UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

JOÃO FRANCISCO STAFFA DA COSTA

OFICINA DE NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS: POSSIBILIDADES PARA APRENDER MATEMÁTICA

PORTO ALEGRE

DEZEMBRO DE 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

JOÃO FRANCISCO STAFFA DA COSTA

OFICINA DE NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS: POSSIBILIDADES PARA APRENDER MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

PORTO ALEGRE

DEZEMBRO DE 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

OFICINA DE NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS: POSSIBILIDADES PARA APRENDER MATEMÁTICA

JOÃO FRANCISCO STAFFA DA COSTA

Orientador: Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Banca Examinadora:

____

Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso – UFRGS

____

Dra. Maria Alice Gravina – UFRGS

____

Dra. Marilaine de Fraga Sant´ana – UFRGS

PORTO ALEGRE

DEZEMBRO DE 2011

Dedico este trabalho aos meus pais Rosa Pereira Staffa e Vitor Hugo Rodrigues da Costa, meus verdadeiros mestres, exemplos de dedicação e perseverança.

AGRADECIMENTOS

À minha afilhada, Thaisy Staffa, pelo carinho que demonstra por mim, por compreender meus momentos de dificuldade.

À minha irmã Carolina Staffa da Costa pela dedicação na confecção de alguns materiais didáticos que foram utilizados neste trabalho e por ser sempre o meu apoio nos momentos mais difíceis.

Ao meu pai, Vitor Hugo Rodrigues da Costa, por fazer da sua casa um laboratório de produção de materiais didáticos durante toda a minha graduação e por ter paciência em me ouvir sempre.

À minha mãe Rosa Staffa pela promoção da vida, por me apoiar em todas as minhas decisões, por inúmeros sacrifícios em prol da minha educação e pela dedicação incondicional à toda nossa família.

À minha irmã Sandra Staffa e ao meu cunhado Marcelo Pereira, pela parceria, pelo carinho e que mesmo longe, contribuíram sempre para meu aperfeiçoamento acadêmico e profissional.

Aos meus amigos Bruna Rigoli, Tamara Versteg Vitali, Rodrigo da Cruz, Thayner Gomes de Bona, Sara Cordoni, Daniel Moura, Fernando de Freitas Nunes, Diego Lima, Marco Vargas e Diego Martinelli pela amizade e companheirismo durante a graduação, por tornarem o ambiente acadêmico muito agradável e divertido.

Um agradecimento especial aos colegas Bruna Rigoli, Rodrigo da Cruz, Daniel Moura e Sara Cordoni pelo auxilio na coleta de dados para a realização desta pesquisa.

Aos meus amigos Cristian Ribeiro Porto e Milene Silveira por compartilharem comigo muitos momentos de alegria e por me apoiarem sempre que precisei. Pela paciência, e parceria especialmente durante a realização deste trabalho.

Aos meus amigos da faculdade de Engenharia, Carlos Emmanuel, Débora Vanin, Carine Zuchi, Marcus Vicente, Cristine Groff, Akane Wada, por me proporcionarem o desfrute de suas companhias e momentos muito felizes.

Aos meus amigos Fábio Menezes de Ávila e Greice Gomes por me proporcionarem momentos de descontração e por serem exemplos a serem seguidos.

Às professoras Marilaine de Fraga Sant´ana e Maria Alice Gravina não somente por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho, mas por acreditarem sempre no meu trabalho.

Aos professores do Colégio de Aplicação da UFRGS, em especial Ítalo Modesto Dutra e Adriana Breda por, gentilmente, cederem as suas turmas para a realização desta pesquisa e à professora Simone Dias Cruz pela constante colaboração durante a minha caminhada acadêmica.

Aos meus amigos da época de colégio, Bruno Fraga, Bruno Oliveira, Anderson Fagundes, Leandro Alves Roldão por torcerem sempre pelo meu sucesso e entenderem as minhas ausências.

Ao meu amigo Daniel Cirne Kowalczuk, por me incentivar na realização deste curso, pelo constante apoio nos momentos de dificuldade e por acreditar no meu trabalho.

Ao meu orientador, Marcus Vinicius de Azevedo Basso, por me aceitar como orientando, pelo apoio e paciência durante a realização deste trabalho e pelas ricas discussões durante toda graduação.

Meu muito obrigado à todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para que eu realizasse o sonho de me tornar professor de matemática.

Não desanimes, persiste mais um tanto (...)
Estuda buscando aprender. Vencerás.
Chico Xavier

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo verificar a possibilidade e contribuição da utilização de materiais manipulativos para o ensino de números positivos e negativos em sextas e sétimas séries do Ensino Fundamental. Para tanto utilizamos uma seqüência didática composta por sete materiais manipulativos, a saber: Nível do mar, quadrado mágico, saldo de gols, elevador, cidade (plano cartesiano), jogo do zoológico e temperaturas. Foram realizadas duas oficinas com as turmas Amora II- B e turma 71 do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no segundo semestre de 2011, totalizando oito períodos de aula. A metodologia utilizada para a coleta de dados foi o método clínico de Jean Piaget e a base teórica encontra substrato na Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud. O presente texto apresenta uma breve discussão das dificuldades apresentadas pelos alunos desta faixa etária ao trabalhar com o conjunto dos números relativos e suas operações bem como uma justificativa da utilização de materiais manipulativos para aprender matemática. Dando continuidade à pesquisa, apresentamos a sequência didática, que consiste na utilização de sete materiais manipulativos para trabalharmos com o conteúdo em questão, o relato dos encontros com os alunos e fizemos a análise dos dados coletados. Ao término deste trabalho podemos verificar que os materiais manipulativos podem auxiliar alunos de sexta e sétima séries do Ensino Fundamental a visualizarem a situação proposta, criarem relações e perceber invariantes conceituais, ainda que alguns materiais precisem ser aperfeiçoados. Finalmente, indicamos caminhos para que outros rumos possam ser trilhados dentro desta perspectiva.

Palavras-chave: Números positivos e negativos, materiais manipulativos, método clínico, teoria dos campos conceituais.

ABSTRACT

This work has for objective to verify the possibility and contribution of the use of manipulative materials for the education of positive and negative numbers in sixth and seventh series of Basic grade. For in such a way we use a composed didactic sequence for seven manipulative materials, namely: Level of the sea, squared magical, balance of goals, elevator, city (plain cartesian), game of the zoo and temperatures. Two workshops with the groups had been carried through Amora II B and group 71 of the College of Application of the Federal University of the Rio Grande Do Sul, in as the semester of 2011, totalizing eight periods of lesson. The methodology used for the collection of data was the clinical method of Jean Piaget and the theoretical base finds substratum in the Theory of the Conceptual Fields, of Gérard Vergnaud. The present text presents one brief quarrel of the difficulties presented for the pupils of this age band when working with the set of the relative numbers and its operations as well as a justification of the use of manipulative materials to learn mathematics. Giving continuity to the research, we present the didactic sequency, that consist of the use of seven manipulative materials to work with the content in question, the story of the meeting with the pupils and made the analysis of the collected data. To the ending of this work we can verify that of the manipulative materials they can assist pupils of arrow and seventh series of Basic grade to visualize the situation proposal, to create relations and to perceive conceptual invariants, despite some materials need to be perfected. And, finally, we indicate ways so that other ways can inside be trod of this perspective.

Word-key: Positive and negative, material numbers manipulative, clinical method, theory of the conceptual fields.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho pretendemos estudar as dificuldades apresentadas por alunos de sexta e sétima séries do Ensino Fundamental ao efetuarem operações com os números positivos e negativos, bem como apresentar uma proposta didática para trabalhar este conteúdo nas séries em questão.

A proposta didática é composta por sete materiais manipulativos, a saber: atividade do nível do mar, atividade do elevador, bairro de uma cidade em um plano cartesiano, atividade do saldo de gols, atividade do zoológico, atividade do globo terrestre, envolvendo temperaturas e atividade do quadrado mágico. Estas atividades estarão descritas detalhadamente no capítulo 4 (seção 4.3).

Os materiais manipulativos foram elaborados no segundo semestre de 2009, na disciplina de Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática II, parte integrante do Currículo do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), por um grupo de acadêmicos. Nesta disciplina, os alunos-licenciandos auxiliavam os alunos de sétima série do Colégio de Aplicação da UFRGS em suas dúvidas e para tanto decidiram elaborar estes materiais para auxiliá-los.

A justificativa para a escolha deste tema encontra base em minha experiência nas disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática I e II, participação em eventos que abordam o ensino e a aprendizagem de matemática e como professor de Ensino Médio, onde pude verificar a dificuldade que os alunos apresentam ao lidar com estas operações.

Tais dificuldades vão desde o sentido analítico, quando apresentam resultados incorretos na resolução dos cálculos, passando por aspectos relacionados com o significado desses números e suas operações. É nossa preocupação que os alunos consigam utilizar a matemática escolar, sobretudo os números positivos e negativos, em diferentes contextos e que possam usufruir deste conhecimento para que possam entender e interferir no seu cotidiano, como por exemplo, analisar seu extrato bancário.

Frente a esta realidade, nosso trabalho pretende responder a seguinte questão norteadora: ***A utilização de materiais manipulativos pode contribuir para a aprendizagem de números positivos e negativos, fazendo com que o aluno atribua a eles significado concreto?***

Este trabalho estará estruturado em seis capítulos assim distribuídos:

No capítulo 1 faremos um breve relato de nosso estudo, explicitando os objetivos de nossa pesquisa, bem como apresentaremos nossas justificativas para realizá-lo.

No capítulo 2 faremos uma revisão bibliográfica sobre o ensino de números positivos e negativos e das dificuldades apresentadas por alunos de sexta e sétima séries do Ensino Fundamental, com o objetivo de situarmos o atual contexto de ensino deste tópico na educação básica, segundo a perspectiva e experiência de alguns autores. Além disso, faremos uma breve retrospectiva histórica com o objetivo de entendermos como os números negativos foram sendo construídos ao longo da história.

No capítulo 3 faremos uma breve discussão sobre a utilização de materiais manipulativos no ensino da matemática, de forma a abordar a sua importância para tal e justificarmos a nossa escolha pela sua utilização ao longo de nossa pesquisa. A teoria na qual embasamos nossa análise está exposta neste capítulo.

No capítulo 4 descreveremos a seqüência didática que pretendemos utilizar e abordamos o Método Clínico de Jean Piaget, metodologia escolhida para a coleta de dados da pesquisa.

No capítulo 5, encontra-se o relato de nossos encontros com os alunos, destacando acontecimentos mais relevantes e a análise dos dados coletados.

O sexto capítulo está reservado para as nossas considerações finais bem como apresentamos novas perspectivas que poderão servir de inspiração para próximas pesquisas.

2. Sobre o ensino de números positivos e negativos e as principais dificuldades apresentadas pelos alunos de Ensino Fundamental

É senso comum que grande parte dos alunos apresenta dificuldades em operar com números negativos. Como já mencionado anteriormente, pretendemos propor uma sequência didática que auxilie os alunos na compreensão destes números bem como suas operações. Entretanto, antes disso, é necessário verificarmos quais dificuldades são encontradas e os possíveis constrangimentos para o avanço do ensino deste conteúdo.

Através da análise do texto "Números Negativos: uma trajetória histórica" de autoria de Pedro Franco de Sá e Luiz Jorge Souza dos Anjos (2011) tivemos a oportunidade de verificar brevemente como os números inteiros, bem como suas operações foram tratados historicamente.

Inicialmente, os autores colocam que:

> "Os números surgiram pela necessidade de contagem e medidas ou por necessidades internas da própria matemática, sendo os números inteiros um exemplo desta ultima necessidade." (SÁ; ANJOS, 2011, p.2)

Se analisarmos a questão do surgimento em função da contagem, dificilmente aceitaríamos os números inteiros, pois para a tarefa de contagem, por exemplo, não há possibilidade em utilizá-los. Não há possibilidade de termos -10 pessoas presentes em um evento ou comprarmos -2 quilogramas de açúcar, por exemplo.

Os mesmos colocam que os números inteiros "nasceram" em função de uma necessidade algébrica, interna da matemática e não por uma necessidade de utilização na vida cotidiana. Certamente, questões que não estão ligadas diretamente ao cotidiano dos alunos possivelmente oferecerão maiores obstáculos para serem entendidas.

A seguir, faremos uma breve retrospectiva histórica, buscando alguns elementos que contribuam para entendermos algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos atualmente, em se tratando de números positivos e negativos.

Idade antiga

A aparição de números negativos na história da matemática se deu através da resolução de sistemas de equações lineares, pelos chineses, por volta de 1500 a.C. Nesta época surgiram as primeiras explicações de como deveríamos operar com tais números.

Diofanto (150-300 dC), matemático grego, no início de seu livro intitulado "Aritmética" já demonstrava ter conhecimento a respeito das regras de sinais, conforme exposto:

> "O que está em falta multiplicado pelo o que está em falta resulta em algo positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo resulta em algo que está em falta." (SÁ; ANJOS, 2011, p.3)

Certamente esta relação atribuída por este matemático devia causar-lhe estranhamento e dificuldade de aceitação, bem como pode ser mal interpretada pelos alunos hoje em dia. Realmente não é trivial aceitar que o "que está em falta" multiplicado pelo "o que está em falta" resulte em algo positivo.

Da mesma forma se atribuíssemos o sentido de "dívida" aos números negativos. Por exemplo: Uma divida de R$ 500,00 (nesse casso representamos por -500), multiplicada por uma dívida de R$ 2000,00 (nesse caso representado por -2000), resultaria em uma fortuna de R$ 1000000,00!

Idade média

Já na Idade Média, verificamos que os matemáticos tentavam transpor uma situação matemática para o cotidiano, de forma a criar certos modelos de trabalho para explicar algumas propriedades dos números inteiros, conforme explicitado pelos autores:

> Na Idade Média, Brahmagupta, matemático indiano, apresenta pela primeira vez na história uma "aritmética sistematizadora" dos números negativos e do zero. O mesmo explicita em seus livros regras aritméticas de adição e multiplicação e também introduz os números negativos em termos de fortunas (números positivos) e débitos (números negativos). (SÁ; ANJOS, 2011, p.4)

No mesmo período histórico,

> Bhaskara, em um de seus livros resolve uma equação do segundo grau e encontra como raízes 50 e -5. **O segundo valor ele achou inadequado devido às pessoas não aceitarem soluções negativas**. Bhaskara afirmava que as raízes negativas não podiam existir porque um número negativo não é um quadrado. Entretanto, os números negativos ganharam com isso uma aceitação, ainda que vagarosamente. (SÁ; ANJOS, 2011, p.4) [grifo meu].

Através destas colocações podemos verificar que trabalhar com os alunos através de dívidas, saldos bancários, não é algo novo ou diferente como somos tentados em acreditar. Muitos professores acreditam estar trabalhando com alguma metodologia diferenciada quanto associam números negativos com essas temáticas.

Idade moderna

Não podemos ficar espantados com a dificuldade dos alunos com este conteúdo já que estes causavam estranhamento a diversos matemáticos da época, conforme indica o trecho abaixo:

> Muitos matemáticos europeus no século XVI e XVII **não apreciavam os números negativos e se esses números apareciam nos seus cálculos, eles consideravam falsos ou impossíveis**. (SÁ; ANJOS, 2011, p.5) [grifo meu]

Os autores ainda trazem a seguinte contribuição:

> Cardano (1501-1576) em sua obra "Ars Magna" dividiu os números entre números verdadeiros, ou seja, os números considerados reais em sua época, naturais, frações positivas e alguns racionais; e "números fictícios" **ou números falsos correspondendo aos negativos e suas raízes complexas**. É no século XVIII que a situação dos números negativos mudou consideravelmente quando foi descoberta uma interpretação geométrica dos números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas. (SÁ; ANJOS, 2011, p.5) [grifo meu]

Já neste período histórico, em função de os números negativos terem ganhado outro significado, além dos já utilizados, a sua "veracidade", se é que podemos assim dizer, ganhou força. Até hoje, tanto livros didáticos de matemática como livros de física adotam o sinal negativo como indicador de sentido. Estabeleceu-se que se "caminharmos" para a direita do zero na reta real, por exemplo, estaremos nos deslocando no sentido positivo, caso contrário, denotaremos o sentido com o sinal negativo.

> Descartes (1596-1650) na obra, La Géometre, inclui a aplicação da álgebra à geometria, o que originou a geometria cartesiana. Ele tomou como "falsas" as raízes negativas, alegando serem menores do que nada e desenvolveu a transformação das raízes positivas e negativas , tal atitude mostra que ele se desvia do problema, revelando insegurança diante do uso de números negativos. (SÁ; ANJOS, 2011, p.6)

Ainda nesse período histórico verificamos a insegurança dos matemáticos com relação à aceitação e utilização de números negativos. Para eles era impossível aceitar que poderia existir uma quantidade "menor do que nada". Isso pode ocorrer com os alunos quando trabalhamos com saldo negativo. Para alguns educandos a quantidade de dinheiro disponível que uma pessoa tem é o que ela possui guardada em uma caixinha, por exemplo. Para ela são artificiais as idéia de empréstimo, cheque especial e saldo negativo. Até porque esse contexto não faz parte do cotidiano de estudantes de determinada faixa etária.

E, no decorrer da história, a discussão em torno de tais números e sua pouca aceitação continua, conforme trechos abaixo:

> Outros matemáticos dos séculos XVI e XVII, que não aceitaram os números negativos como mais que meros símbolos e os que o aceitavam não os admitiam como raízes de uma equação, a exemplo temos Pierre de Fermat (1601-1665) que fez com que seu amigo Jacques de Billy redigisse conselhos sobre o comportamento

> a adotar diante de uma "raiz falsa" em uma equação diofantina, afim de se obter uma "solução aceitável". Até aqui, percebemos que a difusão dos números negativos não se deu de forma tranqüila e imediata. E essa descrença quanto aos números negativos vão permanecer até o século XIX. (SÁ; ANJOS, 2011, p.6)
>
> McLaurin expõe a idéia de que uma quantidade negativa é tão real quanto uma positiva, porém tomada em sentido oposto. Para isto ele enunciou: "se uma quantidade negativa não possui outra que lhe seja oposta não se pode desta subtrair outra menor." (SÁ; ANJOS, 2011, p.7)

Este é um indicio de que McLaurin aceitava a existência de números negativos, entretanto rejeitava as operações com tais números. Ao que tudo indica, para este matemático, a diferença entre dois números nunca poderá resultar em um número menor do que zero, uma vez que, para ele é necessário que haja o oposto de tal número, resultando sempre em, no máximo, soma zero. Nunca menos do que isto.

Em um trecho de sua obra ele define a regra de sinais, esta dedução deu inicio a uma era de formalismos até então inexistentes. Ele foi o primeiro matemático moderno que chegou muito perto de compreender os números negativos tornando-se, portanto, uma importante referência para as futuras gerações de matemáticos que viessem a se dedicar a este assunto. Notamos que a tentativa de explicações plausíveis para as regras de sinais permanecem até os dias atuais.

> Leonhard Euler (1707-1783) desenvolveu uma obra de cunho pedagógico para principiantes , em 1770, tentando justificar a regra. Entretanto, Euler não compreende ainda que os números negativos sejam quantidades menores que zero. (SÁ; ANJOS, 2011, p.7)
>
> D´Alembert (1717-1783) "Dizer que as quantidades negativas estão abaixo de nada é afirmar uma coisa que não se pode conceber" e "quantidades negativas encontradas no cálculo algébrico indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. "O sinal de menos que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar um erro que cometemos na hipótese inicial (SÁ; ANJOS, 2011, p.7)

Portanto, através desse breve histórico, podemos perceber que, ao longo da história da matemática, tanto os números inteiros como as suas operações foram tratadas com certo estranhamento. Talvez isso possa ser uma justificativa para a atitude dos nossos alunos com relação a este tópico da matemática. Da mesma forma que custou aos matemáticos da época a sua aceitação, até mesmo em função dos significados atribuídos, nossos alunos também não os aceitam de maneira tão imediata como gostaríamos.

Em busca de mais dificuldades apresentadas pelos alunos, partimos para a leitura de "Construindo matemática na sala de aula: uma experiência com números relativos" de autoria de Maria Auxiliadora Megid (2001). Neste texto a autora coloca a necessidade de novas estratégias para ensinar números relativos aos seus alunos e descreve um conjunto de atividades que utilizou para tal.

Inicialmente a autora coloca:

> "Tinha exemplos estabelecidos previamente para "ensinar" as regras dos sinais. De maneira geral, julgava não haver muita coisa diferente para lançar mão no trabalho com números negativos em sextas séries." (MEGID, 2001, p.148)

Talvez esta seja uma barreira a ser considerada não somente para o ensino de números inteiros, mas para o ensino da matemática em geral. É comum verificarmos uma postura "tradicional" do professor que acredita não haver recursos diferenciados para o ensino de matemática e acaba por adotar uma prática pedagógica apoiada em "quadro e giz", não buscando novas maneiras de ensinar matemática. Esta não se trata de uma dificuldade encontrada no aluno, mas no professor, que muitas vezes mantém-se inerte frente aos desafios impostos pela sala de aula.

A reflexão da autora se inicia com a exposição de uma situação vivida por ela com a sua própria filha:

> "Minha filha caçula, então com onze anos, cursando a quinta série da escola onde leciono, ao subir comigo o elevador do prédio para o qual acabávamos de nos mudar, observou o quadro indicativo dos andares" (MEGID, 2001, p.148)

15	14
13	12
11	10
9	8
7	6
5	4
3	2
1	0
-1	

FIGURA 1 – Painel do elevador de um prédio

> “Ela dizia que considerava este quadro errado, pois “os números não estavam na ordem certa”. O correto para ela seria: 1, -1 e depois o zero”. (MEGID, 2001, p.148)

> “Ela provavelmente havia se referido à subtração $1 - 1 = 0$. Por isso o -1 deveria aparecer antes do zero. Daquela forma, para ela o quadro do elevador estava realmente errado.” (MEGID, 2001, p.149)

Observando o relato da autora e as hipóteses criadas por sua filha, temos a forte evidência de que a mesma não aceita o -1 como sendo uma quantidade menor do que zero. A mesma não faz a distinção entre a quantidade -1 e a operação de subtração. Para a criança existe a possibilidade apenas da operação, descartando-se a possibilidade de este representar, por exemplo, um andar abaixo do nível considerado o térreo.

Ao utilizarmos situações do cotidiano é preciso tomar cuidado uma vez que as situações propostas por nós professores pode não fazer parte do contexto social do público com as quais estamos trabalhando. Um dos exemplos, conforme Megid (p. 150) é o saldo negativo no banco.

Este modelo tão comum na abordagem em sala de aula e em livros didáticos que parece promover uma conexão entre o conceito matemático (no caso números relativos) em si e a realidade do aluno, poderá não ser satisfeita. O que faz parte do cotidiano de alguns alunos pode não fazer parte do cotidiano de outros. E, certamente, dependendo da comunidade onde a escola é localizada, da classe social do público envolvido, as diferenças são latentes.

É preciso verificar quais situações realmente atraem os alunos, no sentido de trazê-los para a discussão em questão. Conforme Megid (2001):

> “Tentei, no confronto entre os grupos, articular alguma conversa sobre o momento sócio-econômico da época, onde muitos perderam seus empregos. Em vão. Não era assunto que provocasse comentários ou preocupação entre eles.” (MEGID, 2001, p. 161)

Obviamente que o contexto sócio-econômico faz parte do cotidiano dos adultos, mas talvez não faça parte da realidade percebida pela criança. E, portanto, poderá configurar uma situação onde o ímpeto para a atividade prevista pelo professor talvez não aconteça. Talvez o mundo de uma criança de sexta série do Ensino Fundamental esteja voltado para outras situações que não o desemprego no país.

Conforme Martini (2010):

> “Os significados impostos aos conceitos aprendidos na escola não serão idênticos àqueles desenvolvidos no dia-a-dia”. (MARTIN, 2010, p.19)

Em outros casos, verificamos que há entendimento das operações com números inteiros, entretanto esbarramos na questão de simbologia, conforme exposto no seguinte trecho:

> "Apesar de muitos acertos e outros erros ninguém conseguiu uma resolução correta e simbólica para o resultado 25" (MEGID, 2001, p.158)

Outra questão que podemos levantar como dificuldade dos alunos é o seguinte: Na operação $25 - (-4) = 17$, podemos verificar que o aluno descontou o valor quatro duas vezes do 25, evidenciando que entende que cada sinal de menos corresponde a descontar quatro do 25 uma vez. Esse educando não entende, por exemplo, o sinal de menos como o "sentido de deslocar-se na reta real" ou como o oposto do número -4.

Um próximo ponto sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos diz respeito ao que Piaget denominou de Assimilação Deformante, ou seja, os alunos utilizam regras da matemática de um contexto específico e as utilizam em outro contexto que não tem nada a ver com o problema que precisam resolver. Explico-me: Digamos que os alunos precisem resolver a seguinte operação:

$$(-10).(-2) = 20$$

Ao resolverem a expressão $-5 - 2 = +7$ erroneamente, apresentam a seguinte justificativa: "professor, sinais iguais não é positivo?". O aluno utilizou a regra de sinais da multiplicação de inteiros e "transferiu" essa regra para a subtração de números negativos. O mesmo ocorreu na experiência de Megid (2001), quando expõe:

> "Quanto às justificativas, os que decidiram por resultado positivo, não traziam justificativas; os que acreditavam que o resultado fosse negativo, utilizavam o mesmo principio da soma de negativos – "quando ambos são negativos, o resultado deve ser negativo também"-diziam eles." (MEGID, 2001, p.179)

Um último ponto que podemos destacar como sendo uma possível causa das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de números inteiros é a abordagem de alguns livros didáticos. Corroborando com Martini (2010):

> "Já quando trabalham com operações de adição e subtração, eles abandonam um pouco as sugestões dos PCN´S (Brasil, 1998) e OCN (Brasil, 2006), preocupando-se em reproduzir as propriedades enunciadas para cada tipo de operação" (MARTINI, 2001, p.31)

Evidenciadas tais dificuldades, é possível pensarmos em uma seqüência de atividades de forma a tentar minimizar as dificuldades da realidade que encontramos.

3. Embasamento Teórico

Realizada uma retrospectiva histórica de como os números positivos e negativos eram tratados antigamente e delineadas algumas dificuldades apresentadas por alunos de Ensino Fundamental ao lidarem com tais números, realizaremos uma pequena discussão a respeito do uso dos materiais manipulativos no ensino e aprendizagem de matemática. Tal discussão se torna relevante uma vez que a nossa proposta didática faz uso deste tipo de material.

Em seguida, falaremos a respeito da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, teoria esta que servirá de embasamento teórico para análise do material coletado durante a realização de nossa prática.

3.1 A utilização de materiais manipulativos no ensino e aprendizagem de matemática.

Uma vez que a proposta didática que escolhemos faz o uso de materiais manipulativos é importante realizarmos uma breve discussão a respeito destes para o ensino e aprendizagem de matemática.

Quando elaboramos um plano de aula, a escolha de recursos faz parte deste processo. Há inúmeras discussões em torno destas escolhas, uma vez que dispomos de várias alternativas. Entre elas: o giz e o quadro negro, materiais manipulativos, jogos, computadores, projetor multimídia, entre outros. Para a realização dessa escolha, devemos levar em consideração o objetivo de nossa prática pedagógica, bem como a visão de educação matemática que cada professor tem engendrada dentro de si e que tipo de conhecimento matemático acredita ser mais importante para seu aluno.

Nossa concepção de ensino é um pouco diferenciada da tradicional, na qual os alunos simplesmente escutam o que o professor tem a dizer e pouco agem sobre as coisas para construir seu conhecimento, através de relações do que já sabem com o que se apresenta de novo.

Segundo Fagundes (1977):

> "Por aprendizado de matemática deve-se, portanto, entender a apreensão de tais conexões, bem como suas simbolizações, e a aquisição da capacidade de aplicar os

> conceitos formados a situações reais que ocorrem no mundo." (FAGUNDES, 1977, p.2)

Temos a convicção de que os materiais manipulativos são importantes aliados para a construção dessas relações.

A educação tradicional, que vigora em muitas escolas até hoje, baseia-se na concepção de que o professor é o detentor do conhecimento, e que o aluno deve ser apenas receptor deste conhecimento pronto e acabado. Conhecimento este que não deverá ser questionado pelo aluno e deverá ser reproduzido nos instrumentos de avaliação oferecidos pelo docente. Nesta concepção, a utilização de materiais manipulativos, por exemplo, é vista (pelos professores) como perda de tempo e como um fator para "tumultuar" o ambiente de sala de aula. (FIORENTINI & MIORIM, 1990)

Em divergência com o que expõe a matemática tradicional, Fagundes (1977), explica:

> "A matemática, afirma Dienes (1970), não deve ser considerada como um conjunto de técnicas, embora tais técnicas sejam consideradas claramente essenciais para a sua utilização efetiva. Ela deve ser vista antes como uma estrutura de relações." (FAGUNDES, 1977, p.2)

Há autores que não defendem a utilização de materiais manipulativos, não porque eles podem ocasionar tumulto na sala de aula, mas por acreditarem que estes não façam parte do cotidiano do aluno, conforme expresso por CARRAHER (apud MIORIM & FIORENTINI, 1990):

> "apesar de ser formado por objetos, pode ser considerado como um conjunto de objetos 'abstratos' porque esses objetos existem apenas na escola, para a finalidade de ensino, e não têm qualquer conexão com o mundo da criança". CARRAHER (apud MIORIM & FIORENTINI, 1990, p. 2)

Levando em consideração a seqüência de atividades que propomos em nossa pesquisa, que será delineada no próximo capítulo deste trabalho, discordamos do que foi exposto pelos autores. Todos os objetos que oferecemos aos alunos, embora sejam representações da realidade do mundo da criança, tem conexão com a vivência dos educandos que são os sujeitos de nossa pesquisa.

Ao longo da história, a partir das idéias de Rousseau, por volta do século XVIII, a concepção de que os alunos deveriam ser apenas reprodutores do conhecimento começou a mudar e começou-se a acreditar que o conhecimento era construído através do fazer, sobre a experiência direta sobre as coisas. Inclusive Commenius, o pai da didática, defendia que o ensino deveria ser diferente do tradicional, quando afirma:

> “ao invés de livros mortos, por que não podemos abrir o livro vivo da natureza? Devemos apresentar a juventude às próprias coisas, ao invés das suas sombras”. *(*MIORIM & FIORENTINI, 1990, p.3)

Mais tarde, em meados do século XX, inspirados nessas idéias, Montessori e Decroly criaram os primeiros materiais manipulativos utilizados no ensino de matemática, como por exemplo, o material dourado. Para esta educadora e médica italiana:

> *“*Nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração.” (AZEVEDO, apud MIORIM & FIORENTINI, 1990, p.4)

Neste sentido, concordamos com a autora. Consideramos improdutiva a idéia de pautar o ensino da matemática em um conjunto de regras a serem memorizadas e reproduzidas em uma prova, sem qualquer mobilização de raciocínio e ação do sujeito. No nosso entendimento, enquanto professores é essencial que os conceitos sejam assimilados de forma a serem utilizados sempre que surgirem problemas onde estes possam ser aplicados.

Na perspectiva tradicional é comum verificarmos que a maioria dos conceitos são esquecidos algum tempo depois uma vez que, ao aluno, não foi dada a oportunidade de manipular, construir relações, analisar, formular hipóteses, testar e chegar às suas próprias conclusões, interiorizando o conceito estudado.

Naturalmente espera-se que, após a utilização de materiais manipulativos, o aluno passe para outro estágio de desenvolvimento, abstraindo aquele conceito, de forma a resolver problemas sem que precise da presença do material manipulativo.

Não estamos defendendo aqui a abolição de nenhuma corrente de ensino. Pelo contrário, acreditamos que cada uma, em determinado contexto, com determinados públicos e em situações particulares deverão ser utilizadas e são plenamente apropriadas. A questão analítica, tanto explorada na concepção tradicional de ensino, deverá fazer parte de qualquer ambiente de ensino na disciplina de matemática. O que defendemos aqui é que em um momento anterior a este, se o conteúdo explorado assim permitir, deve ser oferecida ao aluno uma situação de manipulação de materiais para o estabelecimento de relações e construção de conceitos, para que sejam testados pelos próprios alunos, de forma a tirarem as suas próprias conclusões.

Para Castelnuovo (apud MIORIM & FIORENTINI, 1990, p. 4) a utilização de materiais manipulativos tem a seguinte finalidade: Exercitar as faculdades analíticas e sintéticas das crianças. Sintéticas no sentido de permitir ao aluno construir o conceito a partir do concreto; analíticas, porque, nesse processo, a criança deve discernir no objeto aqueles elementos que o constituem enquanto um todo (invariantes do objeto). Para isso o objeto tem de ser móvel, que possa sofrer uma transformação para que a criança possa identificar a operação – que é abstrata, subjacente.

Quando utilizamos materiais manipulativos é importante deixar que os alunos manipulem, criem hipóteses, testem, analisem e tirem suas próprias conclusões. Devemos tomar cuidado para não tornar o material manipulativo somente uma via para a reprodução e exposição do que está no livro didático, conforme apontado por Megid (2001):

> "Era pura demonstração do que eu falava. Ainda assim, pelo simples fato de concretizar o que o livro pregava e que eu repetia os alunos gostavam muito. A dinâmica dessas aulas os envolvia." (MEGID, 2001, p.146)

Neste trecho, notamos que a utilização do material concreto não foi a melhor possível, uma vez que foi utilizado somente para expor coisas já construídas pelos livros didáticos e não serviu para a exploração dos alunos e posterior construção das próprias hipóteses e respectivas validações. Não estamos defendendo aqui que o "concretizar" para o aluno, através da visualização do que está nos livros didáticos não seja válido e importante. Estamos somente destacando que o material concreto possibilita um avanço com relação a esta utilização.

Fazendo uma analise da própria prática pedagógica, Megid (2001), coloca:

> "As atividades utilizadas geralmente eram "apresentadas" aos alunos, ou seja, mostrava o material ou um raciocínio diferente, ao invés de estimular a manipulação do material ou a descoberta de um novo caminho." (MEGID, 2001, p.146)

Certamente a postura da professora, assim como é a nossa muitas vezes, está em divergência com o que coloca Fagundes (1977), sobre a utilização do material concreto para o aprendizado infantil:

> A utilização de materiais concretos no ensino de 1° grau (Ensino Fundamental) deve ser organizada de forma a proporcionar a cada aluno situações de experiências físicas bem como situações de experiências lógico-matemáticas, onde ele possa realizar tanto abstrações empíricas quanto abstrações reflexivas. (FAGUNDES, 1977, p.5)

Na realidade, acreditamos que a nossa proposta didática, que será exposta no próximo capítulo, está em consonância com a proposta supracitada. Através de cada uma delas, procuramos trazer ao aluno uma situação de representação do real, através do material manipulativo onde ele tenha a opção de criar hipóteses, relações e validá-las empiricamente, através do uso do material.

Temos a intenção de criar um ambiente de aprendizagem onde prevaleça a reflexão dos alunos para a resolução das atividades propostas e a discussão em seus grupos de trabalho e os professores-licenciandos, para que se construa o conhecimento, ao invés de sua simples exposição e reprodução pelos alunos, percebendo os invariantes que fazem parte de cada uma de nossas atividades.

3.2 Teoria dos Campos Conceituais

Não somente tratando-se de conhecimentos matemáticos, mas do conhecimento em geral, acreditamos que estes só são pertinentes se os mesmos servem para resolver os problemas que o sujeito encontra no decorrer de sua vida. O ensino que se presta a oferecer ao aluno somente a resolução de questões dentro da sala de aula e que, fora dela não encontra subsídios para a resolução dos seus próprios problemas, não está em consonância com aquilo que acreditamos. A alfabetização matemática, sobretudo na escola básica, deve levar em consideração esta colocação. Isto corrobora com Vergnaud (1986), quando afirma:

> “Em primeiro lugar, nos seus aspectos práticos, bem como nos seus aspectos teóricos, o saber forma-se a partir de problemas a resolver, quer dizer, situações a dominar.” (VERGNAUD, 1986, p.76)

Para isso se faz necessário que o professor ofereça uma série de situações diversificadas sobre o mesmo conceito para que o aluno explore e consiga formar o que Piaget chamou de invariantes operatórios (conhecimentos contidos nos *esquemas de raciocínio*) generalizando a maneira pela qual conseguiu resolver determinada classe de problemas, de forma a interiorizar o conceito e aplicá-lo em situações do cotidiano.

Por exemplo: Vamos supor que precisemos resolver a expressão 55+12=67. Já temos um esquema de raciocínio introspectado, o algoritmo para resolver esta classe de problemas, a saber: adição com dois algarismos em que a soma das unidades não ultrapassam uma dezena. Há o que chamamos de invariante operatório contido no esquema, ou seja, todas as adições com essas características devem ser resolvidas desta forma. Assim:

> "Chamamos de esquema à organização invariante da conduta para uma dada classe de situações. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permite a ação do sujeito ser operatória". (VERGNAUD, 1991, p.157)

Ou ainda, esquema pode ser definido como sendo:

> "Totalidade dinâmica organizadora da ação do sujeito para uma classe de situações especificada, é, portanto, um conceito fundamental da psicologia cognitiva e da didática". (VERGNAUD, 1991, p.162)

Sempre que tivermos problemas do campo aditivo com essas características, tenderemos a resolvê-los de forma automatizada. Essa automatização é uma manifestação visível do caráter invariante da organização da minha ação. E, por já se tratar de um esquema sedimentado é possível que deixemos implícitos os raciocínios executados, não apresentando o algoritmo completamente. Talvez essa seja uma justificativa para os alunos resolverem as contas diretamente, sem apresentar por escrito o algoritmo e dizerem que "fizeram as contas de cabeça".

Nesta perspectiva, acreditamos que somente resolver uma lista de exercícios, por exemplo, sem, contudo, ter tido a oportunidade de experimentar os conceitos envolvidos em tais exercícios não nos levarão ao caminho certo para atingirmos nossos objetivos enquanto educadores. Segundo Vergnaud (1991):

> "Um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino. É através de situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança." (VERGNAUD, 1991 p.156)

Esses problemas referem-se a situações novas, nas quais o aluno deve formular suas hipóteses, testá-las, validá-las e apresentar uma resposta de acordo com sua linha de raciocínio, coordenando seus esquemas de ação. Um problema, em que o aluno já sabe previamente o que responder baseado nos enunciados dos problemas, por exemplo, não é considerado, nesta perspectiva, um problema. (Onuchic & Alevatto, 2004)

Em nossa proposta didática, que será apresentada no próximo capítulo, procuramos oferecer situações diferentes que estivessem ligadas ao contexto social dos alunos para que os alunos tivessem um maior repertório de situações dominadas para posterior utilização e para que pudéssemos verificar a que classe de problemas a nossa proposta efetivamente dá conta. Não podemos esquecer que nos interessa a compreensão de números positivos e negativos de forma integral, em diferentes contextos e as suas respectivas operações e não somente a sua definição. Cabe salientar que todas elas possuíam um invariante: as sete atividades servem para abordar números positivos e negativos com alunos de Ensino Fundamental, entretanto em contextos diferentes em cada uma das atividades. Neste caso, ao apresentarmos uma proposta desse tipo, acreditamos que ela esteja de acordo com o proposto por Vergnaud (1986)

> “É um objetivo prioritário, na investigação em didática, investigar, analisar e classificar, tão exaustivamente quanto possível, as situações-problema que conferem significado e função a um conceito.” (VERGNAUD, 1986, p.76)

Para explicarmos a importância da variedade de situações a serem apresentadas aos alunos com o invariante conceitual, peguemos como exemplo os números negativos: Se oferecemos um contexto onde os números representam somente quantidades, os números negativos não farão sentido para este aluno uma vez que não existem quantidades negativas (-2 pessoas em uma festa, por exemplo). Por isso se faz necessário oferecer diversas situações onde encontramos tais números, como por exemplo, temperaturas abaixo de zero, altitude abaixo do nível do mar, andares no subsolo de um edifício, sentidos do deslocamento de uma pessoa ao andar na rua a partir de um referencial entre outras.

Sobre a variedade de situações ao se trabalhar um conceito, Vergnaud (1991) nos traz a seguinte contribuição:

> “Em resumo, a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada através de situações variadas, e o investigador deve analisar uma variedade de condutas e de esquemas para compreender em que consiste, do ponto de vista cognitivo, este ou aquele conceito” (VERGNAUD, 1991, p.165)

Vergnaud denominou de Campo Conceitual um conjunto de situações (1991). Nossa proposta enquadra-se no campo aditivo, ou seja, situações em que é necessário utilizar uma soma ou uma subtração para a resolução do problema proposto. Certamente cada um dos problemas que compõem a nossa seqüência didática, assim como os exemplos abaixo, apresenta um grau de dificuldade diferente, pois exige a coordenação de um número maior de operações e/ou esquemas para a sua resolução.

No campo aditivo, por exemplo, questões do tipo:

- João tinha 8 balas e ganhou 4. Com quantas balas João ficou?

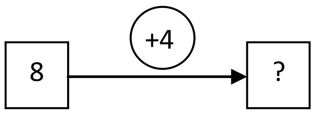


FIGURA 2 – exemplo 1 de transformação no campo aditivo

- João tinha 8 bonecos. Verificou que logo depois do seu aniversário possuía 11 bonecos, Quantos bonecos João ganhou de presente?

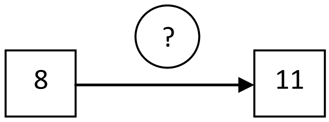


FIGURA 3 – exemplo 2 de transformação no campo aditivo

Estes dois problemas fazem parte do Campo Aditivo, mas possuem graus de dificuldades diferentes uma vez que necessitam de operações mentais de diferentes naturezas para sua efetiva resolução. É possível que os alunos tenham maior dificuldade em resolver a segunda situação e resolvam mais facilmente a primeira já que precisariam somente coordenar a ação de contar as balas, por exemplo. Já no segundo caso é necessário utilização da operação inversa para a resolução.

Entretanto é necessário que o professor ofereça situações que "entrem em conflito" com o conhecimento dos alunos para que os mesmos possam, através desses conflitos, assimilar e acomodar novos conhecimentos aumentando o seu repertório de ferramentas para a solução de problemas em geral. Nos exemplos citados acima, por exemplo, poderíamos ter explorado essas operações contendo números naturais maiores ou números decimais. Assim já criaríamos outra classe de problemas com um nível de dificuldade maior dentro do campo aditivo.

Um campo conceitual (C), segundo Vergnaud (1986), é alicerçado em um tripé de elementos, a saber:

C=(S,I,R), onde:

"S" é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito.

No nosso caso, o conjunto de situações são as sete atividades que propomos na seqüência didática e que serão descritas no capítulo três. Uma única situação não dá conta de abarcar todas as propriedades de um conceito e por isso se torna importante essa variedade de situações para estudo de um determinado conceito. Além disso, para resolver determinada situação não utilizamos somente um conceito matemático. Geralmente há mais conceitos envolvidos.

Vale lembrar que para explorarmos os problemas do campo aditivo necessitamos, por exemplo, do conceito de cardinal (contagem), de correspondência biunívoca, evidenciando que para tratarmos de um conceito, necessariamente outros estarão envolvidos.

"I" é o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito.

No caso do nosso trabalho, todas as propriedades das operações com números positivos e negativos constituem o conjunto de invariantes que deverão ser identificadas pelos alunos para que os utilizem na resolução de todas as atividades que serão propostas e para que se constituam em esquemas de ação para a resolução de problemas que necessitem destes conhecimentos. O reconhecimento de invariantes é a chave para a generalização de um novo esquema de ação. Espera-se que a criança perceba que este conhecimento invariante serve para a resolução de problemas de mesma classe.

"R" é o conjunto de representações simbólicas que podem ser utilizados.

Traduzindo este item do tripé para o caso de nossa pesquisa, as atividades possuem representações simbólicas diferentes, mas que pretendem auxiliar o aluno na compreensão de determinadas propriedades e operações com números positivos e negativos. Neste sentido, acreditamos que os materiais manipulativos que foram elaborados contribuíram para auxiliar nesta representação.

Os alunos poderão representar suas contas através do algoritmo padrão, através de desenhos (representação gráfica), ou através do diagrama de flechas (estado inicial e final), como apresentamos no exemplo anterior.

Além disso, apresentamos abaixo, algumas representações simbólicas para a reta numérica, presentes em nossas atividades.

- A reta numérica na atividade do nível do mar consistia em uma "régua de madeira", graduada a cada 50 metros. Dividiu-se esta régua em 17 partes iguais, de forma que a distância entre cada uma das marcações foi considerada 50 metros. (atividade 1 – figura 4)
- O cano de PVC graduado com os respectivos andares de um prédio é uma segunda representação de reta numérica presente em nossa atividade. (atividade 4 – figura 5)

- O plano cartesiano, que representa o bairro de uma cidade é uma terceira representação de reta numérica (atividade 5 – figura 6)

FIGURA 4 - Representação da reta numérica na atividade do nível do mar

FIGURA 5 - Representação da reta numérica na atividade do elevador

FIGURA 6 - Representação da reta numérica na atividade da cidade

Sobre a importância de representações simbólicas, Vergnaud (1991) coloca:

> "As representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão colocada exige várias etapas". (VERGNAUD, 1991, p.184)

Assim, é possível definirmos um Campo Conceitual de maneira mais formal:

> "Um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão." (VERGNAUD, 1986, p.84)

A partir desta definição formal expressa por Vergnaud, acreditamos que a nossa proposta didática se configura em um campo conceitual na medida em que apresenta o tripé proposto pelo autor: um conjunto de situações para trabalhar números positivos e negativos que requerem a utilização de diversos conceitos matemáticos, que possui invariantes de forma a definir as propriedades que queremos explorar e que oferece diversas formas de representação das atividades.

Chamamos a atenção para as diferentes formas de representação de um problema e para a representação da respectiva solução. É importante lembrar que, além da parte aritmética, é importante encontrar outros mecanismos de representação que facilitem o raciocínio de determinada situação e ajude a criança na construção de esquemas de solução, ainda mais tratando-se de problemas do campo aditivo com sucessivas transformações.

Sobre a finalidade da Teoria dos Campos Conceituais,Vergnaud (1991) explica:

> “A sua principal finalidade é fornecer um quadro que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos, nas crianças e nos adolescentes, entendendo por conhecimentos, tanto o saber fazer como os saberes expressos” (VERGNAUD, 1991, p.155)

Assim, verificamos que a Teoria dos Campos Conceituais é uma ferramenta poderosa e ao mesmo tempo complexa que visa fornecer ao professor um panorama geral para averiguarmos, de certa forma, como os educandos utilizam os seus conhecimentos prévios na resolução de novos problemas, bem como perceber como os alunos constroem novos esquemas de ação quando estão diante de novos problemas, já que nós, professores, sabemos previamente que pontos devem ser explorados em cada atividade, podendo mesmo que muitas vezes de forma superficial, avaliar o que está sendo construído pelo aluno para ajudá-lo em seu avanço cognitivo.

Existem, segundo o autor, duas classes de problemas para os alunos:

Aquelas situações em que os alunos já dispõem em seu repertório, as ferramentas necessárias para a resolução de determinado problema. Neste caso utiliza um esquema de ação que já está estruturado e finalizado. Utiliza-o de forma automática.

Já nas situações em que os alunos não dispõem em seu repertório de todas as ferramentas necessárias para a solução do problema, obrigando-o a partir em busca de novas hipóteses, testes e formação de novos esquemas mentais, quer estejam certos ou errados. Nesse caso, poderá haver a formação de vários esquemas de ação que entrarão em conflito e posterior acomodação, até que o sujeito esteja satisfeito com a resposta que formulou para determinada situação. Verifica-se, portanto, que mesmo em situações abertas há formação de esquemas e que os alunos não têm como saber se estes esquemas as levarão à resposta certa ou errada de determinado problema.

No Campo Aditivo, existem seis tipos de problemas que podem ser formulados aos alunos, abarcando todos os possíveis problemas da aritmética básica comum, a saber:

1) Composição de duas medidas em uma terceira;
2) A transformação (quantificada) de uma medida inicial numa medida final;
3) A relação (quantificada) de comparação entre duas medidas;
4) A composição de duas transformações;
5) A transformação de uma relação;
6) A composição de duas relações.

Em cada um desses conjuntos de problemas, ainda podemos subdividi-los de acordo com a dificuldade de cada um deles, levando em consideração três fatores:

1) Estrutura dos problemas;
2) Valores numéricos empregados;
3) Os domínios de experiências dos alunos.

Para finalizar, podemos verificar que este conjunto de situações que apresentam o invariante conceitual e estão permeadas por representações simbólicas podem promover um rico campo para que o investigador possa verificar as coincidências e diferenças nas posturas dos alunos diante de situações, estudando como se formam e quais são os esquemas de ação e as respectivas linguagens (verbais ou não) para explicar a construção de conceitos matemáticos na criança.

4. Procedimentos e materiais

4.1 Procedimentos gerais

Uma vez que já identificamos o problema de pesquisa, realizamos uma retrospectiva histórica e das dificuldades dos alunos em lidar com números positivos e negativos, justificamos o uso de materiais manipulativos em nossa pesquisa e construímos a argumentação teórica, passaremos e explorar as questões metodológicas inerentes ao nosso trabalho.

A sequência didática, que será descrita nesse capítulo, é composta por sete atividades. Tais atividades serão realizadas em duas oficinas para cada turma, onde aplicaremos quatro atividades de cada vez. Uma vez que nossa metodologia de investigação basear-se-á no Método Clínico de Jean Piaget (CARRAHER, 1983), no qual o objetivo está na estratégia de resolução e verificação de como os alunos pensam ao resolver um problema, se faz necessário um acompanhamento participativo do pesquisador nos grupos de trabalho.

Acreditamos que a coleta de dados seria dificultada se todos os materiais manipulativos forem aplicados simultaneamente. Na metodologia escolhida o pesquisador precisa estar junto dos alunos, questionando-os sobre suas técnicas de resolução e raciocínios utilizados. Esta coleta de informações, fundamental à pesquisa, ficaria prejudicada se todos os materiais fossem disponibilizados ao mesmo tempo, pois diversas oportunidades escapariam do nosso alcance.

Utilizando as dependências do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, as atividades foram empregadas em duas turmas: uma de sexta série (turma Amora II B) e outra de sétima série (turma 71) do Ensino Fundamental (sétimo e oitavo anos, respectivamente). Para que a aplicação de todas as atividades citadas com precedência no parágrafo acima pudesse ser efetivada, duas horas/aula foram disponibilizados para cada turma em cada oficina

A decisão de termos escolhido uma turma de sexta série reside no fato de que gostaríamos de verificar as respostas dadas aos questionamentos apresentados pelo pesquisador, através das questões propostas em cada uma das atividades e das perguntas que surgirão ao longo da aplicação das mesmas. Levando em consideração que estes alunos ainda não tiveram um contato formal com operações com números positivos e negativos, nos interessa analisar o nível de desenvolvimento em que estes estudantes se encontram ao trabalhar com contextos inéditos, matematicamente falando.

Uma vez que essas atividades já foram aplicadas com alunos de sétima série no segundo semestre de 2009, série em que, geralmente, há a formalização deste conceito, nós optamos por coletar dados de alunos deste nível.

Os materiais foram criados por um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS no segundo semestre de 2009 na disciplina de Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática II. Na referida disciplina, os licenciandos trabalhavam como monitores de alunos que apresentavam dificuldades em matemática e, por esse motivo, procuravam oferecer atividades que os auxiliassem na transposição destas barreiras. Após discussão com os próprios colegas, com a professora regente das turmas e com o professor orientador da disciplina, decidimos por criar tais materiais. Além dos materiais criados em 2009, alguns foram reelaborados neste semestre especialmente para esta aplicação.

A idéia é que cada turma se divida em grupos de quatro ou cinco alunos e passem por todas as atividades oferecidas, permanecendo cerca de 15 minutos em cada uma delas. Cada atividade, como será descrito na próxima seção, possui uma lista de perguntas cujas respostas deverão ser registradas pelos alunos. Todos os alunos deverão respondê-las, apresentando os cálculos e/ou justificativas realizados para a apresentação da resposta final. Os alunos poderão utilizar o material disponível como apoio e discutir com os colegas de grupo para a resolução. Estas respostas, juntamente com os diálogos que serão mantidos entre entrevistador e alunos, bem como os registros em diários de campo, serão utilizadas como material de análise do nosso trabalho.

Nossa metodologia enquadrar-se-á no tipo qualitativo, uma vez que não queremos somente fornecer indicadores numéricos, como por exemplo, percentuais de alunos que apresentaram respostas corretas. Nosso principal objetivo, como exposto inicialmente, reside em verificar se os materiais utilizados auxiliaram ou não na resolução das operações e para tanto, analisaremos o processo de cálculo apresentado pelos sujeitos da nossa pesquisa e suas justificativas.

Durante a prática, o pesquisador acompanhará um grupo especifico, enquanto respondem as perguntas e completam o circuito de atividades, uma vez que o pesquisador questionará os alunos de como encontraram tais respostas. Além disso, pretende-se que um colega (outro licenciando em matemática) auxilie o pesquisador na coleta de dados, já que no ambiente proposto, várias coisas ocorrerão ao mesmo tempo e poderão escapar da percepção do pesquisador.

Logicamente, quando desenvolvemos uma pesquisa, há fatos e variáveis que escapam de nosso domínio. Acreditamos que com o auxilio de mais alunos observando, questionando e tomando nota, esses escapes tendem a ser minimizados.

	2 períodos	2 períodos
6ª série	Materiais 1 a 4	Materiais 5 a 8
7ª série	Materiais 1 a 4	Materiais 5 a 8

FIGURA 7 – Esquema para a aplicação das atividades

FIGURA 8 - Alunos-licenciandos que auxiliaram na coleta de dados e aluno responsável pela pesquisa

FIGURA 9 – Alunos realizando a atividade 7 da seqüencia didática e aluna-licencianda, colaboradora deste trabalho

4.2 O método clínico de Jean Piaget

Para a realização de uma pesquisa é necessário que o pesquisador se apóie em alguma metodologia e procedimentos para a coleta e análise de seus dados, tentando, na medida do possível, seguir rigorosamente o que tal metodologia indica para o sucesso do trabalho.

Na medida em que nosso interesse é verificar o significado que os estudantes dão aos números positivos e negativos e estudar o raciocínio utilizado para operar com tais números, buscamos uma metodologia de trabalho que contemplasse nossos anseios na busca de respostas para nossa questão norteadora. Para tanto a metodologia que escolhemos foi o Método clínico de Jean Piaget, que exploraremos a seguir.

É de extrema importância salientarmos que não utilizamos o Método Clínico na sua totalidade, como preconizado por Piaget quando de seu trabalho com os seus sujeitos. As características que nortearam nossa coleta de dados usam a essência deste método, uma vez que o pesquisador está em contato direto com os sujeitos, questionando-os, na busca de entender como pensam. Acreditamos que é esta metodologia de pesquisa que possui características mais alinhadas com os objetivos que foram delineados por nós e por isso faremos um breve estudo a respeito da mesma.

Inicialmente, cabe salientar que este método pressupõe a análise de sujeitos e suas respostas. Tais dados deverão ser colhidos *in loco*, através de registros escritos, tanto dos sujeitos como do pesquisador (diários de campo), em que o pesquisador vai interrogando o sujeito, de maneira a fazer com que suas respostas demonstrem o que a criança pensa sobre a atividade que está realizando. Esta conduta diferencia-se, por exemplo, de simplesmente pedir para que as crianças respondam a um determinado questionário isoladamente para que analisemos a resposta num outro momento.

Na realidade, este método não nos oferece um conjunto de procedimentos prontos que devemos adotar, como por exemplo, um questionário com perguntas fechadas ou algumas questões matemáticas sobre o assunto. Através do contato com os sujeitos da pesquisa e as suas próprias perguntas é que o examinador deve criar novos questionamentos que levem o aluno a exprimir o que pensou para responder à determinada pergunta, conforme coloca CARRAHER (1983):

> "O leitor que estiver buscando receitas para sua aplicação não será, porém satisfeito. A discussão apresentada, embora contendo sugestões práticas, é de

natureza teórica e esperamos que fosse compreendida como tal, e não seja transformada em uma série de regras que, seguidas, assegurariam o bom uso do método clínico" CARRAHER (1983, p.14)

Quando realizamos algum teste, diversas variáveis devem ser levadas em consideração tais como: maneira com que as perguntas são realizadas ao sujeito, tempo em que cada examinando terá para responder às perguntas, estado psicológico em que cada sujeito se encontra no momento de aplicação do teste, ambiente de realização da pesquisa, entre outros. Em nossa pesquisa, assim como em qualquer outra, muitos desses fatores são difíceis de serem controlados e só terão a possibilidade de serem melhorados se tivermos a possibilidade de aplicar a mesma seqüência várias vezes de forma a realizar melhorias a cada encontro com os alunos.

"Recomenda-se sempre que o ambiente seja calmo e ofereça conforto ao sujeito, que o experimentador ou examinador procure inicialmente colocar o sujeito à vontade e motivá-lo para a tarefa e que adote uma atitude de naturalidade ao fazer as perguntas." (CARRAHER, 1983, p.16)

Sobre isso temos duas considerações.

Inicialmente tentamos realizar as aplicações das atividades no laboratório de física da Escola onde o ambiente é mais adequado para trabalhos em grupo. Entretanto, no primeiro encontro com a turma de sexta série isso não foi possível e, certamente houve uma melhoria com relação a isso quando o segundo encontro foi realizado.

Outro fator a ser considerado é que as duas turmas em que as atividades foram propostas não eram regidas pelo pesquisador, mas por outros professores. Os sujeitos só conheceram o examinador no momento das práticas e isso pode ter influenciado na relação pesquisador – sujeito, interferindo nas respostas coletadas. Talvez se este tipo de pesquisa fosse realizada em turmas em que o próprio pesquisador é o regente da classe, e a relação entre ambos já estaria mais informal, com um nível maior de afinidade, colaborando para uma maior abertura de possíveis respostas.

Um terceiro fator de controle diz respeito à formulação das perguntas e instruções dos testes. É preciso ter atenção como fazemos as perguntas aos sujeitos para não causar-lhe dúvidas. Isso poderá prejudicar na coleta de dados.

Segundo Delval (2002)

> “Um método não é bom ou mau por si mesmo. Só pode ser julgado em função dos problemas que é chamado a resolver e que, por sua vez, são orientados por perspectivas epistemológicas mais ou menos explicitas” (DELVAL, 2002, p.33)

Na medida em que nosso trabalho pretende revelar se a utilização de materiais manipulativos pode contribuir para a aprendizagem de matemática, sobretudo nas operações com números positivos e negativos, se faz necessário que verifiquemos como se estrutura o pensamento da criança para responder as perguntas que propomos a ela, com o auxilio do material manipulativo.

Nossa idéia inicial baseava-se simplesmente em elaborar uma sondagem, com algumas questões referentes ao conteúdo e, posteriormente, pedir que os alunos respondessem às mesmas questões, com o auxilio do material concreto. No final da análise, faríamos uma espécie de avaliação para verificarmos a quantidade de acertos dos sujeitos. A partir daí poderíamos estabelecer um comparativo quantitativo e verificar se houve progresso na quantidade de acertos e, conseqüentemente, avanço no seu entendimento sobre o assunto.

Entretanto, um possível aumento na quantidade de acertos poderia se dever ao fato do aluno simplesmente lembrar-se da atividade, ou ter lançado alguma resposta por acaso, não evidenciando, contudo, avanço cognitivo, uma vez que não expressou claramente como chegou à solução que apresentou.

Decidimos então por utilizar o Método Clínico proposto por Jean Piaget, que conforme definição de Delval (2002)

> “Um método concreto de pesquisa dentro da psicologia é o método clínico que consiste em uma forma de obter dados em interação direta com o sujeito. Porém, ao utilizar o método clínico, podem-se adotar procedimentos de trabalho, por sua vez muito distintos, que necessariamente serão adaptadas ao problema que se quer estudar.” (DELVAL, 2002, p.35)

Portanto, conforme supracitado, o método prevê uma maneira mais “aberta” de se trabalhar, levando-se em consideração os sujeitos da pesquisa e as questões para a qual procuramos resposta.

Assim, como descreveremos a seguir, foram estruturadas sete atividades que foram respondidas pelos alunos, enquanto os mesmos eram questionados pelos professores-licenciandos que estavam auxiliando na coleta de dados com o objetivo de obter dados em que pudéssemos verificar a processo de pensamento do sujeito.

Nesse método, não temos um questionário fechado, onde as perguntas serão respondidas e, posteriormente analisadas. A partir do que o sujeito vai respondendo ao que é proposto, o pesquisador pode criar novas perguntas, de forma a descortinar aquilo que está implícito em seu pensamento. E, é justamente essa postura do pesquisador e seus colaboradores que diferencia o método clínico de outros métodos de pesquisa. É esta intervenção sistemática sobre as respostas do sujeito é que o torna um método rico para criarmos hipóteses de como os sujeitos pensam.

Assim, segundo Piaget (apud. DELVAL, 2002, p. 55)

> "Desse modo, empreendi com meus sujeitos conversas do tipo das entrevistas clinicas com a finalidade de descobrir algo sobre os processos de raciocínio que estavam por trás de suas respostas corretas, com um interesse particular pelo que ocultavam as respostas falsas" (DELVAL, 2002, p.55)

Neste ponto, encontramos uma dificuldade para a prática do método clinico, uma vez que o pesquisador não sabe de antemão que respostas serão dadas pelos sujeitos. É preciso que o pesquisador tenha certa prática para que consiga elaborar novos questionamentos e hipóteses, embasados no que surge dos alunos.

Através da colocação acima, é possível verificarmos que, muitas vezes, as respostas incorretas dos alunos poderão se tornar um dado mais rico para a análise, na perspectiva do Método Clinico uma vez que, mesmo tendo respondido errado, o sujeito explicou o seu pensamento e ofereceu ao pesquisador subsídios para análise do seu raciocínio. Todavia, isso poderá não ocorrer em respostas corretas, uma vez que não apresentam justificativa alguma, limitando a análise do pesquisador.

Para a prática deste método, ao mesmo tempo em que o pesquisador precisa interagir com o sujeito, fazendo-lhe questionamentos, precisa manter-se imparcial, no sentido de não direcionar o sujeito para a resposta certa, mas deixá-lo seguir o curso de seu pensamento. Esta é outra dificuldade encontrada neste método, uma vez que toda a ação do pesquisador, de certa forma, influencia o sujeito em suas reações.

Sobre isso, Delval (2002) nos explica:

> "Ele (o pesquisador), não pode ter preconceito e, sobretudo deve evitar transferir a sua forma de pensar aos sujeitos que está estudando." (DELVAL, 2002, p.72)

Primeiramente, o termo clínico foi utilizado na medicina para estudar o diagnóstico de pessoas doentes e propor-lhes uma solução. A novidade trazida por Piaget consiste no fato de que utilizou o método para o estudo do desenvolvimento de pessoas normais.

Podemos dizer que o Método Clinico sofreu, ao longo do tempo algumas mudanças, de forma a torná-lo um método de pesquisa mais completo e que contemplasse às demandas do desenvolvimento nas pesquisas com as crianças.

Inicialmente era um método que se baseava basicamente em observações das ações das crianças, com pouca interferência do pesquisador. Nesta primeira etapa o método era verbal, não fazendo o uso, por exemplo, de outros materiais senão a própria linguagem.

Num segundo momento, em meados de 1926, com a obra “A representação do mundo na criança” Piaget já expõe com mais clareza o que seria esse método e as suas principais características e, além de pequenas observações realizadas na primeira etapa, começa a se desenvolver o estudo do conteúdo do pensamento.

Numa terceira etapa, que se desenvolveu entre a década de 30 e 40, Piaget fez tentativas de utilização deste método a crianças que ainda não falam e, nas décadas seguintes, o sujeito era convidado a resolver tarefas mediante suas ações obre o objeto e pede-se que explique a respeito do que fez. A explicação é vista como um complemento de sua ação. Acreditamos que a nossa proposta metodológica esteja inserida justamente nesta perspectiva do Método Clinico.

Após a década de 50 ainda houve tentativas de aprimorar ainda mais o método, através de estudos estatísticos, entretanto houve poucas modificações na sua essência.

Podemos dividir o Método Clínico em três tipos distintos. São eles: Entrevista livre, Explicação sobre uma explicação e Método não verbal.

Restringiremos-nos a explicar o segundo tipo, uma vez que é este tipo que faremos uso em nossa pesquisa. Neste tipo, entrevistamos a criança a respeito da transformação que faz sobre um objeto. As explicações dadas pela criança é que vão nos informar algo sobre as suas idéias e raciocínios. As intervenções sistemáticas, a que nos referimos acima servem para esclarecer o que a criança fez e nos ajuda a interpretar tais acontecimentos.

Delineados o problema que nos propomos a responder, a nossa metodologia de pesquisa e o substrato teórico que pretendemos nos apoiar, passaremos agora à descrição detalhada de nossa sequência didática.

4.3 Descrição das atividades que compõem a seqüência didática

Conforme havíamos destacado na introdução, a parte prática de nosso trabalho é composta por sete atividades que fazem o uso de materiais manipulativos.

Alicerçados na Teoria dos Campos conceituais, de Vergnaud, nossos materiais possuem um invariante: todos têm o objetivo de trabalhar operações com números positivos e negativos, em contextos distintos.

Abaixo, descreveremos detalhadamente cada uma destas atividades e seus respectivos contextos:

ATIVIDADE 1 (Nível do mar)

O primeiro material consiste em uma haste de madeira graduada (figura 10), que tem como objetivo simular o nível de um navio no mar. O nível do mar será considerado a referência do nosso sistema, ou seja, o zero na reta real (nível da mesa). Os pontos acima deste serão considerados positivos e os pontos abaixo da referência serão considerados negativos.

FIGURA 10 – Material manipulativo
correspondente à atividade do nível do mar

Na prática, o exercício se constitui através da criação de uma régua de madeira, de forma que o nível do mar citado acima seja a mesa, onde foi apoiada ortogonalmente ao plano da mesa, dada a altura do chão (fundo do mar), até a mesa foi feita a escala para as outras alturas.

A cota de 80 metros marcada na figura abaixo corresponde ao convés do navio. A cota de 250 metros corresponde à torre de controle do navio. Ambos os valores são fundamentais para a realização da atividade.

Disponibilizaremos aos alunos a régua para que possam utilizá-la como apoio durante a realização da atividade, podendo situar-se no contexto através do material manipulativo.

A graduação da haste de madeira ocorreu em função da altura da mesa já que esta era invariante e a referência (plano da mesa) já possuía altura pré-estabelecida. Levando em consideração esses fatores, dividimos a haste em 17 partes iguais. Cada uma dessas partes correspondia a 50 metros. O esquema representativo está abaixo:

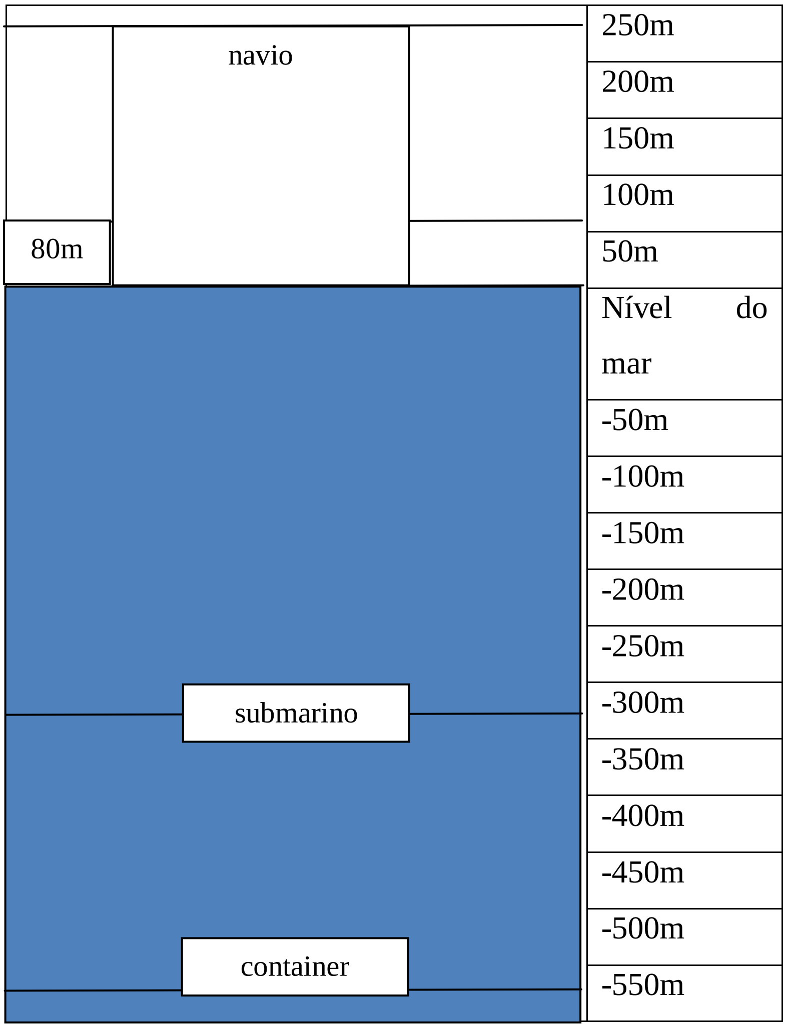


FIGURA 11 – Esquema representativo do nível do mar, disponibilizado aos alunos

A partir deste material, a seguinte situação será apresentada aos alunos:

Um navio perdeu um container na costa brasileira, com a carga avaliada em R$ 5.000.000,00. Para recuperar esses objetos, utilizaram um guindaste localizado no convés do navio e um submarino que levou os cabos de aço do guindaste até o container. Com base na ilustração acima, responda as seguintes perguntas:

1) A que distância está o container com relação ao nível do mar?
2) Que distância falta para que o submarino chegue até o container?
3) Qual a distância da torre de controle do navio com relação ao convés do mesmo?
4) Qual a altura do convés do navio com relação ao nível do mar?
5) Supondo que o guindaste esteja no convés do navio e que contenha três saídas de cabo de aço, posso dizer que 1650 metros de cabo das três saídas seria o suficiente para chegar até o container? Caso contrário, qual seria a quantidade mínima de cabo? (importante: as três saídas tem cabos de aço do mesmo tamanho)
6) A que distância o submarino está da torre de controle do navio?
7) Qual a distância do submarino com relação ao guindaste?

ATIVIDADE 2 (Quadrado mágico)

Esta atividade é composta por um tabuleiro quadriculado com três linhas e três colunas e de 18 fichas, numeradas da seguinte forma: naturais de 1 a 9 e inteiros negativos de -1 à -9. Tanto as fichas como o tabuleiro foram elaboradas com cartolinas brancas e coloridas. A atividade consiste em preencher os nove campos do tabuleiro com as fichas disponíveis, sem repetir nenhum número (figuras 12 e 13) de forma que a soma de todas as linhas e todas as colunas seja zero.

O material pode ser utilizado individualmente, em duplas ou grupos, dependendo da quantidade de alunos em sala e da proposta de cada professor. Abaixo, apresentamos um modelo do tabuleiro e das fichas que os alunos terão à disposição. Cabe salientar que os grupos terão à disposição dois conjuntos, de forma que possam trabalhar em duplas nos seus respectivos grupos.

FIGURA 12 – Peças que compõem a atividade do quadrado mágico

FIGURA 13 – Atividade 2 – Quadrado mágico

ATIVIDADE 3 (Saldo de gols)

Nesta tarefa os alunos deverão, com o auxilio da tabela do campeonato Brasileiro (figura 14), responder a algumas questões em que estarão trabalhando com números inteiros neste contexto. As questões que servirão de base para os questionamentos estão a seguir relacionadas.

Vocês são os responsáveis pela área de estatística da empresa Sport Sul. A equipe tem 15 minutos para responder as perguntas abaixo com o auxilio da tabela de pontos do campeonato que está disponível para o grupo.

1) Qual a diferença de gols marcados entre o primeiro e o décimo quarto colocado na tabela?
2) Quem sofreu mais gols? Fluminense ou Internacional?
3) Quem tem o melhor saldo de gols? Figueirense ou Náutico?
4) Quantos gols marcaram os quatro primeiros colocados juntos?
5) Qual o saldo de gols dos quatro últimos colocados no campeonato?
6) Se o Grêmio tivesse sua situação mudada para 22 vitórias, 10 empates, 6 derrotas, o time tricolor passaria para a primeira colocação?

POSIÇÃO	EQUIPE	P	J	V	E	D	GP	GC	SG
1°	São Paulo-SP	75	38	21	12	5	66	36	30
2°	Grêmio-RS	72	38	21	9	8	59	35	24
3°	Cruzeiro-MG	67	38	21	4	13	59	44	15
4°	Palmeiras-SP	65	38	19	8	11	55	45	10
5°	Flamengo-RJ	64	38	18	10	10	67	48	19
6°	Internacional-RS	54	38	15	9	14	48	47	1
7°	Botafogo – RJ	53	38	15	8	15	51	44	7
8°	Goiás-GO	53	38	14	11	13	57	47	10
9°	Coritiba- PR	53	38	14	11	13	55	48	7
10°	Vitória-BA	52	38	15	7	16	48	44	4
11°	Sport-PE	52	38	14	10	14	48	45	3
12°	Atlético-MG	48	38	12	12	14	50	61	-11
13°	Atlético-PR	45	38	12	9	17	45	54	-9
14°	Fluminense-RJ	45	38	11	12	15	49	48	1
15°	Santos-SP	45	38	11	12	15	44	53	-9
16°	Náutico-PE	44	38	11	11	16	44	54	-10
17°	Figueirense-SC	44	38	11	11	16	49	73	-24
18°	Vasco da Gama-RJ	40	38	11	7	20	56	72	-16
19°	Portuguesa-SP	38	38	9	11	18	48	70	-22
20°	Ipatinga-MG	34	38	9	8	21	37	67	-30

FIGURA 14 – tabela utilizada para a atividade 3 (saldo de gols)

ATIVIDADE 4 (Elevador)

Foi confeccionado o protótipo de elevador com uma base de madeira, dois canos de PVC, uma haste metálica e uma roldana. Um cubo de madeira preso a um barbante fará o papel de cabine do elevador, conforme abaixo (figura 15). O andar térreo é o nosso referencial (análogo ao zero da reta numérica), os andares acima do térreo correspondem aos números positivos e os andares abaixo do térreo serão considerados negativos. A marcação branca na figura abaixo representa o térreo. Há oito marcações acima da marca branca, representando os oito andares acima do solo. Abaixo da marcação branca, há oito marcações correspondentes ao andares no subsolo.

FIGURA 15 – protótipo de elevador utilizado na atividade 4

A atividade é uma descrição da rotina de um trabalhador do prédio onde o elevador está instalado. Caberá aos alunos, com o auxilio do material manipulativo, responder a seguinte atividade:

Carlinhos trabalha como oficce-boy na *Corporation Baskarus*, na cidade de Mathemápolis. Suas tarefas diárias são, normalmente, entregar documentos nas salas, em cada andar do prédio. O prédio π -tower possui o térreo e mais oito andares, além de oito andares abaixo do solo (subsolo), sendo que destes andares no subsolo, os dois últimos servem para estacionamento.

Partindo dessas informações, quantos andares tem o prédio onde Carlinhos trabalha?

Bom, se a tarefa de Carlinhos é entregar os documentos nas salas de cada andar, vamos ver quanto ele se desloca de elevador para executar o seu trabalho.

a) Carlinhos chega ao π -tower, no andar térreo, no seu trabalho e sobe até o quinto andar para conversar com o seu chefe, pegar alguns documentos e depois segue para o sexto andar no subsolo onde toma café. Quantos andares ele percorreu desde o momento que chegou até a hora do café?

b) Depois de tomar café, sobe até o oitavo andar para entregar os documentos que pegou com o seu chefe à senhora Arminda, secretaria do vice-presidente. Quantos andares Carlinhos percorreu neste trajeto?

c) Ao entregar os documentos para senhora Arminda, recebeu uma ligação para comparecer ao segundo andar na secretaria da empresa para buscar mais alguns documentos e entregá-los nos seguintes andares:

   - Os documentos verdes devem ser entregues no sétimo andar do subsolo;
   - Os documentos azuis devem ser entregues no quinto andar do subsolo;
   - Os documentos amarelos devem ser entregues no sexto andar.

   Quanto andar Carlinhos percorreu neste trajeto?

d) Após esse serviço, Carlinhos foi até o terceiro andar. Partindo daí, recebeu um envelope que deveria ser entregue com urgência ao presidente da empresa que trabalha no oitavo andar. Quantos andares ele percorreu?

e) Para ir embora, Carlinhos vai de carona com Marcelo. Carlinhos tem que encontrar Marcelo no primeiro andar do subsolo e depois seguir para o penúltimo andar do subsolo, onde fica o estacionamento. Quantos andares Marcelo e Carlinhos andaram para sair do π -tower?

ATIVIDADE 5 (Plano cartesiano)

Esta atividade consiste em um plano cartesiano, dividido em quatro quadrantes, conforme a figura abaixo:

FIGURA 16 – Bairro da cidade onde mora Maria, personagem da atividade 5

Este plano representa o bairro onde mora Maria, uma personagem criada para esta atividade. Maria tem uma mania bastante peculiar: contar os seus passos. A atividade narra algumas ações executadas por Maria ao longo do dia. Nesta atividade os alunos deverão ajudá-la na tarefa de contar os seus passos. Caba salientar que a contagem iniciará sempre a partir da porta de cada local. Para tanto os alunos utilizarão operações com números inteiros. Segue a descrição desta atividade:

Mathemápolis é uma cidade no interior de Pitágoras, onde as pessoas são amigáveis, o clima é agradável e tranqüilo. Nesta cidade temos uma amiga que mora nela e que se chama Maria.

Maria é uma menina simpática e que gosta de conversar e tem uma mania muito engraçada: Adora contar passos! Conta todos! Conta quantos da cozinha até o banheiro, da sala até o quarto, da sua casa até a da sua amiga Luiza. E, no final do dia, soma todos os seus passos.

Uma mania muito engraçada!

Pois bem, vamos ajudá-la nesta tarefa, contando os passos em cada trajeto.

Qual a quantidade de passos que Maria caminha:

(Obs: como Maria respeita o trânsito, anda sempre pela calçada;)

(Obs 2: Vamos contar a menor quantidade de passos dados;)

a) Da sua casa até o centro da praça:__________ passos;
b) Do centro da praça até a escola:__________ passos;
c) Da sua casa até a escola:__________ passos;
d) Então, podemos dizer que a distância da casa de Maria até a escola é o triplo da distância do centro da praça até a escola? __________
e) Do centro da praça ao museu:__________ passos;
f) Do clube ao shopping:__________ passos;
g) A quantos passos o Shopping está da sorveteria? __________ passos;
h) Da sorveteria até o centro da praça:__________ passos;
i) Para Maria ir do clube até a sua casa, essa distância é de __________ passos;
j) Quantos passos Maria faz no seguinte trajeto: Do shopping até a sorveteria, da sorveteria até a praça e da praça até o museu? __________ passos.

ATIVIDADE 6 (Temperaturas)

Nesta atividade os alunos utilizarão um globo escolar (figura 17) para localizar os países e então com base em uma tabela que fornece a temperatura máxima e mínima, calcular a temperatura média em cada um desses locais. Além dos países localizáveis no globo, também foram fornecidos os dados para que eles pudessem calcular a temperatura média na lua e em Marte.

FIGURA 17 – Globo terrestre utilizado na atividade 6

Após foi solicitado que eles elaborassem um roteiro de viagem escolhendo localidades em seqüência e registrando as diferenças de temperatura entre um local e outro a cada viagem realizada, sempre registrando os cálculos executados. Ainda acrescentamos a título de curiosidade, a maior e a menor temperatura registrada na Terra, informando também a sua localização.

Abaixo, segue a atividade:

Exercício 1:

Completar a tabela abaixo, calculando as temperaturas médias e colocando os valores encontrados na respectiva coluna. A temperatura média pode ser calculada somando a temperatura mínima com a máxima e dividindo o resultado por 2 (dois). Registre todos os cálculos efetuados.

Temperaturas em Maio			
Cidade - país	Mínima (°C)	Máxima (°C)	Média (°C)
Porto Alegre – Brasil	13	22	
Berlim – Alemanha	9	19	
Montreal – Canadá	-8	1,5	
Pequim – China	13	26	
Toliara – Madagascar	17	29	
Tóquio – Japão	15	23	
Auckland – Nova Zelândia	10	17	
Deserto do Saara – Africa/Ásia	-5	50	
Antártida – Polo Sul	-65	-30	
Lua	-233	123	
Marte	-140	20	

Exercicio 2

Imagine agora que você poderá viajar para qualquer lugar destes da tabela acima. Faça um roteiro de viagem escolhendo um local de partida e quatro lugares para visitar e registre as diferenças de temperaturas de um lugar para outro, mostrando os cálculos efetuados.

Curiosidades:

Temperatura mais baixa já registrada na Terra: -89,2 °C na Antártida

Temperatura mais alta já registrada na Terra: 58°C na Líbia

ATIVIDADE 7 (Zoológico)

Neste jogo cada um de vocês terá a possibilidade de administrar seu próprio zoológico. O dinheiro azul representa meio de pagamento, como o dinheiro de verdade. O dinheiro vermelho representa dívida. Se um jogador possui x reais em dinheiro vermelho, isso significa que ele deve x reais ao banco e deve pagar essa dívida logo que tiver x reais em dinheiro azul. Quatro jogadores serão os administradores do zoológico e o outro será o responsável por cuidar do banco. Inicialmente, cada jogador recebe R$ 10,00 em dinheiro azul. No início todos os animais são propriedades do banco. Se o jogador parar com o seu peão em um animal, de número x, por exemplo, que ainda seja de propriedade do banco, poderá optar por comprá-lo ou ir adiante. Se optar por ir adiante, o terreno permanece de propriedade do banco, até que algum jogador caia com seu peão ali e decida comprá-lo. O valor de compra e aluguel é o que está indicado na casa de cada animal. Se o terreno X já tiver sido vendido a outro participante, o jogador que cair nele deverá pagar x reais de aluguel ao proprietário. Note que o número do terreno é igual ao valor do aluguel a pagar. Toda vez que você passar pelo inicio do jogo, o banco lhe pagará R$ 10,00 e terá que sortear um cartão de sorteio. Se um jogador quiser vender seu animal ao banco o valor pago pelo banco será metade do valor pago pelo jogador. Ganha quem acabar o jogo com mais dinheiro!

Abaixo, as peças que compõem o jogo.

FIGURA 18 – Visão geral das peças que constituem o jogo do zoológico

FIGURA 19 – Tabuleiro do jogo do zoológico

FIGURA 20 – Fichas de animais constituintes do jogo do zoológico

FIGURA 21 - Fichas de dinheiro utilizadas no jogo do zoológico

5. Descrição dos encontros com os alunos para aplicação da seqüência didática e análise dos resultados

5.1 Relato dos encontros com os alunos

RELATO DO PRIMEIRO DIA DE APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA – 03/10/11

Conforme cronograma, iniciamos a aplicação da seqüência didática no dia 03/10/11, com a turma Amora 2B, no Colégio de Aplicação da UFRGS. Estavam presentes 24 alunos e estes foram convidados a se dividir em grupos de quatro componentes. Pedi que se reunissem dessa forma pois acreditava que um grupo com menos componentes seria mais eficaz para que todos os componentes do grupo pudessem manusear o material.

No entanto, como aplicamos somente quatro dos oito materiais manipulativos para que pudéssemos acompanhar e questionar os alunos, fazendo com que dois grupos ficassem sem material. Analisando tal situação, acredito que isto tenha sido um equivoco de minha parte, pois os alunos que estavam sem atividade no momento acabaram ficando dispersos e interferiram no trabalho dos outros.

Distribui então um material em cada um dos grupos, a saber: elevador, sado de gols, quadrado mágico e plano cartesiano. Em seguida, distribui as quatro folhas para cada aluno uma folha correspondente a cada uma das atividades e solicitei que colocassem os nomes e, se quisessem poderiam colocar somente as suas iniciais. Tinha receio de que os alunos se sentissem coagidos a responder o que pensassem em função de eu saber seus nomes. Talvez esse seja um ponto que deverá ser repensado no próximo encontro com a turma.

Expliquei rapidamente cada uma das quatro atividades e a dinâmica do "rodízio" a cada 15 minutos e iniciamos a prática efetivamente.

O questionamento de uma aluna logo no inicio me chamou muito a atenção: "Sor como a gente vai fazer essa atividade dos quadrados se a gente ainda não aprendeu números negativos?". Respondi que não havia problema e que o grupo tentasse responder como pensavam e justificassem os cálculos efetuados, inclusive através de desenhos. O grupo que me questionou a respeito disso conseguiu pelo menos duas configurações distintas e corretas para o quadrado mágico. Quando questionados de como chegaram a tais conclusões, os alunos disseram, de maneira convicta: "É fácil! Basta escolher qualquer número aleatório para iniciar o quadrado e depois é só ir somando e subtraindo até dar zero, Se não der, a gente troca a ficha até a soma fechar zero!

A partir disso, temos indícios de que mesmo não tendo tido um contato formal com as operações no universo dos inteiros, os alunos trazem consigo esta idéia de “ficar devendo” quando subtraímos um número maior de uma quantidade menor e que esta “diferença” deverá ser compensada na próxima ficha para completar a linha ou coluna do quadrado mágico.

Senti que o tempo foi escasso e que os alunos precisariam de mais tempo para pensar a respeito das atividades. Ao solicitar a rotação dos grupos, a maioria exclamou: “Ainda não deu tempo de terminar tudo sor!” Uma vez que nosso objetivo na pesquisa é o de analisar as estratégias de resolução e não somente mensurar quantitativamente acertos e erros, eu solicitei que os alunos trocassem de atividade mesmo assim.

Outro fator que impactou o resultado nesse primeiro dia foi a ausência de um professor colaborador, uma vez que foi difícil questionar todos os grupos durante todo tempo. Fiquei com a impressão de ter perdido discussões importantes entre os alunos e senti falta de poder questionar a todos.

Em um dos grupos, uma das configurações encontradas para o quadrado mágico foi a seguinte:

9	-8	1
-7	5	-2
2	-3	1

E um dos componentes me perguntou: “Eu não posso utilizar outro “um” (grifado em vermelho)?” Mesmo não estando dentro das regras do jogo, uma vez que o número um já tinha sido usado uma vez (primeira linha, terceira coluna), evidenciamos que os alunos operaram corretamente com os números inteiros na medida em que concluíram que para a soma da terceira linha e da terceira coluna ser zero, necessitariam da presença do número um naquela posição.

Quanto ao saldo de gols percebi que alguns grupos sentiram dificuldades em buscar os valores na tabela por desconhecerem o significado do nome das colunas (P, J, V, D, E, GP, GC, SG). Esta pode ter sido uma falha do próprio material que deveria estar mais claro. Este certamente foi um fator que impactou nas respostas dadas pelos alunos.

Verifiquei também que, dependendo do contexto em que estamos trabalhando há variação, se podemos assim dizer, na motivação em realizar a tarefa. Notei que a maioria dos meninos preferiu trabalhar com a atividade do saldo de gols já que se tratava de algo ligado ao futebol. Megid (2001) em sua experiência teve este mesmo sentimento.

Quanto ao material do elevador, a maioria respondeu as perguntas rapidamente, apenas fazendo a contagem nos andares, firmando-se fortemente no material manipulativo, sem efetuar qualquer cálculo.

Verifiquei uma possível dificuldade de interpretação no material do plano cartesiano, possivelmente em função da escala apresentada. Alguns tiveram dificuldade em se dar conta de que as subdivisões não representavam apenas uma unidade, como em uma régua escolar, por exemplo.

RELATO DO SEGUNDO DIA DE APLICAÇÃO DA SEQUENCIA DIDÁTICA – 03/10/11

No segundo dia de encontro com os alunos, procuramos modificar algumas coisas que julgamos que poderíamos melhorar com relação ao primeiro dia de aplicação de nossa sequência didática. A primeira delas foi local de aplicação: O primeiro encontro foi realizado foi realizado na própria sala de aula, já o segundo, ocorreu no Laboratório de Física da Escola. Consideramos essa mudança positiva uma vez que este é um ambiente mais amplo, as mesas são maiores e o layout do ambiente com relação à sala de aula confere no nosso ponto de vista, maior dinâmica e facilidade de trabalho tanto para os alunos como para os professores.

Neste segundo encontro, estavam presentes, além do pesquisador, mais três professores-licenciandos que auxiliaram na organização dos alunos bem como na coleta de dados. Acreditamos que a presença dos mesmos foi de fundamental importância para a nossa pesquisa. Uma vez que esta se baseia no Método Clinico de Piaget que pressupõem inteiração entre pesquisador e pesquisados.

Solicitamos aos alunos que se reunissem nos mesmos grupos quando da primeira aplicação das atividades. Desta vez, diferentemente da primeira, aplicamos seis atividades, a saber: Quadrado mágico, saldo de gols, elevador, cidade da Maria, temperaturas e nível do mar, de forma que nenhum grupo ficasse sem atividade, falha esta que cometemos no primeiro encontro.

Os professores-licenciandos organizaram-se de maneira que cada um permaneceu a maior parte do tempo em uma atividade. Entretanto como havia mais atividades, todos acabaram por se envolver com as seis atividades presentes. A seguir, comentamos o que consideramos mais relevante neste segundo encontro.

Considerando o jogo do quadrado mágico:

Um dos grupos apresentou a seguinte configuração:

-4	4	8
-3		-6
7	-5	-2

O professor Rodrigo colocou uma ficha com o número "três" na célula que estava em branco e perguntou: "Agora está certo não é gurias?", dirigindo-se a todas as componentes do grupo. A estudante H. Ligeiramente respondeu: "Sôr tu não está certo, não... Essas contas tão tudo errada! Não vai dar zero nem na linha e nem na coluna!" E o professor João pergunta: "E quanto vai dar então?" E H. rapidamente responde corretamente: "vai dar seis negativo e na coluna vai sobrar 2!"

Sobre este fato temos duas considerações: primeiramente acreditamos ter conseguido aplicar corretamente o Método Clinico, fazendo questionamentos que levassem à obtenção de uma resposta que permitiu verificar como a aluna estava pensando e não somente a verificação de uma resposta certa ou errada, simplesmente. Ao mesmo tempo conseguimos verificar que, de certa forma, já existe certa familiaridade com as operações de soma e subtração com números inteiros, mesmo que os alunos desta turma ainda não tenham tido contato formal com as operações em Z, evidenciando, no nosso entendimento, que essa aluna entende o significado de número negativo como sendo a falta de alguma quantidade quando atribui o sinal negativo e sobra de quantidade quando atribui ao número o sinal positivo.

Um segundo grupo obteve a seguinte configuração para o quadrado mágico:

8	-5	-3
-6		
7	-4	6

Determinado componente do grupo em questão disse que o número que deveria ser colocado na segunda linha e terceira coluna era o número -3. Entretanto o mesmo comentou que o mesmo não poderia ser utilizado novamente. Nota-se que além de ter compreendido as regras do jogo o aluno efetuou corretamente a operação $-\mathbf{3} - 3 + 6 = \mathbf{0}$.

Em determinado momento da aula a aluna A levantou-se e perguntou para o pesquisador: “Sor, quanto é -9+8?” E lhe devolvi a pergunta? “Quanto tu acha que é?” E ela respondeu: “é menos que zero né?” E, novamente lhe devolvi a pergunta: “Porque tu acha que é menor que zero?” E ela responde: “E que o nove vai “consumindo” o oito “negativamente”, bem devagarzinho!” E conclui o raciocínio: “É menos 1 a resposta né?”

Consideramos resposta da aluna excelente! E podemos considerá-la em diferentes pontos de vista. Primeiro que quando a aluna diz que o nove “vai consumindo negativamente” o oito, nota-se que o conceito de número negativo está engendrado em seu pensamento. Ela sabe que, de certa forma, as nove unidades vão sendo “descontadas” do oito e, no final ainda vai sobrar uma unidade para ser descontada, resultando em -1.

Outra configuração encontrada por um grupo foi a seguinte:

8	-5	-3
-6	3	4
-2	2	-1

Neste caso, notamos que há alguns equívocos por parte os alunos. Coube ao pesquisador questioná-los, na busca de entender o raciocínio empregado.

Pergunto a eles: “Pessoal! Considerando a segunda linha: -6+3?” E um deles responde: “-3!”. E ai eu sigo, dizendo: “ok! -3+4?” E o outro aluno responde: “-1 sor!” E ai pergunto-lhe o porquê e ele diz: “Porque menos com mais dá menos!” E o seu colega intervém, dizendo: “Não é assim meu, tu tá viajando... Dá +1! Porque $\mathbf{4} - 3 = +\mathbf{1}$

Temos duas coisas a considerar quando estudamos o raciocínio de ambos. O primeiro apresentou o que Piaget denominou assimilação deformante. Possivelmente o aluno utilizou a regra de produto e quociente de números inteiros ao afirmar que “sinais diferentes” resultavam em menos. Ou seja, ele utilizou regras de um contexto e aplicou essas regras em outro contexto, para tentar resolver outro problema, embora sejam coisas distintas.

O segundo aluno apresentou a resposta correta. Entretanto, em virtude do complemento de sua resposta (4-3=+1) verificamos que não há a diferenciação entre o sinal negativo de um número e o negativo visto como operação de subtração. Desta forma, é possível que este aluno faça alguma confusão na operação 4-(-3), já que nesta estão engendradas a operação de subtração e a quantidade negativa.

Uma ultima observação sobre o comentário de duas alunas que resolveram corretamente o quadrado mágico, depois de diversas tentativas: “Jô, que legal! A gente sabe pensar!” (comentário da aluna R). Consideramos importante relatar isso pois acreditamos que, ao deixá-las resolver sem interferência, mesmo que já tivessem tentado inúmeras vezes, possibilitou um aumento da auto estima dessas alunas ao verificarem que foram capazes de realizar a atividade proposta.

Considerando a atividade das temperaturas, uma das alunas questionou o pesquisador sobre a presença de números não inteiros na sua resposta. A saber: (13+22)/2. A aluna realizou o algoritmo da divisão euclidiana corretamente, chegando na resposta de 17,5°C. E perguntou-me “Mas essa resposta, pode?”. Na realidade o tom do questionamento soou como um estranhamento aos números que não são inteiros, como se essa resposta não pudesse existir, não fosse verdadeira, por não ser inteira.

Não foi o caso da duvida desta aluna, mas trazendo os subsídios da história da matemática podemos dizer que o mesmo estranhamento que esta aluna sentiu quando percebeu uma resposta não inteira, foi o estranhamento de muitos matemáticos da época que encontravam soluções negativas para os seus problemas, considerando-os números falsos, em função de serem negativos, conforme já tínhamos exposto no capítulo 2 deste trabalho.

5.2.1 Análise do material da sexta-série

OBSERVAÇÃO: Para comodidade do leitor, repetiremos a ordem das atividades, facilitando a leitura

Atividade 1 – Nível do mar

Fazendo uma análise geral dos itens que compõe a atividade 1, podemos verificar que houve grande incidência de respostas em branco. Acreditamos que isto tenha acontecido em função da falta de tempo, uma vez que os alunos precisavam interpretar e responder sete itens em 15 minutos. Talvez se fosse oferecido mais tempo teríamos obtido mais respostas.

Além disso, verificamos que os alunos tiveram dificuldade em verificar onde estava a torre de controle e o convés do navio. Embora houvesse marcações no desenho que eles receberam (250m e 80m), não estava escrito em lugar algum, dificultando a compreensão da atividade. Certamente é uma melhoria a ser colocada no material, no caso de aplicações futuras.

Analisemos agora cada item separadamente:

1) A que distância está o container com relação ao nível do mar.

Das 24 respostas obtidas, tivemos:

- 6 respostas em branco (25% do total);
- 9 respostas corretas (550 metros) sem justificativa (37,5% do total);
- 9 respostas 500 metros (37,5% do total);

Acreditamos que o equivoco nas respostas dos alunos que responderam 500 metros se deu pelo fato de nossa representação ter ficado confusa para eles. Observe:

Tínhamos a expectativa de que os alunos considerassem a marcação da linha cheia (preta) que marcava -550 metros. Entretanto, em função de suas respostas acreditamos que eles tenham considerado a contagem a partir de onde inicia o container, na linha tracejada (vermelha), cuja indicação é de -500 metros.

A quantidade de respostas em branco nos chamou bastante atenção, pois se tratava de uma transformação simples. Acreditávamos que a maioria resolveria sem dificuldades.

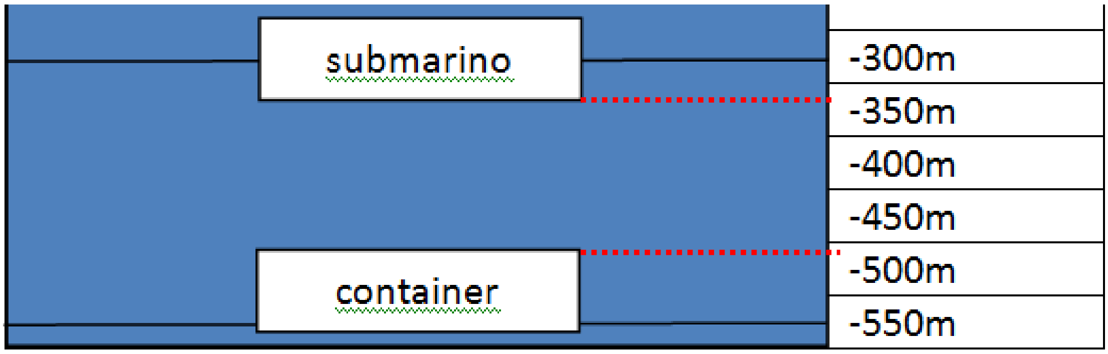
2) Que distância falta para o submarino chegar até o container?

Das 24 respostas obtidas, tivemos:

- 8 respostas corretas (250 metros), representando (33,3% do total);
- 10 respostas em branco, representando (41,7% do total);
- 3 respostas (150 metros), representando (12,5% do total);
- 2 respostas (350 metros), representando (8,3% do total);
- 1 resposta (200 metros), representando (4,2% do total);

Nas respostas corretas, os alunos escreveram que contaram de 50 em 50 metros, coordenando as suas ações à nossa escala de representação.

As respostas referentes a 150 metros podem ter ocorrido em função novamente de nossa representação ambígua, observe:



Ela pode ter levado os alunos a pensarem que a diferença era justamente essa (500-350=150 metros).

As respostas (200 metros) podem ter ocorrido pelo fato de considerarem a cota do submarino -300 metros e do container -500 metros, levando à resposta incorreta, mas raciocínio coerente.

Não encontramos hipóteses para esclarecer o pensamento do aluno quanto ao valor de 350 metros.

3) Qual a distância da torre de controle do navio com relação ao convés do mesmo?

Este foi o item da primeira questão com maior frequência de respostas diferentes, justamente porque tratava do convés e da torre de controle, que não estavam escritos explicitamente em qualquer lugar.

Assim, das 24 respostas:

- 14 em branco, representando 58,3% do total;
- 5 respostas (150 metros), representando 21% do total;
- 2 respostas (155 metros), representando 8,4% do total;
- 1 resposta (75 metros), representando 4,2% do total;
- Apenas duas respostas corretas (170 metros) com o respectivo algoritmo, representando, 8,4% do total.

Na medida em que os alunos não apresentaram justificativas para os itens errados, não conseguimos analisar o processo de solução deles e, por isso não podemos afirmar nada a respeito de como pensaram.

4) Qual a altura do convés do navio com relação ao nível do mar.

Todos os alunos que responderam a este item acertaram, apresentando a resposta 80 metros. Verifica-se que os mesmo consideraram o nível do mar como sendo o nosso referencial (zero da reta numérica, não apresentando dificuldades no processo de resolução. Onze alunos responderam corretamente. (representando 45,8% do total).

5) Supondo que o guindaste esteja no convés do navio e que contenha três saídas de cabo de aço, posso dizer que 1650 metros de cabo das três saídas seria o suficiente para chegar até o container? Caso contrário, qual seria a quantidade mínima de cabo? (importante: as três saídas tem cabos de aço do mesmo tamanho)

Esta questão era a mais complexa desta atividade. Faz parte do campo aditivo e do campo multiplicativo e eram necessários vários esquemas para a sua solução. Grande parte dos alunos deixou a questão em branco (21 alunos, representando 87,5% do total). Acreditamos que isso se deve ao fato de ser complexa para alunos que não tiveram um contato formal com números negativos, como é o caso da sexta série.

6) A que distância o submarino está da torre de controle?

Nenhum aluno respondeu corretamente a esta pergunta. Dezoito alunos deixaram-na em branco (75% do total), dois alunos responderam 650 metros e dois alunos responderam 600 metros. Os que responderam 600 metros, provavelmente confundiram-se com o convés do navio (80 metros), uma vez que a nossa representação está ambígua. Sobre os outros dois alunos, não chegamos a nenhuma conclusão.

7) Qual a distância do submarino com relação ao guindaste?

Todos os alunos deixaram este item em branco. Acreditamos que não tenham tido tempo de pensar a respeito do nosso questionamento. Já comentamos em outros momentos a questão do tempo para a realização da atividade, ainda mais por se tratar do Método Clinico para a sua coleta. Talvez seja necessário mais tempo para pensar a respeito dos itens e escrever toda a justificativa.

Atividade 2 – Quadrado mágico

Esta atividade é composta por um tabuleiro quadriculado com três linhas e três colunas e de 18 fichas, numeradas da seguinte forma: naturais de 1 a 9 e inteiros negativos de -1 à -9. A atividade consiste em preencher os nove campos do tabuleiro com as fichas disponíveis de forma que a soma de todas as linhas e todas as colunas seja zero.

Abaixo, apresentaremos as diferentes soluções encontradas pelos alunos e, em seguida discutiremos:

Solução de RF e JS:

8	-5	-3
-6	2	4
-2	3	-1

Solução de IL:

-6	7	1
9	-2	-7
-3	-5	-8

Podemos observar que nem todas as contas do aluno resultam em zero. O aluno não escreve que a terceira coluna, por exemplo, vai resultar em -14 e por isso não temos condições de avaliar até que ponto ele consegue montar esquemas de ação para operar nesse conjunto.

Solução de JR, MB e NN:

1	-4	3
-8	9	-1
7	-5	-2

Solução de JC e AS:

5	-4	-1
1	7	-8
-6	-3	9

E ainda escreveu: “A atividade foi bem rápida e muito interessante”.

Solução de EW e HL:

1	2	-3
8	-6	-2
-9	4	5

Solução de KR e BP:

-6	5	1
2	-8	6
4	3	-7

Solução de AK:

-6	7	-1
9	-2	-7
-3	-5	8

Solução de JP e RO:

6-	5	1
-3	-1	4
9	-4	-5

Embora a solução esteja correta, verificamos que o aluno ainda apresenta dificuldade na representação do número inteiro quando escreve "6-" ao invés de "-6". Podemos concluir que ele reconhece o "valor negativo" do 6 quando coloca na primeira linha da terceira coluna o valor +1, fechando a soma zero como queríamos. Vemos, portanto que os alunos conseguem operar em Z, entretanto tem problemas relacionados à sua representação.

Analisando as resposta de maneira geral, verificamos que os alunos possuem certo domínio das operações com números negativos e acreditamos que tenha havido a construção de vários esquemas de raciocínio que foram sendo desconstruídos (os alunos iam tentando preencher o tabuleiro e quando viam que a resposta não ia dar zero, partiam para uma nova tentativa), dando lugar a uma nova possibilidade.

Atividade 3 – saldo de gols

1) Qual a diferença de gols marcados entre o primeiro e o décimo quarto colocado na tabela?

   Para este item da atividade 3 foram encontradas três respostas distintas, a saber:

   - 17 (45,9% do total) é a resposta correta;
   - 18 (16,9% do total);
   - Em branco (29,2% do total);

Acreditávamos que este fosse um item respondido facilmente pelos alunos uma vez que se tratava de uma subtração de números naturais. Entretanto nos espantou o fato de muitos terem deixado a questão em branco, talvez por não entenderem as siglas da tabela que foi disponibilizada e não termos fornecido a respectiva legenda, fato este que serve de sugestão de melhoria da proposta.

Acreditamos que a resposta 18 se deve ao fato dos alunos terem se equivocado no momento de consultar a tabela já que o número que está na coluna que GP (que é a que deveria ser consultada, tem justamente uma unidade a mais, resultando em um erro de somente uma unidade na subtração dos dois valores.

2) Quem sofreu mais gols? Fluminense ou Internacional?

   Neste item, tivemos as seguintes respostas:

- 18 alunos responderam Fluminense (75% do total);
- 1 aluno respondeu Internacional (4,2% to do total);
- 5 alunos deixaram o item em branco (20,8% do total);

Na realidade esta questão tratava-se apenas de uma consulta à tabela e comparação de ordem de números naturais. Observamos que a maioria dos alunos organizou corretamente seus esquemas de solução. Acreditamos que o aluno que respondeu incorretamente tenha tido problemas para saber o que a questão solicitava, talvez se confundindo com o time que tem mais pontos e não mais gols.

3) Quem tem o melhor saldo de gols? Figueirense ou Náutico?

Este item consistia, matematicamente, em verificar qual número era maior (-10 ou -24). Nos surpreendemos positivamente pois acreditávamos que os alunos de sexta série teriam dificuldades em comparar números negativos, pois tendem a acreditar que um número com maior módulo é maior, mas no caso de números negativos ocorre o contrário: quanto maior o módulo, menor é o número negativo. Entretanto, verificando suas respostas e constatando o alto índice de acertos, confirmamos o contrário do que pensávamos.

- 17 alunos responderam Náutico, representando 70,8% do total;
- 2 alunos responderam Figueirense, representando 8,4% do total;
- 6 respostas em branco, representando 25% do total.

Os alunos que responderam Internacional justificaram dizendo que 49 é maior que 44. Equivocaram-se na consulta às colunas, retirando os valores da coluna GP (gols pró) e não da coluna SG (saldo de gols). Possível falha na coordenação de esquemas.

4) Quantos gols marcaram os quatro primeiros colocados juntos?

Nesta questão notamos que os alunos operaram corretamente os dados que coletaram, apresentando o algoritmo e as transformações sucessivas sofridas pelos números em cada caso. Porém, alguns consultaram os dados na coluna incorreta. Muito possivelmente porque não sabiam o que significavam as siglas ou porque se equivocaram no esquema de consulta.

Quantitativamente, tivemos o seguinte resultado:

- 1 aluno, representando 4,2% do total, respondeu 160 (36+35+44+45), pois consultou a coluna GC (gols contra) e não os gols marcados (GP);

- 2 alunos, representando 8,4% do total, responderam 79 (30+24+15+10), pois consultaram a coluna SG (saldo de gols) e não os gols marcados (GP);
- 6 alunos deixaram o item em branco (representando 25% do total);
- 15 responderam corretamente, encontrando 239 gols como resposta (representando 62,5% do total).

5) Qual o saldo de gols dos quatro últimos colocados no campeonato?

Novamente fomos surpreendidos positivamente. Uma vez que se tratava da soma de quatro números negativos (sucessivas transformações), acreditávamos que os alunos encontrariam obstáculos, lembrando que são alunos de sexta série e ainda não estudaram formalmente o conjunto Z. Além disso, era uma questão com mais transformações.

Obtivemos os seguintes resultados:

- 4 alunos (representando 16,7% do total) somente listaram o saldo negativo de cada time, sem no entanto, somá-los. (-24, -16, -22, -30). Talvez isso possa ter ocorrido em função da linguagem que utilizamos para formular a questão. Carraher (1983) sinaliza da importância da linguagem para se dirigir aos sujeitos, ainda mais quando utilizamos o Método Clinico. Ao perguntarmos "Qual o saldo de gols dos quatro ultimo colocados?" os alunos entenderam que listar era suficiente. E, de certa forma, eles não estão errados. Deveríamos ter sido mais claros na formulação da pergunta que poderia ter sido: "Qual a soma do saldo de gols dos quatro últimos colocados no campeonato?"
- 2 alunos (representando 8,4% do total) responderam 190 (49+56+48+37), coletando os dados da coluna (GP) e não da coluna saldo de gols (SG), como havíamos solicitado. Operam corretamente, entretanto não organizaram o esquema de ação completamente;
- 9 alunos (representando 37,5% do total) responderam a pergunta corretamente, apresentando o respectivo algoritmo, evidenciando não terem problemas de operar neste conjunto;
- 7 alunos deixaram o item em branco (representando29, 2% do total);
- Apenas dois alunos erraram o algoritmo, aparentemente apresentando dificuldades em operar com inteiros negativos (representando 8,4% do total).

6) Se o Grêmio tivesse sua situação mudada para 22 vitórias, 10 empates, 6 derrotas, o time tricolor passaria para a primeira colocação?

Esta questão pertence ao campo aditivo e multiplicativo porque precisa de somas e multiplicações para ser resolvida e o aluno precisaria mobilizar outros conhecimentos para chegar à resposta correta: Precisava saber que uma vitória corresponde a três pontos e empate, um ponto e saber que o primeiro critério pra classificar os times é a quantidade de pontos. Vergnaud afirma que não se trabalha um conceito sozinho. Outros conceitos e conhecimentos estão envolvidos

- 15 alunos responderam que o Grêmio passaria a primeira posição, explicitando todas as contas necessárias (representando 62,5% do total);
- Apenas um aluno informou que o Grêmio não passaria para a primeira posição (representando 4,2% do total);
- 8 alunos deixaram o item em branco (representando 33,3% do total).

ATIVIDADE 4 - Elevador

Sobre a quantidade de andares tem o predio onde carlinhos trabalha, podemos chegar a sguinte conclusão:

- 7 alunos (representando 29,2% do total) responderam corretamente, indicando 17 andares. Chamamos a atenção para o fato dos alunos terem representado as suas respostas de duas maneiras diferentes: algorítmo (8+8+1=17) e através de desenhos, onde podemos perceber que houve o apoio dos materiais manipulativos;

- 7 alunos (representando 29,2% do total) responderam 17 andares, entretanto sem qualquer justificativa. De acordo com Vergnaud pode haver omissão da apresentação do algoritmo quando os esquemas de ação já estão introspectados pelos sujeitos;

- 1 aluno (representando 4,2% do total) contou 16 andares, acreditamos que o mesmo não tenha se apoiado na utilização do mateerial e esqueceu de contabilizar o térreo na contageem.

- O restante dos alunos (representando 37,4% do total) deixou a questão em branco e por isso não podemos chegar a conclusão alguma.

a) Carlinhos chega ao π-tower, no andar térreo, no seu trabalho e sobe até o quinto andar para conversar com o seu chefe, pegar alguns documentos e depois segue para o sexto andar no subsolo onde toma café. Quantos andares ele percorreu desde o momento que chegou até a hora do café?

- 6 alunos (representando 25% do total) acertaram a questão respondendo 16 andares, entretanto sem qualquer justificativa. Lembramos que de acordo com Vergnaud pode haver omissão dos esquemas, se este ja estão sedimentados;
- 4 alunos (representando 16,7% do total) responderam 6 andares. Acreditamo que podem não ter entendido a questão completamente e não completaram o esquema de ação;
- 5 alunos (representando 20,8% do total) não coordenaram a ação de contar e confundiram-se apresentando 17 como resposta correta.
- 3 alunos (representando 12,5 % do total) responderam 7 andares, apresentando a seguinte justificatibva: 12-5=7. 12 corresponde (erroneamente) a contagem do andar +5 até -6 e o 5 corresponde a quantiddae de andares que ele desceu;
- o restante dos alunos deixou a questão em branco (representando 25% do total).

b) Depois de tomar café, sobe até o oitavo andar para entregar os documentos que pegou com o seu chefe à senhora Arminda, secretaria do vice-presidente. Quantos andares Carlinhos percorreu neste trajeto?

- 9 alunos responderam corretamente sem justificativa (representando 37,5% do total);
- 3 alunos responderam 20 andares. Não houve justificativa e não podemos, portanto, avaliar o raciocinio dos sujeitos (representando 12,5% do total);
- 3 alunos responderm 15 andares. Acreditamos que este erro tenha sido causado pois os alunos contaram o andar em que Carlinhos se encontrava ao entrar no elevador e não somente os deslocamentos efetivos (representando 12,5% do total);
- 4 alunos responderam 2 andares, pois consideraram que Carlinhos subiu do +6 até o +8 e não consideraram do -6 até o +8 (representando 16,7% do total);

- o restante dos alunos não respondeu à questão (representando 20,8% do total).

c) Ao entregar os documentos para senhora Arminda, recebeu uma ligação para comparecer ao segundo andar na secretaria da empresa para buscar mais alguns documentos e entregá-los nos seguintes andares:
    - Os documentos verdes devem ser entregues no sétimo andar do sub-solo;
    - Os documentos azuis devem ser entregues no quinto andar do sub-solo;
    - Os documentos amarelos devem ser entregues no sexto andar.
    - Quantos andares Carlinhos percorreu neste trajeto?

Esta questão foi a que apresentou maior frequência de respostas distintas, provavelmente em função da quantidade de tranformações e esquemas que os sujeitos precisariam ordenar. Entretanto, em nenhum caso apresentarm justificativa além de comentar que foram contando os andares.

- 4 alunos responderam 29 andares (representando 16,7% do total);
- 5 alunos responderam corretamente 28 andares (representando 20,8% do total);
- 3 alunos responderam 19 andares (representando 12,5% do total);
- 4 alunos responderam 22 andares (representando 16,7% do total);
- 1 aluno respondeu 12 andares (representando 4,2% do total);
- o restante dos alunos deixou o item em branco (representando 29,1% do total).

d) Após esse serviço, Carlinhos foi até o terceiro andar. Partindo daí, recebeu um envelope que deveria ser entregue com urgência ao presidente da empresa que trabalha no oitavo andar. Quantos andares ele percorreu?

Esta questão também gerou alta frequência de repostas distintas, embora fosse uma questão mais simples do que a primeira e exigia menos ações e transformações do que o item anterior.

A frequência de respostas esta a seguir relacionada:

- 4 alunos responderam 3 andares (representando 16,7% do total);
- 3 alunos responderam 15 andares (representando 12,5% do total);
- 3 alunos responderam 17 andares (representando 12,5% do total);

- 3 alunos responderam 16 andares (representando 12,5% do total);
- 4 alunos responderam 8 andares (representando 16,7% do total);
- o restante dos alunos deixou a questão em branco (representando 29,1% do total).

A única resposta com justificativa foi 17 andares. Acreditamos que o sujeito pensou o seguinte: 6+3+8=17 (6 é o andar de onde Carlinhos partiu, 3 corresponde ao andar para onde se deslocou e 8 corresponde o segundo deslocamento de Carlinhos).

Na realidade o conflito podera ter sido causado em função da formulação de nossa pergunta, qundo colocamos " a partir dai" no enunciado.

e) Para ir embora, Carlinhos vai de carona com Marcelo. Carlinhos tem que encontrar Marcelo no primeiro andar do subsolo e depois seguir para o penúltimo andar do subsolo, onde fica o estacionamento. Quantos andares Marcelo e Carlinhos andaram para sair do π-tower?

A mesma ambiguidade causada no item anterior pode ter sido causada nesta questão também.

- 3 alunos responderam 15 andares, referindo-se a quantidade de andares que carlinhos percorreu sozinho (representando 12,5% do total);
- Apenas 1 aluno respondeus 6 andares, referindo-se quantidade de andares que Carlinhos e Marcelo andaram juntos no elevador (representando 4,2% do total);
- 1 aluno respondeu 10 andares, sem justificar (representando 4,2% do total);
- 6 alunos responderam 16 andares, sem justificar (representando 25% do total);
- 5 alunos responderam 7 andraes, sem justificar. As resposta que não apresetarm justificativa, impossibiitaram nosssa interpretação (representando 20,8% do total);
- o restante dos alunos deixou a questão em branco (representando 33,3% do total).

Atividade 5 - Plano cartesiano

Este plano representa o bairro onde mora Maria, uma personagem criada para esta atividade. Maria tem uma mania bastante peculiar: contar os seus passos. A atividade narra algumas atividades executadas por Maria ao longo do dia. Nesta atividade os alunos deverão ajudá-la na tarefa de contar os seus passos. Para tanto utilizarão operações com números inteiros. Segue a descrição desta atividade:

FIGURA 22 – Tabuleiro da cidade de Maria

Mathemápolis é uma cidade no interior de Pitágoras, onde as pessoas são amigáveis, o clima é agradável e tranqüilo. Nesta cidade temos uma amiga que mora nela e que se chama Maria.

Maria é uma menina simpática e que gosta de conversar e tem uma mania muito engraçada: Adora contar passos! Conta todos! Conta quanto da cozinha até o banheiro, da sala até o quarto, da sua casa até a da sua amiga Luiza. E, no final do dia, soma todos os seus passos.

Uma mania muito engraçada!

Pois bem, vamos ajudá-la nesta tarefa, contando os passos em cada trajeto.

Qual a quantidade de passos que Maria caminha:

(Obs 1: Como Maria respeita o trânsito, anda sempre pela calçada;)

(Obs 2: Vamos contar a menor quantidade de passos dados;)

a) Da sua casa até o centro da praça:__________ passos;

Os resultados estão a seguir relacionados:

- 13 alunos indicaram corretamente 1000 passos (representando 54,2% do total);

Provavelmente, por coordenarem bem o esquema de contar podem ter suprimido a sua justificativa.

- 2 alunos responderam 600, sem qualquer justificativa (representando 8,3% do total);

Acreditamos que isto tenha ocorrido pelo fato de que os alunos contaram sobre o "eixo x".

- 4 alunos indicaram 100 passos (representando 16,7% do total);

Não é possível avaliar se é apenas um erro de escrita (gostariam de ter escrito 1000 e confundiram-se) ou se realmente tiveram dificuldade na solução;

- 5 alunos deixaram em branco (representando 20,8% do total);

b) Do centro da praça até a escola:__________ passos;

- 15 alunos responderam o item corretamente, porém sem justificativa (representando 62,5% do total);
- 4 alunos responderam 600 passos, entretanto, não podemos atribuir a mesma explicação do item anterior pois mesmo andando 600 passos a praça e a escola ficariam distantes (representando 16,7% do total);
- 4 alunos deixaram o item em branco (representando 20,8% do total);

c) Da sua casa até a escola:__________ passos;

Nos surpreendemos positivamente pois metade dos alunos acertou este item (12 alunos) onde exigia maior coordenação de esquemas para a contagem.

- 2 alunos indicaram 2100 passos, provavelmente confundindo-se no inicio ou no final da contagem ou até mesmo pulando alguma casa (representando 8,4% do total)
- 1 aluno respondeu 2400 passos, entretanto sem justificativa dificultando a nossa análise (representando 4,2% do total);
- 9 alunos deixaram o item em branco (representando 37,5% do total);

d) Então, podemos dizer que a distância da casa de Maria até a escola é o triplo da distância

Este item exigia uma operação do campo multiplicativo e todos os alunos que responderam (19 no total, representando 79,2%) fizeram corretamente dizendo que não se tratava do triplo da distância e sim do dobro da mesma. O restante dos alunos deixou o item em branco.

e) Do centro da praça ao museu:__________ passos;

- 13 alunos responderam corretamente 700 passos (representando 54,2% do total);
- Houve a frequência da resposta 900 passos (2 respostas), 800 passos (2 respostas) e 400 passos (1 resposta). Os outros alunos deixaram o item em branco. A ausência da justificativa impossibilitou maiores interpretações.

f) Do clube ao shopping:__________ passos;

Nesta questão houve uma frequência alta de respostas distintas o que nos chamou bastante atenção uma vez que a resposta era 300 passos e acreditávamos que as os estudantes não teriam dificuldade em contar, por se tratar de um trajeto pequeno.

As respostas estão a seguir relacionadas:

- 5 alunos responderam corretamente 300 passos (representando 20,8% do total);
- 4 alunos responderam -300 passos (representando 16,7% do total), muito provavelmente porque o clube e o shopping estavam localizados no 3° quadrante e os valores eram negativos; O aluno não se dá conta do significado físico da quantidade, pois não sabe que um número negativo não pode representar quantidade de passos;
- 5 alunos responderam 400 passos (representando 20,8% do total);
- 2 alunos responderam 500 passos (representando 8,4% do total);
- 1 aluno respondeu 100 passos (representando 4,2% do total);
- 2 alunos responderam 1200 passos (representando 8,4% do total);
- O restante deixou a resposta em branco (representando 20,7% do total).

g) A quantos passos o Shopping está da sorveteria? __________ passos;

- À medida que o final da atividade ia chegando, a freqüência de respostas em branco aumentou. Não podemos saber ao certo se faltou tempo, ou se os alunos não se interessaram pela atividade ou se encontraram dificuldade em resolver o item. 10 alunos deixaram o item em branco (representando 41,7% do total).
- Apenas 6 alunos responderam corretamente indicando 800 passos (representando 25% do total);

- 5 alunos responderam 600 passos (representando 20,8% do total);
- 3 alunos responderam 700 passos (representando 12,5% do total);

Em nenhum dos casos os alunos apresentaram as justificativas que desse alguma pista a respeito de seu pensamento;

h) Da sorveteria até o centro da praça:__________ passos;

Neste item houve somente 3 respostas distintas, a saber:

- 11 alunos responderam 400 passos (representando 45,8% do total);
- 5 alunos responderam 300 passos (representando 20,8% do total);
- 1 aluno respondeu 500 passos (representando 4,2% do total).

Não acreditávamos que os alunos errariam por se tratar de uma contagem relativamente pequena. Uma vez que o erro ocorreu na faixa de 100 unidades para mais ou para menos, acreditamos que eles tenham se equivocado na contagem, contando quando estavam parados ou contando a mais no final.

i) Para Maria ir do clube até a sua casa, essa distância é de __________ passos;

Uma vez que os alunos precisavam trocar de "quadrante" para a contagem e fazer um "desvio" para chegar à casa de Maria a partir do clube, podemos considerar este item um pouco mais difícil que os outros. As repostas estão a seguir relacionadas:

- Apenas 4 alunos responderam corretamente 700 passos (representando 16,7% do total);
- 2 alunos responderam 500 passos (representando 8,4% do total);
- 1 aluno respondeu 1700 passos (representando 4,2% do total);
- 4 alunos responderam 1100 passos (representando 16,7% do total);
- 4 alunos responderam -600 passos, provavelmente porque consideraram o sentido de deslocamento de cima para baixo e, por este motivo devem ter associado o sinal negativo a isto (representando 16,7% do total);
- 1 aluno respondeu 400 passos (representando 4,2% do total);

- Os outros alunos deixaram este item em branco (representando 33.1% do total);

j) Quantos passos Maria faz no seguinte trajeto: Do shopping até a sorveteria, da sorveteria até a praça e da praça até o museu? __________ passos.

Na realidade esta questão retomava as outras, pois se tratava da soma de itens que já haviam sido resolvidos. Os alunos tinham a possibilidade de refazer a contagem, que seria dificultada em função da quantidade de esquemas que teriam que desenvolver, outros se basearam em suas respostas anteriores, mas como erraram em outros itens, acabaram por errar o último também. A freqüência de resultados está a seguir relacionada:

- Apenas 6 alunos responderam corretamente, respondendo 1900 passos (representando 25% do total);
- 2 alunos responderam 1700 passos (representando 8,3% do total);
- 2 alunos responderam 1800 passos (representando 8,3% do total);
- 4 alunos responderam 1300 passos (representando 16,7% do total);
- 10 alunos deixaram o item em branco, muito provavelmente em função do tempo (representando 41,7% do total).

Atividade 6 – Temperaturas

Nesta atividade os alunos utilizarão um globo escolar para localizar os países e então com base em uma tabela que fornece a temperatura máxima e mínima, calcular a temperatura média em cada um desses locais. Além dos países localizáveis no globo, também foram fornecidos os dados para que eles pudessem calcular a temperatura média na lua e em Marte.

Esta atividade exigia dos alunos operações com números decimais positivos e negativos, fazendo parte tanto o campo aditivo como do campo multiplicativo.

Ao analisar os resultados, verificamos que apenas quatro alunos completaram a tabela. Em todas elas verificamos dificuldades em somar números com sinais opostos. Os alunos somaram as quantidades como se as mesmas não tivessem um sinal atribuído a elas. Por exemplo:

$$-8+1,5= 9,5$$

Apresentaram também problemas com relação a uma divisão não exata. Por exemplo:

$$(13+26)/2=19$$

Lembramos que esta atividade apresenta uma dificuldade maior e, no nosso entendimento faz parte de uma classe mais rebuscada dentro do campo aditivo e multiplicativo de acordo com a classificação colocada por Vergnaud (p. 30).

Atividade 7 – Jogo do zoológico

A atividade do zoológico não foi aplicada para os alunos da sexta-série.

5.2.2 Análise do material da sétima série

Atividade 1-Nível do mar

1) A que distância está o container com relação ao nível do mar?

Analisando as respostas colocadas pelos alunos, 12 alunos, dos 28 que foram analisados, encontram a resposta de $-550m$ (cerca de 43% do total). A justificativa foi que somente somaram o nível em que se encontrava o container com o nível do mar, que consideraram como sendo o "zero", ou seja, efetuaram a operação $-550 - 0 = -550$.

Diferentemente da dificuldade encontrada por Megid (2001), conforme relatado no capítulo 2 deste trabalho, a maioria dos alunos já concebe o zero como sendo um valor relativo na "reta" estabelecida pelo nível do mar.

Embora a resposta esteja correta, verificamos que há certa confusão com relação ao sentido físico da grandeza distância, uma vez que os alunos consideraram plausível uma distância menor do que zero o que no mundo real não seria possível.

Alguns registros dos alunos merecem maior atenção:

Aluno A: "A atividade foi legal porque foi fácil. Não utilizamos o material".

É possível que este aluno já esteja em um estágio de desenvolvimento um pouco mais avançado, uma vez que não precisa mais do recurso do material manipulativo para realizar a atividade. Conforme já havíamos discutido, o recurso manipulativo poderá auxiliar, mas espera-se que, a partir de um determinado momento os alunos já tenham construído essas relações e o material manipulativo deixe de ser utilizado.

Aluno B: "É menos 550 metros pois podemos enxergar no painel"

Neste caso, diferentemente do anterior, o aluno apoiou-se no recurso visual-manipulativo para construir a sua resposta e possivelmente a encontrou através de uma soma, como a maioria dos colegas.

Aluno C: "Tinha que somar os metros de um lugar com o outro"

Outro ponto a considerar é que alguns alunos encontraram dificuldade na própria concepção do nosso material, o que certamente influenciou nas suas respostas. Carraher (1983) explica que este é um fator de controle e que este vai sendo aprimorado na medida em que realizamos novas pesquisas.

Aluno D: “Consideramos o convés -100 porque não estava escrito.”

As outras respostas que surgiram foram $50m, -50m\ e\ -300m$. Entretanto, não apresentaram cálculo ou qualquer outro tipo de justificativa, dificultando a análise e conclusão sobre um possível raciocínio elaborado pelo sujeito. Todavia, esta é uma dificuldade apontada por Delval (2002) na utilização do método de pesquisa que nos apoiamos. Uma vez que queremos verificar como o sujeito pensa e que esquemas de ação são postos em prática para a solução dos problemas, torna-se estéril as respostas que não apresentam justificativas e/ ou desenvolvimento, pois não temos subsídios para afirmar nada a respeito do pensamento do individuo que está sendo analisado.

2) Que distância falta para que o submarino chegue até o container?

As respostas encontradas pelos alunos com a s respectivas justificativas estão a seguir relacionadas:

- 13 alunos responderam corretamente 250 metros, argumentando que se a cota de um é 550 metros e do outro é 300 metros então a distância entre eles é 250 metros (representando 46,4% do total);
- 4 alunos responderam -250 metros, possivelmente referindo-se estar abaixo do nível do mar. Não tem claro de que uma distância precisa ser positiva, embora o valor em modulo esteja correto (representando 14,3% do total);
- 3 alunos responderam -200 metros. Erro ocorrido muito provavelmente em função de nossa representação ambígua (representando 10,7% do total);
- 2 alunos deixaram o item em branco, possivelmente em virtude de alguma dificuldade que não conseguimos identificar a natureza, pois o item não está justificado (representando 7,1% do total);
- O restante dos alunos respondeu 30 metros, mas como não houve justificativa não podemos chegar a uma conclusão precisa (representando 21,5% do total).

3) Qual a distância da torre de controle do navio com relação ao convés do mesmo?

- Apenas 6 alunos responderam corretamente indicando 170 metros;

- 3 alunos indicaram como resposta 150 metros em virtude de terem considerado o convés na cota igual a 100 metros ao invés de 80 metros;
- 6 alunos responderam 250 metros. Acreditamos que tenham respondido isso pois consideraram a distância da torre de controle ao nível do mar;
- Houve 2 ocorrências da resposta 50 metros e 4 respostas indicando 30 metros. Como não apresentaram justificativa, não podemos chegar a nenhuma conclusão;
- 2 alunos deixaram item em branco;

4) Qual a altura do convés do navio com relação ao nível do mar?

- 9 alunos indicaram a resposta correta (80m);
- 12 alunos consideraram a resposta igual a 100 metros, muito possivelmente em função de nossa representação ambígua. Entretanto alguns alunos escreveram: “Vamos considerar o convés em 100 metros, portanto a resposta estaria correta e o raciocínio, coerente.
- 1 aluno apresentou a resposta 150 metros e 4 alunos apresentaram a resposta 50 metros sem qualquer justificativa, impossibilitando alguma conclusão.
- 2 alunos deixaram o item em branco;

5) Supondo que o guindaste esteja no convés do navio e que contenha três saídas de cabo de aço, posso dizer que 1650 metros de cabo das três saídas seriam suficientes para chegar ao container? Caso contrário, qual seria a quantidade mínima de cabo? (importante: as três saídas tem cabos de aço do mesmo tamanho)

- A grande maioria dos alunos errou a questão. 19 alunos responderam que 1650 metros de cabo seriam suficientes, provavelmente fazendo o raciocínio (3 vezes 550=1650) e esquecendo-se da distância referente ao convés. Além disso, é um problema onde o campo multiplicativo está envolvido o que pode ter provocado certa dificuldade dos alunos;

- Apenas 2 alunos responderam que não seria suficiente, mas não houve qualquer justificativa;
- 7 alunos deixaram a questão em branco.

6) A que distância o submarino está da torre de controle do navio?

- 15 alunos responderam corretamente, indicando 550 metros como resposta correta;
- 7 alunos responderam 60 metros, mas não apresentaram justificativas. Não temos sequer hipóteses do que podem ter pensado neste caso.
- 6 alunos deixaram a questão em branco.

7) Qual a distância do submarino com relação ao guindaste?

Com relação a esta questão houve algumas divergências:

- Apenas 8 alunos indicaram a resposta correta: 380 metros, considerando 300 metros + 80 metros;
- 2 alunos consideraram a resposta como sendo 550 metros, possivelmente em função de terem considerado a distância do submarino até a torre de controle do navio;
- 3 alunos responderam 400 metros justificando que consideraram o guindaste na altura 100 metros. Novamente chamamos a atenção pra o fato de nossa representação estar ambígua. É preciso revisar esta questão para uma próxima aplicação. Percebemos a importância de informações claras e precisas, sobretudo no ensino de matemática.
- 1 aluno respondeu -450 metros e 6 alunos responderam -45 metros. Não temos hipóteses sobre o processo de pensamento para a construção deste esquema.
- O restante dos alunos deixou o item em branco.

Analise da atividade 2 – quadrado mágico

Nessa atividade os alunos dispunham de um quadrado com três linhas e três colunas e dos números naturais de 1 a 9 e inteiros negativos de -1 até -9. O objetivo era utilizar nove das 18 fichas disponíveis de forma que a soma de todas as linhas e todas as colunas do quadrado dessem zero. Abaixo, apresentamos os resultados obtidos e breves comentários a respeito.

A aluna VS apresentou a seguinte resposta:

-7	-1	8
-2	7	-5
9	-6	-3

A aluna SU apresentou a seguinte resposta:

-3	4	-1
-2	-5	7
5	1	-6

O aluno RB apresentou uma terceira maneira de resolver o problema:

-1	4	-3
-6	1	5
7	-5	-2

Ainda, foi encontrada uma quarta solução pelo estudante GM:

7	-5	-2
-8	2	6
1	3	-4

O aluno CP encontrou a seguinte combinação:

7	2	-9
-6	5	1
-1	-7	8

Por sua vez, a aluna GM, escreveu:

7	-6	-1
-3	5	-2
-4	1	3

Verificamos que estas soluções estão corretas, entretanto não apresentam os cálculos justificando as suas escolhas. Vergnaud (1991) comenta que há muito de implícito nos esquemas construídos pelos alunos. Quando um esquema já está interiorizado é possível que o aluno não explicite o seu raciocínio, seja através da linguagem oral (vai falando enquanto vai resolvendo o problema), ou mesmo deixando de escrever, pois não acha necessário expressar a justificativa já que tem certeza das escolhas tomadas.

Verificamos ainda que entre as soluções apresentadas por RB e SU há diferença somente na posição das fichas, o que pode evidenciar que se dão conta da propriedade comutativa nas operações com inteiros, ou seja: (-6) + (+7)=1 é a mesma coisa que: (+7)+(-6)=1. Talvez a presença de dois tabuleiros e de dois conjuntos de fichas pode ter facilitado esta construção e visualização, evidenciando um ponto positivo na utilização do material manipulativo.

Um terceiro comentário a respeito das soluções encontradas pelos alunos reside no fato de que para o mesmo problema os alunos encontraram diversas soluções, o que evidencia o desencadeamento de uma série de raciocínios sobre o que foi proposto e que houve diversas tentativas de formação de esquemas que talvez fossem desconstruídos antes mesmo de serem finalizados, pois estariam conduzindo a um a resposta que não era nula. Chamamos a atenção para o fato de que essa desconstrução para posterior reconstrução e acomodação de novas estratégias é que promove a construção de conhecimentos.

Os alunos LA e DU apresentaram uma justificativa com mais de uma representação, preenchendo o quadrado mágico e efetuando o algoritmo corretamente. Veja a solução deles abaixo:

3	4	-7
-8	2	6
5	-6	1

E no final o aluno ainda escreve: “Esta não é a única solução!”, evidenciando que conseguiria, se tivesse mais tempo para realizar a atividade, encontrar combinações diferentes, utilizando esses números cuja soma daria zero.

A aluna LF encontrou uma solução idêntica ao do colega VS, mas incluiu o seguinte comentário: “Somamos todos os lados. Foi muito difícil porque nada dava!” Verificamos que há a formação de diversos esquemas por parte do sujeito até que haja uma formulação coerente: soma zero. Como pesquisadores enxergamos isso de maneira positiva pois significa que a aluna se deparou com várias situações do campo aditivo , construiu a solução e verificou que dava um resultado diferente de zero, desconstruindo o seu esquema de resolução e partindo para outra tentativa.

A aluna BB encontrou a seguinte configuração para o quadrado mágico:

-7	-1	-8
-2	-7	-5
9	-6	-3

E completa a solução com a seguinte frase: “Fomos somando os lados até achar uma combinação certa.” Verificamos que com exceção da primeira coluna e da terceira linha da tabela, os outros resultados não estão de acordo, uma vez que a soma dessas linhas e colunas é diferente de zero. Além disso, ela utilizou o “-7” duas vezes, o que era proibido, segundo as regras do jogo. Essa aluna ainda confunde–se ao operar no conjunto os números inteiros.

O estudante KM encontrou a seguinte combinação:

5	2	-7
3	-9	6
-8	7	1

Além de explicitar todas as suas contas o aluno ainda explicou com as suas palavras as regras do jogo: “No quadrado mágico o objetivo foi montar contas que o final iria dar zero e os números usados poderia ser 1 a 9 e de -1 a -9”.

Observando de forma geral as soluções dadas pelos alunos, podemos verificar que houve diversidade na formação de soluções e alguns alunos utilizaram mais de um modo de representação de suas respostas. Verificamos que houve poucas duvidas e equívocos com relação às operações com os números positivos e negativos neta atividade.

Atividade 3 – saldo de gols

A terceira atividade consistia em responder seis perguntas levando em consideração a tabela de classificação do Campeonato Brasileiro de um determinado ano. Abaixo, apresentamos cada uma das perguntas e a respectiva análise.

1) Qual a diferença de gols marcados e o décimo quarto colocado na tabela?

Dividimos as respostas em categorias:

- Resposta correta com a respectiva justificativa (algoritmo do cálculo):

14 dos 28 alunos (50% do total) não apresentaram dificuldade na resolução desta questão, apresentando o algoritmo corretamente, uma vez que se tratava de subtração de números naturais. Este entra em uma classe de problemas relativamente simples, com somente uma transformação, segundo a classificação de relações aditivas de base proposta por Vergnaud, conforme explicitamos no capítulo dois, seção da Teoria do Campo Conceituais.

- Resposta correta sem justificativa alguma:

7 dos 28 estudantes (25% do total) expressaram a resposta correta sem qualquer justificativa. Embora a justificativa fosse importante para verificarmos o raciocínio dos estudantes,

podemos considerar a resposta aceitável já que se tratava de uma questão com números naturais relativamente pequenos e que é um tipo de problema explorado desde as séries iniciais. Vergnaud coloca que alguns esquemas de ação se tornam implícitos se são usados frequentemente.

- Respostas em branco:

2 dos 28 alunos deixaram a resposta em branco, representando, aproximadamente 7¨% do total dos sujeitos pesquisados. Consideramos este número relativamente baixo com relação a todas as respostas que consideramos, uma vez que 75% dos alunos apresentaram operar satisfatoriamente nesta questão.

Apenas dois tipos de resposta chamaram a nossa atenção, que comentamos a seguir.

Os alunos AB, PC, JO e SU escreveram:

75-45=30 pontos. O algoritmo está correto, entretanto os alunos confundiram-se e consideraram a quantidade de pontos de cada time (coluna P da tabela) e não a quantidade de gols que marcaram, conforme havíamos perguntado. Tirando a questão de falta de atenção, a operação com os inteiros, que é o que estamos efetivamente verificando, está correta.

Apenas a resposta apresentada por CP demonstrou falta de domínio da operação com inteiros. Vejamos a sua resposta: 75-45=17.

2) Quem sofreu mais gols? Figueirense ou Náutico?

Para responder a esta questão os alunos precisavam somente verificar na coluna GC (gols contra) o time que tinha sofrido mais gols. Não era necessário, no entanto, apresentar cálculos.

11 dos 28 alunos (39,2% do total consultado) responderam corretamente a pergunta, seguida da justificativa "era só olhar na tabela e ver que o Fluminense sofreu um gol a mais que o Inter". Verificamos que os alunos coordenaram bem as ações de consultar na tabela e estabeleceram corretamente a relação de ordem (x maior que y).

Aproximadamente 36% (10 estudantes dos 28 consultados) apresentaram a resposta correta sem qualquer justificativa. Nossa hipótese inicial era que a maioria dos alunos responderia à questão sem justificativa, apenas consultando a tabela.

Dois alunos (aproximadamente 7% do total) deixaram este item em branco. Coincidentemente são os mesmos alunos que já haviam deixado o item anterior em branco, talvez pela atividade não chamar a atenção destes, o que lamentamos.

Três alunos (10,7% do total) indicaram a quantidade de gols sofridos por cada um dos times sem, contudo, responder a questão. Isto pode evidenciar que os alunos não entenderam a pergunta ou não conseguem estabelecer a relação de ordem nos inteiros.

A resposta da estudante SU nos chamou a atenção. Ela escreveu: Foi o Fluminense e ele sofreu “-48 gols”. Na realidade um time só pode sofre uma quantidade positiva de gols. Acreditamos que a aluna indica “ter sofrido gols” pelo sinal negativo, dando este significado ao número.

Um aluno ainda escreveu: 47-48=-1, operando corretamente em Z.

3) Quem tem o melhor saldo de gols? Figueirense ou Náutico?

Considerando que o saldo de gols do Náutico é -10 e o saldo de gols do Figueirense é -24, esperávamos que os alunos se dessem conta de que como o número -24 está mais à esquerda na reta numérica e por isso é menor do que o número -10. Entretanto verificamos que houve certa confusão por parte dos nossos alunos.

A aluna VS chegou à seguinte conclusão: “Figueirense, pois ele tem -24 e o Náutico tem -10!” Verificamos que a aluna tem dificuldade em decidir quando um número negativo é maior que o outro, assim como alguns de seus colegas. Vergnaud sinaliza que dentro de um mesmo campo conceitual há vários conceitos estão envolvidos e os problemas explorados podem ter diferentes graus de dificuldade como é o caso deste item. Talvez a presença de uma reta numérica neste material facilitasse a resolução dos alunos. É uma sugestão para uma próxima aplicação desta seqüência didática.

Apenas 32% dos alunos (9 dos 28 consultados) apresentaram a resposta correta com a devida justificativa, evidenciando que reconhecem quando um número negativo é maior ou menor que outro. Uma das respostas que nos chamou a atenção foi: “Náutico porque tem o saldo menos negativo”. Pela tentativa de explicação do aluno, verificamos que o aluno reconhece que quanto maior o módulo de um número negativo, menor ele é.

Cerca de 18% dos alunos (5 alunos dos 28 pesquisados) apresentaram a resposta correta sem justificativa, o que não nos leva a conclusões muito consistentes a cerca do seu pensamento, já que a resposta pode ter sido dada por acaso.

Sete alunos (25% do total) apresentaram a resposta errada, argumentando que -24 é maior que -10 e por isso o saldo de gols do Figueirense era maior, evidenciando dificuldade em perceber que quanto mais à esquerda do zero um número está menor ele é. Acreditamos que ordenar números negativos é uma dificuldade apresentada por alunos mais velhos do que a faixa etária dos nossos sujeitos.

Neste tópico houve alunos que deixaram o item em branco.

4) Quantos gols marcaram os quatro primeiros colocados juntos?

Este é um problema do campo aditivo que exige dos alunos três transformações e é uma adição com transporte, com grau intermediário de dificuldade na nossa concepção. (66+59+59+55=239).

Analisando as respostas para esse item verificamos:

Dez alunos (35,1% do total) apresentaram a reposta correta com o respectivo algoritmo de adição, com as quatro parcelas, posicionando uma abaixo da outra.

Duas respostas chamaram a nossa atenção pois evidenciaram as transformações sofridas pelas quantidades ao longo do tempo, evidenciando um tipo de relação aditiva de base colocada por Vergnaud, quando os alunos escreveram:

59+59=118

118+55=173

173+66=239.

Oito alunos (28,6% do total) indicaram a resposta correta sem qualquer justificativa, o que no nosso entendimento não foi adequado para o caso deste item pois era preciso efetuar várias somas com transporte que dificilmente seriam resolvidas sem algum tipo de representação.

Duas alunas indicaram a quantidade de saldo de gols dos quatro times (30, 24, 25 e 20). Tal fato pode ter ocorrido por falta de atenção das alunas ou por falha no material uma vez que o mesmo não possuía legenda. Preferimos apostar no segundo caso já que a maioria dos alunos respondeu à questão satisfatoriamente.

Dois alunos apresentaram erro de cálculo propriamente dito, evidenciando dificuldades em problemas do campo aditivo deste tipo.

E, finalizando a análise deste item, um aluno utilizou estratégia do campo multiplicativo, ou seja, utilizou multiplicação juntamente com adição para a resolução do exercício.

5) Qual o saldo de gols dos quatro últimos colocados no campeonato?

Apenas três alunos indicaram a resposta correta com a construção do algoritmo (resposta igual a -92), evidenciando operar corretamente com números inteiros.

Quatro alunos apresentaram somente a resposta correta, sem qualquer justificativa ou construção do cálculo, o que considerarmos inadequado por se tratar de soma de quatro parcelas negativas. (transformação de estados e transporte).

Nos surpreendemos na medida em que dez alunos somente listaram o saldo de gols de cada um dos quatro times, sem apresentar a soma respectiva. Talvez a questão devesse ser formulada de outra forma para evitar ambigüidades. A importância da linguagem na formulação de questões para o sujeito foi apontada por Carraher (1983), como sendo um obstáculo a ser superado na utilização do Método Clínico.

Cinco alunos (VS, LF, BR, GS e DM) apresentaram problemas ao operar com soma de quantidades negativas, uma vez que para ele a resposta ao problema era +92.

Cinco alunos deixaram o item em branco, possivelmente por falta de tempo pois os alunos tinham tempo estipulado para trocar de atividade uma vez que nosso objetivo era que todos os sujeitos passassem por todas as atividades para que experimentassem várias situações de um mesmo conceito e suas propriedades. Essa importância foi exposta por nós no capítulo 2, conforme apontamentos de Vergnaud.

6) Se o Grêmio tivesse sua situação mudada para 22 vitórias, 10 empates, 6 derrotas, o time tricolor passaria para a primeira colocação?

Essa questão requer do estudante a mobilização de vários conhecimentos e esquemas de ação, estando enquadrado tanto no campo aditivo como no campo multiplicativo, uma vez que precisa de somas e multiplicações para ser resolvido. Além disso, o aluno precisaria saber que uma vitória no futebol vale três pontos, um empate vale um ponto e uma derrota não vale nenhum ponto e que o primeiro critério para a definição da posição de um time na tabela é a quantidade de pontos e, em outra instância, o saldo de gols.

Apenas três alunos conseguiram coordenar todas essas ações apresentando a resposta da seguinte maneira: 2x22=66, 10x1=10, 66+10=76. E o Grêmio passaria para primeira colocação. Este é um exemplo de problema representativo tanto do campo aditivo como do campo multiplicativo e evidenciou a coordenação de diversos esquemas das ações para sua resolução no raciocínio exposto pelos alunos.

Catorze alunos apenas afirmaram que o Grêmio passaria para a primeira posição, sem oferecer subsídios para que o pesquisador analisasse o processo de encadeamento de suas ações, de forma que temos um parecer inconclusivo a respeito das respostas dessa parcela de alunos, lembrando que nos interessa Quatro alunos escreveram “não conseguimos fazer”. A partir disso verificamos que tiveram dificuldade em estruturar este raciocínio que consideramos de certa forma complexo, pois exige o encadeamento de diversas ações por parte dos sujeitos.

Atividade 4 – elevador

A atividade consistia em um prédio com 17 andares: oito andares acima do solo, oito andares abaixo do solo e o térreo. A situação é contextualizada, tratando-se de um dia de trabalho de um Office-boy chamado Carlinhos dentro deste edifício. O seu trabalho consiste em entregar documentos para algumas pessoas, nos seus devidos andares.

Questões:

Quantos andares tem o prédio onde Carlinhos trabalha?

Quatro dos vinte e oito alunos pesquisados disseram que o prédio possuía 16 andares, pois 8+8 é 16. Possivelmente isso se deve pelo fato dos alunos terem se esquecido de contabilizar o térreo. Acreditamos que, neste caso os alunos não tenham se apoiado no material manipulativo. Se tivessem feito isso, poderiam ter coordenado as ações de contar (movimento de dedos e olhos).

Onze alunos além de terem justificado com os sentidos das setas (para cima, indicando andares acima do solo e para baixo, indicando abaixo do solo) e fazendo a conta 8+8+1=17, ainda desenharam cada andar, como uma espécie de reta real só que na posição vertical.

Chamamos a atenção para a importância das múltiplas representações como já havíamos mencionado anteriormente. Inclusive alguns alunos indicaram o valor zero, ao invés de térreo, demonstrando intima ligação com a representação matemática.

Seis alunos chegaram à conclusão de que o prédio tinha 18 andares. Possivelmente, ao utilizarem como apoio o material disponível devem ter contado duas vezes o mesmo andar, havendo falhas ao coordenar as ações.

a) Carlinhos chega ao π-tower, no andar térreo, no seu trabalho e sobe até o quinto andar para conversar com o seu chefe, pegar alguns documentos e depois segue para o sexto andar no subsolo onde toma café. Quantos andares ele percorreu desde o momento que chegou até a hora do café?

Dezesseis dos vinte e oito alunos consultados (57,1% do total) respondeu a pergunta corretamente. As principais justificativas estão baseadas na respostas da aluna ME, a seguir relacionada:

"São 16 andares. Do térreo até o quinto são cinco andares. Do quinto até o -6 são onze."

Seis alunos apontaram dezoito andares como sendo a resposta certa. Entretanto, nenhum explicou seu processo de raciocínio, dificultando a análise dos sujeitos.

Três alunos encontraram 17 como sendo a quantidade correta de andares, justificando que fizeram a seguinte operação: 17=5+12. Acreditamos que o 5 significa a quantidade de andares do térreo até o quinto andar e o doze a quantidade de andares que foram considerados do quinto até o sexto andar no sub-solo, mas contando com o quinto andar novamente (ao iniciar o segundo esquema de contagem), provocando tal equivoco.

Houve ainda quatro ocorrências da resposta 15 andares. Acreditamos que este erro tenha ocorrido pois os alunos não consideraram o andar térreo na contagem, passando direto de 1 par -1, sem considerá-lo.

Verificamos ainda se os alunos que responderam 15 andares haviam considerado o prédio com 16 andares, evidenciando ligação no raciocínio de desconsiderar o térreo, entretanto isso não ocorreu em nenhum caso.

b) Depois de tomar café, sobe até o oitavo andar para entregar os documentos que pegou com o seu chefe à senhora Arminda, secretaria do vice-presidente. Quantos andares Carlinhos percorreu neste trajeto?

Treze alunos dos 28 consultados (46,4% do total) responderam corretamente a pergunta, apontando como 14 a quantidade de andares percorridos. A principal justificativa foi que para subir do -6 até o +8, anda-se 14 pavimentos e essa conclusão foi possível em função de terem contado, utilizando o material manipulativo disponível.

Sete alunos apontaram 15 como sendo a resposta certa: seis negativos, térreo e oito positivos. Na realidade como Carlinhos estava no sexto do subsolo, os alunos consideraram que para chegar ao térreo ele andou 6 andares, quando na verdade andou somente cinco. Possivelmente os alunos, neste caso, não utilizaram o material manipulativo como apoio para que pudessem contar.

Houve a ocorrência das respostas “9 andares” e “22 andares”. Entretanto, como os alunos não apresentaram justificativa, não podemos chegar a conclusões consistentes.

c) Ao entregar os documentos para senhora Arminda, recebeu uma ligação para comparecer ao segundo andar na secretaria da empresa para buscar mais alguns documentos e entregá-los nos seguintes andares:
Os documentos verdes devem ser entregues no sétimo andar do subsolo;

Os documentos azuis devem ser entregues no quinto andar do subsolo;

Os documentos amarelos devem ser entregues no sexto andar.

Quantos andares Carlinhos percorreu neste trajeto?

Superando as nossas expectativas, 17 dos 28 alunos pesquisados acertaram a resposta desta questão (60,7% do total). Uma vez que essa questão envolvia várias operações sucessivas, acreditávamos que os alunos teriam mais dificuldades, entretanto justificaram passo a passo seu raciocínio, de acordo com o argumento da aluna VS

“28 andares.+6 (8° até o 2° andar), +9 (2° até o -7°), +2 (-7 até -5) e +11 (-5 até +6) =28”

Verificamos a construção de um esquema de raciocínio e a junção deles promoveu a evolução no processo de solução. Podemos verificar também que a representação através do material manipulativo foi essencial para a contagem de cada uma das partes.

Outra solução que nos chamou a atenção foi a do aluno CP, que escreveu:

"São 17 andares: +8-2+11. O aluno não se deu conta de onde deveria começar a contagem (informações contidas no inicio do problema e, além disso, descontou dois andares (-7 até o -5) ao invés de contabilizá-los positivamente na quantidade de andares que foram percorridos.

Dois alunos apresentaram a resposta 19 andares e 4 alunos apresentaram a resposta 13 andares, mas como não apresentaram justificativa alguma, não podemos tirar conclusões a cerca do raciocínio utilizado.

Quatro alunos deixaram a atividade em branco.

d) Após esse serviço, Carlinhos foi até o terceiro andar. Partindo daí, recebeu um envelope que deveria ser entregue com urgência ao presidente da empresa que trabalha no oitavo andar. Quantos andares ele percorreu?

Nossa expectativa nessa questão era de que os alunos respondessem cinco andares, uma vez que já que colocamos a expressão "partindo daí", esperávamos que os alunos fizessem a contagem a partir do terceiro andar. Apenas três alunos interpretaram desta forma.

A maioria (12 alunos dos 28 consultados) respondeu 8 andares, considerando o inicio no 6° andar, ou seja, posição onde Carlinhos se encontrava no final do item c). O que não podemos considerar errado, uma vez que ele realmente se deslocou essas três posições sobre a "reta". Talvez tenha sido um equivoco de nossa parte e possa ser considerada uma melhoria para a próxima aplicação de nossa sequência didática.

Quatro alunos indicaram 4 como a resposta certa e três alunos indicaram treze como sendo a resposta certa. Novamente não deixaram nenhum indício a respeito do seu raciocínio.

e) Para ir embora, Carlinhos vai de carona com Marcelo. Carlinhos tem que encontrar Marcelo no primeiro andar do subsolo e depois seguir para o penúltimo andar do subsolo, onde fica o estacionamento. Quantos andares Marcelo e Carlinhos andaram para sair do π-tower?

Ao analisarmos as respostas, verificamos que a questão ficou ambígua para os alunos. Alguns consideraram a resposta certa como sendo quinze andares pois consideraram tanto os andares onde Carlinhos andou sozinho no elevador como os andares onde estava acompanhado de Marcelo, apresentando a conta 9+6=15.

Outros, consideraram a reposta certa como sendo 6 andares, um vez que a pergunta era "Quantos andares Marcelo E Carlinhos andaram para sair do prédio".

A resposta da aluna VS nos chamou a atenção, pois a mesma deu as duas respostas, explicando o encadeamento de suas idéias em cada caso.

"Carlinhos percorreu nove andares para encontrar Marcelo. Os dois percorreram 6 andares juntos. C=15 e M=6"

Quatro respostas indicaram nove como à resposta correta e quatro indicaram 6 como a resposta correta, evidenciando a ambivalência que havíamos comentado anteriormente, pois alguns se referiram aos andares que Marcelo andou sozinho, antes de encontrar Marcelo e outros deram como resposta a quantidade de andares que Carlinhos andou acompanhado de Marcelo.

Quatro estudantes apontaram 13 como a resposta correta, entretanto sem colocar justificativa alguma.

Neste item houve incidência grande de resposta em branco (nove respostas de um total de 28). Acreditamos que isso se deve pelo fato de ser o ultimo item dessa atividade e como os alunos tinham um tempo determinado, de aproximadamente 15 minutos por atividade, este pode ter sido o principal motivo de não terem respondido.

De forma geral, acreditamos que os alunos tenham coordenado bem suas ações e construíram bons argumentos frente às situações que se apresentaram, mesmo naquelas em que consideramos com duplo sentido.

Aqui verificamos o uso do material manipulativo pelos alunos, quando colocam:

"Eu usei o aparelho que estava disponível" e "eu usei aquele treco", evidenciando que apoiaram a construção de suas soluções no material manipulativo, representando-as de diversas formas.

Atividade 5 – plano cartesiano

Esta atividade consistia em contar os passos dados por Maria ao transitar por alguns locais do bairro onde mora. A representação está assentada em um plano cartesiano graduado de 100 em 100 unidades.

Verificamos que eram necessários diversos conceitos além das operações que gostaríamos de verificar, em consonância com o que coloca Vergnaud, quando afirma que em determinado Campo Conceitual vários conceitos e conhecimentos matemáticos estão envolvidos. No caso desta atividade, a representação de plano cartesiano, bem como a noção de escala, estavam envolvidas e deviam ser familiares aos alunos.

Nesta questão quase que a totalidade dos alunos somente completou as lacunas, sem demonstrar o processo de cálculo, de forma que dificultou a nossa análise. Neste contexto podemos somente criar algumas hipóteses de como os alunos pensaram para resolver aos problemas.

As distâncias que precisavam ser calculadas eram as seguintes:

a) Da sua casa até o centro da praça:__________ passos;

Dezenove dos 28 alunos responderam que eram 1000 passos, coordenando as ações de contagem.

Três alunos responderam 855 passos o que nos soou estranho, uma vez que os valores deveriam ser divisíveis por dez já que de 100 em 100 havia dez divisões de forma que cada espaço valia 10 passos. Logo não entendemos como os alunos chegaram a esta conclusão.

Quatro alunos indicaram 100 passos. Interpretamos isso como um equívoco no momento de escrever somente e não como falta de conhecimento em operar com os números e coordenar com a ação de contagem.

E dois alunos indicaram a resposta como sendo 2400 passos sem qualquer justificativa e por isso não podemos exprimir nossa opinião sobre como pensaram.

b) Do centro da praça até a escola:__________ passos;

Dezoito dos 28 alunos responderam 1000 passos, evidenciando bons esquemas de raciocínio e contagem.

Os outros dez alunos não chegaram a uma resposta correta e não conseguimos explicar o motivo pela qual apresentaram tais resultados pois não escreveram o algoritmo correspondente.

c) Da sua casa até a escola:__________ passos;

Neste item a freqüência de respostas corretas diminuiu (dez alunos acertaram). O restante confundiu-se ao fazer a contagem. Acreditamos que uma coisa que pode ter contribuído é o fato de que a quantidade de coisas a contar era o dobro dos dois primeiros itens.

d) Então, podemos dizer que a distância da casa de Maria até a escola é o triplo da distância do centro da praça até a escola? __________

Este item já entrava no campo multiplicativo uma vez que o aluno precisava usar raciocínio ligado à multiplicação. Verificamos que os alunos que responderam satisfatoriamente aos itens anteriores foram bem sucedidos, verificando que se tratava do dobro de passos e não do triplo como indicava a questão.

e) Do centro da praça ao museu:__________ passos;

Nos surpreendemos com a quantidade de respostas corretas neste item (vinte respostas das 28 que coletamos).

Quatro alunos apresentaram 600 passos, 100 passos a menos do que esperávamos. Talvez o equívoco tenha ocorrido em virtude dos 100 passos para atravessar a rua ou no inicio, na praça.

f) Do clube ao shopping:__________ passos;

Acreditávamos que neste item os alunos se sairiam melhor, uma vez que a quantidade de passos a serem contados era menor. Entretanto, ao analisar os resultados, equivocamo-nos. Apenas 13 alunos acertaram a resposta (300 passos).

10 alunos apontaram 400 passos como a resposta correta. Acreditamos que isso se deva pelo fato de que os alunos não tenham se dado conta de que poderiam ter saído do shopping pela calçada, ao invés de atravessar a rua de primeira. E isso provocava 100 passos a mais. A coordenação de ação da contagem não está errada, entretanto pedíamos no enunciado a menor distância.

As outras quatro respostas não foram justificadas e por isso não chegamos a nenhuma conclusão.

g) A quantos passos o Shopping está da sorveteria? __________ passos;

Dezessete alunos (dos 28 pesquisados) encontraram como resposta 600 passos. Os alunos verificaram que poderiam sair do shopping e, sem atravessar a rua de primeira, poderiam chegar mais rapidamente à sorveteria.

Um aluno contou 800 passos. Acreditamos que os 200 passos a mais na contagem se referem ao fato de que, ao sair do shopping, atravessou a rua e, ao chegar em frente à sorveteria atravessou a rua novamente.

Três alunos encontraram a resposta de 700 passos, confundindo-se na hora de fazer a contagem dos passos, não coordenando as ações.

Seis alunos encontraram 60 passos como resposta. Não podemos saber se foi um equivoco na escrita (quiseram escrever 600 e acabaram escrevendo 60) ou se isso se configura em dificuldade de operar com os números.

h) Da sorveteria até o centro da praça:__________ passos;

Treze alunos responderam corretamente que a resposta era 400 passos. Entretanto uma parcela expressiva de alunos respondeu 300 passos (10 alunos). Acreditamos que o equivoco tenha se dado na chegada da praça ou ao atravessar a rua, quando os alunos não coordenaram as suas ações.

i) Para Maria ir do clube até a sua casa, essa distância é de __________ passos;

Este foi o item em que houve a maior variedade de respostas (freqüência de 9 respostas diferentes). Acreditamos que isso se deve ao fato de que para completar o trajeto solicitado os alunos tinham que se movimentar em três direções distintas e deslocar-se em dois quadrantes distintos, configurando-se em uma situação complexa, quando comparada às outras situações.

j) Quantos passos Maria faz no seguinte trajeto: Do shopping até a sorveteria, da sorveteria até a praça e da praça até o museu? __________ passos.

Apenas três alunos apresentaram a resposta correta. Isso nos surpreendeu negativamente uma vez que bastava aos alunos somar 3 soluções dos itens anteriores e, ao que tudo indica, eles não se deram conta disso. Pela freqüência de respostas distintas (7 respostas distintas) evidenciamos que os alunos tentaram contar novamente, certamente perdendo-se nos cálculos.

Atividade 6 – temperaturas

Nesta atividade os alunos da sétima série tiveram bom rendimento. A maioria completou a tabela apresentando alguns algoritmos de divisão. Os principais apontamentos para discussão estão a seguir relacionados:

- (-8) + (1,5) =-6,5

Os alunos operaram bem com números negativos mas esqueceram de calcular a média dos valores;

- 10+17/2=18,5

Neste caso há um problema ao resolver a expressão, pois os alunos deveria ter efetuado (10+17) /2 e não como foi calculado. No caso, somente o número 17 foi dividido por 2.

- Três alunos responderam somente os itens em que a soma das temperaturas dava maior que zero, evidenciando, de certa forma, receio para trabalhar com negativos;

- Com relação a contas efetuadas pelos alunos chamamos a atenção de cinco cálculos:

  (17+29) /2=24

  (17+29) /2=18

  (13+26) /2=17

  (-8+1,5) /2=3,7

  (10+17) /2=3,5

Com exceção do ultimo os outros não apresentaram justificativas e por isso dificultou nossa análise. Entretanto, acreditamos que o ultimo tenha efetuado subtração ao invés de adição e obteria então – 3,5 como resposta.

Atividade 7 – Jogo do zoológico

Na realidade esta atividade era um jogo e os alunos não tinham que responder perguntas como nas questões anteriores. Em função disso os registros escritos foram bastante limitados. Os principais comentários estão a seguir relacionados:

Muitos dos alunos mencionaram que gostaram desta atividade por se tratar de um jogo e não se uma atividade propriamente dita. Verificamos isto no registro do aluno DM

"Eu gostei desse jogo, pois mistura matemática, animais e competitividade", evidenciando uma das vantagens proporcionadas pelas atividades lúdicas. Assim, se por um lado não podemos analisar as operações com números positivos e negativos, por outro lado verificamos que foram trabalhados aspectos sociais através do jogo: competitividade, reconhecimento do sentido de dívida, ficar devendo, coisa negativa.

Alguns registros dos alunos deixam o indício de que o significado de dívida, ficar devendo, como algo negativo tem algum sentido para os alunos, embora haja problemas quanto à respectiva representação.

"Fulano ficou com 4 negativo, beltrano ficou com 10 negativo (ao invés de escrever -4, -10)"

Lembramos que esta linguagem foi utilizada antigamente pelos matemáticos e percebemos a sua influência até os dias de hoje.

"Beltrano estava com negativo e depois ficou positivo"

Dois alunos comentaram que acharam o jogo um pouco confuso. Acreditamos que isto tenha ocorrido em função da necessidade da álgebra envolvida na atividade. Como já foi discutido anteriormente, sempre há uma dificuldade na ruptura entre a aritmética e a álgebra por parte dos alunos, sendo muitas vezes essa transposição desta dificuldade.

6. CONCLUSÕES PROVISÓRIAS E PERSPECTIVAS

Após a realização deste trabalho e análise das respostas dos alunos é possível responder a nossa questão norteadora. Acreditamos que os materiais manipulativos podem auxiliar no ensino da matemática, sobretudo quando estamos tratando de números positivos e negativos. Neste trabalho apresentamos uma proposta para trabalharmos com uma oficina, com diversas situações distintas, onde os alunos deixaram claro que houve o apoio do material para a solução de diversas questões.

De certa forma houve a desmitificação do que muitos educadores pensam a respeito de materiais manipulativos para o ensino de matemática no que tange a brincadeiras e tumulto em sala de aula, dando lugar a um ambiente onde os alunos puderam questionar, criar hipóteses, analisá-las construindo os próprios saberes. Tiveram a chance de "tentar se explicar” com as próprias palavras, o que dependendo da postura avaliativa apresentada pelo professor torna-se inviável.

Em outros casos, os alunos chegaram à resposta sem utilizar o material manipulativo, evidenciando que já estão em outra fase de maturidade matemática e não necessitam mais destes recursos para a elaboração de seus esquemas. E é exatamente isso que esperamos dos alunos: autonomia para a construção do raciocínio sem a utilização do material manipulativo.

Outro aspecto importante que observamos foi a questão da utilização de materiais de fácil manuseio, o que pode ajudar no momento da construção do pensamento matemático. Foi o caso do quadrado-mágico, por exemplo, que no nosso entendimento foi o que mais permitia ao aluno testar rapidamente suas hipóteses para a formação de esquemas.

Talvez por ter mais afinidade com exatas e nunca ter parado para prestar atenção às questões históricas envolvidas nas coisas, percebi no desenvolvimento deste trabalho como é importante buscar a raiz histórica das coisas e como estas se desenvolvem com o passar do tempo. Esta análise pode nos oferecer subsídios para que se entenda o que vivemos hoje e como a ciência se desenvolve como um todo.

Outro fator que no início me fez ficar um pouco apreensivo em função de suas características, mas que no decorrer do trabalho, se mostrou uma ferramenta poderosa para um professor é o Método Clinico. Uma vez que através dele conseguimos extrair subsídios para verificar como nossos alunos pensam, é possível a partir disso, reciclar prática pedagógica e ajudar os alunos superarem as suas dificuldades em pontos focais. Certamente é preciso treiná-lo muito até que se consiga utilizá-lo da melhor maneira possível. Esta foi uma primeira experiência.

Uma sugestão que surge ao término deste trabalho é a possibilidade de criar esses materiais virtualmente, implantando as melhorias que apontamos ao longo de toda a nossa análise, como uma alternativa além dos materiais manipulativos.

Sobre os materiais manipulativos é importante ressaltar a linguagem utilizada, uma vez que ela foi fonte de dúvidas por diversas vezes ao longo da pesquisa. Ficou evidente de que o que pode parecer óbvio para alguns educandos acaba por se tornar uma barreira intransponível para outros.

Foi interessante observar o desempenho dos alunos de sexta série e verificar que questões curriculares e de conteúdo programático não são tão “engessadas” assim como as tratamos por vezes. Certamente os alunos apresentaram muitos equívocos, mas vale salientar, que conseguiram buscar a compreensão do que estava sendo proposto, às vezes em questões mais complexas, inclusive, mesmo não tendo tido um contato formal com os números negativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DELVAL, Juan. **Introdução à pratica do Método Clínico: descobrindo o pensamento das crianças**. Porto Alegre: Artmed, 2002

FAGUNDES, L. C. **Materiais manipulativos no ensino de matemática a crianças de 7 a 14 anos – período das operações concretas**, 1977. Palestra proferida no Seminário Nacional sobre recursos audiovisuais no ensino de 1° grau. Departamento de Ensino Fundamental – MEC, Brasília, junho 1977

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim da SBEM-SP, n.7,p. 1-7, julho/agosto, 1990.

MARTINI, Grasilela. **Estratégias de trabalho para aprendizagem de operações com números inteiros.** Trabalho de conclusão da graduação. 2010 – Porto alegre. Disponível em http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29143/000775907.pdf?sequence=1 último acesso em 18/11/11

MEGID, Maria Auxiliadora B. A. **Construindo matemática na sala de aula: uma experiência com números relativos.** In: FIORENTINI, Dario e MIORIM, Maria Ângela (orgs.). Por trás da porta que matemática acontece? Campinas, SP: FE/Unicamp – Cempem 2001

MORAIS, Anuar D, de. **Fórmula (-1): Desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem para as operações com números positivos e negativos.** Porto Alegre: UFRGS, 2010. 223 f. Dissertação de mestrado (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós graduação em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre,2010

MOREIRA, M. A. A **Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área.** Investigações em Ensino de Ciências. Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf Ultimo acesso em 18/11/11.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida; BORBA, Marcelo Carvalho (orgs.). **Educação Matemática: Pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. P 213-231.

SÁ, P. F.; ANJOS, L. J. S. **Números negativos: Uma Trajetória Histórica.** 2011. Trabalho apresentado no IX Seminário Nacional de História da Matemática, Aracajú, 2011.

VERGNAUG, G. **A teoria dos campos conceituais.** In Recherches en didactique des mathématiques, vol 10/23, 133-170, Grenoble, La Pensée Sauvage editions, 1991

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas.** Análise psicológica, v. 1, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. **A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos,** 1996. Palestra proferida no Seminário Campos Conceituais na construção do conhecimento transcrita por Marta Dagorde, Porto Alegre, 1996

VERGNAUD, G. **A formação de competências profissionais,** 1996. Palestra proferida no Seminário Campos Conceituais na construção do conhecimento transcrita por Marta Dagorde, Porto Alegre, 1996