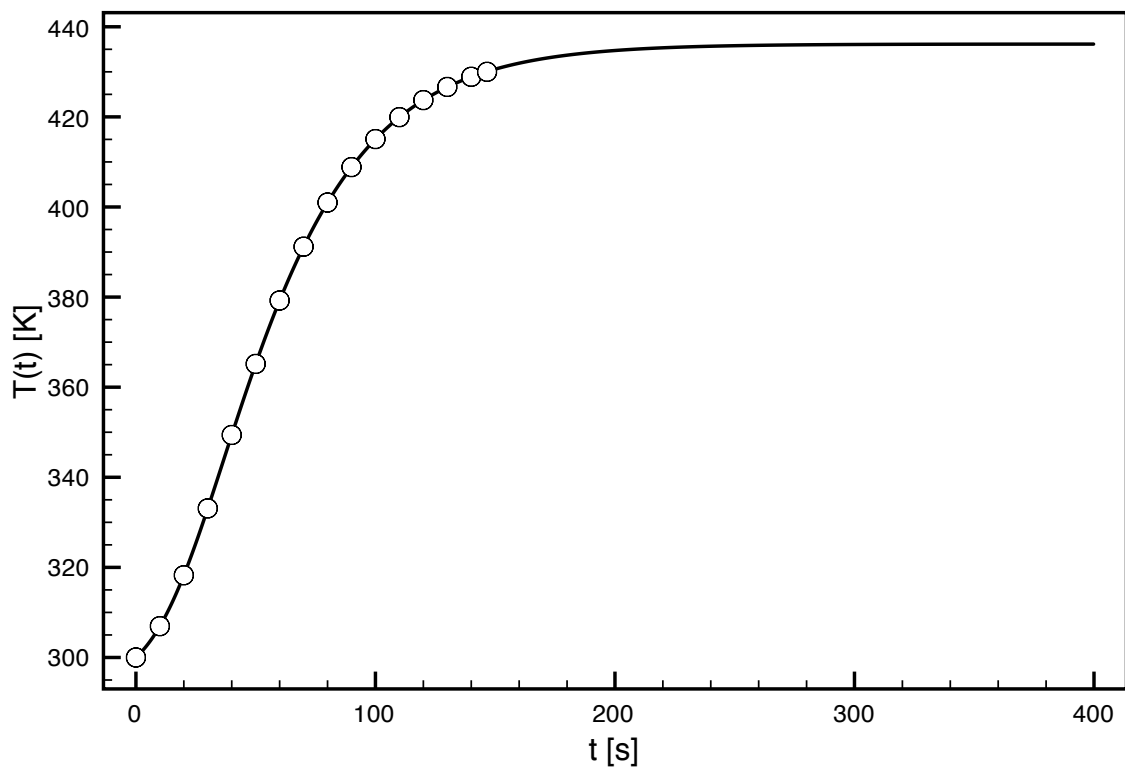


Figura 5.13:  $T(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ , até  $t = 400s$

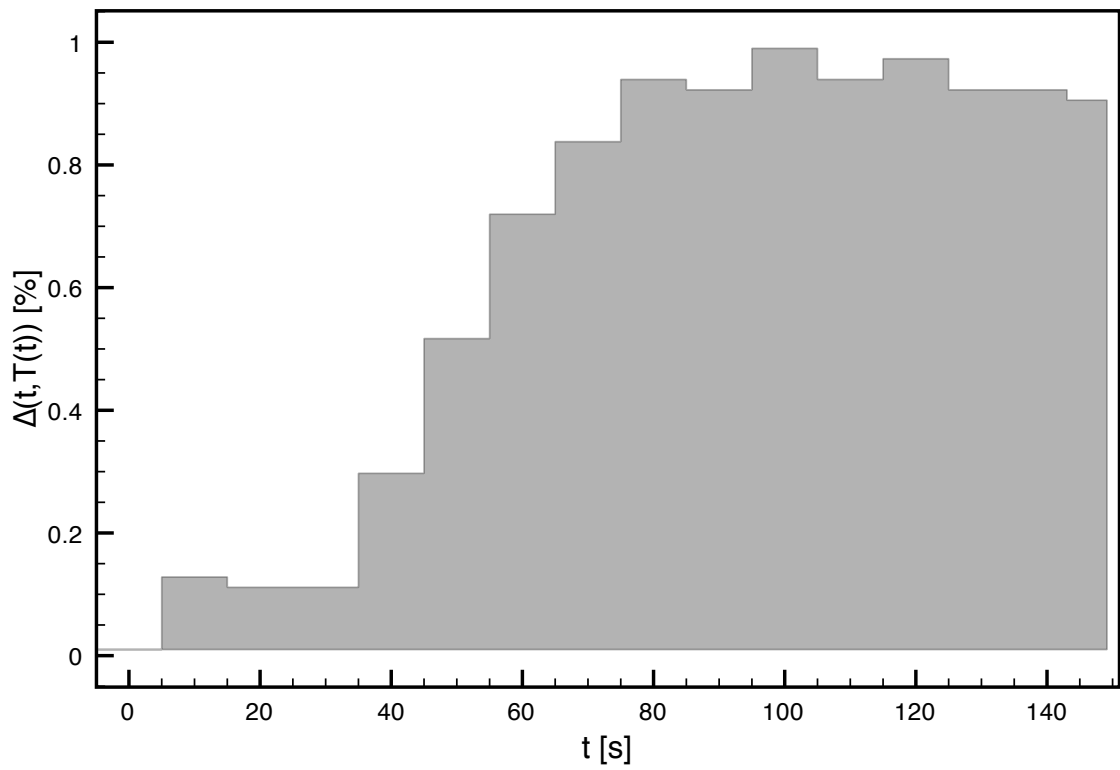


Figura 5.14: Distância relativa da temperatura, caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ , até  $t = 150s$

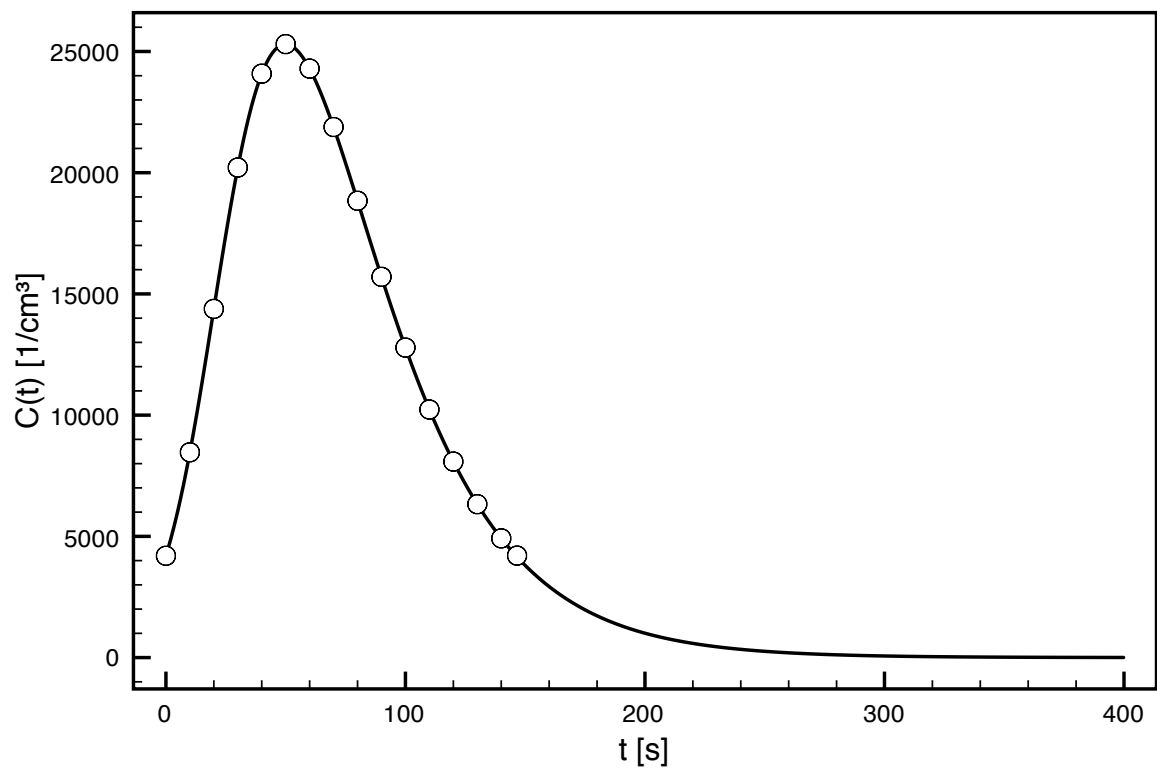


Figura 5.15:  $C(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ , até  $t = 400s$

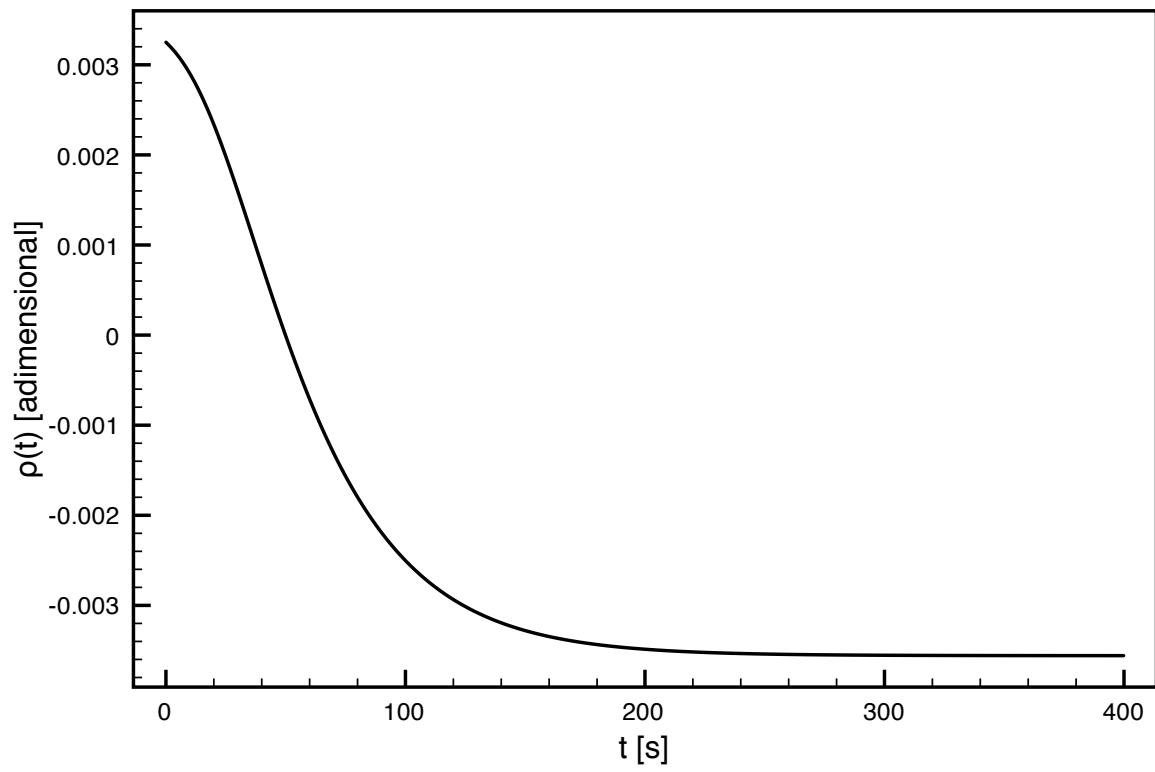


Figura 5.16:  $\rho(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ , até  $t = 400s$

**Tabela 5.4:**  $T(t)$  caso  $\rho(0) = 0,5\beta$ 

Tempo [s]	Numérico [K]	Decomposição [K]	$\Delta$ [%]
0	300,000	300,000	-
10	306,953	306,955	0,0007
20	318,256	318,258	0,0006
30	333,100	333,098	0,0006
40	349,391	349,385	0,0017
50	365,162	365,151	0,0030
60	379,243	379,227	0,0042
70	391,186	391,167	0,0049
80	400,987	400,965	0,0055
90	408,854	408,832	0,0054
100	415,076	415,052	0,0058
110	419,944	419,921	0,0055
120	423,726	423,702	0,0057
130	426,647	426,624	0,0054
140	428,895	428,872	0,0054
146,1	430,000	429,977	0,0053
150	-	430,597	-
160	-	431,917	-
170	-	432,927	-
180	-	433,697	-
190	-	434,285	-
200	-	434,733	-
210	-	435,075	-
220	-	435,334	-
230	-	435,532	-
240	-	435,683	-
250	-	435,798	-
260	-	435,885	-
270	-	435,951	-
280	-	436,002	-
290	-	436,040	-
300	-	436,069	-
310	-	436,091	-
320	-	436,108	-
330	-	436,121	-
340	-	436,131	-
350	-	436,138	-
360	-	436,144	-
370	-	436,148	-
380	-	436,152	-
390	-	436,154	-
400	-	436,156	-

### 5.3 Resultados para $\rho(0) = 0, 2\beta$

No caso de supercriticalidade inicial menos intensa, os picos nos valores da distância relativa, constatados nos outros casos não foram observados nem para a potência nem para a temperatura (figuras 5.18 e 5.21) em todo o intervalo onde se dispunha de dados numéricos (incrementos de 10s até 90s, e tempo final de 98,7s). Ainda assim, extrapolações foram feitas até  $t = 200s$  (figuras 5.17 e 5.21).

Mais uma vez os cálculos de  $\Lambda$  mostram que, no intervalo estudado, a solução em série converge.

Por fim, os gráfico da concentração de precursores e da reatividade, representados respectivamente nas figuras (5.22) e (5.23).

**Tabela 5.5:**  $n(t)$  caso  $\rho(0) = 0, 2\beta$

Tempo [s]	Numérico [MW]	Decomposição [MW]	$\Delta$ [%]
0	10,000000	10,000000	-
10	11,270597	11,270244	0,0031
20	12,094137	12,093458	0,0056
30	12,402006	12,401070	0,0075
40	12,220168	12,219068	0,0090
50	11,639050	11,637935	0,0096
60	10,777035	10,776036	0,0093
70	9,750800	9,749974	0,0085
80	8,658279	8,657563	0,0083
90	7,572253	7,571768	0,0064
98,7	6,671694	6,671139	0,0083
100	-	6,541546	-
110	-	5,595923	-
120	-	4,748944	-
130	-	4,004232	-
140	-	3,358699	-
150	-	2,805311	-
160	-	2,335042	-
170	-	1,938167	-
180	-	1,605078	-
190	-	1,326761	-
200	-	1,095039	-

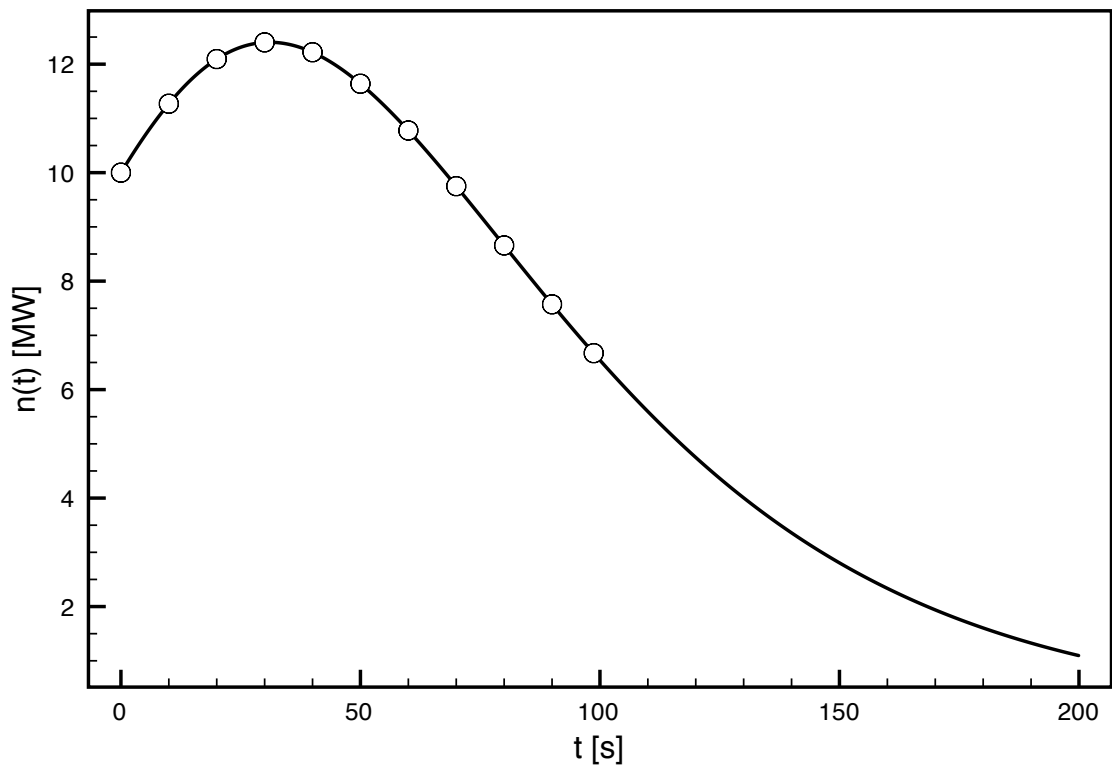


Figura 5.17:  $n(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0, 2\beta$ , até  $t = 200s$

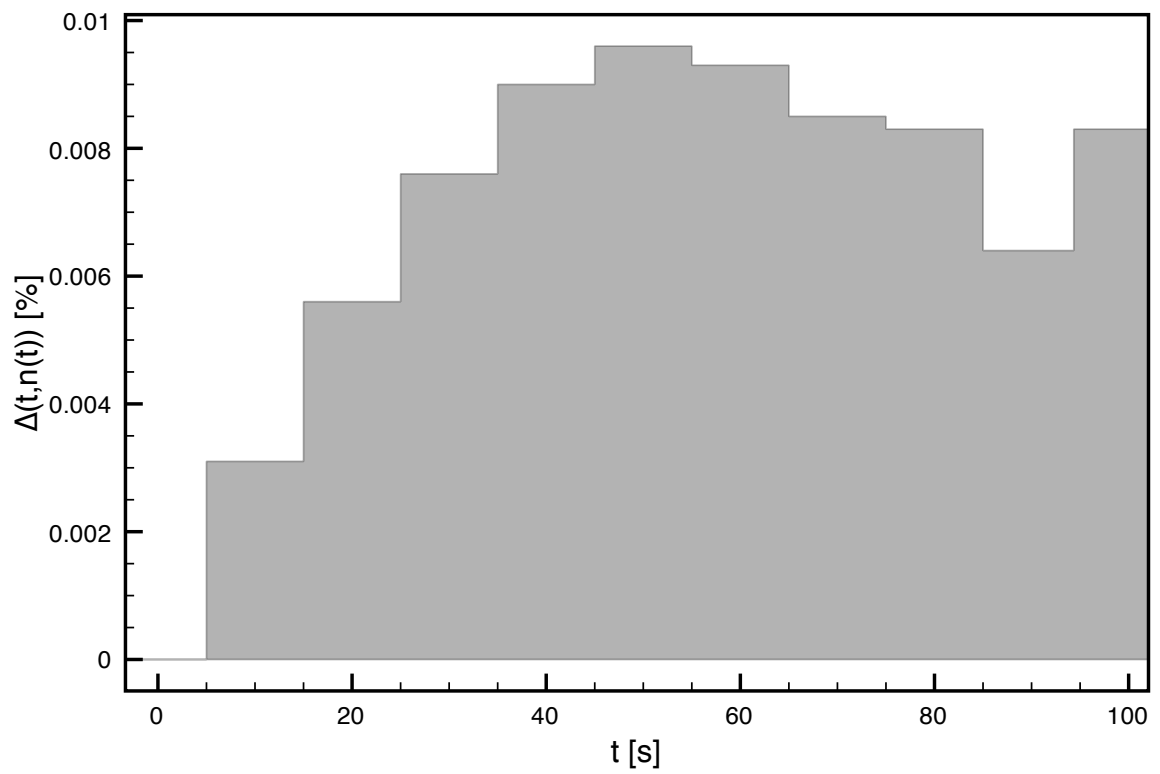


Figura 5.18: Distância relativa da potência, caso  $\rho(0) = 0, 2\beta$ , até  $t = 98s$

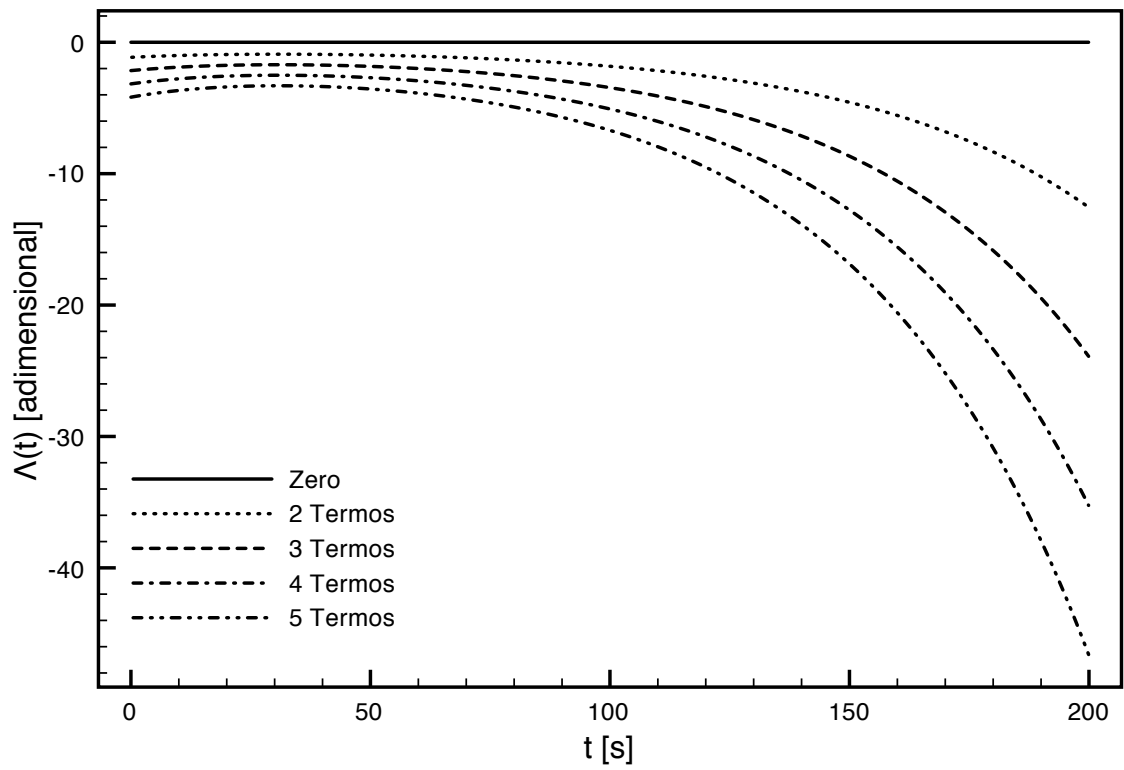


Figura 5.19: Valores de  $\Lambda$ , caso  $\rho(0) = 0, 2\beta$ , até  $t = 200s$

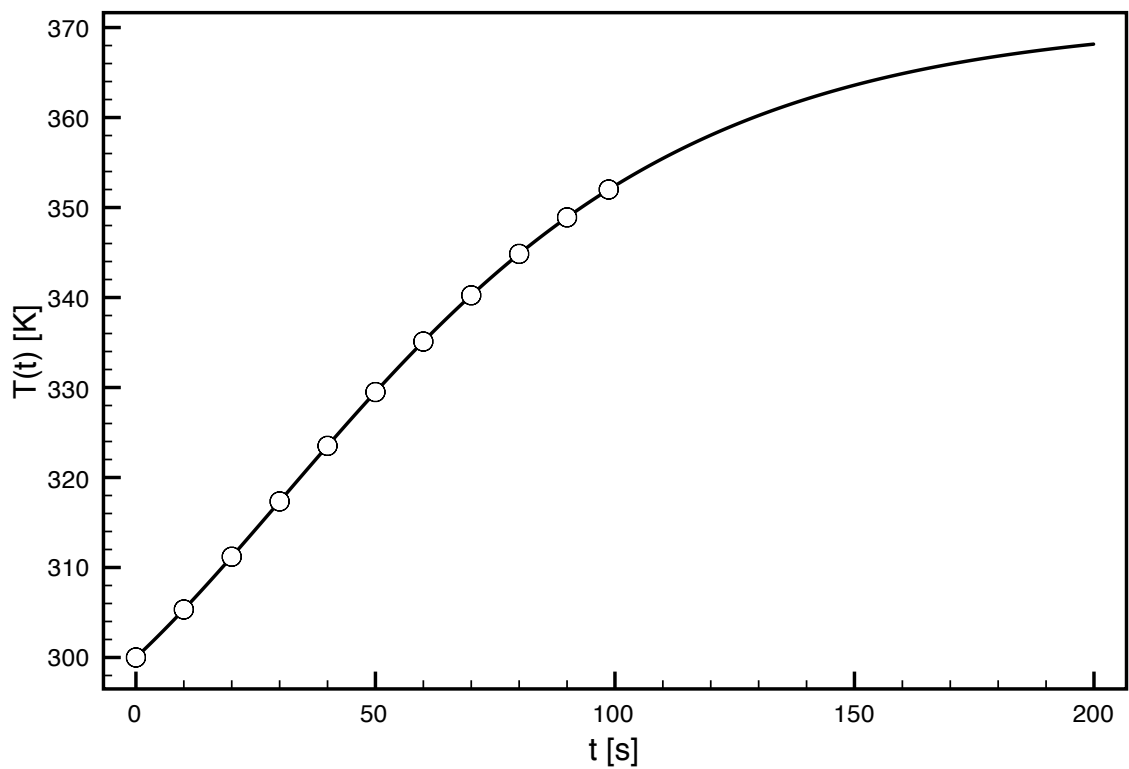


Figura 5.20:  $T(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0, 2\beta$ , até  $t = 200s$

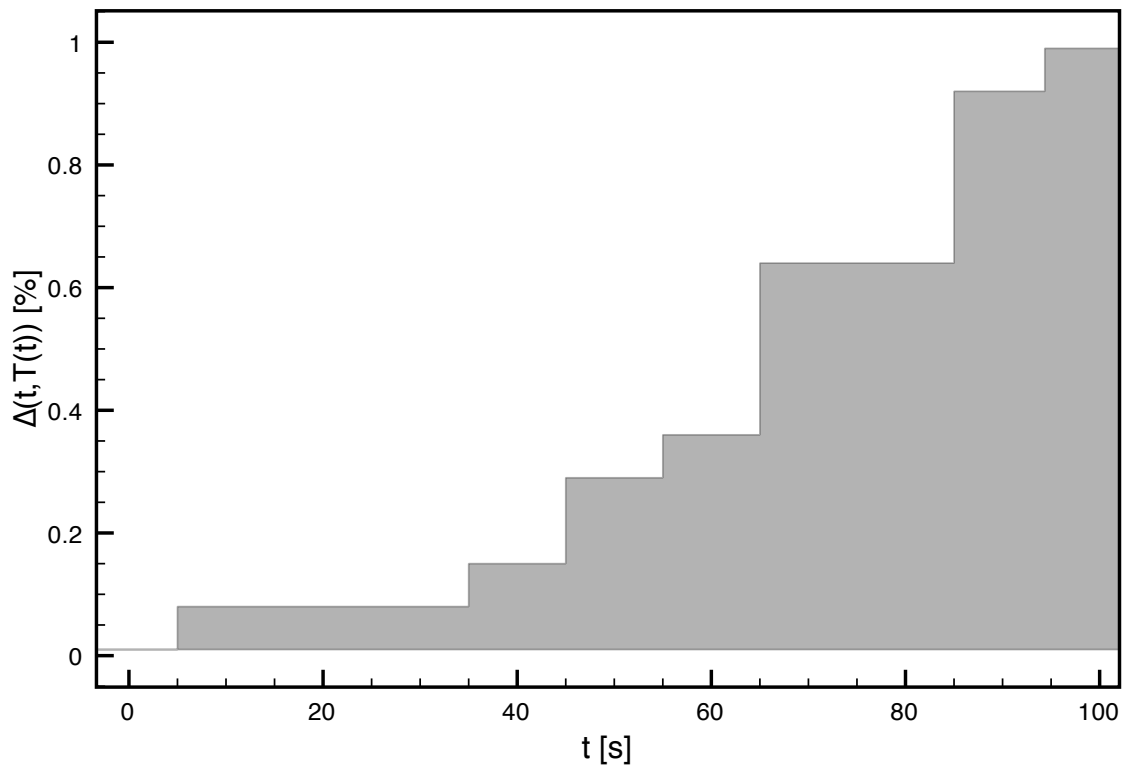


Figura 5.21: Distância relativa da temperatura, caso  $\rho(0) = 0, 2\beta$ , até  $t = 98s$

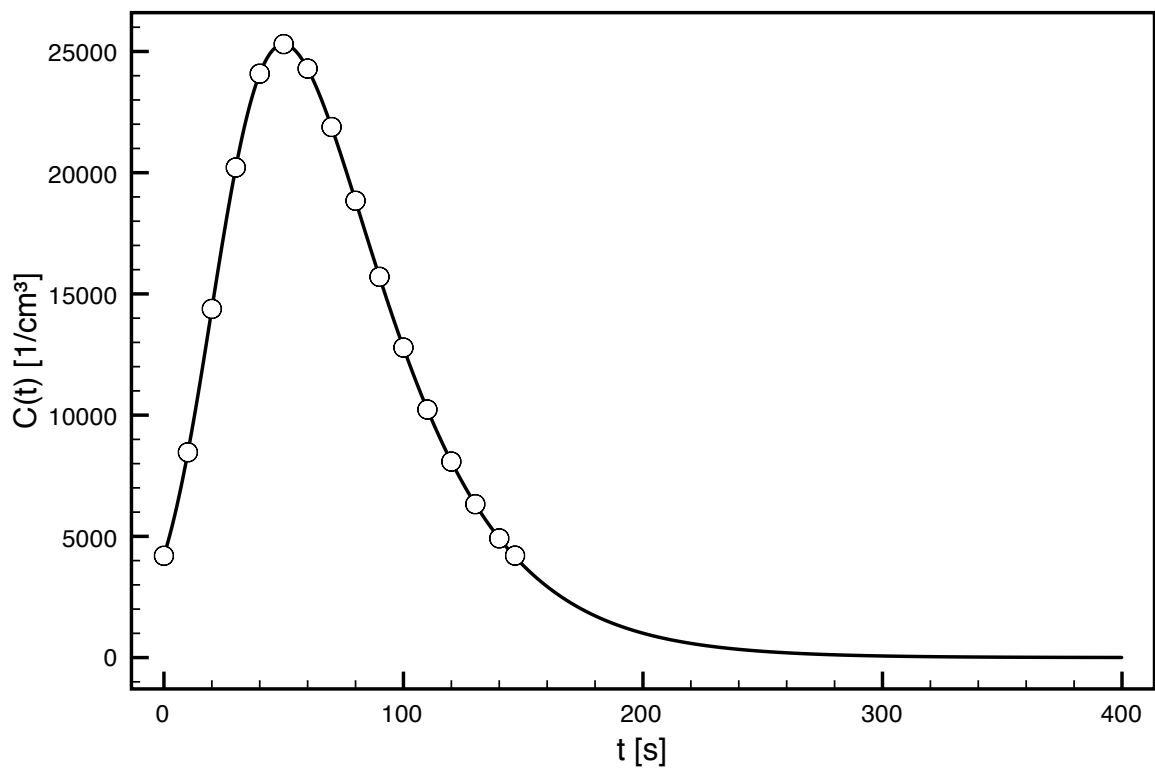


Figura 5.22:  $C(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0, 2\beta$ , até  $t = 200s$



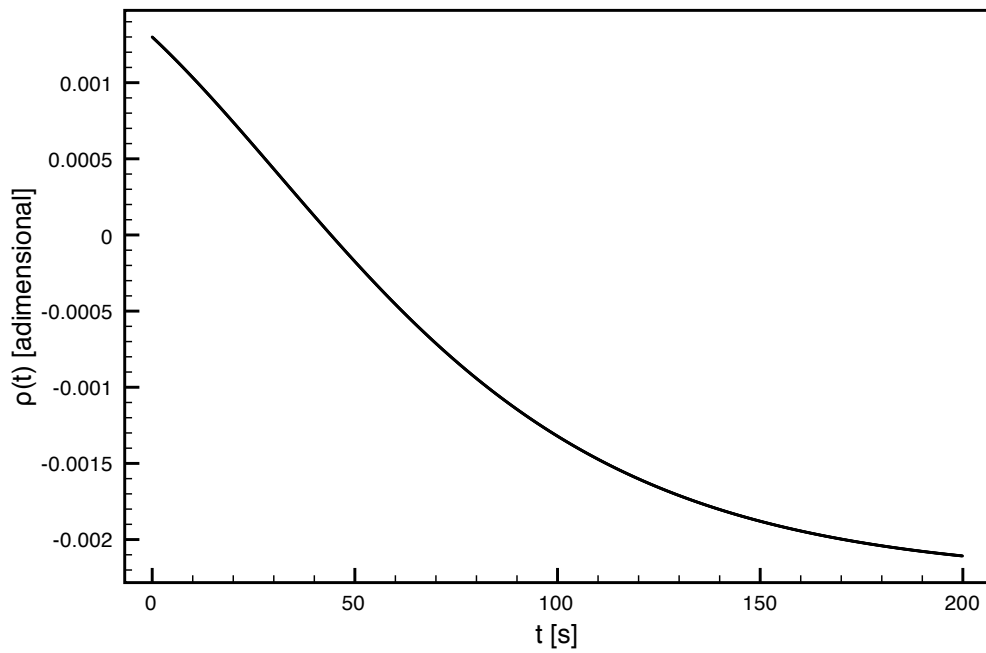


Figura 5.23:  $\rho(t) \times t$ , caso  $\rho(0) = 0,8\beta$ , até  $t = 200s$

**Tabela 5.6:**  $T(t)$  caso  $\rho(0) = 0,2\beta$

Tempo [s]	Numérico [K]	Decomposição [K]	$\Delta$ [%]
0	300,000	300,000	-
10	305,333	305,333	0,0000
20	311,195	311,195	0,0000
30	317,341	317,341	0,0000
40	323,515	323,514	0,0003
50	329,494	329,493	0,0003
60	335,107	335,105	0,0006
70	340,244	340,241	0,0009
80	344,847	344,844	0,0009
90	348,904	348,899	0,0014
98,7	352,000	351,995	0,0014
100	-	352,424	-
110	-	355,455	-
120	-	358,036	-
130	-	360,220	-
140	-	362,057	-
150	-	363,594	-
160	-	364,876	-
170	-	365,941	-
180	-	366,824	-
190	-	367,555	-
200	-	368,159	-

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, desenvolveu-se uma solução em forma fechada para as equações de cinética pontual, considerando a realimentação de temperatura na reatividade. Os resultados obtidos coincidem quase que perfeitamente com aqueles de (Nahla & Zayed, 2010), e quanto a isso, sabe-se que os valores numéricos aqui obtidos não trazem nenhuma informação nova. Entretanto, a presente abordagem é considerada um passo em uma nova direção, que em um contexto mais complexo mostrará sua eficiência.

Cabe ressaltar que o presente problema, quando implementado numericamente, deve lidar com a rigidez das equações. Já que a presente abordagem permite a obtenção analítica dos termos que constituem a solução (note que, por conveniência de cálculo, introduziu-se uma divisão do problema em pequenos intervalos de tempo), a princípio, não há instabilidades decorrentes da implementação computacional. Nos casos aqui tratados, tal efeito não ocorreu na implementação numérica, mas para situações mais complexas tais como a presença de seis grupos de precursores com escalas de tempo características, efeitos devidos à rigidez devem surgir, e é para esses casos que esta abordagem foi desenvolvida.

A precisão dos resultados aqui mostrados pode ser obtida truncando-se o sistema recursivo após cinco passos, o que mostra que o critério de parada reflete algumas propriedades ligadas à convergência e à maneira como a não linearidade foi tratada pelo esquema de Adomian. A análise da convergência não é o foco do trabalho, e para uma discussão mais rigorosa é necessário referir-se a trabalhos futuros, entretanto, há uma análise do método que mostra que a presente estrutura deve convergir de maneira estável para um pequeno número de termos da expansão da solução, como mostrado em (Adomian, 1989, 1994).

O prosseguimento do trabalho pode assumir abordagens diversas, de acordo com o objetivo da pesquisa. Em uma abordagem matemática, uma prova rigorosa da estabilidade da solução e determinação do raio de convergência em função do número de termos da expansão ou do tamanho do passo de tempo são problemas em aberto. Alguns aspectos computacionais que podem ser desenvolvidos são a otimização do algoritmo, um estudo do tempo de cálculo em função do número de termos e tamanho do passo temporal, e análise da precisão em função do tempo de cálculo. Possíveis desdobramentos deste trabalho na área de engenharia de reatores seriam: a inclusão de mais grupos de precursores de nêutrons atrasados, a sofisticação para um modelo de cinética que inclua a dependência espacial (uma, duas ou três dimensões, em diferentes sistemas de coordenadas), a modelagem da reatividade como dependente do tempo e da temperatura, e a descrição da realimentação de temperatura utilizando um modelo mais complexo (ao invés de uma perturbação de primeira ordem).

Concluindo, mostrou-se que a abordagem funciona e, em trabalhos futuros, poder-se-á efetuar cálculos que considerem os efeitos da temperatura na questão da criticalidade do reator.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aboanber, A. E. 2009. Exact solution for the non-linear two point kinetic model of reflected reactors. *Progress in Nuclear Energy*, **51**, 719–726.
- Aboanber, A. E., & Hamada, Y. M. 2002. PWS: an efficient system for solving space-independent nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*, **29**, 2159–2172.
- Aboanber, A. E., & Nahla, A. A. 2002. Solution of the point kinetics equations in the presence of Newtonian temperature feedback by Padé approximations via the analytical inversion method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **35**, 9609–9627.
- Aboanber, A.E., & Hamada, Y.M. 2003. Power series solution (PWS) of nuclear reactor dynamics with newtonian temperature feedback. *Annals of Nuclear Energy*, **30**, 1111–1122.
- Adomian, G. 1989. *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Adomian, G. 1994. *Solving Frontier Problems of Physics: The decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Boichenko, V. A., Leonov, G. A., & Reitman, V. 2005. *Dimension theory for ordinary equations*. Teubner, Stuttgart.
- Chen, W., Guo, L., & Li, H. 2007. Accuracy of analytical methods for obtaining supercritical transients with temperature feedback. *Progress in Nuclear Energy*, **49**, 290–302.
- Kinard, M., & Allen, E. J. 2004. Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*, **31**, 1039–1051.
- Lamarsh, J. R. 1966. *Introduction to Nuclear Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, E.U.A.
- Li, H., Chen, W., Luo, L., & Zhu, Q. 2009. A new integral method for solving the point reactor neutron kinetics equations. *Annals of Nuclear Energy*, **36**, 427–432.
- Mello, K. B. 2010. *Simulação da dispersão de poluentes na camada limite planetária através da solução da equação de Langevin pelo método de decomposição*. Ph.D. thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Nahla, A. A. 2010. Analytical solution to solve the point kinetics equations. *Nuclear Engineering and Design*, **240**, 1622–1629.
- Nahla, A. A., & Zayed, E. M. E. 2010. Solution to the nonlinear point nuclear reactor kinetics equations. *Progress in Nuclear Energy*, **52**, 743–746.

Petersen, C. Z., Dulla, S., Vilhena, M. T. M. B., & Ravetto, P. 2011. An analytical solution of the point kinetics equations with time-variable reactivity by the decomposition method. *Progress in Nuclear Energy, New Series*, 1–4.

Reuss, Paul. 2008. *Neutron Physics*. EDP Sciences, Paris, France.

Tashakor, S., Jahanfarnia, G., & Hashemi-Tilehnoee, M. 2010. Numerical solution of the point kinetics equations with fuel burn-up and temperature feedback. *Annals of Nuclear Energy*, **37**, 265–269.