

*Darcy Dillenburg*

**DIFUSÃO DE NEUTRONS PROVENIENTES DE  
FONTE PULSADA EM MEIO MULTIPLICADOR**

Tese Apresentada em Concurso à Cátedra de  
Física Geral e Experimental da Faculdade de  
Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul.

**PROF. DR. ALARICH R. SCHULTZ**

Pôrto Alegre  
1959

## ÍNDICE

I - Introdução .....	7
II - Formulação e Solução Geral do Problema .....	13
III - Fonte Pontual e Instantânea de Neutrons .....	17
IV - Outros Tipos de Fontes de Neutrons .....	23
V - Discussão dos Resultados .....	25
VI - Conclusão .....	33
Apêndice .....	35
Lista de Símbolos .....	41
Agradecimentos .....	43
Referências .....	45

--ooOoo--

## I - INTRODUÇÃO

Um dos problemas relevantes em Física de Neutrons e em Engenharia Nuclear é a determinação dos parâmetros de difusão para neutrons em meios materiais. O conhecimento desses parâmetros não só permite determinar certas constantes nucleares como é também indispensável aos cálculos relacionados com meios multiplicadores de neutrons.

Os processos experimentais para a determinação das constantes de difusão reduzem-se, essencialmente, ao método estacionário e ao método não estacionário. No primeiro processo, determina-se a variação espacial da densidade de neutrons para um estado estacionário do sistema; no segundo, determina-se a variação temporal da densidade de neutrons para um estado transitório do sistema. Indicaremos brevemente as características essenciais dos dois processos.

Suponhamos um bloco de material com a forma de prisma reto de base retangular e apoiado sobre o plano  $(x, y)$  (Figura 1). Na base do prisma, encontra-se uma fonte plana de neutrons térmicos, de intensidade constante. Essa fonte pode ser realizada experimentalmente colocando-se a base do prisma sobre a coluna térmica de um reator. Para estado estacionário, a densidade de neutrons térmicos  $n_2(z)$  ao longo da direção  $z$  é dada pela equação 1)

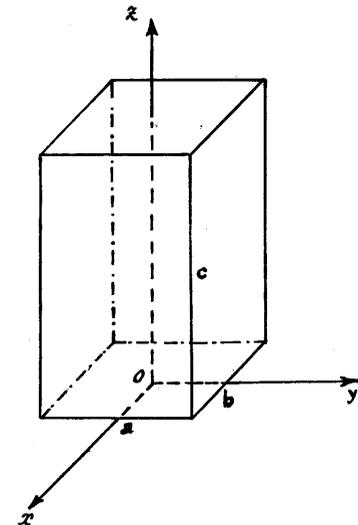


Fig. 1

$$n_2(z) = Ce^{-\gamma z} \quad (1)$$

onde

$$\gamma = \left[ \frac{1}{L_2^2} + \left(\frac{\kappa}{a}\right)^2 + \left(\frac{\kappa}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

é o inverso do comprimento de relaxação, C é uma constante de normalização,  $L_2$  é o comprimento de difusão, a e b são as dimensões da base do prisma, incluindo a distância extrapolada 2). A fórmula (1) será válida se o prisma tiver dimensões adequadas e para valores de z não muito próximos da fonte de neutrons ou da face superior do prisma. Conhecido  $n_2(z)$  determina-se  $\gamma$  e, pela (2), o valor do comprimento de difusão  $L_2$ . A partir desse valor pode-se calcular então a secção de choque de absorção do material ou sua secção de choque de espalhamento;  $L_2$  mesmo é de importância fundamental na determinação das dimensões de um reator quando o fator de multiplicação infinito é conhecido, pois de  $L_2$  depende, essencialmente, a fuga de neutrons térmicos através da superfície do reator.

No método não estacionário (alguns aspectos do qual abordaremos em detalhe no presente trabalho) importa conhecer a variação no tempo da densidade de neutrons em um ponto do meio para um estado transitório do sistema, como o que é originado, por exemplo, quando há uma injeção instantânea de neutrons. No caso do método estacionário, referimo-nos à circunstância de que é preciso detectar os neutrons suficientemente longe da fonte para ser válida a fórmula de variação exponencial (1), razão pela qual o prisma deve ser relativamente grande. No caso presente, essa condição espacial fica substituída por uma condição temporal, a saber: que se considerem tempos de observação suficientemente afastados do instante em que se produziu a injeção de neutrons.

Como em muitas circunstâncias a quantidade de material disponível para a experiência é reduzida, o método de fonte pulsada apresenta, sob esse ponto de vista, uma vantagem em relação ao anterior. Nas experiências de Antonov et al. 3), por exemplo, os blocos de berílio empregados tinham dimensões de 20 x 20 x 20 cm; ao passo que, num experimento típico em coluna exponencial 4), essas dimensões seriam da ordem de ... 100 x 100 x 65 cm. Acresce ainda que o método não estacionário é suscetível de maior precisão que o método estacionário 3).

As técnicas de fonte pulsada têm sido aplicadas à determinação de espectros de neutrons (espectrometria com técnica de tempo de voo), densidades de fluxo, secções de choque de captura e de espalhamento, constantes de difusão, tempos de vida de neutrons, idade de neutrons e reatividade de reatores 5). Relacionamos a seguir alguns trabalhos teóricos e experimentais sobre o comportamento temporal dos neutrons injetados em meios materiais por meio de fontes pulsadas.

Von Dardel 6) analisou o problema, com teoria da idade, para meios moderadores, indicando como se poderiam obter a vida média dos neutrons para absorção, o coeficiente de difusão e o comprimento de difusão.

Von Dardel e Sjöstrand 7) empregaram o processo de fonte pulsada para determinar experimentalmente os parâmetros de difusão de neutrons térmicos na água.

Gallone, Salvetti e Orsoni 8,9,10,11) estudaram teoricamente, empregando o modelo de moderação contínua, a distribuição espacial e temporal de neutrons térmicos em meios multiplicadores para diferentes tipos de fontes pulsadas.

Jacob 12) estendeu esses resultados ao caso de fontes de neutrons rápidos cuja intensidade varia periodicamente no tempo.

Na 1ª Conferência Internacional sobre Usos Pacíficos da Energia Atômica, Antonov et al. 3) e Ramanna et al. 13) apresentaram resultados de experiências com fontes pulsadas em várias substâncias moderadoras.

Simmons e King 14), usando teoria de dois grupos, entenderam a técnica de fonte pulsada à determinação da reatividade de meios multiplicadores, levando em conta, de maneira aproximada, a influência dos neutrons atrasados.

Antes de enunciarmos os objetivos do presente trabalho, recordaremos, brevemente, alguns fatos relacionados com a difusão de neutrons rápidos em meios multiplicadores térmicos.

Como é bem sabido, tais neutrons apresentam uma distribuição de energia muito complicada e que pode ser considerada como superposição de três espectros distintos: o de fissão, o de moderação e o de equilíbrio térmico (que é aproximadamente maxwelliano). Essa distribuição cobre um intervalo de energia que vai de fração de elétron-volt a vários milhões de de elétron-volts.

A primeira aproximação à teoria de um meio multiplicador térmico e que, à vista do que dissemos acima, representa uma idealização extrema, consiste em considerar todos os neutrons como sendo térmicos.

Num passo subsequente, a produção de neutrons rápidos e sua posterior moderação podem ser levadas em conta de diferentes maneiras, as principais sendo a teoria da idade, de Fermi, e a teoria da difusão por grupos. Na teoria da idade, a energia dos neutrons é suposta uma variável contínua. A difusão e a moderação de neutrons rápidos é descrita por uma equação diferencial matematicamente análoga à da difusão do calor. Na teoria da difusão por grupos, os neutrons são divididos em grupos mais ou menos amplos de energia; ~~postula-se~~ que, em cada grupo, os neutrons se difundem sem perder energia: a transição para o grupo inferior somente se efetua após haver sofrido o neutron o número médio de colisões necessário para a correspondente diminuição de energia. Esse modelo é governado por equações diferenciais acopladas do tipo que veremos adiante.

Como é sabido, a teoria da moderação contínua não é aplicável ao caso de moderadores hidrogenados; nesses casos, o processo de moderação de neutrons é descrito de maneira mais adequada pela teoria de difusão por grupos. Além disso, a equação da idade é uma equação a derivadas parciais, o que complica sobremodo sua aplicação a meios inhomogêneos, como o são os reatores refletidos; a teoria da difusão por grupos, pelo fato de ser governada por equações diferenciais ordinárias, apresenta vantagens práticas em problemas desse tipo.

Abordaremos nas páginas que seguem, de maneira sistemática, o estudo da distribuição espaço-temporal de neutrons em meios multiplicadores para diferentes tipos de fontes externas de neutrons utilizando a teoria da difusão por grupos.

Consideraremos todos os neutrons divididos em dois grupos: neutrons rápidos e neutrons térmicos. O primeiro grupo compreenderá os neutrons com espectro de fissão e de moderação; o segundo, os neutrons em equilíbrio térmico. Em princípio, uma descrição cada vez mais detalhada da distribuição de neutrons pode ser obtida tomando-se um número maior de grupos. Devido à crescente complexidade algébrica, entretanto, tal procedimento só apresenta interesse prático se se dispuser de máquina computadora. Ademais, como observam Weinberg e Wigner 15), "uma visão melhor dos principais fenômenos da difusão de neutrons foi adquirida através da solução das equa-

ções para dois grupos do que pela solução ampla e precisa das equações para muitos grupos por meio de grandes máquinas computadoras".

Suporemos que são injetados neutrons rápidos num meio multiplicador e estabeleceremos os resultados correspondentes a fonte instantânea, fonte constante e fonte periódica. Consideraremos meios sub-críticos, críticos e super-críticos, estando os meios puramente moderadores incluídos como casos particulares.

Os resultados, como veremos, apresentam-se sob forma de séries infinitas que convergem rapidamente apenas para tempos longos em comparação com as constantes de tempo intrínsecas do sistema.

Finalmente indicaremos como os resultados teóricos podem ser comparados com a experiência para estudar os fenômenos da difusão de neutrons.

—ooOoo—

## II - FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA

Consideremos um meio multiplicador térmico, homogêneo, colocado no vácuo e limitado por uma superfície não re-entrante  $\sigma$ . Consideremos ainda que as dimensões do meio sejam tais que a aproximação de difusão da equação de transporte seja válida.

Com essas hipóteses, a equação de difusão para o grupo de neutrons rápidos pode ser escrita

$$L_1^2 \nabla^2 n_1(\underline{r}, t) - n_1(\underline{r}, t) + \frac{\xi_1^k \omega}{\xi_2^p} n_2(\underline{r}, t) + \xi_1 S(\underline{r}, t) = \xi_1 \frac{\partial n_1(\underline{r}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

onde o primeiro termo representa o número líquido de neutrons rápidos que entram por segundo, através do processo de difusão, em um centímetro cúbico do meio; o segundo termo dá conta do desaparecimento de neutrons do grupo rápido por transferência para o grupo térmico (a absorção de neutrons rápidos pelo moderador pode ser desprezada devido à pequenez da correspondente seção de choque nessa região de energia); o terceiro termo é o de produção de neutrons rápidos por fissões térmicas; o quarto representa a fonte externa; e o segundo membro da equação representa a variação temporal da densidade de neutrons rápidos.

Para o grupo de neutrons térmicos, tem-se

$$L_2^2 \nabla^2 n_2(\underline{r}, t) - n_2(\underline{r}, t) + \frac{\xi_2^p}{\xi_1} n_1(\underline{r}, t) = \xi_2 \frac{\partial n_2(\underline{r}, t)}{\partial t} \quad (4)$$

onde a terceira parcela corresponde à produção de neutrons tér

nicos por transferência de neutrons do grupo rápido e os demais têm significado análogo aos correspondentes da equação anterior.

As soluções  $n_1(\underline{r}, t)$  e  $n_2(\underline{r}, t)$  devem satisfazer a duas condições de contorno:

a) condição temporal (ou inicial):

$$[n_1(\underline{r}, t)]_{t=0} = A \quad , \quad [n_2(\underline{r}, t)]_{t=0} = B \quad (5)$$

com A e B dados; em particular, por simplicidade, tomaremos  $A = B = 0$ ;

b) condição espacial

$$[n_1(\underline{r}, t)]_r = [n_2(\underline{r}, t)]_r = 0 \quad (6)$$

A forma das equações (3) e (4) e das condições de contorno sugerem, para solução do problema, o emprêgo da transformada de Laplace e o desenvolvimento da distribuição espacial dos neutrons em termos de um sistema completo de autofunções.

No que segue, representaremos sistematicamente por  $\bar{f}(s)$  a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$ . Como é sabido, valem as relações

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (7)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \bar{f}(s) e^{st} ds \quad (8)$$

onde Br denota o contorno de Bromwich, definido pela reta  $\dots (c - i\infty, c + i\infty)$  situada à direita de todos os polos da função integranda.

Tomando a transformada de Laplace das equações (3) e (4), obtemos

$$L_2^2 \nabla^2 \bar{n}_1(\underline{r}, s) - \bar{n}_1(\underline{r}, s) + \frac{\bar{\sigma}_1 k_{\infty}}{\bar{\sigma}_2 p} \bar{n}_2(\underline{r}, s) + \bar{\sigma}_1 \bar{S}(\underline{r}, s) = \bar{\sigma}_1 s \bar{n}_1(\underline{r}, s) \quad (9)$$

$$L_2^2 \nabla^2 \bar{n}_2(\underline{r}, s) - \bar{n}_2(\underline{r}, s) + \frac{\bar{\sigma}_2 p}{\bar{\sigma}_1} \bar{n}_1(\underline{r}, s) = \bar{\sigma}_2 s \bar{n}_2(\underline{r}, s) \quad (10)$$

Podemos

$$\bar{n}_i(\underline{r}, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\underline{r}) \bar{f}_{in}(s) \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

$$\bar{S}(\underline{r}, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\underline{r}) \bar{g}_n(s) \quad (12)$$

onde as  $\varphi_n(\underline{r})$  constituem um sistema ortonormal completo de autofunções da equação

$$\nabla^2 \varphi_n(\underline{r}) + \omega_n^2 \varphi_n(\underline{r}) = 0 \quad (13)$$

relativas à condição de contorno espacial

$$[\varphi_n(\underline{r})]_r = 0 \quad (14)$$

Levando em conta as expressões (11) a (14), obtemos de (9) e (10)

$$(\phi_{1n} + \bar{\sigma}_1 s) \bar{f}_{1n}(s) - \frac{\bar{\sigma}_1 k_{\infty}}{\bar{\sigma}_2 p} \bar{f}_{2n}(s) = \bar{\sigma}_1 \bar{g}_n(s) \quad (15)$$

$$-\frac{\bar{\sigma}_2 p}{\bar{\sigma}_1} \bar{f}_{1n}(s) + (\phi_{2n} + \bar{\sigma}_2 s) \bar{f}_{2n}(s) = 0 \quad (16)$$

onde

$$\phi_{in} = 1 + L_i^2 \omega_n^2 \quad (i = 1, 2) \quad (17)$$

Resulta, de imediato,

$$\bar{f}_{1n}(s) = \frac{\bar{\sigma}_1 (\phi_{2n} + \bar{\sigma}_2 s) \bar{g}_n(s)}{\Delta(s)} \quad (18)$$

$$\bar{f}_{2n}(s) = \frac{\bar{\sigma}_2 p \bar{g}_n(s)}{\Delta(s)} \quad (19)$$

sendo

$$\Delta(s) = (\phi_{1n} + \tilde{c}_1 s)(\phi_{2n} + \tilde{c}_2 s) - k_{\infty} \quad (20)$$

As soluções serão dadas, então, por

$$n_1(\underline{r}, t) = \frac{\tilde{c}_1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\underline{r}) \int_{Br} \frac{(\phi_{2n} + \tilde{c}_2 s) \tilde{g}_n(s)}{\Delta(s)} e^{st} ds \quad (21)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = p \frac{\tilde{c}_2}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\underline{r}) \int_{Br} \frac{\tilde{g}_n(s)}{\Delta(s)} e^{st} ds \quad (22)$$

Especificada a fonte externa de neutrons rápidos, as expressões (21) e (22) permitir-nos-ão determinar  $n_1(\underline{r}, t)$  e  $n_2(\underline{r}, t)$ . Consideraremos primeiro o caso de uma fonte unitária, puntual e instantânea

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}') \delta(t - t') \quad (23)$$

do qual os demais se podem obter por superposição. Esse procedimento, em outros termos, consistirá em determinar as funções de Green

$$n_1(\underline{r}, t; \underline{r}', t') \quad \text{e} \quad n_2(\underline{r}, t; \underline{r}', t'),$$

a partir das quais obteremos, para uma fonte  $S(\underline{r}, t; \underline{r}', t')$  qualquer,

$$n_i(\underline{r}, t) = \iint n_i(\underline{r}, t; \underline{r}', t') S(\underline{r}, t; \underline{r}', t') d\underline{r}' dt' \quad (24)$$

—oo0oo—

### III - FONTE PUNTUAL E INSTANTÂNEA DE NEUTRONS

Das equações (12) e (23) segue-se

$$\tilde{g}_n(s) = e^{-st'} \varphi_n^*(\underline{r}'). \quad (25)$$

Substituindo em (21) e (22), resulta

$$n_1(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{\tilde{c}_1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}') \int_{Br} \frac{(\phi_{2n} + \tilde{c}_2 s) e^{s(t-t')}}{\Delta(s)} ds \quad (26)$$

$$n_2(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{p\tilde{c}_2}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}') \int_{Br} \frac{e^{s(t-t')}}{\Delta(s)} ds \quad (27)$$

Introduzimos uma nova variável,  $z$ , pela relação  $s = iz$ , o que equivale a uma rotação de  $90^\circ$  do plano complexo. O contorno de Bromwich, definido pela reta  $(c - i\infty, c + i\infty)$ , transforma-se na reta  $(-\infty - ic, \infty - ic)$ , tal que todos os polos da função integranda ficam acima dela. Em termos de  $z$ , as integrais de (26) e (27) tornam-se

$$I_1 = i \int_{-\infty - ic}^{\infty - ic} \frac{(\phi_{2n} + i\tilde{c}_2 z) e^{i(t-t')z}}{\Delta(iz)} dz \quad (28)$$

$$I_2 = i \int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} \frac{e^{i(t-t')z}}{\Delta(iz)} dz \quad (29)$$

com

$$\Delta(iz) = (\phi_{1n} + i\zeta_1 z)(\phi_{2n} + i\zeta_2 z) - k_\infty \quad (30)$$

Verifica-se facilmente que

$$\Delta(iz) = -\zeta_1 \zeta_2 (z - z_n^i)(z - z_n^{\prime\prime}) \quad (31)$$

com  $z_n^i$  e  $z_n^{\prime\prime}$  números imaginários puros dados por

$$z_n^i = i \alpha_n^i \quad (32)$$

$$z_n^{\prime\prime} = i \alpha_n^{\prime\prime}, \quad (33)$$

sendo

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left\{ (\mu_n + \nu_n) \pm [(\mu_n + \nu_n)^2 + 4\mu_n \nu_n k_e]^{1/2} \right\} \quad (34)$$

Convencionaremos que a  $\alpha_n^i$  corresponde o sinal positivo e a  $\alpha_n^{\prime\prime}$  o sinal negativo do radical. Na expressão (34),

$$\mu_n = \frac{\phi_{1n}}{\zeta_1} = \frac{1}{l_{rn}}, \quad \nu_n = \frac{\phi_{2n}}{\zeta_2} = \frac{1}{l_{tn}} \quad (35)$$

$$k_e = k - 1 = \frac{k_\infty}{\phi_{1n} \phi_{2n}} - 1; \quad (36)$$

$\mu_n$  e  $\nu_n$  são, respectivamente, o inverso do tempo de moderação dos neutrons rápidos e do tempo de vida dos neutrons térmicos, para o modo  $n$ , corrigidos êsses tempos para as dimensões finitas do meio;  $k_e$  ( $k$  excesso) depende da composição e da geometria do meio multiplicador e seu significado físico por-se-á transparente nas considerações que seguem.

Podem configurar-se três situações distintas quanto

à posição dos polos sobre o eixo imaginário do plano complexo:

- 1ª) se  $k_e < 0$ ,  $z_n^i$  e  $z_n^{\prime\prime}$  estarão sobre a parte superior do eixo imaginário;
- 2ª) se  $k_e = 0$ ,  $z_n^i$  estará ainda sobre o semi-eixo imaginário superior, mas  $z_n^{\prime\prime} = 0$ ;
- 3ª) se  $k_e > 0$ ,  $z_n^i$  continuará sobre o semi-eixo imaginário superior, mas  $z_n^{\prime\prime}$  estará sobre o semi-eixo imaginário inferior.

Pela inspeção das equações (28) e (29), podemos ver a que situação física corresponde cada um desses três casos. No primeiro caso, obteremos solução decrescente com o tempo (meio sub-crítico); ao segundo, corresponderá estado estacionário, a menos de efeitos transitórios iniciais (meio crítico); para o último caso, a solução será crescente com o tempo (meio super-crítico).

A integração pelo método dos resíduos das expressões (26) e (27) conduz aos resultados seguintes:

1ª) Meio sub-crítico:

$$n_1(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = H(t - t') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i - \alpha_n^{\prime\prime}} \cdot \left[ (\nu_n - \alpha_n^{\prime\prime}) e^{-\alpha_n^{\prime\prime}(t-t')} - (\nu_n - \alpha_n^i) e^{-\alpha_n^i(t-t')} \right] \quad (37)$$

$$n_2(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = H(t - t') \frac{p}{\zeta_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i - \alpha_n^{\prime\prime}} \cdot \left[ e^{-\alpha_n^{\prime\prime}(t-t')} - e^{-\alpha_n^i(t-t')} \right] \quad (38)$$

com  $\alpha_n^i$  e  $\alpha_n^{\prime\prime}$  positivos.

2ª) Meio crítico:

$$n_1(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = H(t - t') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i} \cdot \left[ \vartheta_n - (\vartheta_n - \alpha_n^i) e^{-\alpha_n^i(t-t')} \right] \quad (39)$$

$$n_2(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = H(t - t') \frac{p}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i} \cdot \left[ 1 - e^{-\alpha_n^i(t-t')} \right] \quad (40)$$

sendo

$$\alpha_n^i = \mu_n + \vartheta_n.$$

3º) Meio super-crítico:

$$n_1(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = H(t - t') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i + |\alpha_n^{\text{II}}|} \cdot \left[ (\vartheta_n + |\alpha_n^{\text{II}}|) e^{|\alpha_n^{\text{II}}|(t-t')} - (\vartheta_n - \alpha_n^i) e^{-\alpha_n^i(t-t')} \right] \quad (41)$$

$$n_2(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = H(t - t') \frac{p}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i + |\alpha_n^{\text{II}}|} \cdot \left[ e^{|\alpha_n^{\text{II}}|(t-t')} - e^{-\alpha_n^i(t-t')} \right] \quad (42)$$

onde  $\alpha_n^i > 0$  e  $\alpha_n^{\text{II}} < 0$ .

Nesses resultados,  $H(t - t')$  é a função ressalto, de Heavyside, definida por

$$H(t - t') = \begin{cases} 1 & \text{se } t > t' \\ 0 & \text{se } t < t' \end{cases} \quad (43)$$

A particularização para meio moderador faz-se, obviamente, pondo  $p = 1$  e  $k_e = -1$  nas equações (37) e (38). Assim, para fonte instantânea de intensidade  $S_0$  colocada na origem,

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{S_0}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(0)}{\vartheta_n - \mu_n} \left[ e^{-\mu_n t} - e^{-\vartheta_n t} \right] \quad (44).$$

—oo0oo—

#### IV - OUTROS TIPOS DE FONTES DE NEUTRONS

A extensão dos resultados obtidos anteriormente ao caso de uma fonte de forma qualquer no espaço e no tempo pode ser feita através do princípio de superposição, expresso na fórmula (24). Trataremos a seguir de dois casos que podem apresentar interesse do ponto de vista experimental: fonte pontual constante no tempo e fonte pontual com variação periódica no tempo.

Para uma fonte de intensidade constante podemos escrever, levando em conta (43),

$$S(\underline{r}', t') = S_0 \delta(\underline{r}' - \underline{r}_0) [H(t') - H(t' - t_0)], \quad (45)$$

isto é, a fonte situada no ponto  $\underline{r}_0$  está "acesa" desde o instante  $t' = 0$  até o instante  $t' = t_0$ .

Para a densidade de neutrons térmicos em meio sub-crítico resulta, para  $t < t_0$ ,

$$n_2(\underline{r}, t) = p \frac{S_0}{\epsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}_0)}{\alpha_n' - \alpha_n''} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_n''} (1 - e^{-\alpha_n'' t}) - \frac{1}{\alpha_n'} (1 - e^{-\alpha_n' t}) \right] \quad (46)$$

e, para  $t > t_0$ ,

$$n_2(\underline{r}, t) = p \frac{S_0}{\epsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}_0)}{\alpha_n' - \alpha_n''} \left[ \frac{1}{\alpha_n''} (e^{\alpha_n'' t_0} - 1) \cdot e^{-\alpha_n'' t} - \frac{1}{\alpha_n'} (1 - e^{-\alpha_n' t}) \right]$$

$$- \frac{1}{\omega_n^i} (e^{\alpha_n^i t_0} - 1) e^{-\alpha_n^i t} \quad (47)$$

Os resultados completos, para os diversos casos, en con tr am - se ta bu la dos em ap ê nd ic e a ê s s e tr ab al h o.

Consideremos agora uma fonte periódica no tempo. Po mos

$$S(\underline{r}', t') = S_0 \delta(\underline{r}' - \underline{r}_0) f(t') \quad (48)$$

onde  $f(t')$ , que descreve o comportamento temporal da fonte, sup õe - se de s en vol v í ve l em s é rie de Fourier:

$$f(t') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0 t'} \quad (49)$$

A integração da equação (22) dá, para êsse tipo de fonte, em meio sub-crítico,

$$n_2(\underline{r}, t) = p \frac{S_0}{\xi_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}_0)}{\alpha_n^i - \alpha_n^{\text{II}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0 t} \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha_n^{\text{II}} + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^{\text{II}} + im\omega_0)t} \right] - \frac{1}{\alpha_n^i + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^i + im\omega_0)t} \right] \right\} \quad (50)$$

e referimos o leitor ao Apêndice para os demais resultados. No caso matematicamente simples de variação senoidal, obteríamos de (50)

$$n_2(\underline{r}, t) = p \frac{S_0}{\xi_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}_0)}{\alpha_n^i - \alpha_n^{\text{II}}} e^{i\omega_0 t} \left\{ \frac{1}{\alpha_n^{\text{II}} + i\omega_0} \cdot \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^{\text{II}} + i\omega_0)t} \right] - \frac{1}{\alpha_n^i + i\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^i + i\omega_0)t} \right] \right\} \quad (51)$$

## V - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As soluções obtidas nas páginas anteriores, para di fer en tes tip os de font es ex ter nas, ap re s en t am - se co m o s é ri es in fi ni tas. Cada um dos termos das séries corresponde a uma dis tri bu ição de neutrons no meio, sendo a densidade to tal dada pela super posi ção de tô das ess as dist in tas dist ri bu í ç õ es.

Dentre as soluções, aquelas relativas à fonte ins tan t â nea s ã o s ã o que ap re s en t am ma ior simp lic id ade em sua for ma; s ã o t amb é m as ma is im por tan tes, pois po de - se, a partir de las, obter tô das as de ma is (veja-se a expressão 24).

A maior parte dos trabalhos experimentais com fonte puls ada de neutrons env olve um meio mod er ador de neutrons e, portanto, neutrons tér m icos. Por isso, embora para sermos sig tem á t icos tenhamos registrado também as soluções para neutrons rá p í dos, limitaremos aqui nossa atenção à densidade de neutrons tér m icos. Do mesmo modo, não analisaremos meios su per - cr ít icos, pois que, pelo caráter divergente do processo mul tip lic ati vo que n ê les oc orre, são me nos freq ü en t e m en te uti li z ados para ex per i ê nc ias com font es puls adas.

Em meio multiplicador sub-crítico, a densidade de neutrons tér m icos é

$$n_2(\underline{r}, t) = p \frac{S_0}{\xi_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')} {\alpha_n^i - \alpha_n^{\text{II}}} \left[ e^{-\alpha_n^{\text{II}} t} - e^{-\alpha_n^i t} \right] \quad (52)$$

sendo  $\alpha_n^i$  e  $\alpha_n^{\text{II}}$  dados por (34). O aparecimento de dois conjuntos de constantes de tempo,  $\alpha_n^i$  e  $\alpha_n^{\text{II}}$ , prende-se ao fato de par tir mos de du as equ aç õ es difer en ci ais ac opl adas, (3) e (4), am bas de primeira ord em no tempo.

A expressão (34) pode ser escrita ainda

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (\mu_n + \nu_n) \left\{ 1 \pm \left[ 1 + \frac{4 \mu_n \nu_n k_e}{(\mu_n + \nu_n)^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (53)$$

Se a fração do radicando é muito menor que a unidade (como ocorre geralmente na prática), podemos escrever

$$\alpha_n^i \approx (\mu_n + \nu_n) + \frac{\mu_n \nu_n k_e}{\mu_n + \nu_n} \quad (54)$$

$$\alpha_n^n \approx - \frac{\mu_n \nu_n k_e}{\mu_n + \nu_n} \quad (55)$$

Mas

$$\frac{\mu_n \nu_n}{\mu_n + \nu_n} = \frac{1}{l_n} \quad (56)$$

onde  $l_n$  designa o tempo de vida de uma geração de neutrons e é igual à soma do tempo de moderação dos neutrons rápidos com o tempo de vida dos neutrons térmicos. Portanto

$$\alpha_n^i \approx (\mu_n + \nu_n) + \frac{k_e}{l_n} \quad (57)$$

$$\alpha_n^n \approx - \frac{k_e}{l_n} \quad (58)$$

Visto ser, nos casos de interesse,  $\alpha_n^n < \alpha_{n-1}^i$ , a exponencial em  $\alpha_n^n$  torna-se desprezível em relação à outra depois de um tempo suficientemente longo e a expressão (52) fica

$$n_2(\underline{r}, t) \approx p \frac{S_0}{\mathcal{G}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i} e^{-\alpha_n^i t} \quad (59)$$

Como  $\alpha_n^n$  cresce com o índice modal  $n$ , os modos mais elevados decairão mais rapidamente que o fundamental e éste

tornar-se-á, para condições experimentais convenientes, o termo dominante. Então

$$n_2(\underline{r}, t) \approx p \frac{S_0}{\mathcal{G}_1} \frac{\varphi_0(\underline{r}) \varphi_0^*(\underline{r}')}{\alpha_0^i} e^{-\alpha_0^i t} \quad (60)$$

Essa expressão mostra que, depois da rápida subida inicial produzida pela injeção instantânea, a densidade de neutrons decairá de maneira exponencial.

No caso de meio crítico tem-se (veja-se equação A-4)

$$n_2(\underline{r}, t) = p \frac{S_0}{\mathcal{G}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i} \left[ 1 - e^{-\alpha_n^i t} \right] \quad (61)$$

e, para o modo fundamental,

$$n_2(\underline{r}, t) \approx p \frac{S_0}{\mathcal{G}_1} \frac{\varphi_0(\underline{r}) \varphi_0^*(\underline{r}')}{\alpha_0^i} \left[ 1 - e^{-\alpha_0^i t} \right]; \quad (62)$$

isto é, após a injeção instantânea a densidade de neutrons tende assintoticamente a um valor constante não nulo.

No caso de moderador puro ( $k_e = -1$ ) teríamos em (60)

$$\alpha_0^n = \nu_0 \quad (63)$$

e a densidade de neutrons diminuiria no tempo com um tempo de relaxação dado por  $1/\nu_0$ , sendo

$$\nu_0 = \frac{1 + L_2^2 \omega_0^2}{\mathcal{G}_2} = \frac{1}{\mathcal{G}_2} + D_2 \omega_0^2 \quad (64)$$

Os resultados de uma experiência típica estão representados na figura 2 (6). Como fonte de neutrons foi utilizado um pedaço de urânio sobre o qual incidia o feixe pulsado de raios gama proveniente de um betatron. Essa fonte achava-se colocada junto a um bloco cilíndrico de "plexiglass", que era o material em estudo. O detector de neutrons consistia num cristal de iodeto de lítio. Os pulsos provenientes do detector e-

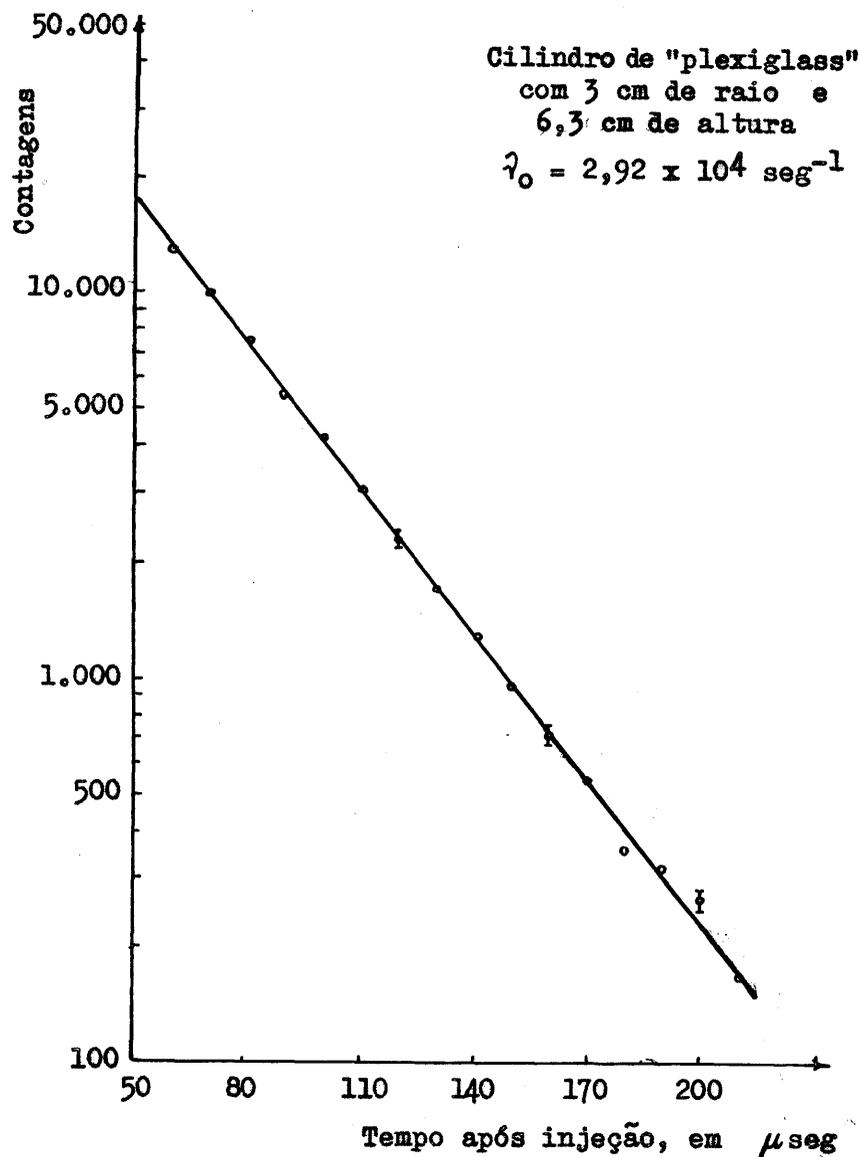
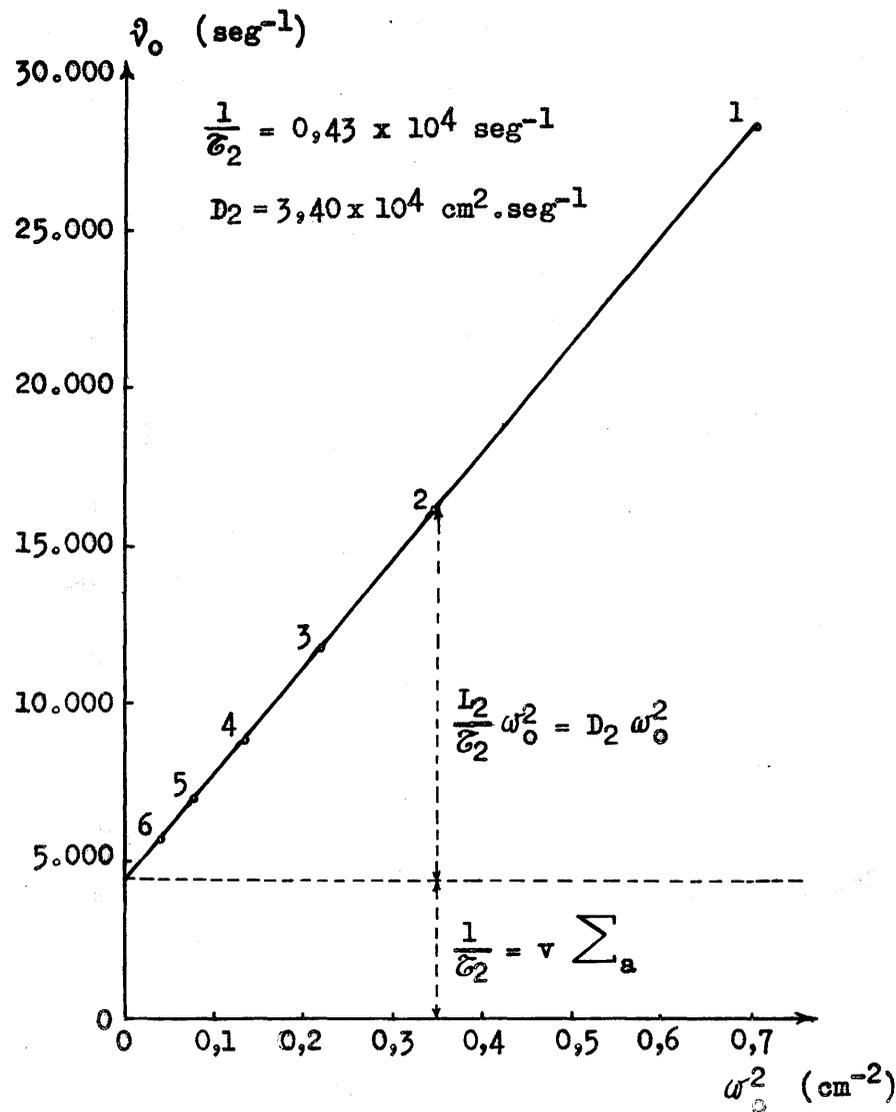


Gráfico da atenuação da  
densidade de neutrons térmicos com o tempo.



Variação de  $\lambda_0$  com as dimensões dos cilindros de "plexiglass"  
Dimensões correspondentes aos pontos assinalados:

- 1) R = 13,97 cm, H = 27,94 cm; 4) 6,10 cm, 11,94 cm;
- 2) 10,16 cm, 19,25 cm; 5) 4,45 cm, 9,65 cm;
- 3) 7,62 cm, 14,73 cm; 6) 3,05 cm, 6,35 cm.

ram encaminhados a um analisador de 20 canais. A largura de cada canal era de 10 microsegundos e o primeiro deles era aberto 50 microsegundos depois da injeção de raios  $\gamma$  no urânio.

Foi realizada uma série de medidas com cilindros de diferentes tamanhos e os resultados finais estão representados na figura 3.16), que dá o gráfico de  $\rho_0$  em função de  $\omega_0^2$ . O valor de  $\rho_0$  para dado  $\omega_0^2$  é determinado pela soma de duas parcelas: a absorção de neutrons pelo moderador (constante em relação a  $\omega_0^2$ ) e a fuga de neutrons pela superfície (proporcional a  $\omega_0^2$ ). A inclinação da reta dá o valor de  $D_2$  (\*), a intersecção com o eixo das ordenadas o valor de

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \nu \sum_a$$

e a intersecção com o eixo das abscissas o de  $L_2^2$ .

Como vimos na equação (60), para um meio multiplicador sub-crítico a variação no tempo, correspondente ao modo fundamental da densidade, é governada por  $\alpha_0^n$ , cuja expressão é (ver equação 34)

$$\alpha_0^n = \frac{1}{2} \left\{ (\mu_0 + \nu_0) - [(\mu_0 + \nu_0)^2 + 4 \mu_0 \nu_0 k_e]^{1/2} \right\} \quad (65)$$

Verifica-se, de imediato, que para dimensões tais que  $k_e = -0,5$ , resulta

$$\alpha_0^n = \nu_0; \quad (66)$$

portanto, a variação da densidade de neutrons, no modo fundamental, ocorre como se não houvesse material fissionável presente.

Um raciocínio qualitativo permite prever o andamento de  $\alpha_0^n$  em função de  $\omega_0^2$  5). Para um dado  $\omega_0^2$ , o valor da constante de tempo será determinado por quatro parcelas.

(\*) Em certos casos há uma leve curvatura devida ao resfriamento por difusão:  $D_2$  deve decrescer quando  $\omega_0^2$  aumenta devido à predominância da fuga de neutrons de maior energia através da superfície do meio.

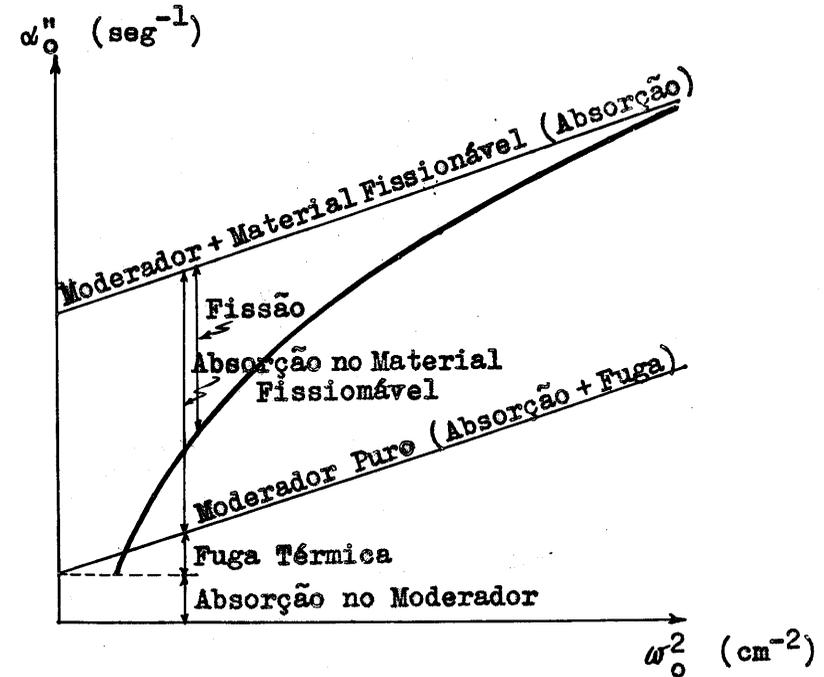


Fig. 4 5)

Variação de  $\alpha_0^n$  com as dimensões de um meio multiplicador

Consideremos primeiro o moderador puro: haverá desaparecimento de neutrons térmicos por absorção (independente de  $\omega_0^2$ ) e por fuga (proporcional a  $\omega_0^2$ ). O acréscimo de material fissionável ao moderador trará duas contribuições adicionais: absorção pelo combustível (independente de  $\omega_0^2$ ) e criação de neutrons por fissão (decrecente com  $\omega_0^2$  devido à maior fuga de neutrons rápidos). Essas diferentes contribuições estão assinaladas na figura 4, onde se pode notar também o ponto de intersecção das curvas correspondentes ao moderador puro e ao meio multiplicador.

Queremos assinalar, finalmente, que as fontes periódicas também têm sido utilizadas para o estudo da variação da densidade de neutrons térmicos em meios multiplicadores ou puramente moderadores 5). Tem-se usado, por exemplo, ondas quadradas de frequência variável. Os resultados que estabelecemos para uma fonte do tipo descrito pela equação (48) são suscetíveis de particularização para ondas quadradas ou quaisquer outros tipos de fontes periódicas que apresentem interesse.

—oo0oo—

## VI - CONCLUSÃO

Estabelecemos no presente trabalho os resultados da teoria de dois grupos para a distribuição espacial e a variação temporal da densidade de neutrons quando são injetados neutrons rápidos num meio multiplicador ou moderador por diferentes tipos de fontes externas. Foram obtidas soluções para fonte instantânea, fonte constante e fonte periódica, abrangendo assim os casos de maior interesse.

A comparação dos resultados teóricos com os dados experimentais pode proporcionar informações sobre as propriedades neutrônicas da matéria e sobre a validade do modelo teórico empregado. Na literatura que compulsamos, encontramos apenas um artigo 10) no qual se faz referência à comparação entre as predições da teoria de dois grupos e os resultados experimentais com fonte pulsada. Parece-nos ser esse assunto ainda insuficientemente explorado.

Diversos refinamentos importantes necessitam ser feitos ao tratamento aqui apresentado. Um deles consiste na inclusão dos efeitos dos neutrons atrasados, que exercem papel relevante no comportamento dinâmico dos meios multiplicadores. Outro aspecto a ser considerado é o da presença de refletores de neutrons ou de outras inhomogeneidades no meio.

Finalmente, parece-nos interessante também tentar obter formas de soluções mais rapidamente convergentes no tempo do que as que resultam dos usuais desenvolvimentos em séries de autofunções.

—oo0oo—

## APÊNDICE

O tratamento (por teoria de dois grupos) da difusão em meio multiplicador de neutrons injetados por fonte externa conduz aos seguintes resultados:

### A - Fonte Instantânea

1) Meio sub-crítico:

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n' - \alpha_n''} \cdot \left[ (\varrho_n - \alpha_n'') e^{-\alpha_n'' t} - (\varrho_n - \alpha_n') e^{-\alpha_n' t} \right] \quad (A-1)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{\rho S_0}{\beta_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n' - \alpha_n''} \left[ e^{-\alpha_n'' t} - e^{-\alpha_n' t} \right] \quad (A-2)$$

2) Meio crítico:

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n'} \left[ \varrho_n - (\varrho_n - \alpha_n') e^{-\alpha_n' t} \right] \quad (A-3)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{\rho S_0}{\beta_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n'} \left[ 1 - e^{-\alpha_n' t} \right] \quad (A-4)$$

3) Meio super-crítico:

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i + |\alpha_n^i|} \cdot \left[ (\gamma_n + |\alpha_n^i|) e^{|\alpha_n^i|t} - (\gamma_n - \alpha_n^i) e^{-\alpha_n^i t} \right] \quad (A-5)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\mathcal{E}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i + |\alpha_n^i|} \left[ e^{|\alpha_n^i|t} - e^{-\alpha_n^i t} \right] \quad (A-6)$$

**B - Fonte Constante**

1) Meio sub-crítico

a)  $t < t_0$

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i - \alpha_n^i} \cdot \left[ \frac{\gamma_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) - \frac{\gamma_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) \right] \quad (A-7)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\mathcal{E}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i - \alpha_n^i} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) - \frac{1}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) \right] \quad (A-8)$$

b)  $t > t_0$

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i - \alpha_n^i} \left[ \frac{\gamma_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i} \right]$$

$$\cdot (e^{\alpha_n^i t_0} - 1) e^{-\alpha_n^i t} - \frac{\gamma_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i} (e^{\alpha_n^i t_0} - 1) e^{-\alpha_n^i t} \quad (A-9)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\mathcal{E}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i - \alpha_n^i} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_n^i} (e^{\alpha_n^i t_0} - 1) e^{-\alpha_n^i t} - \frac{1}{\alpha_n^i} (e^{\alpha_n^i t_0} - 1) e^{-\alpha_n^i t} \right] \quad (A-10)$$

2) Meio crítico

a)  $t < t_0$

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n(\underline{r}')}{\alpha_n^i} \cdot \left[ \gamma_n t - \frac{\gamma_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) \right] \quad (A-11)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\mathcal{E}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n(\underline{r}')}{\alpha_n^i} \left[ t - \frac{1}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) \right] \quad (A-12)$$

b)  $t > t_0$

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n(\underline{r}')}{\alpha_n^i} \cdot \left[ \gamma_n t_0 - \frac{\gamma_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) \right] \quad (A-13)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\mathcal{E}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n(\underline{r}')}{\alpha_n^i} \left[ t_0 - \frac{1}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) \right] \quad (A-14)$$

3) Meio super-crítico

a)  $t < t_0$

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i + |\alpha_n^n|} \left[ \frac{\nu_n + |\alpha_n^n|}{|\alpha_n^n|} \cdot (e^{|\alpha_n^n|t} - 1) - \frac{\nu_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) \right] \quad (A-15)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\mathcal{E}_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i + |\alpha_n^n|} \cdot \left[ \frac{1}{|\alpha_n^n|} (e^{|\alpha_n^n|t} - 1) - \frac{1}{\alpha_n^i} (1 - e^{-\alpha_n^i t}) \right] \quad (A-16)$$

b)  $t > t_0$

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i + |\alpha_n^n|} \left[ \frac{\nu_n + |\alpha_n^n|}{|\alpha_n^n|} (1 - e^{-|\alpha_n^n|t_0}) \cdot e^{|\alpha_n^n|t} - \frac{\nu_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i} (e^{\alpha_n^i t_0} - 1) e^{-\alpha_n^i t} \right] \quad (A-17)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\mathcal{E}_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i + |\alpha_n^n|} \left[ \frac{1}{|\alpha_n^n|} \cdot (1 - e^{-|\alpha_n^n|t_0}) e^{|\alpha_n^n|t} - \frac{1}{\alpha_n^i} (e^{\alpha_n^i t_0} - 1) e^{-\alpha_n^i t} \right] \quad (A-18)$$

C - Fonte Periódica

1) Meio sub-crítico:

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i - \alpha_n^n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0 t} \cdot \left\{ \frac{\nu_n - \alpha_n^n}{\alpha_n^n + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^n + im\omega_0)t} \right] - \frac{\nu_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^i + im\omega_0)t} \right] \right\} \quad (A-19)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\mathcal{E}_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i - \alpha_n^n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0 t} \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha_n^n + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^n + im\omega_0)t} \right] - \frac{1}{\alpha_n^i + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^i + im\omega_0)t} \right] \right\} \quad (A-20)$$

2) Meio crítico

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0 t} \cdot \left\{ \frac{\nu_n}{im\omega_0} (1 - e^{-im\omega_0 t}) - \frac{\nu_n - \alpha_n^i}{\alpha_n^i + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^i + im\omega_0)t} \right] \right\} \quad (A-21)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\mathcal{E}_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n^i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0 t} \cdot \left\{ \frac{1}{im\omega_0} (1 - e^{-im\omega_0 t}) - \frac{1}{\alpha_n^i + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n^i + im\omega_0)t} \right] \right\} \quad (A-22)$$

3) Meio super-crítico

$$n_1(\underline{r}, t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n' + |\alpha_n''|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0 t} \cdot \left\{ \frac{\varphi_n + |\alpha_n''|}{im\omega_0 - |\alpha_n''|} \left[ 1 - e^{(|\alpha_n''| - im\omega_0)t} \right] - \frac{(\varphi_n - \alpha_n')}{\alpha_n' + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n' + im\omega_0)t} \right] \right\} \quad (A-23)$$

$$n_2(\underline{r}, t) = \frac{pS_0}{\xi_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^*(\underline{r}')}{\alpha_n' + |\alpha_n''|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0 t} \cdot \left\{ \frac{1}{im\omega_0 - |\alpha_n''|} \left[ 1 - e^{(|\alpha_n''| - im\omega_0)t} \right] - \frac{1}{\alpha_n' + im\omega_0} \left[ 1 - e^{-(\alpha_n' + im\omega_0)t} \right] \right\} \quad (A-24)$$

—oo0oo—

LISTA DE SÍMBOLOS

- a, b, c - dimensões lineares
- A, B, C - constantes
- Br - contórno de Bromwich
- C<sub>m</sub> - coeficiente do desenvolvimento em série de Fourier
- D<sub>1</sub>, D<sub>2</sub> - coeficiente de difusão para neutrons rápidos e para neutrons térmicos, respectivamente
- $\bar{f}(s)$ ,  $\bar{g}(s)$  - transformadas de Laplace das funções f(t) e g(t)
- H - altura de um cilindro
- H - função ressalto, de Heavyside
- k<sub>∞</sub> - fator de multiplicação infinito
- k - fator de multiplicação efetivo
- k<sub>e</sub> - k excesso
- l<sub>rn</sub> - tempo de moderação dos neutrons rápidos no modo n
- l<sub>tn</sub> - tempo de vida dos neutrons térmicos no modo n
- l<sub>n</sub> - tempo de vida de uma geração de neutrons
- L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> - comprimento de difusão para neutrons rápidos e para neutrons térmicos, respectivamente
- n<sub>1</sub>, n<sub>2</sub> - densidade de neutrons rápidos e de neutrons térmicos, respectivamente
- p - probabilidade de escape do neutron, à captura na região de ressonância
- $\underline{r}$ ,  $\underline{r}'$  - vetor posição

- r - componente radial das coordenadas cilíndricas
- R - raio de um cilindro
- s - variável da transformada de Laplace
- $S_0$  - intensidade da fonte de neutrons
- S - número de neutrons produzidos pela fonte exter na por  $\text{cm}^3$  e por seg.
- t, t',  $t_0$  - tempo
- v - velocidade média dos neutrons térmicos
- x, y, z - coordenadas cartesianas
- z,  $z'$ ,  $z''$  - variável complexa
- $\alpha_n, \alpha'_n, \alpha''_n$  - constante de tempo
- $\int$  - inverso do comprimento de relaxação
- $\delta$  - função delta de Dirac
- $\nabla^2$  - operador laplaciano
- $\Delta(s), \Delta(iz)$  - definidos nas equações (20) e (30)
- $\varphi_n$  - autofunções normalizadas da equação de onda
- $\varphi_n^*$  - complexa conjugada de  $\varphi_n$
- $\phi_{1n}, \phi_{2n}$  - definidas na equação (17)
- $\mu_n$  - inverso do tempo de moderação dos neutros rápi dos no modo n, para meio finito
- $\nu_n$  - inverso do tempo de vida dos neutrons térmicos no modo n, para meio finito
- $\omega_n^2$  - autovalores da equação de onda
- $\sigma$  - superfície externa de um meio, incluindo a dis tância extrapolada
- $\sum_a$  - secção de choque macroscópica de absorção de neutrons térmicos
- $\tau_1$  - tempo de moderação dos neutrons rápidos em meio infinito
- $\tau_2$  - tempo de vida dos neutrons térmicos em meio in finito.

### A G R A D E C I M E N T O S

Registramos nossos agradecimentos aos Professores Marcos Moshinsky, Gerhard Jacob e, de maneira especial, ao Professor Paulo Saraiva de Toledo, por úteis discussões ao longo da realização desse trabalho.

Agradecemos também ao Engenheiro Haroldo Fróes de A zambuja, pela realização de cálculos numéricos.

—oo0oo—

## REFERÊNCIAS

- 1) - GLASSTONE, S.; EDLUND, M.C. - The Elements of Nuclear Reactor Theory - D. Van Nostrand Co. Inc., 1952; pg.121.
- 2) - Idem; pg. 104.
- 3) - ANTONOV, A.V.; ISAKOFF, A.I.; MURIN, I.D.; NEUPOCAYEV, B.A.; FRANK, I.M.; SHAPIRO, F.L.; SHTRANICH, I.V. - A Study of Neutron Diffusion in Beryllium, Graphite and Water by the Impulse Method - Peaceful Uses of Atomic Energy: Proceedings of the International Conference at Geneva, August, 1955, Vol. 5, pg. 3; published by the United Nations.
- 4) - HUGHES, D.J. - Pile Neutron Research - Addison Wesley Publishing Co. Inc., 1953; pag. 219.
- 5) - KEEPIN, G.R. - Pulsed Neutron Techniques - LAMS - 2215 (TID - 4500, 13th Ed. Rev.), 1958.
- 6) - VON DARDEL, G. - The Interactions of Neutrons with Matter Studied with a Pulsed Neutron Source - Transactions of the Royal Institute of Technology, 75, (1954); Stockholm.
- 7) - VON DARDEL, G.; SJÖSTRAND, N.G. - Diffusion Parameters of Thermal Neutrons in Water - Phys. Rev., 96, pg. 1245 (1954).
- 8) - GALLONE, S.; SALVETTI, C. - Metodi Simbolici di Calcolo Relativi alla Moltiplicazione dei Neutroni - Nuovo Cimento, 7, 482 (1950).
- 9) - GALLONE, S.; SALVETTI, C. - Influenza della Funzione di Sorgente sulla Distribuzione dei Neutroni Termici in un Mezzo Moltiplicante - Nuovo Cimento, 7, 626 (1950).

- 0) - GALLONE, S.; SALVETTI, C. - Influenza del Cammino Libero Medio dei Neutroni Veloci sulla Distribuzione dei Neutroni Termici nei Mezzi Moltiplicanti - Nuovo Cimento, 8, 960 (1951).
- 1) - GALLONE, S.; ORSONI, L.; SALVETTI, C. - Sorgenti di Neutroni Variabili nel Tempo in Mezzi Moltiplicanti - Nuovo Cimento, 7, 901 (1950).
- 2) - JACOB, G. - On the Diffusion of Neutrons in Moderating and Multiplying Media with a Periodical Neutron Source - Peaceful Uses of Atomic Energy: Proceedings of the Second International Conference at Geneva, September, 1958, Vol. 16, pg. ; Published by the United Nations.
- 3) - RAMANNA, R.; MANI, G.S.; IYENGAR, P.K.; IYENGAR, S.B.D.; JOSHI, B. - On the Determination of Diffusion and Slowing Down Constants of Ordinary Water and Beryllium Oxide Using a Pulsed Neutron Source - Peaceful Uses of Atomic Energy: Proceedings of the International Conference at Geneva, August, 1955, Vol. 5, pg. 24; Published by the United Nations.
- 4) - SIMMONS, B.E.; KING, J.S. - A Pulsed Neutron Technique for Reactivity Determination - Nucl. Sc. Eng. 3, 595 (1958).
- 5) - WEINBERG, A.M.; WIGNER, E.P. - The Physical Theory of Nuclear Chain Reactors - The University of Chicago Press, 1958; pg. 513.
- 6) - SEEMAN, K.W. - Pulsed Neutron Measurements on Plexiglass - Presented at the Annual Meeting of The American Nuclear Society, June 15, 1959.