

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**UM ESTUDO DA OTIMIZAÇÃO DA LAMINAÇÃO DE ESTRUTURAS DE MATERIAL  
COMPOSTO SUJEITAS A EFEITOS AEROELÁSTICOS**

por

Guilherme Varella

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Dezembro de 2011.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

**UM ESTUDO DA OTIMIZAÇÃO DA LAMINAÇÃO DE ESTRUTURAS DE MATERIAL  
COMPOSTO SUJEITAS A EFEITOS AEROELÁSTICOS**

por

Guilherme Varella

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS REQUISITOS  
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Arnaldo Ruben Gonzalez  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Ph.D. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Prof. Ph.D. Rogério José Marczak

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Porto Alegre, 05 de Dezembro de 2011.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente ao meu orientador, professor Jun Sérgio Ono Fonseca por ter despertado a curiosidade ao estudo de materiais compostos e por estar sempre disponível e pronto a ensinar.

Ao doutorando Daniel de Leon por toda a ajuda fundamental ao desenvolvimento desse trabalho, sem a qual não teria sido possível sua realização. Bem como pelas dicas e sugestões que só vieram a enriquecer o trabalho.

À minha namorada Denise por ter me aturado durante a realização desse trabalho, vivenciando e incentivando durante todas as etapas desde o começo. E por tornar minha vida cada dia mais feliz.

À minha mãe Edite e a meu pai Darcy que me deram estrutura para poder entrar na universidade e sempre me encorajaram a alcançar caminhos cada vez mais distantes.

Varella, G. **Um estudo da otimização da laminação de estruturas de material composto sujeitas a efeitos aeroelásticos**. 2011. 18. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

## RESUMO

Materiais compostos têm um uso bastante amplo no campo aeronáutico devido a sua alta resistência e baixo peso. Entretanto apesar dessa leveza ser uma característica positiva, ela aumenta a atenção que deve ser dada à avaliação da vibração estrutural. Nesse trabalho é realizada a otimização da orientação das fibras de um material composto com o intuito de elevar a velocidade necessária para que o *flutter* ocorra. Isso é feito através da maximização das frequências naturais relacionadas aos modos de vibração envolvidas nesse fenômeno. Esse problema é discretizado através de uma placa plana engastada em uma das extremidades, imersa em um escoamento paralelo à sua superfície. O método dos elementos finitos é empregado para a determinação da matriz de rigidez e matriz de massa da estrutura, que são utilizadas para a resolução do problema modal e consequente obtenção das frequências naturais e modos de vibração associados à estrutura. De posse desses resultados, parte-se para a análise aeroelástica. O programa ZAERO é empregado para o cálculo da velocidade de *flutter* e determinação do modo de vibração responsável por tal efeito. A sensibilidade da frequência natural associada ao *flutter* em relação a variável de projeto é determinada analiticamente. Aplica-se a programação linear sequencial para a otimização, sendo o critério de identificação de modo utilizado para guiar esse processo. As configurações de lâmina obtidas dessa maneira apresentaram um aumento bastante significativo na velocidade de *flutter*, tendo mais do que dobrado na maioria dos casos. Isso comprova a validade da metodologia empregada. Também é avaliado o desempenho do critério de identificação de modo frente ao problema de autovalores repetidos, que mostra bons resultados, obtendo reduções de cerca de 20-25% no número de iterações necessárias para a convergência da resposta.

**PALAVRAS-CHAVE:** Otimização Estrutural, Materiais Compostos Laminados, Aeroelasticidade.

Varella, G. **Study of the optimization of a laminated composite structures subjected to aeroelastic effects**. 2011. 18. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

## **ABSTRACT**

Composites have a wide usage range in Aeronautics for its high resistance and low weight. Despite lightness being a positive characteristic, it increases the attention to the structural vibration assessment. In this work the composite material fiber orientation optimization is performed aiming flutter onset velocity increase. This goal is achieved through the maximization of the natural frequency related to the mode involved in the phenomenon. This problem is discretized by a cantilevered plate subjected to a flow parallel to its surface. The mass and stiffness matrices of the structure are obtained by the finite element method. These matrices are used to assemble the modal problem which solution yields the natural frequencies and vibration modes of the structure. Aeroelastic analysis proceeds with these results. The software ZAERO is applied for the determination of the flutter speed and vibration mode responsible for this effect. The sensitivity of the eigenvalue associated with the flutter onset with respect to the design variable is obtained analytically. Sequential linear programming is applied for the optimization, while using the modal assurance criterion to guide the process. The fiber orientation obtained by this formulation shows a significant increase in the flutter speed, more than doubling in most of the cases. This proves the validity of the proposed methodology. A performance evaluation of the modal assurance criterion against the repeated eigenvalue's problem shows positive results, obtaining a reduction near to 20-25% of the number of iterations needed for the convergence.

**KEYWORDS:** Structural Optimization, Laminated Composite Materials, Aeroelasticity.

## ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. OBJETIVOS .....	2
3. MODELO ESTRUTURAL .....	2
3.1 Problema Modal .....	2
3.2 Elementos Finitos .....	2
3.3 Material Composto .....	3
3.4 Laminação .....	3
4. MODELO AEROELÁSTICO .....	4
5. OTIMIZAÇÃO .....	5
5.1 Critério de Identificação de Modo .....	5
5.2 Programação Linear Sequencial .....	5
5.3 Sensibilidade .....	6
5.4 Ajuste dos Limites Móveis .....	7
6. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	7
6.1 Duas lâminas .....	8
6.2 Quatro lâminas .....	11
6.3 Seis lâminas .....	12
6.4 Comparação entre o Critério de Identificação de Modo e Autovalores Repetidos .....	13
7. CONCLUSÕES .....	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	15
APÊNDICE I .....	16
ANEXO I .....	17

## 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de materiais compostos está fortemente ligado ao seu uso na indústria aeronáutica. Esse tipo de material combina em uma única estrutura propriedades que seriam impossíveis de obter com um único material. No caso de materiais compostos fibrosos, é possível unir as excelentes propriedades unidirecional das fibras, com a leveza e resistência das resinas utilizadas como matriz. Isso possibilita a fabricação de estruturas que respondem de maneira bastante eficiente na direção de interesse, bastando para isso que se determine a orientação certa para as fibras.

Com isso os projetistas ganharam uma ampla variedade de opções para a construção de estruturas resistentes e de baixo peso. Entretanto apesar dessa leveza ser uma característica positiva para aplicação aeronáutica, ela aumenta a atenção que deve ser dada ao estudo das vibrações às quais a estrutura estará sujeita.

Levando isso em consideração, o foco desse trabalho é o efeito de *flutter*. O *flutter* é uma vibração instável, potencialmente destrutiva, que surge do acoplamento de forças aerodinâmicas com a frequência natural da estrutura. Para a discretização desse problema é utilizada uma placa plana engastada em uma das extremidades, representando de maneira simplificada uma asa. Essa estrutura está imersa em um escoamento paralelo à sua superfície, que é o responsável pelas forças aerodinâmicas. Então pretende-se aumentar a velocidade do escoamento em que ocorre esse acoplamento, que é chamada nesse trabalho de velocidade de *flutter*.

Esse estudo parte da metodologia desenvolvida por De Leon (2011), para elevar a velocidade de *flutter* através da maximização da frequência natural do modo de vibração responsável pelo seu surgimento. Isso é realizado por meio da variação da orientação das fibras do material composto que forma a estrutura.

A metodologia para a obtenção desses resultados é baseada em diversas etapas. Primeiramente é empregado o método dos elementos finitos para a determinação da matriz de rigidez e matriz de massa da estrutura, que são utilizadas para a resolução do problema modal e consequente obtenção das frequências naturais e modos de vibração associados à estrutura. De posse desses resultados, parte-se para a análise aeroelástica. O programa ZAERO é utilizado para o cálculo da velocidade de *flutter* e determinação do modo de vibração responsável por tal efeito. O autovalor referente a esse modo é então definido como alvo do processo de otimização, sendo a formulação de autovalores repetidos usada para identificar possíveis alterações neste modo. Assim são obtidas as orientações ótimas de fibra para cada um dos elementos da estrutura.

No presente trabalho esta metodologia foi estudada para que fosse possível fazer modificações e implementações ao algoritmo. Houveram duas grandes alterações ao método empregado por De Leon (2011). A primeira foi que o resultado final que se busca deixou de ser uma orientação ótima de fibra para cada elemento finito em que a estrutura é discretizada, e passou a ser uma única orientação para todos os elementos que compõem uma mesma lâmina. E a segunda foi a implementação do critério de identificação de modo (MAC), substituindo o problema de autovalores repetidos na determinação de mudanças no autovalor alvo da otimização.

Desse modo os resultados obtidos são configurações de lâminas com orientação homogênea, sendo apresentadas tantas direções para as fibras quanto forem o número de lâminas consideradas. A vantagem dessa situação é que a dificuldade anteriormente encontrada em reproduzir fisicamente os complexos resultados teóricos obtidos deixam de existir, uma vez que os processos de fabricação tradicionais já possibilitam a produção de placas com as características aqui almeçadas.

## 2. OBJETIVOS

O objetivo principal desse trabalho é elevar a velocidade do escoamento necessária para que o *flutter* ocorra, através da variação da orientação das fibras do material composto que forma a estrutura. Também se quer avaliar o desempenho do critério de identificação de modo frente ao problema de autovalores repetidos, como meio de guiar o processo de otimização.

## 3. MODELO ESTRUTURAL

O modelo estrutural é baseado no método dos elementos finitos (MEF), e é utilizado para determinar as frequências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores) associados à estrutura, que serão então utilizados na análise aeroelástica e determinação dos critério de otimização.

### 3.1 Problema Modal

O problema modal a ser resolvido parte da equação para vibrações livres na forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa global,  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez global e  $\ddot{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  são os vetores de aceleração e deslocamento nos nós, respectivamente. Aplica-se a hipótese de que os deslocamentos podem ser representados por uma equação com a forma

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \boldsymbol{\phi} \sin(\omega t) \quad (3.3)$$

sendo  $\boldsymbol{\phi}$  a amplitude modal,  $\omega$  a frequência e  $t$  o tempo. Substituindo esses valores e fazendo as simplificações pertinentes, chega-se a forma:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0 \quad (3.4)$$

é assim estabelecido o problema de autovalores. Porém, para se chegar a uma solução diferente da trivial, ou seja,  $\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$ , é necessário que o termo entre parênteses seja nulo,

$$\det[(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})] = 0 \quad (3.5)$$

substituindo-se então  $\lambda = \omega^2$  o problema de autovalores, pode ser escrito em sua forma usual:

$$\det[(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})] = 0 \quad (3.6)$$

Portanto para a obtenção dos autovalores, é necessário que sejam determinadas as matrizes de massa e de rigidez da estrutura.

### 3.2 Elementos Finitos

Foi utilizado um elemento de casca quadrilátero quadrático isoparamétrico de 8 nós, com funções de forma da família serendipity, que é formado a partir da degeneração de um elemento sólido

tridimensional, cuja formulação foi proposta por Zienkiewicz e Taylor (2000). Esse elemento apresenta 5 graus de liberdade por nó, sendo 3 de deslocamentos e 2 de rotações.

Para o cálculo da matriz de massa é utilizada a formulação dada por Hughes (1987) para matrizes de massa concentrada.

### 3.3 Material Composto

A lei de Hooke generalizada é utilizada para caracterizar o tensor constitutivo da estrutura através de relações de tensão com deformação, sendo inicialmente necessárias 81 constantes para definir um material genérico qualquer e após simplificações pertinentes às características ortotrópicas do material em questão, passam a ser necessárias apenas 9 constantes elásticas para representar o tensor constitutivo.

Uma simplificação adicional é feita com a adoção da teoria do estado plano de tensões. Considerando-se que não há tensões no sentido normal à estrutura, retira-se assim mais um componente da relação tensão-deformação, deste modo o tensor constitutivo é representado por uma matriz 5 x 5:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Sendo a matriz  $\mathbf{Q}_k$  a matriz de rigidez reduzida do estado plano de tensões, e os termos dessa matriz, que representam as relações constitutivas do material, podendo ser encontrados em Reddy (2004).

### 3.4 Laminação

É utilizada a teoria de laminação da deformação cisalhante de primeira ordem ou FSDT (*First-Order Deformation Laminated Theory*), nela diferentemente da teoria de Kirchhoff-Love para cascas finas, é considerado que uma linha reta e normal a superfície permanece reta, mas não necessariamente normal após a deformação da superfície, desse modo tensões cisalhantes transversais são introduzidas. As relações constitutivas da placa laminada pode então ser expressas por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz de rigidez extensional,  $\mathbf{B}$  a matriz responsável pelo acoplamento extensão-flexão e  $\mathbf{D}$  é a matriz relacionada à flexão da estrutura,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{M}$  são respectivamente os vetores com as trações e momentos aplicados,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é a deformação de membrana e  $\boldsymbol{\kappa}$  são termos associados à curvatura. Sendo que a matriz formada por  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  é a matriz de rigidez dos elementos. Uma definição detalhada sobre como obter cada um desses coeficientes pode ser encontrada em Reddy (2004).

Essa matriz de rigidez é simplificada a partir da formulação proposta por Kumar e Palaninathan (1997), onde é assumido que os elementos do inverso da matriz Jacobiana permanecem constantes na integração da espessura, desse modo há uma redução no tempo de processamento, melhorando a eficiência computacional do processo de otimização.

#### 4. MODELO AEROELÁSTICO

Após a obtenção dos autovetores e autovalores associados a estrutura é utilizado o programa comercial ZAERO para o cálculo da velocidade de *flutter*. Ele utiliza o método ZONA6 para escoamento subsônicos para a análise do modelo aerodinâmico e o método *g* para a solução do problema de instabilidade (ZONA-Technology, 2008).

O método ZONA6 é uma variação do método dos painéis (*Doublet Lattice Method*), onde a estrutura é discretizada em pequenos painéis aerodinâmicos. Cada painel contém um ponto de controle onde as condições de contorno são impostas. Todos os painéis são tratados igualmente, independente da sua proximidade dos limites da asa. A linha dipolo é colocada a 1/4 do comprimento da corda de cada painel e o deslocamento é calculado a 3/4 do comprimento da corda, ambos pontos localizados na metade de cada painel.

A solução do método baseia-se na equação do potencial aerodinâmico generalizado para um escoamento bi-dimensional, compressível e em um campo assumido irrotacional (essa condição é válida para as regiões do escoamento onde a viscosidade é desprezível). A solução aproximada é feita pela superposição de efeitos das soluções de dipolos.

O problema de instabilidade assim definido é resolvido com o método *g* descrito por Chen (2000). Esse método busca não somente o ponto onde ocorre a instabilidade causada pelo fluido, como também o modo de vibração e parâmetros associados, como frequência e amortecimento. Nesse trabalho estuda-se somente o ponto de início de *flutter* e o modo responsável, não estando-se interessado em estudar o comportamento da estrutura antes do *flutter*.

O método indica que para valores de amortecimento negativo a estrutura é estável, enquanto que valores positivos indicam instabilidade. Portanto o flutter tem início quando o amortecimento é nulo. A figura 4.1 mostra um gráfico típico representando a análise com o método *g*. Nesse gráfico pode-se ver que a curva pontilhada, que é referente ao amortecimento do primeiro modo de vibração, é igual a zero com uma velocidade próxima de 26 m/s. Portanto esses seriam o modo e a velocidade associados ao *flutter*. Vale ressaltar que esse amortecimento surge da interação fluido-estrutura, visto que no modelo estrutural ele não é definido. Esse método não considera as tensões geradas pela deformação da estrutura, portanto os valores previstos para a velocidade de *flutter* são ligeiramente inferiores aos encontrados na prática.

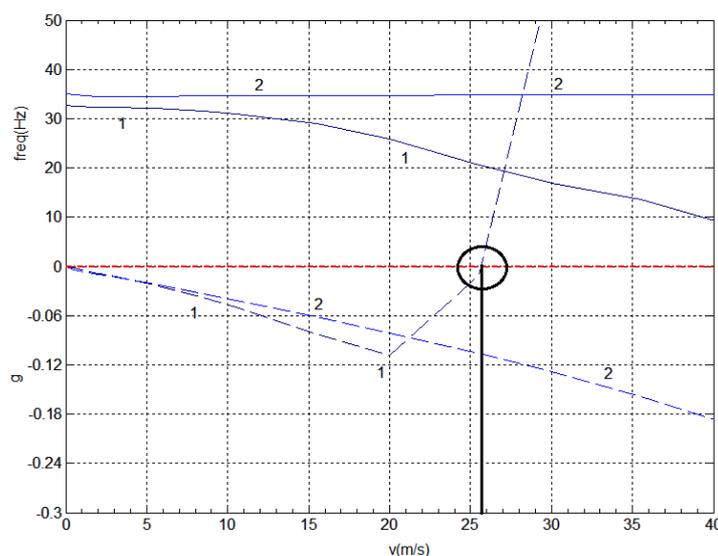


Figura 4.1 - Típico gráfico gerado com os dados do método *g*.

## 5. OTIMIZAÇÃO

Feita a análise aeroelástica se descobre qual é o modo de vibração responsável pelo *flutter*, que é definido como alvo da otimização. A otimização é então feita utilizando o método da programação linear sequencial (SLP) para encontrar o ponto máximo da função e o critério de identificação de modo (*modal assurance criterion* (MAC) ) para garantir que o modo sendo otimizado é o mesmo durante todo o processo.

### 5.1 Critério de Identificação de Modo

O objetivo da presente otimização é maximizar um autovalor associado a um modo específico, portanto uma metodologia para rastrear o modo alvo é essencial, isso é obtido com a utilização do critério de identificação de modo. A função MAC é prover uma medida de consistência (grau de linearidade) entre autovetores (Allemang, 2003). A definição do MAC é

$$MAC(\phi_a, \phi_b) = \frac{|\phi_a^T \phi_b|^2}{(\phi_a^T \phi_a)(\phi_b^T \phi_b)} \quad (5.1)$$

onde  $\phi_a$  e  $\phi_b$  são os autovetores que se deseja comparar. Os valores do MAC variam entre 0 e 1, sendo que 0 representa inconsistência e valores próximos a 1 representam uma boa relação linear.

Kim e Kim, 2000, observaram que o autovetor usado como referência pode ser atualizado durante a otimização se as mudanças durante as iterações forem grandes, o que é o caso deste estudo. Portanto, após a definição do autovetor de referência, usado na primeira rodada da otimização, este será atualizado com o autovetor que tiver o MAC mais próximo de 1 em cada iteração.

### 5.2 Programação Linear Sequencial

O conceito da utilização da programação linear sequencial é obter aproximações lineares de uma função objetivo e restrições não lineares, desse modo a derivada da função objetivo será constante. Isso implica que o ponto de máximo se encontra na fronteira do domínio utilizado. Portanto, com a correta calibração dos limites móveis esse método permite a obtenção de resultados de uma maneira rápida e simples. Na sua forma padrão a programação linear é apresentada como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f = \mathbf{c}^T x \\ &\text{sujeito a } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ &x \geq 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{c}$  é um vetor com o número de variáveis de projeto,  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $m \times m$ , sendo  $m$  o número de restrições e  $\mathbf{b}$  um vetor  $m \times 1$ .

As aproximações lineares da função objetivo e da restrição são obtidas através da utilização de expansão em série de Taylor, que tem a seguinte forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!} (x - x^*)^n \quad (5.3)$$

onde  $x^*$  é um ponto conhecido próximo de  $x$ . Entretanto a programação linear utiliza somente o primeiro e segundo termos dessa expansão, ou seja, derivadas de ordem maior que um não são consideradas.

No caso em estudo, a variável de projeto é a orientação das fibras,  $\theta$ , dessa forma o problema de otimização linear pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f(\theta) &= f(\theta^*) + (\theta - \theta^*) \frac{\partial f(\theta^*)}{\partial \theta} \\ \text{sujeito a } \theta^{\text{inf}} &\leq \theta - \theta^* \leq \theta^{\text{sup}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde  $\theta^{\text{inf}}$  e  $\theta^{\text{sup}}$  são os limites móveis inferior e superior respectivamente. Assim sendo é necessário definir  $\frac{\partial f(\theta^*)}{\partial \theta}$ , que é chamada de sensibilidade, e também os limites móveis.

O problema como foi apresentado, de minimizar o funcional, pode ser escrito como maximizar o funcional sem perda no objetivo geral da otimização, ou seja, minimizar  $f$  significa o mesmo que maximizar  $-f$  ou  $1/f$ .

### 5.3 Sensibilidade

O cálculo da sensibilidade é um problema matemático que objetiva a solução das derivadas das equações em relação à variável de projeto. Essa análise fornece a informação do gradiente para a otimização estrutural, tornando eficiente as técnicas de otimização (Guilherme, 2000). Para implementação desse método é portanto necessário obter a sensibilidade do autovalor alvo em relação a orientação das fibras, para isso parte-se do problema modal descrito anteriormente como

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\phi = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

multiplicando a eq. 5.5 por  $\phi^T$

$$\phi^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\phi = 0 \quad (5.6)$$

derivando então em relação a variável de projeto  $\theta$ , se obtêm

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial \theta} (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\phi + \phi^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \phi^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} - \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \mathbf{M} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \right) \phi = 0 \quad (5.7)$$

essa equação pode ser simplificada utilizando as igualdades da eq. 5.5 e 5.6

$$\phi^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} - \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \mathbf{M} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \right) \phi = 0 \quad (5.8)$$

reorganizando e isolando o termo da sensibilidade

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{\phi^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \right) \phi}{\phi^T \mathbf{M} \phi} \quad (5.9)$$

nesse ponto pode-se fazer algumas consideração. O segundo termo entre parênteses é nulo, visto que a massa não varia com a orientação das fibras

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} = 0 \quad (5.10)$$

e o denominador é ortonormalizado em relação aos autovetores

$$\Phi^T M \Phi = \mathbf{I} \quad (5.11)$$

onde  $\Phi$  é a matriz cujas colunas são os autovetores e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Assim a sensibilidade de um autovalor específico em relação a orientação das fibras da placa, é definida como:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} \phi \quad (5.12)$$

Portanto para obter o valor da sensibilidade é necessário derivar a matriz de rigidez em relação à variável de projeto. O essa derivada é apresentada no ANEXO I.

#### 5.4 Ajuste dos Limites Móveis

Os limites móveis são calculados de uma maneira bastante simples através da análise do histórico das últimas três iterações. Caso após três iterações consecutivas o sinal da sensibilidade permaneça inalterado há um acréscimo de 20% no limite superior e decréscimo de 20% no limite inferior, e caso o sinal da sensibilidade se altere há um decréscimo de 20% no limite superior e acréscimo de 20% no limite inferior.

Desse modo quando se estiver próximo ao valor máximo de uma função o intervalo englobado pelos limites irá diminuir, o que irá contribuir para a convergência do resultado. Já em regiões distantes dos pontos máximos da função o intervalo aumenta, o que irá reduzir o número de iterações necessárias para se chegar ao ponto ótimo.

Durante a implementação desta metodologia se percebeu que é necessário restringir a rotação máxima que cada lâmina pode sofrer a cada iteração, principalmente em modelos com várias lâminas, pois com variações muito bruscas há uma dificuldade adicional em determinar o modo que se irá otimizar, visto que nestas condições o valor do MAC irá se afastar da unidade.

## 6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para este estudo foi utilizado uma placa de Grafite-Epóxi engastada em uma das extremidades sujeita a um escoamento paralelo ao eixo  $x$ , conforme pode ser visto figura 6.1. A asa é composta por 288 elementos e o número de lâminas varia em cada um dos casos. Cada lâmina com as dimensões de 0,45 m de comprimento por 0,08 m de largura e espessura de 0,0005 m.

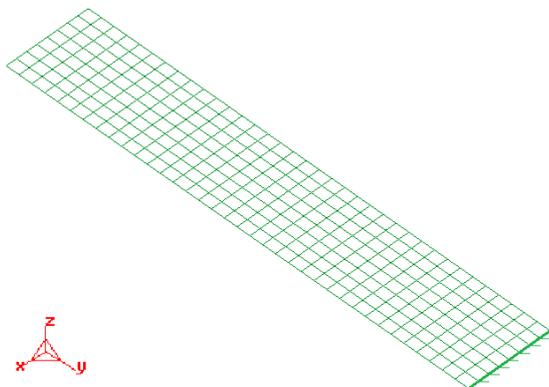


Figura 6.1 - Placa discretizada para o método dos elementos finitos

As propriedades do material podem ser vistas na tabela 6.1 e foram obtidas através de ensaios de um modelo físico realizados por De Leon (2011).

Tabela 6.1 - Propriedades do material

$E1 = 29,090 \text{ Gpa}$	$G12 = 2,726 \text{ Gpa}$	$\nu12 = 0,1434$
$E2 = 8,841 \text{ Gpa}$	$G13 = 2,726 \text{ Gpa}$	$\nu13 = 0,1434$
$E3 = 8,841 \text{ Gpa}$	$G23 = 1,205 \text{ Gpa}$	$\nu23 = 0,2933$
$\rho = 1793 \text{ Kg/m}^3$		

## 6.1 Duas lâminas

O primeiro caso estudado foi uma placa composta por duas lâminas. Inicialmente estas lâminas estavam orientadas uma a  $0^\circ$  e a outra a  $90^\circ$ , conforme a figura 6.2.

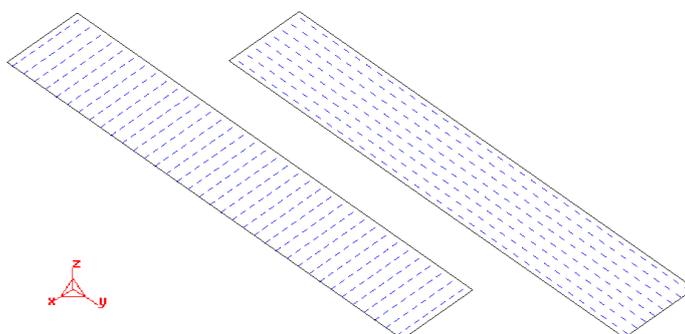


Figura 6.2 - Orientação inicial das duas lâminas de  $0^\circ$  e  $90^\circ$

Utilizando a metodologia descrita se procedeu com a análise modal para determinação dos modos de vibração e frequências naturais da estrutura, os resultados obtidos podem ser visualizados na figura 6.3.

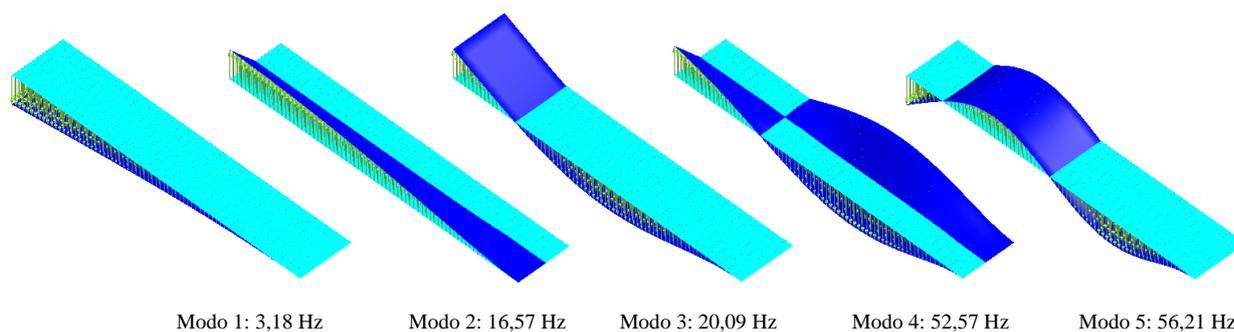


Figura 6.3 - Análise modal da configuração inicial  $0^\circ$  e  $90^\circ$

Com essas informações foi realizada a análise aeroelástica da estrutura para encontrar o modo responsável pelo *flutter* e utilizá-lo como alvo da otimização. Se determinou que com essa configuração o modo responsável pelo *flutter* é o modo 2, o primeiro modo torcional, e ocorre quando o escoamento for por volta de  $9,2 \text{ m/s}$ , conforme pode ser observado na figura 01 do Apêndice I.

Com isso se iniciou a otimização tendo o segundo autovalor como alvo. A figura 6.4 mostra um gráfico com o aumento do autovalor em relação ao valor inicial, a cada iteração. Pode-se perceber nesse gráfico que a partir da iteração 5 o modo sendo otimizado deixou de ser o segundo e passou a ser o

terceiro, porém continuou sendo o primeiro modo torcional, somente sua posição em relação aos demais modos foi que mudou. O que fica evidenciado na figura 6.5, que mostra como ficaram os modos após a otimização. Também é possível perceber que próximo a região onde o modo sendo otimizado muda, o valor do MAC ficou significativamente mais baixo do que no resto do processo.

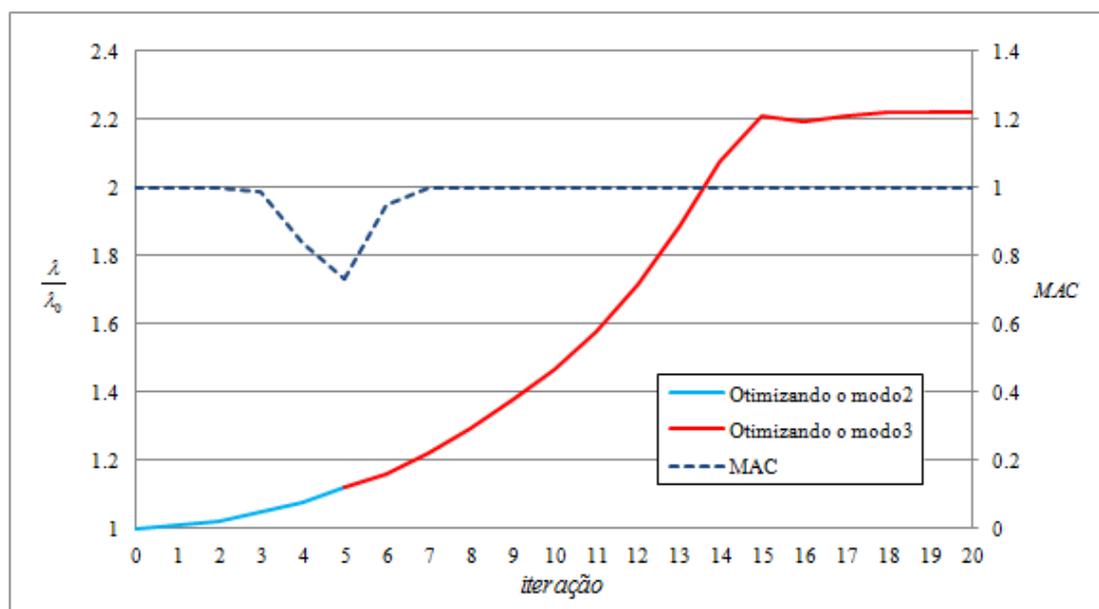


Figura 6.4 - Gráfico da convergência

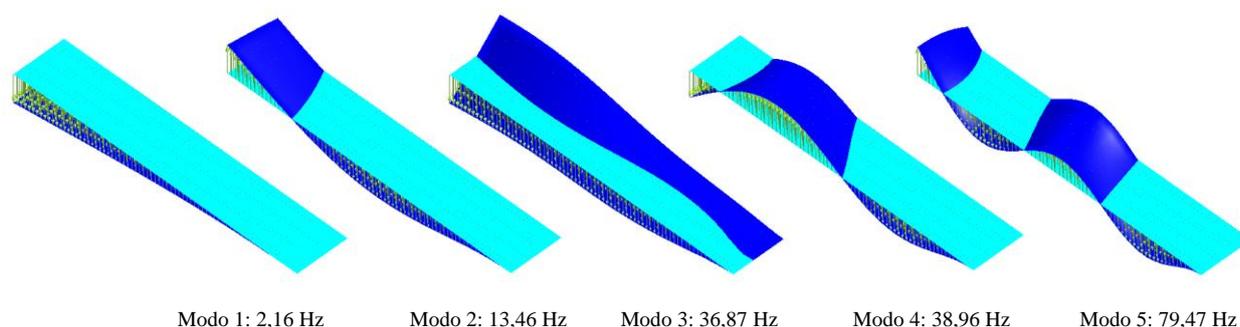


Figura 6.5 - Configuração após a otimização  $53,8^\circ$  e  $53,8^\circ$

Após a otimização as duas lâminas ficaram com as fibras orientadas a  $53,8^\circ$ . A frequência natural do primeiro modo torcional, que inicialmente era 16,57 Hz, passou a ser 36,87 Hz, tendo um aumento de 123%. Realizando novamente a análise aeroelástica com o ZAERO, a velocidade de flutter que era de aproximadamente 9,2 m/s, aumentou 117% com a nova configuração, chegando a 19,96 m/s.

De posse desse resultado uma análise adicional foi realizada para garantir que o ponto encontrado realmente é um ponto máximo da função. Um código foi implementado para obter os valores das frequências naturais em função da orientação das fibras das lâminas, nele foi realizada a análise modal com várias configurações, obtendo-se os valores de frequência natural para cada 5 graus de variação na orientação das fibras de cada lâmina.

Os resultados obtidos dessa maneira podem ser observados na figura 6.6, onde foi plotado a variação do terceiro modo em relação a orientação das duas lâminas. Analisando esse gráfico percebe-se primeiramente que a variação da frequência é simétrica, ou seja, se a orientação das lâminas for trocada entre elas a resposta obtida será a mesma.

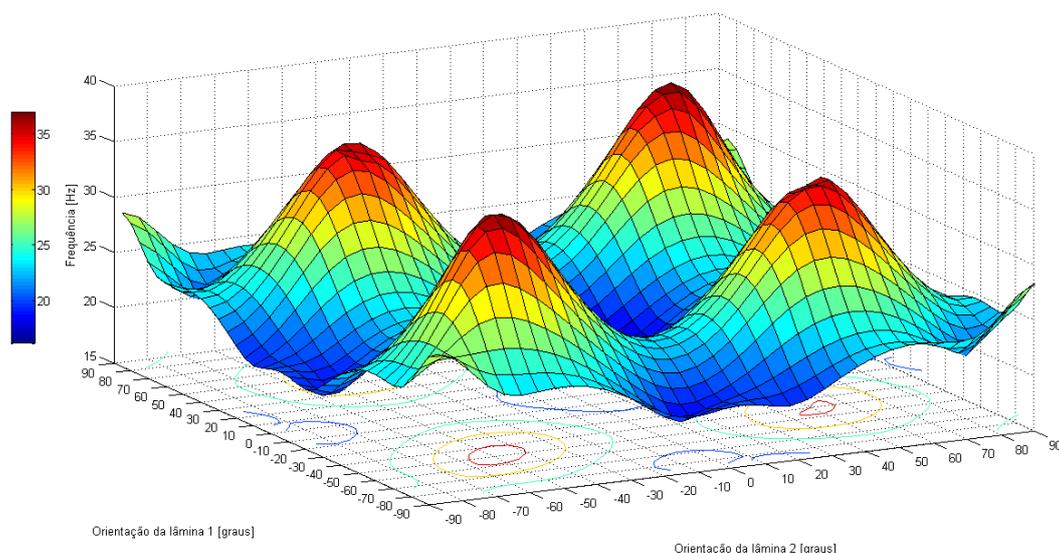


Figura 6.6 - Frequência do terceiro modo de vibração para diferentes orientações das lâminas

Levando isso em conta pode-se considerar que existem dois pontos de máximo com configuração bastante diferentes. A figura 6.7 mostra os mesmos resultados arranjados de outra maneira para facilitar a localização dos pontos de máximo. Pode-se perceber que um dos máximos ocorre com as duas lâminas orientadas a cerca de  $53^\circ$  graus (ou  $-53^\circ$  devido à simetria), que foi o resultado obtido através da otimização. E os outros pontos máximos com as orientações de aproximadamente  $45^\circ$  e  $-45^\circ$  (ou  $-45^\circ$  e  $45^\circ$ ).

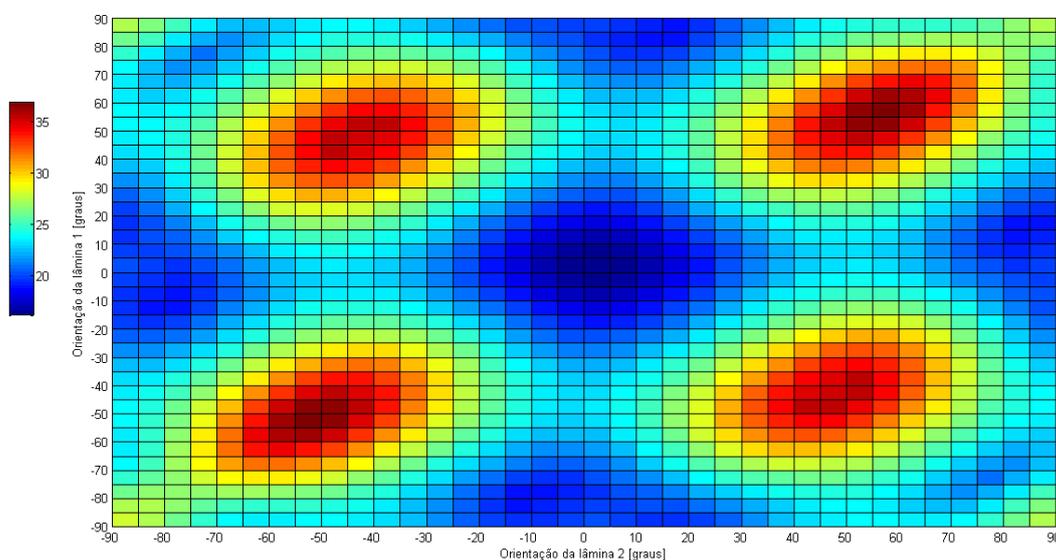


Figura 6.7 - Frequência do terceiro modo de vibração [Hz] para diferentes orientações das lâminas

Baseando-se nessa análise realizou-se novamente a otimização da estrutura com duas lâminas, dessa vez com a configuração inicial de  $30^\circ$  e  $-30^\circ$ , com o intuito de avaliar se processo de otimização iria convergir para o outro ponto de máximo discutido previamente. A configuração final ficou próxima do esperado, com orientações de  $45,23^\circ$  e  $-45,23^\circ$ , confirmando a validade da metodologia de otimização. A figura 6.8 mostra os modos de vibração e as frequências naturais obtidas através da análise modal. A velocidade de *flutter* obtida para essa configuração foi de 19,85 m/s, como pode ser visto na figura 02 do Apêndice I.

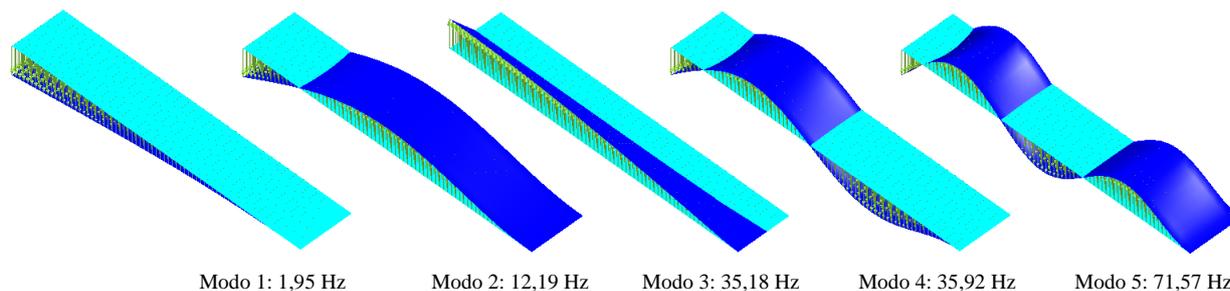


Figura 6.8 - Configuração após a otimização  $45,23^\circ$  e  $-45,23^\circ$

A tabela 6.2 resume os resultados obtidos nessa seção para a asa com duas lâminas.

Tabela 6.2 - Resumo dos resultados obtidos com 2 lâminas

	Configuração inicial	Configurações otimizadas	
Orientação da lâmina 1 [graus]	0	53,83	45,23
Orientação da lâmina 2 [graus]	90	53,83	-45,23
Frequência natural do primeiro modo de torção [Hz]	16,57	36,95	35,18
Velocidade de <i>Flutter</i> [m/s]	9,20	19,96	19,85
Aumento da velocidade de <i>flutter</i> em relação à inicial [%]	-	117	116

## 6.2 Quatro lâminas

Para termos de comparação a configuração inicial utilizada com 4 lâminas é de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $0^\circ$ , a análise modal obteve os resultados apresentados na figura 6.9. A velocidade de *flutter* obtida para essa configuração foi de 25,69 m/s, através dessa análise aeroelástica se observou que novamente o primeiro modo torcional é o responsável pelo efeito de *flutter*, portanto este é o modo alvo.

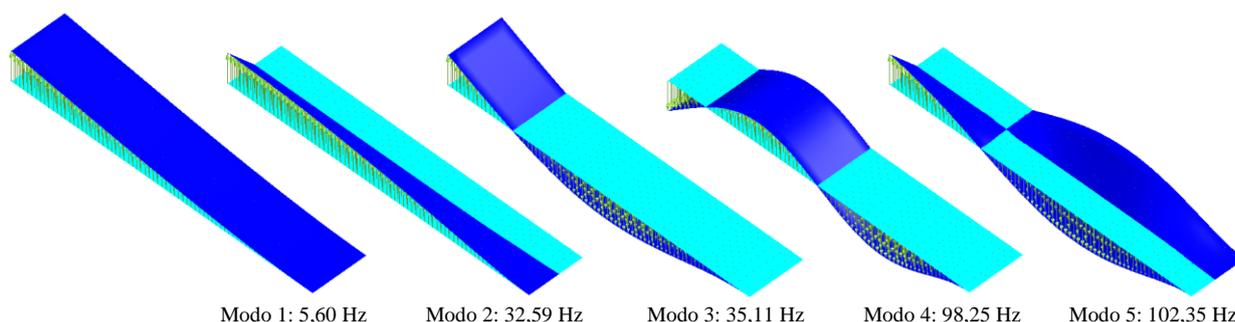


Figura 6.9 - Configuração inicial  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $0^\circ$

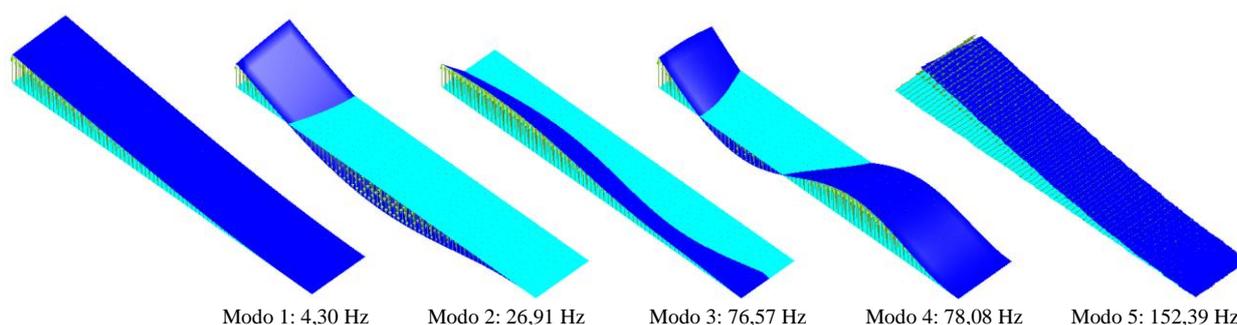
Partindo do preceito observado anteriormente de que a função objetivo terá vários pontos de máximo, toda a metodologia de otimização foi aplicada iniciando-se de diferentes configurações com o objetivo de tentar capturar alguns desses máximos e compará-los. A tabela 6.3 resume três resultados encontrados e suas respectivas configurações.

Tabela 6.3 - Resumo dos resultados obtidos com 4 lâminas

	Configuração inicial	Configurações otimizadas		
Orientação da lâmina 1 [graus]	0	50,7	-37,4	-52,5
Orientação da lâmina 2 [graus]	90	49,0	43,1	44,3
Orientação da lâmina 3 [graus]	90	55,5	43,1	44,3
Orientação da lâmina 4 [graus]	0	-42,3	-37,4	-52,5
Frequência natural do primeiro modo de torção [Hz]	32.59	74,51	76,57	76,57
Velocidade de <i>Flutter</i> [m/s]	25.69	57,10	50,10	58,10
Aumento da velocidade de <i>flutter</i> em relação à inicial [%]	-	122	95	126

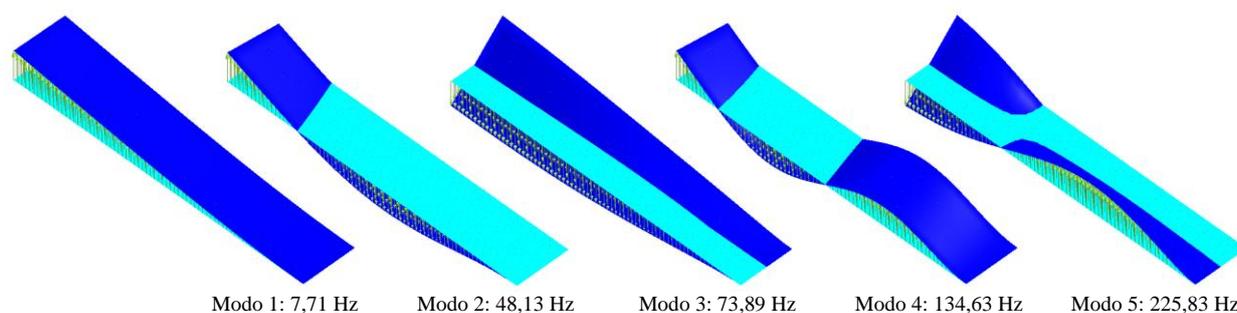
Analisando os resultados da tabela 6.3 pode-se observar que a velocidade de *flutter* nas configurações otimizadas sempre teve um aumento bastante significativo em relação à inicial. Porém pode-se também notar que essa dependência entre a frequência natural do modo em que ocorre o *flutter* e a velocidade em que ocorrerá, não é completamente proporcional visto que configurações com a frequência mais alta não tem necessariamente a velocidade mais alta.

A figura 6.10 mostra os modos de vibração para 4 lâminas com orientações de  $-52,5^\circ$ ,  $44,3^\circ$ ,  $44,3^\circ$  e  $-52,5^\circ$ , que obteve os melhores resultados após a otimização.

Figura 6.10 - Configuração otimizada  $-52,5^\circ$ ,  $44,3^\circ$ ,  $44,3^\circ$  e  $-52,5^\circ$ 

### 6.3 Seis lâminas

No caso de 6 lâminas a metodologia aplicada é semelhante às anteriores. Parte-se da configuração inicial com as orientações de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $0^\circ$ , os resultados da análise modal podem ser visto na figura 6.11. Da análise aeroelástica se obtém a velocidade de *flutter* de 69,1 m/s.

Figura 6.11 - Configuração otimizada  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $0^\circ$

A tabela 6.4 exibe um resumo dos resultados obtidos para as configurações otimizadas com 6 lâminas. Pode-se perceber que nesse caso a variação tanto da velocidade quanto da frequência em cada um dos casos otimizadas, não é tão acentuada quanto nas configurações com 2 e 4 lâminas.

Tabela 6.4 - Resumo dos resultados obtidos com 6 lâminas

	Configuração inicial	Configurações otimizadas	
Orientação da lâmina 1 [graus]	0	-50.8	51.2
Orientação da lâmina 2 [graus]	45	46.2	-45.6
Orientação da lâmina 3 [graus]	90	46.2	51.3
Orientação da lâmina 4 [graus]	90	46.2	51.3
Orientação da lâmina 5 [graus]	45	46.2	-45.6
Orientação da lâmina 6 [graus]	0	-50.8	51.2
Frequência natural do primeiro modo de torção [Hz]	73.89	117.86	117.26
Velocidade de <i>Flutter</i> [m/s]	69.10	108.46	110.48
Aumento da velocidade de <i>flutter</i> em relação à inicial [%]	-	57	60

#### 6.4 Comparação entre o Critério de Identificação de Modo e Autovalores Repetidos

Durante o processo de otimização pode ocorrer de o autovalor alvo da otimização aumentar e ultrapassar o autovalor seguinte. Quando isso ocorre os modos de vibração irão trocar de posição, como ocorreu na otimização com 2 e 4 lâminas, mostradas anteriormente. Em ambos os casos o modo alvo da otimização era o primeiro modo torcional, que inicialmente era associado ao segundo autovalor e finalizou sendo associado ao terceiro autovalor. Nos dois casos a mudança no modo ocorreu por volta da iteração 5. Deve-se salientar que apesar de o autovalor ter mudado de posição, o primeiro modo torcional continua sendo o alvo da otimização durante todo o processo.

Para identificar a ocorrência dessa troca de posição entre os autovalores, se utilizou dois métodos distintos, o critério de identificação de modo e o critério de autovalores repetidos. As figuras 6.12 e 6.13 mostram o gráfico da convergência para duas situações.

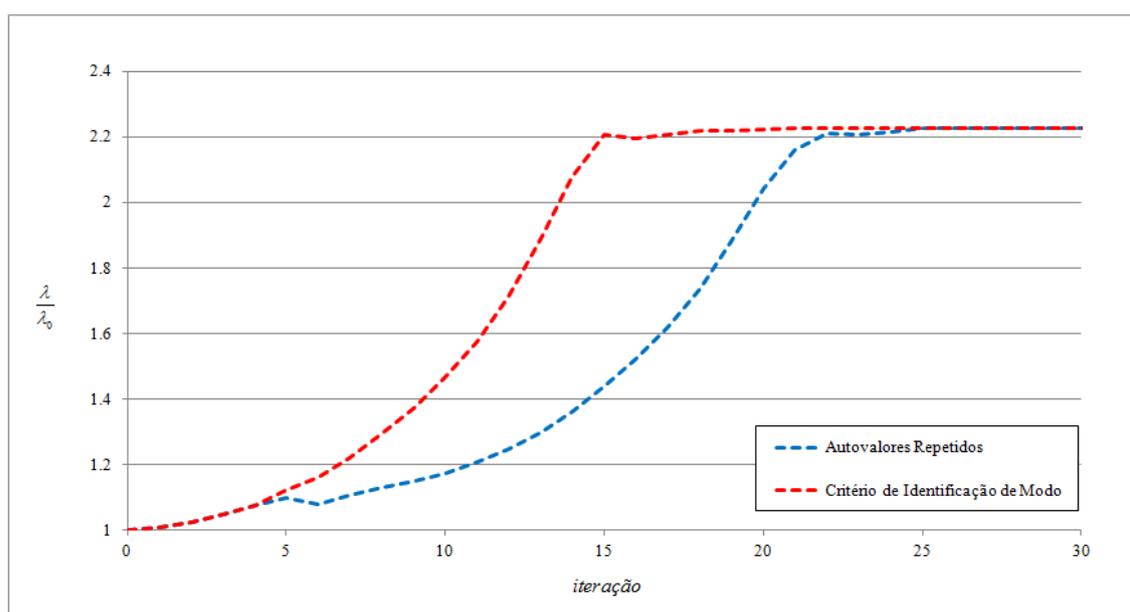


Figura 6.12 - Convergência do primeiro caso com duas lâminas

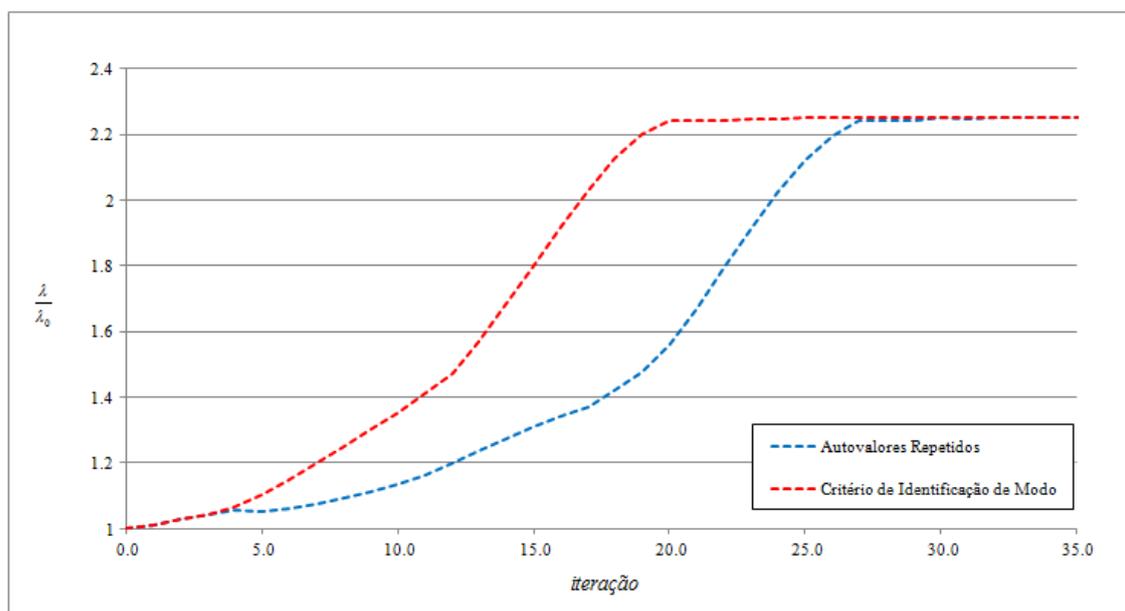


Figura 6.13 - Convergência do terceiro caso com quatro lâminas

Analisando essas duas figuras pode-se perceber que o critério de identificação de modo tem um desempenho significativamente superior, convergindo com um número de iterações cerca de 20-25% menor. Isso se deve ao fato de que o MAC compara diretamente os autovetores a cada iteração, portanto qualquer mudança é percebida imediatamente, e o processo de otimização corrigido para considerá-la. Enquanto que o critério de autovalores repetidos compara os autovalores, necessitando que os dois fiquem muito próximos para identificar alguma possível mudança de posição, o que nem sempre ocorre imediatamente.

## 7. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos comprovam a validade da metodologia empregada. Em todos os casos a maximização do autovalor do modo associado ao início do *flutter* levou a resultados significativamente mais elevados para a velocidade do fluido necessária para iniciar tal efeito.

É importante ressaltar que, como foi observado, a configuração inicial de onde parte a rotina de otimização tem grande influência nos resultados. Percebe-se que principalmente em casos mais complexos não há um método para determinar se o valor para o qual a resposta converge é um máximo local ou global da função. Portanto é necessária alguma cautela na avaliação dos resultados obtidos.

Analisando os resultados é bastante evidente que o aumento do autovalor associado ao modo de *flutter* é a variável que tem maior influência na melhora da velocidade de *flutter*. Entretanto em alguns casos é observado que o valor mais alto para a velocidade, não foi na configuração com a frequência natural mais elevada. Levando isso em consideração pode-se concluir que existe algum outro fator que influencia, em menor escala, esse efeito.

A utilização do critério de identificação de modo se mostrou uma adição bastante favorável a esta metodologia. Com ela obteve-se resultados precisos e com uma significativa diminuição no número de iterações necessárias para a convergência da resposta, em relação ao método de autovalores repetidos usado previamente. A única ressalva é que em regiões próximas à mudança de posição do modo alvo, é necessário restringir a variação máxima da variável de projeto, para que a forma do autovetor não fique descaracterizada devido à mudança brusca na configuração.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ALLEMANG, R.J. **The Modal Assurance Criterion - Twenty Years of Use and Abuse.** Sound and Vibrations, p.14-21, august/2003.

CHEN, P.C. **Damping Perturbation Method for Flutter Solution: The g-method.** AIAA Journal, vol. 38(9), p.1519-1524, 2000.

DE LEON, D. M. **Otimização estrutural de placas compostas laminadas sujeitas a efeitos aeroelásticos.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.

GUILHERME, C.E.M. **Otimização topológica de treliças e pórticos com restrições de flambagem e flexibilidade.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

HUGHES, T.J.R. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.** Prentice-Hall, 1987.

KIM, T.S., KIM, Y.Y. **Mac-based mode-tracking in structural topology optimization.** Computers and Structures, vol 74. p.375-383, 2000.

KUMAR, W.P.P., PALANINATHAN, R. **Finite Element Analysis of Laminated Shells with Exact Through-Thickness Integration.** Computers and Structures, vol. 63(1) p.172-184, 1997.

PEDERSEN, P. **Optimal Designs - Structures and Material - Problems and Tools.** Technical University of Denmark, Pre-Print, 2003.

REDDY, J.N. **Mechanics of Composite Plates and Shells - Theory and Analysis.** 2ª edição, 2004.

SEYRANIAN, A., LUND, E., OLHOFF, N. **Multiple Eigenvalues in Structural Optimization Problems.** Structural Optimization, vol. 8, p.207-227, 1994.

ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method - Solid Mechanics.** 5ª edição. Butterworth-Heinemann, 2000.

ZONA-TECHNOLOGY. **ZAERO Theoretical Manual.** 19ª edição. ZONA Technology Inc., 2008.

## APÊNDICE I

As curvas VGF são usadas para representar os valores obtidos pelo ZAERO. Com elas pode-se identificar a velocidade de *flutter*, observando o ponto onde  $g$  é nulo. As duas figuras abaixo são referentes ao caso com duas lâminas, antes e após a otimização.

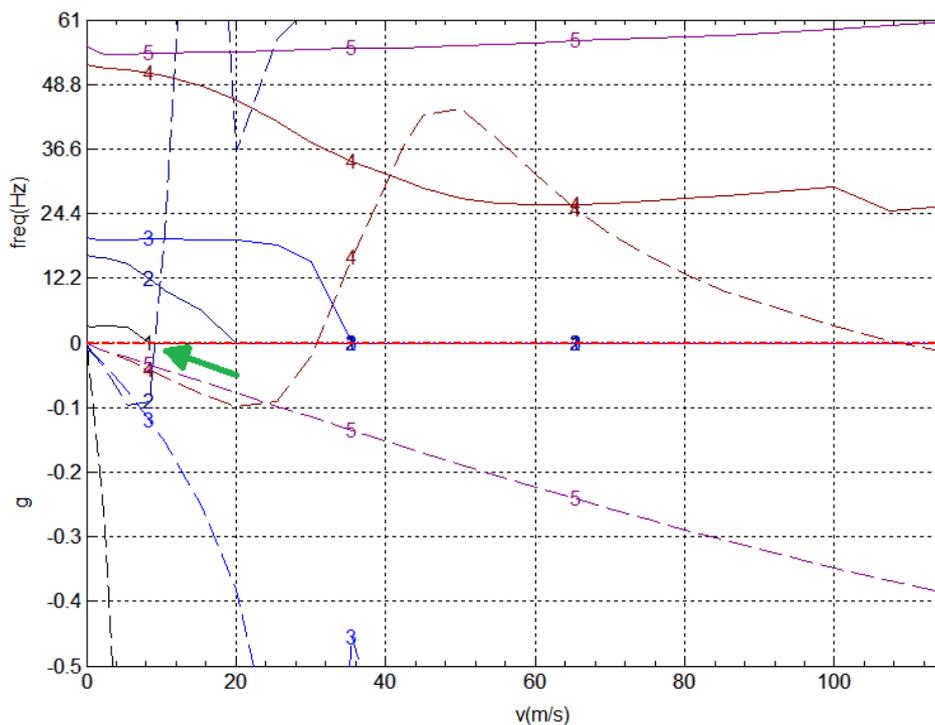


Figura 01 - Curvas VGF da estrutura na configuração inicial,  $0^\circ$  e  $90^\circ$

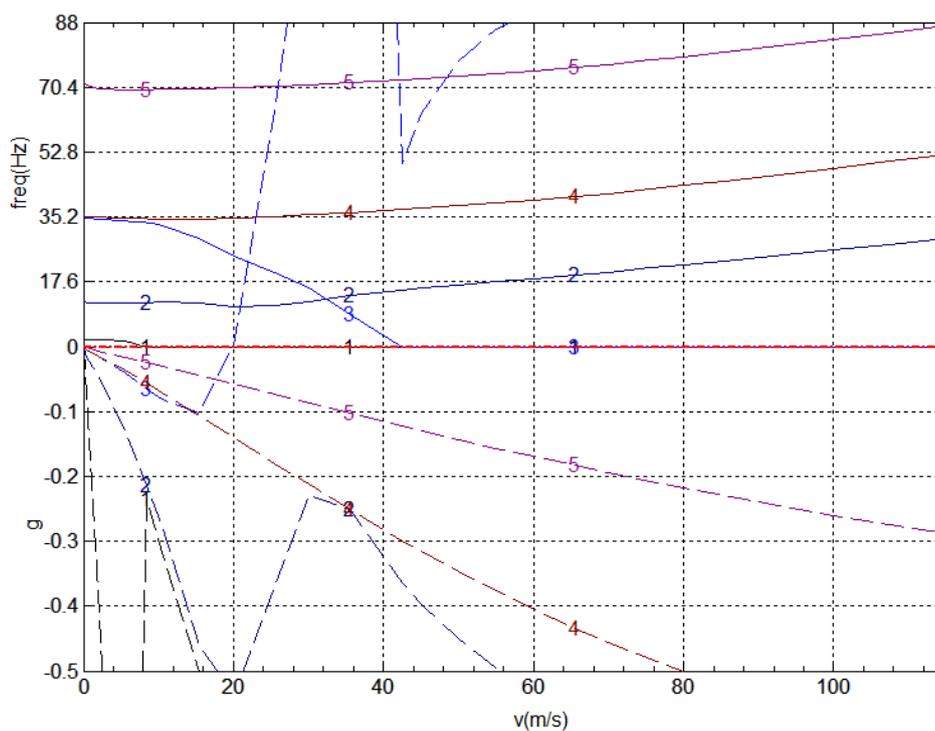


Figura 02 - Curvas VGF da estrutura após a otimização,  $45,23^\circ$  e  $-45,23^\circ$

## ANEXO I

A sensibilidade utilizada para os cálculos é obtida através da derivação da matriz de rigidez em relação à variável de projeto (De Leon, 2011).

$$\frac{\partial \mathbf{K}_k}{\partial \theta} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{F}_1^T \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \theta} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^T \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \theta} \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2^T \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \theta} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2^T \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial \theta} \mathbf{F}_2 \right) \frac{2}{t} |J| d\xi d\zeta \quad (7.1)$$

onde  $k$  é o elemento para o qual se quer determinar a sensibilidade e  $t$  a espessura.

Os termos da eq. 7.1 são descritos por

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \theta} = (z_t - z_b)_k \frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (z_t^2 - z_b^2)_k \frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial \theta} = \frac{1}{3} (z_t^3 - z_b^3)_k \frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \theta} \end{cases} \quad (7.2)$$

onde  $\mathbf{Q}_k$  é a matriz apresentada na eq. 3.7 e  $z_t$  e  $z_b$  definem a espessura das lâminas usando como sistema de referência uma linha que passa pelo centro do laminado.

Os demais termos empregados vem diretamente da simplificação da matriz de rigidez proposta por Kumar e Palaninathan, (1997)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + z\mathbf{F}_2 \quad (7.3)$$

$$\mathbf{F}_{1i} = \begin{bmatrix} f_4 & 0 & 0 & f_1 v_{1i1} & -f_1 v_{2i1} \\ 0 & f_5 & 0 & f_2 v_{1i2} & -f_2 v_{2i2} \\ 0 & 0 & f_6 & f_3 v_{1i3} & -f_3 v_{2i3} \\ f_6 & 0 & f_4 & f_1 v_{1i3} + f_3 v_{1i1} & -f_1 v_{2i3} - f_3 v_{2i1} \\ 0 & f_6 & f_5 & f_2 v_{1i3} + f_3 v_{1i2} & -f_2 v_{2i3} - f_3 v_{2i2} \\ f_5 & f_4 & 0 & f_1 v_{1i2} + f_2 v_{1i1} & -f_1 v_{2i2} - f_2 v_{2i1} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{F}_{1i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f_4 v_{1i1} & -f_4 v_{2i1} \\ 0 & 0 & 0 & f_5 v_{1i2} & -f_5 v_{2i2} \\ 0 & 0 & 0 & f_6 v_{1i3} & -f_6 v_{2i3} \\ 0 & 0 & 0 & f_4 v_{1i3} + f_6 v_{1i1} & -f_4 v_{2i3} - f_6 v_{2i1} \\ 0 & 0 & 0 & f_5 v_{1i3} + f_6 v_{1i2} & -f_5 v_{2i3} - f_6 v_{2i2} \\ 0 & 0 & 0 & f_4 v_{1i2} + f_5 v_{1i1} & -f_4 v_{2i2} - f_5 v_{2i1} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

onde  $i$  indica que se deve calcular a matriz para cada nó do elemento.

Os valores de  $f$  são descritos por

$$\begin{aligned}
 f_1 &= J_{13}^{-1} N_i \frac{t}{2}, \\
 f_2 &= J_{23}^{-1} N_i \frac{t}{2}, \\
 f_3 &= J_{33}^{-1} N_i \frac{t}{2}, \\
 f_4 &= \left( J_{11}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{12}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \\
 f_5 &= \left( J_{21}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \\
 f_6 &= \left( J_{31}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{32}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right).
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

onde  $J$  são os elementos da matriz Jacobiana e  $N$  as funções de forma do elemento empregado.