UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

**LIZEANE BORGES FORTES**

# A TAXA DE VARIAÇÃO NA COMPREENSÃO DA FUNÇÃO AFIM POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

**Porto Alegre**
**2011**

**LIZEANE BORGES FORTES**

# A TAXA DE VARIAÇÃO NA COMPREENSÃO DA FUNÇÃO AFIM POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo

**Porto Alegre**

**2011**

**LIZEANE BORGES FORTES**

# A TAXA DE VARIAÇÃO NA COMPREENSÃO DA FUNÇÃO AFIM POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo – Orientadora
Instituto de Matemática da UFRGS

Dr.ª Lucia Helena Marques Carrasco
Instituto de Matemática da UFRGS

Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana
Instituto de Matemática da UFRGS

**Porto Alegre, 08 de dezembro de 2011**

# AGRADECIMENTOS

À querida professora *Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo*, pela orientação deste trabalho, por todo apoio dedicado a mim durante a graduação, e principalmente pelas cobranças.

Às professoras *Dr.ª Lucia Helena Marques Carrasco* e *Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana*, por aceitarem fazer parte dessa importante etapa em minha vida.

Aos professores *Dr. Alvino Alves Sant'Ana*, *Dr. Carlos Hoppen*, *Dr. Francisco Egger Moellwald*, *Dr.ª Vanice dos Santos* e *Dr. Vilmar Trevisan*, por contribuírem não só em minha formação acadêmica, mas em meu crescimento pessoal.

Aos professores *João Staffa* , *Vanessa Andriotti*, e aos seus alunos, que tornaram possível o desenvolvimento desta pesquisa.

À colega *Katilene Grilo Conte*, pelo companheirismo e amizade ao longo do curso.

À minha afilhada, pelo aprendizado que me proporcionou aceitando fazer parte de minhas experiências didáticas, e à minha irmã, que sempre confiou em meu trabalho.

Aos meus pais, que mesmo longe, sempre estiveram ao meu lado.

*“Para Tales... a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos”.*

*Aristóteles*

## RESUMO

Esse trabalho tem o objetivo de investigar a contribuição da abordagem do conceito de taxa de variação no estudo da função afim no Ensino Médio. Para isso foi implementada, em caráter experimental, a aplicação de uma sequência didática em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de Porto Alegre. A elaboração dessa sequência teve como referencial a teoria de Raymond Duval sobre os registros de representações semióticas. Analisando os dados coletados na pesquisa, obtidos através das produções dos estudantes relativas à resolução de quatro atividades propostas, foi possível concluir que o estudo do conceito de taxa de variação contribui para a compreensão da função afim como relação entre duas variáveis.



**Palavras chave**: Taxa de Variação – Função Afim – Registros de Representação Semiótica – Ensino de Matemática – Educação Matemática

**ABSTRACT**

This work aims to investigate the contribution of the approach of the rate of change concept in the study of the linear function in High School. In order to do this an instructional sequence was implemented on an experimental basis, in a first year class in a state school in Porto Alegre. The sequence was prepared taking as referential the theory of Raymond Duval on the registers of semiotic representations. Analyzing the data collected in the survey, obtained through the productions of the students on the settlement of four proposed activities, it was concluded that the study of the concept of rate variation contributes to the understanding of the linear function as a relationship between two variables.



**Keywords:** Rate of Change – Linear Function – Registers of Semiotic Representations – Teaching of Mathematics – Mathematics Education

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Sempre considerei, como docente, que o estudo da função afim era simples. Os alunos eram "informados", sem nenhuma justificativa, de que o gráfico da função afim era uma reta, e de que era representada pela fórmula $f(x) = ax + b$. Após, usava o axioma da incidência – "dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém" – para justificar que, na resolução de qualquer exercício, bastava "encontrar" dois pontos e a reta estaria definida. O restante da atividade já não era mais estudo de função, e sim manipulação algébrica.

Durante a disciplina Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III, do curso de Licenciatura em Matemática, minha perspectiva começou a mudar. Em uma das atividades propostas, tentei "simplificar" um exercício, trocando a notação $f(2) = 8$ pelo par ordenado $(2,8)$. Nesse momento, a professora disse que não gostava dessa notação, pois ao escrever $f(2) = 8$ expressávamos a relação entre as duas variáveis, enquanto o par $(2,8)$ representava apenas um ponto no plano cartesiano. A partir de então passei a perceber que não abordava com meus alunos essa noção importante do estudo de funções. A próxima mudança em minhas concepções ocorreu após a leitura do texto "Uma Análise das Construções Mentais Subjacentes à Produção e Interpretação de Gráficos de Funções", de Gilda Palis (2002). A autora cita um exemplo de abordagem utilizada por uma professora do ensino médio que contribui para que seus alunos não compreendam o conceito de função:

> [...] observamos em uma entrevista com a professora recém formada B, na qual ela procura explicar o que é o gráfico de $f(x) = 2x + 1$. Inicialmente, B reformula a expressão para $y = 2x + 1$ porque, a seu ver "esta notação é mais pertinente ao contexto gráfico". Depois ela começa a calcular alguns pontos... calcula para $x = 1$ e obtém $y = 3$... e diz " bem agora tenho um par $(1,3)$". O entrevistador então lhe diz "ok... você tem o par $(1, f(1))$..." procurando orientar a conversa para uma definição posterior formal de gráfico. A professora B retruca que "não gosta desta forma..." $(1, f(1))$... $(1,3)$ é completamente diferente de $(1, f(1))$....quando a gente escreve $(1,3)$ ... a gente tem um par mesmo..." (PALIS, 2002, p. 256)

Percebi que, com o intuito de "facilitar" o aprendizado do aluno, cometia o mesmo erro, e visando proporcionar a compreensão das funções, passei a abordar esse tema por meio de resolução de problemas. Assim, no plano de ensino do Curso de Extensão desenvolvido naquela disciplina, caracterizamos a função afim como a função que pode ser representada pela expressão $f(x) = ax + b$, cujo gráfico é uma reta e em que a taxa de variação é constante. O conceito de taxa de variação proporcionou aos alunos que não tinham o domínio da álgebra a resolução de todos os exercícios propostos. Foi possível observar que, enquanto alguns alunos resolviam as questões de modo algoritmizado, outros compreendiam a relação entre as variáveis e solucionavam o problema com facilidade.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, optei por retomar o tema, buscando investigar a viabilidade do estudo da taxa de variação da função afim no Ensino Médio. Em minhas leituras iniciais, a dissertação “As múltiplas representações e a construção do conceito de função”, de Rafael Winícius da Silva Bueno (2009), proporcionou-me o primeiro contato com a teoria de Raymond Duval sobre registros de representações semióticas (2003).

A questão norteadora desta pesquisa é se o uso do conceito de taxa de variação em diferentes registros de representação propicia aos alunos uma melhor compreensão no estudo da função afim. Buscando responder essa questão, optei por planejar e experimentar uma sequência didática em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, tendo como referencial a teoria acima citada de Raymond Duval.

## 2 METODOLOGIA

A sequência didática foi desenvolvida para ser implementada em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de Porto Alegre.

O método utilizado nesta pesquisa foi o estudo de caso, adotando como características:

> (a) transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004, p. 86).

Os dados coletados na pesquisa foram obtidos através das produções dos estudantes relativas à resolução de quatro atividades propostas, respondidas por grupos de três componentes. Além disso, foi mantido um diário de classe, com observações referentes a diálogos entre integrantes de um mesmo grupo e discussões realizadas no grande grupo.

Cada atividade foi desenvolvida em dois encontros. No primeiro, a atividade foi aplicada e minha interferência foi a mínima possível, atendendo aos alunos quando solicitado, e formulando perguntas que os ajudassem a refletir, porém sem indicar o caminho de resolução do problema. Após, foi feita uma análise do material entregue pelos alunos, e esses dados foram mencionados no encontro seguinte, com o objetivo de gerar uma discussão com a turma.

As produções dos grupos foram analisadas com a turma, buscando confrontar diferentes concepções dos alunos, e promover, assim, um ambiente de discussão, como propõem Lochhead e Mestre (1997). Segundo os autores, “[...] essa abordagem assemelha-se a um diálogo socrático, uma vez que o professor raramente diz ao aluno qual é a resposta correta, mas simplesmente formula questões exploratórias com o objetivo de eliminar contradições que resultam de suas concepções erradas.” (Ibidem, p. 152).

Esse método foi aplicado em todas as atividades, exceto a última, onde minha intervenção foi necessária para que a atividade pudesse ser concluída no prazo acordado com a turma e com a escola.

# 3 REFERENCIAL TEÓRICO

Essa pesquisa foi baseada na teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval, que afirma: “Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para compreensão em matemática” (Idem, 2003, p.31).

Segundo Duval existem quatro tipos de registros:

- Registros Multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis.
    - Representação discursiva: língua natural, forma de raciocinar baseada em argumentação a partir de observações, etc.
    - Representação não discursiva: figuras geométricas planas ou em perspectivas.
- Registros Monofuncionais: os tratamentos são principalmente algoritmos.
    - Representação discursiva: sistema de escrita algébrica, cálculo, etc.
    - Representação não discursiva: gráficos cartesianos.

O autor menciona dois tipos de transformação de uma representação semiótica em outra: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações realizadas no interior do mesmo sistema. As conversões são transformações que envolvem a mudança de registro.

A transformação caracterizada como conversão se divide em dois tipos: variações de congruência ou não congruência: “Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há uma congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não congruência.” (DUVAL, 2003, p. 19). Vejamos um exemplo diferenciando as duas variações:

- Congruência: o conjunto de pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal $\Rightarrow$ x > 0 e y > 0 ou x < 0 e y < 0;
- Não congruência: o conjunto de pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal $\Rightarrow$ $xy > 0$.

No caso do estudo da função afim, a passagem entre os dois registros monofuncionais, como, por exemplo, passar da escrita algébrica à representação gráfica utilizando marcação de pontos obtidos com a aplicação da fórmula, pode ser considerada, segundo Duval (2003), uma conversão de congruência: “[...] passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados.”

(Ibidem, p. 17). Entretanto, essa mesma transformação, realizada por meio do conceito de taxa de variação e coeficiente linear, pode ser considerada uma transformação de não congruência, envolvendo uma compreensão global e qualitativa: “Na realidade, a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e, de outro, os valores escalares das equações.” (DUVAL, 2003, p. 17).

A maioria dos problemas propostos na sequência didática trata da passagem do registro plurifuncional – língua natural – a uma representação em outro registro (tabela, gráfico e/ou linguagem algébrica).

> Quando se trata da articulação entre dois registros em relação à representação de um objeto matemático, duas condições devem ser efetivamente respeitadas: primeiramente, a sequência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão; em segundo lugar, para cada sentido da conversão deve haver casos de congruência e casos mais ou menos complexos de não congruência. Se o objetivo é acentuar a compreensão de uma noção matemática, pode ser importante que tais sequências sejam constituídas por dois ou três pares de registros: de um lado, um par compreendendo um registro multifuncional e um registro monofuncional; de outro lado, um par compreendendo dois registros monofuncionais. (DUVAL, 2003, p. 27)

Sendo a tradução da linguagem escrita para a linguagem matemática motivo de grande dificuldade entre os alunos, os questionários foram formulados seguindo duas recomendações de Harold L. Schoen, baseadas “[...] em princípios gerais de ensino especialmente importantes para um curso de álgebra cujo foco principal seja a resolução de problemas.” (1997, p. 136).

- Recomendação 1: basear a aprendizagem de coisas novas no conhecimento e na compreensão que os alunos já têm.
- Recomendação 2: levar gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico.

Para satisfazer a primeira recomendação, dos cinco problemas propostos, quatro continham dados coletados do mundo real. Segundo Jonei Barbosa, esses problemas são considerados formas simplificadas de modelagem, em que “o professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução [...], cabendo aos alunos o processo de resolução.” (Idem, 2001, p. 8).

O planejamento para satisfazer a segunda recomendação ocorreu após a apresentação da dissertação “Modelagem Matemática e introdução da função afim no Ensino Fundamental”, de Belissa Schönardie (2011). Para obter a conversão da língua natural à linguagem algébrica, a mestranda conduziu seus alunos a responderem como realizaram o cálculo para solucionar certo problema. Assim, em minha pesquisa também utilizei esse recurso.

Voltando à teoria de Duval, o mesmo destaca a importância de que a conversão possa ser feita nos dois sentidos (DUVAL, 2003, p. 20). Portanto, os problemas propostos abordaram a transformação de registros da língua natural para a representação gráfica e vice e versa. Além disso, foram abordados problemas que permitissem analisar se o aluno era capaz de reconhecer funções lineares e não lineares, pois, segundo Duval (2003), o sucesso cognitivo depende do sucesso em toda uma sequência de itens. Logo, não bastava que o aluno apenas identificasse a função afim.

Por fim, foram propostas questões com o intuito de analisar o reconhecimento do conceito de taxa de variação em diferentes representações. Conforme Duval:

> A característica desse tipo de atividade é que ele [reconhecimento] deve ser rápido para ser eficaz ou útil. O nível de compreensão matemática que um aluno pode ser capaz de alcançar e o grau de iniciativa ou de exploração do qual ele pode dispor na resolução de um problema dependem do conjunto do que ele pode reconhecer rapidamente. Tarefas de estrito reconhecimento são, então, tão importantes para a aprendizagem quanto às tarefas de produção. (DUVAL, 2003, p. 28)

# 4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

## 4.1 A escola, a sala de aula e os alunos

O contato com a escola foi realizado por meio da disciplina Estágio em Educação Matemática III. Nesse semestre, os alunos da disciplina de Estágio formaram duplas, onde cada discente deveria cumprir 14 horas de observação, 25 horas de docência e 25 horas de co-participação nas aulas.

O período de observação foi dividido entre as duas turmas com as quais trabalhamos durante o estágio – uma turma do primeiro ano e uma turma do segundo ano do ensino médio. A turma 100, do primeiro ano do ensino médio, foi observada durante cinco horas-aula, pois nas manhãs seguintes foram aplicadas provas de diferentes disciplinas. Assim, a observação das nove horas restantes foi realizada na turma 200.

Nas observações prévias ao estágio, foi possível constatar alguns problemas enfrentados pela escola. A falta de professores gerava um acúmulo de funções por parte daqueles que compunham o corpo docente e, consequentemente, a falta de pontualidade. Por sua vez, os alunos também não cumpriam o horário estabelecido pela escola.

Quando conversamos com a professora sobre os conteúdos a serem abordados no terceiro trimestre, ela descreveu os alunos e seu método de trabalho. Disse que a turma 100 era extremamente agitada, e que os conteúdos deveriam ser abordados da forma mais simples possível. “Terminei função afim com eles. Mas aquela coisa bem básica, marca o coeficiente linear, a raiz, traça o gráfico e pronto. Para achar a lei da função tem que dar o coeficiente linear, porque eles não sabem sistema”. Perguntei a ela sobre a possibilidade de desenvolver a pesquisa com a turma 100, e se, ao prosseguir abordando esse conteúdo com o conceito de taxa de variação e suas diferentes representações não atrasaria o cronograma da escola. A professora disse que não havia problema, pois nas outras turmas de primeiro ano ela iria revisar a resolução da equação de segundo grau. Ficou acordado que essa revisão seria realizada com a turma 100 após a aplicação da sequência didática, simultaneamente ao conteúdo de função quadrática.

Durante a observação da turma 100, percebemos o desinteresse dos alunos em participar das aulas expositivas. Os discentes conversavam, saíam da sala, escutavam música, e enviavam mensagens pelo celular. Porém, quando a professora de português aplicou um trabalho avaliativo em que eles tinham que realizar uma tarefa, houve uma boa participação. Assim, acreditei que não haveria problemas durante a aplicação da sequência didática, pois se tratava de uma atividade a ser desenvolvida por eles, com poucos momentos de intervenção de minha parte. Como a sala de aula era relativamente pequena, as classes eram dispostas em trios. Assim, a sequência didática foi planejada para grupos de três componentes.

A aplicação da sequência didática iniciou-se no dia 13 de setembro do ano 2011. Na chamada havia trinta e quatro estudantes; desses, trinta e um compareceram a algum dos encontros. Em média, vinte e sete alunos estavam presentes a cada encontro, formando nove grupos de três componentes.

Apresentei aos alunos a proposta da pesquisa, enfatizando que não estava preocupada em avaliar se as respostas estariam certas ou erradas, e que o importante para mim era saber o que eles estavam pensando. Ao perguntarem se o trabalho valeria ponto, eu informei que não. Acredito que devido a isso houve uma resistência por grande parte da turma em começar a atividade, sendo necessário que eu circulasse pelos grupos incentivando o início do trabalho. Como a produção dos alunos no primeiro encontro foi pequena, no segundo encontro distribuí o mesmo material para a conclusão da atividade. Comecei a exigir alguma disciplina, pedindo aos alunos para desligarem o celular e não saírem e voltarem da sala de aula o tempo todo.

Com o objetivo de impor, de forma gradual, certa disciplina aos alunos, antes do terceiro encontro conversei com a professora regente de matemática sobre a atitude dos discentes e sobre como os professores lidavam com eles. Ela disse que a turma 100 era difícil, que o comportamento descrito acima era usual, e que iria conversar com os alunos. Fomos juntas à sala de aula, e durante a conversa com a turma, ao perceber que havia uma insatisfação generalizada, questionei os estudantes sobre o motivo das reclamações. Eles responderam que queriam ter matéria nova, e imediatamente concordei em encerrar a pesquisa e iniciar o conteúdo de função quadrática. A partir daí houve protestos, pois alguns alunos queriam concluir o trabalho iniciado. Uma aluna disse "o jeito dela é diferente, ela [estagiária] não explica, a gente não entende direito o que tem que fazer". Outra disse "a gente tá acostumado com a professora Vanessa. Ela explica, explica, explica um monte de vezes" e completou "Ah, e quando ela disse que não valia ponto eu não fiz nada!"

Atribuo a insatisfação da turma a duas rupturas no contrato didático praticado (PAIS, 2001). Considero que a primeira quebra ocorreu quando os alunos não identificaram os problemas propostos com o conteúdo trabalhado até então, pois "espera-se que os problemas propostos tenham uma lógica de solução próxima ao conteúdo estudado" (Ibidem, p. 81). A segunda ruptura foi identificada facilmente na fala dos alunos. A metodologia de ensino aplicada pela professora caracterizava o contrato didático em que "o professor tem a convicção de que, quanto mais clara for sua exposição, melhor será para a aprendizagem e que o aluno deve prestar muita atenção à aula, tomar notas, repetir os exercícios clássicos, estudar e fazer as provas” (PAIS, 2001, p. 83).

Nesse momento, disse aos alunos que a pesquisa constituía uma proposta diferente, e que a intenção era abordar, em outra perspectiva, um conteúdo que já havia sido trabalhado, mas que se eles se sentissem prejudicados ela seria interrompida. Por fim, foi acordado um maior envolvimento da turma nas atividades e pontualidade quanto ao horário das aulas. Houve uma melhora significativa no desenvolvimento das atividades, mas os atrasos continuaram ocorrendo.

## 4.2 Os Problemas Propostos

Os problemas que compõem esta sequência didática foram elaborados a partir de situações cotidianas, pesquisas na Internet e de adaptações de questões de provas do ENEM e vestibulares.

### *4.2.1 Atividade 1*

Quadro 4.1 – Situação-problema 1

1) Uma pesquisa da ONU divulgou que em 2007, pela primeira vez, a população urbana ultrapassou a rural em níveis mundiais. A tabela a seguir mostra o crescimento da população urbana desde 1970, quando esta era de 1.330 milhões de pessoas.

| Ano | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| População Urbana Mundial (milhões) | 1.330 | 1.511 | 1.727 | 1.976 | 2.256 | 2.539 | 2.837 | 3.167 | 3.486 |

a) Qual foi a variação da população urbana mundial a cada cinco anos?
b) Sabendo a população de 1970 e de 2010, é possível saber a população de 2015? Qual a sua previsão? Justifique.
c) Como você descreveria o crescimento da população urbana mundial?

Fonte: ENEM (2008), questão adaptada.

O objetivo do trabalho com essa questão era que os alunos não só percebessem o aumento da população urbana mundial, mas identificassem que a população urbana mundial cresce cada vez mais rápido. Assim, ao prever a população de 2015, os alunos adicionariam não só a variação da população de 2005 para 2010, mas algum valor a mais, expressando o crescimento da variação.

O desenvolvimento previsto da atividade era o de verificar a previsão de cada aluno, anotar as previsões diferentes e discutir qual(is) dela(s) melhor representaria(m) o problema. Ao final, perguntaria aos alunos como é o modelo de crescimento da população urbana mundial.

Quadro 4.2 – Situação-problema 2

2) O número de brasileiros com acesso à internet cresce a cada ano, e a velocidade de conexão oferecida pelas empresas chega a 100 Mbps. Entretanto, segundo Carvalho (2006), há quinze anos esse quadro era bem diferente. A internet se desenvolveu junto ao meio acadêmico e científico, e o acesso era restrito a professores e funcionários de universidades e instituições de pesquisa. Somente no ano de 1995 a internet deixou de ser privilégio das universidades para se tornar de acesso público, atendendo a uma quantidade aproximada de quarenta e cinco mil usuários. O ano de 1996 foi o que realmente alavancou a internet. Foram criados diversos provedores que ofereciam conexão de acesso discado. Essa forma de acesso ainda é utilizada e atualmente o serviço é gratuito, porém a velocidade dos downloads é muito limitada – por volta de 2,5 Kb/s.

   a) Construa uma tabela que relacione a quantidade de Kb baixados com o tempo de download.
   b) Sabendo que em 1 minuto foram baixados 150 Kb, é possível afirmar que nos primeiros 10 segundos de download foram baixados 25 Kb? Justifique.
   c) Trace o gráfico que representa os quilobytes baixados em função do tempo.
   d) O que você observa no gráfico?
   e) Como você calculou os quilobytes baixados para construir a tabela?
   f) Escreva uma fórmula para calcular a quantidade de quilobytes baixados em um intervalo de tempo t.

Essa questão tinha o intuito de promover a conversão de registros, da língua natural para a representação em forma de tabela. Esperava-se que os alunos concordassem com a afirmativa de que nos primeiros 10 segundos de download foram baixados 25 Kb, observando a taxa de variação constante. Ao traçar o gráfico, esperava-se a percepção por parte dos alunos que se tratava de uma função afim, a qual é representada por uma reta. A questão “como você calculou os quilobytes baixados para construir a tabela", propõe que os alunos escrevam primeiro em linguagem corrente a equação que modela o problema, possibilitando assim levar o aluno gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico. No último item da questão, o qual solicita uma escrita simbólica que relaciona a quantidade de quilobytes baixados com um intervalo de tempo, havia o objetivo de introduzir a representação da função afim por meio da expressão $f(x) = ax + b$. Porém, essa forma de registro só seria discutida na atividade *3*, em que os alunos iriam confrontar as fórmulas construídas nos diferentes problemas para chegar à conclusão de que se tratavam de uma mesma expressão.

O desenvolvimento previsto da atividade era questionar a turma sobre se é ou não possível prever a quantidade de quilobytes baixados e suas justificativas, fazendo uma relação com o problema da população urbana mundial, em que a taxa de variação não é constante. Um dos grupos iria traçar o gráfico da função no quadro, verificando se todos a representaram da mesma maneira. Com o auxílio do gráfico, seria observado que a cada segundo a quantidade de quilobytes baixados aumenta 2,5, e que uma função só é representada por uma reta quando sua taxa de variação é constante. Após, seria discutido com os alunos se haveria a necessidade de marcar no gráfico todos os pontos da tabela construída anteriormente.

Quadro 4.3 – Situação-problema 3

3) Quando nos é servida uma xícara de café expresso, o café está muito quente e é preciso esperar esfriar por algum tempo. A tabela abaixo representa a evolução da temperatura (em graus centígrados) com o tempo (em minutos) a partir do momento em que o café é servido – admitindo a temperatura ambiente de 20ºC. Considerando t = 0 quando nos é servido o café:

| Tempo (minutos) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura (ºC) | 80 | 74 | 68,6 | 63,7 | 59,4 | 55,4 | 51,9 | 48,7 | 45,8 | 43,2 | 40,9 |

a) Qual foi a variação da temperatura no primeiro minuto?
b) Qual foi a variação da temperatura no último minuto?
c) Por que a variação de temperatura não é sempre a mesma?
d) Trace o gráfico que representa a temperatura do café em função do tempo.
e) O que você observa no gráfico?

Fonte: site NETPROF <http://www.netprof.pt/matematica/pdf/TemperaturaCafe.pdf>

O objetivo desse problema era observar, com o auxílio da tabela e o cálculo da variação de temperatura no primeiro e último minuto, que a cada minuto a temperatura diminui cada vez mais lentamente. A questão “por que a variação de temperatura não é sempre a mesma” tinha por objetivo abrir um maior espaço para a fala dos alunos, promovendo um ambiente de investigação, como propõe Skovsmose (2000).

O desenvolvimento previsto da atividade era solicitar aos grupos que traçassem seus gráficos no quadro, e discutir qual(is) deles melhor representaria(m) o problema, e propor que os alunos, ao irem ao quadro, traçassem o gráfico além dos pontos da tabela. Após, seria discutida uma interpretação com a turma, esperando que os alunos concluíssem que a temperatura do café não pode ser menor que a temperatura ambiente (no caso, 20ºC).

### *4.2.2 Atividade 2*

Os dois primeiros problemas da atividade 2 tinham o intuito de verificar a compreensão dos conceitos propostos na atividade 1. Esperava-se que os alunos não tivessem dificuldade nesses exercícios. A escolha dos problemas foi baseada na teoria dos registros de representação de Raymond Duval, que afirma: “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas” (DUVAL, 2010, p. 15) e tinha o objetivo de que os alunos identificassem a função afim nos dois registros de representação – tabela e gráfico.

Quadro 4.4 – Exercício 1

1) A tabela a seguir representa os dados sobre as funções g, h, k, m, f. Quais dessas funções possuem o gráfico representado por uma reta? Justifique sua resposta para cada caso.

| T | g(t) | h(t) | k(t) | m(t) | f(t) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 23 | 5 | 4,0 | -1 | 2,2 |
| 2 | 24 | 3 | 4,5 | 0 | 2,5 |
| 3 | 26 | 1 | 5,5 | -2 | 2,8 |
| 4 | 29 | 0 | 6,5 | 3 | 3,1 |
| 5 | 33 | -2 | 7,5 | -4 | 3,4 |
| 6 | 38 | -4 | 8,5 | 5 | 3,7 |

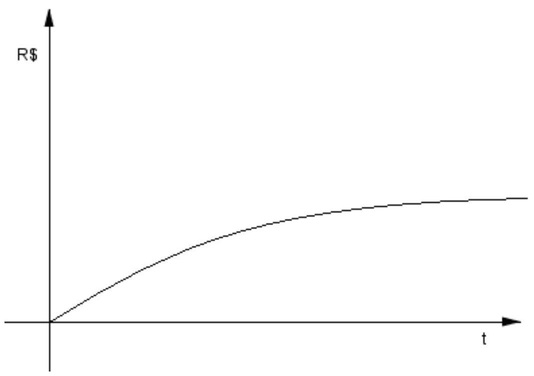
Fonte: Vestibular PUCRS (2007)

Para solucionar essa questão, considerei que talvez alguns grupos traçariam o gráfico das funções. Caso isso ocorresse, dois desses gráficos seriam esboçados no quadro – um com taxa de variação constante e outro não – para que assim concluíssem que a função é representada por uma reta quando a taxa de variação é constante. Além disso, seria traçada no gráfico a variação da variável dependente a cada unidade acrescida na variável independente, formando triângulos semelhantes nos casos em que a taxa de variação fosse constante.

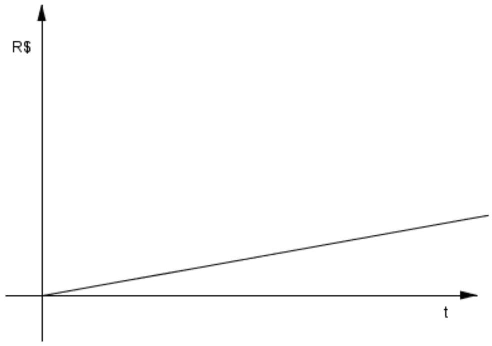
Quadro 4.5 – Situação-problema 4

2) Numa “Lan House”, o cliente paga R$ 3,00 por cada hora utilizada nos computadores. A máquina do caixa registra, via um programa, o valor a ser pago pelo cliente, que irá quitá-lo somente na saída do ambiente. Sendo assim:

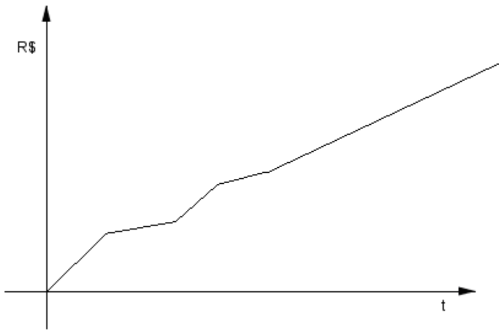
   a) Sabendo o tempo, medido em horas, que o cliente permaneceu no computador, como você calcularia o valor a pagar?
   b) Escreva uma fórmula que represente o valor a ser pago correspondente ao tempo t que o cliente permaneceu no computador, medido em horas.
   c) Analise os gráficos abaixo: qual deles melhor representaria o valor a ser pago em relação ao tempo que o cliente permanece no computador? Justifique sua resposta em todos os gráficos.



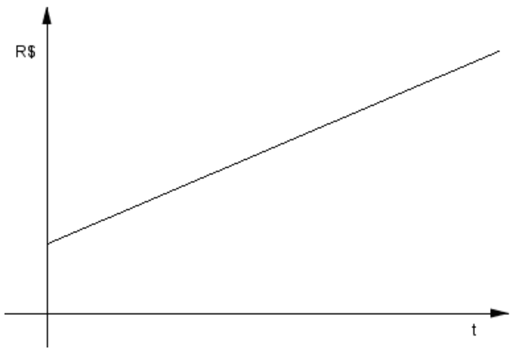

Justificativa:




Justificativa:




Justificativa:




Justificativa:

Fonte: site SBEM < http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/CC84642289968.pdf>

### *4.2.3 Atividade 3*

Quadro 4.6 – Situação-problema 5

1) No Rio Grande do Sul, a conta de luz possui uma tarifa de iluminação pública de R$ 3,18, e a cada kWh consumido é cobrado R$ 0,45. Com o aumento da tarifa de energia, as fábricas de refrigeradores passaram a destacar o consumo dos seus produtos, influenciando assim a escolha dos consumidores. Ao fazer uma viagem, algumas pessoas optam por desligar o eletrodoméstico, enquanto outras preferem mantê-lo funcionando.

   a) Se ao fazer uma viagem todos os aparelhos da residência forem desligados, qual foi o valor da conta de luz ao final de um mês?

b) Se um refrigerador Frost Free consome em um mês 30kwh, e durante uma viagem o eletrodoméstico permaneceu ligado, qual foi o valor da conta de luz ao final de um mês?

c) Complete a tabela que relaciona o valor da conta de luz com o consumo mensal do refrigerador.

| Consumo (kWh) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| Valor a pagar | | | | | |

d) Como você calculou o valor da conta de luz para construir a tabela?

e) Escreva uma fórmula que represente o valor *V* da conta de luz correspondente ao consumo *c* do refrigerador.

f) Trace o gráfico do valor da conta de luz em função do consumo do refrigerador.

g) Reescreva e compare as fórmulas obtidas nas atividades anteriores. O que há em comum?

O objetivo dessa questão era caracterizar a função afim como aquela que pode ser representada, em diversas situações, pela mesma expressão $f(x) = ax + b$. Esperava-se um pouco de dificuldade dos alunos, como, por exemplo, "esquecer" a tarifa de iluminação pública. A pergunta "se ao fazer uma viagem todos os aparelhos da residência forem desligados, qual foi o valor da conta de luz ao final de um mês?" buscava minimizar essa possibilidade.

O desenvolvimento previsto da atividade era analisar as soluções de cada item, esclarecendo as dúvidas dos alunos, e identificar a função afim por meio da fórmula $f(x) = ax + b$.

### *4.2.4 Atividade 4*

Face à necessidade de encerrar a pesquisa até o dia 07 de outubro, o último trabalho foi desenvolvido com o intuito de finalizar a sequência didática no prazo acordado com a turma. A expectativa inicial era que as conclusões pudessem ser sistematizadas pelos alunos a partir de concepções construídas ao longo da sequência didática. Como isso não foi possível no prazo de implementação da sequência, e com a finalidade de fornecer aos alunos um registro das conclusões obtidas, planejei essa última atividade de modo a sistematizar algumas conclusões a partir de um texto elaborado por mim com algumas lacunas a serem preenchidas no diálogo com os alunos.

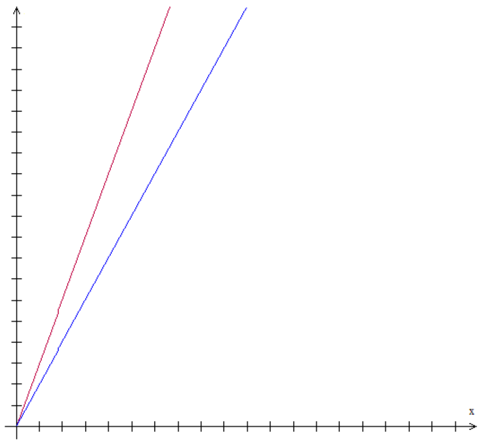
Quadro 4.7 – Trabalho individual de conclusão da pesquisa.

Função Afim

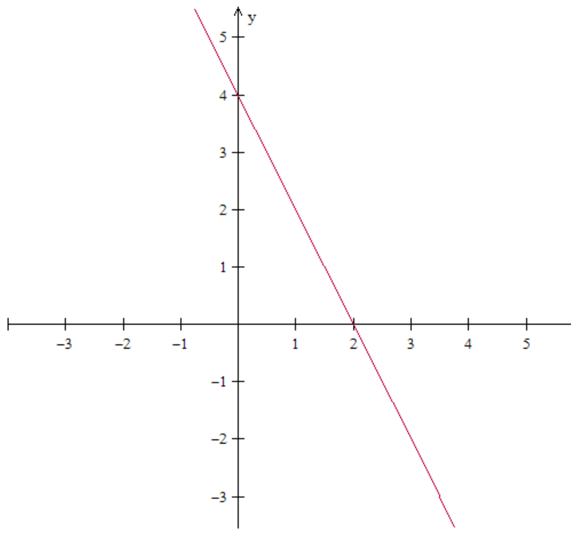
Nos problemas estudados há exemplos de funções lineares e não lineares. Analisando os exercícios, é possível identificar a relação entre a temperatura de café e o tempo como uma função ______________________, pois a taxa de variação _____________ constante. Na questão da Lan House, pode-se observar uma taxa de variação constante, tratando-se assim de ______________________________, cujo gráfico é ______________________.

Nas atividades em que as funções são lineares obtivemos uma fórmula. Em todos os casos, multiplicamos um valor, o qual chamamos de _____________________________________, pela variável independente, representada nos problemas por _______. Em termos gerais, a função afim pode ser representada pela fórmula ____________________, onde $a$ e $b$ são, respectivamente, os coeficientes angular e linear da função. No exemplo do download, $a = 2{,}5$ representa a ___________________________________ da função, ou seja, a __________________________________________________ em uma unidade de tempo.

No gráfico, podemos identificar o coeficiente angular ou _______________________________ por meio da _____________________________ da reta. Quanto maior a inclinação da reta que representa a função, ______________________________________________. Assim, escreva nos gráficos abaixo qual deles representa a função $f(x) = 2x$ e qual representa a função $g(x) = 3x$.



Mais especificamente, ao observar o gráfico podemos obter a fórmula ou lei da função:




Na fórmula $y = ax + b$, $a$ representa ____________________________________ da função. Assim, no gráfico ao lado, $a =$ _________ .

Por outro lado, $b$ representa o valor da função quando $x = 0$, ou seja, $b =$ ______ .

Assim, a lei da função representada pelo gráfico ao lado é $y =$ ______________ .

Essa atividade individual tinha o objetivo de identificar a taxa de variação da função nas duas formas de representação: gráfica (através da inclinação da reta) e algébrica (através do coeficiente angular).

## 4.3 Aplicação da sequência didática

### *4.3.1 Atividade 1*

Essa atividade, referente ao quadro 4.1, em que os alunos deveriam analisar o crescimento da população urbana mundial, foi proposta no dia 13 de setembro em um encontro com duração de dois períodos de 45 minutos. Para o segundo encontro, realizado em 22 de setembro, foi feita uma análise da produção dos alunos e suas respostas foram utilizadas para provocar a discussão em grupo.

Para responder "qual foi a variação da população urbana mundial a cada cinco anos", enquanto alguns alunos não haviam observado as datas na tabela – que já estavam fixadas de cinco em cinco anos – outros diziam "não entendi o que tem que fazer, como assim variação?". Eu perguntava a eles: "quando algo está variando, o que está fazendo?", e eles respondiam: "está mudando"; e a partir de então, seguiram sozinhos concluindo a atividade.

Inicialmente, a turma foi dividida em oito grupos. Porém, o grupo 4 respondeu apenas a primeira questão, restando sete grupos para análise.

Com a pergunta do item *b*, "sabendo a população de 1970 e de 2010, é possível saber a população de 2015? Qual a sua previsão? Justifique.", esperava-se que os alunos percebessem que não há como saber a população urbana mundial de 2015, mas que poderia ser formulada uma previsão compatível com a tendência observada nos anos anteriores.

Dos sete grupos, apenas o grupo 8 respondeu que havia como saber esse dado, usando para a sua “previsão” o “aumento do aumento” populacional. Nessa atividade os alunos demonstraram não observar a unidade (milhões de habitantes), expressando uma solução que não considerava o contexto.

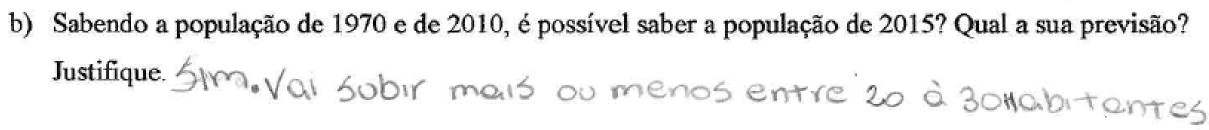
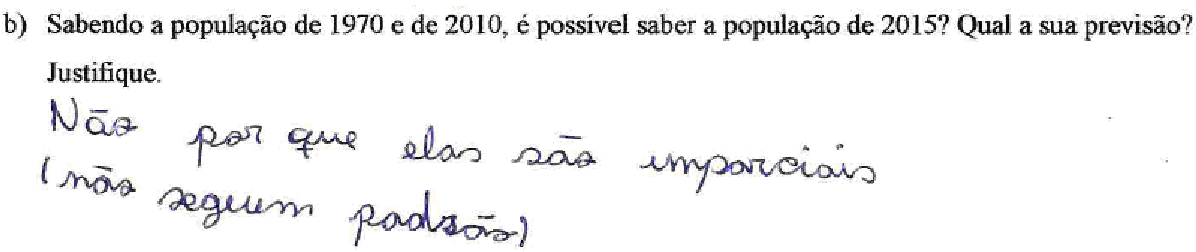

b) Sabendo a população de 1970 e de 2010, é possível saber a população de 2015? Qual a sua previsão? Justifique. Sim. Vai subir mais ou menos entre 20 à 30 habitantes

Figura 4.1 – Resposta do grupo 8 questão 1 item b.

O restante dos grupos argumentaram que “não havia como saber” (figura 4.2), e três deles fizeram uma previsão. Destes, dois utilizaram o padrão de crescimento, o qual “aumentava cada vez mais rápido” (figura 4.3).


b) Sabendo a população de 1970 e de 2010, é possível saber a população de 2015? Qual a sua previsão? Justifique.

Não por que elas são imparciais (não seguem padrão)

Figura 4.2 – Resposta do grupo 7 questão 1 item b.

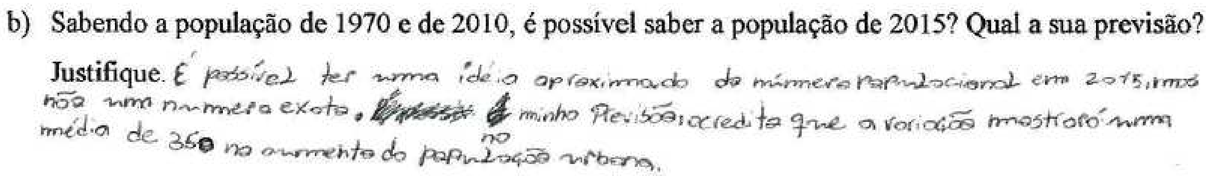

b) Sabendo a população de 1970 e de 2010, é possível saber a população de 2015? Qual a sua previsão? Justifique. É possível ter uma idéia aproximado do número populacional em 2015, mas não um numero exato. A minha previsão acredita que a variação mostrará uma média de 350 no aumento da população urbana.

Figura 4.3 – Resposta do grupo 2 questão 1 item b.

*“É possível ter uma ideia aproximada do número populacional em 2015, mas não um número exato. Minha previsão acredita que a variação mostrará uma média de 350 no aumento da população urbana”.*

Na pergunta do item *c*, “como você descreveria o crescimento da população urbana mundial?”, esperava-se que os alunos observassem a variação calculada na primeira questão para descrever o “aumento cada vez mais rápido” dessa população. O grupo 3 sugere essa resposta:

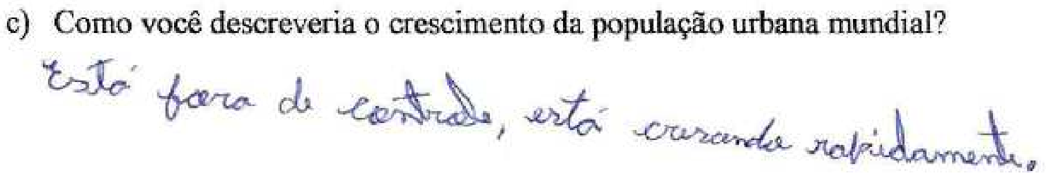

c) Como você descreveria o crescimento da população urbana mundial?
Está fora de controle, está crescendo rapidamente.

Figura 4.4 – Resposta do grupo 3 questão 1 item c.

Outros grupos mostram uma linguagem mais precisa:

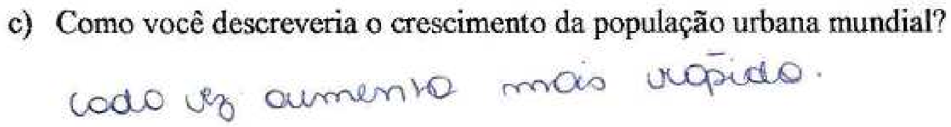

c) Como você descreveria o crescimento da população urbana mundial?
cada vez aumenta mais rápido.

Figura 4.5 – Resposta do grupo 5 questão 1 item c.

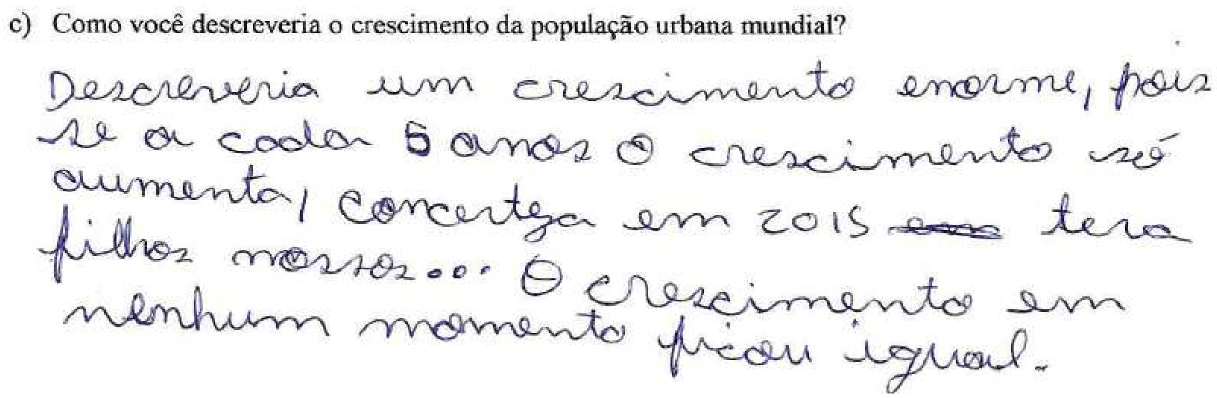

c) Como você descreveria o crescimento da população urbana mundial?
Descreveria um crescimento enorme, pois se a cada 5 anos o crescimento só aumenta, com certeza em 2015 terá filhos nossos... O crescimento em nenhum momento ficou igual.

Figura 4.6 – Resposta do grupo 6 questão 1 item c.

O grupo 8 utilizou a expressão “cresce constantemente”. Comparei com a turma as respostas dos grupos 6 (figura 4.6) e 8 (figura 4.7).


c) Como você descreveria o crescimento da população urbana mundial? Constantemente
Por que esta crescendo

Figura 4.7 – Resposta do grupo 8 questão 1 item c.

Perguntei à turma:

P: O que é constantemente?

$A_1$: É que é assim – fazendo o gesto de algo plano, reto.

P: O que é crescer constantemente?

$A_2$: É que cresce do mesmo jeito, não muda.

P: E agora? O crescimento em nenhum momento ficou igual ou cresce constantemente?

Apesar de a turma ter chegado à conclusão de que a população urbana não cresce constantemente, os alunos do grupo 8 argumentaram que a população crescia sempre, e por isso sua resposta foi considerada certa também. Disse que entendia o pensamento deles, mas enfatizei o significado de “constantemente” na linguagem matemática formal, diferenciando os tipos de crescimento. “A população urbana pode crescer cada vez mais rápido, cada vez mais lentamente, ou constantemente”.

Na segunda situação-problema, referente ao quadro 4.2, em que os alunos deveriam relacionar a quantidade de quilobytes baixados com o tempo de download em diferentes representações, apenas cinco grupos participaram do desenvolvimento.

No item *a*, que pedia aos alunos para representarem a relação descrita acima em forma tabular, os cinco grupos construíram a tabela sem apresentar dificuldades.

Na pergunta do item *b*, “sabendo que em 1 minuto foram baixados 150 kb, é possível afirmar que nos primeiros 10 segundos de download foram baixados 25 kb? Justifique.”, três grupos afirmaram que sim, devido à velocidade de 2,5 kb/s (figura 4.8). Acredito que esses alunos consideraram a velocidade constante, apesar de não terem explicitado isso na resposta. Dois grupos fizeram os cálculos para provar a afirmação (figura 4.9).

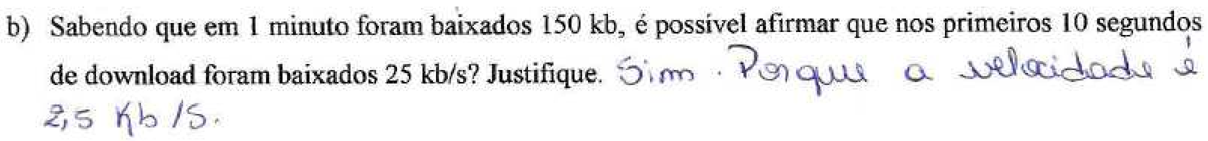

b) Sabendo que em 1 minuto foram baixados 150 kb, é possível afirmar que nos primeiros 10 segundos de download foram baixados 25 kb/s? Justifique. Sim. Porque a velocidade é 2,5 Kb/S.

Figura 4.8 – Resposta do grupo 8 questão 2 item b.

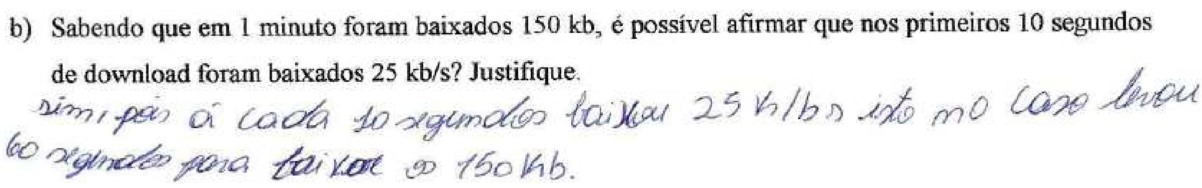

b) Sabendo que em 1 minuto foram baixados 150 kb, é possível afirmar que nos primeiros 10 segundos de download foram baixados 25 kb/s? Justifique.
sim, pois a cada 10 segundos baixou 25 Kb/bs isto no caso levou 60 segundos para baixar os 150 Kb.

Figura 4.9 – Resposta do grupo 5 questão 2 item b.

O item *c* solicitava que os alunos traçassem o gráfico que representa os quilobytes baixados em função do tempo. A aula foi finalizada com apenas dois dos cinco grupos traçando o gráfico, pois não houve tempo para a conclusão da atividade.

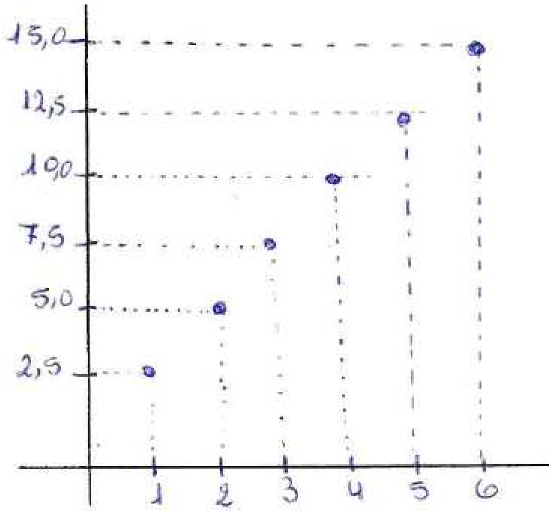



Figura 4.10 – Resposta do grupo 1 questão 2 item c.

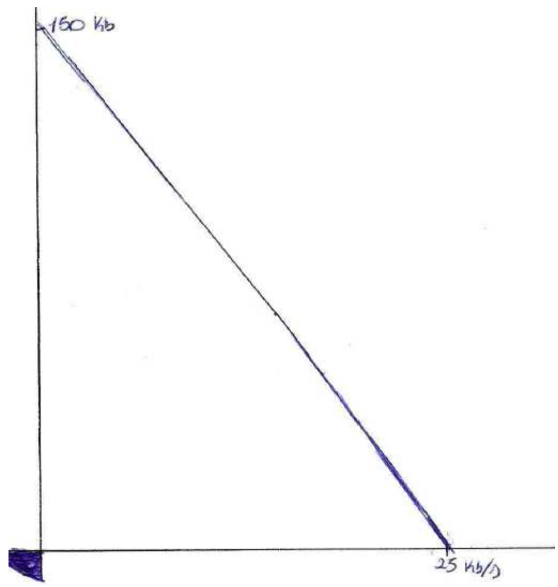



Figura 4.11 – Resposta do grupo 5 questão 2 item c.

No segundo encontro, pedi aos grupos 1 e 5 para traçarem os gráficos no quadro. Disse à turma que gráficos são formas de representação de uma determinada situação, e que alguns podem representá-la de um modo mais compatível com a realidade que outros.

P: O que podemos observar nesse gráfico? – Gráfico da figura 4.10.

$A_3$: Que a cada segundo aumenta 2,5 kb.

P: Mas o que acontece com meio segundo?

$A_3$: Baixa a metade de 2,5.

$A_4$: Tem que ligar os pontos.

Tracei a reta, ligando os pontos de 1 a 6 segundos.

$A_4$: Sora, não tem que sair do zero?

P: Sim! – terminei de traçar a reta partindo da origem.

Questionei qual dos gráficos melhor representava a situação-problema: o gráfico traçado pelo grupo 1 (figura 4.10) ou o gráfico da reta partindo da origem, traçado no quadro-negro. Os alunos disseram que a reta era a melhor representação, pois teríamos a representação dos quilobytes baixados em qualquer instante de tempo, dando assim a noção de continuidade.

Perguntei para o grupo 5, responsável pelo gráfico da figura 4.11, o que eles haviam pensado, e foi respondido "não sei sora, a gente não entendeu". A forma como o gráfico foi traçado indica que os alunos desse grupo não identificam o ponto do gráfico como um par ordenado e o traçam a partir de dois valores conhecidos, sem identificar as variáveis envolvidas e sua relação. Acredito que esse procedimento revela influência do método de estudo da função afim adotado pela professora. Ela ensinou aos alunos a construírem o gráfico calculando a raiz da função e observando o coeficiente linear, marcando os respectivos valores nos eixos correspondentes. Considero que a algoritmização no estudo da função afim provocou a necessidade de encontrar dois valores para marcar nos eixos e assim traçar a reta.

Os grupos restantes completaram o item *c* copiando do quadro, com a exceção do grupo 2, o qual traçou o seguinte gráfico, perguntando se estava correto:

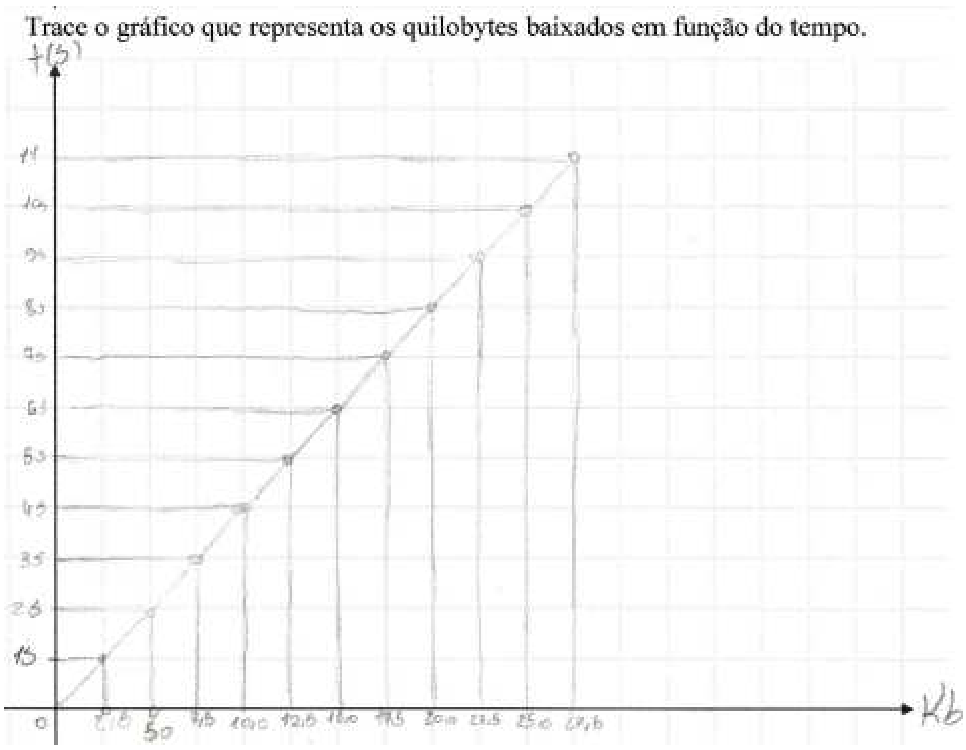



Figura 4.12 – Resposta do grupo 2 questão 2 item c.

Respondi que o gráfico estaria correto, se o tempo fosse considerado a variável dependente. Porém, ele não estava representando a relação solicitada no enunciado. Esse gráfico ilustra uma dificuldade comum dos alunos: diferenciar variável dependente e independente.

Na pergunta do item *d*, “o que você observa no gráfico?”, nenhum dos grupos observou, como eu esperava, que o gráfico é representado por uma reta.


d) O que você observa no gráfico? O TEMPO que Leva para baixar os Quilobites

Figura 4.13 – Resposta do grupo 1 questão 2 item d.

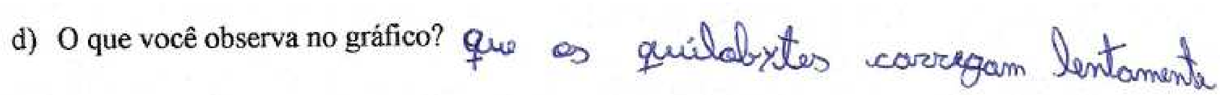

d) O que você observa no gráfico? que os quilobytes carregam lentamente

Figura 4.14 – Resposta do grupo 3 questão 2 item d.


d) O que você observa no gráfico? que os quilobytes aumentam 2,5 /s

Figura 4.15 – Resposta do grupo 8 questão 2 item d.

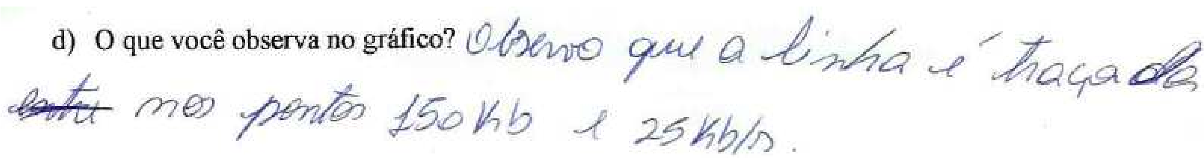

d) O que você observa no gráfico? Observo que a linha é traçada ~~entre~~ nos pontos 150 kb e 25 kb/s.

Figura 4.16 – Resposta do grupo 5 questão 2 item d.

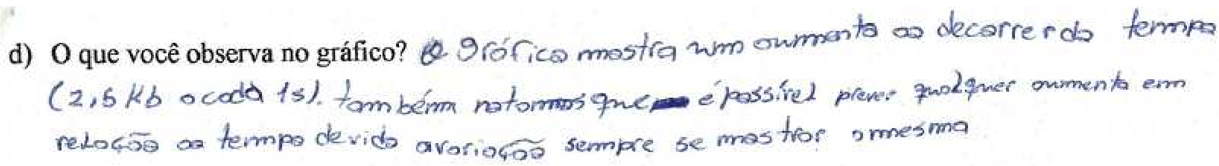

d) O que você observa no gráfico? O gráfico mostra um aumento ao decorrer do tempo (2,5 kb a cada 1s). também notamos que é possível prever qualquer aumento em relação ao tempo devido a variação sempre se mostrar a mesma

Figura 4.17 – Resposta do grupo 2 questão 2 item d.

*“O gráfico mostra um aumento ao decorrer do tempo (2,5 kb a cada 1s). Também notamos que é possível prever qualquer aumento em relação ao tempo devido à variação sempre se mostrar a mesma”.*

A frase “também notamos que é possível prever qualquer aumento em relação ao tempo devido à variação sempre se mostrar a mesma” foi acrescentada pelo grupo após a discussão com a turma, comparando o “problema 1” com o “problema 2”.

P: É possível saber quantos quilobytes baixaram depois de 10 segundos de download?

$A_5$: Sim, 25 kb.

P: Mas por que não podíamos saber a população urbana de 2015?

$A_6$: Porque não tinha um padrão, aí cresce sempre a mesma coisa – referindo-se ao problema 2.

Após observar a dificuldade da maioria dos alunos em traçar gráficos, as atividades seguintes foram propostas em folha de papel milimetrado e com escala definida.

No item *e*, “como você calculou os quilobytes baixados para construir a tabela”, apenas um grupo respondeu mencionando a multiplicação.

e) Como você calculou os quilobytes baixados para construir a tabela? Multiplicando o 2,5 pela quantidade de segundos.

Figura 4.18 – Resposta do grupo 1 questão 2 item e.

Os outros grupos responderam que haviam construído a tabela adicionando 2,5 kb a cada segundo.

e) Como você calculou os quilobytes baixados para construir a tabela? Calculei eles aumentando 2,5 kb/s

Figura 4.19 – Resposta do grupo 8 questão 2 item e.

No item *f*, “escreva uma fórmula para calcular a quantidade de quilobytes baixados em um intervalo de tempo t”, o único grupo que respondeu a essa questão sem dificuldades foi o grupo 1, cuja resposta para a questão anterior havia sido “multiplicando o 2,5 pela quantidade de segundos”.

f) Escreva uma fórmula para calcular a quantidade de quilobytes baixados em um intervalo de tempo t.

$Qb = t \cdot 2,5$

*Qb= quilobaites baixados

Figura 4.20 – Resposta do grupo 1 questão 2 item f.

Os alunos não visualizavam a soma sucessiva de parcelas como uma operação de multiplicação. Para esses grupos, foi necessária a minha intervenção, visando a resolução do item *f* e possibilitando uma melhor transição da linguagem natural para a escrita simbólica exigida.

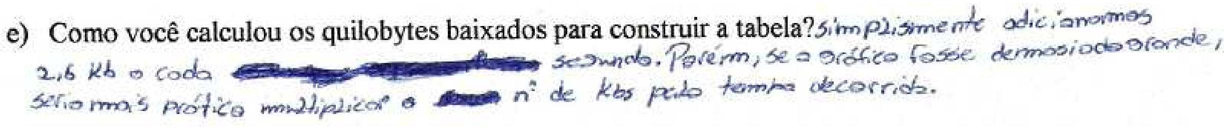
P: Como foram calculados os valores da tabela?

$A_2$: Fui somando 2,5 kb.

P: E se eu quisesse uma tabela com 1000 segundos?

$A_2$: Aí eu ia multiplicar.

Como resultado dessa interferência, o grupo 2 reformulou a resposta ao item *e*:

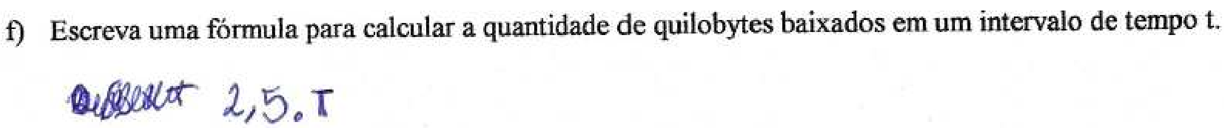


e) Como você calculou os quilobytes baixados para construir a tabela? Simplismente adicionamos 2,6 kb a cada segundo. Porém, se o gráfico fosse demasiado grande, seria mais prático multiplicar o nº de kbs pelo tempo decorrido.

Figura 4.21 – Resposta do grupo 2 questão 2 item e.

*"Simplesmente adicionamos 2,5 kb a cada segundo. Porém, se o gráfico fosse demasiado grande, seria mais prático multiplicar o nº de kbs pelo tempo decorrido."*

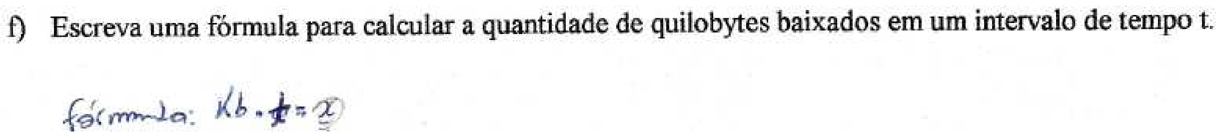
Os demais grupos chegaram à fórmula após meus questionamentos sobre como calcular os quilobytes baixados em um tempo muito grande.



f) Escreva uma fórmula para calcular a quantidade de quilobytes baixados em um intervalo de tempo t.

2,5.T

Figura 4.22 – Resposta do grupo 5 questão 2 item f.



f) Escreva uma fórmula para calcular a quantidade de quilobytes baixados em um intervalo de tempo t.

fórmula: Kb . t = x

Figura 4.23 – Resposta do grupo 2 questão 2 item f.

Escrevi no quadro as diferentes expressões dos grupos 1: (figura 4.20), 2 (figura 4.23) e 5 (figura 4.22). Comecei a comentar a resposta do grupo 5: ( $2{,}5.t$ ). Expliquei que se tratava de uma expressão algébrica, e não de uma fórmula que estabelece uma relação entre os quilobytes baixados e o tempo. A seguir, comparei as respostas do grupo 1 ( $Qb = t.2{,}5$, $Qb$ = quilobytes baixados) e grupo 2 ( $kb.t = x$ ), dizendo que para entendermos a fórmula necessitávamos de uma legenda.

A princípio, pensei que o grupo 2 estivesse apresentando uma dificuldade comum entre os educandos. Ao traduzir da linguagem escrita para a algébrica, "muitas vezes os alunos confundem variáveis com rótulos" (LOCHHEAD; MESTRE, 1997, p.147). Nesse caso, acreditei que o símbolo *Kb* tinha sido interpretado como rótulo para quilobytes, em vez de uma variável representando a quantidade de quilobytes baixados em um intervalo de tempo.

> "Em problemas em que se pede aos alunos para ler uma sentença relacionando duas variáveis e escrever então uma equação que expresse essa relação, frequentemente eles escrevem o contrário do que pretendem. (...) A fonte dos erros está em concepções erradas concernentes à estrutura e à interpretação de afirmações algébricas e nos processos pelos quais se faz a tradução da linguagem escrita para a linguagem algébrica." (LOCHHEAD; MESTRE, 1997, p. 145)

Porém, após questionar o grupo, percebi que esse não foi o caso. Os alunos usaram *kb* para representar a velocidade de download (2,5), generalizando a fórmula o máximo possível.

P: O que o *x* está representando?

$A_2$: Os quilobytes baixados, mas não quis usar kb de novo pra não ficar igual.

P: E o que é o kb?

$A_2$: É a velocidade, eu poderia ter usado *v*.

P: Poderia também, e então obteria uma fórmula para calcular os quilobytes baixados dependendo do tempo e de qualquer velocidade. Mas com a velocidade do problema, como ficaria?

$A_2$: 2,5 no lugar de Kb.

Após essa discussão, o grupo não apresentou dificuldades na conversão de registros – língua natural e representação algébrica – nas atividades seguintes.

No terceiro encontro, ocorrido em 23 de setembro, alguns alunos que haviam faltado a aulas anteriores formaram o grupo 9. Com o objetivo de recuperar os grupos que haviam abandonado a atividade, conversei com a turma, e foi combinado que começaríamos o exercício 3 todos juntos, como se fosse o primeiro encontro. A turma prometeu um maior envolvimento e empenho na realização das tarefas. A discussão em grupo referente a essa atividade foi realizada no quarto encontro, ocorrido em 27 de setembro.

O exercício 3 (quadro 4.3) propunha que os alunos analisassem a variação da temperatura do café em função do tempo. Nas respostas do item *c*, que questiona por que a variação de temperatura não é sempre a mesma, é possível observar que em algumas frases está mais clara a diferença entre a diminuição da temperatura e a diminuição das variações:

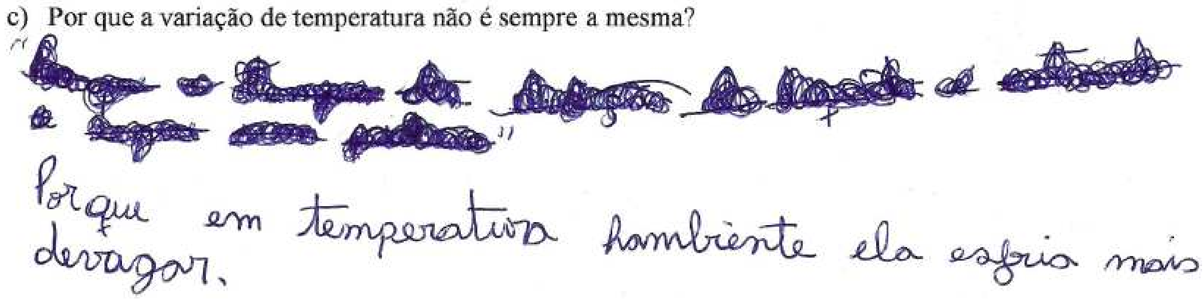



Figura 4.24 – Resposta do grupo 7 questão 3 item c.

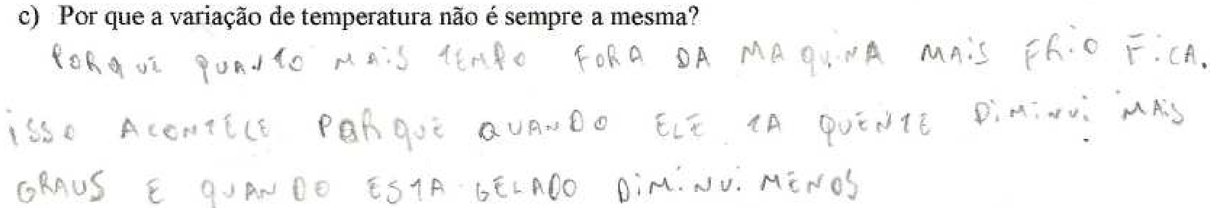



Figura 4.25 – Resposta do grupo 8 questão 3 item c.

*"Porque quanto mais tempo fora da máquina mais frio fica. Isso acontece porque quando ele tá quente diminui mais graus e quando está gelado diminui menos".*

Em outras frases isso parece indiferenciado:

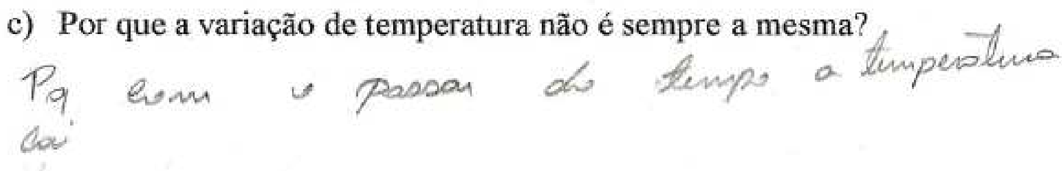



Figura 4.26 – Resposta do grupo 9 questão 3 item c.


Figura 4.27 – Resposta do grupo 3 questão 3 item c.

Quatro dos nove grupos observaram que a temperatura ambiente influenciava na variação de temperatura do café.


Figura 4.28 – Resposta do grupo 1 questão 3 item c.

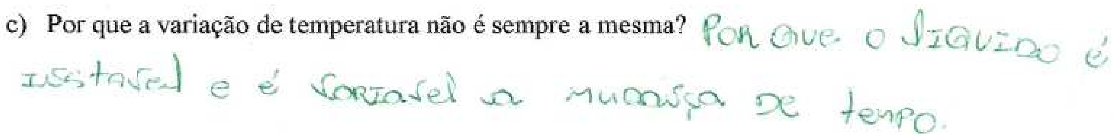

c) Por que a variação de temperatura não é sempre a mesma? Por que o liquido é instavel e é variavel a mudança de tempo.

Figura 4.29 – Resposta do grupo 4 questão 3 item c.

O grupo 2 não apresentou uma justificativa para a variação de temperatura não ser constante. Considero que a linguagem utilizada pelo grupo foi resultado da discussão realizada no encontro anterior.

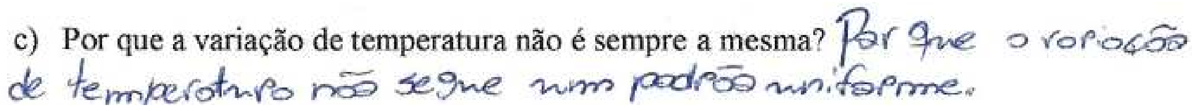

c) Por que a variação de temperatura não é sempre a mesma? Por que a variação de temperatura não segue um padrão uniforme.

Figura 4.30 – Resposta do grupo 2 questão 3 item c.

Nessa questão pude observar a seguinte fala: “Quando o café tá frio esfria mais devagar, por causa do tempo (referindo-se à temperatura ambiente). Não tem como esfriar sempre”. Nesse caso, o aluno, com a ideia de limite inferior, identificou a assíntota horizontal, que pode ser observada por meio da lei da função, $f(t) = 60.0{,}9^t + 20$, através da qual foram gerados os dados da tabela. Porém, no item *d*, em que era solicitado o gráfico que representa a temperatura do café em função do tempo, os alunos “estranharam” não conseguirem traçar uma reta passando por todos os pontos. Alguns movimentavam a régua tentando conseguir uma aproximação. Outros perguntaram: “tem que pontilhar ou dá pra fazer reto?”. Enfatizei que deveriam seguir o que já haviam marcado no gráfico, sem forçar um resultado esperado.

Item *d*:

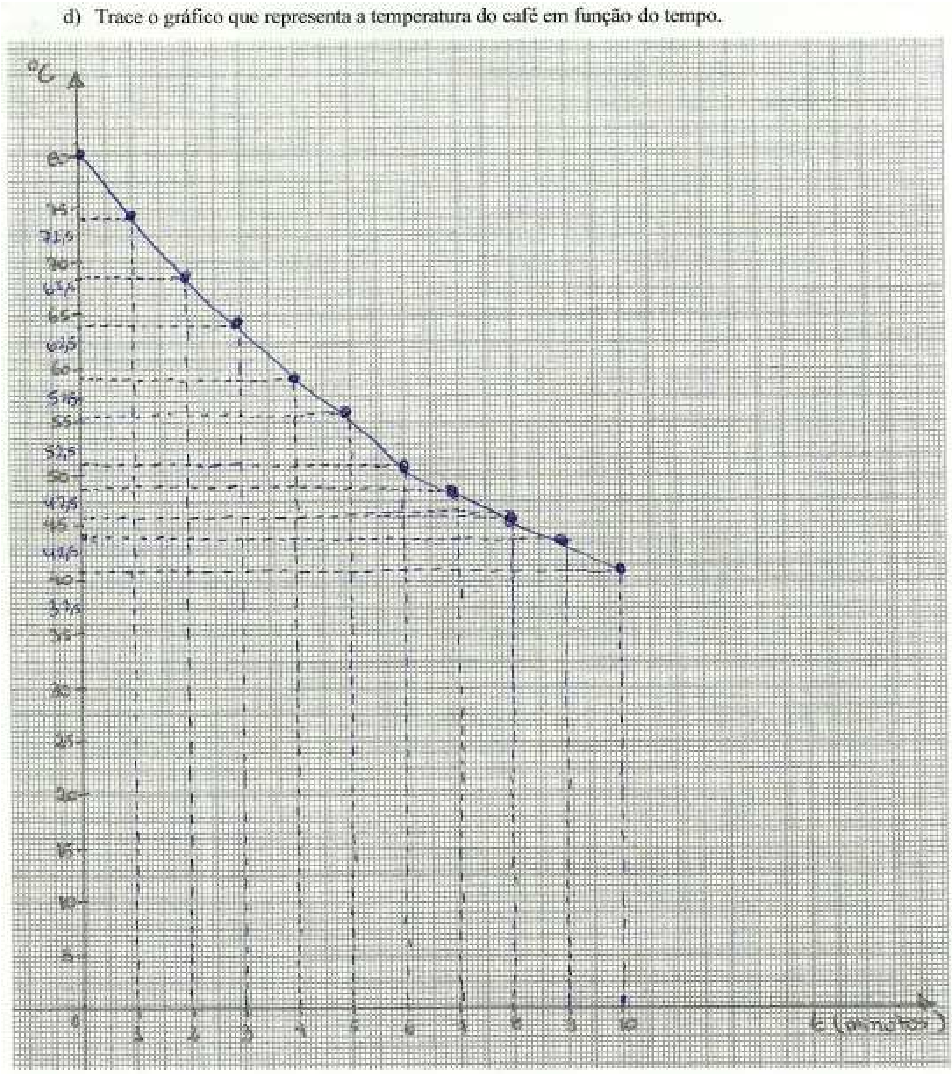



Figura 4.31 – Resposta do grupo 1 questão 3 item d

Cinco dos nove grupos responderam o item *e*, “o que você observa no gráfico?” (figuras 4.32, 4.33 e 4.34). Destes, apenas o grupo 2 observou que, devido à variação da temperatura não ser uniforme, o gráfico não pode ser representado por uma reta (figura 4.35).

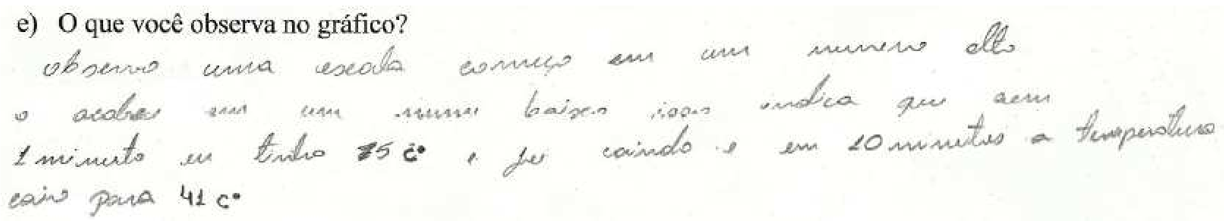

e) O que você observa no gráfico?
observo uma escala começo em um numero alto o acabou em um numero baixo isso indica que em 1 minuto eu tinha 75 c° e foi caindo e em 10 minutos a temperatura caiu para 41 c°

Figura 4.32 – Resposta do grupo 2 questão 3 item e.

*“Observo uma escala. Começou em um número alto e acabou em um número baixo. Isso indica que em um minuto eu tinha 75ºC e foi caindo, e em 10 minutos a temperatura caiu para 41ºC”.*


e) O que você observa no gráfico? Que a Temperatura do café foi baixando de acordo com o tempo.

Figura 4.33 – Resposta do grupo 1 questão 3 item e.

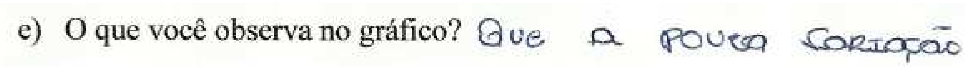

e) O que você observa no gráfico? Que a pouca variação

Figura 4.34 – Resposta do grupo 4 questão 3 item e.

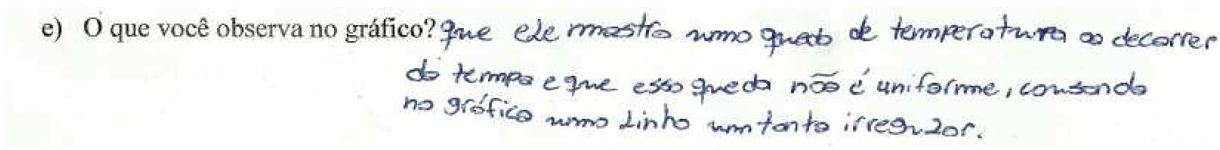

e) O que você observa no gráfico? que ele mostra uma queda de temperatura ao decorrer do tempo e que essa queda não é uniforme, causando no gráfico uma linha um tanto irregular.

Figura 4.35 – Resposta do grupo 2 questão 3 item e.

*"Que ele mostra uma queda de temperatura ao decorrer do tempo e que essa queda não é uniforme, causando no gráfico uma linha um tanto irregular"*.

A conclusão da atividade 1 foi realizada no quarto encontro. Iniciei o esboço do gráfico no quadro-negro e solicitei que algum aluno fosse completá-lo.

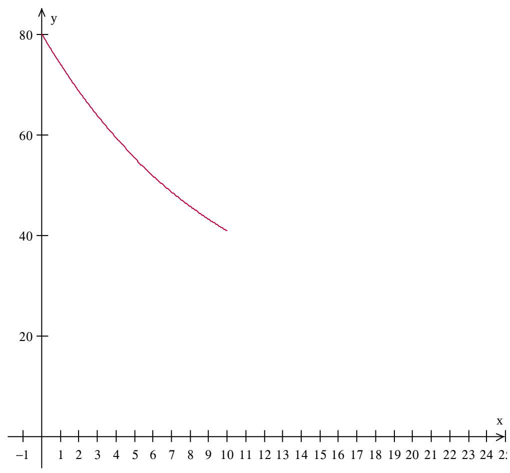



Figura 4.36 – Reprodução do esboço do gráfico da temperatura do café em função do tempo feito no quadro.

Uma aluna voluntariou-se a esboçar o gráfico, desde que recebesse ajuda. O primeiro traçado foi uma reta, mas houve protestos de toda a turma. "Não!!! Segue a curva, não faz reto!". Na segunda tentativa, representada na figura 4.37, a maioria da turma demonstrou-se satisfeita, enquanto alguns diziam que "tinha que ter continuado no mesmo padrão da outra".

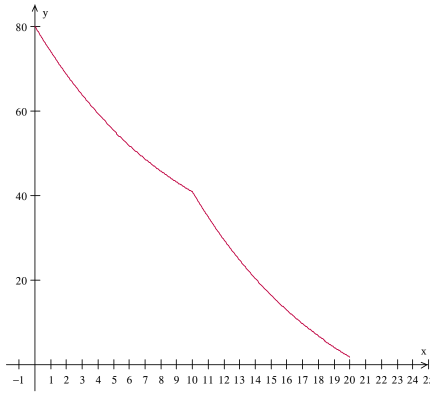



Figura 4.37 – Reprodução da continuação do gráfico feito pela aluna no quadro.

Lembrei a situação que estávamos representando: a queda de temperatura do café em um dia de temperatura ambiente igual a 20ºC. Esperei que houvesse alguma observação a respeito do gráfico, o qual indicava a temperatura do café aproximando-se do 0ºC. Como não houve essa intervenção, com o objetivo de iniciar uma discussão perguntei por que a variação de temperatura do café não é sempre a mesma.

$A_1$: Por causa da temperatura ambiente.

P: O que que tem a temperatura ambiente?

$A_1$: Se estiver num dia frio vai esfriar mais rápido e num dia quente esfria mais devagar.

P: Se em um dia estiver 30ºC, tem como a temperatura do café ficar 20ºC?

$A_2$: Não, só se colocar na geladeira.

$A_3$: A temperatura do café vai ficar igual à temperatura ambiente.

P: Mas o que está acontecendo com a temperatura do café no gráfico de vocês?

T: Tá chegando no 0ºC.

P: Como teria que ser?

T: Não pode passar de 20ºC.

Finalizei a atividade traçando o gráfico com a assíntota em 20ºC.

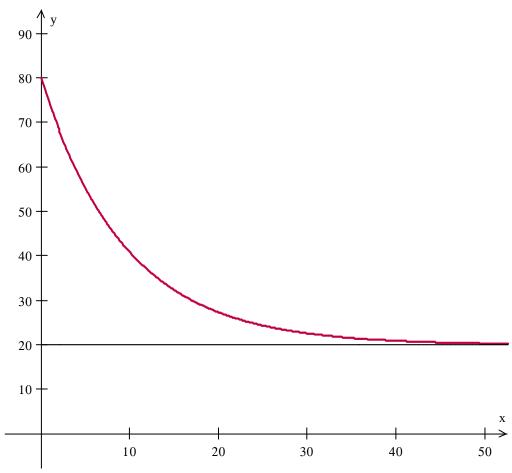



Figura 4.38 – Reprodução do gráfico com assíntota horizontal.

*4.3.2 Atividade 2*

A aplicação dessa atividade, referente ao quadro 4.4, em que os alunos deveriam reconhecer a função afim na representação tabular, ocorreu no dia 27 de setembro, e a discussão em grupo foi realizada no quinto encontro, dia 29 de setembro.

A princípio, todos os alunos tentaram traçar o gráfico das funções para verificar quais delas possuem o gráfico representado por uma reta. Em um dos grupos, as colegas discutiam sobre valores de escala: “tem que ter a mesma medida pra fazer o gráfico, se não for assim dá errado”, “faz de cinco em cinco (milímetros)”. Um dos componentes do grupo 3 disse:

> $A_7$: Sora, eu sei que é a *f*, mas eu não estou conseguindo fazer o gráfico.
>
> P: Como tu sabe que é a *f*?
>
> $A_7$: Porque está aumentando sempre a mesma coisa.
>
> P: Então escreve isso. A questão não pede pra traçar o gráfico, mas sim para justificar.

A partir daí, os outros alunos deixaram de usar o gráfico para responder a questão (figura 4.40 e 4.41), com exceção do grupo 7 (figura 4.39), que levou grande parte do período para concluir o exercício e, por não manter a unidade de medida da escala, não obteve o resultado esperado.

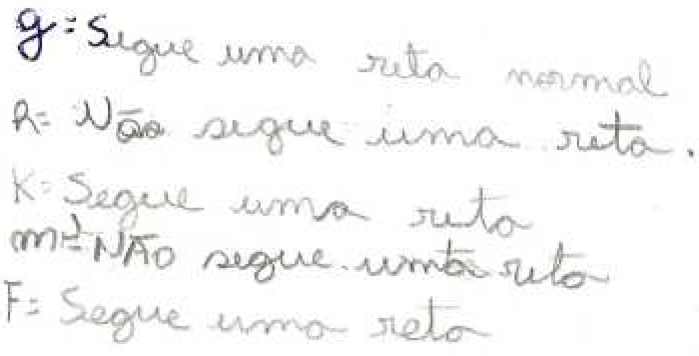
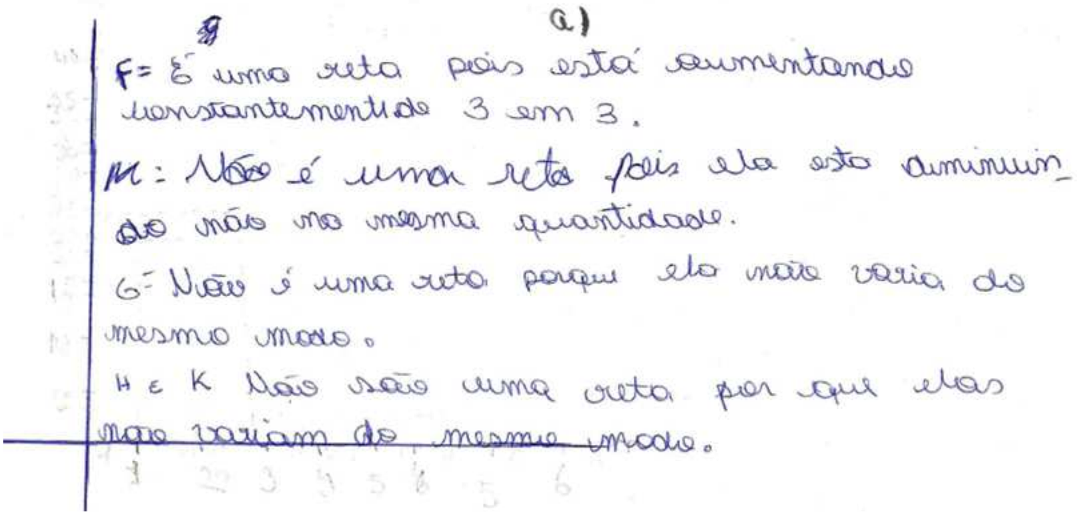



Figura 4.39 – Resposta do grupo 7 – questão 1.



a)

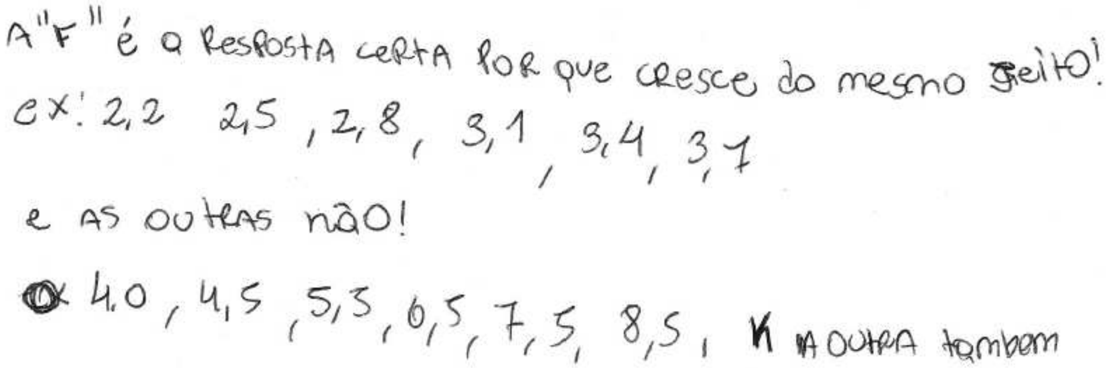
F= É uma reta pois está aumentando constantemente de 3 em 3.

M: Não é uma reta pois ela esta diminuindo não na mesma quantidade.

G: Não é uma reta porque ela não varia do mesmo modo.

H e K Não são uma reta por que elas não variam do mesmo modo.

Figura 4.40 – Resposta do grupo 6 – questão 1.



A"F" é a resposta certa por que cresce do mesmo jeito!

ex: 2,2 2,5, 2,8, 3,1, 3,4, 3,7

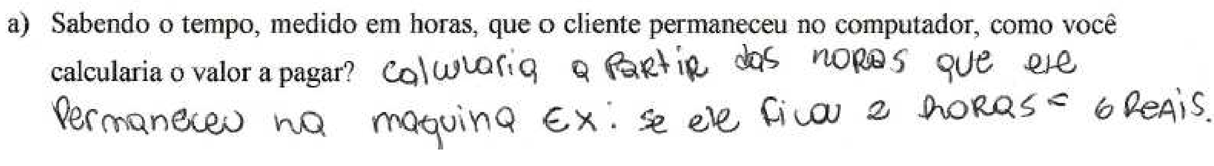
e as outras não!

ex 4,0, 4,5, 5,3, 6,5, 7,5, 8,5, K a outra tambem

Figura 4.41 – Resposta do grupo 4 – questão 1.

Considero que o fato dos alunos terem iniciado essa atividade tentando traçar os gráficos das funções não decorre de uma ausência de compreensão de que a taxa de variação constante caracteriza a função afim, mas sim uma questão de uma prática escolar: se queremos saber como é um gráfico, temos que traçá-lo.

No item *a* da situação-problema 4, referente ao quadro 4.5, os alunos não apresentaram dificuldades em calcular o valor a ser pago por um cliente de uma Lan House em função do tempo de utilização dos computadores. Acredito que isso ocorreu por tratar-se de um problema presente em seu cotidiano.



a) Sabendo o tempo, medido em horas, que o cliente permaneceu no computador, como você calcularia o valor a pagar? Calcularia a partir das horas que ele permaneceu na maquina ex: se ele ficou 2 horas = 6 reais.

Figura 4.42 – Resposta do grupo 4 – questão 2 item a.

a) Sabendo o tempo, medido em horas, que o cliente permaneceu no computador, como você calcularia o valor a pagar? MULTIPLICANDO O VALOR 3,00 R$ POR CADA HORA QUE O CLIENTE FICAR

Figura 4.43 – Resposta do grupo 8 – questão 2 item a.

*“Multiplicando o valor 3,00R$ por cada hora que o cliente ficar.”.*

Na pergunta do item *b*, “escreva uma fórmula que represente o valor a ser pago correspondente ao tempo t que o cliente permaneceu no computador, medido em horas”, a turma apresentou um melhor desempenho em relação à questão semelhante da atividade 1. Os grupos relacionaram o valor a pagar com o tempo de uso, indicando o que cada variável representava.

Nas respostas apresentadas, é possível identificar que a escrita nem sempre segue algumas convenções da notação algébrica, como escrever as constantes antes das variáveis e eliminar o símbolo de multiplicação (figuras 4.44, 4.45 e 4.46). Esse era um dos objetivos, pois as atividades seguintes tinham o intuito de identificar as fórmulas obtidas na sequência didática com a expressão $f(x) = ax + b$. Porém, não exigi o uso dessas convenções, pois, segundo Demana e Leitzel (1997), “essas convenções são barreiras à compreensão de muitos alunos e não podem ser adotadas apressadamente” (Ibidem, p. 75).

b) Escreva uma fórmula que represente o valor a ser pago correspondente ao tempo t que o cliente permaneceu no computador, medido em horas.

$t \cdot 3 = W$ -> valor a pagar quando sair da lan house.

Figura 4.44 – Resposta do grupo 5 – questão 2 da atividade 2, item b.

b) Escreva uma fórmula que represente o valor a ser pago correspondente ao tempo t que o cliente permaneceu no computador, medido em horas.

$\boxed{P = 3{,}00 \cdot h}$

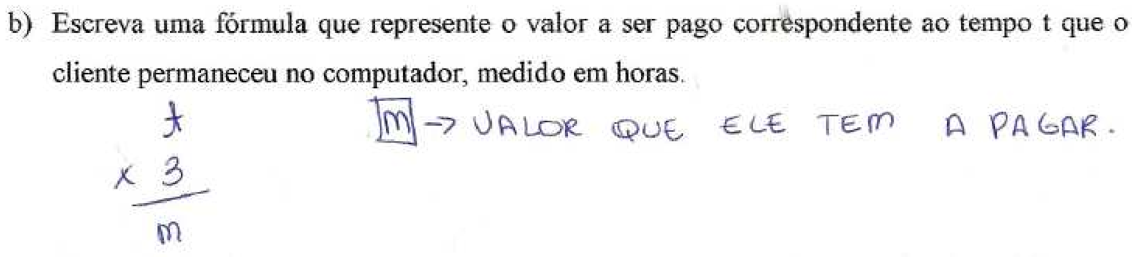
P= Preço a pagar h= hora

Figura 4.45 – Resposta do grupo 1 – questão 2 da atividade 2, item b.

b) Escreva uma fórmula que represente o valor a ser pago correspondente ao tempo t que o cliente permaneceu no computador, medido em horas. $3 \cdot t = k$ -> valor a pagar

Figura 4.46 – Resposta do grupo 8 – questão 2 item b.

O grupo 6 não apresentou a resposta em um formato esperado (figura 4.47). Apesar de correta, indica que os alunos não fazem a relação da sequência didática com os conteúdos vistos até então.

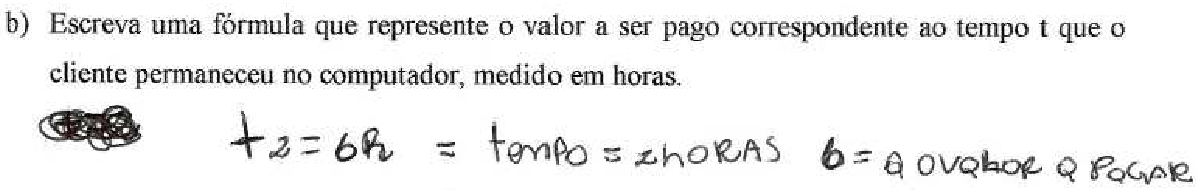

b) Escreva uma fórmula que represente o valor a ser pago correspondente ao tempo t que o cliente permaneceu no computador, medido em horas.

$$\begin{array}{r} t \\ \times\ 3 \\ \hline m \end{array}$$

$\boxed{m}$ → VALOR QUE ELE TEM A PAGAR.

Figura 4.47 – Resposta do grupo 6 – questão 2 item b.

Para comentar essa questão com os alunos, escrevi no quadro a resposta apresentada pelo grupo 4 (figura 4.48).


b) Escreva uma fórmula que represente o valor a ser pago correspondente ao tempo t que o cliente permaneceu no computador, medido em horas.

t2 = 6R = tempo = 2HORAS 6 = A O VALOR A PAGAR

Figura 4.48 – Resposta do grupo 4 – questão 2 item b.

P: Vocês conseguem entender essa fórmula?

$A_8$: Sim, ficando no computador duas horas paga seis reais.

P: Isso, essa fórmula nos mostra quanto foi pago em um tempo específico nos computadores. E se eu quisesse uma fórmula para um tempo qualquer?

$A_9$: Sora, mas tá certo, eu peguei um tempo qualquer, duas horas!

P: Sim, está certo para um tempo de duas horas. Mas se eu quiser um tempo qualquer?

$A_9$: Mas se é tempo qualquer pode ser duas horas!

$A_8$: Ela quer uma fórmula que possa ir mudando o tempo.

P: Isso. No momento que eu escolho o tempo de duas horas, não tenho uma fórmula que calcule o valor a ser pago dependendo do tempo nos computadores. Fica uma fórmula fechada: em duas horas pago seis reais. O que eu tenho que fazer para obter uma fórmula que relacione o valor a ser pago com o tempo que eu permaneço na Lan House?

$A_8$: Tem que usar uma letra para o tempo.

P: Então como ficaria?

T: 3 vezes t

P: Igual a?

T: Sei lá... qualquer letra.

P: Igual a *V*, onde *V* é o valor a pagar.

Na pergunta do item *c*, “analise os gráficos abaixo: qual deles melhor representaria o valor a ser pago em relação ao tempo que o cliente permanece no computador? Justifique sua resposta em todos os gráficos.”, os alunos não tiverem dificuldades em observar que o gráfico deveria ser representado por uma reta:

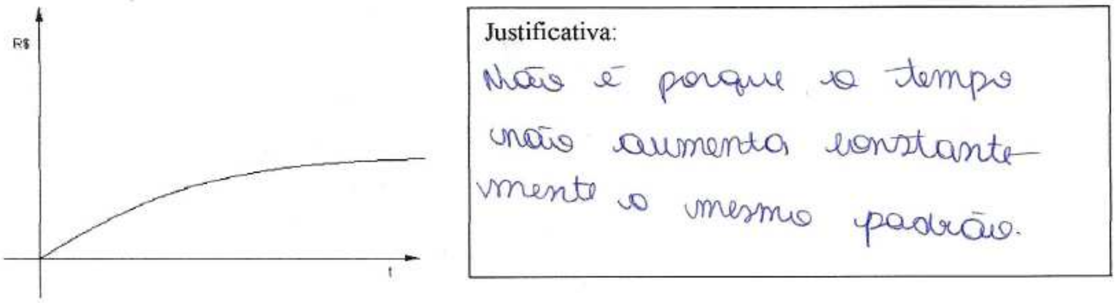



Figura 4.49 – Resposta do grupo 6 – questão 2 item c.

Neste caso, nota-se que o aluno tem a noção de que a função é representada por uma reta quando varia constantemente. Porém, ainda não foi compreendida a taxa de variação constante como variação da variável dependente a cada unidade acrescida na variável independente. Abaixo, outros exemplos que mostram a dificuldade dos alunos em diferenciar variável dependente e independente e suas variações:

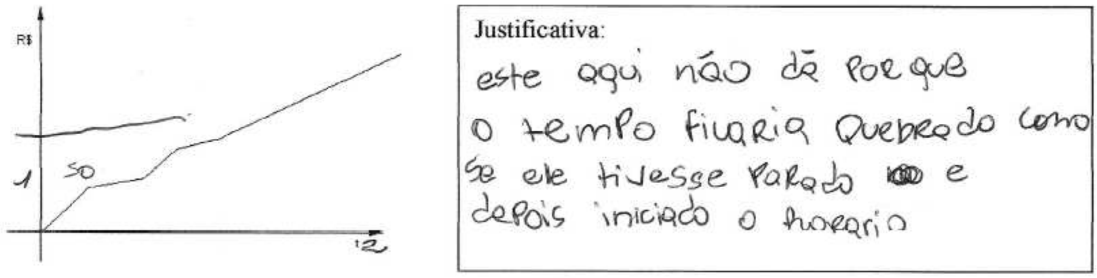



Figura 4.50 – Resposta do grupo 4 – questão 2 item c.

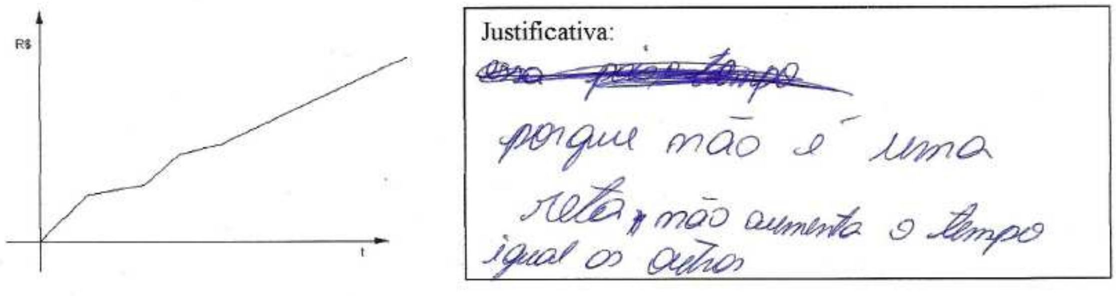



Figura 4.51 – Resposta do grupo 5 – questão 2 item c.

Três grupos relacionaram as mudanças de inclinação dos segmentos de reta com uma alteração no valor da hora de uso do computador, isto é, no coeficiente angular.

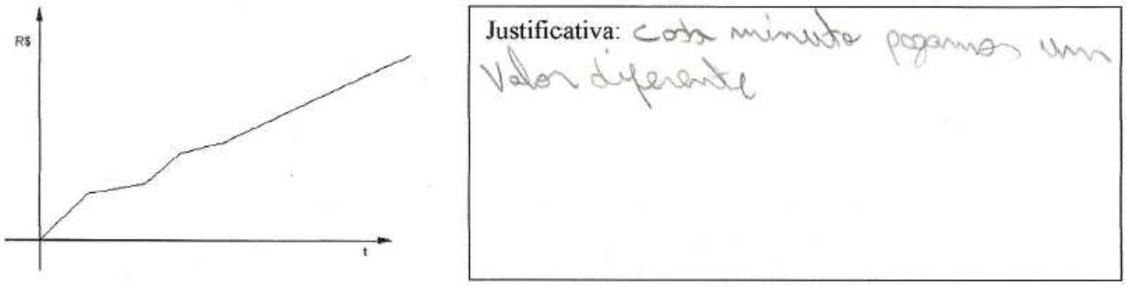



Figura 4.52 – Resposta do grupo 8 – questão 2 item c.

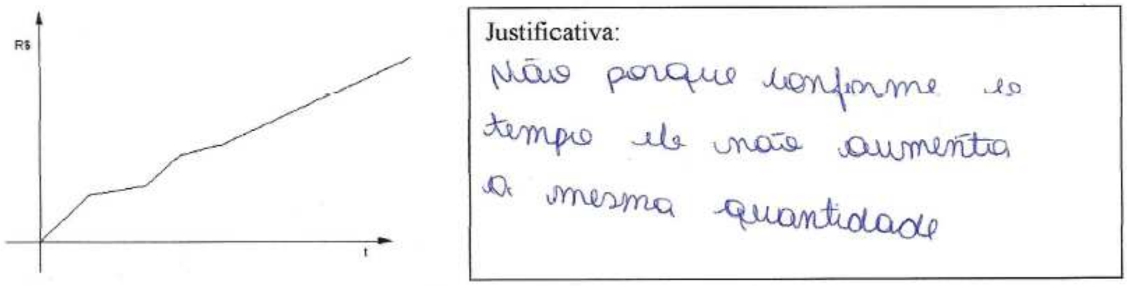



Figura 4.53 – Resposta do grupo 6 – questão 2 item c.

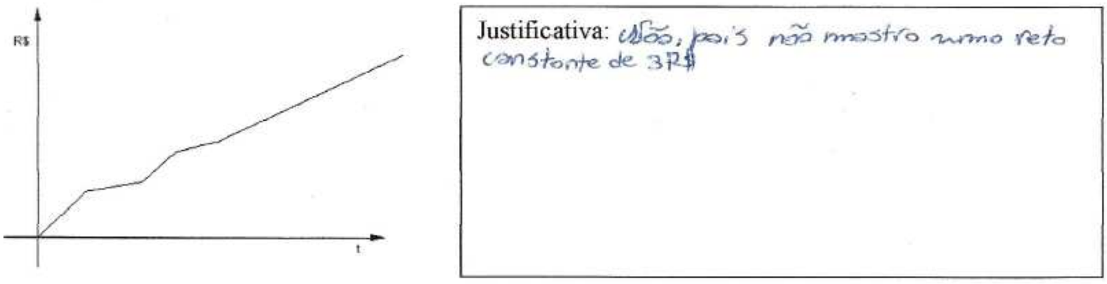



Figura 4.54 – Resposta do grupo 2 – questão 2 item c.

Nas respostas, os grupos dividiram-se entre os dois gráficos representados por uma reta:

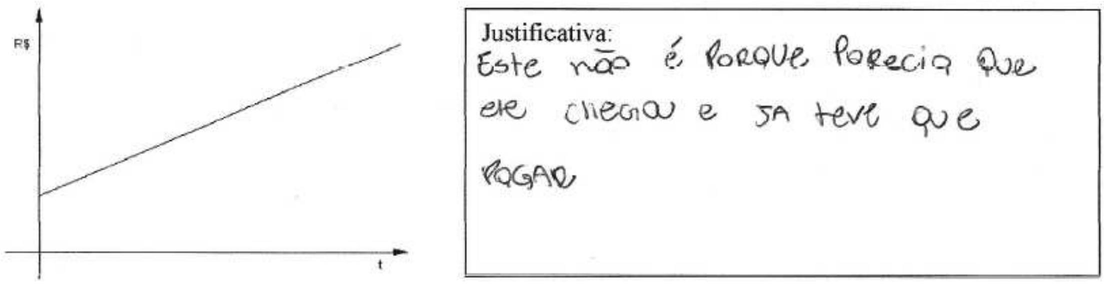



Figura 4.55 – Resposta do grupo 4 – questão 2 item c.

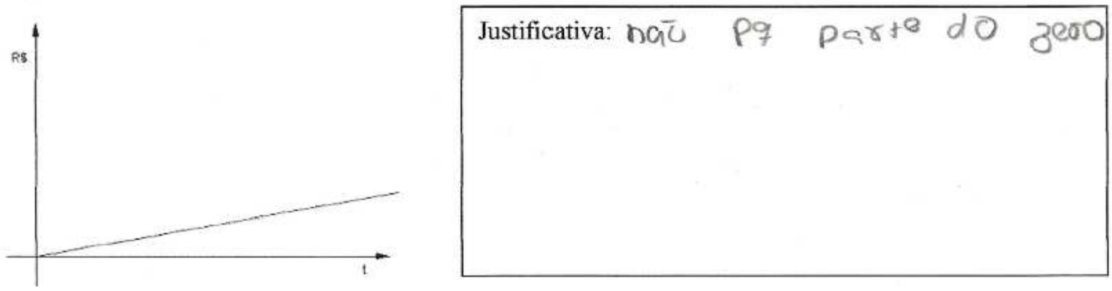



Figura 4.56 – Resposta do grupo 9 – questão 2 item c.

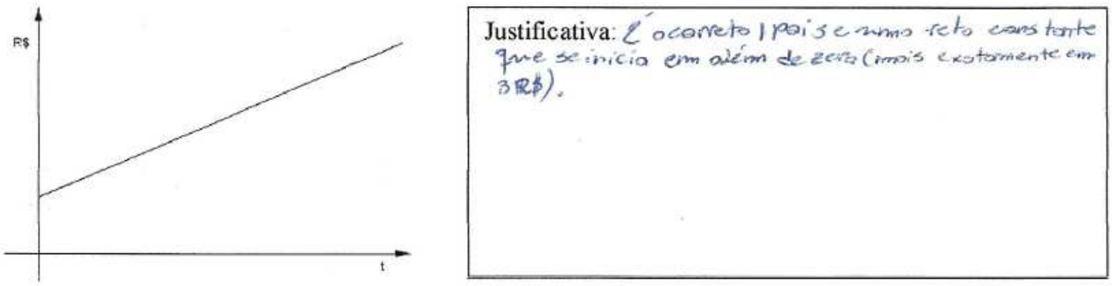



Figura 4.57 – Resposta do grupo 2 – questão 2 item c.

*“É correto, pois é uma reta constante que se inicia em além de zero (mais precisamente em 3R$)”*

Alguns grupos afirmaram que ao chegar à Lan House, paga-se de imediato três reais para usar os computadores durante uma hora. Propus então que nós traçássemos um gráfico para representar o valor a ser pago em função do tempo na Lan House descrita por eles. “É aquele ali, sora”, referindo-se ao gráfico abaixo.

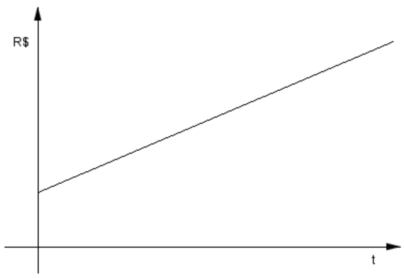



Figura 4.58 – Gráfico da questão 2 item c.

P: Tá bom, cheguei na Lan House, paguei três reais, e vou poder usar durante uma hora. Vamos olhar esse gráfico: depois de meia hora na Lan House, quanto terei que pagar?

Marquei o ponto no gráfico, esperando que os alunos me dissessem qual era a imagem da função para o tempo igual a 0,5 horas.

$A_3$: Quatro e cinquenta.

P: Então esse gráfico não está representando a Lan House que vocês me falaram. Quem vem traçar o gráfico certo?

Um aluno foi até o quadro-negro, repetindo que o gráfico ficaria igual ao anterior. Alguns alunos diziam: “tem que ligar o um no três”, mas mesmo assim o gráfico não foi traçado. Então finalizei a atividade traçando o gráfico em forma de escada.

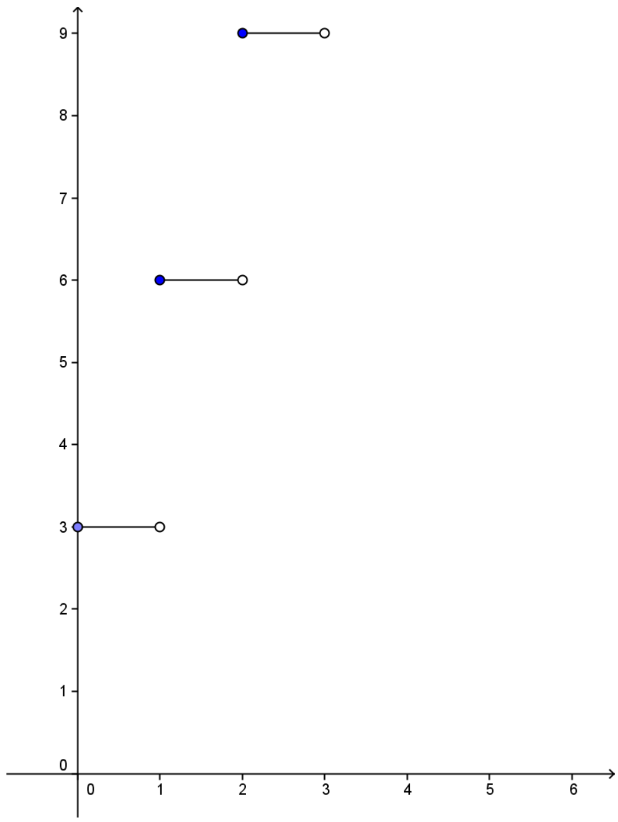
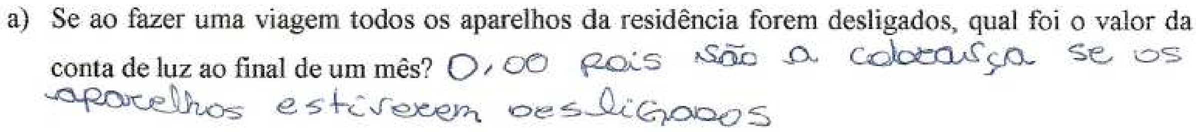



Figura 4.59 – Reprodução do gráfico escada.

### *4.3.3 Atividade 3*

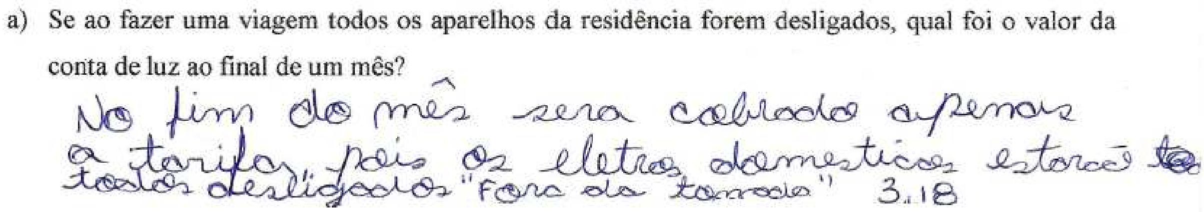
No sexto encontro, dia 03 de outubro, foi aplicada a atividade 3, referente ao quadro 4.6, em que os alunos deveriam relacionar o valor da conta de luz com o consumo de um eletrodoméstico, em diferentes representações. A discussão com a turma e conclusão da atividade ocorreu no dia 06 de outubro.

Ao ler a questão com os alunos, chamei a atenção para a tarifa de iluminação pública, pois, até o momento, em todos os problemas modelados por funções afins, o valor inicial era zero. Na pergunta do item *a*, “se ao fazer uma viagem todos os aparelhos da residência forem desligados, qual foi o valor da conta de luz ao final de um mês”, oito dos nove grupos consideraram a tarifa de iluminação pública (figura 4.59). Apenas o grupo 4 não considerou essa tarifa, como ilustra a figura 4.58.



a) Se ao fazer uma viagem todos os aparelhos da residência forem desligados, qual foi o valor da conta de luz ao final de um mês? 0,00 pois não a cobrança se os aparelhos estiverem desligados

Figura 4.60 – Resposta do grupo 4 – questão 1 item a.

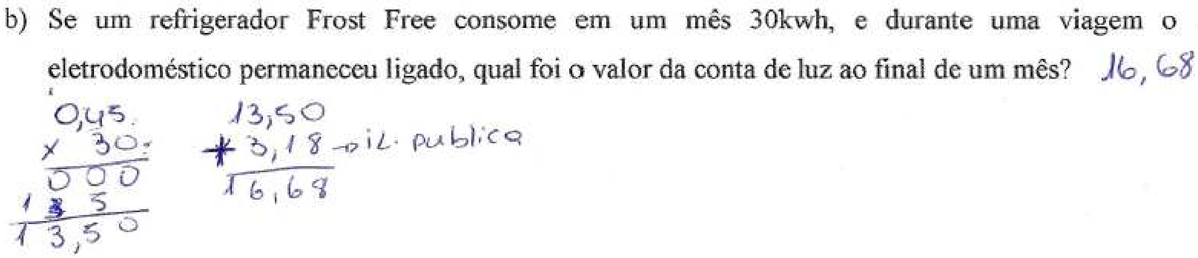


a) Se ao fazer uma viagem todos os aparelhos da residência forem desligados, qual foi o valor da conta de luz ao final de um mês?

No fim do mês será cobrado apenas a tarifa, pois os eletros domésticos estarão ~~to~~ todos desligados "Fora da tomada" 3.18

Figura 4.61 – Resposta do grupo 6 – questão 1 item a.

Apesar do restante dos grupos responderem corretamente a questão *a*, na pergunta do item *b*, "se um refrigerador Frost Free consome em um mês 30 kWh, e durante uma viagem o eletrodoméstico permaneceu ligado, qual foi o valor da conta de luz ao final de um mês", apenas cinco dos nove grupos adicionaram o valor da tarifa de iluminação pública.



b) Se um refrigerador Frost Free consome em um mês 30kwh, e durante uma viagem o eletrodoméstico permaneceu ligado, qual foi o valor da conta de luz ao final de um mês? 16,68

0,45
× 30
000
135
13,50

13,50
+ 3,18 → il. publica
16,68

Figura 4.62 – Resposta do grupo 1 – questão 1 item b.

O item *c* pedia que os alunos completassem a tabela que relacionava o valor da conta de luz com o consumo mensal de diferentes refrigeradores. Observei que a maioria dos grupos considerou a tarifa de iluminação pública no caso de um consumo de 0 kWh. Porém, ao calcularem o consumo de 10 kWh, os alunos não mais consideravam essa tarifa.

P: Por que quando não houve consumo e o valor a pagar foi R$ 3,18?

$A_6$: Porque é obrigatório!

P: Se é obrigatório, por que quando o refrigerador consumiu 10 kWh tu não quis mais pagar? Para 10 kWh não é obrigatório?

$A_6$: É sim. Tem que somar o R$ 3,18, né sora?

P: Isso.

Para preencher a tabela, o grupo 7 utilizou o valor de R$ 13,50 calculado no item *b*.

| Consumo (kWh) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| Valor a pagar | 3,18 | 7,68 | 12,18 | 15,50 | 21,18 |

Figura 4.63 – Resposta do grupo 7 – questão 1 item c.

Na pergunta do item *d*, "como você calculou o valor da conta de luz para construir a tabela", dois grupos utilizaram símbolos matemáticos.

d) Como você calculou o valor da conta de luz para construir a tabela?

0,45 X θ Consumo (KWh) + 3,18

Figura 4.64 – Resposta do grupo 7 – questão 1 item d.

Três grupos esqueceram de dizer que adicionaram o valor de R$ 3,18.

d) Como você calculou o valor da conta de luz para construir a tabela? multiplicando o valor do cada kWh por 0.45

Figura 4.65 – Resposta do grupo 3 – questão 1 item d.

Os grupos 4, 5 e 6 solicitaram minha intervenção para escrever a fórmula da questão seguinte. Observei que ao responder o item *d*, os alunos não haviam quantificado suas operações. A resposta inicial do grupo 5 era "multipliquei os consumos, somei com o valor da iluminação pública sobre o valor cobrado".

P: Como tu calculou o valor da conta de luz para construir a tabela?

$A_9$: Multipliquei o consumo ...

P: Por quanto?

$A_9$: 0,45.

P: Então escreve. E depois?

$A_9$: Somei com o valor da iluminação pública.

P: Que valor?

$A_9$: 3,18.

P: Então escreve. Agora na próxima questão tem que escrever a mesma coisa usando a linguagem matemática.

$A_9$: Ah tá, sora.

Como resultado dessa intervenção temos a resposta abaixo.

d) Como você calculou o valor da conta de luz para construir a tabela?

Multipliquei os consumos por 0,45 somei com o valor da iluminação publica sobre o valor cobrado. 3,18

Figura 4.66 – Resposta modificada do grupo 5 – questão 1 item d.

O mesmo tipo de intervenção foi realizada nos grupos 4 (figura 4.67) e 6, e assim os alunos concluíram sozinhos a atividade.

d) Como você calculou o valor da conta de luz para construir a tabela?

multipliquei kwh pelo o Numero 0,45 do consumo e após obter o resultado Somei com a tarifa padrão de 3,18.

Figura 4.67 – Resposta do grupo 4 – questão 1 item d.

O item *e* solicitava que os alunos escrevessem a fórmula que representa o valor *V* da conta de luz correspondente ao consumo *c* do refrigerador. Dos nove grupos, oito escreveram uma fórmula envolvendo as duas grandezas. Entretanto apenas o grupo 4 utilizou os nomes *V* e *c* das variáveis conforme enunciado na questão.

e) Escreva uma fórmula que represente o valor *V* da conta de luz correspondente ao consumo *c* do refrigerador.

$R \times 0,45 + 3,18 = M$

R = consumo

M = valor da conta a pagar

Figura 4.68 – Resposta do grupo 5 – questão 1 item e.

O grupo 2 utilizou o recurso de uma transição gradual da verbalização para o simbolismo algébrico, misturando símbolos matemáticos e linguagem natural.

e) Escreva uma fórmula que represente o valor *V* da conta de luz correspondente ao consumo *c* do refrigerador.

V = valor a pagar (0,45) × consumo (KWh) + 3,18     V = 0,45 × Kwh + 3,18

Figura 4.69 – Resposta do grupo 2 – questão 1 item e.

$$\text{“}V = \underset{(0,45)}{valor\ a\ pagar} \times \underset{(kwh)}{consumo} + 3{,}18 \qquad V = 0{,}45 \times kwh + 3{,}18\text{”}$$

O item *f* solicitava aos alunos que traçassem o gráfico da função. Dois dos grupos utilizaram a escala corretamente e uniram os pontos traçando uma reta. Três dos grupos não marcaram pontos alinhados, mas compreenderam que o gráfico deveria ser uma reta, como mostra a figura 4.70.

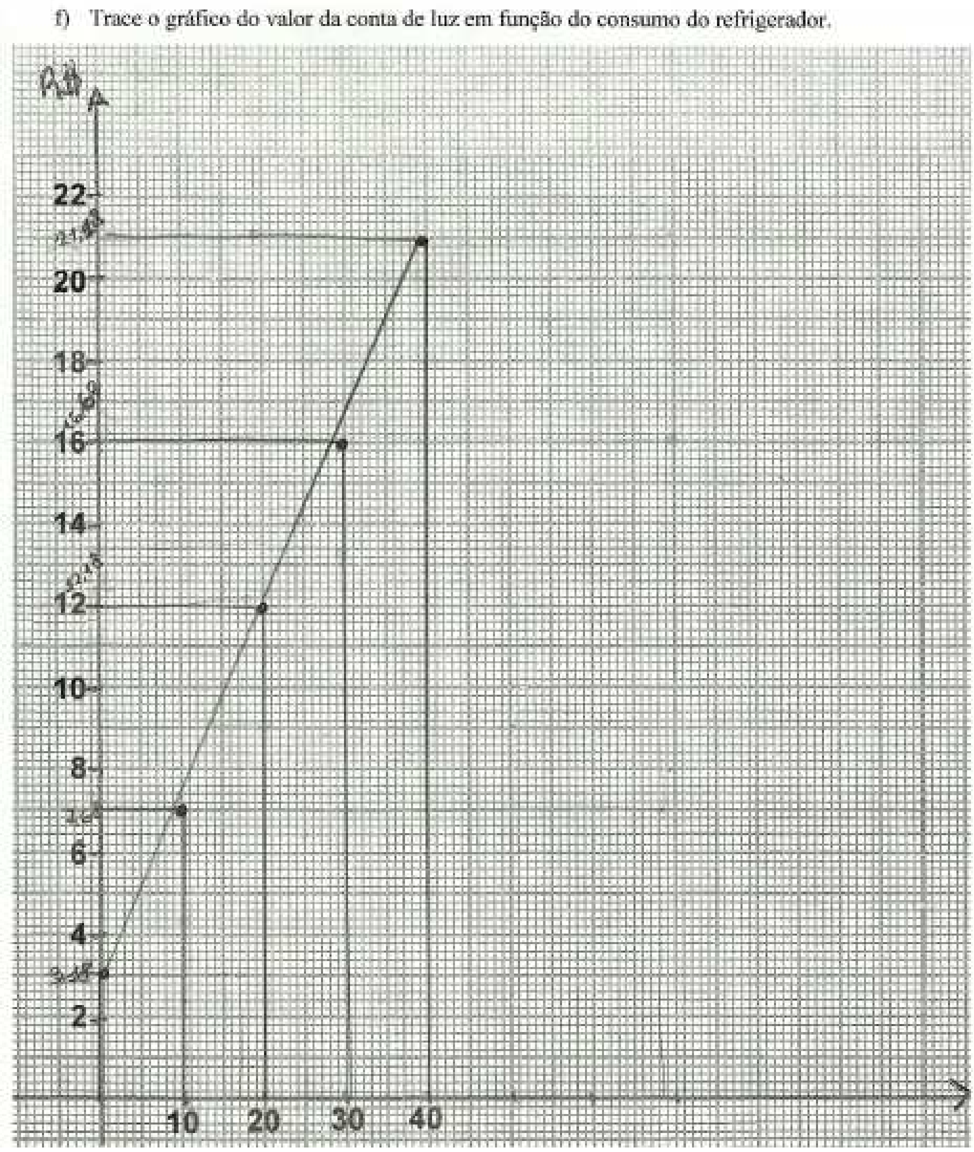



Figura 4.70 – Resposta do grupo 9 – questão 1 item f.

Dois grupos marcaram pontos não alinhados e os uniram com segmentos de reta, e dois grupos marcaram os pontos no gráfico sem traçar a reta. Desses, o grupo 7 marcou o ponto (30, f(30)) calculado de forma incorreta, obtendo desse modo pontos não alinhados, mas não questionou o porquê da variação da f(20) para a f(30) e da f(30) para a f(40) não ter sido a mesma das restantes.

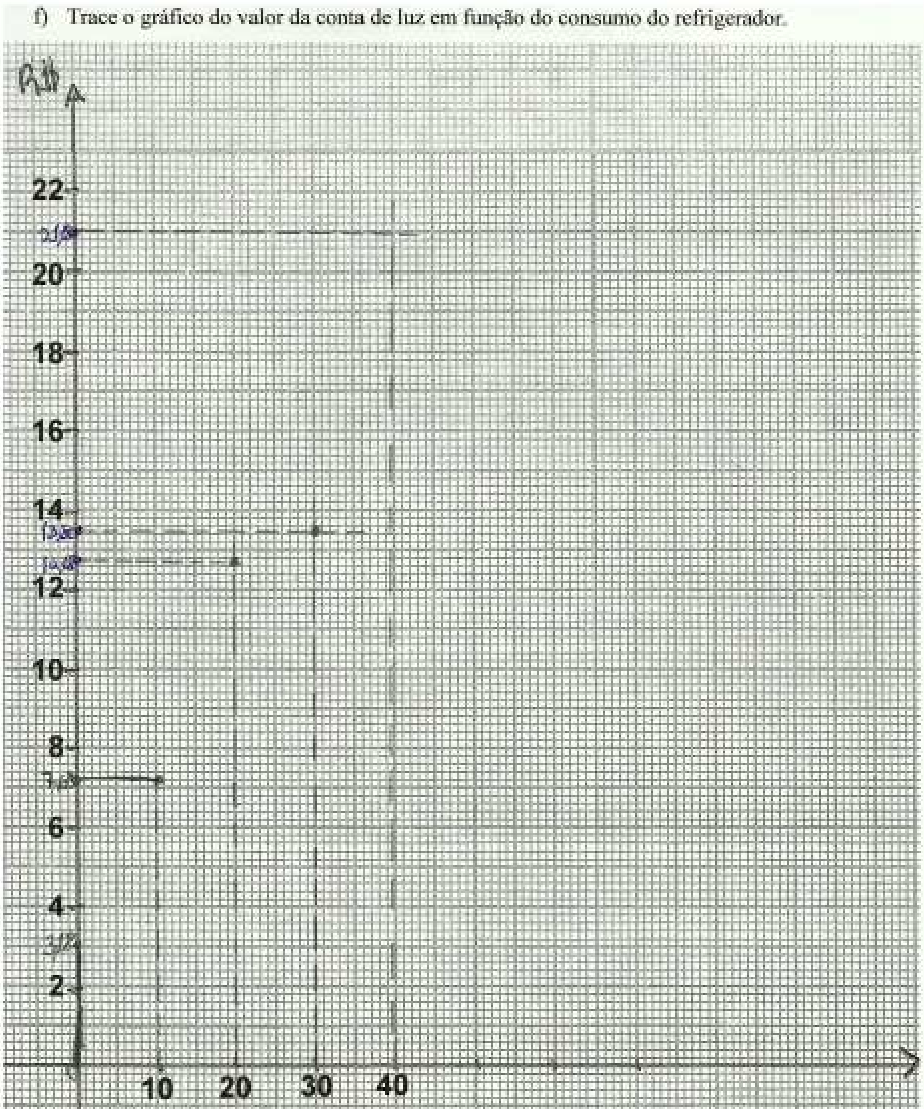
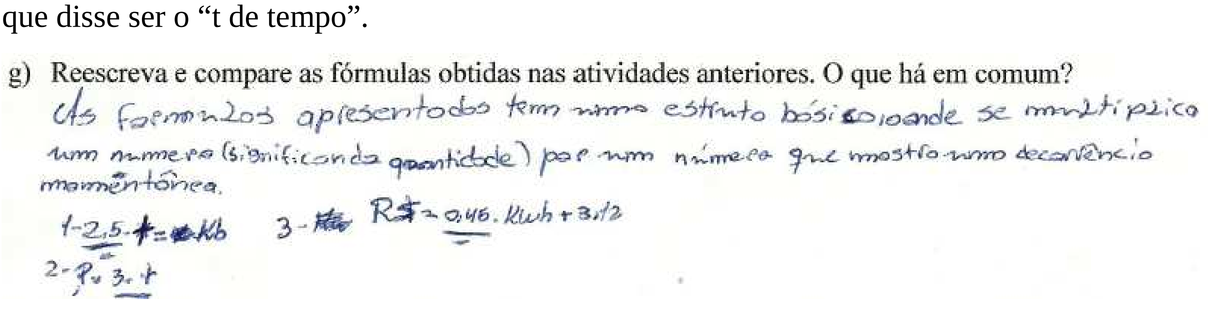



Figura 4.71 – Resposta do grupo 7 – questão 1 item f.

Com o objetivo de caracterizar a função afim por meio da expressão algébrica $y = ax + b$, no item *g* questionou-se o que as fórmulas dos problemas estudados tinham em comum. Todos os grupos afirmaram “sempre multiplicar um valor”, com exceção do grupo 1, que disse ser o “t de tempo”.


g) Reescreva e compare as fórmulas obtidas nas atividades anteriores. O que há em comum?

As formulas apresentadas tem uma estinto básico, onde se multiplica um numero (significando quantidade) por um número que mostra uma decorrência momentânea.

1- 2,5 . t = Kb   3- R$ = 0,46 . Kwh + 3,12

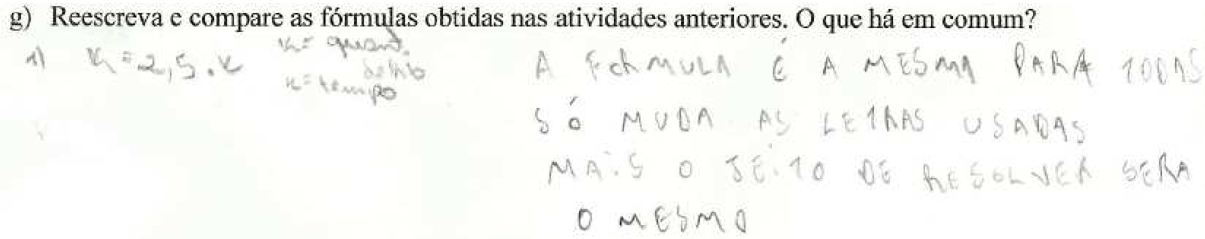
2- P = 3 . t

Figura 4.72 – Resposta do grupo 2 – questão 1 item g.

*“As fórmulas apresentadas tem um estinto básico, onde se multiplica um número (significando quantidade) por um número que mostra uma decorrência momentânea.”*

Acredito que a expressão “decorrência momentânea” seja a variável independente tempo transcorrido, cujos valores não são fixos. Em contrapartida, o “número significando quantidade” é o coeficiente angular.

Dois dos grupos responderam que a fórmula era a mesma em todos os problemas.


g) Reescreva e compare as fórmulas obtidas nas atividades anteriores. O que há em comum?

1) K=2,5.K  K= quant. baixado  K= tempo

A FÓRMULA É A MESMA PARA TODAS SÓ MUDA AS LETRAS USADAS MAIS O JEITO DE RESOLVER SERA O MESMO

Figura 4.73 – Resposta do grupo 8 – questão 1 item g.

No encontro seguinte, os problemas anteriores foram relembrados, e escrevi no quadro suas respectivas fórmulas.

> P: Como era a fórmula do problema da internet? Aquela que relacionava a quantidade de quilobytes baixados em função do tempo?
>
> $A_4$: A quantidade de quilobytes baixados é 2,5 vezes o tempo. – Anotei no quadro: $kb = 2{,}5t$, sendo *kb* a quantidade de quilobytes baixados e *t* o tempo de download.
>
> P: E a fórmula do problema da Lan House?
>
> T: O valor a pagar era R$ 3,00 vezes o tempo. – Anotei no quadro: $P = 3t$, sendo *P* o valor a pagar e *t* o tempo nos computadores.
>
> P: Como ficou a fórmula do valor da conta de luz em função do consumo?
>
> $A_7$: Multiplica o 0,45 pelo consumo e soma 3,18. – Anotei no quadro: $V = 0{,}45c + 3{,}18$, onde *V* é o valor a pagar e *c* é o consumo mensal.

Além disso, tracei no quadro o gráfico das três funções.

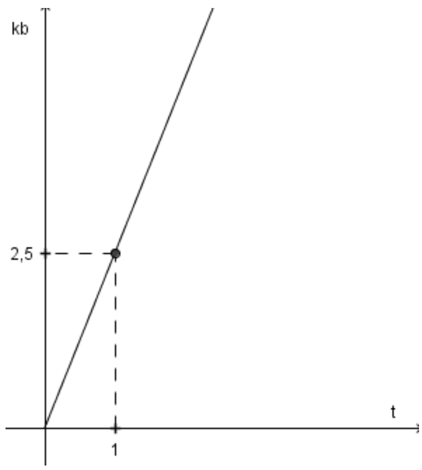



Figura 4.74 – Reprodução do gráfico da quantidade de quilobytes baixados em função do tempo.

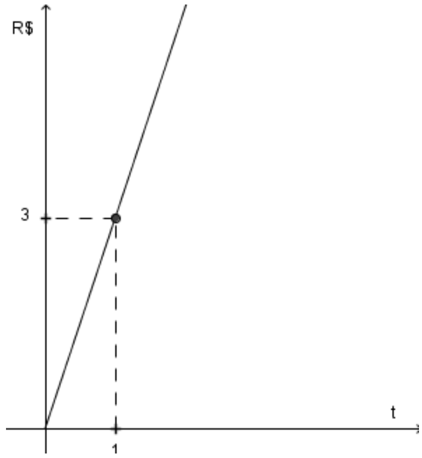



Figura 4.75 – Reprodução do gráfico do valor a pagar em função do tempo nos computadores.

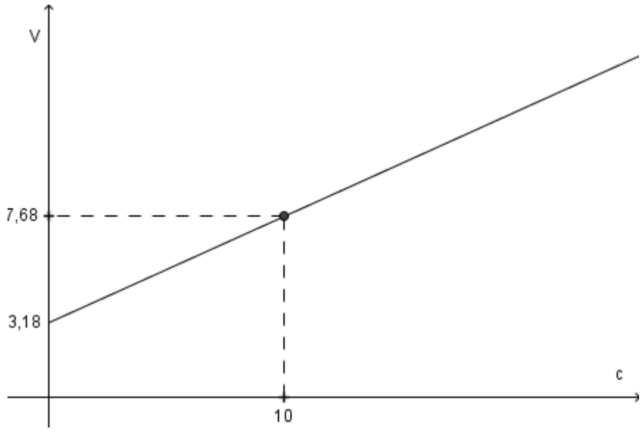



Figura 4.76 – Reprodução do gráfico do valor da conta de luz em função do consumo dos refrigeradores.

Iniciei a análise do gráfico da figura 4.74.

P: Com um segundo, baixaram quantos quilobytes?

T: 2,5 – tracei no gráfico a variação da variável dependente em um segundo de download e formei o primeiro triângulo (figura 4.77).

P: Em mais um segundo de download, baixa mais quanto? – tracei no gráfico o segundo triângulo (figura 4.77).

T: Mais 2,5.

P: Então o que é o 2,5?

T: É a quantidade de quilobytes que baixa a cada segundo.

P: Se a cada segundo aumenta 2,5 kb, a variação é constante, e dizemos que 2,5 é a taxa de variação da função.

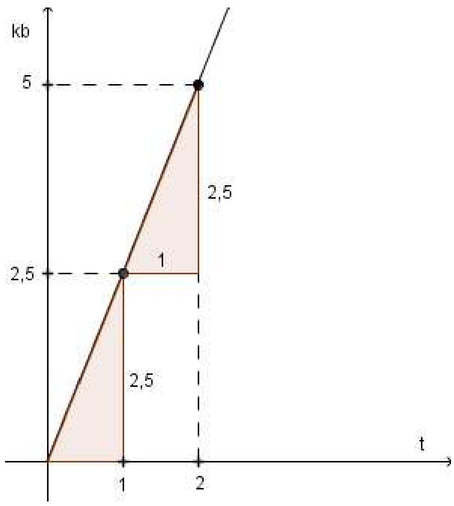



Figura 4.77 – Reprodução do gráfico da quantidade de quilobytes baixados em função do tempo.

De maneira análoga, foi realizada a análise do gráfico da figura 4.75.

Voltando às fórmulas das duas funções analisadas acima, perguntei à turma o que havia em comum.

> $A_3$: As duas fórmulas são iguais, só mudam as letras.
>
> P: Isso mesmo. Essa função vocês já tinham estudado, é a função afim, mas agora estamos vendo de um modo diferente. Como era a fórmula da função de primeiro grau que vocês estudaram? – os alunos começaram a procurar a resposta no caderno.
>
> $A_1$: É raiz da função, sora?
>
> P: Não, é antes. – aguardei um momento os alunos procurarem no caderno e depois respondi – $y = ax + b$. No caso dessas duas fórmulas, temos $b = 0$. Observando as fórmulas, o que está multiplicando o *t*?
>
> T: A velocidade do download e o preço da hora.
>
> P: Isso, e nós vimos que esses valores são a taxa de variação de cada função. Assim, o valor que multiplica o *t*, ou seja, o *a* que está multiplicando o *x* na expressão $y = ax + b$, é a taxa de variação da função. Quando vocês estudaram função afim vocês aprenderam que o *a* era o coeficiente angular. Agora vocês sabem que o coeficiente angular é a taxa de variação da função afim.

Para a análise do último problema, pedi à turma que calculasse qual foi a variação do valor da conta de luz quando o consumo aumentou 10 kWh e marquei no gráfico o primeiro triângulo (figura 4.78). Perguntei a variação nos próximos 10 kWh consumidos, e foi respondido que a variação seria a mesma, ou seja, 4,5.

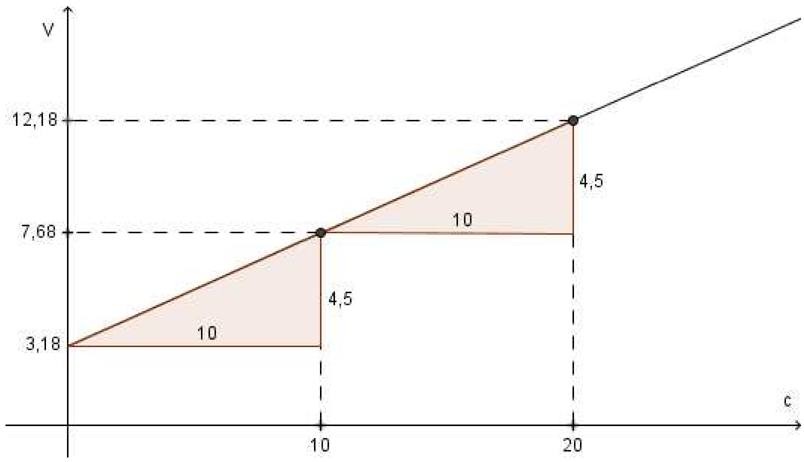



Figura 4.78 – Reprodução do gráfico do valor da conta de luz em função do consumo dos refrigeradores.

P: Se com um aumento de 10 kWh, a conta de luz aumenta sempre R$ 4,50, qual a variação do valor da conta de luz com o aumento de 1 kWh de consumo?

$A_5$: Não entendi sora.

P: Após três horas em uma Lan House, tu teve que pagar R$ 6,00. Quanto tu pagou por hora?

$A_5$: R$ 2,00.

P: Como tu calculou os dois reais?

$A_5$: 2 + 2 + 2 dá 6.

P: Agora tu foi em outra Lan House, ficou seis horas e pagou R$ 24,00. Quanto tu pagou a cada hora?

$A_5$: R$ 4,00.

P: Como tu calculou?

$A_5$: Dividi o 24 por 6.

P: Vamos voltar para o gráfico. Com um aumento de consumo de 10 kWh, tu teve que pagar R$ 4,50 a mais. Quanto tu pagaria a mais com um aumento de 1 kWh? É o mesmo raciocínio, pode usar a calculadora.

T: Teria que pagar R$ 0,45 a mais.

P: Ou seja: a cada kWh consumido, o valor da conta de luz aumenta R$ 0,45. Essa é a taxa de variação da função, ou o coeficiente angular que podemos observar na fórmula $V = 0{,}45c + 3{,}18$.

Encerrei a atividade comparando a inclinação da reta nos gráficos das funções $k = 2{,}5t$ e $P = 3t$, concluindo que quanto maior for a taxa de variação, maior é a inclinação da reta.

### *4.3.4 Atividade 4*

No dia 07 de outubro foi aplicada a atividade de encerramento da sequência didática (quadro 4.7). Distribuí o material e li o primeiro parágrafo com os alunos, explicando a tarefa.

No segundo parágrafo, tentei formalizar o estudo da função afim usando o termo "variável independente". Talvez devido ao formato da atividade, os alunos mostraram-se desmotivados, tendo mais interesse na análise gráfica. Como a turma estava muito agitada, tive dificuldades em discutir o segundo parágrafo da atividade, e apenas ao final da aula, quando cerca de dez alunos haviam ido embora, completei o exercício com o grupo restante, mas sem realizar uma discussão.

Na análise gráfica, os alunos não tiveram dificuldades em identificar os gráficos das funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = 3x$ (figura 4.79).

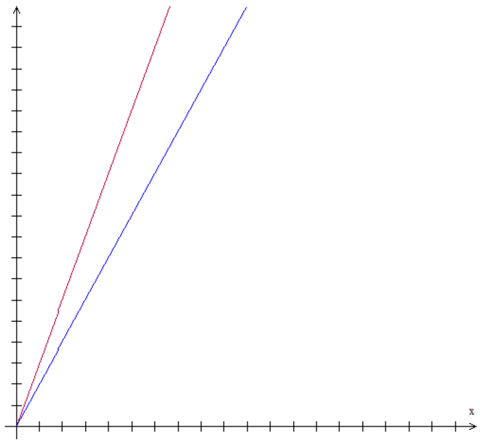



Figura 4.79 – Gráfico das funções *f(x)* e *g(x)*.

No último exercício, foi necessário revisar como identificar o coeficiente linear no gráfico (figura 4.80).

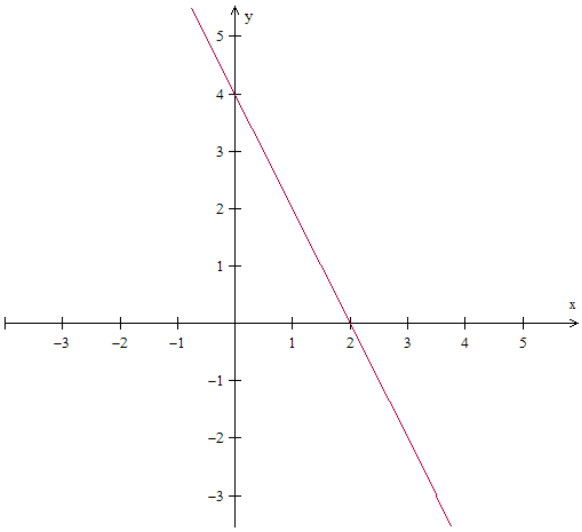
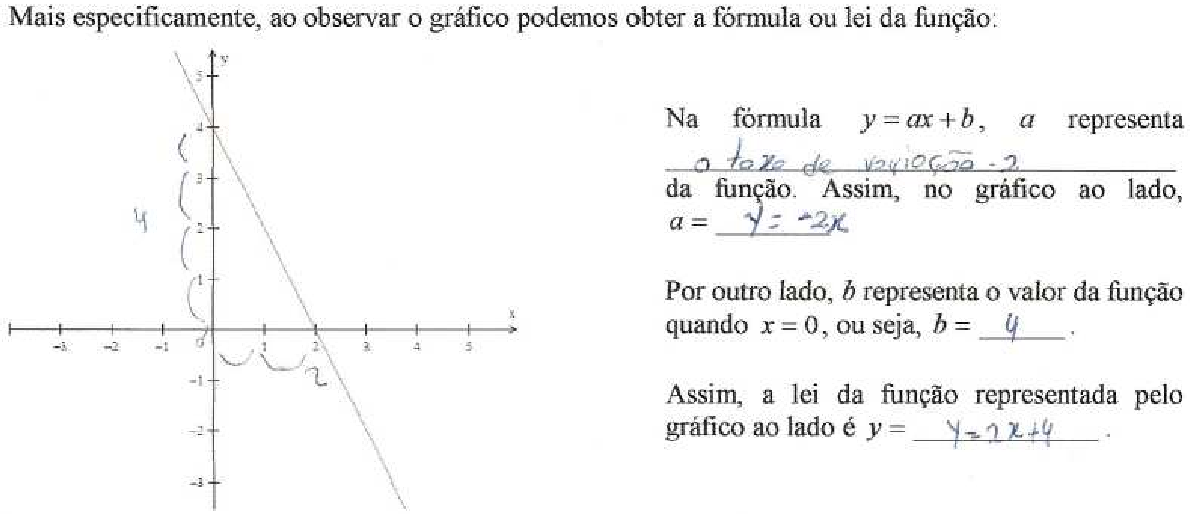



Figura 4.80 – Gráfico do último exercício.

Alguns alunos demonstraram dificuldade em identificar o coeficiente angular como a constante que multiplica a variável independente (figura 4.81). Ao responderem o seu valor, os alunos não observaram que, por se tratar de uma função decrescente, o valor de *a* deveria ser negativo. Interpretei o gráfico com a turma, dizendo que aumentando duas unidades na variável independente, a variável dependente diminui quatro unidades. Assim, para representar esse decréscimo, era necessário o sinal negativo.


Mais especificamente, ao observar o gráfico podemos obter a fórmula ou lei da função:

Na fórmula $y = ax + b$, $a$ representa o taxa de variação -2 da função. Assim, no gráfico ao lado, $a =$ y = -2x

Por outro lado, $b$ representa o valor da função quando $x = 0$, ou seja, $b =$ 4.

Assim, a lei da função representada pelo gráfico ao lado é $y =$ y=2x+4.

Figura 4.81 – Resposta do aluno $A_2$ após a interpretação do gráfico com a turma.

A seguir, tracei o gráfico da função proposta anteriormente por eles, $y = 2x + 4$, diferenciando as duas funções e finalizando a sequência didática.

# 5 ANÁLISE DOS DADOS

Segundo Duval, “[...] os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática concernem à mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações.” (2003, p. 24). Assim, a sequência didática foi desenvolvida de modo que fosse possível observar esses fenômenos nas produções dos alunos.

## 5.1 Atividade 1

O primeiro problema, em que eram apresentados dados sobre o crescimento da população mundial, foi proposto com o objetivo de abordar o conceito de taxa de variação, caracterizando um modelo de crescimento cada vez mais rápido. A partir da resolução de um dos grupos, foi possível abordar o conceito de “variação constante”. Dos oito grupos, apenas um descreveu o modelo de crescimento de forma esperada. O grupo 4 não respondeu a questão, e os restantes descreveram “um crescimento enorme”, “fora de controle” e “rápido”.

A segunda situação-problema, em que eram relacionados o valor a pagar ao sair de uma Lan House com o tempo permanecido nos computadores, permitiu verificar a transição de um registro multifuncional – língua natural – para dois registros monofuncionais – tabela e linguagem algébrica. Ao construírem a tabela, dos oito grupos, três somaram a variação constante a cada unidade acrescida na variável independente. Esses mesmos grupos responderam de modo afirmativo a questão *d* “Sabendo que em 1 minuto foram baixados 150kb, é possível afirmar que nos primeiros 10 segundos de download foram baixados 25 Kb?” com o argumento de que a velocidade de conexão é 2,5 Kb/s. Considero que nesse caso os alunos identificaram a taxa de variação na língua natural – velocidade de conexão – e usaram esse dado para solucionar as questões seguintes, caracterizando a conversão de registros.

Os alunos tiveram dificuldade em traçar o gráfico. Apenas três grupos responderam a questão, e nenhum deles apresentou a solução esperada. Para traçar o gráfico, esses estudantes marcaram pontos no plano cartesiano utilizando os dados da tabela construída anteriormente. Considero que realizaram uma conversão de congruência, pois foi um processo algoritmizado, em que a situação-problema não foi associada ao gráfico traçado. A solução que melhor representava a realidade foi baseada na marcação de pontos isolados.

Com o intuito de abordar a noção de continuidade, e conectar os dois registros de representação – língua natural e gráfico – utilizei, na discussão em grupo, o gráfico citado acima, questionando a turma sobre quantos quilobytes seriam baixados em meio segundo. Entretanto, não explorei o uso do conceito de taxa de variação para a construção de uma nova representação gráfica. Acredito que, se fosse realizada essa abordagem, nas atividades seguintes os alunos poderiam avançar além da marcação de pontos, e passariam a identificar a inclinação da reta como a variação da variável dependente a cada unidade acrescida na variável independente. Nessa nova perspectiva, segundo Duval (2003), os estudantes estariam realizando uma conversão de não congruência.

Os discentes fizeram uso de sua linguagem para solucionar todas as atividades. Em relação à questão “o que você observa no gráfico”, os grupos apresentaram respostas contextualizadas, e nenhum deles observou que o gráfico é uma reta. Isso pode ser interpretado como não associação entre os problemas propostos e o conteúdo estudado até então, mas é possível que eles não tenham feito a observação por se tratar do único tipo de gráfico conhecido deles. Após a discussão com a turma sobre a interpretação gráfica citada acima, três dos oito grupos, em sua produção, identificaram a taxa de variação constante, e dois deles descreveram o aumento de 2,5 Kb a cada unidade de tempo. Os grupos restantes observaram “o tempo que leva para baixar os quilobytes”, “que os quilobytes carregam lentamente”, ou não responderam a questão.

Além da dificuldade na representação gráfica, houve dificuldade na conversão de registros da língua natural – multifuncional – para a linguagem algébrica – monofuncional. Essa dificuldade pode ser explicada pelo caráter não congruente da conversão, pois trata-se de uma transformação em que os elementos da linguagem natural não transparecem na representação terminal. Além disso, grande parte dos alunos não explicitou a operação de multiplicação para responder “como você calculou os quilobytes baixados para construir a tabela”. Apenas um, dos oito grupos, apresentou a resposta esperada: o grupo 5 não relacionou a quantidade de quilobytes baixados com o tempo de download, o grupo 2 não utilizou a velocidade de conexão em sua fórmula, e os demais grupos não responderam a questão. A questão foi discutida com a turma, e observei, nas atividades seguintes, que essas dificuldades foram superadas.

O terceiro problema tinha como objetivo que os alunos identificassem o modelo de decrescimento, em que a temperatura do café diminuía cada vez mais lentamente. Três dos oito grupos identificaram esse modelo. Apesar dos alunos apresentarem progresso em suas concepções em relação às diferentes variações, apenas um grupo finalizou a primeira atividade associando a taxa de variação constante com sua representação gráfica.

O fio condutor da discussão da terceira situação-problema foi sua representação gráfica. Ao solicitar que um dos alunos fosse até o quadro-negro para fazer uma extensão do gráfico sem os pontos previamente marcados, a solução apresentada pela discente evidenciou uma não conversão de registros, em que o gráfico foi traçado de modo descontextualizado. A estudante não manteve o padrão de decrescimento da temperatura do café, que esfria cada vez mais lentamente, e não observou que a temperatura do café não poderia ser menor que a temperatura ambiente.

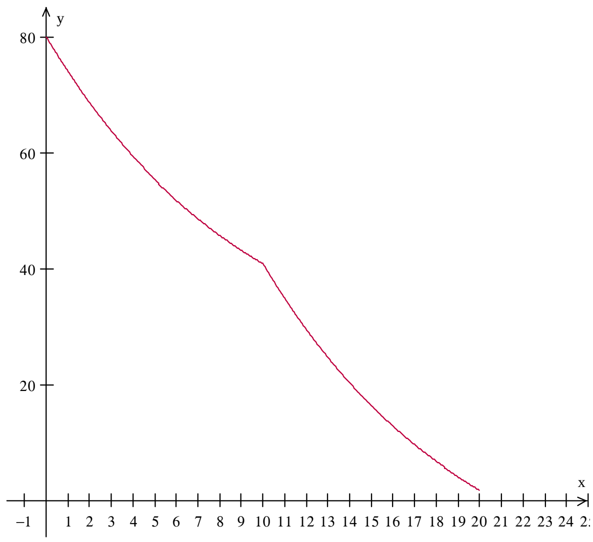



Figura 5.1 – Reprodução da continuação do gráfico feito pela aluna no quadro-negro.

Após realizar a leitura do gráfico com a turma, finalizei a atividade 1 traçando o gráfico com a assíntota horizontal em 20ºC. Porém, considero que deveria ter analisado e confrontado a resposta de outros alunos até que a turma chegasse à conclusão que deveria haver essa assíntota.

## 5.2 Atividade 2

O objetivo do primeiro exercício da atividade 2, em que eram dadas representações de funções por tabelas e pedia-se aos alunos que identificassem qual delas possuía o gráfico representado por uma reta, foi analisar se os alunos usariam o conceito de taxa de variação constante para reconhecer rapidamente a função afim, pois “o sucesso em uma tarefa de reconhecimento não depende somente do conteúdo das respostas, mas do tempo que foi necessário para as obter” (DUVAL, 2003, p. 28). Dos nove grupos, oito responderam a questão rapidamente. Apenas o grupo 7 levou grande parte do período para solucionar a questão, não obtendo o resultado esperado.

A situação-problema desenvolvida no segundo exercício teve o objetivo de inverter os registros de saída e terminal – da representação gráfica para a língua natural. Os grupos descreveram os gráficos baseados em suas experiências. Três grupos relacionaram as curvaturas dos gráficos com a alteração do coeficiente angular, associando essas mudanças com diferentes valores de hora ou, no caso da figura 5.3, com o gráfico de uma promoção.

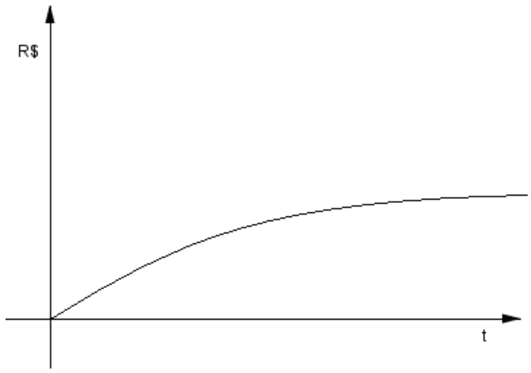



Figura 5.2 – Gráfico do problema 2 da atividade 2.

Os discentes demonstraram uma melhora significativa na conversão de registros da língua natural para a linguagem algébrica. Dos nove grupos, sete apresentaram a resposta esperada. Entretanto, o grupo 6 não apresentou a resposta no formato esperado $V = 3t$, indicando que os alunos desse grupo ainda não haviam compreendido as convenções de notação algébrica.

## 5.3 Atividade 3

O objetivo da última situação-problema da sequência didática foi caracterizar a função afim como a função que pode ser representada pela expressão $f(x) = ax + b$, em que $a$ é a taxa de variação.

Dos nove grupos, oito realizaram a conversão de registros da língua natural para a linguagem algébrica. Entretanto, a transformação de diferentes registros para a representação gráfica limitou-se a uma conversão de congruência, pois foi realizada de modo algoritmizado, sem relacionar o gráfico – representação terminal – com as representações de saída. Considero que, ao fornecer papel milimetrado com escala definida, influenciei os grupos a marcarem os pontos no plano cartesiano para que em seguida o gráfico fosse traçado através da ligação desses pontos. Cinco dos nove grupos traçaram uma reta, mesmo em ocasiões em que os pontos não estavam alinhados, e apenas o grupo 3 traçou a reta além dos pontos marcados. Dois grupos não traçaram a curva, e dois grupos uniram os pontos por segmentos de reta.

Considero que o processo de reconhecer a função afim pela fórmula $f(x) = ax + b$ foi iniciado. Ao responder o que há em comum entre as fórmulas obtidas durante a aplicação da sequência didática, dois grupos afirmaram que as fórmulas eram as mesmas, alterando apenas o nome dado às variáveis. O grupo 2 identificou o coeficiente angular como uma constante que multiplica a variável independente, porém não citou essa constante como sendo a taxa de variação. Acredito que com novas atividades esse objetivo seria atingido.

Ao final dessa atividade encaminhei a conclusão da aplicação da sequência didática, a ser realizada no encontro seguinte, formalizando os conceitos e identificando a taxa de variação nas diferentes representações: gráfico e expressão algébrica.

## 5.4 Atividade 4

Nessa atividade foi possível observar que os alunos identificam a taxa de variação nas representações gráfica e algébrica mediante comparação.

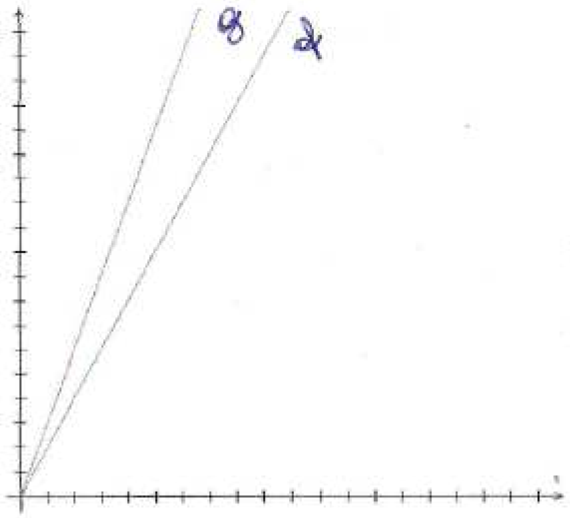



Figura 5.3 – Resposta da aluna $A_4$ identificando os gráficos das funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = 3x$

Entretanto, sentem dificuldade em realizar a conversão de não congruência da representação gráfica para a representação algébrica. Acredito que essa dificuldade seria superada com novas discussões e atividades, mas não tive tempo disponível para verificar isso, pois precisava encerrar a aplicação da sequência didática na data acertada com a turma.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início da implementação da pesquisa, as dificuldades decorrentes das faltas e atrasos frequentes foram potencializadas pela insatisfação dos alunos quanto à ruptura do contrato didático com que estavam acostumados. Passado o período de adaptação com a nova metodologia de trabalho, pude ajudar os discentes a se expressarem melhor, e isso propiciou que os alunos refletissem, gerando uma maior autonomia na resolução de problemas. Os estudantes utilizaram linguagens próprias e, partindo de problemas, construíram a mesma fórmula que, antes, havia sido informada pela professora.

Apesar da turma já ter estudado o conteúdo anteriormente, ao longo do processo ficou evidente que os alunos não o reconheceram nas atividades propostas. Os grupos tiveram dificuldade em traçar gráficos, e, quando foi solicitado que obtivessem uma fórmula, não foram utilizadas as convenções algébricas presentes na expressão $f(x) = ax + b$, como escrever a constante antes da variável e suprimir o sinal da multiplicação. Em nosso último encontro, perguntei à turma qual fórmula representava a função afim. Os alunos procuraram a resposta no caderno, e um deles chegou a perguntar se era a raiz da função. Sem obter a resposta, escrevi a fórmula no quadro, mostrando que era a mesma expressão construída por eles durante a resolução dos problemas da sequência didática. Considero que o método de ensino que havia sido aplicado anteriormente não propiciou aos alunos a compreensão da função afim como uma relação entre duas variáveis.

O conceito “taxa de variação” não é comumente abordado na escola. Assim, a primeira atividade foi organizada de modo a possibilitar que os alunos identificassem diferentes variações. Nas questões seguintes, esse conceito foi utilizado para concluir que o gráfico de uma função cuja taxa de variação é constante é uma reta. Além disso, alguns grupos utilizaram a variação constante para construir a tabela da quantidade de quilobytes baixados em função do tempo de download, identificando-a como a velocidade de conexão.

A relação entre a taxa de variação na representação da língua natural e a inclinação da reta foi explorada na segunda atividade, em que os alunos realizaram a conversão não congruente de registros – da representação gráfica (saída) para a representação da língua natural (terminal). A conversão no sentido inverso foi abordada em três dos cinco problemas propostos na sequência didática.

A relação entre o coeficiente *a*, da expressão $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$ e a taxa de variação na representação gráfica ficou implícita. Os alunos compreenderam que “o valor que multiplica a variável independente” influencia na inclinação da reta, e que um maior coeficiente corresponde a uma maior inclinação. Porém, durante a aplicação da sequência, não conseguiram realizar as conversões do registro gráfico para o algébrico.

Em minha vida profissional, pretendo continuar utilizando o material produzido nessa pesquisa. Porém, desenvolverei outras atividades que permitam aos alunos a conversão de não congruência da representação gráfica para a fórmula algébrica, de modo que, dado o gráfico, os alunos observarão a taxa de variação e o coeficiente linear para construir a lei da função. Além disso, desde a primeira atividade, farei uso da taxa de variação representada na língua natural para realizar a construção de gráficos.

Esta pesquisa faz parte de um processo de mudanças em minha prática docente que teve início nas disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem. Antes, acreditava que o papel do professor era facilitar o máximo possível o aprendizado do aluno. Porém, esse aprendizado facilitado pode ocorrer sem compreensão. Agora, acredito que o papel do professor não é dar respostas e estratégias para solução de problemas, mas sim formular questões que possibilitem a discussão, com o objetivo de confrontar as concepções dos alunos, buscando que eles reflitam e formulem suas próprias conclusões.

Por fim, considero que o uso da taxa de variação nas diferentes representações contribui para a compreensão do conceito de função como relação entre duas variáveis. A implementação da sequência mostrou que, ao pensar na relação entre as duas variáveis, o aluno pode visualizar a função como um objeto dinâmico, superando barreiras e possibilitando o reconhecimento do mesmo objeto em representações bem diferentes.

**REFERÊNCIAS**


BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24. **Anais**... Rio Janeiro: ANPED, 2001.

BUENO, R.W.S. **As múltiplas representações e a construção do conceito de função**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

CARVALHO, M. R. S. M. **A trajetória da Internet no Brasil: do surgimento das redes de computadores à instituição dos mecanismos de governança**. Dissertação (Mestrado em Ciências de Engenharia de Sistemas e Computação) – Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2006.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (orgs). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1997.

DUVAL, R. Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (org.) **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003.

GARNICA, A.V.M. História oral e educação matemática. In: BORBA, M.C.; ARAUJO, J.L. (orgs). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J.P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (orgs). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1997.

PAIS, L.C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PALIS, G. Uma análise das construções mentais subjacentes à produção e interpretação de gráficos de funções. In: CARVALHO, L.M.; GUIMARÃES, L.C. (orgs). **História e tecnologia no ensino da matemática**, v. 1. Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2002.

SCHOEN, H.L. Ensinar a álgebra elementar focalizando problemas. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (orgs). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1997.

SCHÖNARDIE, B. **Modelagem Matemática e introdução da função afim no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2011.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, n. 14, 2000.